Exercice 1 : Calculer, en fonction de $\hat{f}$, les transformées de Fourier des fonctions suivantes

$\overline{f(t)}$, $f(-t)$, $f(t-a)$, $f(at)$ ($a > 0$) , $e^{iat} f(t)$.

Solution :

Notons F = $\hat{f}$ la transformée de Fourier de f, G la transformée de Fourier demandée.

a) $G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\overline{f(t)}.dt = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t).dt} = \overline{F(-x)}$.

b) $G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(-t).dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixu} f(u).du = F(-x)$ (chgt de var u = – t)

c) $G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t-a).dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix(u+a)} f(u).du = e^{-ixa} F(x)$ (chgt de var u = t – a)

d) $G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(at).dt = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu/a} f(u).du = \frac{1}{a} F(\frac{x}{a})$ (chgt de var u = at)

e) $G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}e^{iat} f(t).dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(x-a)t} f(t).dt = F(x-a)$.

Exercice 2 : Transformée de Fourier d'une gaussienne.

On se donne $a > 0$. Calculer la transformée de Fourier de e^{-at^2} .

Solution : La fonction e^{-at^2} est intégrable et à décroissance rapide.

En vertu de ce qui précède, $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}e^{-at^2}.dt$ est définie, C^∞ sur **R**, et tend vers 0 en $\pm\infty$.

Reste à calculer F(x).

1ère méthode : équation différentielle.

$F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} -ite^{-ixt}e^{-at^2}.dt$ = (IPP) = $-\frac{x}{2a} F(x)$.

C'est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1.

Comme $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}.dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, $F(x) = F(0).\, e^{-\frac{x^2}{4a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{x^2}{4a}}$.

2ème méthode : développement en série. Formellement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}e^{-at^2}.dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-ixt)^n}{n!}e^{-at^2}.dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-ix)^n}{n!}\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-at^2}.dt$$

$$= \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-ix)^{2p}}{(2p)!}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p}e^{-at^2}.dt \quad (\text{ si } n \text{ est impair, } \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-at^2}.dt = 0)$$

$$= \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!}\, 2\int_0^{+\infty} t^{2p}e^{-at^2}.dt = \dots = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p x^{2p}}{p!(4a)^p} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{x^2}{4a}}.$$

car les intégrales $\int_0^{+\infty} t^{2p}e^{-at^2}.dt$ se ramènent à $\int_0^{+\infty} e^{-at^2}.dt$ par des IPP.

Il reste à justifier l'intégration terme à terme des séries au moyen du théorème ad hoc.

3ème méthode : intégration complexe.

$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}e^{-at^2}.dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(t+\frac{ix}{a})^2-\frac{x^2}{4a}}.dt = e^{-\frac{x^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(t+\frac{ix}{a})^2}.dt$ par mise sous forme canonique.

Le changement de variable u = t + $\frac{ix}{a}$ donne alors : $F(x) = e^{-\frac{x^2}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-au^2}.du = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{x^2}{4a}}$.

Cette méthode est hélas ***erronée***, car la variable d'intégration n'est pas réelle !
On peut cependant la rendre rigoureuse, mais il faut passer par l'intégration complexe, en introduisant une intégrale curviligne convenable…

Commentaires : 1) La transformée d'une gaussienne est encore une gaussienne.
2) On constate que pour a et $b > 0$, $\mathfrak{F}(g_a * g_b) = \mathfrak{F}(g_a).\mathfrak{F}(g_b)$.
3) On constate que $\mathfrak{F}(\mathfrak{F}(g_a)) = 2\pi\, g_a$.
4) La fonction G_{m,σ^2} a pour transformée de Fourier $e^{-\frac{\sigma^2}{2}x^2 - imx}$.
et l'on retrouve $\mathfrak{F}(G_{m+m',\sigma^2+\sigma'^2}) = \mathfrak{F}(G_{m,\sigma^2}).\mathfrak{F}(G_{m',\sigma'^2})$.

Exercice 3 : Soit la fonction paire f définie et continue pour tout réel x tel que $f(x) = e^{-|x|}$

1/ Montrer que $\hat{f}(\nu) = \frac{2}{1+4\pi\, 2\nu}$

2/ Montrer que $F^{-1}(\hat{f}) = f$

3/ En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} = \pi\, e^{-|x|}$

Solution

1°) La fonction $f(x) = e^{-|x|}$ est définie et continue pour tout x réel. Comme elle est paire, sa transformée de Fourier $\widehat{f}(y)$ peut être calculée à l'aide de la *formule des cosinus de Fourier* :

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \cos(2\pi xy)\, dx = \underbrace{2\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(2\pi xy)\, dx}_{(par\ parité)} = \underbrace{2\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{-x} e^{2i\pi xy}\, dx\right)}_{(formules\ d'Euler)}.$$

Or : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} e^{2i\pi xy}\, dx = \left[\frac{e^{-x} e^{2i\pi xy}}{2i\pi y - 1}\right]_0^{+\infty}$, et : $e^{-x} e^{2i\pi xy} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
car $\left|e^{-x} e^{2i\pi xy}\right| = e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} e^{2i\pi xy}\, dx = \frac{1}{1-2i\pi y} = \underbrace{\frac{1+2i\pi y}{(1-2i\pi y)(1+2i\pi y)}}_{(quantité\ conjuguée)} = \frac{1+2i\pi y}{1+4\pi^2 y^2}.$$

On a trouvé : $\boxed{\widehat{f}(y) = \frac{2}{1+4\pi^2 y^2}}$

2°) Puisque la fonction $f(x)$ est paire, et égale à e^{-x} pour $x \geq 0$, sa dérivée $f'(x)$ est impaire, et elle vaut $-e^{-x}$ pour $x > 0$, et e^{x} pour $x < 0$.
On a donc $f'(0^+) = -1 \neq f'(0^-) = 1$ (par symétrie) : $f'(x)$ est continue par morceaux, donc la fonction $f(x)$ elle-même est *de classe* C^1 *par morceaux.*
D'autre part, elle vérifie : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx = \underbrace{2\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx}_{(par\ parité)} = -2\left[e^{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{e}$.

(on dit que $f(x)$ est *absolument sommable*)
Donc on peut appliquer la *formule de réciprocité de Fourier* à $f(x)$, ce qui donne ici : $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$ (car $f(x)$ est continue pour tout x réel).

On a trouvé : $\boxed{\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f}$

3°) L'égalité précédente se traduit par : $\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y)e^{+2i\pi xy}\,dy = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Puisque $\widehat{f}(y)$ est une fonction paire, on peut calculer l'intégrale précédente en appliquant la *formule des cosinus de Fourier* :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y)e^{+2i\pi xy}\,dy = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi xy)}{1+4\pi^2y^2}\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,dt.$$

(en posant $t = 2\pi y$)

On en déduit : $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,dt = \pi e^{-|x|} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$

Exercice 4 :

1/Calculer la transformée de Fourier de la fonction triangle définie par :

$$\mathbf{g(x)} = \begin{cases} \mathbf{1 + x \text{ si } -1 \leq x \leq 0} \\ \mathbf{1 - x \text{ si } 0 \leq x \leq 1} \\ \mathbf{0 \text{ sinon}} \end{cases}$$

2/ Montrer que $F^{-1}(\hat{g}) = g$

3/ En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{\sin(t)}{t})^2 = \pi$

4/ La fonction f(x) est un cas particulier des fonctions créneau l1 [a;b] (x) est définie par :

l1 [a;b] (x) = 1 pour a < x < b

l1 [a;b] (x) = 0 pour x < a ou x > b

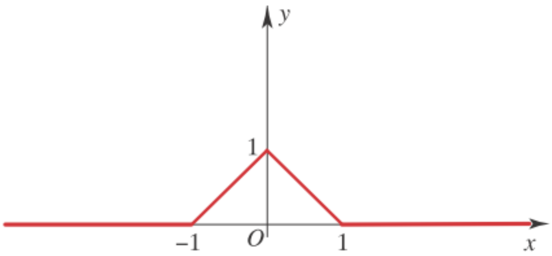
Ou a=-1/2 et b=1/2

En déduire que f*f=g

5/ En appliquant Parseval, montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{\sin(t)}{t})^4 = \frac{2\pi}{3}$

Solution

1°) La fonction $g(x)$ est définie et continue pour tout x réel, et elle est nulle en dehors de l'intervalle $[-1;+1]$. Comme elle est paire, sa transformée de Fourier $\widehat{g}(y)$ peut être calculée à l'aide de la formule des cosinus de Fourier :



$$\widehat{g}(y) = \int_{-1}^{+1} g(x)\cos(2\pi xy)\,dx \underset{\text{(par parité)}}{=} 2\int_0^1 (1-x)\cos(2\pi xy)\,dx, \text{ d'où, pour } y \neq 0 :$$

$$\widehat{g}(y) = \frac{2}{2\pi y}\left[(1-x)\sin(2\pi xy) - \frac{1}{2\pi y}\cos(2\pi xy)\right]_0^1 = \frac{1}{\pi y}\left(-\frac{1}{2\pi y}\cos(2\pi y) + \frac{1}{2\pi y}\right)$$

$$= \frac{1}{2(\pi y)^2}(1-\cos(2\pi y)) \underset{(1-\cos(2a)=2\sin^2(a))}{=} \left(\frac{\sin(\pi y)}{\pi y}\right)^2 \quad (y \neq 0). \text{ D'autre part :}$$

$$\widehat{g}(0) = 2\int_0^1 (1-x)\,dx = 2\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2\left(1-\frac{1}{2}\right) = 1$$

(on pouvait aussi dire que l'intégrale donne l'aire d'un triangle rectangle isocèle de coté 1)

La fonction $\left(\frac{\sin(\pi y)}{\pi y}\right)^2$ est continue pour tout $y \neq 0$. De plus, en utilisant $sin(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, on obtient : $\widehat{g}(y) = \left(\frac{\sin(\pi y)}{\pi y}\right)^2 \underset{y\to 0}{\sim} \left(\frac{\pi y}{\pi y}\right)^2 \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 1 = \widehat{g}(0)$, ce qui montre que $\widehat{g}(y)$ est aussi continue pour $y = 0$. On a trouvé :

$$\boxed{\widehat{g}(y) \text{ est continue, et } \begin{cases} \widehat{g}(y) = \left(\dfrac{\sin(\pi y)}{\pi y}\right)^2 & \text{pour } y \neq 0 \\ \widehat{g}(0) = 1 \end{cases}}$$

2°) La fonction $g(x)$ est continue pour tout x, et sa dérivée vaut : $g'(x) = 1$ pour $-1 < x < 0$, $g'(x) = -1$ pour $0 < x < 1$, et $g'(x) = 0$ pour $|x| > 1$ (elle n'est pas définie pour $x = 0$ et $x = \pm 1$).

Puisque $g'((-1)^-) = g'(1^+) = 0$, $g'((-1)^+) = g'(0^-) = 1$ et $g'(0^+) = g'(1^-) = -1$, $g'(x)$ est continue par morceaux, donc la fonction $g(x)$ est *de classe C^1 par morceaux.*

D'autre part : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\,dx = 2\int_0^1 (1-x)\,dx = 1$ ($= \widehat{g}(0)$ déjà calculée).

On peut donc appliquer la *formule de réciprocité de Fourier* à $g(x)$, ce qui donne : $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{g}) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(g)) = g$ (car $g(x)$ est continue pour tout x).

On a trouvé : $\boxed{\mathcal{F}^{-1}(\widehat{g}) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(g)) = g}$

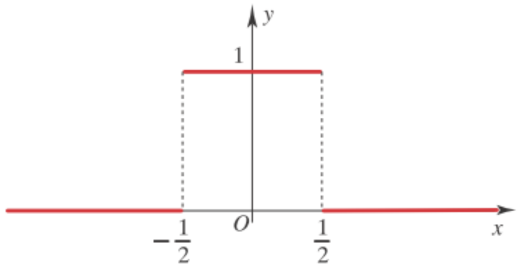
3°) L'égalité précédente se traduit par : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(y)e^{+2i\pi xy}\,dy = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où, en particulier : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(y)\,dy = g(0) = 1$.

En remplaçant $\widehat{g}(y)$ par sa valeur, puis en posant $t = \pi y$, cette égalité devient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(\pi y)}{\pi y}\right)^2 dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \frac{dt}{\pi} = 1, \text{ d'où : } \quad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt = \pi}$$

4°) La fonction $f(x)$ est un cas particulier des « fonctions créneaux » $\mathbb{1}_{[a;b]}(x)$.

Calculons (une fois pour toutes) la transformée de Fourier $h_a(y) = \widehat{\mathbb{1}}_{[-a;+a]}(y)$ (avec $a > 0$), les autres s'en déduisant facilement par des translations et des homothéties.
La fonction étant paire, on a :



$h_a(y) = \int_{-a}^{+a} \cos(2\pi xy)\, dx = 2 \underbrace{\int_0^a \cos(2\pi xy)\, dx}_{\textit{(par parité)}}$, d'où, pour $y \neq 0$:

$h_a(y) = 2 \left[\dfrac{\sin(2\pi xy)}{2\pi y} \right]_0^a = \dfrac{\sin(2\pi ay)}{\pi y} \quad (y \neq 0)$. D'autre part :

$h_a(0) = 2 \int_0^a dx = 2a$ *(c'est l'aire d'un rectangle de cotés $2a$ et 1)*.On a trouvé :

$$\begin{cases} h_a(y) = \dfrac{\sin(2\pi ay)}{\pi y} & \text{pour } y \neq 0 \\ h_a(0) = 2a \end{cases}$$

(on vérifie facilement que la fonction $h_a(y)$ est continue pour tout y)

On en déduit, en prenant $a = \dfrac{1}{2}$:

$$\boxed{\begin{cases} \widehat{f}(y) = \dfrac{\sin(\pi y)}{\pi y} & \text{pour } y \neq 0 \\ \widehat{f}(0) = 1 \end{cases}}$$

Puisque $\mathcal{F}(f * f) = (\mathcal{F}(f))^2 = (\widehat{f})^2 = \widehat{g}$, les fonctions g et $f * f$ ont les mêmes transformées de Fourier. On en déduit : $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f * f)) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(g)) = g$ (Cf. question 2°)). Or :
$(f * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(x-t)\, dt = \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} f(t)\, dt = F\left(x + \dfrac{1}{2}\right) - F\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$, en notant $F(x)$ une primitive de $f(x)$.
La fonction $F(x)$ étant continue et dérivable par morceaux, on en tire :
$f * f$ est de classe C^1 par morceaux.
D'autre part, $f * f$ est à support compact comme f elle-même (elle est nulle en dehors d'un intervalle fini), ce qui assure l'existence de l'intégrale : $\int_{-\infty}^{+\infty} |(f * f)(x)|\, dx$.

On peut donc appliquer aussi la *formule de réciprocité de Fourier* à $f * f$, ce qui donne :
$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f * f)) = f * f$, puisque $f * f$ est continue.

On en déduit : $\boxed{f * f = g}$

5°) La fonction g admettant une transformée de Fourier, et étant à support compact, on peut lui appliquer la *formule de Bessel-Parseval* :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{g}(y)|^2 \, dy.$$

Or : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 \, dx = \underbrace{2\int_0^1 (1-x)^2 \, dx}_{\textit{(par parité)}} = -2\left[\frac{(1-x)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$, et, d'autre part :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{g}(y)|^2 \, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(\pi y)}{\pi y}\right)^4 dy = \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^4 dt}_{\textit{(en posant } t=\pi y\textit{)}}.$$

D'où, en égalant ces deux résultats :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^4 dt = \frac{2\pi}{3}}$$