



## Table des matières

<b>1</b>	<b>WTI Crude Oil</b>	<b>2</b>
1.1	Présentation des Données . . . . .	2
1.2	Traitement des Données . . . . .	3
1.3	Analyse de la Saisonnalité . . . . .	3
1.3.1	Définition . . . . .	3
1.3.2	Application . . . . .	4
1.4	Phénomène du retour à la moyenne . . . . .	5
1.4.1	Définition . . . . .	5
1.4.2	Détection du Retour à la Moyenne avec le Test ADF . . . . .	5
1.4.3	Application . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Estimation avec les Modèles de Valorisation</b>	<b>6</b>
2.1	Modèle de Brennan-Schwartz . . . . .	6
2.1.1	Présentation . . . . .	6
2.1.2	Application . . . . .	7
2.2	Modèle de Clewlow-Strickland . . . . .	8
2.2.1	Présentation . . . . .	8
2.2.2	Application . . . . .	9
2.3	Comparaison des modèles . . . . .	10
2.3.1	Introduction . . . . .	10
2.3.2	Calcul du MSE . . . . .	10
2.3.3	Comparaison des MSE . . . . .	10
2.4	Discussion des Résultats . . . . .	11
2.5	Conclusion . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Produits Dérivés</b>	<b>11</b>
3.1	Fondement théorique des dérivés Swaps et Swing . . . . .	11
3.1.1	Les Swaps . . . . .	11
3.1.2	Les Swing Options . . . . .	12
3.2	Implementation . . . . .	13
3.2.1	Valorisation du Swing et Swap avec le modèle Trinomiale . . . . .	13
3.2.2	Option Swing . . . . .	14
3.2.3	Contrat de Swap . . . . .	15
3.2.4	Valorisation du Swing et Swap avec simulation Monte Carlo . . . . .	18

## Cadre Général du Projet

Ce projet a pour objectif principal d'implémenter deux modèles de structure par terme des prix pour une matière première, en l'occurrence, le pétrole brut WTI (West Texas Intermediate), et d'évaluer deux produits dérivés spécifiques : les Swaps et les Swing.

### Étapes du Projet

Le projet se décompose en plusieurs étapes clés :

1. Choix de la Matière Première et Analyse de la Moyenne de Réversion :
  - Nous avons choisi le pétrole brut WTI en raison de son rôle central dans l'économie mondiale et de la disponibilité de données historiques complètes et fiables.
  - Une analyse préliminaire a été menée pour vérifier la présence du phénomène de retour à la moyenne, qui est crucial pour les modèles de structure par terme.
2. Estimation des Paramètres des Modèles de Valorisation :
  - Deux modèles de valorisation ont été sélectionnés pour ce projet : le modèle de Brennan-Schwartz et le modèle de Clewlow-Strickland.
  - Pour chaque modèle, nous avons estimé les paramètres en utilisant des méthodes statistiques adaptées aux données historiques du pétrole WTI.
  - La structure par terme des prix a été tracée, et des prévisions du prix spot ont été réalisées selon chaque modèle.
3. Évaluation des Produits Dérivés :
  - La partie théorique des dérivés Swaps et Swing a été étudiée pour comprendre leur fonctionnement et leur utilisation dans la gestion des risques de prix des matières premières.
  - Un code a été développé pour implémenter ces produits dérivés, et ils ont été back-testés en utilisant les données de prix du pétrole WTI.

En somme, ce projet vise à fournir une analyse approfondie et des outils pratiques pour la valorisation des commodités, en mettant l'accent sur le pétrole brut WTI et ses dérivés, ce qui est crucial pour les acteurs du marché financier et les gestionnaires de risques.

## 1 WTI Crude Oil

### 1.1 Présentation des Données

Le choix des données est un aspect crucial de ce projet. Nous avons opté pour le pétrole brut WTI pour plusieurs raisons :

- **Disponibilité et Fiabilité des Données** : Les données historiques du pétrole WTI sont largement disponibles et de bonne qualité, ce qui permet d'effectuer des analyses robustes.
- **Importance Économique** : Le pétrole WTI est l'un des principaux indicateurs des marchés pétroliers mondiaux. Les fluctuations de ses prix ont des impacts significatifs sur l'économie globale.
- **Représentativité** : Le WTI est souvent utilisé comme référence pour le prix du pétrole en Amérique du Nord, ce qui en fait un choix pertinent pour des analyses de prévisions et de valorisation.

Les données sont collectées à partir de la base de données **FRED** (Federal Reserve Economic Data), les prix sont en fréquence mensuel et commencent de 1990 jusqu'à 2018.

## 1.2 Traitement des Données

Après suppression des valeurs manquantes, on se retrouve avec 336 observations. On donne la représentation graphique de l'évolution du prix ainsi que des informations sur nos données :

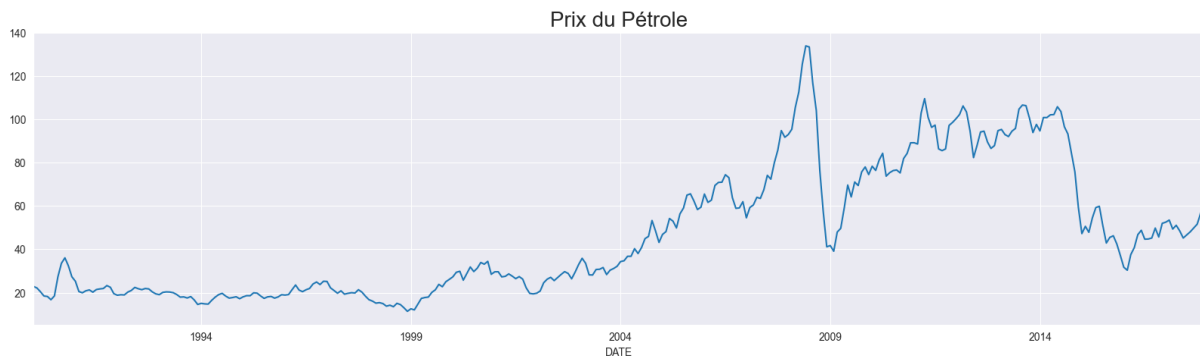


FIGURE 1 – Évolution du prix du pétrole WTI

	Prix du Pétrole
<b>count</b>	336.000000
<b>mean</b>	46.795760
<b>std</b>	29.983759
<b>min</b>	11.347273
<b>25%</b>	20.795207
<b>50%</b>	34.363571
<b>75%</b>	69.492990
<b>max</b>	133.880000

TABLE 1 – Information sur le Prix du Pétrole

Maintenant, on passe à l'étape de l'analyse de la saisonnalité.

## 1.3 Analyse de la Saisonnalité

### 1.3.1 Définition

En général, une série temporelle (comme est le cas pour les prix en fonction du temps) consistent à supposer que l'observation à la date  $t$  est une fonction du temps  $t$  et d'une variable  $\epsilon_t$  centrée faisant office d'erreur au modèle, représentant la différence entre la réalité et le modèle proposé :

$$X_t = f(t, \epsilon_t)$$

On considère le **modèle additif** qui est le "modèle classique de décomposition" dans le traitement des modèles d'ajustement. La variable  $X_t$  s'écrit comme la somme de trois

termes :

$$X_t = Z_t + S_t + \epsilon_t \quad ,$$

où  $Z_t$  représente la tendance,  $S_t$  la saisonnalité et  $\epsilon_t$  les composantes ("erreurs du modèle") aléatoires iid.

### 1.3.2 Application

On commence par réaliser la décomposition avec un modèle additif,

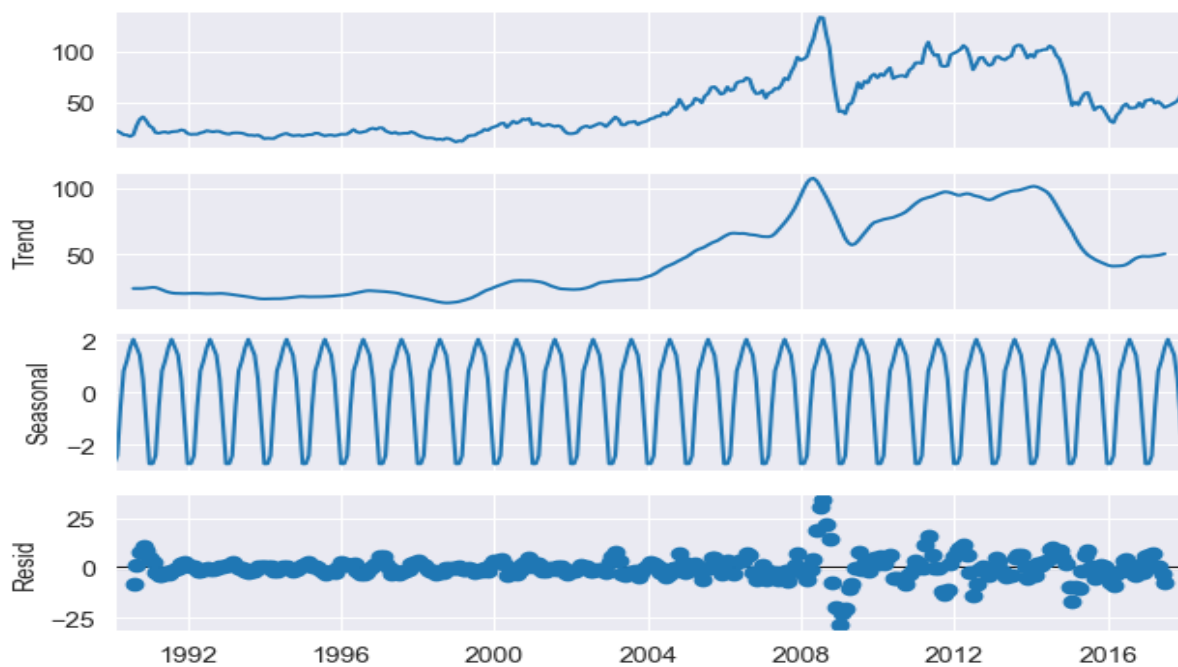


FIGURE 2 – Décomposition du Prix du pétrole avec le modèle additif

On remarque que la composante de saisonnalité est négligeable, mais malgré cela on décide tout de même de la supprimer, afin d'éviter des erreurs dans la partie de modélisation. On donne si-dessous la comparaison de l'évolution avant et après suppression de la saisonnalité :

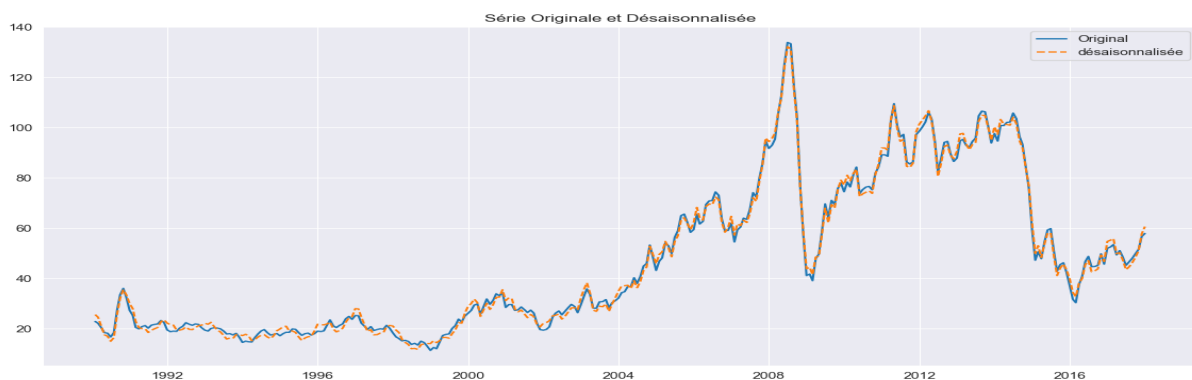


FIGURE 3 – Comparaison Prix vs Prix désaisonnalisés

## 1.4 Phénomène du retour à la moyenne

### 1.4.1 Définition

Le phénomène de *retour à la moyenne* est un concept statistique selon lequel les valeurs extrêmes d'une variable tendent à revenir vers la moyenne au fil du temps. Cela signifie que si une valeur s'éloigne considérablement de sa moyenne historique, elle est susceptible de se rapprocher de cette moyenne dans les périodes futures.

Matériellement, soit  $X_t$  une série temporelle. On dit que  $X_t$  présente un retour à la moyenne si elle satisfait l'équation suivante :

$$X_t = \mu + \phi(X_{t-1} - \mu) + \epsilon_t$$

où :

- $\mu$  est la moyenne à long terme.
- $\phi$  est un coefficient tel que  $0 < \phi < 1$ .
- $\epsilon_t$  est un terme d'erreur blanc, indépendant et identiquement distribué (i.i.d.).

L'importance du retour à la moyenne dans la valorisation des commodités réside dans le fait que les prix des commodités, comme le pétrole, tendent à revenir vers une valeur moyenne à long terme après avoir subi des chocs temporaires. Cette caractéristique est essentielle pour les modèles de prévision des prix et pour la gestion des risques financiers.

### 1.4.2 Détection du Retour à la Moyenne avec le Test ADF

Le test de Dickey-Fuller Augmenté (ADF) est couramment utilisé pour détecter la présence d'un retour à la moyenne dans une série temporelle. Le test ADF examine si une série temporelle est stationnaire autour d'une moyenne.

La forme générale du test ADF est donnée par :

$$\Delta X_t = \alpha + \beta t + \gamma X_{t-1} + \sum_{i=1}^p \delta_i \Delta X_{t-i} + \epsilon_t$$

où :

- $\Delta X_t$  est la différence première de  $X_t$ .
- $\alpha$  est une constante.
- $\beta t$  est une tendance déterministe.
- $p$  est le nombre de retards de la différence première.
- $\epsilon_t$  est un terme d'erreur blanc.

Les hypothèses du test ADF sont les suivantes :

- Hypothèse nulle ( $H_0$ ) : La série temporelle  $X_t$  a une racine unitaire (elle n'est pas stationnaire).
- Hypothèse alternative ( $H_1$ ) : La série temporelle  $X_t$  est stationnaire.

La statistique de test est calculée comme suit :

$$\tau = \frac{\hat{\gamma}}{\text{se}(\hat{\gamma})}$$

où  $\hat{\gamma}$  est l'estimation du paramètre  $\gamma$  et  $\text{se}(\hat{\gamma})$  est l'erreur standard de  $\hat{\gamma}$ .

Si la valeur absolue de la statistique de test  $\tau$  est supérieure à la valeur critique de Dickey-Fuller, nous rejetons l'hypothèse nulle en faveur de l'hypothèse alternative, indiquant que la série est stationnaire et présente un retour à la moyenne.

### 1.4.3 Application

On réalise le test ADF sur notre série des prix du pétrole désaisonnalisés sur python avec la fonction *adfuller*. Les résultats sont les suivants :

- **Statistique ADF :**

$$\tau = -1.655$$

- **p-value :**

$$p = 0.454$$

Ces résultats indiquent que la série n'est pas stationnaire (p-value > 0.05). Par conséquent, nous ne pouvons pas rejeter l'hypothèse nulle selon laquelle la série temporelle a une racine unitaire. En d'autres termes, la série n'est pas stationnaire et ne présente pas de retour à la moyenne.

## 2 Estimation avec les Modèles de Valorisation

### 2.1 Modèle de Brennan-Schwartz

#### 2.1.1 Présentation

Le modèle de Brennan-Schwartz (1985)[1] est un modèle stochastique utilisé pour évaluer les investissements dans les ressources naturelles. Il a été l'un des premiers à être appliqué aux marchés des commodités, comme le pétrole. Ce modèle est important car il permet de capturer la dynamique des prix spot des commodités et d'évaluer les contrats à terme de manière rigoureuse.

#### Dynamique du Prix Spot

La dynamique retenue pour le prix spot  $S_t$  dans le modèle de Brennan-Schwartz est donnée par l'équation de Black-Scholes :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \quad (1)$$

où :

- $\mu$  est le taux de croissance attendu du prix spot.
- $\sigma$  est la volatilité du prix spot.
- $dB_t$  est un mouvement brownien standard.

#### Équation Différentielle Partielle (EDP)

En considérant que  $f(t, T) = f(t, S_t, T)$  et en utilisant un raisonnement d'arbitrage ainsi que le lemme d'Itô, nous obtenons l'EDP suivante :

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + (r - c) S_t \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

où :

- $r$  est le taux d'intérêt sans risque.
- $c$  est le convenience yield, c'est-à-dire le bénéfice non monétaire de détenir le produit physique par rapport à posséder un contrat à terme.

## Solution du Modèle

Ce modèle admet une solution fermée pour le prix à l'instant  $t$  d'un contrat à terme pour livraison à  $T$  d'une matière première dont le prix au comptant est  $S_t$ . La solution est donnée par :

$$f(t, S_t, T) = S_t e^{(r-c)(T-t)}$$

### 2.1.2 Application

On applique le modèle de Brennan-Schwartz, en estimant les paramètres de l'équation (1) :  $\mu$  et  $\sigma$  qui représente respectivement le taux de croissance attendu et la volatilité du prix spot. Cette estimation se fait en minimisant la fonction de log-vraisemblance, on trouve les résultats suivants :

- Taux de croissance attendu du prix spot :

$$\mu = 0.0755$$

- Volatilité du prix spot :

$$\sigma = 0.3008$$

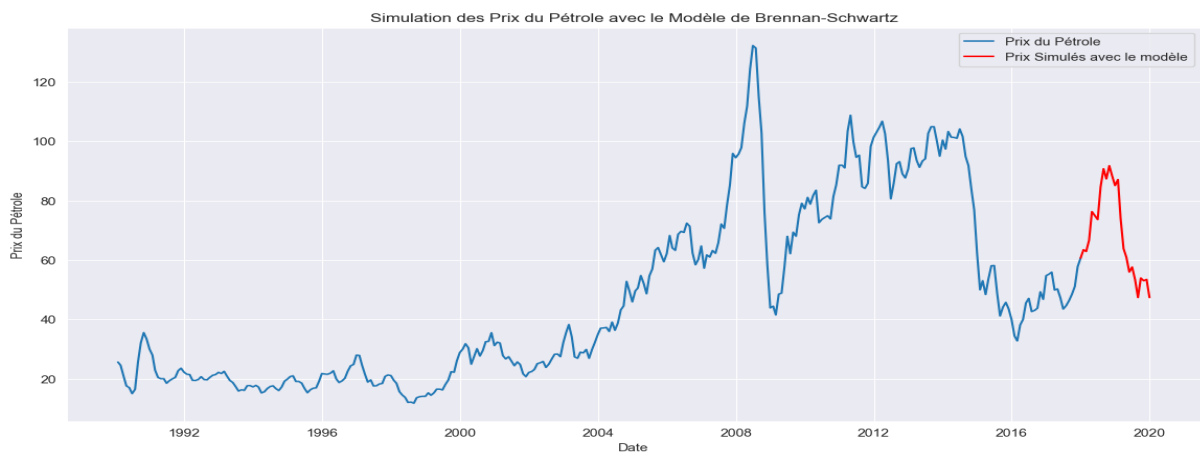


FIGURE 4 – Simulation des prix avec le modèle de Brennan-Schwartz

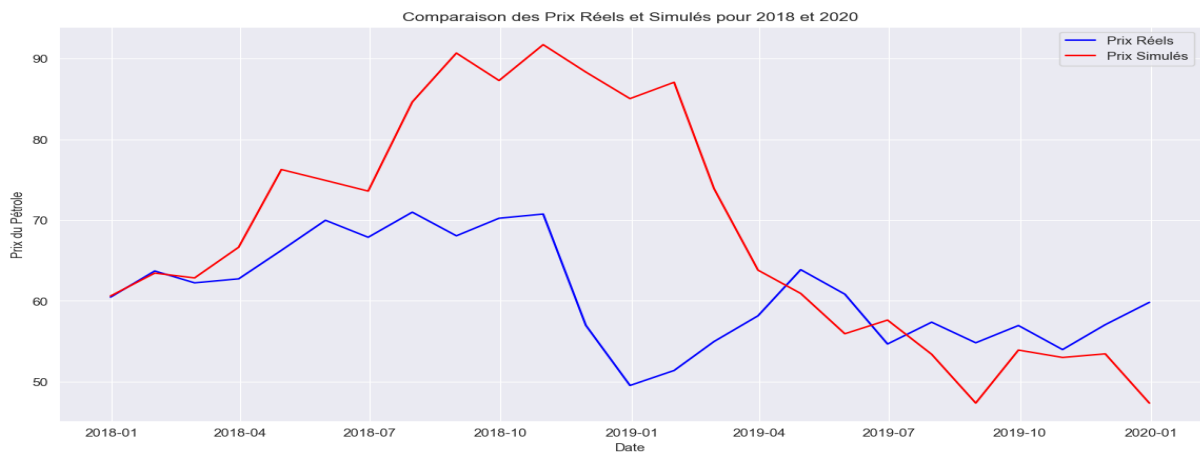


FIGURE 5 – Comparaison des prix entre le modèle de Brennan-Schwartz et les données réels



On remarque que le modèle a sur-estimé la hausse des prix en fin-2018 et début-2019, cependant après avril 2019 le modèle offre des prévision assez proche de la réalité.

## 2.2 Modèle de Clewlow-Strickland

### 2.2.1 Présentation

Le modèle de Clewlow-Strickland (1999)[2] est un modèle stochastique utilisé pour valoriser les options énergétiques dans un cadre à un facteur, adapté aux prix à terme. Ce modèle est important car il permet de capturer la dynamique des prix futurs de l'énergie et d'évaluer les contrats et options de manière rigoureuse.

### Dynamique du Prix Futures

La dynamique du prix futures est donnée par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$df(t, T) = f(t, T)\gamma(t, T)dW_t \quad ; \quad \gamma(t, T) = \sigma e^{-\alpha(T-t)} \quad (2)$$

où :

- $\alpha$  est la vitesse de retour du prix spot à sa valeur moyenne à long terme.
- $\sigma$  est la volatilité du prix futures.
- $f(t, T)$  est le prix forward observé aujourd'hui pour une maturité  $T$ .
- $W_t$  est un mouvement brownien standard.

### Solution de l'Équation

La solution de cette équation est :

$$f(t, T) = f(0, T) \exp \left( -\frac{1}{2} \int_0^t \gamma(s, T)^2 ds + \int_0^t \gamma(s, T) dW_s \right)$$

### Processus du Prix Spot

Le processus du prix spot est obtenu en prenant  $T = t$  dans l'équation précédente :

$$S_t = f(t, t) = f(0, t) \exp \left( -\frac{1}{2} \int_0^t \gamma(s, t)^2 ds + \int_0^t \gamma(s, t) dW_s \right)$$

En appliquant la formule d'Itô, on obtient :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left[ \frac{\partial \ln f(0, t)}{\partial t} + \alpha(\ln f(0, t) - \ln S_t) + \frac{\sigma^2}{4}(1 - e^{-2\alpha t}) \right] dt + \sigma dW_t$$

### Courbe Futures

La courbe futures est donnée par :

$$f(t, T) = f(0, T) \left( \frac{S_t}{f(0, t)} \right) \exp[-\alpha(T - t)] \exp \left[ -\frac{\sigma^2}{4\alpha} e^{-\alpha T} (e^{2\alpha t} - 1)(e^{-\alpha T} - e^{-\alpha t}) \right]$$

La courbe futures à l'instant  $t$  est une fonction du prix spot à cet instant  $t$ , de la courbe initiale et des paramètres de volatilité.

### 2.2.2 Application

On applique le modèle de Clewlow-Strickland, en estimant les paramètres de l'équation (2) :  $\alpha$  et  $\sigma$  qui représente respectivement la vitesse de retour à la valeur moyenne et la volatilité du prix spot. On trouve les résultats suivants :

- Vitesse de retour du prix spot à sa moyenne à long terme :

$$\alpha = 0.1331$$

- Volatilité du prix spot :

$$\sigma = 0.2991$$

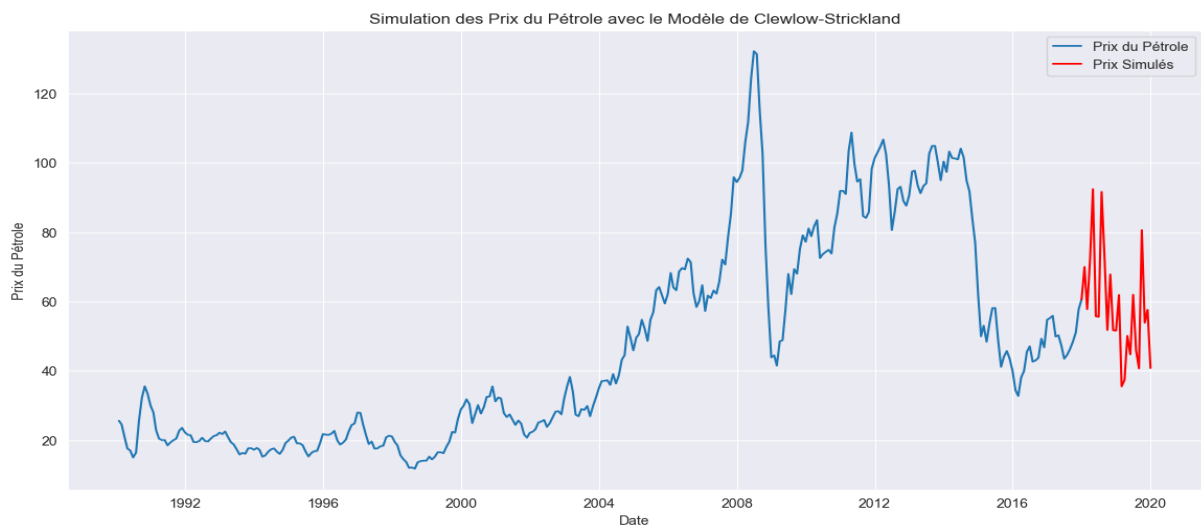


FIGURE 6 – Simulation des prix avec le modèle de Clewlow-Strickland

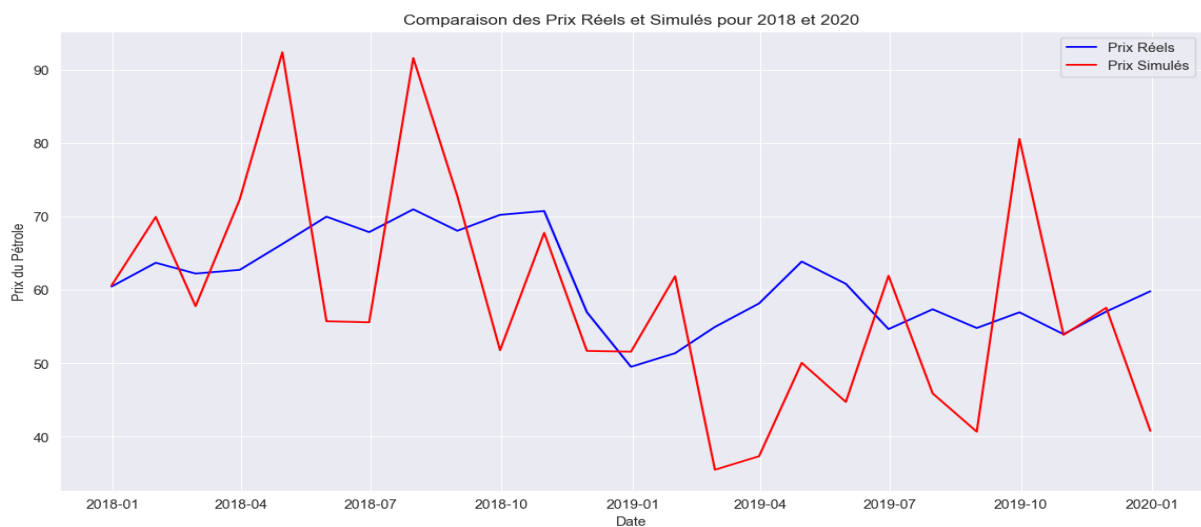


FIGURE 7 – Comparaison des prix entre le modèle de Clewlow-Strickland et les données réels

On remarque que le modèle a bien estimé la tendance et l'allure générale des prix, cependant il sur-estime les prix à plusieurs occasions.

## 2.3 Comparaison des modèles

### 2.3.1 Introduction

Afin de déterminer l'efficacité et la précision des modèles de Clewlow-Strickland et Brennan-Schwartz dans la prédiction des prix des commodités, nous effectuons une comparaison basée sur l'erreur quadratique moyenne (MSE). Le MSE est une métrique couramment utilisée pour évaluer la précision des modèles de prévision, car elle mesure la moyenne des carrés des erreurs, c'est-à-dire la différence entre les valeurs observées et les valeurs prédites par le modèle.

### 2.3.2 Calcul du MSE

L'erreur quadratique moyenne (MSE) est définie par :

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

où :

- $n$  est le nombre de points de données.
- $y_i$  est la valeur observée.
- $\hat{y}_i$  est la valeur prédite par le modèle.

Pour chaque modèle, nous calculons le MSE en comparant les prix réels des commodités avec les prix prédits par les modèles de Clewlow-Strickland et Brennan-Schwartz.

### 2.3.3 Comparaison des MSE

Les résultats du MSE pour chaque modèle sont présentés ci-dessous :

Modèle	MSE
Brennan-Schwartz	<b>232.21</b>
Clewlow-Strickland	<b>187.66</b>

TABLE 2 – Comparaison du MSE entre les Modèles de Brennan-Schwartz et Clewlow-Strickland

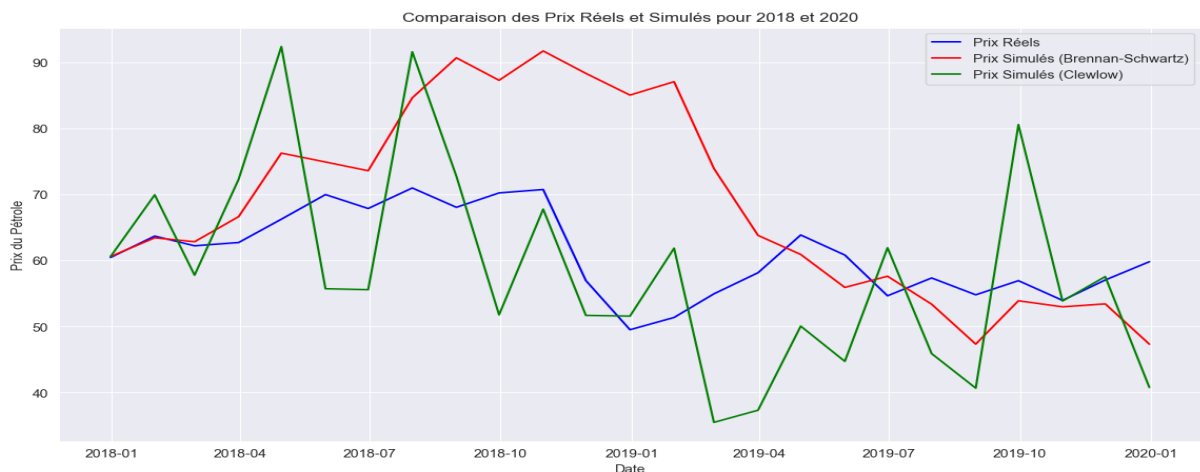


FIGURE 8 – Comparaison graphique entre les modèles et les valeurs réels

## 2.4 Discussion des Résultats

Le tableau 2 montre que le modèle de Clewlow-Strickland possède un MSE plus faible ce qui indique que ce modèle est plus précis.

## 2.5 Conclusion

La comparaison basée sur le MSE nous permet de quantifier la performance des modèles de Clewlow-Strickland et Brennan-Schwartz. En utilisant cette métrique, nous avons identifié le modèle de Clewlow comme celui qui fournit les prédictions les plus précises pour les prix du pétrole.

# 3 Produits Dérivés

## 3.1 Fondement théorique des dérivés Swaps et Swing

### 3.1.1 Les Swaps

Un swap est un contrat dérivé financier dans lequel deux parties conviennent d'échanger des flux de trésorerie sur une période spécifiée. Ces flux de trésorerie sont généralement liés à différents instruments financiers ou taux d'intérêt. Les swaps sont des outils fondamentaux en finance, largement utilisés pour couvrir les risques, gérer l'exposition aux fluctuations des taux d'intérêt et optimiser les coûts de financement. Cet article examine les propriétés mathématiques et le théorème sous-jacents aux swaps, en expliquant leur rôle et leur importance en finance quantitative.

#### Définition :

Un swap peut être défini formellement comme suit :

Étant donné deux parties,  $A$  et  $B$ , elles conviennent d'échanger des flux de trésorerie à des intervalles prédéterminés. Les flux de trésorerie peuvent être basés sur des taux d'intérêt fixes ou variables, et l'échange est généralement structuré pour être net. Soit  $T = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$  l'ensemble des dates de paiement sur la durée de vie du swap.

#### Swap de Taux d'Intérêt (IRS)

Un type commun de swap est le Swap de Taux d'Intérêt (IRS), où :

- La partie  $A$  paie un taux d'intérêt fixe  $R_f$
- La partie  $B$  paie un taux d'intérêt variable  $R_v(t)$  lié à un taux de référence (par exemple, LIBOR, EURIBOR).

Soit  $L$  le montant notionnel principal, qui reste constant pendant toute la durée du swap.

Pour chaque date de paiement  $t_i$  :

- Flux de trésorerie de la jambe fixe :  $C_f(t_i) = R_f \times L \times \Delta t_i$
- Flux de trésorerie de la jambe variable :  $C_v(t_i) = R_v(t_i) \times L \times \Delta t_i$

où  $\Delta t_i$  représente la fraction d'année entre les dates de paiement consécutives  $t_{i-1}$  et  $t_i$ .

### Valeur Actuelle des Flux de Trésorerie

La valeur actuelle (VA) des flux de trésorerie de chaque jambe est calculée en les actualisant à l'aide du facteur d'actualisation approprié  $D(t_i)$ .

- VA de la jambe fixe :  $VA_f = \sum_{i=1}^N C_f(t_i) \times D(t_i)$
- VA de la jambe variable :  $VA_v = \sum_{i=1}^N C_v(t_i) \times D(t_i)$

La valeur actuelle nette (VAN) du swap pour la partie  $A$  est donnée par :

$$VAN = VA_v - VA_f$$

### Théorème de Valorisation

Le théorème fondamental de la valorisation des swaps stipule qu'à l'initiation, la valeur d'un swap est nulle, en supposant l'absence d'arbitrage et que le taux fixe soit fixé de manière à ce que la VA de la jambe fixe soit égale à la VA de la jambe variable.

#### Théorème (Parité du Swap)

À l'initiation du swap, le taux fixe  $R_f$  satisfait :

$$\sum_{i=1}^N R_f \times L \times \Delta t_i \times D(t_i) = \sum_{i=1}^N R_v(t_i) \times L \times \Delta t_i \times D(t_i)$$

Cela peut être réarrangé pour déterminer le taux fixe de parité  $R_f$  :

$$R_f = \frac{\sum_{i=1}^N R_v(t_i) \times \Delta t_i \times D(t_i)}{\sum_{i=1}^N \Delta t_i \times D(t_i)}$$

### 3.1.2 Les Swing Options

Une option swing est un type d'option financière qui donne au détenteur le droit, mais non l'obligation, d'exercer l'option à plusieurs reprises pendant la durée du contrat. Ce type d'option est couramment utilisé dans les marchés de l'énergie et des matières premières pour gérer les risques liés aux fluctuations des prix.

#### Paramètres

Les principaux paramètres d'une option swing sont les suivants :

- $S_0$  : le prix initial de l'actif sous-jacent
- $K$  : le prix d'exercice de l'option
- $T$  : la maturité de l'option (en années)
- $r$  : le taux d'intérêt sans risque
- $\sigma$  : la volatilité du prix de l'actif sous-jacent
- $M$  : le nombre maximal d'exercices permis

#### Valorisation

La valorisation d'une option swing implique de calculer la valeur actuelle des flux de trésorerie futurs en tenant compte des multiples opportunités d'exercice. À chaque date d'exercice possible, le détenteur de l'option choisit entre exercer l'option ou la conserver, en fonction de la maximisation de la valeur actuelle nette (VAN) future.

Le payoff à chaque date d'exercice est donné par :

$$\text{payoff}(S, K) = \max(0, S - K)$$

où  $S$  est le prix de l'actif sous-jacent et  $K$  est le prix d'exercice.

La valeur de l'option à chaque instant  $t$  est calculée en actualisant les payoffs futurs en utilisant le taux d'intérêt sans risque  $r$  et en prenant en compte les décisions d'exercice optimales.

### Probabilités de Transition

Pour modéliser les mouvements du prix de l'actif sous-jacent, on utilise les probabilités de transition suivantes :

$$\begin{aligned} p_u &= \left( \frac{\exp(r\Delta t/2) - \exp(-\sigma\sqrt{\Delta t/2})}{\exp(\sigma\sqrt{\Delta t/2}) - \exp(-\sigma\sqrt{\Delta t/2})} \right)^2 \\ p_d &= \left( \frac{\exp(\sigma\sqrt{\Delta t/2}) - \exp(r\Delta t/2)}{\exp(\sigma\sqrt{\Delta t/2}) - \exp(-\sigma\sqrt{\Delta t/2})} \right)^2 \\ p_m &= 1 - p_u - p_d \end{aligned}$$

où  $\Delta t$  est le pas de temps, et  $p_u$ ,  $p_d$ , et  $p_m$  sont les probabilités de montée, descente, et stagnation, respectivement.

## 3.2 Implementation

### 3.2.1 Valorisation du Swing et Swap avec le modèle Trinomiale

Dans cette partie, nous allons introduire le modèle trinomial utilisé pour la valorisation des options. Le modèle trinomial est une extension du modèle binomial qui permet de modéliser trois mouvements possibles du prix d'un actif sous-jacent à chaque pas de temps : montée, descente, et stagnation. Cette flexibilité additionnelle permet une approximation plus fine de la dynamique des prix des actifs.

#### Paramètres du Modèle Trinomial

Commençons par définir les paramètres de base du modèle.

- Pas de Temps :

Le temps total jusqu'à la maturité  $T$  est divisé en  $N$  étapes discrètes. Le pas de temps  $\Delta t$  est donc :

$$\Delta t = \frac{T}{N}$$

- Facteurs de Montée, Descente et Stagnation

Les facteurs de montée ( $u$ ), de descente ( $d$ ) et de stagnation ( $m$ ) sont définis comme suit :

$$u = e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}} \quad ; \quad d = \frac{1}{u} \quad ; \quad m = 1$$

où  $\sigma$  est la volatilité de l'actif sous-jacent.

### Probabilités de Transition

Les probabilités associées aux différents mouvements de prix ( $p_u$ ,  $p_d$  et  $p_m$ ) sont calculées à partir des paramètres du modèle. Elles sont données par :

$$p_u = \left( \frac{e^{r\Delta t/2} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}} \right)^2 \quad ; \quad p_d = \left( \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{r\Delta t/2}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}} \right)^2$$

$$p_m = 1 - p_u - p_d$$

où  $r$  est le taux d'intérêt sans risque.

La formule de calcul des probabilités de transition  $p_u$ ,  $p_d$ , et  $p_m$  assure que ces probabilités sont bien définies et que leur somme est égale à 1.

### Construction de l'Arbre Trinomial des Prix

Pour modéliser les prix de l'actif sous-jacent, nous construisons un arbre trinomial. À chaque nœud de l'arbre, le prix de l'actif peut monter, descendre, ou rester constant.

Le prix au nœud  $(i, j)$ , où  $i$  représente le nombre de montées moins le nombre de descentes et  $j$  le nombre d'étapes, est donné par :

$$S_{i,j} = S_0 \cdot u^{\max(i,0)} \cdot d^{\max(-i,0)}$$

où  $S_0$  est le prix initial de l'actif sous-jacent.

### Calcul des Payoffs aux Nœuds Terminaux

Pour une option européenne, le payoff aux nœuds terminaux (à la maturité  $T$ ) est calculé comme suit :

$$\text{Payoff}_{i,N} = \max(0, S_{i,N} - K)$$

où  $K$  est le prix d'exercice de l'option.

### Remontée de l'Arbre pour Calculer le Prix de l'Option

Pour obtenir le prix de l'option, nous remontons l'arbre en utilisant les probabilités de transition. Le calcul du payoff à un nœud donné  $(i, j)$  est :

$$\text{Payoff}_{i,j} = (p_u \cdot \text{Payoff}_{i+1,j+1} + p_m \cdot \text{Payoff}_{i,j+1} + p_d \cdot \text{Payoff}_{i-1,j+1}) \cdot e^{-r\Delta t}$$

### 3.2.2 Option Swing

Pour une option swing, le détenteur peut choisir d'exercer l'option à plusieurs moments avant la maturité. Pour chaque nœud  $(i, j)$  de l'arbre, nous comparons le payoff d'exercice immédiat avec le payoff de maintien de l'option :

$$\text{Exercise} = \max(0, S_{i,j} - K)$$

$$\text{Hold} = (p_u \cdot \text{Payoff}_{i+1,j+1} + p_m \cdot \text{Payoff}_{i,j+1} + p_d \cdot \text{Payoff}_{i-1,j+1}) \cdot e^{-r\Delta t}$$

$$\text{Payoff}_{i,j} = \max(\text{Exercise}, \text{Hold})$$

### 3.2.3 Contrat de Swap

Pour modéliser un contrat de swap, nous devons calculer les paiements flottants et fixes à chaque nœud de l'arbre.

À maturité, les paiements flottants sont simplement le prix de l'actif sous-jacent :

$$\text{Floating Payments}_{i,j} = S_{i,j}$$

Pour les nœuds précédents, nous calculons les paiements flottants en utilisant les probabilités de transition :

$$\text{Floating Payments}_{i,j} = e^{-r\Delta t} * (p_u \cdot \text{Floating Payments}_{i+1,j+1} + p_m \cdot \text{Floating Payments}_{i,j+1} + p_d \cdot \text{Floating Payments}_{i-1,j+1})$$

Le payoff du swap est la somme des paiements flottants moins les paiements fixes sur la maturité  $T$  :

$$\text{Swap Payoff} = \sum_{j=0}^M (\text{Floating Payments}_{:,j} - \text{Fixed Payments}_{:,j})$$

où  $M$  est le nombre d'étapes correspondant à la maturité du swap.

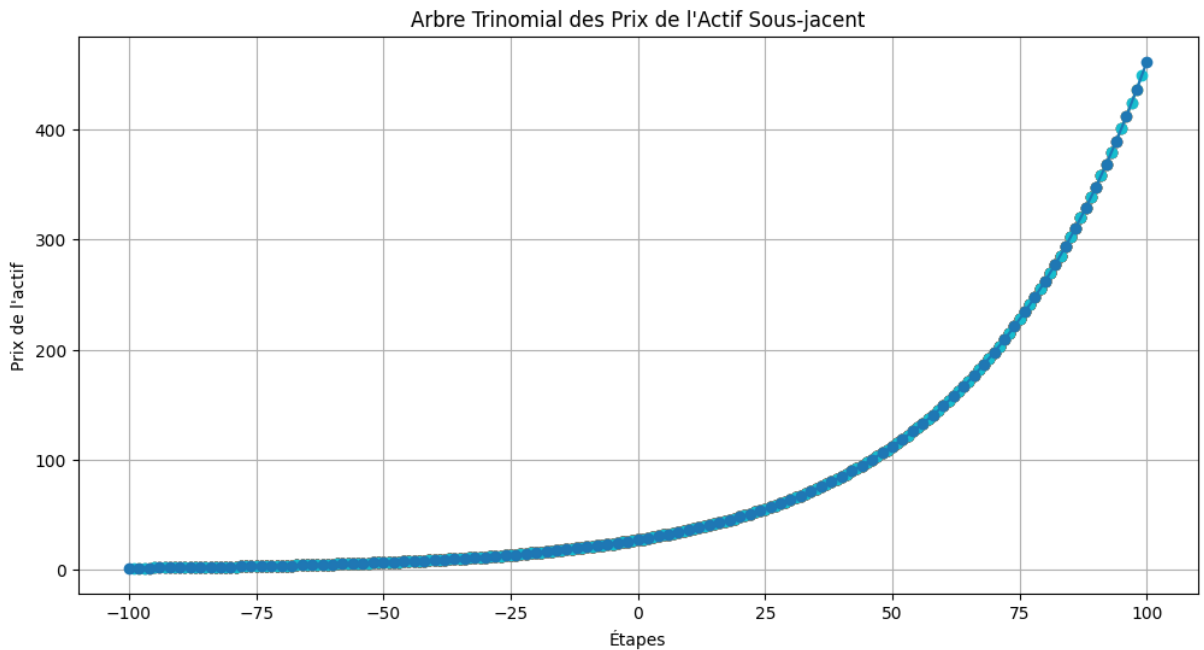


FIGURE 9 – Arbre Trinomial des prix de l'Actif Sous-Jacent



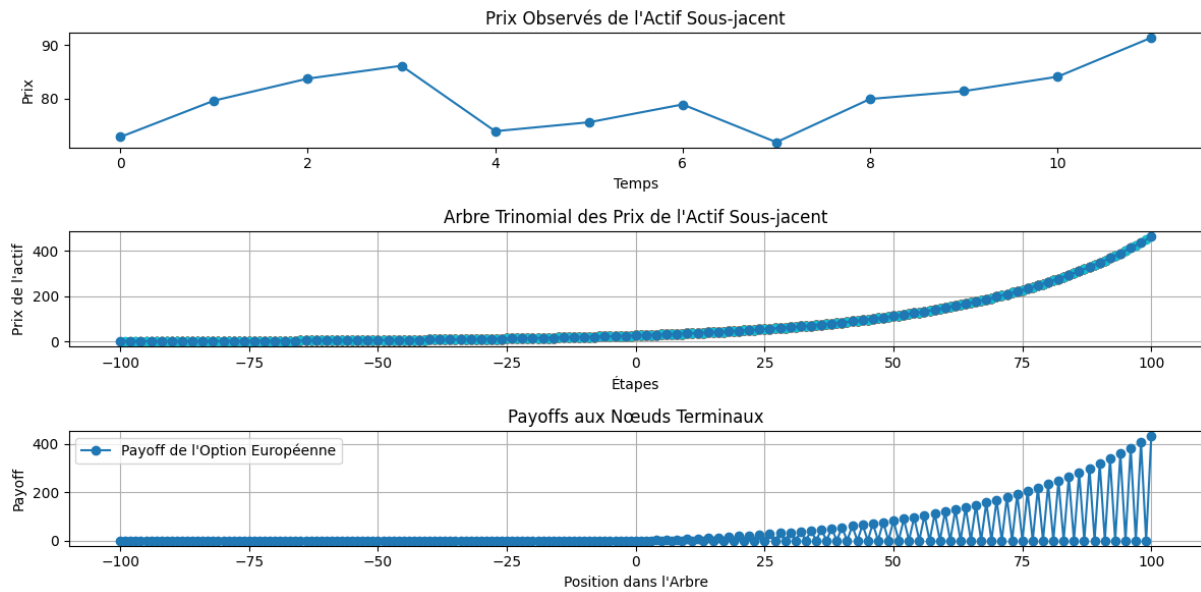


FIGURE 10 – Payoffs aux noeuds Terminaux

On implémente un modèle d'arbre trinomial pour l'évaluation d'options. Ce modèle est une méthode numérique pour la valorisation d'options en simulant les trajectoires futures possibles du prix de l'actif sous-jacent.

Le code calcule le prix d'une option européenne, d'une option swing et d'un contrat swap.

#### Détails de l'implémentation :

- Le code calcule d'abord les facteurs up, down et middle ( $u$ ,  $d$  et  $m$ ) pour l'arbre trinomial. Ces facteurs sont basés sur le taux d'intérêt sans risque ( $r$ ), la volatilité ( $\sigma$ ) et la maturité ( $T$ ) de l'option.
- Ensuite, le code génère l'arbre trinomial. Cet arbre est une grille de prix d'actifs qui montre tous les chemins possibles que le prix de l'actif peut emprunter pendant la durée de vie de l'option.
- Une fois l'arbre trinomial généré, le code calcule le payoff de l'option à chaque nœud de l'arbre. Le payoff est la différence entre le prix d'exercice de l'option et le prix au comptant de l'actif à l'échéance de l'option.
- Enfin, le code utilise l'induction rétrograde pour calculer le prix de l'option. L'induction rétrograde est un processus qui consiste à remonter le temps de la maturité de l'option jusqu'au présent. À chaque nœud de l'arbre, le code prend la valeur attendue des payoffs à l'étape suivante. Cette valeur attendue est actualisée à la valeur présente en utilisant le taux d'intérêt sans risque.

**Hypthèses :**

- Le taux intérêt est fixé à 5% lors de l'implémentation de cette partie, puisque la maturité de l'option est de 2 ans, à cette date, le taux d'intérêt affichait des valeurs oscillante autour de 5%.
- La volatilité prise en considération est celle obtenue à partir des estimations de la première partie.
- La maturité du contrat est de 12 mois.

*Les résultats obtenues dans l'implémentatooin sont comme suite :*

- Prix de l'option européenne : 0.00
- Prix de l'option Swing : 0.53
- Payoff du contrat Swap : -40.20

**Interprétation des valeurs obtenues**

- Le prix de l'option Swing : 0,53 indique que l'option Swing a une certaine valeur, ce qui suggère que le marché s'attend à ce que le prix de l'actif sous-jacent évolue dans l'un ou l'autre sens (à la hausse ou à la baisse) avant la date d'expiration de l'option. Le prix de 0,53 représente la prime que l'acheteur de l'option paie pour le droit d'acheter ou de vendre l'actif au prix d'exercice de 30 à l'une des dates d'exercice.
- Le Payoff du contrat Swap : -40,20 négatif implique que le contrat Swap est actuellement hors de l'argent pour le payeur à taux flottant. Cela signifie que le taux flottant actuel est inférieur au taux fixe convenu de 4%. En conséquence, le payeur à taux flottant devrait effectuer un paiement au payeur à taux fixe pour compenser la différence de taux d'intérêt.
- Le fait que l'option européenne soit sans valeur suggère qu'elle est soit profondément dans l'argent, soit qu'elle a une durée de vie très courte, soit qu'elle est associée à un actif très volatil. Lorsqu'une option est profondément dans l'argent, elle a une valeur intrinsèque importante, ce qui rend la composante de la valeur temporelle relativement moins importante. Un court délai jusqu'à l'échéance réduit le potentiel de mouvement significatif du prix de l'actif, ce qui diminue la valeur de l'option. Une forte volatilité de l'actif peut entraîner une plus grande amplitude de mouvements de prix possibles, ce qui rend moins probable que l'option expire dans l'argent.
- D'après les valeurs fournies, il semble que le marché s'attende à une certaine volatilité du prix de l'actif sous-jacent. La valeur de l'option Swing et le fait que le contrat Swap soit hors de l'argent pour le payeur à taux flottant indiquent cette anticipation. Cependant, le fait que l'option européenne soit sans valeur suggère que le marché n'est pas excessivement optimiste quant à l'évolution du prix de l'actif à court terme.

## Conclusion

Le modèle trinomial est un outil puissant pour la valorisation des options et d'autres produits dérivés. En augmentant le nombre d'étapes  $N$ , le modèle trinomial converge vers les résultats obtenus par les méthodes continues telles que le modèle de Black-Scholes, tout en offrant une flexibilité accrue dans la modélisation des chemins de prix de l'actif sous-jacent.

### 3.2.4 Valorisation du Swing et Swap avec simulation Monte Carlo

Cette partie présente une étude approfondie des méthodes de Monte Carlo pour la valorisation des options swing et des swaps de commodité. Nous discutons des fondements théoriques, des définitions et des propriétés des méthodes de Monte Carlo et fournissons des applications spécifiques aux instruments financiers mentionnés.

Les méthodes de Monte Carlo sont largement utilisées pour la valorisation des instruments financiers complexes. Cette méthode consiste à simuler de nombreuses trajectoires du processus stochastique sous-jacent afin d'estimer les valeurs d'espérance des payoffs futurs. Nous présentons ici les bases théoriques des méthodes de Monte Carlo et leur application spécifique à la valorisation des options swing et des swaps de commodité.

**Méthode de Monte Carlo :** La méthode de Monte Carlo est une technique numérique utilisée pour estimer des valeurs d'espérance et des intégrales multidimensionnelles. Elle repose sur la loi des grands nombres et le théorème central limite.

Soit  $X$  une variable aléatoire de loi  $P$  et  $f : R \rightarrow R$  une fonction mesurable. L'objectif est d'estimer l'espérance  $E[f(X)]$ .

#### Loi des Grands Nombres

La loi des grands nombres (LGN) stipule que pour une suite de variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) selon la loi de  $X$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) \xrightarrow{a.s.} E[f(X)] \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty,$$

où  $\xrightarrow{a.s.}$  indique la convergence presque sûre.

#### Théorème Central Limite

Le théorème central limite (TCL) stipule que pour une suite de variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  i.i.d. selon la loi de  $X$  avec espérance  $\mu$  et variance  $\sigma^2$ ,

$$\sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) - E[f(X)] \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty,$$

où  $\xrightarrow{d}$  indique la convergence en distribution et  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  est la loi normale de moyenne 0 et de variance  $\sigma^2$ .

**Estimation de Monte Carlo** Pour estimer  $E[f(X)]$  par la méthode de Monte Carlo, nous générons un échantillon de  $n$  réalisations  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de  $X$  et calculons la moyenne empirique :

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i).$$

### Erreur et Intervalle de Confiance

L'erreur de l'estimation est donnée par  $\hat{\mu}_n - E[f(X)]$ . Sous l'hypothèse du TCL, un intervalle de confiance pour  $E[f(X)]$  avec un niveau de confiance  $1 - \alpha$  est :

$$\hat{\mu}_n \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

où  $z_{\alpha/2}$  est le quantile de la loi normale standard.

### Implémentation en Monte Carlo

```
def swing_option_trinomial(prices, strike, maturity, window_size, N, u, d,
    m, pu, pm, pd, r, dt):

    swing_prices = []
    for price in prices:
        tree = generate_tree(price, u, d, m, N)
        payoff = np.zeros((2 * N + 1, N + 1))

        for j in range(N, -1, -1):
            for i in range(-j, j + 1, 2):
                if j == N:
                    payoff[N + i, j] = max(0, tree[N + i, j] - strike)
                else:
                    exercise = max(0, tree[N + i, j] - strike)
                    hold = (pu * payoff[N + i + 1, j + 1] +
                        pm * payoff[N + i, j + 1] +
                        pd * payoff[N + i - 1, j + 1]) * np.exp(-r * dt)
                    payoff[N + i, j] = max(exercise, hold)

        swing_value = np.max(payoff[:-(N - maturity), 0])
        swing_prices.append(swing_value * np.exp(-r * maturity * dt))

    return swing_prices
```

### Résultats de l'implémentation :

- Average Swing Option Price (Monte Carlo) : 0.00
- Average Swap Payoff (Monte Carlo) : -40.20

### Conclusion :

La valorisation à l'aide de la simulation Monte Carlo est cohérente avec les résultats obtenus par le modèle trinomial.

## Références

- [1] Michael J. BRENNAN et Eduardo S. SCHWARTZ. “Evaluating Natural Resource Investments”. In : *The Journal of Business* 58.2 (1985).
- [2] Les CLEWLOW et Chris STRICKLAND. “Valuing Energy Options in a One Factor Model Fitted to Forward Prices”. In : *SSRN Electronic Journal* (1999).