Лекция 2

2. Условные вероятности. Независимость

2.1. Условные вероятности

Пусть A, B — некоторые события, причём $\mathsf{P}(B) > 0$. *Условной вероятностью* $\mathsf{P}(A\,|B)$ события A при условии, что произошло событие B, называется величина

$$\mathsf{P}(A\,|B) = \frac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(B)}. \tag{1.1}$$

Для условной вероятности $\mathsf{P}(A\,|B)$ применяется также обозначение $\mathsf{P}_B(A)$.

Запишем (1.1) в виде

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(B)\,\mathsf{P}(A\,|B). \tag{1.2}$$

Равенство (1.2) называется *теоремой умножения.*

Пример 1. В урне находится M белых и $N-M$ чёрных шаров. Последовательно выбираются два шара без возвращения. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

Решение. Обозначим события

$$B = \{\text{ 1-й вынутый шар — белый }\},$$
$$A = \{\text{ 2-й вынутый шар — белый }\}.$$

Тогда

$$\mathsf{P}(B) = \frac{M}{N}, \quad \mathsf{P}(A\,|B) = \frac{M-1}{N-1}.$$

Из теоремы умножения получаем

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(B)\,\mathsf{P}(A\,|B) = \frac{M(M-1)}{N(N-1)}.$$

Теорема 1. (Теорема умножения.) *Пусть события $A_1, \ldots, A_n$ таковы, что $\mathsf{P}(A_1 \ldots A_{n-1}) > 0$. Тогда*

$$\mathsf{P}(A_1 \ldots A_n) = \mathsf{P}(A_1)\,\mathsf{P}(A_2\,|A_1)\,\mathsf{P}(A_3\,|A_1A_2) \ldots \mathsf{P}(A_n\,|A_1 \ldots A_{n-1}). \tag{1.3}$$

Доказательство. Из условия теоремы следует существование всех условных вероятностей в (1.3). Индукция по n. При $n = 2$ равенство (1.3) вытекает из (1.2). Пусть (1.3) справедливо при $n = k$. Докажем его при $n = k + 1$. Подставляя в (1.2) $B = A_1 \ldots A_k$ и $A = A_{k+1}$, получим

$$\mathsf{P}(A_1 \ldots A_k A_{k+1}) = \mathsf{P}(A_1 \ldots A_k)\,\mathsf{P}(A_{k+1}\,|A_1 \ldots A_k).$$

Из этого равенства и индукционного предположения следует (1.3) при $n = k + 1$. ∎

Пример 2. У человека в кармане n ключей, из которых только один подходит к его двери. Ключи последовательно извлекаются (без возвращения) до тех пор, пока не появится нужный ключ. Найти вероятность того, что нужный ключ появится при k-м извлечении.

Р е ш е н и е. Пусть A_i обозначает событие, состоящее в том, что нужный ключ появится при i-м извлечении, $i = 1, \ldots, n$. Нетрудно убедиться в справедливости формул

$$\mathsf{P}(A_i \,|\, \overline{A}_1 \ldots \overline{A}_{i-1}) = \frac{1}{n-i+1}, \quad \mathsf{P}(\overline{A}_i \,|\, \overline{A}_1 \ldots \overline{A}_{i-1}) = \frac{n-i}{n-i+1},$$

где $i = 2, \ldots, n$. Представим событие A_k в виде произведения

$$A_k = \overline{A}_1 \ldots \overline{A}_{k-1} A_k.$$

Используя теорему умножения, получаем

$$\mathsf{P}(A_k) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n-k+2} \cdot \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}.$$

2.2. Формула полной вероятности

Система событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$ называется *конечным разбиением* $\mathbf{\Omega}$, если они попарно несовместны и

$$B_1 + B_2 + \ldots + B_n = \mathbf{\Omega}. \tag{2.1}$$

Теорема 1. (Формула полной вероятности.) *Пусть события $B_1, \ldots, B_n$ образуют конечное разбиение $\mathbf{\Omega}$ и все $\mathsf{P}(B_k) > 0$. Тогда для любого события A справедлива формула*

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(B_k)\, \mathsf{P}(A \,|B_k), \tag{2.2}$$

называемая формулой полной вероятности.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2.1) следует разложение A на сумму

$$A = A\mathbf{\Omega} = AB_1 + AB_2 + \ldots AB_n.$$

События AB_1, $AB_2 \ldots AB_n$ попарно независимы. Из конечной аддитивности P и теоремы умножения (1.2) получаем

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(AB_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(B_k)\, \mathsf{P}(A \,|B_k).$$

Теорема доказана. ■

П р и м е р 1. В условиях примера 1.1 вычислим вероятность A, т. е. вероятность того, что 2-й вынутый шар белый.

Р е ш е н и е. Имеем

$$\mathsf{P}(B) = \frac{M}{N}, \quad \mathsf{P}(\overline{B}) = \frac{N-M}{N},$$
$$\mathsf{P}(A \,|B) = \frac{M-1}{N-1}, \quad \mathsf{P}(A \,|\overline{B}) = \frac{M}{N-1}.$$

По формуле полной вероятности

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B)\, \mathsf{P}(A \,|B) + \mathsf{P}(\overline{B})\, \mathsf{P}(A \,|\overline{B}) = \frac{M}{N} \frac{M-1}{N-1} + \frac{N-M}{N} \frac{M}{N-1} = \frac{M}{N},$$

т. е. $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B)$.

П р и м е р 2. Из урны, содержащей M белых и $N - M$ чёрных шаров утерян один шар неизвестного цвета. Какова вероятность вытащить наудачу из урны белый шар?

Р е ш е н и е. Пусть B_k — событие, состоящее в том, что утеряно k белых шаров ($k = 0,\ 1$); A — событие, состоящее в том, что шар, извлечённый из оставшихся шаров, оказался белым. Имеем

$$\mathsf{P}(B_0) = \frac{N - M}{N}, \quad \mathsf{P}(B_1) = \frac{M}{N},$$
$$\mathsf{P}(A\,|B_0) = \frac{M}{N - 1}, \quad \mathsf{P}(A\,|B_1) = \frac{M - 1}{N - 1}.$$

По формуле полной вероятности

$$\mathsf{P}(A) = \frac{N - M}{N}\,\frac{M}{N - 1} + \frac{M}{N}\,\frac{M - 1}{N - 1} = \frac{M}{N},$$

Отметим, что вероятность извлечения белого шара из урны до утери шара тоже равна M/N.

2.3. Формулы Байеса

Теорема 1. *Пусть события $B_1,\ \ldots,\ B_n$ образуют конечное разбиение $\mathbf{\Omega}$ и все $\mathsf{P}(B_k) > 0$. Тогда для любого события A, $\mathsf{P}(A) > 0$, справедливы формулы*

$$\mathsf{P}(B_k\,|A) = \frac{\mathsf{P}(B_k)\,\mathsf{P}(A\,|B_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{P}(B_i)\,\mathsf{P}(A\,|B_i)}, \tag{3.1}$$

называемые формулами Байеса.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме умножения

$$\mathsf{P}(B_k A) = \mathsf{P}(B_k)\,\mathsf{P}(A\,|B_k) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B_k\,|A).$$

Следовательно

$$\mathsf{P}(B_k\,|A) = \frac{\mathsf{P}(B_k)\,\mathsf{P}(A\,|B_k)}{\mathsf{P}(A)}.$$

Применяя к знаменателю $\mathsf{P}(A)$ формулу полной вероятности (2.2), получаем (3.1). ■

Формулы Байеса можно интерпретировать следующим образом. Назовём события B_k гипотезами. Пусть событие A — результат некоторого эксперимента. Вероятности $\mathsf{P}(B_k)$ — это *априорные* вероятности гипотез, вычисляемые до проведения опыта, а условные вероятности $\mathsf{P}(B_k\,|A)$ — это *апостериорные* вероятности гипотез, вычисляемые после того, как известен результат эксперимента A. Формулы Байеса позволяют по априорным вероятностям гипотез и по условным вероятностям события A при гипотезах B_k вычислять апостериорные вероятности $\mathsf{P}(B_k\,|A)$.

П р и м е р 1. В урне лежит шар неизвестного цвета — с равной вероятностью белый или чёрный. В урну опускается один белый шар и после тщательного перемешивания наудачу извлекается один шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что в урне остался белый шар?

Р е ш е н и е. Пусть $B_1 = \{$в урне белый шар$\}$, $B_2 = \{$в урне чёрный шар$\}$. Имеем

$$\mathsf{P}(B_1) = \frac{1}{2}, \quad \mathsf{P}(B_2) = \frac{1}{2},$$
$$\mathsf{P}(A\,|B_1) = 1, \quad \mathsf{P}(A\,|B_2) = \frac{1}{2}.$$

Согласно формуле Байеса

$$\mathsf{P}(B_1\,|A) = \frac{\mathsf{P}(B_1)\mathsf{P}(A\,|B_1)}{\mathsf{P}(B_1)\mathsf{P}(A\,|B_1) + \mathsf{P}(B_2)\mathsf{P}(A\,|B_2)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

2.4. Независимость событий

События A и B называются *независимыми*, если

$$\mathsf{P}(AB) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B). \tag{4.1}$$

Если равенство (4.1) не выполняется, события будут называться *зависимыми*.

Приведём некоторые свойства независимых событий.

1. Если $\mathsf{P}(B) > 0$, то независимость A и B эквивалентна равенству

$$\mathsf{P}(A\,|B) = \mathsf{P}(A).$$

2. Если A и B независимы, то независимы $\overline{A}$ и B.

Это следует из

$$\mathsf{P}(\overline{A}B) = \mathsf{P}(B - AB) = \mathsf{P}(B)(1 - \mathsf{P}(A)) = \mathsf{P}(\overline{A})\,\mathsf{P}(B).$$

3. Пусть события A и B_1 независимы и независимы также события A и B_2, при этом $B_1B_2 = \varnothing$. Тогда независимы события A и $B_1 + B_2$.

Имеем

$$\mathsf{P}(A(B_1 + B_2)) = \mathsf{P}(AB_1 + AB_2) = \mathsf{P}(AB_1) + \mathsf{P}(AB_2) =$$
$$= \mathsf{P}(A)(\mathsf{P}(B_1) + \mathsf{P}(B_2)) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B_1 + B_2).$$

П р и м е р 1. Из колоды в 52 карты (состоящей из 13 карт каждой масти) случайно вынимается карта. Рассмотрим события

$$A = \{\text{ вынут туз }\}, \quad B = \{\text{ вынута карта бубновой масти }\}.$$

Тогда событие $AB = \{$ вынут туз бубновой масти $\}$. Имеем

$$\mathsf{P}(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}, \quad \mathsf{P}(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4},$$
$$\mathsf{P}(AB) = \frac{1}{52} = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B).$$

Следовательно, события A и B независимы.

Предположим теперь, что колода содержит ещё и джокер. В этом случае

$$\mathsf{P}(A) = \frac{4}{53}, \quad \mathsf{P}(B) = \frac{13}{53},$$
$$\mathsf{P}(AB) = \frac{1}{53} \neq \frac{4\cdot 13}{53^2} = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B).$$

Мы видим, что события A и B зависимы.

События A_1, A_2, $\ldots$, A_n называются *независимыми*, если для любых $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_m \le n$, $2 \le m \le n$, выполняются равенства

$$\mathsf{P}(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_m}) = \mathsf{P}(A_{i_1})\,\mathsf{P}(A_{i_2}) \ldots \mathsf{P}(A_{i_m}); \tag{4.2}$$

в противном случае события называются *зависимыми*. Независимость нескольких событий называется иногда *независимостью событий в совокупности*.

П р и м е р 2 (пример Бернштейна). На плоскость бросается тетраэдр, три грани которого покрашены соответственно в красный, синий и зелёный цвета, а на четвёртую нанесены все три цвета. Рассмотрим события

$$R = \{ \text{ выпала грань, содержащая красный цвет } \},$$
$$G = \{ \text{ выпала грань, содержащая зелёный цвет } \},$$
$$B = \{ \text{ выпала грань, содержащая синий цвет } \}.$$

Так как каждый из трёх цветов находится на двух гранях, то

$$\mathsf{P}(R) = \mathsf{P}(G) = \mathsf{P}(B) = \frac{1}{2}.$$

Любая пара цветов присутствует только на одной грани, поэтому

$$\mathsf{P}(RG) = \mathsf{P}(RB) = \mathsf{P}(GB) = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, события R, G, B попарно независимы. Так как

$$\mathsf{P}(RGB) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathsf{P}(R)\,\mathsf{P}(G)\,\mathsf{P}(B),$$

то мы видим, что события R, G, B зависимы.