Lab02 Lagrange插值

古宜民 **PB17000002**

2019.3.10

1. 计算结果

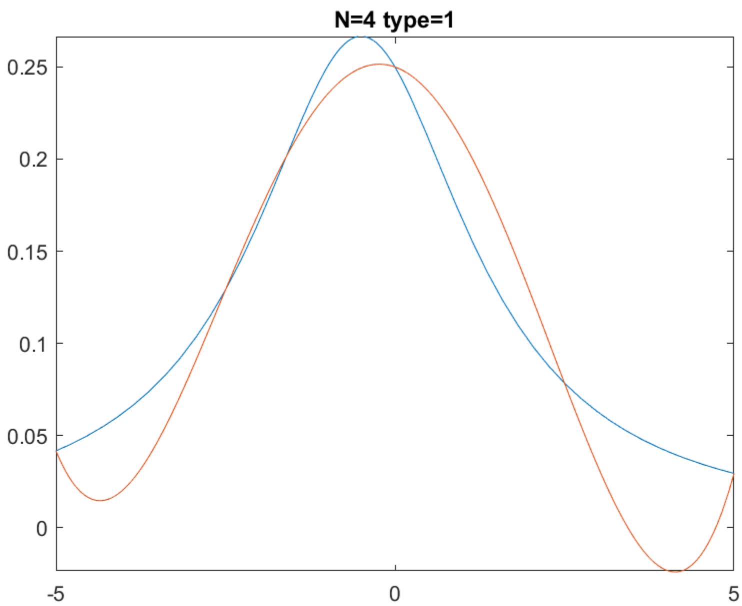
选取插值节点为均匀节点和Chebyshev点对函数 $f(x) = \frac{1}{4+x+x^2}$ 进行插值，去插值函数和原函数的最大偏差作为近似误差，取不同插值点数N=4，8，16，计算结果如下：

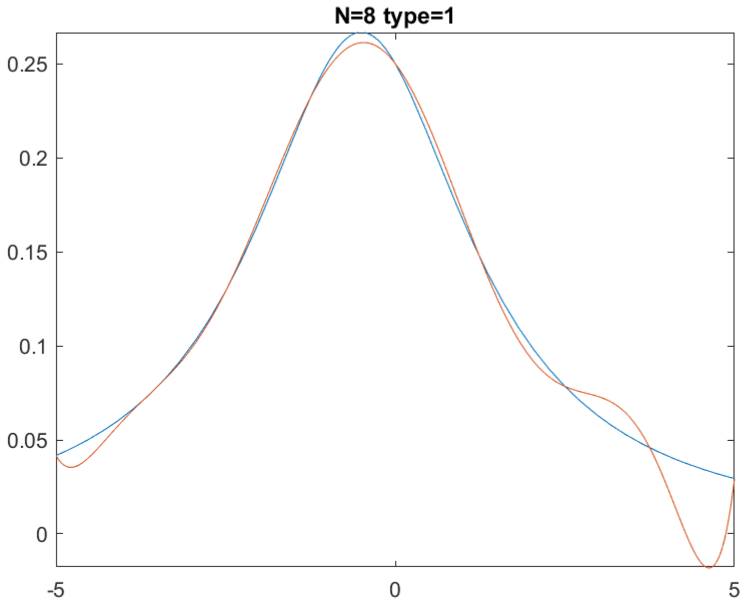
第一组节点： N = 4 Err = 6.475332068311e-02 N = 8 Err = 5.156056628632e-02 N = 16 Err = 1.071904436126e-01

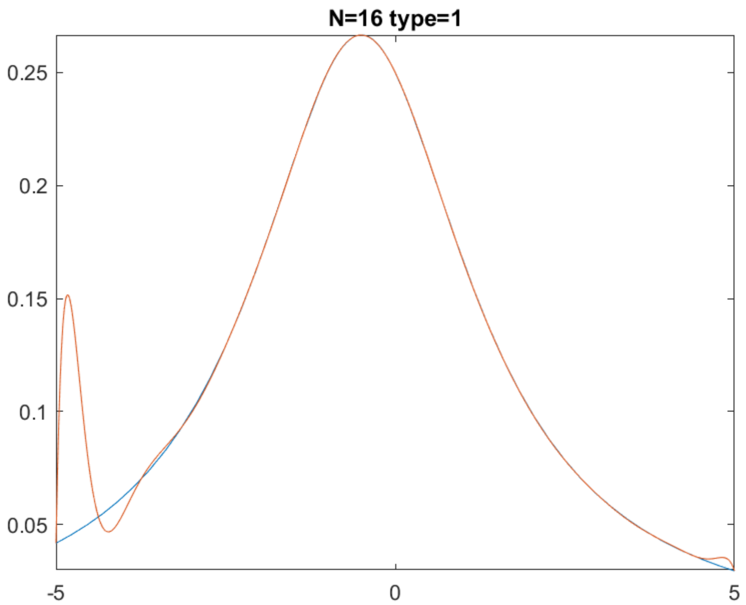
第二组节点： N = 4 Err = 5.437602650073e-02 N = 8 Err = 1.426092606546e-02 N = 16 Err = 8.367272096925e-04

函数图像：

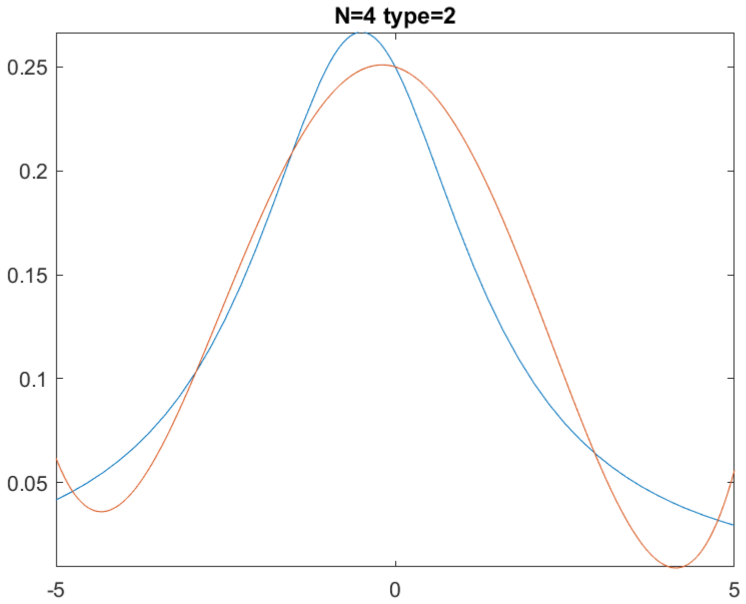
其中蓝色为原函数f，橙色为插值函数。 第一组节点：

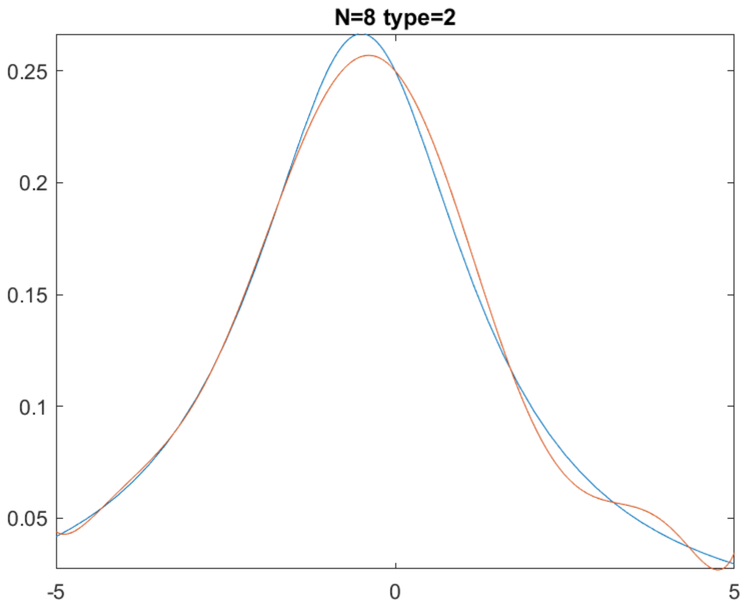


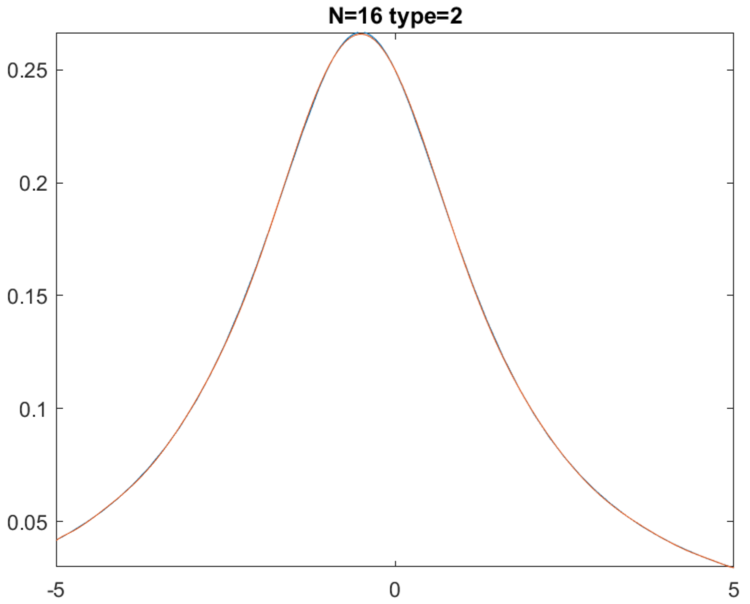




第二组节点：


N=4 type=2
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
-5
0
5


N=8 type=2
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
-5
0
5



2. 程序算法

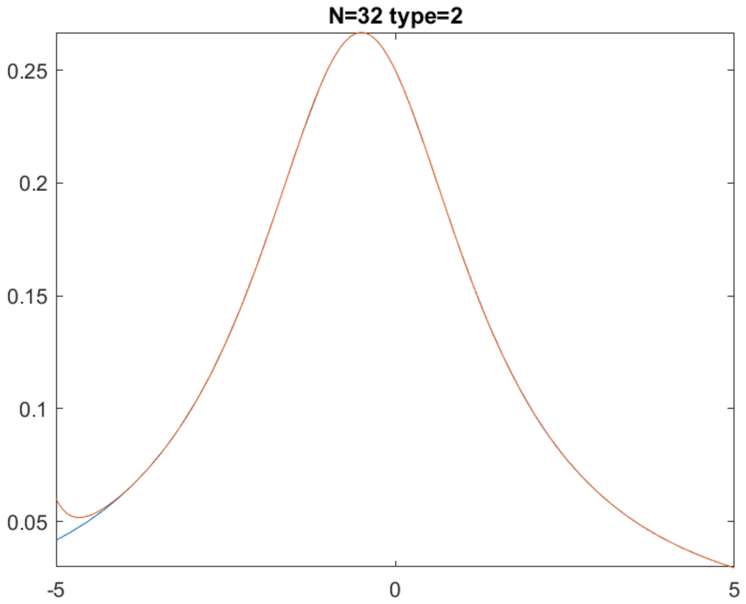
使用MATLAB。对于给定的N和节点类型，使用两层循环，内层计算插值函数$l_i(x)$，外层计算插值多项式$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$。之后在一系列值上计算误差$max\{p(x) - f(x)\}$。

关键代码如下：

```
        p = 0;
        for i = 0:N(k)
            l = 1;
            for j = 0:i-1
                l = conv(l, [1, -xi(j+1)] / (xi(i+1) - xi(j+1)));
            end
            for j = (i+1):N(k)
                l = conv(l, [1, -xi(j+1)] / (xi(i+1) - xi(j+1)));
            end
            p = polyadd(p, f(xi(i+1)) * l);
        end
        % p is the result Lagrange polynomial
        % calculate the max err
        err = max(abs(arrayfun(f, y) - polyval(p, y)));
```

3. 结果分析

对于不同次数的插值函数，可见均匀取插值节点时，在N=8时误差最小，N=4、16时误差较大。N=4时误差来自于次数太低，插值函数不能很好地反应原函数性质，偏差较大；而N=16时误差来自于在定义域边缘处出现了Runge现象，误差很大，而中间区域于原函数符合得很好。取Chebyshev节点时，N=4，8，16误差依次减小，N=16时几乎于原函数完全相同。而若取更大的N值，如N=32，则也出现了误差增大的现象。当N更大时，两种插值函数在定义域边缘处都出现了几个数量级的误差。



相比之下，取Chebyshev节点的插值性质明显好于取均匀节点。N=16时其与原函数几乎完全符合。并且当N过大时产生的偏差也小于均匀节点。

4. 小结

由实验结果可见，插值函数的好坏不仅由插值函数的的次数决定，次数过低拟合不好，过高又会在区间端点附近出现较大误差，必须根据作图结果合理选择。另外插值节点的选择也影响结果，Chebyshev节点在端点附近取点较密，中间取点较为稀疏，能得到比均匀取点更稳定的结果、更小的误差。