연습문제 3장

3.2 확률변수 X의 확률밀도함수가 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & (0 \le x \le 2) \\ 0 & (x < 0 \text{ 또는 } x > 2) \end{cases}$$

(a) 상수 k의 값을 구하라
(b) 확률변수 X의 분포함수를 구하라
(c) $P(0 < X < 1)$을 구하라
(d) $E(X)$를 구하라
(e) $Var(X)$를 구하라

해답

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ $0 \le x \le 2$ 이므로 $\int_0^2 kx^2 dx = k\frac{1}{3}[x^3]_0^2 = 1$ 따라서 $k = \frac{3}{8}$

(b) $F(x) = \int_0^x \frac{3}{8}t^2 dt = \frac{3}{8}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^x = \frac{1}{8}x^3$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{8}x^3 & , 0 \le x \le 2 \\ 1 & , 2 < x \end{cases}$$

(c) $P(0 < X < 1) = F(1) - F(0) = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}$

(d) $E(X) = \int_0^2 \frac{3}{8} x^3 dx = \frac{3}{8}\left[\frac{1}{4} x^4\right]_0^2 = \frac{3}{2}$

(e) $E(X^2) = \int_0^2 \frac{3}{8} x^4 dx = \frac{3}{8}\left[\frac{1}{5} x^5\right]_0^2 = \frac{12}{5}$ $Var(X) = \frac{12}{5} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{20}$

연습문제 3장

3.5 두 확률변수 X와 Y의 결합확률함수 $f(x_i, y_j)$의 결합확률분포표가 다음과 같다.

X \ Y	4	10	$P(X=x)$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$P(Y=y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

(a) 확률변수 X의 주변확률분포표를 작성하라.
(b) 확률변수 Y의 주변확률분포표를 작성하라.
(c) 확률변수 X의 기댓값과 분산을 각각 구하라.
(d) 확률변수 Y의 기댓값과 분산을 각각 구하라.
(e) $E(XY)$를 구하라.
(f) 두 확률변수 X와 Y의 공분산 $Cov(X, Y)$를 구하라.
(g) 두 확률변수 X와 Y의 상관계수 $\rho(X, Y)$를 구하라.
(h) 두 확률변수 X와 Y가 서로 독립인지의 여부를 확인하라.

해답 (a)

X	1	3	
$h(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

해답 (b)

Y	4	10	
$g(y_j)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

(c) $E(X) = \sum_i x_i h(x_i) = 1 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2} = 2$

$Var(X) = \sum_i x_i^2 h(x_i) - [E(X)]^2 = 1^2 \times \frac{1}{2} + 3^2 \times \frac{1}{2} - 2^2 = 1$

(d) $E(Y) = \sum_j y_j g(y_j) = 4 \times \frac{1}{2} + 10 \times \frac{1}{2} = 7$

$Var(Y) = \sum_j y_j^2 g(y_j) - [E(Y)]^2 = 4^2 \times \frac{1}{2} + 10^2 \times \frac{1}{2} - 7^2 = 9$

(e) $E(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j f(x_i, y_j)$

$= 1 \times 4 \times \frac{1}{4} + 1 \times 10 \times \frac{1}{4} + 3 \times 4 \times \frac{1}{4} + 3 \times 10 \times \frac{1}{4} = 14$

(f) $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$= 14 - 2 \times 7 = 0$

(g) $\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{0}{\sqrt{1}\sqrt{9}} = 0$

(h) $f(x_i, y_j) = h(x_i) g(y_j)$ 따라서 독립

연습문제 3장

3.10 어떤 학급에서 시험을 본 결과 평균이 24점, 표준편차가 3점이었다. 성적이 나빠 학급의 모든 학생에게 성적을 두 배하고 10점을 더해 주었다. 이때 이 학급의 평균과 표준편차를 각각 구하라.

해답

시험점수를 확률변수 X라고 하면,

$E(X) = 24 \qquad \sqrt{Var(X)} = 3$

평균 $E(2X + 10) = 2E(X) + 10 = 2 \times 24 + 10 = 58$

표준편차 $\sqrt{Var(2X + 10)} = \sqrt{4\,Var(X)} = 2\sqrt{Var(X)} = 2 \times 3 = 6$

연습문제 3장

3.18 어느 지역의 폭풍우 지속 시간을 X라고 할 때, 확률변수 X의 확률밀도함수가 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} x/8, & (0 < x \leq 2) \\ 2/x^2, & (2 < x < 8) \\ 0, & (x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 8) \end{cases}$$

(a) 폭풍우의 평균 지속 시간을 구하라
(b) 폭풍우가 2시간 전에 시작되었다고 가정할 때, 1시간 안에 그칠 확률을 구하라

해답

(a) 평균 지속 시간

$$E(X) = \int_0^2 \frac{x^2}{8}dx + \int_2^8 \frac{2}{x}dx \quad = \left[\frac{x^3}{24}\right]_0^2 + [2\ln x]_2^8 \quad = \frac{1}{3} + 4\ln 2$$

(b) $P[X \leq 3] = \int_0^2 \frac{x}{8}dx + \int_2^3 \frac{2}{x^2}dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$

연습문제 3장

3.20 어느 지역에서 발생하는 폭풍우에 의한 강수량 X(in)과 유출량 Y(cfs)의 결합분포가 다음과 같다

X Y	10	20	30
1	0.05	0.10	0.0
2	0.15	0.25	0.10
3	0.0	0.25	0.10

(a) 폭풍우에 의한 강수량과 유출량이 각각 2in, 20cfs 이상일 확률을 구하라
(b) 폭풍우가 지나간 후 우량계에 나타난 강수량이 2in 일 때, 이 폭풍우에
의한 유출량이 20cfs 이상일 확률을 구하라
(c) 두 확률변수 X와 Y가 서로 독립인지의 여부를 확인하라

해답

(a)

$$P[X \geq 2,\ Y \geq 20] = 1 - P[x = 1,\ Y = 10] = 1 - 0.05 = 0.95$$

(b)

$$P[X = 2,\ Y \geq 20] = 0.25 + 0.10 = 0.35$$

(c)

$$0.05 = P[X = 1,\ Y = 10] \neq P[X = 1] \cdot P[Y = 10] = 0.15 \times 0.2 = 0.03$$

따라서 독립이 아니다.