



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

---

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

---

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

---

## ОТЧЕТ

по лабораторной работе № 6  
по курсу «Анализ алгоритмов»

Студент ИУ7-52Б  
(Группа)

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

Новиков А. А.  
(И. О. Фамилия)

Преподаватель

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

Строганов Д. В.  
(И. О. Фамилия)

2024 г.

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>3</b>
<b>1 Аналитический раздел</b>	<b>4</b>
1.1 Формулировка задачи коммивояжера . . . . .	4
1.1.1 Алгоритм полного перебора . . . . .	4
1.1.2 Муравьиный алгоритм . . . . .	5
1.1.3 Описание алгоритма . . . . .	6
<b>2 Конструкторский раздел</b>	<b>7</b>
2.1 Требования к программному обеспечению . . . . .	7
2.2 Представления алгоритмов . . . . .	7
<b>3 Технологический раздел</b>	<b>10</b>
3.1 Средства реализации . . . . .	10
3.2 Реализация алгоритмов . . . . .	10
<b>4 Исследовательский раздел</b>	<b>14</b>
4.1 Технические характеристики . . . . .	14
4.2 Время выполнения алгоритмов . . . . .	14
4.3 Классы данных . . . . .	15
4.4 Результаты параметризации . . . . .	15
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b>	<b>17</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ</b>	<b>18</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Задача коммивояжера — одна из самых известных и старейших задач комбинаторной оптимизации. Ее корни уходят в 1831 год, когда в Германии была опубликована книга под названием "Кто такой коммивояжер и что он должен делать для процветания своего предприятия". В книге содержалась рекомендация: "Следует стремиться посетить как можно больше торговых точек, избегая повторного посещения". Это можно считать первым формулированием задачи коммивояжера [1].

**Цель лабораторной работы** — рассмотрение алгоритмов решения задачи коммивояжера.

Для достижения поставленной цели необходимо выполнить следующие задачи:

- сформулировать задачу коммивояжера;
- рассмотреть алгоритмы решения: полным перебором, с использованием муравьиного алгоритма;
- реализовать данные алгоритмы;
- провести сравнительный анализ времени работы алгоритмов;
- выполнить параметризацию для муравьиного алгоритма.

# 1 Аналитический раздел

В данном разделе будет сформулирована задача коммивояжера, а также будут рассмотрены 2 метода решения этой задачи: муравьиный алгоритм и алгоритм полного перебора.

## 1.1 Формулировка задачи коммивояжера

Пусть задан граф  $G = (V, E)$ , где  $V$  — множество вершин ( $|V| = n$ ), а  $E$  — множество ребер ( $|E| = m$ ). Каждое ребро  $((i, j) \in E$  имеет длину  $c_{ij}$ , определяемую матрицей расстояний  $C = \|c_{ij}\|$ . Если между вершинами  $i$  и  $j$  отсутствует ребро, соответствующий элемент матрицы принимается равным бесконечности ( $c_{ij} = \infty$ ) [1].

Подмножество попарно несмежных ребер графа  $G$  называется паросочетанием. Паросочетание считается совершенным, если каждая вершина графа инцидентна ровно одному ребру из этого множества. Совокупность простых попарно непересекающихся циклов, покрывающая все вершины графа  $G$ , называется 2-фактором. Если 2-фактор состоит из одного цикла, то он называется гамильтоновым циклом [2].

Задача заключается в поиске гамильтонова цикла минимальной длины, то есть цикла, который проходит через каждую вершину графа ровно один раз и возвращается в начальную точку.

### 1.1.1 Алгоритм полного перебора

Алгоритм полного перебора для решения задачи коммивояжера основывается на проверке всех возможных маршрутов в графе для определения минимального. Этот метод заключается в полном переборе всех вариантов обхода городов и выборе маршрута с наименьшей длиной. Однако количество возможных маршрутов быстро растет с увеличением числа городов  $n$ , поскольку сложность алгоритма составляет  $n!$ . Несмотря на то, что данный подход гарантирует получение точного решения, его применение становится крайне неэффективным даже при относительно небольшом количестве городов из-за значительных вычислительных затрат.

### 1.1.2 Муравьиный алгоритм

В основе муравьиного алгоритма лежит идея моделирования поведения колонии муравьев. Каждый муравей определяет свой маршрут на основе оставленных другими муравьями феромонов, а также сам оставляет феромоны, чтобы последующие муравьи ориентировались по ним. В результате при прохождении каждым муравьем своего маршрута наибольшее число феромонов остается на самом оптимальном пути. Временная сложность алгоритма была оценена как  $683 - (42,467N) + (1,0696N^2)$  [3]. Однако главный недостаток алгоритма заключается в том, что, по сравнению с алгоритмом полного перебора, он дает приближенное решение задачи, а не точное.

Вероятность перехода муравья  $k$  из текущей вершины  $i$  в вершину  $j$  рассчитывается по формуле:

$$P_{kij} = \begin{cases} \frac{\tau_{ij}^a \eta_{ij}^b}{\sum_{q \in J_{ik}} \tau_{iq}^a \eta_{iq}^b}, & \text{если вершина } j \text{ еще не посещена муравьем } k, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (1.1)$$

где:

- $a$  — параметр влияния феромона;
- $b$  — параметр влияния длины пути;
- $\tau_{ij}$  — количество феромонов на ребре  $(i, j)$ ;
- $\eta_{ij}$  — видимость (величина обратная расстоянию до вершины).

По окончании движения всех муравьев уровень феромонов на ребрах обновляется по формуле:

$$\tau_{ij}(t+1) = (1-p)\tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij}, \quad (1.2)$$

где  $p$  — коэффициент испарения феромона, а  $\Delta\tau_{ij}$  определяется как:

$$\Delta\tau_{ij} = \sum_{k=1}^N \Delta\tau_{ij}^k, \quad (1.3)$$

$$\Delta\tau_{ij}^k = \begin{cases} \frac{Q}{L_k}, & \text{если ребро } (i, j) \text{ посещено муравьем } k, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (1.4)$$

где  $Q$  — параметр, связанный с длиной оптимального пути, а  $L_k$  — длина маршрута муравья  $k$ .

### 1.1.3 Описание алгоритма

Пошаговое описание муравьиного алгоритма:

- 1) Муравей исключает из дальнейшего выбора вершины, которые уже были посещены, ссылаясь на список посещенных вершин, хранящийся в его памяти (список запретов  $J_{ik}$ ).
- 2) Муравей оценивает привлекательность вершин, основываясь на их видимости, которая обратно пропорциональна расстоянию между ними.
- 3) Муравей ощущает уровень феромонов на ребрах графа, что помогает ему определять предпочтительность маршрута.
- 4) После прохождения ребра  $(i, j)$  муравей оставляет на нем феромоны, количество которых зависит от длины маршрута  $L_k$ , пройденного муравьем, и параметра  $Q$ .

### ВЫВОД

В данном разделе была представлена формулировка задача коммивояжера, а также рассмотрены 2 метода ее решения: муравьиный алгоритм и алгоритм полного перебора

## **2 Конструкторский раздел**

В данном разделе будут определены требования к программному обеспечению и приведены схемы алгоритма полного перебора и муравьиного алгоритма для решения задачи коммивояжера.

### **2.1 Требования к программному обеспечению**

Входные данные: матрица стоимостей взвешенного неориентированного графа.

Выходные данные: кратчайший гамильтонов цикл.

### **2.2 Представления алгоритмов**

На рисунках 2.1 — 2.2 представлены схема алгоритма полного перебора и схема муравьиного алгоритма.

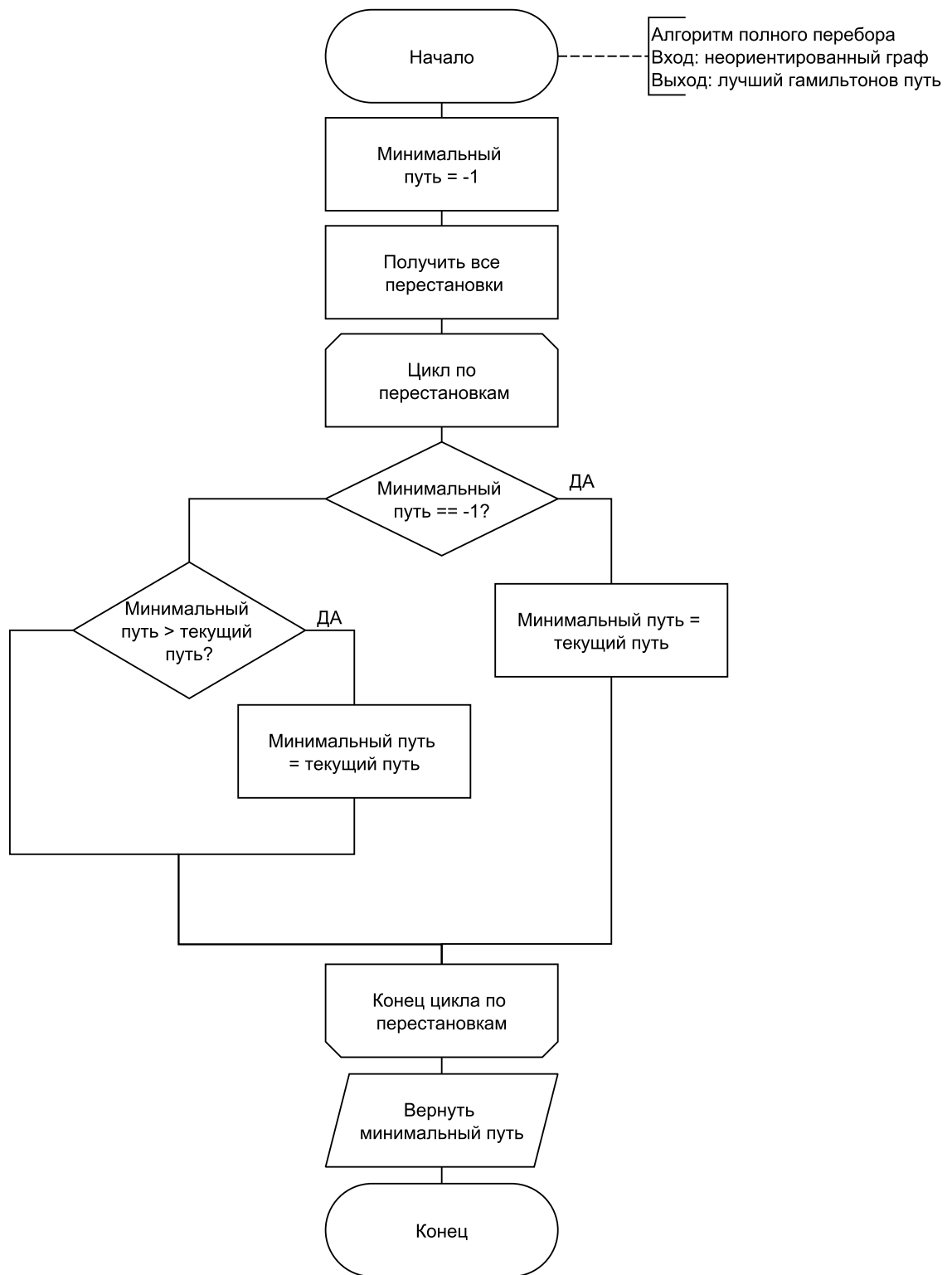


Рисунок 2.1 – Схема алгоритма полного перебора



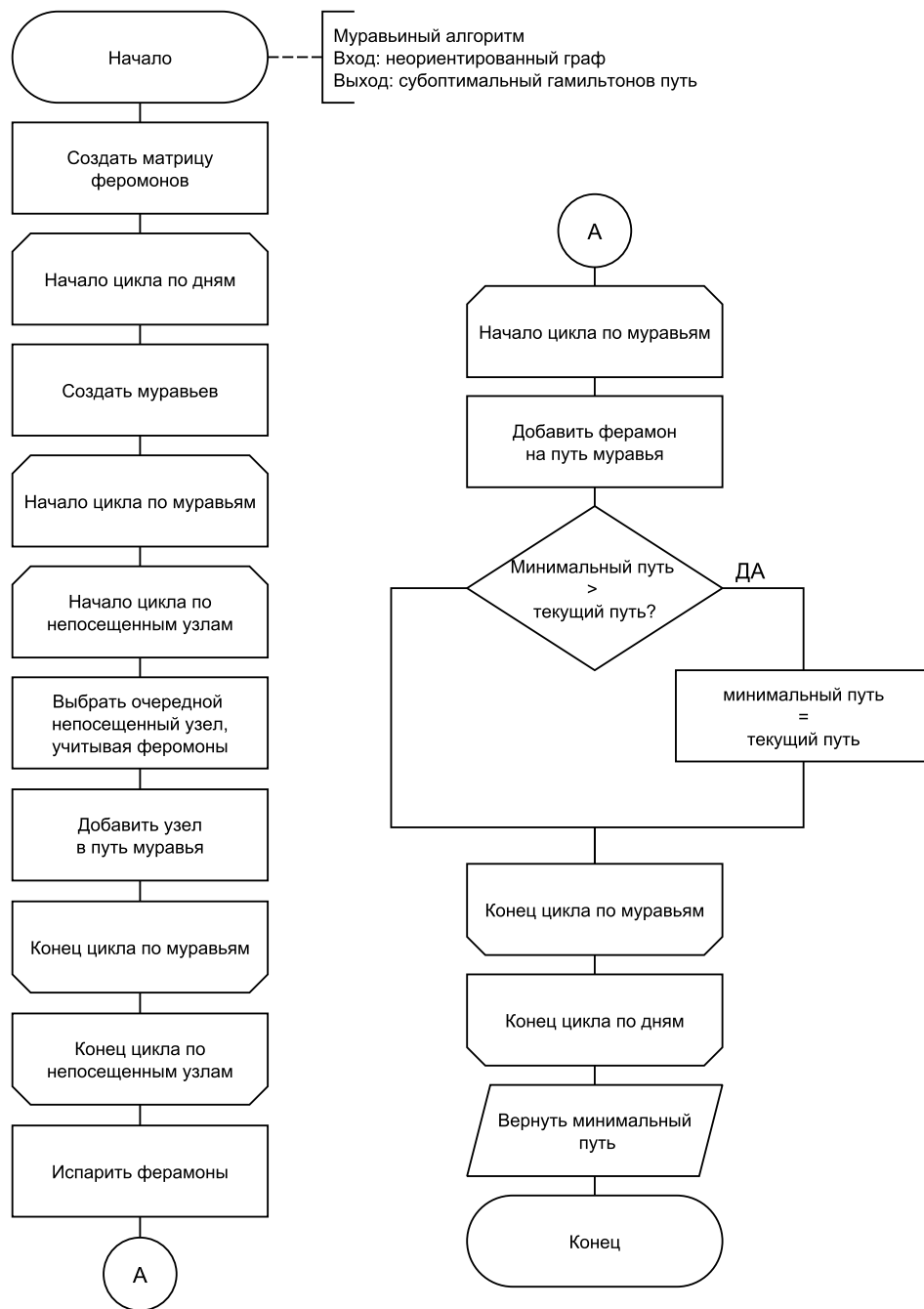


Рисунок 2.2 – Схема муравьиного алгоритма

## ВЫВОД

В данном разделе были определены требования к программному обеспечению и приведены схемы алгоритмов полного перебора и муравьиного алгоритма для решения задачи коммивояжера.

## 3 Технологический раздел

В данном разделе будут приведены средства реализации, листинги кода.

### 3.1 Средства реализации

Для реализации данной лабораторной работы выбран язык программирования *C++* [4]. Выбор обусловлен скоростью выполнения и наличием множества библиотек, упрощающих разработку.

### 3.2 Реализация алгоритмов

В листингах 3.1 — 3.4 представлены реализации алгоритмов.

Листинг 3.1 – Реализация алгоритма полного перебора

```
1  std::vector<int> bruteForceTSP(const
    std::vector<std::vector<int>>& graph) {
2      int n = graph.size();
3      std::vector<int> vertices(n);
4      for (int i = 0; i < n; ++i) vertices[i] = i;
5
6      std::vector<int> bestCycle;
7      double minDistance = numeric_limits<double>::max();
8
9      do {
10         double currentDistance = calculateDistance(vertices,
            graph);
11         if (currentDistance < minDistance) {
12             minDistance = currentDistance;
13             bestCycle = vertices;
14         }
15     } while (next_permutation(vertices.begin() + 1,
        vertices.end()));
16
17     return bestCycle;
18 }
```

Листинг 3.2 – Реализация функции обновления феромонов

```
1  void updatePheromones(std::vector<std::vector<double>>&
    pheromones, const std::vector<int>& bestCycle, double
    bestDistance) {
```

```

2      int n = pheromones.size();
3      for (int i = 0; i < n; ++i) {
4          for (int j = 0; j < n; ++j) {
5              pheromones[i][j] *= (1.0 - EVAPORATION_RATE);
6          }
7      }
8
9      for (size_t i = 0; i < bestCycle.size() - 1; ++i) {
10         int u = bestCycle[i];
11         int v = bestCycle[i + 1];
12         pheromones[u][v] += 1.0 / bestDistance;
13         pheromones[v][u] += 1.0 / bestDistance;
14     }
15 }

```

Листинг 3.3 – Реализация функции выбора следующей вершины

```

1  int chooseNextCity(int current, const std::vector<bool>&
    visited, const std::vector<std::vector<double>>& pheromones,
    const std::vector<std::vector<int>>& graph) {
2      int n = graph.size();
3      std::vector<double> probabilities(n, 0.0);
4      double sum = 0.0;
5
6      for (int next = 0; next < n; ++next) {
7          if (!visited[next]) {
8              probabilities[next] = pow(pheromones[current][next],
                ALPHA) * pow(1.0 / graph[current][next], BETA);
9              sum += probabilities[next];
10         }
11     }
12
13     double randomValue = ((double)rand() / RAND_MAX) * sum;
14     double cumulative = 0.0;
15     for (int next = 0; next < n; ++next) {
16         if (!visited[next]) {
17             cumulative += probabilities[next];
18             if (cumulative >= randomValue) {
19                 return next;
20             }
21         }
22     }

```

## Листинг 3.4 – Реализация муравьиного алгоритма

```
1 vector<int> antColonyOptimization(const
    std::vector<std::vector<int>>& graph) {
2     size_t n = graph.size();
3     std::vector<std::vector<double>> pheromones(n,
        vector<double>(n, 1.0));
4     std::vector<int> bestCycle;
5     double bestDistance = numeric_limits<double>::max();
6
7     srand(time(0));
8
9     for (int iter = 0; iter < ITERATIONS; ++iter) {
10         for (size_t start = 0; start < n; ++start) {
11             std::vector<bool> visited(n, false);
12             std::vector<int> cycle;
13             int current = start;
14             cycle.push_back(current);
15             visited[current] = true;
16
17             while (cycle.size() < n) {
18                 int next = chooseNextCity(current, visited,
                    pheromones, graph);
19                 if (next == -1) break;
20                 cycle.push_back(next);
21                 visited[next] = true;
22                 current = next;
23             }
24
25             if (cycle.size() == n &&
                graph[cycle.back()][cycle[0]] > 0) {
26                 cycle.push_back(cycle[0]);
27                 double distance = calculateDistance(cycle,
                    graph);
28                 if (distance < bestDistance) {
29                     bestDistance = distance;
30                     bestCycle = cycle;
31                 }
32             }
33         }
```

```
34
35     if (!bestCycle.empty()) {
36         updatePheromones(pheromones, bestCycle,
37                             bestDistance);
38     }
39
40     return bestCycle;
41 }
```

## ВЫВОД

В данном разделе были представлены реализации алгоритмов решения задачи коммивояжера: алгоритм полного перебора, муравьиный алгоритм.

## 4 Исследовательский раздел

В данном разделе проведен сравнительный анализ алгоритмов по используемому процессорному времени.

### 4.1 Технические характеристики

Технические характеристики используемого устройства:

- операционная система — Ubuntu Linux x86\_64 [5];
- память — 16 Гб;
- процессор — AMD Ryzen 5 5500U (6х2.10 ГГц) [6].

### 4.2 Время выполнения алгоритмов

Замеры времени проводились на графах с одинаковым количеством вершин. Каждое значение получено путем взятия среднего из 10 измерений. Результаты замеров приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Время работы алгоритмов (в мс)

Размер матрицы	Полный перебор	Муравьиный алгоритм
1	0.115	0.863
2	0.159	0.943
3	0.081	0.948
4	0.071	1.472
5	0.952	2.460
6	8.413	3.565
7	85.019	4.527
8	862.511	5.422
9	11282.250	6.619

Зависимости времени решения задачи коммивояжера от количества вершин графа для двух алгоритмов представлены на рисунке 4.1.

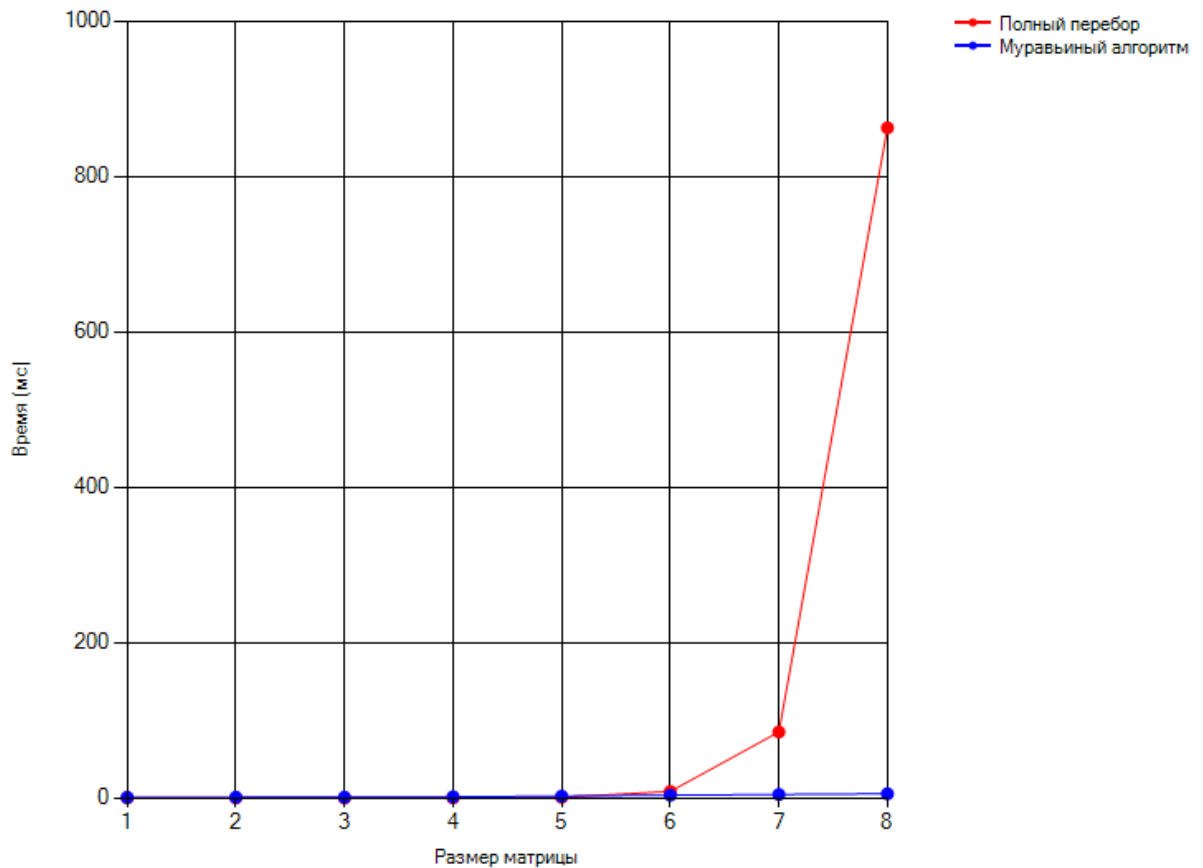


Рисунок 4.1 – Зависимость времени выполнения программы от количества вершин

### 4.3 Классы данных

В качестве класс данных для параметризации используются графы, построенные на городах Африке, при этом используется всего 3 графа. В качестве весов использовались расстояния между этими городами по прямой в км [7].

### 4.4 Результаты параметризации

В результате параметризации оказалось, что самыми лучшими параметрами по заданному классу данных оказались при  $\alpha = 0.1$ ,  $\rho = 0.5$  и количеством дней равным 50. При этом данные параметры дают лучший результат на всех классах данных и по всем параметрам сравнения. Результаты параметризации для лучших параметров представлены в таблице 4.2, а вся

таблица параметризации и класс данных представлены в приложении А.

Таблица 4.2 – Результаты параметризации муравьиного алгоритма

Параметры			Граф 1			Граф 2			Граф 3		
$\alpha$	$\rho$	Дни	min	max	avg	min	max	avg	min	max	avg
0.1	0.25	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.25	200	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.5	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.5	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.75	200	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.25	0.1	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.25	0.1	100	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.5	0.1	200	0	0	0	0	0	0	0	0	0

## ВЫВОД

В результате исследования было получено, что на графе с вершинами меньше 7 муравьиный алгоритм и алгоритм полного перебора выполняют задачу за примерно одинаковое время, а при количестве вершин большем или равном 7 муравьиный алгоритм работает около в раз быстрее, чем алгоритм полного перебора.

Также было выявлено, что при  $\alpha = 0.1$ ,  $\rho = 0.5$  и количеством дней равным 50 муравьиный алгоритм дает наилучшие результаты.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе работы были исследованы временные и алгоритмические сложности муравьиного алгоритма и метода полного перебора. Также были проведены замеры времени выполнения и параметризация муравьиного алгоритма, что дало возможность определить оптимальные параметры для набора данных, представленного в приложении А. Наилучшие параметры были установлены на уровне:  $\alpha = 0.1$ ,  $\rho = 0.5$  и количество дней равным 50.

В ходе выполнения данной лабораторной работы были решены следующие задачи:

- сформулирована задача коммивояжера;
- рассмотреть алгоритмы решения: полным перебором, с использованием муравьиного алгоритма;
- реализовать данные алгоритмы;
- провести сравнительный анализ времени работы алгоритмов;
- выполнить параметризацию для муравьиного алгоритма.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Меламед И. И., Сергеев С. И., Сигал И. Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. — 1989. — № 9. — С. 3—33.
2. Пережогин А. Л., Потапов В. Н. О числе гамильтоновых циклов в булевом кубе // Дискретный анализ и исследование операций. — 2001. — Т. 8, № 2. — С. 52—62.
3. Штовба С. Муравьиные алгоритмы // Exponenta Pro. Математика в приложениях. — 2003. — Т. 4, № 4. — С. 70—75.
4. C++ programming language [Электронный ресурс]. — URL: <https://isocpp.org/> (дата обращения 12.11.2024).
5. Ubuntu technical documentation for developers and IT pros [Электронный ресурс]. — URL: <https://ubuntu.com/tutorials> (дата обращения 01.10.2024).
6. AMD Ryzen 5 5500U Processor [Электронный ресурс]. — <https://www.amd.com/en/products/apu/amd-ryzen-5-5500u> (дата обращения 01.10.2024).
7. Google Maps [Электронный ресурс]. — URL: <https://www.google.ru/maps/> (дата обращения 20.12.2024).