GIMNAZIJA VIČ
se kaj??

Ime Priimek

NASLOV DELA

Raziskovalna naloga

Mentorica: izr. prof. dr. Ime Priimek
Somentor: doc. dr. Ime Priimek

Ljubljana, 2016

Kazalo

Naslov dela

Povzetek

V povzetku na kratko opišemo vsebinske rezultate dela. Sem ne sodi razlaga organizacije dela – v katerem poglavju/razdelku je kaj, pač pa le opis vsebine.

Angleški prevod slovenskega naslova dela

Abstract

Prevod slovenskega povzetka v angleščino.

Math. Subj. Class. (2020): 74B05, 65N99
Ključne besede: naravni logaritem, nenaravni algoritem
Keywords: natural logarithm, unnatural algorithm

1 Uvod

Na začetku prvega poglavja/razdelka (ali v samostojnem razdelku z naslovom Uvod) napišite kratek zgodovinski in matematični uvod. Pojasnite motivacijo za problem, kje nastopa, kje vse je bil obravnavan. Na koncu opišite tudi organizacijo dela – kaj je v kakšnem razdelku.

Če se uvod naravno nadaljuje v besedilo prvega poglavja, lahko nadaljujete z besedilom v istem razdelku, sicer začnete novega. Na začetku vsakega razdelka/podrazdelka poveste, čemu se bomo posvetili v nadaljevanju. Pri pisanju uporabljajte ukaze za matematična okolja, med formalnimi enotami dodajte vezno razlagalno besedilo.

2 Matrike in determinante

Definicija 2.1. Realna 2×2 matrika M je 2×2 shema realnih števil

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Množico vseh realnih 2×2 matrik označimo z $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 2×2 matrike lahko med sabo seštevamo in množimo ter jih množimo s skalarjem po naslednjih pravilih: Naj bosta

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \text{ in } \quad r \in \mathbb{R}.$$

Potem je

$$A + B = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}, \quad rA = \begin{bmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad AB = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}.$$

Na matrikah definiramo tudi operacijo transponiranje:

$$A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

Opomnimo, da množenje matrik ni komutativno. Naledenje trditve opisujejo lastnosti seštevanja, množenja in transponiranja matrik.

Trditev 2.2. *Velja naslednje:*

1. *Komutativnost seštevanja:* $A + B = B + A$*,*
2. *Distributivnost:* $A(B + C) = AB + AC$ *in* $(A + B)C = AC + BC$*,*
3. *Asociativnost množenja:* $A(BC) = (AB)C$ *in*
4. $(AB)^T = B^T A^T$*.*

Trditev 2.3. *Realne* 2×2 *matrike so grupa za seštevanje. Nevtralni element je ničelna matrika*

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

naprotna matrika matriki A *pa je matrika* $-A$*.*

Definicija 2.4. Matrka I je nevtralni element za množenje ali enota za množenje je, imenujemo jo *identiteta* in je enaka

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Diagonalna matrika D ima neničlne elemente samo na glavni diagonalni.

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}.$$

Matrika A je *obrnljiva*, če obstaja taka matrika X, da je $AX = XA = I$. Matriko X imenujemo *inverzna* matrika matrike A.

Trditev 2.5. *Obrnljive matrike so grupa za množenje, kjer je matrika I identiteta, inverzni element elementa pa je njegova inevrzna matrika.*

Definicija 2.6. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Determinanta matrike A je definirana kot

$$\det A = ad - bc.$$

Trditev 2.7. *Naj bosta $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Potem velja*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \textit{ in } \det(A)^T = \det(A).$$

Dokaz. To lahko računsko dokažem. Naj bosta

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \text{ in } \quad r \in \mathbb{R}.$$

Dokazujemo, da velja $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

$$\begin{aligned}
&\det \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \\
&(ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg) = (ad-bc)(eh-fg) \\
&acef + adeh + bcfg + bdgh - acef - adfg - bceh - bdgh = \\
&\qquad = adeh - adfg - bceh + bcfg \\
&acef - acef + adeh + bcfg + bdgh - bdgh - adfg - bceh = \\
&\qquad = adeh + bcfg - adfg - bceh \\
&adeh + bcfg - adfg - bceh = adeh + bcfg - adfg - bceh.
\end{aligned}$$

□

Trditev 2.8. *Naj bo $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Matrika A obrnjljiva natanko tedaj, ko je* $\det A \neq 0$.

Dokaz. Naj bo A obrnljiva in X njena inverzna matrika. Po trditvi 2.7 $AX = I$, torej je tudi $\det(AX) = \det A \det X = \det I = 1$, kar pomeni, da je $\det A$ različna od 0. Dokažimo še obratno. Če je $\det A \neq 0$, je inverzna matrika dana s formulo

$$X = A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

□

Opomba 2.9. Če je A celoštevilska matrika z determinanto 1 ali -1 je tudi inverzna matrika celoštevilska.

3 Linearne preslikave v $\mathbb{R}^2$ in matrike

Definicija 3.1. Z $\mathbb{R}^2$ označimo množico vseh vektorjev v ravnini,

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Definicija 3.2. Preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je *linearna*, če za vsaka dva vektorja $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ in za vsaki realni števili λ_1, λ_2 velja

$$\mathcal{A}(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 \mathcal{A}(\vec{v}_1) + \lambda_2 \mathcal{A}(\vec{v}_2).$$

Zapisu $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$ pravimo linearna kombinacija.

Definicija 3.3. Množica $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ je *baza*, če lahko vsak vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ na en sam način zapišemo kot

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2.$$

Trditev 3.4. *Množica $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ je baza natanko tedaj ko sta $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ nevzporedna. (dokaži!!)*

Definicija 3.5. Množica

$$\left\{ \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

je *standardna baza.*

Trditev 3.6. *Vektorja*

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix},$$

sta nevzporedna natanko tedaj, ko

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq 0.$$

Trditev 3.7. *Linearna preslikava je enolično določena s slikama dveh nevzporednih vektorjev.*

Poglejmo kako lahko linearno preslikavo $\mathcal{A}$ zapišemo v bazi $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Če je

$$\vec{v} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2, \quad \mathcal{A}(\vec{v}_1) = a\vec{v}_1 + c\vec{v}_2 \text{ in } \mathcal{A}(\vec{v}_2) = b\vec{v}_1 + d\vec{v}_2, \tag{3.1}$$

potem je

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\vec{v}) &= x_1\mathcal{A}(\vec{v}_1) + x_2\mathcal{A}(\vec{v}_2) \\
&= x_1(a\vec{v}_1 + c\vec{v}_2) + x_2(b\vec{v}_1 + d\vec{v}_2) \\
&= \vec{v}_1(x_1a + x_2b) + \vec{v}_2(x_1c + x_2d) \\
&= y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2.
\end{aligned}$$

Dogovorimo se, da bomo vsak vektor $\vec{v} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2$ identificirali z vektorjem komponent v baznih smereh. Zato je

$$\vec{v}_1 \simeq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 \simeq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v} \simeq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \mathcal{A}(\vec{v}) \simeq \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

Če sedaj linearni preslikavi $\mathcal{A}$ priredimo matriko

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

dobimo zvezo

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Linearni preslikavi $\mathcal{A}$ v bazi $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ pripada matrika A. V drugih bazah isti linearni preslikavi pripada drugačna matrika.

Trditev 3.8. *Če imamo linearno preslikavo $\mathcal{A}$, ki ji v bazi $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ pripada matrika A in linearno preslikavo $\mathcal{B}$, ki ji v bazi $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ pripada matrika B, potem preslikavi $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ v isti bazi pripada matrika AB.*

Trditev 3.9. *Izberimo bazo $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ in naj linearni preslikavi $\mathcal{A}$ pripada matrika A, potem linearna preslikava $\mathcal{A}$ ohranja ploščino natanko tedaj, ko je* $\det A = \pm 1$.

4 Lastne vrednosti in lastni vektorji

Edine matrike, ki jih lahko enostvano množimo so diagonalne matrike. Diagonalna matrika:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{bmatrix}.$$

Če želimo izračunati večkratni kompozitum linearne preslikave $\mathcal{A}$ s samo sabo, je zato smiselno zapisati linearno preslikavo v taki bazi, da ji bo pripadala diagonalna matrika (če je to mogoče). Denimo da baza $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ je taka baza in pripadajoča diagonalna matrika enaka

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

To pomeni, da mora veljati $\mathcal{A}(\vec{v}_1) = \lambda\vec{v}_1$ in $\mathcal{A}(\vec{v}_2) = \lambda\vec{v}_2$. Poglejmo kdaj je enačba $\mathcal{A}(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ rešljiva. Naj linearni preslikavi $\mathcal{A}$ v standradni bazi pripada matrika

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Naj bo vektor $\vec{v}$ enak

$$\vec{v} \simeq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Potem se enačba po komponentah prepiše kot

$$\begin{aligned} &y_1 = \mathcal{A}(x_1) = \lambda x_1, \quad y_2 = \mathcal{A}(x_2) = \lambda x_2 \\ &y_1 = ax_1 + bx_2 = \lambda x_1, \quad y_2 = cx_1 + dx_2 = \lambda x_2 \\ &x_1(a-\lambda) + bx_2 = 0, \quad cx_1 + x_2(d-\lambda) = 0 \end{aligned}$$

Ko uredimo sistem, dobimo

$$x_1((a-\lambda)(d-\lambda) - bc) = 0, \quad x_2((a-\lambda)(d-\lambda) - bc) = 0$$

Če je $P(\lambda) := ((a-\lambda)(d-\lambda) - bc) \neq 0$ sta $x_1, x_2 = 0$ in $\vec{v}$ ni bazni vektor, zato mora biti $P(\lambda) = 0$. Iz tega sledi, da:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{a + d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}.$$

Opazimo, da

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + d,\ \lambda_1\lambda_2 = ad - bc = \det A \text{ in } P(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Definicija 4.1. Naj bo $\mathcal{A}$ linearna preslikava. Neničelni vektor $\vec{v}$ je *lastni vektor* $\mathcal{A}$ če obstaja tako realno število λ, imenovano *lastna vrednost*, da velja

$$\mathcal{A}(\vec{v}) = \lambda\vec{v}.$$

Par $(\lambda, \vec{v})$ imenujemo *lastni par*, polinom $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ pa *karakteristični polinom.*

Latni vrednosti sta ničli karakterističnega polinoma. Nas bodo zanimale linearne preslikave, ki ohranjajo ploščino in nimajo lastnih vrednosti z absolutno vrednostjo 1.

Definicija 4.2. *Hiperbolična linearna preslikava* je preslikava, ki ohranja plošino in ima lastni vrednosti, ki ne ležita na enotski krožnici v kompleksni ravnini.

Trditev 4.3. *Hiperbolična linearna preslikava nima kompleksno konjugiranih lastnih vrednosti in ima dve realni lastni vrednosti λ_1, λ_2 s tem da je*

$$0 < |\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|.$$

Slovar strokovnih izrazov

continuous zvezen
uniformly continuous enakomerno zvezen
compact kompakten – metrični prostor je kompakten, če ima v njem vsako zaporedje stekališče; podmnožica evklidskega prostora je kompaktna natanko tedaj, ko je omejena in zaprta
glide reflection zrcalni zdrs ali zrcalni pomik – tip ravninske evklidske izometrije, ki je kompozitum zrcaljenja in translacije vzdolž iste premice
lattice mreža
link splet
partition **∼ of a set** razdelitev množice; **∼ of a number** razčlenitev števila