Model Seir Penyakit Campak Dengan Laju Penularan Nonlinier Incidence Rate

Mohammad Soleh 1, Maizal Yulsen 2, Wartono 3, Rahmawati 4

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Sultan Syarif Kasim Riau JL.HR. Soebrantas No.155 Simpang Baru, Panam, Pekanbaru, 28293 e-mail: msoleh@uin-suska.ac.id,, wartono@uin-suska.ac.id

Abstrak

Makalah ini membahas tentang model penyebaran penyakit campak menggunakan model SEIR dengan laju penularan nonlinier incidence rate. Pada model ini poulasi terbagi menjadi empat subpopulasi, yaitu Suspectible, Exposed, Infected, dan Recovery. Setelah model terbentuk maka diekplorasi keberadaan titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik. Selanjutnya dilakukan uji kestabilan model dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitzh. Simulasi diberikan untuk setiap titik ekuilibrium berdasarkan uji kestabilan. Hasil yang diperoleh dari analisis model, yaitu terdapat satu titik ekuilibrium bebas penyakit dan satu titik ekuilibrium endemik yang kestabilannya ditentukan oleh nilai parameter model.

Kata kunci: model SEIR, campak, kriteria Routh-Hurwitzh, stabil asimtotik, Ekuilibrium.

Abstract

This research discusses about the model of the spread of measles using the SEIR model with a nonlinier transmission rate. In this model, population is divided into four subpopulations, namely Suspectible (S), Exposed (E), Infected (I), and Recovery (R). We explored model to determine the equilibrium points, namely disease-free state and the endemic state. Then we used the Routh-Hurwitzh criteria to determine their stabilities. The simulation is given for each stability around the equilibrium point. For this research we got a disease-free state and an endemic state.

Keywords: SEIR model, Measles, Routh-Hurwitzh criteria, asymptotically stable, equilibrium states.

1. Pendahuluan

Penyakit campak merupakan salah satu penyakit endemik di negara berkembang. Penyakit campak disekan oleh virus campak, dari family *paramyxoviridae*, genus *Morbilivirus*. Penyakit ini diawali dengan adanya gejala awal demam, batuk, pilek yang kemudian diikuti oleh bercak kemerahan pada kulit (Widoyono) [8]. Penyakit campak dinilai berbahaya karena dapat menimbulkan komplikasi seperti peradangan otak, gangguan pernafasan bahkan kematian. Oleh karena itu perlu adanya tindakan pencegahan untuk mengurangi laju penyebaran penyakit ini].

Perkembangan ilmu pengetahuan memberikan peranan penting dalam mencegah meluasnya penyebaran penyakit campak. Peranan tersebut berupa model matematika yang mempelajari penyebaran penyakit. Walaupun model matematika tidak mampu untuk menyembuhkan penyakit, akan tetapi model matematika dapat membantu dalam memprediksi dan pengendalian penyakit endemik di masa yang akan datang.

Model dasar tentang penyebaran penyakit pertama kali dirumuskan oleh Kermack dan McKendrik pada tahun 1927 (Chasnov, 2009). Model yang diusulkan adalah model SIR (*Suspectible, Infectible, Recovered*), kemudian berkembang model lainnya seperti model SEIR, SI, SEIV, SIRS, dan sebagainya tergantung dari jenis penyakit yang dipelajari [1,2,3,6]. Beberapa jurnal model penyebaran penyakit campak telah banyak dibahas, salah satunya adalah jurnal dari Moussa Tessa [5]. Jurnal ini membahas tentang model SEIR penyebaran penyakit campak dengan vaksinasi. Sementara itu Siti Rahma [4] mengkaji jurnal dari Moussa Tessa yang menambahkan asumsi adanya migrasi dalam penelitiannya. Jurnal dari Moussa Tessa dan Siti Rahma memiliki bentuk penularan penyakit yang bersifat bilinier, artinya semakin banyak individu yang sakit akan menyekan semakin banyak individu yang tertular penyakit.

Model matematika kebanyakan menggunakan laju penularan bilinier, yaitu mengasumsikan bahwa dalam jangka waktu yang lama jumlah individu sakit akan bertambah banyak terusmenerus. Kenyataannya belum tentu semakin banyak individu terinfeksi atau individu sakit akan menyebabkan banyak individu yang tertular. Hal ini disekan oleh adanya antisipasi dari masyarakat. Antisipasi ini terjadi karena adanya berbagai informasi dan berita yang berkembang di masyarakat, Peristiwa ini disebut dengan *Nonlinier Incidence Rate*. Pemodelan yang menggunakan persamaan *Nonlinier Incidence Rate* telah banyak dibahas dalam jurnal, salah

ISSN (Printed): 2579-7271

satunya jurnal dari Mimi Yan dan Ruiqing Shi [7]. Jurnal tersebut membahas tentang sebuah model SI penyakit menular dengan menggunakan Nonlinier Incidence Rate.

Metode dan Bahan

Metodologi penelitian dalam makalah ini adalah studi literatur dengan mempelajari buku-buku dan jurnal-jurnal yang berhubungan dengan penyakit epidemi, khususnya model SEIR. Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

- a. Diberikan model SEIR [4]
- b. Diberikan asumsi-asums: bahwa faktor kelahiran dan kematian diperhatikan, faktor migrasi diabaikan, mengubah laju penularan bilinear $\frac{\beta SI}{N}$ menjadi nonlinier Incidence rate $\frac{\beta S^2I}{N^2}$. Asumsinya adalah untuk setiap individu yang terinfeksi maka tidak lagi terjadi penularan sebanyak $\frac{\beta S}{N}$ tetapi menurun menjadi $\frac{\beta S^2}{N^2}$ dikarenakan efek psikologis.

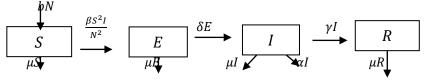
 c. Menentukan titik ekuilibrium model SEIR penyakit campak. Titik ekuilibrium yang akan
- dicari adalah titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemikt.
- d. Menganalisa sifat kestabilan titik ekuilibrium dengan kriteria Ruth-Hurwich
- e. Mensimulasikan model menggunakan Program Maple dengan terlebih dahulu menentukan nilai parameter.

3. Hasil dan Pembahasan

3.1. Pembentukan Model

Terlebih dahulu didefinisikan parameter model: b menyatakan laju kelahiran pada populasi, μ menyatakan laju kematian alami, β menyatakan laju kontak penyebaran penyakit, δ menyatakan laju infeksi pada kelas *Exposed*, γ menyatakan laju kesembuhan pada kelas *Infected*, dan α menyatakan laju kematian akibat penyakit campak pada kelas *Infected*. Kemudian S(t)menyatakan kelas Suspectible yaitu jumlah individu yang masih sehat tetapi rentan penyakit campak, E(t) menyatakan kelas *Expose* yaitu jumlah individu yang telah terinfeksi virus tetapi masih alam masa inkubasi sehingga belum menimbulkan gejala penyakit, I(t) menyatakan kelas Infected yaitu jumlah individu terinfeksi campak yang sudah menimbulkan gejala penyakit, dan R(t) menyatakan kelas *Recovery* yaitu jumlah individu yang telah sembuh dari penyakit campak.

Diagram transfer untuk masalah tersebut dapat dilihat pada gambar berikut ini:



Gambar 1 Model SEIR pada Penyakit Campak dengan Vaksinasi dan Laju Penularan Nonlinier Incidence Rate

Berdasarkan diagram transfer diperoleh reprentasi untuk model cpenyebaran penyakit campak seperti berikut:

$$\frac{dS}{dt} = bN - \frac{\beta S^2 I}{N^2} - \mu S \tag{1a}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta S^2 I}{N^2} - \delta E - \mu E \tag{1b}$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - \gamma I - \mu I - \alpha I \tag{1c}$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \tag{1d}$$

Model mempunyai solusi (S, E, I, R)sebagai himpunan $\Phi = \{ (S, E, I, R) | S \ge 0, E \ge 0, I \ge 0, R \ge 0, S + E + I + R = N \}.$ Selanjutnya model direduksi (1) dengan pertimbangan R(t) = N(t) - S(t) - E(t) - I(t):

ISSN (Printed): 2579-7271

$$\frac{dS}{dt} = bN - \frac{\beta S^2 I}{N^2} - \mu S \tag{2a}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta S^2 I}{N^2} - \delta E - \mu E \tag{2b}$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - \gamma I - \mu I - \alpha I \tag{2c}$$

yang solusinya adalah himpunan: $\Omega = \{(S, E, I, R) | S \ge 0, E \ge 0, I \ge 0, S + E + I + \le N\}$.

3.2. Titik Ekuilibrium

Dengan menghitung persamaan (2a)-(2c) disamakan dengan 0 maka diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit $(\widehat{S}, \widehat{E}, \widehat{I}) = \left(\frac{bN}{\mu}, 0, 0\right)$. dan Endemik $(S^*, E^*, I^*) =$

$$\left(\sqrt{\frac{(\delta+\mu)(\gamma+\mu+\alpha)N}{\delta\beta}}, \frac{bN-\mu\left(\sqrt{\frac{(\delta+\mu)(\gamma+\mu+\alpha)N}{\delta\beta}}\right)}{\delta+\mu}, \frac{b\delta N-\mu\delta\left(\sqrt{\frac{(\delta+\mu)(\gamma+\mu+\alpha)N}{\delta\beta}}\right)}{(\delta+\mu)(\gamma+\mu+\alpha)}\right)$$

3.3. Kestabilan Titik Ekuilibrium

Model (2) memiliki matriks Jacobian sebagai berikut

$$Jf(S,E,I) = \begin{bmatrix} b - \frac{\beta 2SI}{N^2} - \mu & b & b - \frac{\beta s^2}{N^2} \\ \frac{2\beta I}{N^2} & -\delta - \mu & \frac{\beta s^2}{N^2} \\ 0 & \delta & -\gamma - \mu - \alpha \end{bmatrix}$$

Teorema 1: Jika $\frac{b\delta\beta}{\mu(\delta+\mu)(\gamma+\mu+\alpha)} < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit $(\widehat{S}, \widehat{E}, \widehat{I}) = (\frac{bN}{\mu}, 0, 0)$ stabil asimtotik lokal.

Bukti:

Matriks Jacobian $Jf(\widehat{S}, 0, 0)$ dari matriks Jacobian tersebut adalah:

$$Jf(\widehat{S}, 0, 0) = \begin{bmatrix} b - 0 - \mu & b & b - \frac{\beta \widehat{S}^2}{N^2} \\ 0 & -\delta - \mu & \frac{\beta \widehat{S}^2}{N^2} \\ 0 & \delta & -\gamma - \mu - \alpha \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari $\det(\lambda I - J(\widehat{S}, 0, 0))$ adalah:

$$(\lambda - b + \mu)(\lambda + \delta + \mu)(\lambda + \gamma + \mu + \alpha) - (\lambda - b + \mu)\left(-\frac{\beta\hat{S}^2}{N^2}\right)(-\delta) = 0$$
Misal: $b = w, \mu = x, \quad \delta + \mu = y, \ \gamma + \mu + \alpha = z$

maka

$$\lambda^{3} + (y+z-w+x)\lambda^{2} + \left(yz - wy - wz + xy + xz - \frac{\beta\hat{S}^{2}}{N^{2}}\delta\right)\lambda + xyz - wyz + \frac{\beta\hat{S}^{2}}{N^{2}}\delta w - \frac{\beta\hat{S}^{2}}{N^{2}}\delta x$$

$$= 0$$

Substitusikan $\hat{S} = \frac{bN}{\mu}$ sehingga

$$\lambda^{3} + (y + z - w + x)\lambda^{2} + \left(yz - wy - wz + xy + xz - \beta\left(\frac{w}{x}\right)^{2}\delta\right)\lambda + xyz - wyz + \beta\delta w\left(\frac{w}{x}\right)^{2}$$
$$-\beta\delta x\left(\frac{w}{x}\right)^{2} = 0$$

Maka diperoleh persamaan karakteristik:

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$$

dengan:

$$a_1 = y + z - w + x$$

$$a_2 = yz - wy - wz + xy + xz - \beta \delta \left(\frac{w}{x}\right)^2$$

$$a_3 = xyz - wyz + \beta \delta w \left(\frac{w}{r}\right)^2 - \beta \delta x \left(\frac{w}{r}\right)^2$$

ISSN (Printed): 2579-7271

Untuk menentukan sifat kestabilannya, digunakan kriteria: $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ dan $a_1 a_2 > a_3$. $a_1 = y + z - w + x$, karena $\hat{S} = \frac{bN}{\mu} = \frac{wN}{x} \operatorname{dan} \hat{S} < N$ maka $\frac{wN}{x} < N \Leftrightarrow \frac{w}{x} < 1 \Leftrightarrow w < x \Leftrightarrow x - w > 0$. Jadi, $a_1 = y + z - w + x > 0$. Di dapatkan $a_1 > 0$

$$a_3 = xyz - wyz + \beta \delta w \left(\frac{w}{x}\right)^2 - \beta \delta x \left(\frac{w}{x}\right)^2 = (x - w) \left(yz \left(1 - \frac{w}{x} \left(\frac{\beta \delta w}{xyz}\right)\right)\right)$$
Karena $x - w > 0$, dan $\left(\frac{\beta \delta w}{xyz}\right) = \frac{b\delta \beta}{\mu(\delta + \mu)(\gamma + \mu + \alpha)} < 1$ maka $a_3 > 0a_1a_2 - a_3 = (y + z - w + x) \left(yz - wy - wz + xy + xz - \beta \delta \left(\frac{w}{x}\right)^2\right) - \left(xyz - wyz + \beta \delta w \left(\frac{w}{x}\right)^2 - \beta \delta x \left(\frac{w}{x}\right)^2\right) = (y + z) \left(y(x - w) + z(x - w) + yz \left(1 - \frac{w}{x} \left(\frac{\beta \delta w}{xyz}\right)\right)\right) + (y + z)(x - w)^2$

Karena
$$(x-w)>0$$
, dan $\left(\frac{\beta\delta w}{xyz}\right)=\frac{b\delta\beta}{\mu(\delta+\mu)(\gamma+\mu+\alpha)}<1$ maka $a_1a_2-a_3>0$ Berdasarkan pembahasan tersebut, maka diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit stabil

asimtotik.

Teorema 2: Jika $\frac{(\delta + \mu)(\gamma + \mu + \alpha)}{(\delta b) + (b(\gamma + \mu + \alpha))} < 1$ maka titik ekuilibrium endemik penyakit (S^*, E^*, I^*) stabil asimtotik.

Bukti:

Matriks Jacobian dari $If(S^*, E^*, I^*)$

$$Jf(S^*, E^*, I^*) = \begin{bmatrix} b - 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2} - \mu & b & b - \frac{\beta S^{*2}}{N^2} \\ 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2} & -\delta - \mu & \frac{\beta S^{*2}}{N^2} \\ 0 & \delta & -\gamma - \mu - \alpha \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari $det(\lambda I - I(S^*, E^*, I^*)) = 0$ adalah:

$$\left(\left(\lambda - b + 2 \frac{\beta S^* I^*}{N^2} + \mu \right) (\lambda + \delta + \mu) (\lambda + \gamma + \mu + \alpha) + \left(-b + \frac{\beta S^{*2}}{N^2} \right) \left(-2 \frac{\beta S^* I^*}{N^2} \right) (-\delta) \right) - b \left(-2 \frac{\beta S^* I^*}{N^2} \right) (\lambda + \gamma + \mu + \alpha) + \left(\lambda - b + 2 \frac{\beta S^* I^*}{N^2} + \mu \right) \left(-\frac{\beta S^{*2}}{N^2} \right) (-\delta) = 0$$

Untuk memudahkan pada analisis, maka di lakukan pemisalan yaitu misalkan

$$b = w$$
, $\mu = x$, $\delta + \mu = y$, $\gamma + \mu + \alpha = z$ dimana $w < x < y$

Maka persamaan karakteristiknya akan menjadi:

$$\lambda^{3} + \left(y + z - w + x + 2\frac{\beta S^{*}I^{*}}{N^{2}}\right)\lambda^{2} + \left(yz - wy - wz + xy + xz + 2\frac{\beta S^{*}I^{*}}{N^{2}}y + 2\frac{\beta S^{*}I^{*}}{N^{2}}z - 2\frac{\beta S^{*}I^{*}}{N^{2}}w - \frac{\beta S^{*}I^{*}}{N^{2}}\delta\right)\lambda + \left(-wyz + xyz + 2\frac{\beta S^{*}I^{*}}{N^{2}}yz - 2\frac{\beta S^{*}I^{*}}{N^{2}}\delta w - 2\frac{\beta S^{*}I^{*}}{N^{2}}wz + \frac{\beta S^{*}I^{*}}{N^{2}}\delta w - \frac{\beta S^{*}I^{*}}{N^{2}}\delta w\right) = 0$$

Substitusikan
$$\frac{\beta S^{*2}}{N^2} = \frac{\beta \sqrt{\frac{(\delta + \mu)(\gamma + \mu + \alpha)N^4}{\delta \beta}}}{\frac{\delta \beta}{N^2}} = \frac{\frac{\beta(\delta + \mu)(\gamma + \mu + \alpha)N^2}{\delta \beta}}{\frac{\delta \beta}{N^2}} = \frac{(\delta + \mu)(\gamma + \mu + \alpha)}{\delta} = \frac{yz}{\delta}, \text{ sehingga:}$$

$$\lambda^3 + \left(y + z - w + x + 2\frac{\beta S^* I^*}{N^2}\right)\lambda^2 + \left(-wy - wz + xy + xz + 2\frac{\beta S^* I^*}{N^2}y + 2\frac{\beta S^* I^*}{N^2}y + 2\frac{\beta S^* I^*}{N^2}y - 2\frac{\beta S^* I^*}{N^2}w\right)\lambda + \left(2\frac{\beta S^* I^*}{N^2}yz - 2\frac{\beta S^* I^*}{N^2}\delta w - 2\frac{\beta S^* I^*}{N^2}wz\right) = 0$$
 Persamaan tersebut dapat ditulis menjadi:

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$$

$$a_{1} = y + z - w + x + 2\frac{\beta S^{*}I^{*}}{N^{2}}$$

$$a_{2} = -wy - wz + xy + xz + 2\frac{\beta S^{*}I^{*}}{N^{2}}y + 2\frac{\beta S^{*}I^{*}}{N^{2}}z - 2\frac{\beta S^{*}I^{*}}{N^{2}}w$$

$$a_{3} = 2\frac{\beta S^{*}I^{*}}{N}yz - 2\frac{\beta S^{*}I^{*}}{N^{2}}\delta w - 2\frac{\beta S^{*}I^{*}}{N^{2}}wz$$

Untuk menentukan kestabilan titik ekuilibrium endemik penyakit, maka digunakan kriteria $a_1 >$ $0, a_3 > 0, a_1 a_2 > a_3.$

$$a_1 = y + z - w + x + 2 \frac{\beta S^* I^*}{N^2}$$
. Karena $x - w > 0$, maka $a_1 > 0$

$$a_3 = 2 \frac{\beta S^* I^*}{N^2} yz - 2 \frac{\beta S^* I^*}{N^2} \delta w - 2 \frac{\beta S^* I^*}{N^2} wz$$

ISSN (Printed): 2579-7271

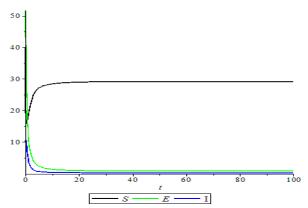
$$\begin{split} &= 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(yz - \delta w - wz) \\ \text{Karena} \, \frac{yz}{\delta w + wz} = \frac{(\delta + \mu)(\gamma + \mu + \alpha)}{(\delta b) + (b(\gamma + \mu + \alpha))} > \, 1, \, \text{maka} \, a_3 > 0 \\ &a_1 a_2 - a_3 = \Big(y + z - w + x + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}\Big) \Big(-wy - wz + xy + xz + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}y + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}z - 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}w\Big) - \Big(2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}yz - 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}\delta w - 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}wz\Big) \\ &= (y + z)\Big(y(x - w) + z(x - w)\Big) + (y + z)\Big(2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(y - w)\Big) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}z^2 + (x - w)\Big(y(x - w) + z(x - w) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(y + z - w)\Big) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}\Big(y(x - w) + z(x - w) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(y + z - w)\Big) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(\delta w + wz) \\ &= (x - w) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(y + z - w)\Big) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(\delta w + wz) \\ &= (x - w) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(y + z - w)\Big) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(\delta w + wz) \\ &= (x - w) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(y + z - w)\Big) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(\delta w + wz) \\ &= (x - w) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(y + z - w)\Big) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(\delta w + wz) \\ &= (x - w) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(y + z - w)\Big) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(\delta w + wz) \\ &= (x - w) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(y + z - w)\Big) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(\delta w + wz) \\ &= (x - w) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(y + z - w)\Big) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(\delta w + wz) \\ &= (x - w) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(y + z - w)\Big) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(\delta w + wz) \\ &= (x - w) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(y + z - w)\Big) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(\delta w + wz) \\ &= (x - w) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(y + z - w)\Big) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(\delta w + wz) \\ &= (x - w) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(\delta w + wz) \\ &= (x - w) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(\delta w + wz) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(\delta w + wz) \\ &= (x - w) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(\delta w + wz) + 2\frac{\beta S^*I^*}{N^2}(\delta w$$

3.4. Simulasi

a. Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Tabel 1. Parameter pada Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Parameter	Nilai Parameter
b	1.5
β	0.8
μ	2.5
δ	0.6
α	0.1
γ	0.03
N	50



Gambar 2 Simulasi Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

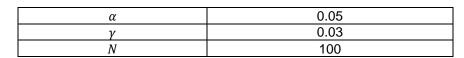
Berdasarkan Gambar 2 tampak bahwa populasi pada kelas S terjadi peningkatan karena adanya individu lahir yang masuk ke kelas S, Sedangkan populasi pada kelas E terus turun menuju angka nol. Penurunan populasi pada kelas E disekan karena adanya laju kontak antara populasi yang rentan dan populasi terinfeksi, adanya kematian alami dan laju perubahan individu yang terjangkit menjadi terinfeksi. Sedangkan populasi pada kelas I juga mengalami penurunan menuju nol yang disekan karena populasi berada dalam kondisi bebas penyakit sehingga penyakit tidak dapat bertahan didalam populasi, artinya dalam waktu tertentu individu yang terinfeksi berkurang dan akan hilang dari populasi

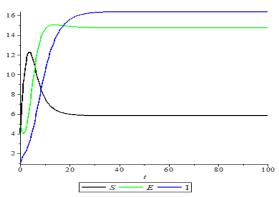
b. Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit

Tabel 2. Parameter pada Titik Ekuilibrium Endemik

Parameter	Nilai Parameter
b	0.05
β	0.8
μ	0.1
δ	0.2

ISSN (Printed): 2579-7271





Gambar 3. Simulasi Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit

Berdasarkan Gambar 3 terlihat bahwa populasi *S* mengalami penurunan karena adanya kontak dengan individu *infected* dan terjadinya kematian alami. Sementara populasi *exposed* dan *infected* mengalami kenaikan yang mengakibatkan jumlah individu yang terinfeksi bertambah dan tidak pernah hilang karena populasi berada dalam kondisi endemik.

4. Kesimpulan

Pada model SEIR penyakit campak dengan laju penularan *nonlinier incidence rate* diperoleh 2 titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Jika $\frac{b\delta\beta}{\mu(\delta+\mu)(\gamma+\mu+\alpha)} < 1 \quad \text{maka titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal, sedangkan jika} \\ \frac{(\delta+\mu)(\gamma+\mu+\alpha)}{(\delta b)+(b(\gamma+\mu+\alpha))} > 1 \quad \text{maka titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik.}$

Daftar Pustaka

- [1] Allen, Linda.J.S. "An Introduction to Mathematical Biology". Pearson, Inggris. 2006.
- [2] Chasnov, R. Jeffrey. *Mathematical Biology,* The Hongkong University of Science and Technology, Hongkong. 2009.
- [3] Ekawati, Aminah. Kestabilan Model SEI, Media Sains. Vol. 3, No. 2, Oktober 2011.
- [4] Rahma, Siti. *Model SEIR Penyakit Campak dengan Vaksinasi dan Migrasi*. Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, Pekanbaru. 2012.
- [5] Tessa, Moussa. *Mathematical Model for Control of Measles by vaccination. Mali* Symposiumon Applied Sciences (MSAS), hal. 31-36, 2006
- [6] Widoyono, *Epidemologi, Penularan, Pencegahan & Pemberantasannya,* Erlangga, Jakarta. 2005
- [7] Yan, Mimi., dan Ruiqing, Shi. *Analysis of an SI Epidemic Model with Nonlinier Incidence Rate in an Environmentally-driven Infectious Disease*. British Journal of Mathematics and Computer Science, China. 2014.
- [8] https://www.docdoc.com/id/info/condition/campak diakses tanggal 27 Oktober 2017.

ISSN (Printed): 2579-7271