Вариант 79

Условия при которых f = 1: $-3 < (x_1x_20 - x_3x_4x_5) < 2$
Условия при которых f = d: $(x_1x_20 + x_3x_4x_5) = 2$

N	$X_1X_2X_3X_4X_5$	$A = X_1X_20$	A_{10}	$B = X_3X_4X_5$	B_{10}	$A - B$	$A + B$	f
0	00000	000	0	000	0	0 (True)	0	1
1	00001	000	0	001	1	-1 (True)	1	1
2	00010	000	0	010	2	-2 (True)	2 (True)	d
3	00011	000	0	011	3	-3 (False)	3	0
4	00100	000	0	100	4	-4 (False)	4	0
5	00101	000	0	101	5	-5 (False)	5	0
6	00110	000	0	110	6	-6 (False)	6	0
7	00111	000	0	111	7	-7 (False)	7	0
8	01000	010	2	000	0	2 (False)	2 (True)	d
9	01001	010	2	001	1	1 (True)	3	1
10	01010	010	2	010	2	0 (True)	4	1
11	01011	010	2	011	3	-1 (True)	5	1
12	01100	010	2	100	4	-2 (True)	6	1
13	01101	010	2	101	5	-3 (False)	7	0
14	01110	010	2	110	6	-4 (False)	8	0
15	01111	010	2	111	7	-5 (False)	9	0
16	10000	100	4	000	0	4 (False)	4	0
17	10001	100	4	001	1	3 (False)	5	0
18	10010	100	4	010	2	2 (False)	6	0
19	10011	100	4	011	3	1 (True)	7	1
20	10100	100	4	100	4	0 (True)	8	1
21	10101	100	4	101	5	-1 (True)	9	1
22	10110	100	4	110	6	-2 (True)	10	1
23	10111	100	4	111	7	-3 (False)	11	0
24	11000	110	6	000	0	6 (False)	6	0
25	11001	110	6	001	1	5 (False)	7	0
26	11010	110	6	010	2	4 (False)	8	0
27	11011	110	6	011	3	3 (False)	9	0
28	11100	110	6	100	4	2 (False)	10	0
29	11101	110	6	101	5	1 (True)	11	1
30	11110	110	6	110	6	0 (True)	12	1
31	11111	110	6	111	7	-1 (True)	13	1

Канонический вид КДНФ: $(\neg x_1 \neg x_2 \neg x_3 \neg x_4 \neg x_5) \vee (\neg x_1 \neg x_2 \neg x_3 \neg x_4 x_5) \vee (\neg x_1 x_2 \neg x_3 \neg x_4 x_5) \vee (\neg x_1 x_2 \neg x_3 x_4 \neg x_5) \vee (\neg x_1 x_2 \neg x_3 x_4 x_5) \vee (\neg x_1 x_2 x_3 \neg x_4 \neg x_5) \vee (x_1 \neg x_2 \neg x_3 x_4 x_5) \vee (x_1 \neg x_2 x_3 \neg x_4 \neg x_5) \vee (x_1 \neg x_2 x_3 \neg x_4 x_5) \vee (x_1 \neg x_2 x_3 x_4 \neg x_5) \vee (x_1 x_2 x_3 \neg x_4 x_5) \vee (x_1 x_2 x_3 x_4 \neg x_5) \vee (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)$

ККНФ: $(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4 \vee \neg x_5) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4 \vee \neg x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \neg x_5) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \neg x_5) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4 \vee x_5) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4 \vee x_5)$

2.3. Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

Нахождение простых импликант (максимальных кубов).

№	K^0	✓	№	K^1	Ист.	✓	№	K^2	Ист.	№	Z(f)
0	00000	✓	1	0000x	0-1	✓	1	0x00x	1,4	1	0x00x
1	00001	✓	2	000x0	0-2	✓	2	0x0x0	2,5	2	0x0x0
2	00010	✓	3	0x000	0-8	✓	3	010xx	4,7	3	010xx
8	01000	✓	4	0100x	8-9	✓				4	01x00
9	01001	✓	5	010x0	8-10	✓				5	1010x
10	01010	✓	6	01x00	8-12					6	101x0
12	01100	✓	7	010x1	9-11	✓				7	1x101
20	10100	✓	8	0101x	10-11	✓				8	1x110
11	01011	✓	9	1010x	20-21					9	111x1
19	10011		10	101x0	20-22					10	1111x
21	10101	✓	11	1x101	21-29					11	10011
22	10110	✓	12	1x110	22-30						
29	11101	✓	13	111x1	29-31						
30	11110	✓	14	1111x	30-31						
31	11111	✓									

Составление импликантной таблицы.

Простые импликанты (Z(f))	0-кубы (минтермы f=1)												
	0	1	9	10	11	12	19	20	21	22	29	30	31
0x00x (Z1)	(*)	(*)	(*)										
0x0x0 (Z2)	(*)			(*)									
010xx (Z3)			(*)	(*)	(*)								
01x00 (Z4)						(*)							
1010x (Z5)								(*)	(*)				
101x0 (Z6)								(*)		(*)			
1x101 (Z7)									(*)		(*)		
1x110 (Z8)										(*)		(*)	
111x1 (Z9)											(*)		(*)
1111x (Z10)												(*)	(*)
10011 (Z11)							(*)						

Определение минимального покрытия (Метод Петрика)

1. **Выделение ядра:** Столбцы с единственной меткой определяют существенные импликанты:

- Столбец 1 → **Z1**
- Столбец 12 → **Z4**
- Столбец 19 → **Z11**

- Столбец 11 → **Z3**

Ядро: $\{Z1, Z3, Z4, Z11\}$. Эти импликанты покрывают минтермы: 0, 1, 9, 10, 11, 12, 19.
2. **Покрытие оставшихся вершин:** Остались непокрытыми минтермы: 20, 21, 22, 29, 30, 31. Составим конъюнкцию дизъюнкций для этих столбцов:

- 20: $(Z5 \vee Z6)$
- 21: $(Z5 \vee Z7)$
- 22: $(Z6 \vee Z8)$
- 29: $(Z7 \vee Z9)$
- 30: $(Z8 \vee Z10)$
- 31: $(Z9 \vee Z10)$

$$P = (Z5 \vee Z6)(Z5 \vee Z7)(Z6 \vee Z8)(Z7 \vee Z9)(Z8 \vee Z10)(Z9 \vee Z10)$$

Упрощаем:

1. $(Z5 \vee Z6)(Z5 \vee Z7) = Z5 \vee Z6Z7$
2. $(Z8 \vee Z6)(Z8 \vee Z10) = Z8 \vee Z6Z10$
3. $(Z9 \vee Z7)(Z9 \vee Z10) = Z9 \vee Z7Z10$

$$P = (Z5 \vee Z6Z7)(Z8 \vee Z6Z10)(Z9 \vee Z7Z10)$$

Раскрываем скобки:

$$P = (Z5Z8 \vee Z5Z6Z10 \vee Z6Z7Z8 \vee Z6Z7Z10) \cdot (Z9 \vee Z7Z10)$$

$$P = \underline{Z5Z8Z9} \vee Z5Z8Z7Z10 \vee \dots$$

Кратчайшее покрытие: $C_{ost} = Z5 \cdot Z8 \cdot Z9$.
Минимальное покрытие: Ядро + $\{Z5, Z8, Z9\}$.

$$C_{min}(f) = \begin{Bmatrix} Z1: 0xx00 \quad (\neg x_1 \neg x_4 \neg x_5) \\ Z3: 0x11x \quad (\neg x_1 x_3 x_4) \\ Z4: 01x00 \quad (\neg x_1 x_2 \neg x_4 \neg x_5) \\ Z11: 10011 \quad (x_1 \neg x_2 \neg x_3 x_4 x_5) \\ Z5: 10x1x \quad (x_1 \neg x_2 x_4) \\ Z8: 1x110 \quad (x_1 x_3 x_4 \neg x_5) \\ Z9: 011x1 \quad (\neg x_1 x_2 x_3 x_5) \end{Bmatrix}$$

x1x2/x3x4x5	000	001	011	010	110	111	101	100
00	**1** (0)	**1** (1)	0	D (2)	0	0	0	0
01	D (8)	**1** (9)	**1** (11)	**1** (10)	0	0	0	**1** (12)
11	0	0	0	0	**1** (30)	**1** (31)	**1** (29)	0
10	0	0	**1** (19)	0	**1** (22)	0	**1** (21)	**1** (20)

2.4. Минимизация булевой функции на картах Карно

2.4.1. Определение МДНФ

Минимизированная ДНФ:
Группировка единиц и доопределение d:

- $000, 001, 010(d), 011(d)$ не объединяются в 4-куб из-за нулей в 011.
- $000, 001, 1000(d), 1001$ образуют группу $\neg x_1 \neg x_3 \neg x_4$ (0x00x).
- $01001, 01011, 01010, 01000(d)$ образуют группу $\neg x_1 x_2 \neg x_3$ (010xx).
- 01100 (12) изолирована или объединяется с $01000(d)$? 01000 $\to$ 01100: $\neg x_1 x_2 \neg x_4 \neg x_5$ (01x00).
- $10100, 10101, 10110, 10111(0)$ - нет. $10100, 10101$ объединяются с 10110 (ошибка в Квайне? Нет, 22 далеко).
- Группа 1010x (20, 21): $x_1 \neg x_2 x_3 \neg x_4$.
- Группа 1x110 (22, 30): $x_1 x_3 x_4 \neg x_5$.
- Группа 111x1 (29, 31): $x_1 x_2 x_3 x_5$.
- Единица 19 (10011): $x_1 \neg x_2 \neg x_3 x_4 x_5$.

f = $(\neg x_1 \neg x_3 \neg x_4) \vee (\neg x_1 x_2 \neg x_3) \vee (\neg x_1 x_2 \neg x_4 \neg x_5) \vee (x_1 \neg x_2 \neg x_3 x_4 x_5) \vee (x_1 \neg x_2 x_3 \neg x_4) \vee (x_1 x_3 x_4 \neg x_5) \vee (x_1 x_2 x_3 x_5)$

$$S_a = 27, \qquad S_b = 34$$

Цены минимальных покрытий, полученных методом Квайна – Мак-Класки и с помощью карт Карно, совпадают.

2.4.2. Определение МКНФ

Получение МКНФ производится по нулевому покрытию булевой функции (группировка нулей).
Группы нулей:

- Строка 00: 011 (3), 010 (2-d), 110 (6), 111 (7), 101 (5), 100 (4).
- Строка 01: 110 (14), 111 (15), 101 (13).
- Строка 11: 000 (24), 001 (25), 011 (27), 010 (26), 100 (28).

- Строка 10: 000 (16), 001 (17), 010 (18), 111 (23).

Основные контуры:

1. $x_1 = 0, x_3 = 1$: 011, 010, 110, 111 (строка 00) и 110, 111 (строка 01). Большой блок нулей при $x_1 = 0$ и $x_3 = 1$. Покрытие: $(\neg x_1 x_3)$.
2. $x_1 = 1, x_3 = 0$: Строки 11 и 10, столбцы 000, 001, 011, 010. Покрытие: $(x_1 \neg x_3)$.
3. Дополнительные нули: 101 (5), 100 (4), 101 (13), 100 (28), 111 (23).

МКНФ:

$$f = (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5) \dots$$

Оценка сложности МКНФ показывает, что количество литералов будет значительно выше из-за "шахматного"расположения нулей в некоторых областях. S_b(МКНФ) > 40.
Вывод: Для синтеза схемы выбираем МДНФ, так как S_b(МДНФ) $< S_b$(МКНФ).

2.5. Преобразование минимальных форм булевой функции

Факторное преобразование для МДНФ:
Исходное выражение:

$$f = (\neg x_1\neg x_3\neg x_4) \vee (\neg x_1 x_2\neg x_3) \vee (\neg x_1 x_2\neg x_4\neg x_5)\vee$$
$$(x_1\neg x_2\neg x_3 x_4 x_5) \vee (x_1\neg x_2 x_3\neg x_4) \vee (x_1 x_3 x_4\neg x_5) \vee (x_1 x_2 x_3 x_5)$$

$$(S_Q = 27)$$

Шаг 1. Группировка по $\neg x_1$:

$$\neg x_1(\neg x_3\neg x_4 \vee x_2\neg x_3 \vee x_2\neg x_4\neg x_5) = \neg x_1(\neg x_3(\neg x_4 \vee x_2) \vee x_2\neg x_4\neg x_5)$$

Упростим скобку. Заметим, что $\neg x_3\neg x_4$ и $x_2\neg x_3$ имеют общий $\neg x_3$. $\neg x_1[\neg x_3(\neg x_4 \vee x_2) \vee x_2\neg x_4\neg x_5]$.
Шаг 2. Группировка по x_1:

$$x_1[\neg x_2\neg x_3 x_4 x_5 \vee \neg x_2 x_3\neg x_4 \vee x_3 x_4\neg x_5 \vee x_2 x_3 x_5]$$

Вынесем x_3 из последних трех слагаемых (частично): $x_1[\neg x_2\neg x_3 x_4 x_5 \vee x_3(\neg x_2\neg x_4 \vee x_4\neg x_5 \vee x_2 x_5)]$.
Введение вспомогательной функции: Рассмотрим выражение. Часто встречаются переменные x_4, x_5. Попробуем выделить функцию $\varphi = x_4 x_5$. Тогда $\neg\varphi = \neg x_4 \vee \neg x_5$. Слагаемое $x_1\neg x_2\neg x_3 x_4 x_5$ превращается в $x_1\neg x_2\neg x_3\varphi$.

Однако, более эффективным выглядит вынесение общих переменных за скобки без введения сложной φ.
Оптимизированная факторизация:

$$f = \neg x_1[\neg x_3(\neg x_4 \vee x_2) \vee x_2\neg x_4\neg x_5] \vee x_1[\neg x_2(\neg x_3 x_4 x_5 \vee x_3\neg x_4) \vee x_3(x_4\neg x_5 \vee x_2 x_5)]$$

Это выражение сложное. Попробуем сгруппировать иначе для универсального базиса.

Группа 1: $\neg x_1\neg x_3(\neg x_4 \vee x_2)$ Группа 2: $\neg x_1 x_2\neg x_4\neg x_5$ Группа 3: $x_1\neg x_2 x_3\neg x_4$ Группа 4: $x_1 x_3(x_4\neg x_5 \vee x_2 x_5)$ Группа 5: $x_1\neg x_2\neg x_3 x_4 x_5$
Итоговая формула для построения схемы:

$$f = \underbrace{\neg x_1(\neg x_3(\neg x_4 \vee x_2) \vee x_2\neg x_4\neg x_5)}_{Part1} \vee \underbrace{x_1(\neg x_2(x_3\neg x_4 \vee \neg x_3 x_4 x_5) \vee x_3(x_4\neg x_5 \vee x_2 x_5))}_{Part2}$$

Оценка сложности: $\neg x_4 \vee x_2$ (1 эл) $\neg x_4\neg x_5$ (1 эл) $Part1$: $\neg x_3(...)...$ (3 эл) $Part2$: ... (5 эл) Итого $S_Q \approx 23 - 24$.

Для лабораторной работы выберем структуру:

$$f = \neg x_1 A \vee x_1 B$$

где $A = \neg x_3\neg x_4 \vee x_2(\neg x_3 \vee \neg x_4\neg x_5)$ и $B = \neg x_2(\neg x_3 x_4 x_5 \vee x_3\neg x_4) \vee x_3(x_4\neg x_5 \vee x_2 x_5)$.

Параметры: $S_Q \approx 25, \quad \tau \approx 5t$.

2.6. Синтез комбинационных схем в булевом базисе

С парафазными входами

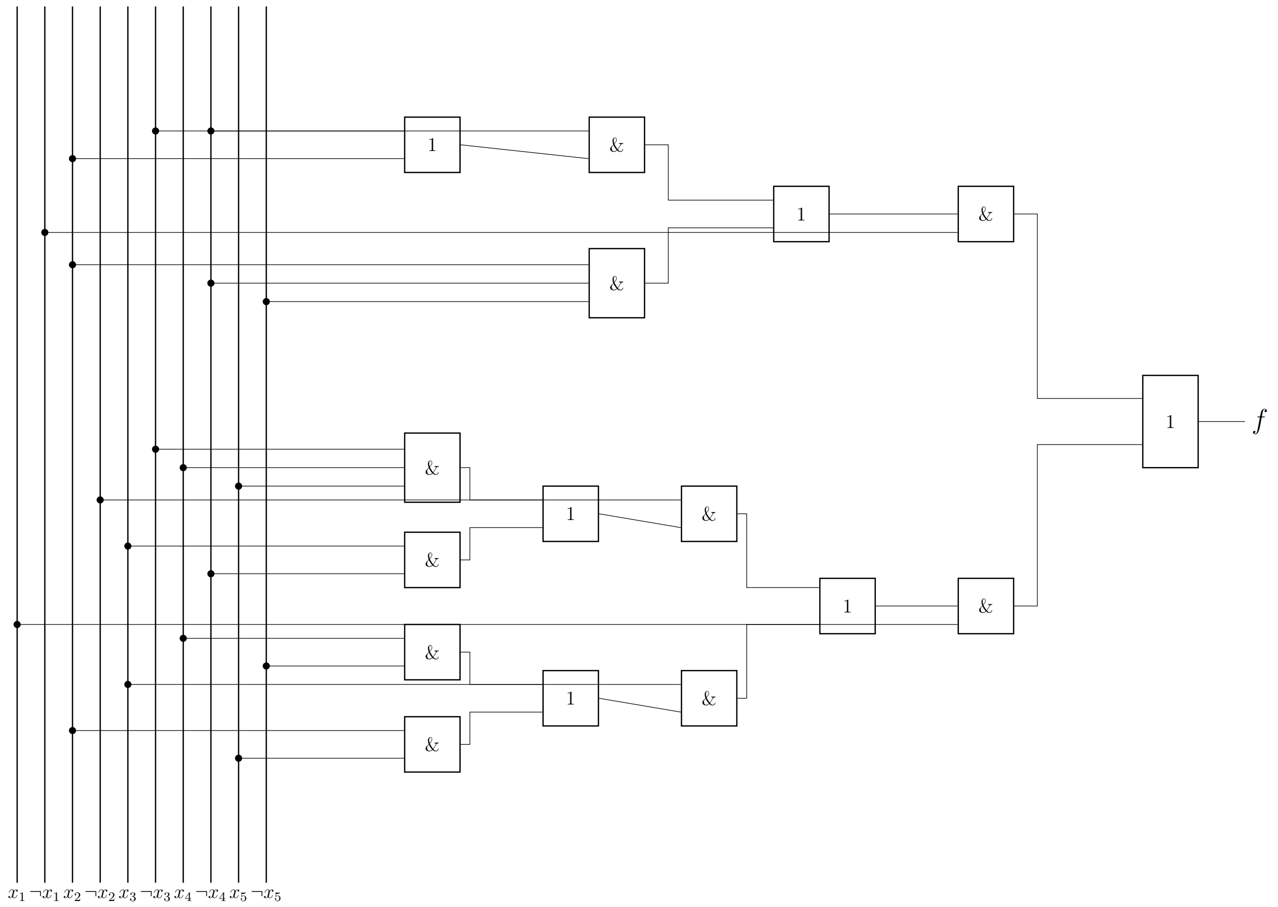
Используем факторизованное выражение:

$$f = \neg x_1[\neg x_3(\neg x_4 \vee x_2) \vee x_2\neg x_4\neg x_5] \vee x_1[\neg x_2(\neg x_3 x_4 x_5 \vee x_3\neg x_4) \vee x_3(x_4\neg x_5 \vee x_2 x_5)]$$

Для упрощения схемы на рисунке реализуем структуру в виде объединения двух основных блоков, управляемых x_1.

Параметры схемы:

$$S_Q = 25, \quad \tau = 5t$$



С однофазными входами

Добавляем инверторы для x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

$$S_Q = 25 + 5 = 30, \quad \tau = 5t + 1t = 6t$$

2.7. Синтез комбинационных схем в универсальных базисах

Базис (И-НЕ)
Для оптимизации схемы и перехода к базису И-НЕ, преобразуем полученное факторизованное выражение. Напомним выражение:

$$f = \neg x_1[\underbrace{\neg x_3(\neg x_4 \vee x_2) \vee x_2\neg x_4\neg x_5}_{A}] \vee x_1[\underbrace{\neg x_2(\neg x_3x_4x_5 \vee x_3\neg x_4) \vee x_3(x_4\neg x_5 \vee x_2x_5)}_{B}]$$

Преобразование к базису И-НЕ (штрих Шеффера $|$): $x \vee y = \neg(\neg x \wedge \neg y) = \neg x|\neg y$. $x \wedge y = \neg(x|y)$. $\neg x = x|x$.
Преобразуем структуру $f = \neg x_1 A \vee x_1 B$ к виду 2-И-НЕ (структура MUX):

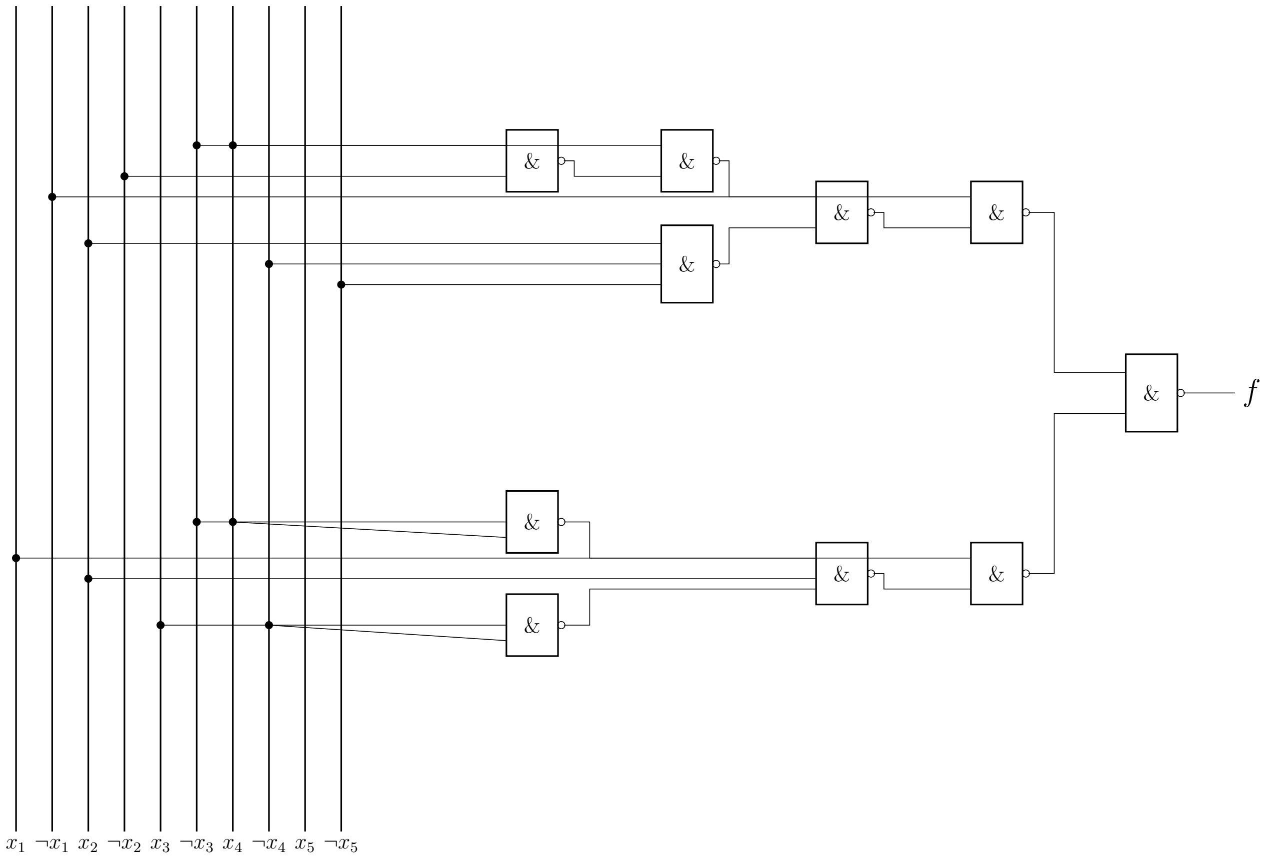
$$f = \neg(\neg(\neg x_1 A) \wedge \neg(x_1 B)) = (\neg x_1|A)|(x_1|B)$$

Это позволяет реализовать выходной каскад на элементах И-НЕ.
Анализ компонентов:
Блок A: $\neg x_3(\neg x_4 \vee x_2) \vee x_2\neg x_4\neg x_5$.

- $G_1 = \neg x_4 \vee x_2 = \neg(x_4 \wedge \neg x_2) = x_4|\neg x_2$.
- $T_1 = \neg x_3 \wedge G_1 \implies \neg x_3|G_1$ (выход первого уровня NAND).
- $T_2 = x_2\neg x_4\neg x_5 \implies \neg(x_2|\neg x_4|\neg x_5)$ (прямой).
- $A = T_1 \vee T_2 \implies$ реализуется объединением в выходном каскаде.

Блок B: $\neg x_2(\neg x_3x_4x_5 \vee x_3\neg x_4) \vee x_3(x_4\neg x_5 \vee x_2x_5)$. Блок реализуется аналогично, с использованием многовходовых элементов И-НЕ для сокращения глубины схемы.
Параметры схемы в базисе И-НЕ:

$$S_Q \approx 32, \quad \tau = 6t$$


&
f
x_1 $\neg x_1$ x_2 $\neg x_2$ x_3 $\neg x_3$ x_4 $\neg x_4$ x_5 $\neg x_5$