ZJU 同调代数 25春 期中

1. *总分 115，上限为 100 分。注意每题分数不一样。*
2. *请尽量按顺序答题。解答用粗方块框起来，框左上角标注题的字母-序号。书写清晰规范。*

A 判断以下陈述是否正确 (3X10). **简要**说明理由 (1X10).

1. 所有阿贝尔群和群同态构成的范畴就是 $\mathbb{Z}$-模范畴.
2. 在 $\mathbb{Z}$-模范畴中, 如果 A 无挠 (torsion-free), 则函子 $-\otimes A$ 是正合的.
3. 复链复形 (double complex) 的全复形 (total complex) 的同调等于先取横向微分的同调, 再取纵向微分的同调, 再按照对角线直和起来.
4. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/3,-)$ 是右正合的.
5. 如果 $0\to A_*\to B_*\to C_*\to 0$ 是一个链复形的短正合列, 且 A_* 和 C_* 的同调群在 0 度以外都是 0, 则 B_* 也是.
6. 所有阿贝尔范畴都有足够多的投射对象.
7. 记 F 为两个阿贝尔范畴之间的函子. 如果 F 有右 adjoint, 则 F 保余核 (cokernel).
8. 算 $\mathrm{Ext}^*_R(A,B)$ 的时候, 既可以对 A 做内射消解来算, 也可以对 B 做内射消解来算.
9. 作为 $\mathbb{Z}$-模, $\mathbb{Z}$ 既是内射的也是投射的.
10. 如果 P 是阿贝尔范畴 $\mathscr{C}$ 中的投射对象，则 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(P,-)$ 是正合的.

B 写出例子. (4X5)

1. 写出两个自然变换.
2. 写出两个始对象的例子.
3. 写出两个同调 δ-函子.
4. 写出两对 adjunction (需注明谁左谁右).
5. 写出两个正合的函子.

C 考虑 R-模范畴. 写出以下情况的消解. (3+3+4)

1. $R = \mathbb{Z}$. 给出一个 $\mathbb{Z}$ 的**内射**消解 (作用是$R\mathbb{Z} = R$ 上的环乘法).
2. $R = \mathbb{Z}/6$. 给出一个 $\mathbb{Z}/2$ 的**投射**消解.
3. $R = \mathbb{Z}[x]/x^2$. 给出一个 $\mathbb{Z}$ 的**投射**消解 (作用是用环乘法, 商映射, 和 $\mathbb{Z} = R/x$).

D 试回答下题. (3+2)

写出 (描述出) $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}$ 的余积 (coproduct).

1. 在交换群范畴中.
2. 在群范畴中.

E 试回答下题. (6+2+2)

把群 G 视作范畴：仅有一个对象, 其上的态射对应于 G 中的元素, 态射复合对应于 G 中的乘法；将此范畴依然记作 G. 考虑一个函子 $F : G \to \mathrm{Set}$.

1. 说明函子 F 包含的信息等价于一个带 G 作用的集合.
2. 说明 colim_F 是什么.
3. 说明 $\lim_F$ 是什么.

F 计算下列 Koszul 对偶性 (这个名称是个提示，做这个题本身不需要知道什么是 Koszul 对偶性) 的例子. (7+7+6+6+2+2)

对下列不同的 R, 计算 $\mathrm{Ext}_R(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$. 其中, 模结构都由域上乘法和商映射给出.

1. $R = \mathbb{F}_2[x]$. (多项式代数)
2. $R = \mathbb{F}_2\langle x \rangle$. (外代数)
3. $R = \mathbb{F}_2[x_1, x_2]$. (多项式代数)
4. $R = \mathbb{F}_2\langle x_1, x_2 \rangle$. (外代数)
5. $R = \mathbb{F}_2[x_1, x_2, x_3, ..., x_n]$. (多项式代数, 只需要猜测一下)

6. $R = \mathbb{F}_2\langle x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \rangle$. (外代数, 只需要猜测一下)