算单子，谱，及乘法结构

IWoAT 暑期学校 2023

前言

本书基于 2023 年 IWoAT 暑校的课程笔记，主题为：算单子，谱，及乘法结构。暑期学校由芝加哥大学教授 Peter May 指导，由北京雁栖湖应用数学研究院和中科院晨兴数学中心联合举办。

注: 目前包含十六讲。

目录

一些翻译对照：

English	**中文**
loop	回路
deloop	解回路
configuration	构型
operad	算单子
monad	单子
monoid	幺半群
monoidal category	幺半群型范畴
recognition principle	识别原理
grouplike	类群
operad pair	算单子偶
split coequalizer	可裂余等值子
monadic	单子的
create	产生
allowable	许可的
co-commutative	余交换

CHAPTER 1

概述

J.P. May（讲义笔记作者：林家梁）

在本节中, 没有特殊说明的情况下, 我们考虑带基点的拓扑空间范畴, 也就是所有拓扑空间均指带基点的拓扑空间, 同时所有映射均为带基点的拓扑空间之间保基点的连续映射. 我们用 $[X, Y]$ 表示拓扑空间 X 到 Y 的保基点的映射同伦类构成的集合. 在有需要的情况下, 对于带基点的拓扑空间 X, 我们用 $*_X$ 来表示 X 的基点.

1.1. 导言: 从上同调理论到谱

在本节中, 没有特殊说明的情况下, 我们考虑带基点的拓扑空间范畴, 也就是所有拓扑空间均指带基点的拓扑空间, 同时所有映射均为带基点的拓扑空间之间保基点的连续映射. 我们用 $[X, Y]$ 表示拓扑空间 X 到 Y 的保基点的映射同伦类构成的集合. 在有需要的情况下, 对于一个带基点的拓扑空间 X, 我们用 $*_X$ 来表示 X 的基点.

在 20 世纪 30-40 年代, Goerges de Rham, Norman Steenrod, Samuel Eilenberg 分别用上链复形定义了如今广为人知的 de Rham 上同调, Čech 上同调, 以及奇异上同调. 在随后的 20 世纪 40-50 年代, Samuel Eilenberg 和 Norman Steenrod 给出了上同调理论的公理化定义 [5]. 然而, 自从 Whitehead 在 20 世纪 60 年代前后提出广义上同调理论后, 上同调理论发生了很大的变化 [12]. 有 Burdick-Conner-Floyd 定理表明, 在一定条件下, 能够用上链复形来计算的上同调理论均同构于奇异同调的乘积 [4]. 与此同时, 人们也发现了许多不能用上链复形计算的广义上同调理论, 例如由 Michael Francis Atiyah 和 Friedrich Hirzebruch 的 K-理论 [1]，以及 Thom 的配边理论等 [11].

根据 Eilenberg-Steenrod 的定义, 广义上同调理论 E 满足: 对于任意整数 q, E^q 是从空间对的同伦范畴到阿贝尔群范畴的反变函子, 对于空间 X, 定义 $E^q(X)$ 为 $E^q(X, \varnothing)$; 对于空间对 (X, A), 有自然变换 $\delta : E^q(A) \to E^{q+1}(X, A)$; 并要求它们满足以下公理:[8]:

定义 1.1.1. 对于拓扑空间 X, Y, 称映射 $f : X \to Y$ 为弱同伦等价 (weak homotopy equivalence), 如果 f 诱导了所有同伦群的同构.

公理 (1) 弱同伦等价不变性：弱同伦等价诱导上同调理论的同构.

公理 (2) 正合性: 对于一个好的嵌入 $i: A \overset{i}{\hookrightarrow} X$(例如 i 为余纤维化), 我们有由嵌入 $A \overset{i}{\hookrightarrow} X$ 以及 $(X, \varnothing) \overset{i}{\hookrightarrow} (X, A)$ 诱导的长正合列:

$$\cdots \to E^{q-1}(A) \to E^q(X/A) \to E^q(X) \to E^q(A) \to E^{q+1}(X/A) \to \cdots$$

公理 (3) 加性: 对于一族拓扑空间的余积 (也就是单点并)$\bigvee_i X_i$, 我们有

$$E^q(\bigvee_i X_i) \cong \prod_i E^q(X_i).$$

根据 Brown 表示定理 [3]:

定理 1.1.2. *在拓扑空间的同伦范畴中, 任意一系列满足以上三条性质的函子 E^q 都是可表函子, 也就是说, 存在一系列拓扑空间 E_q, 使得对于任意拓扑空间 X, 都有 $E^q(X) \cong [X, E_q]$.*

广义上同调理论还有一个很重要的性质:

性质 1.1.3. *对于任意一个拓扑空间 X, 定义 $\Sigma X := X \times [0,1]/(X \times \{0,1\} \cup \{*_X\} \times I)$, 那么有自然同构 $E^q(X) \cong E^{q+1}(\Sigma X)$.*

借助定理1.1.2, 性质1.1.3可等价地写为如下形式:

性质 1.1.4.
$$[X, E_q] \cong E^q(X) \cong E^{q+1}(\Sigma X) \cong [\Sigma X, E_{q+1}].$$

在代数拓扑中, 我们有回路空间以及解回路空间的概念来帮助我们改写性质1.1.3:

定义 1.1.5. 对于任意拓扑空间 Y, 可以定义 Y 的*回路空间* (loop space) $\Omega Y :=$ {映射$f: S^1 \to Y$}（注意我们在本节中提到的映射均为带基点的拓扑空间之间保基点的连续映射）, 其上的拓扑为紧开拓扑.

定义 1.1.6. 对于拓扑空间 X, 如果存在拓扑空间 Y, 使得 X 与 $\Omega^n Y$ 弱同伦等价, 则称 X 为 *n-叠回路空间* (n-fold loop space).

如果存在一列拓扑空间 $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使得对于任意的 $m \in \mathbb{N}$, 空间 X 和 $\Omega^m Y_m$ 弱同伦等价, 则称 X 为一个 *无穷回路空间* (infinite loop space).

定义 1.1.7. 对于拓扑空间 X, X 的*解回路空间* (delooping) BX 由以下信息组成:

(1) 拓扑空间 Y;

(2) 映射 $f: X \to \Omega Y$, 使得 f 为 X 与 ΩY 之间的弱同伦等价.

同时, 对于任意紧生成的拓扑空间 X, Y, 因为 Σ 和 Ω 是一对伴随函子, 所以有 $[\Sigma X, Y] \cong [X, \Omega Y]$, 此同构关于 X, Y 具有自然性。伴随函子的定义以及性质将在讲座三中介绍. 因此, 性质 1.1.3 亦可等价地写为如下形式:

(4′′)$[X, E_q] = E^q(X) \cong E^{q+1}(\Sigma X) = [\Sigma X, E_{q+1}] \cong [X, \Omega E_{q+1}]$.

我们用 $\varphi_X : [X, E_q] \xrightarrow{\cong} [X, \Omega E_{q+1}]$ 记如上得到的同构. 根据 Yoneda 引理, $\mathrm{Nat}([-, E_q], [-, \Omega E_{q+1}]) \cong [E_q, \Omega E_{q+1}]$. 于是自然同构 $\{\varphi_\cdot\}$ 对应于弱同伦等价 $[f] \in [E_q, \Omega E_{q+1}]$, 也就是说, 我们有空间 E_q 弱同伦等价于空间 ΩE_{q+1}. 综上, 一个广义上同调理论 $\{E^q, q \in \mathbb{Z}\}$ 可以如下表示:

$$E^q(X) = \begin{cases} [X, E_q], & q \geq 0, \\ [X, \Omega^{-q} E_0], & q < 0, \end{cases}$$

同时有弱同伦等价 $f_q : E_q \to \Omega E_{q+1}$, $\forall q \in \mathbb{N}$.

因此, 一列具有弱同伦等价 $f_q : E_q \to \Omega E_{q+1}$, $\forall q \in \mathbb{N}$ 的空间 $\{E_q\}$ 对于广义上同调理论十分重要, 所有的广义上同调理论都是由一列这样的空间给出的.

定义 1.1.8. 一个 Ω-谱 (Ω-Spectrum) 由以下信息组成:

(1) 一列拓扑空间 $\{E_q\}_{q\in\mathbb{N}}$

(2) 一列弱同伦等价 $f_q : E_q \to \Omega E_{q+1}$, $\forall q \in \mathbb{N}$.

定义 1.1.9. 两个 Ω-谱之间的映射为一列映射: $\varphi_q : E_q \to E'_q$, $\forall q \in \mathbb{N}$, 使得以下图表在同伦意义下交换:

$$\begin{tikzcd} E_q \arrow[r, "\varphi_q"] \arrow[d, "f_q"'] & E'_q \arrow[d, "f'_q"] \\ \Omega E_{q+1} \arrow[r, "\Omega(\varphi_{q+1})"'] & \Omega E'_{q+1} \end{tikzcd} .$$

在 Ω -谱中, 映射 $f_q : E_q \to \Omega E_{q+1}$ 为弱同伦等价, 由定义可知 E_{q+1} 为 E_q 的解回路空间, 那么 Ω -谱中的每一个拓扑空间 E_q 都弱同伦等价于 $B^q E_0$. 也就是说, 我们只需要了解 Ω -谱中第一个空间 E_0 的性质和它的无穷回路空间结构, 就可以利用解回路空间得到后续所需的所有空间 E_q 以及所需的一系列映射 f_q. 同时, 注意到以下映射均为弱同伦等价:

$$E_0 \xrightarrow{f_0} \Omega E_1 \xrightarrow{\Omega(f_1)} \Omega^2 E_2 \xrightarrow{\Omega^2(f_2)} \Omega^3 E_3 \to \cdots .$$

那么对于任意的 $m \in \mathbb{N}$, 映射 $\Omega^m(f_m) \circ \Omega^{m-1}(f_{m-1}) \circ \cdots \circ \Omega(f_1) \circ f_0 : E_0 \to \Omega^{m+1} E_{m+1}$ 为弱同伦等价, 而根据定义1.1.6, 这意味着 E_0 是一个无穷回路空间 (也当然是一个 n-叠回路空间).

粗略地说, 我们可以通过一个谱得到一个上同调理论, 也可以由一个上同调理论给出一个谱, 而每个谱又对应着一个无穷回路空间. 那么, 我们自然会有一个问题:

问题 1.1.10. *如何才能得到一个谱? 更具体地说, 如何判定拓扑空间是否为无穷回路空间, 以及如何从无穷回路空间得到谱?*

这就是本书的主题: 算单子, 具有一个算单子上的代数的结构的拓扑空间, 以及从此类空间得到谱的方法. 总的来说, 我们将介绍拓扑空间上一些额外的

结构, 拓扑空间 X 具有这些结构时，我们就可以找到拓扑空间 Y, 使得 X 同伦于 $\Omega^n Y$. 当 n 趋向于无穷时, 这样的结构就可以帮助我们得到谱, 也就是上同调理论.

1.2. 历史

在本节中, 我们简要介绍与问题1.1.10 相关的历史.

20 世纪 50 年代初期，人们开始考虑以下问题:

问题 1.2.1. *拓扑空间 X 需要满足何种条件, 才能使得其解回路空间 BX 存在?*

如果 BX 存在, 那么 X 弱同伦等价于 ΩBX. 此时 X 中的每个点可以看作 Y 上的一条闭道路, 而道路的复合给出了 X 上的一个乘法, 同时这个乘法在同伦意义下是结合的, 因此 X 是一个同伦结合的 H-空间.

此时如果我们有四条道路, 那么我们就会得到一个五边形, 每个顶点分别代表这四条道路的一种复合先后顺序:

$$
\begin{tikzcd}
 & A\cdot(B\cdot(C\cdot D)) \arrow[dl, dash, dashed] \arrow[dr, dash, dashed] & \\
A\cdot((B\cdot C)\cdot D) \arrow[d, dash, dashed] & & (A\cdot B)\cdot(C\cdot D) \arrow[d, dash, dashed] \\
(A\cdot(B\cdot C))\cdot D \arrow[rr, dash, dashed] & & ((A\cdot B)\cdot C)\cdot D
\end{tikzcd}
$$

如果 X 是同伦结合的 H-空间, 那么我们可以填实这个五边形的边界, 来代表不同的结合方式之间的同伦:

$$
\begin{tikzcd}
 & A\cdot(B\cdot(C\cdot D)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
A\cdot((B\cdot C)\cdot D) \arrow[d] & & (A\cdot B)\cdot(C\cdot D) \arrow[d] \\
(A\cdot(B\cdot C))\cdot D \arrow[rr] & & ((A\cdot B)\cdot C)\cdot D
\end{tikzcd}
$$

一个自然的问题是：我们是否可以填实这个五边形的内部? 也就是说, 不同结合方式之间的同伦 (也就是图中的边) 是不是相互同伦的. 对于更多的变元的结合关系, 我们也可以思考类似的问题.

在讲座二中，这些问题将帮助我们理解 James Dillon Stasheff 在 20 世纪 60 年代给出的 A_n-空间的定义 [9, 10]. 他定义的 A_∞-空间帮助我们得到了问题1.2.1 的答案: 如果拓扑空间 X 是一个 A_∞-空间, 那么确实存在 X 的解回路空间 BX. 更多细节，例如 A_n-空间以及 A_∞-空间的定义和性质，将在讲座二中介绍.

注 1.2.2. 需要注意的是, Stasheff 关于 A_∞-空间的定义与如今我们通常使用的 A_∞-空间的定义并不相同. 如今我们定义的 A_∞-空间是一个 C-空间, 其中 C 为某个局部可缩且 Σ-等变的算单子; 而 Stasheff 当时定义的 A_∞-空间是一个 $\mathcal{K}$-空间, 其中 $\mathcal{K}$ 为某个局部可缩但不是 Σ-等变的算单子.

回答了问题 1.2.1 后, 为了得到一个谱, 我们还需要思考以下这些问题:

问题 1.2.3. *拓扑空间 X 需要满足何种条件, 才能使得其解回路空间的解回路空间 $B(BX)$ 存在? 此时 BX 也是一个回路空间, 且 X 弱同伦等价于 ΩBX, 也弱同伦等价于 $\Omega\Omega BB(X)$, 因此 X 是一个 2-回路空间.*

更进一步地:

问题 1.2.4. *拓扑空间 X 需要满足何种条件, 才能使得其解回路空间 BX 是一个 n-回路空间, 从而使 X 成为一个 $(n+1)$-回路空间.*

问题1.2.3的答案是, 我们需要更高维的同伦信息. 1968 年, Boardman 和 Vogt 第一次实现了这一点 (1968 年声称, 1974 年发表). 他们把所需的高阶同伦结构叫做 PROP, 而这个概念是由 Frank Adams 和 Saunders MacLane 在未发表的工作中提出的. Boardman 和 Vogt 参考 Adams 和 MacLane 的工作构造了一个*无穷回路机器* (infinite loop machine), 从而得到了由拓扑空间构造谱的办法.

注 1.2.5. 为什么 Adams 和 MacLane 没有发表他们工作呢? 原因是他们只定义了 PROP , 以及 PROP-代数, 但他们没有找到一个具体的拓扑空间, 使得这个空间上有 PROP 的作用, 从而令其成为一个 PROP-代数.

实际上, Boardman 和 Vogt 不仅是第一个严格解决这个问题的人, 他们还是第一个严格写下*无穷范畴* (infinite category) 概念的人. 他们十分关心拓扑空间上同伦不变的结构, 而他们定义的 weak Kan complex 现在被大家称为无穷范畴, 也是 Lurie 的工作的出发点.[2]

1969 年, Graeme Segal 给出了一种完全不同的办法 (1969 年声称, 1974 年发表), 用于解决从具有额外信息的拓扑空间构造无穷回路空间和谱的问题. Segal 定义的无穷回路机器和 Broadman 和 Vogt 的无穷回路机器的区别在于, Segal 的无穷回路机器中要求一些映射是同伦等价, 而高阶同伦信息就藏在这些同伦等价中; 而在 Broadman 和 Vogt 的无穷回路机器中, 高阶同伦信息需要由 PROP 上的代数结构给出, 而这也导致了前文提到过的问题: 在拓扑空间上, 我们难以自然地看出这些结构. 我们可以找到一些满足 Segal 定义的无穷回路机器的例子, 但依旧需要更精简的概念.

J. Peter May 在 Boardman, Vogt 和 Segal 之后给出了算单子 (Operad) 的定义. 算单子是 PROP 的概念的类比, 或者说特殊情况, 它可能是我们记录高阶同伦信息所需要的最小结构. 同时, 我们还能找到很多自然的拓扑空间, 使得它们是算单子上的代数. 算单子及其代数的定义和性质将在讲座四中介绍.

关于算单子及其代数, 一个很重要的定理是:

定理 1.2.6. *如果 O 是一个 E_∞-算单子, X 道路连通且是一个 O-代数, 则存在一个谱 EX, 使得 EX_0 和 X 同伦等价.*

我们将在讲座三中介绍 单子 (Monad) 的定义和性质, 以及由 Beck 提出的, 通过一对伴随函子来定义单子的方法. 我们还将证明以下定理:

定理 1.2.7. *对于任意的两个范畴 $\mathcal{T}, \mathcal{S}$, 以及一对伴随函子 $\Sigma : \mathcal{T} \to \mathcal{S}, \Omega : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$, 我们有:*

(1) 可以通过 (Σ, Ω) 定义单子 $\Gamma = \Omega\Sigma$;

(2) 对于任意的 $Y \in \mathcal{S}$, ΩY 为 Γ-代数.

那么, 函子 Ω 就是范畴 $\mathcal{S}$ 到 Γ-代数范畴的函子, 而在讲座三中的 Beck 单子性定理将给出 Ω 为范畴等价的条件.

一个范畴中 C 中的单纯对象是指反变函子 $X : \Delta^{\mathrm{op}} \to C$, 其中 Δ 为单纯范畴 (simplicial category)[7]. 当范畴 C 满足一定的条件时, 我们可以做 X 的几何实现 $|X|$. 借此, 我们可以定义双边 Bar 构造: $B(\Sigma, \mathbb{C}, X) = |B_*(\Sigma, \mathbb{C}, X)|$ 为单纯拓扑空间 $B_*(\Sigma, \mathbb{C}, X)$ 的几何实现, 其中 $B_q(\Sigma, \mathbb{C}, X) = \Sigma\mathbb{C}^q X$[6].

同时, 如果我们有函子 $\mathbb{C}$ 在函子 Σ 上的作用 $\Sigma\mathbb{C} \to \Sigma$, 那么 X 就是一个 $\mathbb{C}$-代数, 也就是有态射 $\mathbb{C}X \to X$. 我们将在之后讲座中介绍更多的细节: 虽然单子可能不能帮助我们构造无穷回路空间, 但算单子可以.

截至目前，我们还没有介绍单子和算单子关系，而这也关乎算单子一词的由来. “ 单子” 的中的 “ 单” 表示它只有一个运算 μ，而算单子是由一系列运算给出的，所以 J. Peter May 把运算 (Operation) 和单子 (Monad) 这两个词结合在一起，的到了” 算单子 (Operad)” 一词. 更多的相关的细节将会在讲座四中提到.

同时从一个算单子 $\mathcal{C}$ 出发, 我们可以定义一个单子 $\mathbb{C}$, 使得 $\mathbb{C}X = \coprod \mathcal{C}(n) \times_{\Sigma_n} X^n / \sim$ 其中 $(\sigma_i c, x) \sim (c, s_i x)$.（讲座三）

给定一个算单子 $\mathcal{C}$，我们会得到一个单子 $\mathbb{C}$, 对于 $\mathbb{C}$ 代数 X, 我们会有 $\mathbb{C}\Omega Y \xrightarrow{\theta} \Omega X$.

我们有:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{C}\Omega\Sigma X \arrow[dr, "\theta"] & \\
\mathbb{C}X \arrow[ur, "\mathbb{C}\eta"] \arrow[rr, "\alpha"'] & & \Omega\Sigma X,
\end{tikzcd}$$

以及 β:

$$\Sigma\mathbb{C}X \xrightarrow{\beta} \Sigma X.$$

$$\begin{tikzcd}
X & B(\mathbb{C}, \mathbb{C}, X) \arrow[l] \arrow[r, "{B(\alpha, \mathrm{Id}, \mathrm{Id})}"] \arrow[ddr, "\eta_{\mathbb{C}}"'] & B(\Omega\Sigma, \mathbb{C}, X) \arrow[d] \\
& & \Omega B(\Sigma, \mathbb{C}, X) \arrow[d, "\cong"] \\
& & \Omega_{\mathbb{C}}\Sigma_{\mathbb{C}} B(\mathbb{C}, \mathbb{C}, X)
\end{tikzcd}$$

由此我们可以得到一个函子 $\Omega : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$, 其穿过范畴 $\mathbb{C}[\mathrm{Alg}]$, 也就是有下面的交换图表:

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, phantom, ":"] & \mathcal{S} \arrow[r, "\Omega_{\mathbb{C}}"] \arrow[dr] & \mathbb{C}[\mathrm{Alg}] \arrow[d] \\ & & \mathcal{T} \end{tikzcd}$$

函子 $\Omega_{\mathbb{C}}$ 有一个左伴随 $\Sigma_{\mathbb{C}}$, 由此我们可以得到 $X \leftarrow B(\mathbb{C}, \mathbb{C}, X)$ 是一个等价, 这正如对一个模作 Bar 消解. 谱的 recognition 原理就是要对 X 作一个好的逼近, 得到 $X \xleftarrow{\simeq} \overline{X} \to \Sigma_\infty \Sigma_{\mathbb{C}} \overline{X}$, 其中 $X \leftarrow \overline{X}$ 是一个等价.

借助 Zero Space funtor: $(\Sigma^\infty, \Omega^\infty)$, 我们可以得到一个算单子, 它可以作用在每一个谱 Y 的零空间 $(\Omega^\infty Y)_0$ 上. 虽然不是每一个 E_∞-算单子都有这样的作用, 但是在差一个同构的意义下，这件事情是对的. 这就是 recognition 原理的思想, 它可以帮助我们从一个 E_∞-空间得到谱.

参考文献

[1] Michael F Atiyah and Friedrich Hirzebruch. Riemann-roch theorems for differentiable manifolds. Bulletin of the American Mathematical Society, 65(4):276–281, 1959.

[2] John Michael Boardman and Rainer M Vogt. Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces, volume 347. Springer, 2006.

[3] Edgar H. Brown. Cohomology theories. Annals of Mathematics, 75(3):467–484, 1962.

[4] R. O. Burdick, P. E. Conner, and E. E. Floyd. Chain theories and their derived homology. Proceedings of the American Mathematical Society, 19(5):1115–1118, 1968.

[5] SAMUEL EILENBERG and NORMAN STEENROD. Foundations of Algebraic Topology. Princeton University Press, 1952.

[6] J. P May. Classifying Spaces and Fibrations. Memoirs of the American Mathematical Society ; No. 155. American Mathematical Society.

[7] J. Peter May. Simplicial objects in algebraic topology. Chicago lectures in mathematics series. The University of Chicago Press, Chicago, [U.S.A.] ; London, 1967.

[8] J Peter May. A concise course in algebraic topology. University of Chicago press, 1999.

[9] James Dillon Stasheff. Homotopy associativity of h-spaces. i. Transactions of the American Mathematical Society, 108(2):275–292, 1963.

[10] James Dillon Stasheff. Homotopy associativity of h-spaces. ii. Transactions of the American Mathematical Society, 108(2):293–312, 1963.

[11] René Thom. Quelques propriétés globales des variétés différentiables. Commentarii Mathematici Helvetici, 28(1):17–86, 1954.

[12] George W. Whitehead. Generalized homology theories. Transactions of the American Mathematical Society, 102(2):227–283, 1962.

CHAPTER 2

A_∞-空间

郭萌

这一讲, 我们回答导言中的第一个问题: 给定一个空间 X, 我们如何知道 X 是一个回路空间 (loop space), 或者等价地说 $X \simeq \Omega Y$ 对于某个空间 Y? 我们先回忆一些定义.

定义 2.1.1. (Y, y_0) 是一个基点空间 (based space/pointed space). *回路空间* ΩY 是由从单位区间 $I = [0,1]$ 映射到 Y, 并且在 $0, 1 \in [0,1]$ 值为基点 $y_0 \in Y$ 的所有连续映射构成的拓扑空间:

$$\Omega Y = \{\gamma : I \to Y | \gamma(0) = \gamma(1) = y_0\}$$

定义 2.1.2. 一个 *H-空间* (*H*-space) 是一个基点空间 (X, e), 以及一个连续映射 $\mu : X \times X \to X$, 使得对所有的 $x \in X$, $\mu(e, x)$ 和 $\mu(x, e)$ 都同伦于恒等映射.

注 2.1.3. 映射 μ 经常被称为 H-空间的乘法 (结构). $\mu(x_1, x_2)$ 也经常被写为 $x_1 \cdot x_2$ 或者 $x_1 x_2$.

我们从定义很容易得到, 回路空间 ΩY 是一个 H-空间. 其中, ΩY 的基点是 e, 这里 e 代表的是取值都为 Y 上的基点 e 的回路. ΩY 的乘法 μ 是由连接 (concatenation) 得到. 具体地, 两个任意回路 $\gamma_1, \gamma_2 : I \to Y$, $\gamma_1 \cdot \gamma_2 = \mu(\gamma_1, \gamma_2)$ 定义为:

$$\begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}; \\ \gamma_2(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

在此乘法下, 我们容易得到 $\gamma_1 \cdot e$ 和 $e \cdot \gamma_1$ 都同伦等价于 γ_1, 所以回路空间 ΩY 是一个 H-空间.

注 2.1.4. 回路 $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ 可以理解为前 1/2 时间以 γ_1 的轨迹在空间中行走, 后 1/2 时间以 γ_2 的轨迹在空间中行走.

回路空间 ΩY 不仅仅是一个 H-空间, 它还是一个 (同伦意义下) 结合 (homotopy associate) 的 H-空间. 我们两种连接三个回路 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 的方式:

$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_3 \qquad \gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_3)$$

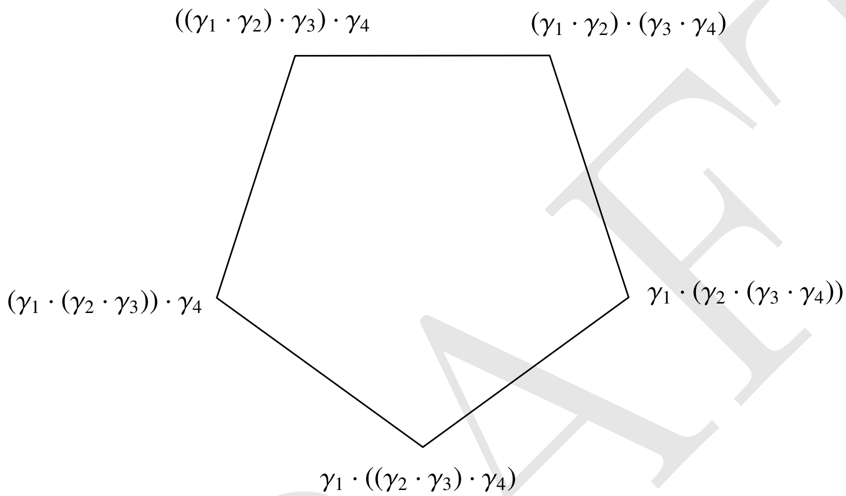
它们并不相等. $(\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_3$ 是第一个 1/4 时间以 γ_1 的方式在空间中行走, 第二个 1/4 时间以 γ_2 的方式在空间中行走, 最后 1/2 时间以 γ_3 的方式在空间中

行走.$\gamma_1\cdot(\gamma_2\cdot\gamma_3)$ 是前 1/2 时间以 γ_1 的方式在空间中行走，此后 1/4 时间以 γ_2 的方式在空间中行走，最后 1/4 时间以 γ_3 的方式在空间中行走. 但 $(\gamma_1\cdot\gamma_2)\cdot\gamma_3$ 和 $\gamma_1\cdot(\gamma_2\cdot\gamma_3)$ 是同伦的.

假设 $X=\Omega Y$，并且 $\mu: X\times X\to X$ 是由串联映射给出的乘法。我们进一步观察 X 的乘法满足什么结构。

- 串联两个回路只有 $\gamma_1\cdot\gamma_2$ 一种方式。
- 如果我们串联三个回路 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$，我们有两种（同伦的）方式。

    与此同伦相关联的，我们有一个映射 $m_3: I\times X\times X\times X\to X$。
- 如果我们有四个回路 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 要串联，会发生什么？我们有五种方式：



    每条边都是从上述的 m_3 中导出的。例如，水平边是 $(\gamma_1\cdot\gamma_2),\gamma_3,\gamma_4$ 的 m_3 映射。现在从 $((\gamma_1\cdot\gamma_2)\cdot\gamma_3)\cdot\gamma_4$ 到 $\gamma_1\cdot(\gamma_2\cdot(\gamma_3\cdot\gamma_4))$，有两条路径：

$$((\gamma_1\cdot\gamma_2)\cdot\gamma_3)\cdot\gamma_4\to(\gamma_1\cdot(\gamma_2\cdot\gamma_3))\cdot\gamma_4\to\gamma_1\cdot((\gamma_2\cdot\gamma_3)\cdot\gamma_4)\to\gamma_1\cdot(\gamma_2\cdot(\gamma_3\cdot\gamma_4))$$

$$((\gamma_1\cdot\gamma_2)\cdot\gamma_3)\cdot\gamma_4\to(\gamma_1\cdot\gamma_2)\cdot(\gamma_3\cdot\gamma_4)\to\gamma_1\cdot(\gamma_2\cdot(\gamma_3\cdot\gamma_4))$$

    必须存在一个同伦，使得两条路径等价。这给我们提供了一个映射

$$m_4: P\times X^4\to X$$

    其中 P 是上述实心五边形。
- 如果我们有五个回路 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_5$ 要串联？我们将以类似的方式进行，并构造一个（三维的）空间 D（实际上是一个九面体，14 个顶点，21 条边），其中每个顶点表示所有可能的串联方式。边由 m_3 导出，面由 m_4 导出。必须存在一致同伦的映射：

$$m_5: D\times X^5\to X$$

- 我们将继续对更大的 n 进行类似的操作......

现在我们对此进行形式化，我们首先构造一个 $(n-2)$ 维空间 K_n，对于 $n \geq 2$。K_2 是一个点，K_3 是一个区间，K_4 是一个五边形，$\cdots$。Stasheff 给出了 K_n 的定义/构造，其中 $K_n \subseteq I^{n-2}$，它的行为类似于标准单纯形，也具有面和退化，且满足

定理 2.1.5. [1]

(1) K_n 同胚于 I^{n-2}。

(2) 对于每个 n，存在退化映射 $s_j : K_n \to K_{n-1}, j = 1, \cdots, n$，以及面映射 $\partial_k(r, s)$，他们满足某些性质。

具体说明某些性质？否则这个定理没有内容

注 2.1.6. 空间 K_n 可以描述为一个凸多面体。我们可以将 K_n 中的每个顶点看作是将 X 中的 n 个元素相乘的方式，也就是在 n 个字母的单词中以有意义的方式插入括号。

定义 2.1.7. 设 X 是一个空间。X 上的 A_n-形式 (A_n-form) 是满足以下性质的一组映射 $M_i : K_i \times X^{\times i} \to X$，对于所有的 $2 \leq i \leq n$：

(1) 当 $K_2 =$ 且 e 是 X 的基点时，$M_2(, e, x) = M_2(*, x, e) = x$。

(2) 对于 $\rho \in K_r, \sigma \in K_s$ 且 $r + s = i + 1$，我们有

$$M_i(\partial_k(r,s)(\rho,\sigma), x_1, x_2, \cdots, x_i) = M_r(\rho, x_1, \cdots, x_{k-1}, M_s(\sigma, x_k, \cdots, x_{k+s-1}), x_{k+3}, \cdots, x_i).$$

(3) 对于 $\tau \in K_i$ 且 $i > 2$，我们有

$$M_i(\tau, x_1, \cdots, x_{j-1}, e, x_{j+1}, \cdots, x_i) = M_{i-1}(s_j(\tau), x_1, \cdots, x_{j+1}, \cdots, x_i).$$

注 2.1.8. 映射 M_i 诱导了映射 $m_i : K_i \to \mathrm{Map}(X^{\times i}, X)$，使得 X 成为（非 Σ-等变的）算单子 $\mathcal{K} = \{K_i\}$ 的代数。更多信息请参阅以下讲座。

定义 2.1.9. 对于一个空间 X，X 上的 A_n-结构包括一个 n-元组的 (基点) 映射

$$\begin{array}{ccccccc} X = E_1 & \subseteq & E_2 & \subseteq \cdots \subseteq & E_n \\ \downarrow p_1 & & \downarrow p_2 & \cdots & \downarrow p_n \\ * = B_1 & \subseteq & B_2 & \subseteq \cdots \subseteq & B_n \end{array}$$

以及一个满足以下条件的同伦 $H : E_{n-1} \times I \to E_n$：

(1) 对于每个 $1 \leq i \leq n$，诱导的映射 $(p_i)_* : \pi_k(E_i, X) \to \pi_k(B_i)$ 对所有 $k \geq 0$ 都是同构的。

(2) $H|_{E_{n-1}\times 0}$ 是 E_n 的基点，$H|_{E_{n-1}\times 1}$ 是恒等映射。

(3) $H(E_{i-1} \times I) \subseteq E_i$.

换句话说，H 将 E_{n-1} 收缩到 E_n 中的基点。

注 2.1.10. 这个定义不要求映射 p_i 是一个纤维丛，但这并不是一个问题。我们总是可以用一个与 E_i 同伦等价的空间 $\tilde{E}_i$ 替换 E_i，使得 $\tilde{E}_i \to B_i$ 是一个纤维丛，且纤维同伦于 X。

定理 2.1.11. [1] 一个空间 X 具有 A_n-结构当且仅当它具有 A_n 形式 (X, M_i)。

定义 2.1.12. 一个 A_n-空间是一个具有 A_n-形式或 A_n-结构的空间,$1 \leq n \leq \infty$。

注 2.1.13. (1) 一个 A_2-空间是一个 H-空间。$x \cdot y = M_2(*, x, y)$.
(2) 一个 A_3-空间是一个（同伦意义下的）结合 H-空间。

注 2.1.14. 对于任何 n，一个（严格的）结合 H-空间 (拓扑幺半群) 都具有 A_n 形式。我们可以通过让 $M_n(\tau, x_1, \cdots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdots \cdot x_n$，$\tau \in K_n$。

定理 2.1.15. [1] X 是一个连通的基点空间，$X \simeq \Omega Y$ 对于某个空间 Y 当且仅当 X 是一个 A_∞-空间。

参考文献

[1] James Dillon Stasheff. Homotopy associativity of h-spaces. i. Transactions of the American Mathematical Society, 108(2):275–292, 1963.

CHAPTER 3

伴随函子, 单子与 Beck 单子性定理

卢运则

伴随函子是范畴论中的重要概念, 其应用也遍布于各数学分支. 伴随函子的余单位有一种类似幺半群的结构, 具有这种结构的函子被称为单子. 我们将定义单子与单子上的代数, 并研究这些结构将如何决定伴随函子的信息.

3.1. 伴随函子

定义 3.1.1. 一个伴随 (adjunction) 由一对函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 和一个关于 $c \in \mathcal{C}, d \in \mathcal{D}$ 自然的双射

$$\Phi_{c,d} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Fc, d) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, Gd)$$

组成. 此时称 F 是 G 的左伴随函子 (left adjoint), G 是 F 的右伴随函子 (right adjoint), 记为 $F \dashv G$.

定义 3.1.2. 对任意 $c \in \mathcal{C}$, 在上述自然双射中取 $d = Fc$, 则 $\Phi(\mathrm{Id}_{Fc}) : c \to GFc$ 组成从恒同函子 $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ 到 GF 的自然变换 $\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$, 称为伴随的单位 (unit). 对偶地, 令 $c = Gd$, 可得自然变换 $\epsilon : FG \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, 称为伴随的余单位 (counit).

伴随 $F \dashv G$ 与单位和余单位 (η, ϵ) 通过三角恒等式互相决定:

定理 3.1.3. 设 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是一对函子. 若 $F \dashv G$, 则该伴随的单位 η 和余单位 ϵ 满足以下称为三角恒等式 (triangle identity) 的交换图表:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, Rightarrow, "F\eta"] \arrow[dr, equal] & FGF \arrow[d, Rightarrow, "\epsilon F"] \\ & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, Rightarrow, "\eta G"] \arrow[dr, equal] & GFG \arrow[d, Rightarrow, "G\epsilon"] \\ & G \end{tikzcd} .$$

反之, 若存在自然变换 $\eta : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ 和 $\epsilon : FG \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ 使三角恒等式成立, 则 $F \dashv G$.

证明. 参见 [1] 定理 4.1.2. □

例子 3.1.4. 考虑带基点的拓扑空间范畴 $\mathcal{T}^*$: 对带基点的拓扑空间 X 定义

$$\Sigma X = S^1 \wedge X = X \times S^1 / (* \times S^1 \vee X \times *)$$

$$\Omega X = F(S^1, X) = \{f : f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^*}(S^1, X)\},$$

则 $\Sigma \dashv \Omega$. 这一伴随还诱导出同伦范畴上的伴随. 设 $n \geq 1$, 选用该伴随给出 $\Sigma^n \dashv \Omega^n$.

3.2. 单子

定义 3.2.1. 设 $\mathcal{C}$ 为范畴, 一个单子 (monad) $T = \langle T, \eta, \mu \rangle$ 包含了自函子 $T : X \to X$ 和自然变换

$$\eta : \mathrm{Id}_X \Rightarrow T, \quad \mu : T^2 \Rightarrow T,$$

满足以下结合性 (associativity) 和单位性 (unitality) 交换图表:

$$\begin{tikzcd}
T^3 \arrow[r, Rightarrow, "T\mu"] \arrow[d, Rightarrow, "\mu T"'] & T^2 \arrow[d, Rightarrow, "\mu"] \\
T^2 \arrow[r, Rightarrow, "\mu"] & T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, Rightarrow, "\eta T"] \arrow[dr, equal] & T^2 \arrow[d, Rightarrow, "\mu"] & T \arrow[l, Rightarrow, "T\eta"'] \arrow[dl, equal] \\
& T &
\end{tikzcd}.$$

注 3.2.2. (1). 对偶地, 我们可以定义余单子 (comonad).
(2). 单子可以看作是 $\mathcal{C}$ 的自函子范畴中的幺半群 (monoid) 对象.

任何伴随 $F \dashv G$ 诱导 $\mathcal{C}$ 上的单子

$$T = \langle GF, \eta, G\epsilon F \rangle.$$

例如, 由伴随的三角恒等式可得出单位性所要求的交换图表成立. 下面是部分图表的例子, 其余图表的详细证明可见参考文献 [2].

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, Rightarrow, "\eta G"] \arrow[dr, equal] & GFG \arrow[d, Rightarrow, "G\epsilon"] \\
& G
\end{tikzcd}
\quad \xrightarrow{\circ F} \quad
\begin{tikzcd}
GF \arrow[r, Rightarrow, "\eta GF"] \arrow[dr, equal] & GFGF \arrow[d, Rightarrow, "G\epsilon F"] \\
& GF
\end{tikzcd}.$$

例子 3.2.3. 考虑 F 是从集合范畴到幺半群范畴的自由生成幺半群函子, U 是从幺半群范畴到集合范畴的忘性函子. 则 $F \dashv U$. 对应的单子 $T = UF$ 为

$$TX = \text{自由幺半群 } FX, \text{忘记幺半群结构},$$

$$\eta_X : \text{将元素 } x \in X \text{ 映到 } FX \text{ 中长为 } 1 \text{ 的字串},$$

$$\mu : \text{将字串的串连接起来, 视为一个字串. 例如 } (xy)(zw) \mapsto xyzw.$$

很自然会问: 任意单子是否都可由一对伴随函子诱导? 这个问题的答案是肯定的.

定义 3.2.4. 设 T 为单子, 一个T-代数 (T-algebra) 是一个包含包含对象 $Y \in \mathcal{C}$ 与态射 $\theta : TY \to Y$ 的二元组 $\langle Y, \theta \rangle$, 满足以下交换图表:

$$\begin{tikzcd}
T^2 Y \arrow[r, "\mu_Y"] \arrow[d, "T\theta"'] & TY \arrow[d, "\theta"] \\
TY \arrow[r, "\theta"] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "\eta_Y"] \arrow[dr, equal] & TY \arrow[d, "\theta"] \\
& Y
\end{tikzcd}.$$

一个T-代数同态$(A,\alpha) \to (B,\beta)$ 是一个态射 $f : A \to B$ 满足以下交换图表:

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "\alpha"'] & TB \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}.$$

全体 T-代数及其同态构成一个范畴, 记作 $\mathcal{C}^T$ 或 $\mathrm{Alg}_T(\mathcal{C})$, 称为 T 的 Eilenberg–Moore 范畴.

定理 3.2.5. 若 $\langle T,\eta,\mu\rangle$ 是 $\mathcal{C}$ 上的单子, 则存在函子

$$F^T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^T$$

$$G^T : \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$$

和伴随 $F^T \dashv G^T$. 该伴随的单位即为 η, 余单位由 $\mathcal{C}^T$ 中对象 Y 的 T-代数结构同态 $TY \to Y$ 给出. 且 $F^T \dashv G^T$ 诱导的单子等于 $\langle T,\eta,\mu\rangle$.

证明. 我们给出证明的概要. 详细证明可见参考文献 [2].

首先需要验证对 $\mathcal{C}$ 的对象 x, $\langle Tx,\mu_x\rangle$ 是一个 T-代数. 函子 F^T 和 G^T 的定义由以下图表给出:

$$F^T: \quad \begin{tikzcd} x \arrow[r, "F^T"] \arrow[d, "f"'] & \langle Tx,\mu_x\rangle \arrow[d, "Tf"] \\ x' \arrow[r, "F^T"] & \langle Tx',\mu_{x'}\rangle \end{tikzcd}$$

$$G^T: \quad \begin{tikzcd} \langle Y,\theta\rangle \arrow[r, "G^T"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ \langle Y',\theta'\rangle \arrow[r, "G^T"] & Y' \end{tikzcd}.$$

然后, 可以验证公式给出的单位和余单位满足三角恒等式, 这证明了 $F^T \dashv G^T$. 最后, 通过图表验证 $\langle G^TF^T,\eta,G^T\epsilon F^T\rangle = \langle T,\eta,\mu\rangle$. □

给定伴随 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, $F \dashv G$. 令 $T = GF$ 是该伴随诱导的单子. 进一步可以问: 范畴 $\mathcal{D}$ 与单子 T-代数范畴 $\mathcal{C}^T$ 的关系是什么?

对于这个问题, 首先注意到存在一个比较函子:

定理 3.2.6. 在上述条件下, 存在函子 $G' : \mathcal{D} \to \mathcal{C}^T$ 满足 $G = G^TG'$.

证明. 概要: 取对象 $d,e \in \mathcal{D}$ 与 $f : d \to e$, 用定义验证 $\langle Gd,G\epsilon\rangle$ 是 T-代数. 于是函子 G' 可定义为

$$G'd = \langle Gd,G\epsilon\rangle, \qquad G'(f) = Gf.$$

□

现在我们转而研究何种条件下, 比较函子 G' 是范畴等价.

3.3. Beck 单子性定理

仍然假定伴随 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$, $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$, $F\dashv G$, 且 $T=GF$ 是该伴随诱导的单子. 本节, 我们将给出 $\mathcal{C}^T$ 与 $\mathcal{D}$ 等价的条件.

定义 3.3.1. 称伴随 $F\dashv G$ 为单子的 (monadic), 若 $G':\mathcal{D}\to\mathcal{C}^T$ 是范畴等价. 称函子 $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 为单子的 (monadic), 若存在单子的伴随 $F\dashv G$.

定义 3.3.2. 设 $\mathcal{C}$ 为范畴, 一个可裂余等值子 (split coequalizer) 包含对象 $X,Y,Z\in\mathcal{C}$ 和态射 f,g,i,j,q:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left=2, "f"] \arrow[r, shift right=2, "g"'] & Y \arrow[l, "j" description] \arrow[r, shift left, "q"] & Z \arrow[l, shift left, "i"] \end{tikzcd},$$

满足

$$qf=qg,\ qi=\mathrm{id}_Z,\ fj=iq,\ gj=\mathrm{id}_Y.$$

性质 3.3.3. 给定上述可裂余等值子的图表, 则 $q:Y\to Z$ 是 f,g 的余等值子.

证明. 设 Z' 为另一对象, $h:Y\to Z'$ 是满足 $hg=hf$ 的态射. 考察以下图表:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left=2, "f"] \arrow[r, shift right=2, "g"'] & Y \arrow[l, "j" description] \arrow[r, shift left, "q"] \arrow[dr, "h"'] & Z \arrow[l, shift left, "i"] \arrow[d, dashed, "h\circ i"] \\ & & Z' \end{tikzcd}.$$

由 $hf=hg$ 得 $hfj=hgj$, 即 $hiq=h$, 于是存在态射 $h\circ i$ 使右下的三角图标交换. 设 k 是另一满足 $kq=h$ 的态射, 则 $k=kqi=hi$, 唯一性得证. □

注 3.3.4. 由于可裂余等值子完全由态射及其满足的方程给出, 任意函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 将 $\mathcal{C}$ 中的可裂余等值子映到 $\mathcal{D}$ 中的可裂余等值子.

定理 3.3.5. 若 $\mathcal{D}$ 存在余等值子, 则存在函子 $F':\mathcal{C}^T\to\mathcal{D}$ 满足 $F'\dashv G'$.

证明. 一般地, 若有伴随 $F\dashv G$ 且 $T=GF$. 对于 T-代数 Y, 有如下可裂余等值子的图表:

$$\begin{tikzcd} TTY \arrow[r, shift left=2, "\mu_Y"] \arrow[r, shift right=2, "T\theta"'] & TY \arrow[l, "\eta_{TY}" description] \arrow[r, shift left, "\theta"] & Y \arrow[l, shift left, "\eta_Y"] \end{tikzcd}.$$

该图表也将 Y 表示为 TY 的商对象. 若 $Y\in\mathcal{C}^T$, 可将 $F'Y$ 定义为 $\mathcal{D}$ 中以下图表的余等值子:

$$\begin{tikzcd} FTG^TY \arrow[r, shift left, "\epsilon_{FG^TY}"] \arrow[r, shift right, "FG^T\theta"'] & FG^TY \end{tikzcd}.$$

□

定义 3.3.6. 一个G-可裂对 (G-split pair) 是范畴 $\mathcal{D}$ 中的一对态射 $f,g : X \to Z$ 以及范畴 $\mathcal{C}$ 中的可裂余等值子图表

$$\begin{tikzcd} GX \arrow[r, shift left=2, "Gf"] \arrow[r, shift right=2, "Gg"'] & GZ \arrow[l, "j" description] \arrow[r, shift left, "r"] & C \arrow[l, shift left, "i"] \end{tikzcd} .$$

我们称函子 $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 产生 G-可裂对的余等值子 (creates coequalizers of G-split pairs), 若对任意 G-可裂对 $f,g : X \to Z$, 在 $\mathcal{D}$ 中存在图表

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Z \arrow[r, "q"] & D \end{tikzcd} ,$$

使 $Gq \circ i : C \to GZ \to D$ 是一个同构, 且任意上述条件的图表扩张都是余等值子图表. 称函子 $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 严格产生 G-可裂对的余等值子 (strictly creates coequalizers of G-split pairs), 若上述图标扩张是唯一的.

定理 3.3.7. (Beck 单子性定理) 伴随 $F \dashv G$ 是单子的当且仅当右伴随 G 产生 (creates)G-可裂对的余等值子.

我们先证明 Beck 单子性定理的必要性:

性质 3.3.8. 对任意 $\mathcal{C}$ 上的单子 T, 忘性函子 G^T 严格产生 G^T-可裂对的余等值子.

证明. 因为 G^T 是忘性函子, 我们有时将不区分 x 和 $G^T x$. 考察 $\mathcal{C}^T$ 中的一对态射 $f,g : A \to B$, 并假设在 $\mathcal{C}$ 中有可裂余等值子图表

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left=2, "f"] \arrow[r, shift right=2, "g"'] & B \arrow[l, "j" description] \arrow[r, shift left, "r"] & Z \arrow[l, shift left, "i"] \end{tikzcd} .$$

我们现在想将 Z 提升为 $\mathcal{C}^T$ 中的对象. 用 T 作用, 我们会得到新的可裂余等值子图表:

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, shift right=2] & TB \arrow[l] \arrow[r, shift left] & TZ \arrow[l, shift left] \end{tikzcd} .$$

根据泛性质, 可以验证态射 $r \circ \beta : TB \to C$ 唯一诱导映射 $\gamma : TZ \to Z$, 其中 β 是 B 的 T-代数结构态射. 进一步可验证这个态射使 Z 成为 T-代数.

唯一性是因为 G^T 作为忘性函子是忠实的. □

推论 3.3.9. 若 $F \dashv G$ 是单子的, 则 G 严格产生 G-可裂对的余等值子.

证明. 因为 $G = G^T G'$, 而 G' 是范畴等价. □

充分性的证明会更复杂一些: 通过构造 G-可裂对图表, 可以证明比较函子 G' 存在左伴随 F', 且 $F' \dashv G'$ 构成范畴 $\mathcal{C}^T$ 与 $\mathcal{D}$ 的伴随等价. 对细节感兴趣的读者可以查看参考文献 [2].

参考文献

[1] Saunders Mac Lane. Categories for the working mathematician. Graduate texts in mathematics, 5. Springer-Verlag, New York, 1971 - 1971.

[2] R. Struck. An alternative approach to the monadicity theorem. The University of Chicago Mathematics REU, 2022.

CHAPTER 4

算单子，单子，及其代数

张尚杰

4.1. 基本定义

本章我们介绍算单子和单子的概念. 本章定义均参考 [1]. 无穷回路空间理论中的结构是由算单子 (operad) 控制和刻画的. 算单子的定义非常直观，但是包含的结构和信息比较复杂. 作为替代, 我们可以考虑每个算单子对应的单子 (monad). 单子是一个函子, 更易于研究，并且算单子上的代数和对应单子上的代数含有同样的信息.

算单子是 n 元运算的参数化, 即, 算单子中的每个点对应一种 n 元运算. 我们考虑如下定义.

定义 4.1.1. 一个算单子由以下组成
(i)一组带有置换群作用的无基点空间 (unpointed spaces) $\{C(j) \mid j \geq 0,\ \Sigma_j \subset C(j)\}$,
(ii) 一个单位元 $1 \in C(1)$, 以及
(iii) 一组连续函数

$$\gamma : C(k) \times C(j_1 \times \ldots \times C(j_k) \to C(j)$$

满足如下条件 (其中 $j = j_1 + j_2 + \ldots j_k$):

(1) (基点) $C(0) = \{*\}$;

(2) (结合律): 任意 $c \in C(k), d_s \in C(j_s), e_t \in C(i_t)$,

$$\gamma(\gamma(c; d_1, \ldots d_k); e_1, \ldots e_j) = \gamma(c; f_1, \ldots f_k)$$

其中 $f_s = \gamma(d_s; e_{j_1+\ldots+j_{s-1}+1}, \ldots, e_{j_1+\ldots+j_s})$;

(3) (单位元): 任意 $d \in C(j)$,

$$\gamma(1; d) = d,$$

任意 $c \in C(k)$,

$$\gamma(c; 1, \ldots, 1) = c;$$

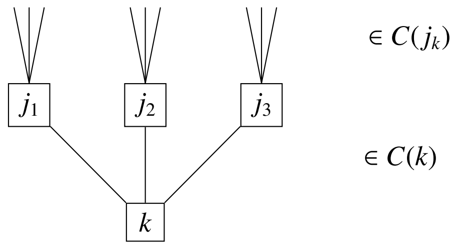
(4) (Σ-等变): 任意 $c \in C(k), d_s \in C(j_s), \sigma \in \Sigma_k, \tau_s \in \Sigma_{j_s}$

$$\gamma(c\sigma; d_1, \ldots d_k) = \gamma(c; d_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots d_{\sigma^{-1}(k)})\sigma(j_1, \ldots j_k),$$

$$\gamma(c; d_1\tau_1, \ldots d_k\tau_k) = \gamma(c\sigma; d_1, \ldots d_k)(\tau_1 \oplus \ldots \oplus \tau_k),$$

其中 $\sigma(j_1, \ldots j_k)$ 表示将 j 根据 $\Sigma_{j=1}^k j_s$ 分为 k 部分, 令 σ 作用于这些 k 部分; $\tau_1 \oplus \ldots \oplus \tau_k$ 根据嵌入 $\Sigma_{j_1} \times \ldots \times \Sigma_{j_k} \to \Sigma_j$ 看作是 Σ_j 里的元素.

注 4.1.2. 连续函数 γ 可看作是蕴含了函数复合的信息. 我们用如下的图来形象表示 γ.



读者可以自行翻译上述定义中 (1)-(4) 在示意图中的意义.

定义 4.1.3. 一个算单子间的态射 $C \to C'$ 包含了一组 Σ_j-等变函数 $\psi_j : C(j) \to C'_j$ 满足 $\psi(1) = 1'$ 并且如下图表交换

$$\begin{tikzcd}
C(k) \times C(j_1) \times ... \times C(j_k) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\psi_k \times \psi_{j_1} \times ... \times \psi_{j_k}"'] & C(j) \arrow[d, "\psi_j"] \\
C'(k) \times C'(j_1) \times ... \times C'(j_k) \arrow[r, "\gamma'"] & C'(j)
\end{tikzcd}$$

例子 4.1.4 (自态射算单子 $\mathcal{E}_X$). 对于任意带基点的空间 X, 定义

$$\mathcal{E}_X(j) := \mathrm{Map}_{\Pi_*}(X^{\times j}, X), \quad j \geq 1$$

以及令 $\mathcal{E}_X(0) = \{*\}$. 选择 $id_X \in \mathrm{Hom}(X, X)$ 作为单位元, 并且 Σ_j 通过置换 $X^{\wedge j}$ 作用于 $\mathcal{E}_X(j)$. γ 为函数复合所诱导. 则 $\{\mathcal{E}_X(j)\}$ 构成一个算单子, 称作自态射算单子。

例子 4.1.5 (交换算单子 $\mathcal{N}$). 定义

$$\mathcal{N}(j) := *,$$

令 Σ_j 作用平凡地. 则 $\{\mathcal{N}(j)\}$ 构成一个算单子称作交换算单子.

例子 4.1.6 (结合算单子 $\mathcal{M}$). 定义

$$\mathcal{M}(j) := \Sigma_j, \quad j \geq 1$$

令 $\mathcal{M}(0) = \{*\}$. 令

$$\gamma : \Sigma_k \times \Sigma_{j_1} \times ... \times \Sigma_{j_k} \to \Sigma_j$$

$$(\sigma, \tau_1, ...\tau_k) \mapsto (\tau_{\sigma(1)} \oplus ... \oplus \tau_{\sigma(k)}),$$

则 $\{\mathcal{M}(j)\}$ 构成一个算单子称作结合算单子.

练习 4.1.7. 验证上述例子中的定义满足算单子的定义4.1.1.

定义 4.1.8. 给定算单子 C, 我们称 $X \in \Pi_*$ 是一个 C-代数, 如果存在一个算单子态射

$$\theta : C \to \mathcal{E}_X$$

等价地, 一个 $\mathcal{C}$-代数 $X \in \pi_*$ 包含对于所有 $j \geq 0$,, Σ_j-等变函数

$$\theta_j : \mathcal{C}(j) \times X^j \to X$$

满足

(1)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(k) \times \mathcal{C}(j_1) \times \ldots \times \mathcal{C}(j_k) \times X^j \arrow[r, "\gamma\times 1"] \arrow[dd, "permute"] & \mathcal{C}(j) \times X^j \arrow[dr, "\theta_j"] & \\
 & & X, \\
\mathcal{C}(k) \times \mathcal{C}(j_1) \times X^{j_1} \times \ldots \times \mathcal{C}(j_k) \times X^{j_k} \arrow[r, "\theta_{j_1}\times\ldots\times\theta_{j_k}"] & \mathcal{C}(k) \times X^k \arrow[ur, "\theta_k"'] &
\end{tikzcd}$$

(2) 对于任意 $x \in X$,

$$\theta_1(1; x) = x,$$

(3) 对于任意 $c \in \mathcal{C}(j), \sigma \in \Sigma_j, y \in X^j$,

$$\theta_j(c\sigma; y) = \theta_j(c; \sigma y).$$

注 4.1.9. 根据上述定义, 当 $j = 0$ 时,

$$\theta_0 : \mathcal{C}(0) = \{*\} \to X$$

的像必须是 X 的基点.

另一方面, 我们可以对无基点空间 Y 定义类似的自态射算单子, 则

$$\theta_0 : \mathcal{C}(0) = \{*\} \to Y$$

等价于选取了 Y 的一个基点.

注 4.1.10. 对于一个 $\mathcal{C}$-代数 X, $\mathcal{C}(n)$ 中的每个元素给出一个 X 上的 n-阶运算的信息.

练习 4.1.11. (1) 任意 X 都是 $\mathcal{E}_X$ 的代数.

(2) $\mathcal{N}$-代数也被称为交换幺半群 (commutative monoids).

(3) $\mathcal{M}$-代数也被称为结合幺半群 (associative monoids).

4.2. 单子与算单子

我们在本节讨论单子与算单子的关系. 一个重要结论是一个算单子自然的诱导一个单子.

回忆在讲座 3 我们定义了单子:

定义 4.2.1. 范畴 $\mathcal{S}$ 上的一个单子 $(\mathbb{C}, \eta, \nu)$ 包含了

(i) 一个函子

$$\mathbb{C} : \mathcal{S} \to \mathcal{S},$$

(ii) 自然变换

$$\eta : id \to \mathbb{C}, \quad \nu : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},$$

满足如下图表交换

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}X \arrow[r, "\mathbb{C}(\eta_X)"] \arrow[dr, "\simeq"'] & \mathbb{C}^2X \arrow[d, "\mu_X"] & \mathbb{C}X \arrow[l, "\eta_{\mathbb{C}X}"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\
& \mathbb{C}X &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^3X \arrow[r, "\mathbb{C}\mu_X"] \arrow[d, "\mu_{\mathbb{C}X}"'] & \mathbb{C}^2X \arrow[d, "\mu_X"] \\
\mathbb{C}^2X \arrow[r, "\mu_X"] & \mathbb{C}X
\end{tikzcd}.$$

定义 4.2.2. 给定单子 $(\mathbb{C}, \eta, \mu)$, 一个 $\mathbb{C}$-代数 (X, ξ) 包含了一个对象 $X \in \mathcal{S}$ 和一个 $\mathcal{S}$ 的态射

$$\xi : \mathbb{C}X \to X,$$

满足如下图表交换

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\simeq"'] & \mathbb{C}X \arrow[d, "\xi"] \\
& X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^2X \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "\mathbb{C}\xi"'] & \mathbb{C}X \arrow[d, "\xi"] \\
\mathbb{C}X \arrow[r, "\xi"] & X
\end{tikzcd}$$

构造 4.2.3. 一个算单子 C 诱导一个单子 $\mathbb{C}$ 如下:
定义

$$\mathbb{C}X := \coprod_{j \geq 0} C(j) \times_{\Sigma_j} X^j / \sim,$$

其中 $\sim$ 由如下关系生成

$$(\sigma_i c, y) \sim (c, s_i y), \quad \forall c \in C(j), y \in X^{j-1}.$$

这里 $\sigma_i : C(j) \to C(j-1)$ 为

$$\sigma_i(c) = \gamma(c; 1^i \times * \times 1^{j-i-1}) \in C(1)^i \times C(0) \times C(1)^{j-i-1},$$

并且 $s_i : X^{j-1} \to X^j$ 为

$$s_i(x_1, \dots x_{j-1}) = (x_1, \dots x_i, *, x_{i+1}, \dots x_{j-1}).$$

练习 4.2.4. 证明如上构造的 $\mathbb{C}$ 是一个单子. (提示: $\eta : X \to \mathbb{C}X$ 由 $\eta : C(0) \to C(1)$ 诱导, $\mu : \mathbb{C}\mathbb{C}X \to \mathbb{C}X$ 由 C 的 γ 诱导.)

事实上, 我们还需验证 $\mathbb{C}X$ 是的拓扑是良定义的. 可以通过以下方式证明:
考虑

$$F_k\mathbb{C}X := \mathfrak{I}(\coprod_{j=0}^{k} C(j) \times_{\Sigma_j} X^j \to \mathbb{C}X)$$

可以验证

(1) $F_{k-1}\mathbb{C}X$ 是 $F_k\mathbb{C}X$ 的闭子空间, 并且是一个余纤维化; 他们的余纤维是

$$F_k\mathbb{C}X / F_{k-1}\mathbb{C}X = \mathcal{C}(k)_+ \wedge_{\Sigma_k} X^{\wedge k}.$$

(2) $\mathbb{C}X$ 的基点可以取 $F_0\mathbb{C}X$.

因此 $\mathbb{C}X$ 的拓扑可由 $\bigcup_k F_k\mathbb{C}X$ 的拓扑得到.

对于任意的 X, $\mathbb{C}X$ 是一个自然的 C-代数, 称作由 X 生成的自由 C-代数. 并且我们有如下伴随:

$$\mathbb{C} : \Pi_* \rightleftarrows C\text{-}alg : \cup$$

$$Hom_{C\text{-}alg}(\mathbb{C}X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\Pi_*}(X, \cup Y)$$

定理 4.2.5. 给定一个算单子 C 及其诱导的单子 $\mathbb{C}$. 则存在一个如下的一一对应

$$\{C\text{-}alg\ \theta : C \to \mathcal{E}_X\} \leftrightarrow \{\mathbb{C}\text{-}alg\ \xi : \mathbb{C}X \to X\}$$

当且仅当如下图表交换

$$\begin{tikzcd}
C(j) \times X^j \arrow[rr] \arrow[dr, "\theta_j"'] & & \mathbb{C}X \arrow[dl, "\xi"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

证明. 将定义展开后不难证明

$$\theta_j : C(j) \times X^j \to X$$

给出

$$\xi : \mathbb{C}X \to X.$$

唯一需要验证的是在商空间上的良定义性. □

例子 4.2.6. (1) In Top_*, MX 是 James construction $\Omega\Sigma X$. 关于 MX 我们将在下讲中继续介绍.

(2) NX 是 infinite symmetric product X on X. Dold-Thom 定理证明了如下同构

$$\pi_n(NX) \cong \tilde{H}_n(X)$$

参考文献

[1] J. P. May. The geometry of iterated loop spaces, volume Vol. 271 of Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

CHAPTER 5

James 构造与 Hilton–Milnor 定理

林伟南

对于一个带基点的空间 X, James [5] 证明了 $\Sigma\Omega\Sigma X$ 的同伦型可以分裂为

$$\Sigma\Omega\Sigma X \simeq \bigvee_{i\geq 1} \Sigma X^{\wedge i}.$$

Hilton 和 Milnor [3] [4] [7] 也证明了一个类似的分裂定理:

$$\Omega(\Sigma X \vee \Sigma Y) \simeq \Omega\Sigma X \times \Omega\Sigma Y \Omega\Sigma(\bigvee_{i,j\geq 1} X^{\wedge i} \wedge Y^{\wedge j}).$$

本节我们将借助单子的概念来清晰地证明以上两个定理，关于此证明读者可参考 [1].

5.1. James 构造与 James 分裂定理

在这一节我们将看到 $\Omega\Sigma X$ 和结合单子作用在 X 是弱伦等价的，因此对单子进行研究有助于我们证明 James 分裂定理。设 $\mathcal{C}$ 为算单子, 则其诱导的单子 C 可被如下定义,

$$CX = \coprod \mathcal{C}(n) \times_{\Sigma_n} X^n / \sim,$$

其中 $(\sigma_i c, x) \sim (c, s_i x)$, $c \in \mathcal{C}(n), x \in X^n$ (更具体的定义见上一讲座的构造4.2.3).

同时我们回顾上个讲座中单子的滤链 $F_r CX$，其为 $\coprod_{j=0}^{r} \mathcal{C}(j) \times X^j$ 到 CX 的像集, 且我们有

$$F_r CX / F_{r-1} CX = \mathcal{C}(r)_+ \wedge_{\Sigma_r} X^{\wedge r}.$$

这个滤链将在我们的证明中起到关键的作用.

定义 5.1.1. 我们称算单子 C 是 Σ-自由的，如果对每个 n, Σ_n 在 C_n 上的作用是自由的.

定理 5.1.2 (Recognition 原理 [6]). 对任意自然数 n, 存在 Σ-自由算单 C_n，使得每个 n-叠回路空间都是 C_n-空间，并且每个连通的 C_n-空间都弱同伦等价于 n-叠回路空间.

定理 5.1.3 (逼近定理 [6]). 设 C_n 是 Recognition 原理中 C_n 诱导的单子. 那么存在 C_n 到 $\Omega\Sigma X$ 的自然变换 α_n

$$\alpha_n X : C_n X \to \Omega^n \Sigma^n X,$$

使得 $\alpha_n X$ 在 X 连通时是弱同伦等价.

当 $n = 1$ 时，逼近定理和定义4.1.6的结合算单子 $\mathcal{M}$ 对应的结合单子 M 相关. 结合单子作用在空间上

$$MX = \coprod X^r/\sim$$

也被称为 James 构造或 James 简化积, 其中等价关系定义如下:

$$(x_1, \ldots, x_n) \sim (x_1, \ldots, x_{i-1}, *, x_i, \ldots, x_n),$$

其中 $x_i \in X$, 以及 $*$ 为 X 的基点.

命题 5.1.4. [1, Proposition 2.8] 我们有如下图表

$$MX \xleftarrow{\epsilon} C_1X \xrightarrow{\alpha_1} \Omega\Sigma X$$

其中映射 ϵ 总是同伦等价，而 α_1 当 X 连通时是弱同伦等价.

我们可用 MX 的如上性质及其滤链证明如下定理.

定理 5.1.5 (James 分裂定理). 假设 X 是连通的. 那么我们有弱同伦等价

$$\Sigma\Omega\Sigma X \sim \bigvee_{i\geq 1} \Sigma X^{\wedge i}.$$

证明. 我们这里给一个简要的证明（详细见 [1]）。根据命题5.1.4我们只需证明 $\Sigma MX \simeq \bigvee_{i\geq 1} \Sigma X^{\wedge i}$.

对 $r \geq q$, 我们考虑共 $m = \binom{r}{q}$ 个所有的不同的从 q 元集合到 r 元集合的严格递增的映射:

$$f_i : \{1, \ldots, q\} \to \{1, \ldots, r\},\ 1 \leq i \leq m$$

每个 f_i 诱导了

$$\bar{f}_i : X^r \to X^q,$$

$$(x_1, \ldots, x_r) \mapsto (x_{f_i(1)}, \ldots, x_{f_i(q)}).$$

我们考虑标准坍缩映射 $X^q \to X^{\wedge q}$, 并定义

$$\tilde{f}_i : X^r \to X^{\wedge q}$$

为该坍缩映射与 $\bar{f}_i$ 的复合. 接着我们定义

$$j_{qr} : X^r \to (X^{\wedge q})^m$$

$$\mathbf{x} \mapsto (\tilde{f}_1(\mathbf{x}), \ldots, \tilde{f}_m(\mathbf{x})).$$

若 $r < q$，则我们规定 j_{qr} 是平凡的 (像集只有基点).

考虑下面的交换图表

$$\begin{tikzcd}
X^r \arrow[r, "s_i"] \arrow[d, "j_{q,r}"'] & X^{r+1} \arrow[d, "j_{q,r+1}"] \\
(X^{\wedge q})^{\binom{r}{q}} \arrow[r, "\bar{s}_i"] & (X^{\wedge q})^{\binom{r+1}{q}}
\end{tikzcd}$$

其中 $s_i(x_1,\ldots,x_r)=(x_1,\ldots,x_{i-1},*,x_i,\ldots,x_r)$, $\bar{s}_i$ 的构造略复杂一点，它把左边 $\binom{r}{q}$ 个分量中跟严格递增函数 $f:\{1,\ldots,q\}\to\{1,\ldots,r\}$ 对应的分量通过跳过 i 的严格递增函数 $\sigma_i:\{1,\ldots,r\}\to\{1,\ldots,r+1\}$ 变成右边跟 $\sigma_i\circ f:\{1,\ldots,q\}\to\{1,\ldots,r+1\}$ 对应的分量，然后像的其余分量为基点 $*$.（我们把图表交换的验证交给读者.）这个交换图表意味着我们可以把 $j_{qr}, r\geq 0$ 粘到一起来来定义映射 $j_q: MX\to M(X^{\wedge q})$.

接下来我们考虑通过以下复合定义映射 k_r

$$MX\xrightarrow{\Delta}(MX)^r\to(MX)^r\xrightarrow{\prod j_q}\prod_{q=1}^{r}M(X^{\wedge q})\xrightarrow{\iota}\prod_{q=1}^{r}M(\bigvee_{p=1}^{r}X^{\wedge p})\xrightarrow{\mu}M(\bigvee_{q=1}^{r}X^{\wedge q}),$$

其中映射 ι 由嵌入 $X^{\wedge q}\to\bigvee_{p=1}^{r}X^{\wedge p}$, $1\leq q\leq r$ 所诱导，最后一步映射来自于 $M(\bigvee_{p=1}^{r}X^{\wedge p})$ 的乘法，因为对于任意 Y，MY 都是一个幺半群．我们把 k_r 在 $F_rMX\subset MX$ 上的限制仍然记为 k_r.

关于 k_r 我们有如下的交换图表:（交换性作为练习或者见 [1]）

$$\begin{tikzcd}
F_{r-1}MX \arrow[r] \arrow[d, "k_{r-1}"] & F_rMX \arrow[r] \arrow[d, "k_r"] & X^{\wedge r} \arrow[d, "\eta"] \\
M(\bigvee_{q=1}^{r-1}X^{\wedge q}) \arrow[r] & M(\bigvee_{q=1}^{r}X^{\wedge q}) \arrow[r] & MX^{\wedge r},
\end{tikzcd}$$

交换图中的左边方块意味着我们可以定义映射 $k_\infty: MX\to M(\bigvee_{q=1}^{\infty}X^{\wedge q})$.

考虑如下复合

$$F_rMX\to MX\xrightarrow{k_r}M(\bigvee_{q=1}^{r}X^{\wedge q})\xrightarrow{\eta}\Omega\Sigma(\bigvee_{q=1}^{r}X^{\wedge q}).$$

的伴随映射 $\tilde{k}_r:\Sigma F_rMX\to\Sigma(\bigvee_{q=1}^{r}X^{\wedge q})$.

我们要证每个 $\tilde{k}_r$ 是一个同伦等价，这可以通过下面的交换图用归纳法来证明:

$$\begin{tikzcd}
X^{\wedge r} \arrow[r] & \Sigma F_{r-1}MX \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{k}_{r-1}"] & \Sigma F_rMX \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{k}_r"] & \Sigma X^{\wedge r} \arrow[d, equal] \\
 & \Sigma(\bigvee_{q=1}^{r-1}X^{\wedge q}) \arrow[r] & \Sigma(\bigvee_{q=1}^{r}X^{\wedge q}) \arrow[r] & \Sigma X^{\wedge r}
\end{tikzcd}$$

其中起点 $r=0$ 时 $\tilde{k}_r$ 的两边都退化成一个点．我们通过取极限得到

$$\tilde{k}_\infty:\Sigma MX\to\Sigma(\bigvee_{q=1}^{\infty}X^{\wedge q})$$

也是一个同伦等价, 于是我们有

$$\Sigma\Omega\Sigma X\sim\bigvee_{q=1}^{\infty}\Sigma X^{\wedge q}.$$

□

注 5.1.6. 参考文献 [1] 中的证明面对的是更一般的情况，书里的 $\mathbf{X_r}$ 对应于本证明的 X^r.

5.2. Hilton–Milnor 定理

定理 5.2.1 (Hilton–Milnor 定理 [2]). 假设 X, Y 是点基点的空间. 则我们有

$$\Omega(\Sigma X \vee \Sigma Y) \simeq \Omega\Sigma X \times \Omega\Sigma Y \Omega\Sigma(\bigvee_{i,j\geq 1} X^{\wedge i} \wedge Y^{\wedge j}).$$

引理 5.2.2. [2, Lemma 2] 如果 fibration

$$F \to E \xrightarrow{\pi} Y$$

有一个截面映射 $s : Y \to E$ 即 $\pi \circ s = id$ 则

$$\Omega E \simeq \Omega F \times \Omega Y.$$

考虑映射 $X \vee Y \to Y$ 的同伦纤维 F:

$$F \to X \vee Y \to Y.$$

因为收缩映射 $X \vee Y \to Y$ 有一个截面，根据上面引理我们有

$$\Omega(X \vee Y) \simeq \Omega Y \times \Omega F.$$

练习 5.2.3. 证明

$$F \simeq X \times \Omega Y/\{*\} \times \Omega Y \simeq X \vee (X \wedge \Omega Y).$$

提示：使用同伦纤维的定义，并构造两边之间的映射.

练习 5.2.4. 使用 James splitting 和上面的练习来证明 Hilton–Milnor 定理.

参考文献

[1] F. R. Cohen, J. P. May, and L. R. Taylor. Splitting of certain spaces CX. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 84(3):465–496, 1978.

[2] Brayton Gray. A note on the Hilton-Milnor theorem. Topology, 10:199–201, 1971.

[3] P. J. Hilton. On the homotopy groups of the union of spheres. J. London Math. Soc., 30:154–172, 1955.

[4] P. J. Hilton. On the homotopy groups of unions of spaces. Comment. Math. Helv., 29:59–92, 1955.

[5] I. M. James. Reduced product spaces. Ann. of Math. (2), 62:170–197, 1955.

[6] J. P. May. The geometry of iterated loop spaces, volume Vol. 271 of Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[7] J. W. Milnor, J. F. Adams, and G. C. Shepherd. On the construction FK, page 118–136. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1972.

CHAPTER 6

E_n-空间，E_∞-空间，recognition 原理

张尚杰

6.1. 基本定义

本章我们定义 E_∞ 和 E_n-算单子及其代数, 并陈述识别定理. 本章内容均参考 [2].

回顾在例子4.1.6和4.1.5中, 我们分别定义了结合算单子 $\mathcal{M}$ 及交换算单子 $\mathcal{N}$.

定义 6.1.1. 一个有 Σ-自由作用的算单子 $\mathcal{C}$ 是一个 A_∞-算单子, 如果存在一个算单子态射 $\mathcal{C} \to \mathcal{M}$, 满足对于任意 $n \geq 0$,

$$\mathcal{C}(n) \to \mathcal{M}(n)$$

是 Σ_n-等变同论等价. 如果存在一个 A_∞-算单子 $\mathcal{C}$ 使得 X 是 $\mathcal{C}$-代数, 则称 X 是一个 A_∞-代数.

定义 6.1.2. 一个有 Σ-自由作用的算单子 $\mathcal{C}$ 是一个 E_∞-算单子, 如果存在一个算单子态射 $\mathcal{C} \to \mathcal{N}$, 满足对于任意 $n \geq 0$,

$$\mathcal{C}(n) \to \mathcal{M}(n)$$

是同论等价. 如果存在一个 E_∞-算单子 $\mathcal{C}$ 使得 X 是 $\mathcal{C}$-代数, 则称 X 是一个 E_∞-代数.

注 6.1.3. 根据定义, $\mathcal{M}$ 是一个 A_∞-算单子, 但 $\mathcal{N}$ 不是一个 E_∞-算单子, 因为 $\mathcal{N}$ 没有 Σ-自由作用.

例子 6.1.4 (E_∞-算单子).

(1) Barratt-Eccles 算单子: 定义

$$\mathcal{E}(n) := E\Sigma_n$$

$$\gamma : \mathcal{E}(k) \times \mathcal{E}(j_1 \times ... \times \mathcal{E}(j_k) \to \mathcal{E}(j_1 + ... + j_k)$$

为 $\Sigma_k \times \Sigma_{j_1} \times ... \times \Sigma_{j_k} \to \Sigma_{j_1+...+j_k}$ 诱导. 则 $\mathcal{E}$ 有 Σ-自由作用, 且每一个空间都是可缩的，故是一个 E_∞-算单子.

(2) Steiner operad (见 Chapter 8).

(3) 小方块算单子: 见定义6.2.2.

性质 6.1.5. 任何 E_∞-代数也是 A_∞-代数.

证明. 见 [2] 推论 3.11. □

本章的一个主旨是: E_n-代数是介于 E_∞-代数和 A_∞-代数之间的一种代数结构.

6.2. 小方块算单子

令 I^n 表示 $\mathbb{R}^n$ 的单位立方体, 令 J^n 表示 I^n 的内部.

定义 6.2.1. 一个 (开) n-小方块指的是一个线性嵌入

$$f : J^n \hookrightarrow J^n$$

满足嵌入立方体的边平行于对于的大立方体的边, 也即 $f = f_1 \times ... \times f_n$, 其中 $f_i : J \hookrightarrow J$ 均为线性函数.

定义 6.2.2 (小方块算单子). 定义小方块算单子 C_n 满足 $C_n(0) = \{*\}$

$$C_n(j) := \{\langle c_1, ...c_j\rangle : \amalg_1^j J^n \to J^n\}.$$

其中 c_j 均为 n-小方块, 且 c_j 的像两两不相交. 赋予 $C_n(j)$ 由 $\mathrm{Hom}_\pi(\amalg_1^j J^n, J^n)$ 诱导的子空间拓扑. 其余信息包括

(1) 对于任意 $c \in C_n(k), d_s \in C_n(j_s)$,

$$\gamma(c; d_1, ...d_k) = c \circ (d_1 + ... + d_k) : \bigsqcup_{j_1} J^n \sqcup ... \sqcup \bigsqcup_{j_k} J^n \to J^n;$$

(2) $1 \in C_n(1)$ 为 $id : J \to J$;

(3) 对于任意 $\sigma \in \Sigma_j$,

$$\langle c_1, ...c_j\rangle\sigma = \langle c_{\sigma(1)}, ...c_{\sigma(j)}\rangle.$$

故 $C_n(j)$ 有 Σ_j-自由作用.

对于小方块算单子 C_n 和 C_{n+1}, 可以构造一个他们之间的算单子态射

$$\sigma_{n,j} : C_n(j) \to C_{n+1}(j)$$
$$\langle c_1, ...c_j\rangle \mapsto \langle c_1 \times id_J, ...c_j \times id_J\rangle.$$

故此可以定义

$$C_\infty := \lim_{n\to\infty} C_n.$$

注 6.2.3. 如果将以上定义中的单位方块替换为单位圆盘, 也可以构造所谓的 “小圆盘算单子” . 这两个算单子之间是同伦等价的.

C_n 的拓扑可以通过构型空间来描述.

定义 6.2.4. 给定一个流形 M, 我们把 M 的第 j 个构型空间 $F(M;j)$ 定义为

$$F(M;j) = \{\langle x_1, ...x_j\rangle \mid x_r \in M, x_r \neq x_s \text{ if } r \neq s\}$$

$F(M;j)$ 有自然的 Σ_j 自由作用

$$\langle x_1, ...x_j\rangle\sigma = \langle x_{\sigma(1)}, ...x_{\sigma(j)}\rangle.$$

Fadell 和 Neuwirth 证明了如下引理.

引理 6.2.5. [1]

(1) $F(J^\infty;j)$ 有 Σ_j-自由作用且可缩, 故和 $E\Sigma_j$ 同伦等价.

(2) $F(J^1;j)$ 有 $|\Sigma_j|$ 个道路联通分支, 且每一个分支都是可缩的.

由此, 我们可以得到:

定理 6.2.6. 对于 $1 \leq n \leq \infty$, 空间 $C_n(j)$ 是 Σ_j-等变同伦等价于 $F(J^n;j)$. 因此 C_1 是一个 A_∞-算单子, C_1 是局部 (n-2)-连通的 Σ-自由算单子, C_∞ 是一个 E_∞-算单子.

证明. 定义

$$g : C_n(j) \to F(J^n;j)$$
$$\langle c_1, ...c_j\rangle \mapsto \langle c_1(\gamma), ...c_j(\gamma)\rangle$$

反之, 定义

$$f : F(J^n;j) \to C_n(j)$$

$\langle b_1, ...b_j\rangle \mapsto j$ 个小方块分别以 b_j 为中心且有相等且最长的对角线.

根据定义我们可知 $g \circ f = id$. 而 $f \circ g \simeq id$ 是因为我们可以同伦等价地放大或缩小小方块. □

6.3. E_n/E_∞-代数

我们这里首先给出关于 n-回路空间的定义.

直觉上, Y 是一个 n-回路空间如果存在 X 使得 $Y = \Omega^n X$. 然而, 给定一个 Y 并不能唯一确定这样的 X. 因此我们需要同时记录 X 以保证一个良定义的 n-回路空间范畴. 故此有如下定义:

定义 6.3.1. 对于 $0 \leq n \leq \infty$, n-回路空间范畴由如下构成:

对象: 一组空间 $\{Y_i \mid 0 \leq i \leq n \ \& \ \Omega Y_{i+1} \cong Y_i\}$

态射: $\{g_i : Y_i \to Y_i' \mid \Omega g_{i+1} \cong g_i\}$

为简便起见, 我们将一个 n-回路空间记作 $\Omega^n X$.

定理 6.3.2. 对于任意 X, $\Omega^n X$ 是一个自然的 C_n-空间.

证明. 可以构造

$$\theta_{n,j} : C_n(j) \times (\Omega^n X)^j \to \Omega^n X$$
$$(\langle c_1, ...c_j\rangle, (y_1, ...y_j))(v) \mapsto \begin{cases} y_r(u) & c_r(u) = v \\ * & v \in \mathrm{Im}\ c. \end{cases}$$

□

反过来, 我们有如下对于 E_n/E_∞-代数的分类定理:

定理 6.3.3 (识别原理 (Recognition Principle)). 对于 $1 \leq n \leq \infty$, 每一个 n-回路空间都是一个 C_n-空间, 并且每一个连通的 C_n-空间都弱同伦等价于一个 n-回路空间.

当 $n = \infty$ 时，我们有

定理 6.3.4. 如果 X 是一个 E_∞-空间满足 $\pi_0(X)$ 上的幺半群结构可以拓展为一个群结构, 则存在谱 Z 使得 $X \simeq \Omega^\infty Z$. 也即, Ω^∞ 给出了一个无穷回路空间和类群 (grouplike)E_∞-空间的范畴等价.

以上定理的证明将出现在 Chapter 7.

6.3.1. **关于逼近定理**. 我们有一对伴随函子 (Σ^n, Ω^n) 给出一个单子 $\Omega^n\Sigma^n$, 因此我们有

$$\alpha_n : C_n X \xrightarrow{C_n(\eta)} C_n \Omega^n \Sigma^n X \xrightarrow{\theta} \Omega^n \Sigma^n X$$

其中 η 是伴随函子的单位, θ 是定理6.3.2中构造的.

定理 6.3.5 (逼近定理). 对于任意 n, 如果 X 是连通的则 α_n 是一个弱同伦等价.

定理的证明将出现在 Chapter 7.

参考文献

[1] Edward Fadell and Lee Neuwirth. Configuration spaces. Math. Scand., 10:111–118, 1962.

[2] J. P. May. The geometry of iterated loop spaces, volume Vol. 271 of Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

CHAPTER 7

逼近定理

邹佛灵

7.1. 定理的陈述

上节说到, 由算单子出发可以构造出相应的单子. 我们给出常见的几个例子: 从伴随函子 (Σ^n, Ω^n) 出发, 也可以得到单子 $\Omega^n\Sigma^n$.

$$\begin{array}{cc}
\text{算单子} & \text{单子} \\
\text{结合算单子 } \mathcal{M}(j) = \Sigma_j & \text{M}X \text{ James 构造} \\
\text{交换算单子 } \mathcal{N}(j) = * & \text{N}X \text{ 无穷对称积} \\
n\text{-维小方块算单子 } C_n & \begin{cases} \text{C}_1 & A_\infty\text{单子} \\ \text{C}_n & \text{局部 (n-2) 连通} \\ \text{C}_\infty & E_\infty\text{单子} \end{cases}
\end{array}$$

性质 7.1.1. 我们有自然的单子之间的映射 $\alpha_n : \text{C}_n \to \Omega^n\Sigma^n$.

证明. C_nX 中的元素形如 $\vec{x} = (\langle c_1, \cdots, c_j\rangle, x_1, \cdots, x_j)$, $j \geq 0$. 对 $1 \leq i \leq j$, c_i 是 n 小方块, 即 $c_j : J^n \to J^n$, $x_i \in X$. 下面定义 $\alpha_n(\vec{x}) \in \Omega^n\Sigma^nX$. 注意到 $\Omega^n\Sigma^nX$ 可以写成 $\text{Map}((I^n, \partial I^n), \Sigma^nX)$. 令

$$\alpha_n(\vec{x})(m) = \begin{cases} x_i \wedge c_i^{-1}(m) & m \in c_i(J^n) \\ * & \text{其他情况.} \end{cases}$$

可以验证这是一个算单子的映射. 注意此处的顺序, 若记 $I^n = I_1 \times \cdots \times I_n$, 则 $\Sigma^nX = (X \times I_n \times \cdots \times I_1)/\{x, t_n, \cdots, t_1 : x = * \text{ 或某个} t_i \in \{0, 1\}\}$. □

引理 7.1.2. 我们有如下的单子交换图表:

$$\begin{array}{ccc}
\text{C}_nX & \xrightarrow{\alpha_n} & \Omega^n\Sigma^nX \\
\downarrow{\scriptstyle \sigma_n} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma'_n} \\
\text{C}_{n+1}X & \xrightarrow[\alpha_{n+1}]{} & \Omega^{n+1}\Sigma^{n+1}X
\end{array}$$

该图表诱导出 $\alpha_\infty : \text{C}_\infty X = \text{colim}_{\sigma_n}\text{C}_nX \to \text{colim}_{\sigma'_n}\Omega^n\Sigma^nX = \Omega^\infty\Sigma^\infty X$.

证明. 上一节定义的 $\sigma_{n,j} : C_n(j) \to C_{n+1}(j)$ 自然诱导了交换图表里左边的映射 σ_n; 算子 $\Omega\Sigma$ 的单位映射 $\eta : \text{Id} \to \Omega\Sigma$ 可诱导右边的映射 $\sigma'_n = \Omega^n\eta_{\Sigma^nX}$. 不

难验证这是一个单子的映射, 以及图表的交换性. □

本节的主题是如下的定理.

定理 7.1.3 (逼近定理). 对于任意固定的 n, 若 X 是连通的, 则 α_n 是一个弱同伦等价; 对于一般的 X, α_n 是一个弱群化映射.

定义 7.1.4. 一个 E_n 幺半群 $(n \geq 2)$ 的映射 $f : M \to N$ 称为弱群化 (weak group completion) 映射, 若该映射同伦于 M 的群化 (group completion) 映射 $M \to \Omega BM$.

弱群化有如下计算上的等价描述:

引理 7.1.5. 上述 $f : M \to N$ 是弱群化映射当且仅当 $\pi_0(f) : \pi_0(M) \to \pi_0(N)$ 是一个（交换幺半群的）群化映射, 且对于任意域系数 k, f 诱导同调上的同构[1]

$$H_*(M,k)[\pi_0 M^{-1}] \cong H_*(N,k).$$

有许多的数学家证明过这个定理的各种形式: 弱同伦等价的部分, 有 James [3] (n=1), Milgram [5]($n < \infty$), Dyer–Lashof(未发表)、Barratt [1]、Quillen(未发表) ($n = \infty$) 和 May[4] 等. 弱群化的部分, 有 Cohen, Segal 和 Hauschild, Rourke–Sanderson , Caruso–Waner（等变版本）等. 关于历史的综述, 可参考 [4] 的前言和 [2] 的 1013 页.

定理的证明放到本节的最后. 这里我们先来看一下定理的简单情况. 因为 $C_n(j) \simeq C(j,\mathbb{R}^n)$ （$\mathbb{R}^n$ 上 j 个有序点的构型空间）, 记 $\mathrm{F}_{\mathbb{R}^n} = \coprod_{j\geq 0} C(j,\mathbb{R}^n)/\Sigma_j$, 则逼近定理给出了如下关于构型空间的弱群化映射:

$$\alpha_n : \mathrm{F}_{\mathbb{R}^n} \to \Omega^n\Sigma^n S^0 = \Omega^n S^n.$$

若取 $n = 1$, 有 $C(j,\mathbb{R}^1) \simeq \Sigma_j$, 故 $\mathrm{F}_{\mathbb{R}^1} \simeq \mathbb{N}$, 映射 α_1 同伦等价于 $\mathbb{N} \to \Omega S^1 \simeq \mathbb{Z}$. 显而易见此处为弱群化映射.

若取 $n = 2$, 有 $C(j,\mathbb{R}^2) \simeq B(\mathrm{br}_j)$, 是辫群 br_j 的分类空间. 逼近定理说明 $\coprod_{j\geq 0} B(\mathrm{br}_j)$ 的弱群化是 $\Omega^2 S^2$.

若取 $n = \infty$, 有 $C(j,\mathbb{R}^\infty) \simeq *$, 逼近定理说明 $\coprod_{j\geq 0} B\Sigma_j$ 的弱群化是 $\Omega^\infty S^\infty =: QS^0$.

7.2. 逼近定理的应用

下面我们给出识别定理的证明大略, 看一下逼近定理在其中的应用. 识别定理的证明可以概括为如下的图表:

$$X \xleftarrow{\sim} B(\mathrm{C}_n,\mathrm{C}_n,X) \xrightarrow{\sim} B(\Omega^n\Sigma^n,\mathrm{C}_n,X) \xrightarrow{\sim} \Omega^n B(\Sigma^n,\mathrm{C}_n,X).$$

这里的每一个 B 都是一个算子把构造 (monadic bar construction). 第一个映射由于有退化性 (extra degeneracy), 是同伦等价; 第二个映射是由逼近映射 α_n 诱

[1] 交换幺半群 $\pi_0 M$ 作用在 $H_*(M,k)$ 上.

导的, 可以证明它诱导了把构造的弱同伦等价/弱群化; 第三个映射交换了映射空间函子和几何实现, 在我们的情况下是弱同伦等价. 至此, 取 $Z = B(\Sigma^n, \mathrm{C}_n, X)$, 则有（$X$ 连通时）弱同伦等价 $X \simeq \Omega^n Z$.

在实际应用中, X 未必直接给出为 n-维小方块算单子 C_n 的代数, 而是另一个等价算单子的代数. [4] 给出了如下的转换算单子的技巧.

定义 7.2.1. (1) 若 C 和 C' 为算单子, 定义 $C\times C'$ 为 $(C\times C')(j) = C(j)\times C'(j)$. 则 $C \times C'$ 有自然的算单子结构.

(2) 若 C 和 C' 为 $\mathcal{M}$ 上的算单子, 定义 $C\nabla C'$ 为算单子范畴里的纤维积 $C \times_{\mathcal{M}} C'$. 则 $C\nabla C'$ 有自然的为 $\mathcal{M}$ 上的算单子结构.

性质 7.2.2. (1) 若 C 是 A_∞ 算单子, C' 是 $\mathcal{M}$ 上的算单子, 则由连通分支给出的映射 $C \to \mathcal{M}$ 诱导一个算单子的等价 $\pi_2 : C\nabla C' \to C'$.

(2) 若 C 是 E_∞ 算单子, C' 是任意算单子, 则投影映射 $\pi_2 : C \times C' \to C'$ 是一个算单子的等价.

这样, 我们可以使用 π_2 来改变作用在代数上的算单子.

推论 7.2.3. 识别定理中的 n-维小方块算单子可以替换成任意 A_∞ 算单子 ($n = 1$)/任意 E_∞- 算单子 ($n = \infty$), 定理的结论同样成立.

证明. 只需将原证明稍作修改.

(1) 当 $n = 1$ 且 C 为任意 A_∞ 算单子时, 将证明中的 C_1 替换为 $\mathrm{C}\nabla\mathrm{C}_1$ 即可. 我们有如下单子的映射:

$$\mathrm{M} \xleftarrow{\sim} \mathrm{C} \xleftarrow{\pi_1} (\mathrm{C}\nabla\mathrm{C}_1) \xrightarrow{\pi_2} \mathrm{C}_1 \xrightarrow{\alpha_1} \Omega\Sigma.$$

左边的映射可以把 C 代数实现为 $\mathrm{C}\nabla\mathrm{C}_1$ 代数, 右边的映射可以把 C_1 的逼近映射拉回为 $\mathrm{C}\nabla\mathrm{C}_1$ 的逼近映射.

(2) 当 $n = \infty$ 且 C 为任意 E_∞ 算单子时, 将证明中的 C_∞ 替换为 $\mathrm{C}\times\mathrm{C}_\infty$ 即可. 我们有如下单子的映射:

$$\mathrm{C} \xleftarrow{\pi_1} (\mathrm{C}\times\mathrm{C}_\infty) \xrightarrow{\pi_2} \mathrm{C}_\infty \xrightarrow{\alpha_\infty} \Omega^\infty\Sigma^\infty.$$

□

7.3. 逼近定理的一个几何证明

现在我们给出 X 连通时逼近定理由 Rourke–Sanderson[?] 给出的一个几何证明.

目标: 证明 $\alpha_n : \mathrm{C}_n X \to \Omega^n\Sigma^n X$ 是一个弱同伦等价, 即对于所有的 $k \geq 0$ 有

$$\alpha_{n,k} : \pi_k(\mathrm{C}_n X) \cong \pi_{k+n}(\Sigma^n X). \tag{7.3.1}$$

证明的思路如下:

(a) $\pi_k(\mathrm{C}_n X)$ 中的代表元由 $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ 中的平行标架化 (parallel framed) 且由 X 标记的子流形给出.

(b) $\pi_{k+n}(\Sigma^n X)$ 中的代表元由 $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ 中的半平行标架化 (semi-parallel framed) 且由 X 标记的子流形给出.

(*) 证明每一个半平行标架化的子流形都同痕于一个平行标架化的子流形. 这说明了式(7.3.1)右边的代表元都可以提升到左边, 故 $\alpha_{n,k}$ 是满射.

(•) 要证明 $\alpha_{n,k}$ 是单射, 是要把式(7.3.1)右边映射的同伦的代表元提升到左边. 这本质上也是（*）.

下面我们以 $n = 1$ 为例, 说明前三个步骤.

取一个光滑流形 Q, 考虑 α_1 诱导的 $\mathrm{Map}_*(Q, \mathrm{C}_1 X) \to \mathrm{Map}_*(Q, \Omega\Sigma X) \cong \mathrm{Map}_*(\Sigma Q, \Sigma X)$.

步骤 (a) 由于有微分同胚 $J \cong \mathbb{R}$, 我们不区分线段 J 和 $\mathbb{R}$. 由 $C_1(X)$ 的定义, 这个空间中的元素是一些 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的保定向嵌入, 每个嵌入上标有一个 X 中的元素, 可以图示为图 1.

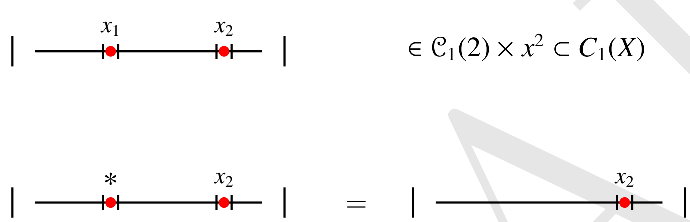


图 1. $\mathrm{C}_1 X$ 中元素图示

这里我们也标出了 $\mathbb{R}$ 中原点的像, 因固定原点后的所有嵌入的空间可缩. 由 $\mathrm{C}_1 X$ 中关于基点的粘贴, 若 X 中的标记点取了基点, 譬如图 1中 $x_1 = *$, 则该元素与忘记相应的 $\mathbb{R}$ 嵌入为同一 $\mathrm{C}_1 X$ 中的元素.

那么, $\mathrm{Map}_*(Q, \mathrm{C}_1 X)$ 的一个元素是一族关于 Q 连续变化的图 1. 将 Q 放在垂直方向, 这一族 $\mathbb{R}$ 嵌入们形如图 2; 这些 $\mathbb{R}$ 嵌入的中心点的连接组成一个 $Q \times \mathbb{R}$ 的带边界子流形 M（通过局部扰动可假设 M 是光滑的）; 这些 $\mathbb{R}$ 嵌入的标记组成了一个连续映射 $l : M \to X$, M 的边界点的标记必为 X 中的基点. 图 2的信息可以提取如下:

- 一个光滑带边子流形 $M \subset Q \times \mathbb{R}^1$, 使得投影 $M \to Q$ 是局部微分同胚;
- M 的法丛 N_M 上的一个平行标架化, 使其平行于给定的 $\mathbb{R}^1$ 方向;
- 标记映射 $l : (M, \partial M) \to (X, *)$.

步骤 (b) 注意到 ΣX 中的基点为 $(*, \infty)$. $X \times \{0\} \subset \Sigma X$.

参考文献

[1] M. G. Barratt. A free group functor for stable homotopy. In Algebraic topology (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXII, Univ. Wisconsin,

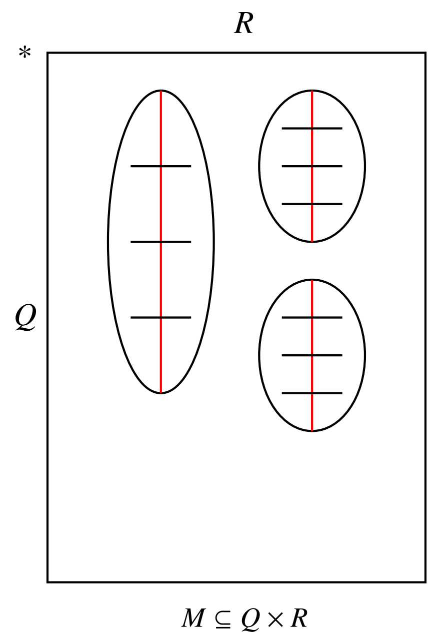


图 2. $\mathrm{Map}_*(Q, \mathrm{C}_1 X)$ 中元素图示

Madison, Wis., 1970), volume Vol. XXII of Proc. Sympos. Pure Math., pages 31–35. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1971.

[2] Bertrand J. Guillou and J. Peter May. Equivariant iterated loop space theory and permutative G-categories. Algebr. Geom. Topol., 17(6):3259–3339, 2017.

[3] I. M. James. Reduced product spaces. Ann. of Math. (2), 62:170–197, 1955.

[4] J. P. May. The geometry of iterated loop spaces, volume Vol. 271 of Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[5] R. James Milgram. Iterated loop spaces. Ann. of Math. (2), 84:386–403, 1966.

CHAPTER 8

算单子偶及经典例子：Steiner 算单子和线性等距算单子

张宇

本次讲座的主要目标是引入算单子偶（operad pair）的概念，并介绍一些经典的例子。由于算单子偶的概念是由算单子衍生而来的，为了便于理解，我们在此首先对前面介绍过的算单子的概念进行一个简要的回顾。

8.1. 算单子概念的简要回顾

一个算单子 $\mathcal{O}$ 由一族无基点拓扑空间 $\{\mathcal{O}(j) \mid j \geq 0\}$ 构成。此外，我们要求：

(1) $\mathcal{O}(0) = *$ 为单点空间；
(2) $\mathcal{O}(1)$ 中存在对应到恒等映射的元素 id；
(3) $\mathcal{O}(j)$ 上定义有对称群 Σ_j 的右作用。
(4) 存在结构映射：

$$\gamma : \mathcal{O}(k) \times \mathcal{O}(j_1) \times \cdots \times \mathcal{O}(j_k) \to \mathcal{O}(j_1 + j_2 + \cdots + j_k) \tag{8.1.1}$$

且 γ 满足相应的等变性，单位性，结合性 (定义4.1.1)。

若对任意的 j，$\mathcal{O}(j)$ 都是可缩空间，并且 $\mathcal{O}(j)$ 上的 Σ_j 作用都是自由的，则我们称 $\mathcal{O}$ 是一个 E_∞ 算单子。

令 X 为一个无基点拓扑空间，算单子 $\mathcal{O}$ 在 X 上的作用由一族满足等变性、单位性、结合律的结构映射

$$\theta_j : \mathcal{O}(k) \times X^j \to X \tag{8.1.2}$$

给出。我们可以将 $\mathcal{O}(j)$ 视作 X 上的 j 元乘积运算的参数化。令 $j = 0$, 我们可以将映射 $\theta_0 : * \to X$ 视作是指定了 X 的一个基点。

8.2. 算单子偶

算单子偶可以用来描述一个对象上同时存在的两族运算法则。我们可以从经典代数中半环（semiring）的概念中获取一些关于此的直观理解。

定义 8.2.1. 一个半环由一个集合 R 以及定义在 R 上的两种二元运算 $+$ 和 $\cdot$ 组成。这两种二元运算分别相应的被称为加法和乘法，且应满足如下性质：

(1) (R, +) 是一个交换幺半群（commutative monoid），其单位元被记作 0。

(2) (R, ·) 是一个幺半群（monoid），其单位元被记作 1。
(3) R 上的乘法被加法单位元归零。
(4) 乘法对加法满足左、右分配率。

注 8.2.2. 上述定义中所提到的半环需满足的四条性质可以用符号表示如下：

(1) $(a+b)+c = a+(b+c); 0+a = a = a+0; a+b = b+a;$
(2) $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c); 1\cdot a = a = a\cdot 1;$
(3) $a\cdot 0 = 0 = 0\cdot a;$
(4) $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c; (b+c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a;$

相对应的，我们给出对于算单子偶的如下描述性定义，更精确的定义请参见 [2, 第四节]。

定义 8.2.3. 令 $C,\mathcal{G}$ 表示算单子，记 $C(0)$ 为 0，$\mathcal{G}(0)$ 为 1。一个 $\mathcal{G}$ 在 C 上的作用包含一系列映射：

$$\lambda : \mathcal{G}(k)\times C(j_1)\times\cdots\times C(j_k) \to C(j_1\times\cdots\times j_k),\ k\geq 0, j_r \geq 0. \tag{8.2.4}$$

且满足相应的分配率，单位性，等变性，归零性。

这里，我们可以将 C 视作是加法的参数化，将 $\mathcal{G}$ 视作是乘法的参数化。

需要注意的是，这里 λ 映射到 $C(j_1\times\cdots\times j_k)$ 而不是 $C(j_1+\cdots+j_k)$。这里的理由可以简单地从下面这一分配率等式看出：

$$(x+y)(a+b+c) = xa+xb+xc+ya+yb+yc. \tag{8.2.5}$$

定义 8.2.6. 一个算单子偶 $(C,\mathcal{G})$ 包含算单子 $C,\mathcal{G}$，以及一个 $\mathcal{G}$ 在 C 上的作用。

定义 8.2.7. 一个算单子偶 $(C,\mathcal{G})$ 在 X 上的作用包含一个 C 在 $(X,0)$ 上的作用 θ，一个 $\mathcal{G}$ 在 $(X,1)$ 上的作用 ξ，使得如下形式的图表交换：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(k)\times C(j_1)\times X^{j_1}\times\cdots\times C(j_k)\times X^{j_k} \arrow[r, "id\times\theta^k"] \arrow[d, "\xi"] & \mathcal{G}(k)\times X^k \arrow[d, "\xi"] \\
C(j_1 j_2\cdots j_k)\times X^{j_1 j_2\cdots j_k} \arrow[r, "\theta"] & X
\end{tikzcd},$$

这里，左侧的 ξ 映射定义为：

$$\xi(g;c_1,y_1,\cdots,c_k,y_k) := (\lambda(g,c_1,\cdots,c_k);\prod_Q \xi(g;y_Q)) \tag{8.2.8}$$

其中 $g\in\mathcal{G}(k)$, $c_r\in C(j_r)$, $y_r = (x_{r,1},\cdots,x_{r,j_r})$, Q 为由序列 $(q_1,\cdots,q_k), 1\leq q_r\leq j_r$ 构成的，依照字典序排序的集合，相应的 $y_Q = (x_{1,q_1},\cdots,x_{k,q_k})$.

注 8.2.9. 上述定义中的交换图刻画了左分配律。

例子 8.2.10. 交换算单子 $\mathcal{N}$（例子4.1.5）满足对任意的 j 都有 $\mathcal{N}(j) = *$. $\mathcal{N}$ 上有且仅有一种对其自身的作用。一个 $(\mathcal{N},\mathcal{N})$ 空间即是一个拓扑交换半环。

定义 8.2.11. 我们称 $(\mathcal{C},\mathcal{G})$ 是一个 E_∞ 算单子偶（E_∞ operad pair），如果 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{G}$ 都是 E_∞ 算单子（定义6.1.2）。一个 E_∞ 环空间（E_∞ ring space）指的是一个 $(\mathcal{C},\mathcal{G})$ 空间，其中 $(\mathcal{C},\mathcal{G})$ 是某个 E_∞ 算单子偶。

8.3. 经典 E_∞ 算单子偶 $(\mathcal{C},\mathcal{L})$

接下来，我们介绍经典 E_∞ 算单子偶 $(\mathcal{C},\mathcal{L})$ 的构造。

这里，对应于乘法的算单子 $\mathcal{L}$ 是线性等距算单子。我们回顾一些相关的定义。

令 $\mathcal{J}$ 表示由有限维实内积空间及其线性等距同构构成的范畴。令 $\mathcal{J}_c$ 表示由有限维或可数维实内积空间及其线性等距映射构成的范畴。对于可数维实内积空间，其上的拓扑由有限维子空间的上极限诱导。

令 U 表示带有标准内积的空间 $\mathbb{R}^\infty$。定义 $\mathcal{L}(j) := \mathcal{J}_c(U^j, U)$，其中 U^j 是 j 个 U 的直和，$U^0 = \{0\}$。单位元 $id \in \mathcal{L}(1)$ 对应于恒同映射。Σ_j 在 $\mathcal{L}(j)$ 上的作用为置换 U^j 中元素的坐标，结构映射 γ 被定义为

$$\gamma(g; f_1, \cdots, f_j) = g \circ (f_1 \oplus \cdots \oplus f_j) \tag{8.3.1}$$

不难看出，$\mathcal{L}$ 是 U 上的自态射算单子（例子4.1.4）的子算单子。Σ_j 在 $\mathcal{L}(j)$ 上的作用是自由的。此外，可以证明 $\mathcal{L}(j)$ 是可缩的 [4, Lemma 1.3]。故而有如下结论：

性质 8.3.2. $\mathcal{L}$ 是一个 E_∞ 算单子。

在经典 E_∞ 算单子偶 $(\mathcal{C},\mathcal{L})$ 中，对应于加法的 E_∞ 算单子 $\mathcal{C}$ 相似于小方块算单子 $\mathcal{C}_n$(定义6.2.2) 以及小圆盘算单子 $\mathcal{D}_V$。$\mathcal{C}$ 同时具备了两者的优点。

为了介绍 $\mathcal{C}$ 的构造，我们首先回顾如下定义：

定义 8.3.3. 令 X 表示一个有限维内积空间 V 的开子空间。相应的嵌入算单子 Emb_X 由如下方式定义。令 $Emb_X(j)$ 表示由有不相交像集的 j 元组 X 到 X 的嵌入构成的空间。单位元 $id \in Emb_X(1)$ 由恒同映射给出。Σ_j 在 $Emb_X(j)$ 上的作用为置换嵌入映射。结构映射

$$\gamma : Emb_X(k) \times Emb_X(j_1) \times \cdots \times Emb_X(j_k) \to Emb_X(j_1 + \cdots + j_k) \tag{8.3.4}$$

由嵌入映射的复合给出。

令 $X = (0,1)^n \subset \mathbb{R}^n$, 我们考虑 Emb_X 中的一类具有如下特殊形式的嵌入 (称作 n 小方块)：$f = l_1 \times \cdots l_n$, 其中 $l_i(t) = a_i t + b_i, a_i > 0, b_i \geq 0$. 通过考虑 n 小方块构成的子空间，我们得到 Emb_X 的子算单子 $\mathcal{C}_n$, 也即小方块算单子。

对于一般的 V，令 X 代表 V 中的单位开圆盘，我们考虑 Emb_V 中的一类具有如下特殊形式的嵌入 (称作 V 小圆盘)：$f = av + b$, 其中 $a > 0, b \in D(V)$. 通过考虑 V 小圆盘构成的子空间，我们得到 Emb_V 的子算单子 $\mathcal{D}_V$, 也即小圆盘算单子。

令 $F(X, j)$ 表示由 X 中不同元素形成的 j 元组构成的构形空间（configuration space）。Σ_j 以置换的方式诱导在 $F(X, j)$ 上的作用。通过考虑 n 小方块或 V 小圆盘的中心点，我们可以得到 Σ_j 等变的形变收缩：

$$C_n(j) \to F((0,1)^n, j) \cong F(\mathbb{R}^n, j) \tag{8.3.5}$$

$$\mathcal{D}_V(j) \to F(D(V), j) \cong F(V, j) \tag{8.3.6}$$

我们可以通过这种方式得出相应算单子的同伦型。

性质 8.3.7. [1, 第四节] $F(\mathbb{R}^n, j)$ 是 $(n-2)$-连通的。令 $\mathbb{R}^\infty = colim\mathbb{R}^n$，则 $F(\mathbb{R}^\infty, j) = colimF(\mathbb{R}^n, j)$ 是 Σ_j 自由的且是可缩的。

接下来，我们定义 Steiner 算单子 $\mathcal{K}_V$。

令 $R_V \subset Emb_V(1)$ 表示所有缩距嵌入 $f: V \to V$ 构成的子空间，也即，对任意 $v, w \in V$，我们要求 $|f(v) - f(w)| \leq |v - w|$。一个 Steiner 路径指的是一个映射 $h: I \to R_V$，使得 $h(1) = id$。令 P_V 表示由全体 Steiner 路径构成的空间。

定义映射 $\pi: P_V \to R_V$，其作用为在 0 点取值，也即 $\pi(h) = h(0)$。令 $\mathcal{K}_V(j)$ 表示所有 j 元组 $(h_1, h_2, \cdots, h_j)$ 构成的空间，其中每一个 h_r 都是一个 Steiner 路径，并且我们要求 $\pi(h_r)$ 有不相交的像。我们将单位元 $id \in \mathcal{K}_V(1)$ 定义为在恒等嵌入处的常值路径，Σ_j 在 $\mathcal{K}_V(j)$ 上的作用为置换作用，结构映射 γ 则由映射的复合定义。

不难看出，这里的 Σ_j 作用是自由的。并且，Steiner 证明了复合映射

$$ev_0 \circ \pi: \mathcal{K}_V(j) \to Emb_V(j) \to F(V, j) \tag{8.3.8}$$

是 Σ_j-等变的形变收缩。

现在，我们可以给出 Steiner 算单子 C 的定义。

Steiner 算单子 C 被定义为：

$$C := \mathcal{K}_{\mathbb{R}^\infty} = colim_V \mathcal{K}_V \tag{8.3.9}$$

这里的 V 遍历 $\mathbb{R}^\infty$ 的全体有限维子空间。不难证明 C 是一个 E_∞ 算单子。

性质 8.3.10. $(C, \mathcal{L})$ 是一个 E_∞ 算单子偶。

这个性质具体的证明可以参见 [3] 的第三节。

参考文献

[1] J. P. May. The geometry of iterated loop spaces, volume Vol. 271 of Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[2] J. P. May. The construction of E_∞ ring spaces from bipermutative categories. In New topological contexts for Galois theory and algebraic geometry (BIRS 2008), volume 16 of Geom. Topol. Monogr., pages 283–330. Geom. Topol. Publ., Coventry, 2009.

[3] J. P. May. What precisely are E_∞ ring spaces and E_∞ ring spectra? In New topological contexts for Galois theory and algebraic geometry (BIRS 2008), volume 16 of Geom. Topol. Monogr., pages 215–282. Geom. Topol. Publ., Coventry, 2009.

[4] J. Peter May. E_∞ ring spaces and E_∞ ring spectra, volume Vol. 577 of Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977. With contributions by Frank Quinn, Nigel Ray, and Jørgen Tornehave.

CHAPTER 9

E_∞-环空间和 E_∞-环谱

郭萌

9.1. E_∞-环空间

给定一对算单子 $(\mathcal{C},\mathcal{G})$，将结构映射记为 $\lambda:\mathcal{G}(k)\times\mathcal{C}(j_1)\times\cdots\times\mathcal{C}(j_k)\to\mathcal{C}(j_1 j_2\cdot\cdots\cdot j_k)$。我们使用它来定义一个 $(\mathcal{C},\mathcal{G})$-空间。

定义 9.1.1. 一个 $(\mathcal{C},\mathcal{G})$-空间是 (X,θ,ξ)，满足 (X,θ) 是 $\mathcal{C}$-空间，(X,ξ) 是 $\mathcal{G}$-空间，加上映射（对于所有非负整数 k）

$$\xi_k:\mathcal{G}(k)\times\mathcal{C}(j_1)\times X^{j_1}\times\cdots\times\mathcal{C}(j_k)\times X^{j_k}\to\mathcal{C}(j_1\cdot\cdots\cdot j_k)\times X^{j_1\cdot\cdots\cdot j_k}$$

$$\xi_k(g,C_1,y_1,\cdots,C_k,y_k)=\left(\lambda(g,C_1,C_2,\cdots,C_k),\prod_Q\xi(g,y_Q)\right)$$

其中求和是在满足 $1\le q_r\le j_r$ 以字典序排序的序列 $Q=(q_1,\cdots,q_k)$ 上进行，使得以下图表交换

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{G}(k)\times\mathcal{C}(j_1)\times X^{j_1}\times\cdots\times\mathcal{C}(j_k)\times X^{j_k} & \xrightarrow{\mathrm{id}\times\theta^k} & \mathcal{G}_k\times X^k \\
\xi\downarrow & \curvearrowright & \downarrow\xi \\
\mathcal{C}(j_1\cdot\cdots\cdot j_k)\times X^{j_1\cdot\cdots\cdot j_k} & \to & X
\end{array}$$

例子 9.1.2. 我们以 $k=2, j_1=3, j_2=2$ 为例。$g\in\mathcal{G}(2)$，$c_1\in\mathcal{C}(3)$ 和 $c_2\in\mathcal{C}(2)$；$x_1,x_2,x_3\in X$ 和 $x_1',x_2'\in X$。

$$(g,c_1,(x_1,x_2,x_3),c_2,(x_1',x_2'))\overset{\xi_2}{\longmapsto}(-,\xi(g,x_1,x_1'),\xi(g,x_1,x_2'),\xi(g,x_2,x_1'),\xi(g,x_2,x_2'),\xi(g,x_3,x_1'),\xi(g,x_3,x_2'))$$

实际上，序列 Q 对应于乘法

$$(x_1+x_2+x_3)(x_1'+x_2')=x_1x_1'+x_1x_2'+\cdots+x_3x_1'+x_3x_2'$$

定义 9.1.3. 如果 $(\mathcal{C},\mathcal{G})$ 是一对 E_∞-算单子，那么一个 $(\mathcal{C},\mathcal{G})$-空间称为 E_∞-环空间。

注 9.1.4. 类似于环具有两个运算-加法和乘法，我们认为 $\mathcal{C}$-空间结构给出了 X 上的加法，而 $\mathcal{G}$-空间结构给出了 X 上的乘法。ξ_k 的行为类似于分配律。

回顾一下，一个给定的算单子 $\mathcal{C}$ 可以诱导一个在拓扑空间范畴上的一个单子 C。实际上，一个 $(\mathcal{C},\mathcal{G})$-空间是 C-代数在 $\mathcal{G}_+$-空间范畴中的范畴。其中 $\mathcal{G}_+(j)=\mathcal{G}(j)_+$。

性质 9.1.5. 当限制到 $\mathcal{G}_+$-空间时，C 仍是是一个单子。因此，一个 $(C,\mathcal{G})$-空间是 G_+-空间中的 C-代数。

证明. [证明概要] 回顾

$$CX = \coprod_j C(j) \times X^j / \sim$$

由映射 ξ_k 确定的 $\mathcal{G}$ 对 C 的作用，诱导出以下映射

$$\mathcal{G}(k)_+ \wedge (CX)^k \to CX$$

这使得 CX 具有 $\mathcal{G}_+$-空间结构。我们可以很容易验证：如果 X 是一个 G_+-空间，映射 $\mu : CCX \to CX$ 和 $\eta : M \to CX$ 是 $\mathcal{G}_+$-空间之间的映射。然后，由 $(C,\mathcal{G})$-空间的定义中的交换图，一个 $(C,\mathcal{G})$-空间与 G_+-空间范畴中的 C-代数是相同的。□

9.2. E_∞-环谱

在之前的讲座中，我们在识别定理的证明中有

$$X \xleftarrow{\sim} B(C_n, C_n, X) \underset{\alpha}{\xrightarrow{\sim}} B(\Omega^n\Sigma^n, C_n, X) \xrightarrow{\sim} \Omega^n B(\Sigma^n, C_n, X).$$

取 n 为 ∞，我们有

$$X \xleftarrow{\sim} B(C, C, X) \underset{\alpha}{\xrightarrow{\sim}} B(\Omega^\infty\Sigma^\infty, C, X) \xrightarrow{\sim} \Omega^\infty B(\Sigma^\infty, C, X).$$

$(C,\mathcal{G})$ 是一对 E_∞-算单子。给定一个 C-空间，它在拓扑空间的范畴中是一个 C-代数，(加法) 无穷回路机器会生成一个 (连通) 谱。在 (连通) 谱和无穷回路空间之间存在一个伴随对 $(\Sigma^\infty, \Omega^\infty)$。现在如果我们在 $\mathcal{G}_+$-空间的范畴中工作，C-代数就是 $(C,\mathcal{G})$-空间，我们希望有一个类似的机制，它会生成一些附加结构的谱，我们称之为 E_∞-环谱，并且我们有 $\Omega^\infty(E_\infty\text{-环谱}) = E_\infty$-环空间。幸运的是，我们有这样一个机制，叫做乘法无穷回路机器。

回到下面的映射。它们在拓扑空间范畴中都是弱等价的。

$$X \leftarrow B(C, C, X) \xrightarrow{\alpha} B(\Omega^\infty\Sigma^\infty, C, X) \to \Omega^\infty B(\Sigma^\infty, C, X).$$

现在，如果我们考虑 $\mathcal{G}_+$-空间的范畴，C 仍然是一个单子，最左边的映射仍是是弱等价的。对于映射 α，我们需要确保 $\Omega^\infty\Sigma^\infty$ 在新范畴中仍是一个单子，并且 α 保持了单子结构。为了使 $\Omega^\infty\Sigma^\infty$ 成为一个单子，我们可以使 $(\Sigma^\infty, \Omega^\infty)$ 成为 $\mathcal{G}_+$-空间和适当谱的范畴之间的一个伴随对。实际上，这个范畴就是谱中的 G_+-代数。

$$\text{Spectrum}\,(\Sigma^\infty X, Y) \simeq \text{Top}_*\,(X, \Omega^\infty Y)$$

$$G_+\text{-代数谱}\,(\Sigma^\infty X, Y) \simeq \mathcal{G}_+\text{-空间}_*\,(X, \Omega^\infty Y)$$

如果我们让 $\mathcal{G}$ 等于线性等距算单子 $\mathcal{L}$，那么 L_+-代数谱恰好就是 E_∞-环谱。

定义 9.2.1. 一个 E_∞-环谱或 $\mathcal{L}$-谱是一个谱 R，其具有由一个等变、幺元、和结合的映射组成的 $\mathcal{L}$ 的作用：

$$\mathcal{L}(j) \ltimes R^{[j]} \to R$$

性质 9.2.2. [1] $\Omega^\infty\Sigma^\infty$ 在 L_+-空间中是一个单子。

性质 9.2.3. [1] 当限制在 $\mathcal{L}_+$-空间时，$\alpha : C \to \Omega^\infty\Sigma^\infty$ 仍是单子映射。

参考文献

[1] J. P. May. What precisely are E_∞ ring spaces and E_∞ ring spectra? In New topological contexts for Galois theory and algebraic geometry (BIRS 2008), volume 16 of Geom. Topol. Monogr., pages 215–282. Geom. Topol. Publ., Coventry, 2009.

CHAPTER 10

$H_*(CX)$ 和 $H_*(\Omega^n\Sigma^n X)$

林伟南

对于素数 p，记 $H_*X = H_*(X;\mathbb{F}_p)$ 和 $H^* = H^*(X;\mathbb{F}_p)$. 本节我们将阐述 $H_*(CX), H_*(\Omega^n\Sigma^n X)$ 与 $H_*(X)$ 的关系，详细证明可参考 [1] 和 [2]. 为简单起见本节我们假设 $p = 2$，原参考文献里同时也考虑奇素数的情形.

10.1. 上同调 Steenrod 算子

对于任意空间 X，我们有 Steenrod 运算作用在上同调上

$$Sq^s : H^*(X) \to H^{*+s}(X).$$

Steenrod 算子关于空间之间的映射是自然的，并且满足 Adem 关系：

$$Sq^i Sq^j = \sum_k (i-2k, j-k+i-1) Sq^{i+j-k} Sq^k$$

其中 $i < 2j$，且 $Sq^1 = 1$. 这里 $(m,n) = \binom{m+n}{n}$，如果 $m < 0$ 或 $n < 0$ 则为零.

Steenrod 代数 $\mathcal{A}$ 是由 $Sq^s : s \geq 1$ 生成, 并满足 Adem 关系所构成代数. 因此, 上同调群 $H^*(X)$ 是 $\mathcal{A}$-模，而下同调群 $H_*(X)$ 是反代数 $\mathcal{A}^{op}$ 的（左）模.

10.2. 同调算子

与上同调的 Steenrod 算子不同的是，我们只能对有一定结构的空间定义同调算子，同调算子也被称为 Dyer-Lashof 算子.

定理 10.2.1. 设 C 是一个 E_∞-算单子，X 是一个 C-空间. 那么我们有同态映射

$$Q^s : H_*(X) \to H_{*+s}X$$

满足以下条件：

(1) Q^s 对于 C-空间是自然的.
(2) 如果 $s < |x|$，则 $Q^s x = 0$.
(3) 如果 $s = |x|$，则 $Q^s x = x^p$.
(4) 如果 $s > 0$ 且 $[e] \in H_0(X)$ 是单位元，则 $Q^s[e] = 0$.
(5) 当 $x \otimes y \in H_*(X \times y)$ 时，$Q^s(x \otimes y) = \sum_{i+j=s} Q^i \otimes Q^j$. 当 $x, y \in H_*(X)$ 时，$Q^s(xy) = \sum_{i+j=s} Q^i x Q^j y$.
当 ψ 是 $H_*(X)$ 的余代数结构映射且 $\psi(x) = \sum x' \otimes x''$ 时，$\psi(Q^s x) = \sum\sum_{i+j=s} Q^i x' \otimes Q^j x''$.

(6) Adem 关系：如果 $2r > s$，则

$$Q^r Q^s = \sum_i (-1)^{r+i}(pi - r, r - (p-1)s - i - 1)Q^{r+s-i}Q^i$$

(7) Nishida 关系：

$$P^r_* Q^s = \sum_i (-1)^{r+i}(r - pi, s(p-1) - pr + pi)Q^{s-r+i}P^i_*$$

同调算子可以通过结构映射的同调群来定义：

$$H_*(\mathcal{C}(p)\otimes X^p) \to H_*X$$

$$e_i \otimes x^p \mapsto Q^* x$$

Adem 关系可以通过同调诱导的映射证明，这些映射可以由如下交换图表给出：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(p)\times\mathcal{C}(p)^p\times X^{p^2} \arrow[r] \arrow[dd] & \mathcal{C}(p^2)\times X^{p^2} \arrow[dr] & \\
& & X \\
\mathcal{C}(p)\times(\mathcal{C}(p)\times X^p)^p \arrow[r] & \mathcal{C}(p)\times X^p \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

你可以从 $H_*(\mathcal{C}(p)\times\mathcal{C}(p)^p\times X^{p^2})$ 中的一个元素出发，得到两个 H_*X 中的元素应该相等，由此等式证明 Adem 关系. 详细计算过程可见 [2].

定义 10.2.2. 我们定义 R 为满足 Adem 关系的 Q^s 所生成的代数.

如果一个（分级的）R-模 M 满足定理10.2.1中的条件 (2)，我们称其为 allowable R-模. 如果 M 拥有定理10.2.1中看到的所有结构和性质，并且称其为 allowable AR-Hopf 代数.

10.3. $H_*(CX)$ 与 $H_*(\Omega^n\Sigma^n X)$ 关于 $H_*(X)$ 的函子性

对于任意空间 X，H_*X 是一个余可换的非稳定的 component A-余代数. 由于 CX 是一个 E_∞-空间，我们知道 $H_*(CX)$ 是一个 allowable AR-Hopf 代数.

从 allowable AR-Hopf 代数范畴到余可换的非稳定的 component A-余代数范畴有一个遗忘函子，构造其左伴随函子并不困难，它是从余可换的非稳定 component A-余代数范畴到可接受的 AR-Hopf 代数范畴的自由函子. 我们将这个自由函子记作 WE.

定理 10.3.1. *存在一个自然同构* $H_*(CX) \cong WEH_*(X)$.

当 Y 是 group like E_∞ 代数时, H_*Y 是一个带有共轭 χ 的 allowable AR-Hopf 代数. 对于 $g \in H_0Y$，我们有 $\chi(g) = g^{-1}$.

定理 10.3.2. 存在一个自然同构 $H_*(QX) \cong GWEH_*(X)$，其中 G 是从 allowable AR-Hopf 代数范畴到带有共轭的 allowable AR-Hopf 代数范畴的自由函子.

注 10.3.3. 关于 $H_*(C_nX)$ 和 $H_*(\Omega^n\Sigma^n X)$ 也有类似的定理，它们都是 H_*X 的函子.

注 10.3.4. 如果 $(\mathcal{C}, \mathcal{G})$ 是一个 operad pair，并且 $\mathcal{G}$ 在 X 上作用，那么 CX 是一个 E_∞ 环空间，$H_*(CX)$ 带有两组 Dyer-Lashof 算子 $\{Q^s\}$ 和 $\{\tilde{Q}^s\}$. 这些操作之间通过混合 Adem 关系等相互作用. 在这种情况下，我们也可以用 H_*X 来陈述关于 $H_*(CX)$ 的定理.

注 10.3.5. 如果 X 是一个 E_∞ 环空间，那么 H_*X 是一个 Hopf 环，它带有一个余代数结构和两个代数结构. 换句话说，我们有一个加法乘法 # 和一个乘法乘法 $\circ$. 它们满足分配律

$$(r\#s) \circ t = \sum (r \circ t')\#(s \circ t'')$$

其中 $\psi(t) = \sum t' \otimes t''$.

参考文献

[1] Frederick R. Cohen, Thomas J. Lada, and J. Peter May. The homology of iterated loop spaces, volume Vol. 533 of Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[2] J. Peter May. A general algebraic approach to Steenrod operations. In The Steenrod Algebra and its Applications (Proc. Conf. to Celebrate N. E. Steenrod's Sixtieth Birthday, Battelle Memorial Inst., Columbus, Ohio, 1970), volume Vol. 168 of Lecture Notes in Math., pages 153–231. Springer, Berlin-New York, 1970.

CHAPTER 11

幺半群型范畴和置换范畴

孔嘉

幺半群型范畴 (monoidal category) 是指有单位元和加法的范畴, 其中加法满足结合律. 大部分自然出现的幺半群型范畴不具有严格的单位元和结合律, 但我们可以通过严格化得到一个等价的严格幺半群型范畴 (strict monoidal category).

当涉及对称性时, 我们可以定义辫状幺半群型范畴 (braided monoidal category) 和对称幺半群型范畴 (symmetric monoidal category). 对称严格幺半群型范畴也叫置换范畴 (permutative category).

范畴上的无穷回路空间理论可以作用于置换范畴 (permutative category). 事实上, 我们考虑一个置换范畴的神经, 并取它的几何实现, 就能得到该范畴的分类空间. 范畴上的加法在分类空间上诱导一个加法, 这个加法是 E_∞ 的. 由此, 我们得到了一个范畴上的无穷回路空间理论:

$$\text{置换范畴} \xrightarrow{\text{分类空间}} E_\infty\text{-空间} \xrightarrow{\text{无穷回路机器}} \text{谱}.$$

同样的, 我们还可以考虑带加法和乘法的情况.

双幺半群型范畴（bimonoidal category）带有如下结构: 两个幺半结构, 分别给出加法和乘法. 定义还要求这两种运算满足分配律和消去律, 并满足一定的一致性条件.

对于双幺半群型范畴, 我们也有对应的严格化定理, 来获得双置换范畴. 乘法无穷回路空间理论应用于双幺半群型范畴. 将加法的情况做乘法推广, 我们希望有

$$\text{双置换范畴} \xrightarrow{\text{分类空间}} E_\infty\text{-环空间} \xrightarrow{\text{无穷回路机器}} E_\infty\text{-环谱}.$$

然而, 与加法的情况相比, 第一步的证明更为复杂. 其证明需要用到算符范畴, 将在下一讲中介绍.

本讲的目的是介绍（双）幺半群型范畴和（双）置换范畴. 我们将会证明置换范畴的分类空间是 E_∞ 的. 此外, 我们还将证明对于（双）幺半群型范畴的严格化定理.

11.1. 幺半群型范畴

幺半群型范畴是一个具有“张量积”的范畴, 其中该“张量积”满足结合律和单位元性质.

定义 11.1.1. 一个 *幺半群型范畴* $\mathbf{C}$ 是一个具有如下幺半结构的范畴.

(1) 张量积: 一个双函子

$$\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C};$$

(2) 一个单位对象: $I \in \mathbf{C}$;

(3) 结合子: 自然同构 α, 其中

$$\alpha_{A,B,C} : A \otimes (B \otimes C) \simeq (A \otimes B) \otimes C;$$

(4) 左单位子和右单位子: 自然同构 λ 和 ρ, 其中

$$\lambda_A : I \otimes A \xrightarrow{\simeq} A,$$

$$\rho_A : A \otimes I \xrightarrow{\simeq} A.$$

并且上述结构满足对任意对象, 下述图表交换.

(1) 五边形图表 (图中箭头均是由结合子给出的同构):

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[d] & & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[d] \\
(A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[rr] & & ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D
\end{tikzcd},$$

(2) 三角图表:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (I \otimes B) \arrow[rr, "\alpha_{A,I,B}"] \arrow[dr, "\rho_A \otimes \mathrm{id}_B"'] & & (A \otimes I) \otimes B \\
 & A \otimes B \arrow[ur, "\mathrm{id}_A \otimes \lambda_B"'] &
\end{tikzcd}.$$

我们用 $(C, \otimes, I)$ 来表示一个幺半群型范畴, 其中 $\otimes$ 是张量积,I 是单位元.

幺半群型范畴有如下变体.

定义 11.1.2.

(1) 带有交换子的幺半群型范畴叫做*辫状幺半群型范畴* (braided monoidal category). 其中交换子 γ 是一个自然同构

$$\gamma_{A,B} : A \otimes B \to B \otimes A$$

并使得如下关于结合子 α 的图表交换.（即把 A 换过 $B \otimes C$ 既能一步完成, 也能两步完成.）

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes B) \otimes C \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes (B \otimes C) \arrow[r] & (B \otimes C) \otimes A \arrow[d] \\
(B \otimes A) \otimes C \arrow[r] & B \otimes (A \otimes C) \arrow[r] & B \otimes (C \otimes A)
\end{tikzcd}.$$

(2) 如果一个辫状幺半群型范畴满足 $\gamma^2 = \mathrm{id}$, 则我们称其为*对称幺半群型范畴* (symmetric monoidal category).

(3) 如果一个对称幺半群型范畴的结合律和单位元都是严格的, 即 α, γ, ρ 均给出等式, 则我们称其为*置换范畴* (permutative category).

例子 11.1.3. 有如下幺半群型范畴的例子.

(1) $(\mathrm{Set}, \times, \{*\})$: 集合范畴和其上的笛卡儿积.

(2) $(\mathrm{Set}, \sqcup,)$: 集合范畴和其上的无交并.

(3) $(\mathrm{Spc}_*, \wedge, S^0)$: 带基点空间（pointed spaces）范畴和其上的压缩乘积（smash product）.

(4) $(\mathrm{Spc}_*, \times, \{*\})$, 带基点空间（pointed spaces）范畴和其上的笛卡儿积.

注 11.1.4. 需要注意的是, 自然产生的幺半群型范畴极少具有严格的结合性（即结合子给出恒等函子的情况）. 例如, 对于 $(\mathrm{Set}, \times, \{*\})$, 我们有

$$(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C).$$

但这并不是一个严格的恒等关系. 左边的对象形如 $((a, b), c)$, 而右边形如 $(a, (b, c))$.

11.2. 幺半函子

幺半函子 (monoidal functors) 是幺半群型范畴之间的函子. 幺半函子保留幺半结构, 在此基础上有不同的变体.

定义 11.2.1.

(1) 一个 *幺半函子* (又称 *lax 幺半函子*) 是一个幺半群型范畴的函子, 并且带有自然变换

$$\phi_{A,B} : F(A) \otimes F(B) \to F(A \otimes B)$$

并满足如下结合律和单位元图表交换.

(a) (结合律)

$$\begin{tikzcd}
(F(A) \otimes F(B)) \otimes F(C) \arrow[r] \arrow[d] & F(A) \otimes (F(B) \otimes F(C)) \arrow[r] & F(A) \otimes F(B \otimes C) \arrow[d] \\
F(A \otimes B) \otimes F(C) \arrow[r] & F((A \otimes B) \otimes C)) \arrow[r] & F(A \otimes (B \otimes C))
\end{tikzcd}.$$

(b) (单位元)

$$\begin{tikzcd}
I \otimes F(A) \arrow[r] \arrow[d] & F(I) \otimes F(A) \arrow[d] \\
F(A) & F(I \otimes A) \arrow[l]
\end{tikzcd}, \quad
\begin{tikzcd}
F(A) \otimes I \arrow[r] \arrow[d] & F(A) \otimes F(I) \arrow[d] \\
F(A) & F(A \otimes I) \arrow[l]
\end{tikzcd}.$$

(2) 若上述定义中自然变换的方向逆转, 我们称其为 *op-lax 幺半函子*.

(3) 若上述自然变换是自然同构, 我们称其为*强幺半函子*.

(4) 若上述自然变换给出恒等, 我们称其为*严格幺半函子*.

11.3. 严格化

如前所述, 幺半群型范畴无处不在, 但严格幺半群型范畴却并非如此. 然而, 我们总是可以将一个幺半群型范畴严格化.

定理 11.3.1 ([1]). 对于任何幺半群型范畴 $\mathbf{C}$, 都有一个自然等价的严格幺半群型范畴 $\mathbf{D}$.

我们用自由拓扑幺半群来构造一个严格幺半群型范畴.

证明. 我们考虑如下构造.

(1) 首先, 我们定义 $\mathbf{D}$ 的对象: 令 $\mathrm{obj}(\mathbf{D})$ 为 $M(\mathrm{obj}(\mathbf{C}))/(e = I_{\mathbf{C}})$. 其中 M 为自由拓扑幺半群函子,$I_{\mathbf{C}}$ 是 $\mathbf{C}$ 的单位元,e 是拓扑幺半群的单位元. 我们用并列的方式写出这些对象.

(2) 我们可以定义一个映射 $\pi : \mathrm{obj}(\mathbf{C}) \to \mathrm{obj}(\mathbf{D})$:

$$\pi(A_1A_2...A_n) \mapsto (A_1 \otimes (A_2 \otimes (... \otimes (A_{n-1} \otimes A_n)))).$$

(3) 态射的定义如下:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(x, y) = \{x\} \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\pi(x), \pi(y)) \times \{y\}.$$

(4) 把 π 扩展成一个函子:

$$\pi((x, f, y)) = f : \pi(x) \to \pi(y).$$

(5) 我们可以定义如下函数 $\iota : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$:

$$\iota(A \xrightarrow{f} B) = (A, f, B).$$

不难检查 π 和 ι 是幺半函子,$\pi\iota = \mathrm{id}$, 并且 $\iota\pi$ 和 id 自然同构.

□

用同样的方法, 我们可以证明每一个对称幺半群型范畴都可以严格化为一个置换范畴.

11.4. 置换范畴

定义 11.4.1. Barratt–Eccles 范畴算单子 (categorical Barratt–Eccles operad) $\tilde{\Sigma}$ 是一个范畴算单子, 满足

$$\tilde{\Sigma}(j) = \mathcal{E}\Sigma_j.$$

这里 Σ_j 是有 j 个元素的置换群; $\mathcal{E} : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Cat}$ 是平移函数, 将一个群映射成对象是单点, 态射为群元素的范畴. 算单子的结构映射由块置换给出.

性质 11.4.2. 置换范畴是 Barratt–Eccles 范畴算单子上的代数.

证明. 不难验证, 根据算单子作用

$$E\Sigma_2 \times \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C},$$

范畴 $E\Sigma_2$ 中的态射决定了交换子 γ. □

推论 11.4.3. 一个置换范畴的分类空间是 E_∞ 空间.

证明. 我们可以对 $\tilde{\Sigma}$ 逐层取分类空间, 从而得到拓扑算单子 $B\tilde{\Sigma}$. 置换范畴的分类空间是这个算单子上的代数. 不难验证 $B\tilde{\Sigma}$ 是 E_∞ 算单子, 因为 $B\mathcal{E}\Sigma_j$ 是 Σ_j-等变可缩的（它是万有空间 (universal space) $E\Sigma_j$ 的模型）. □

11.5. 双幺半群型范畴

“双幺半群型范畴”(bimonoidal category) 中的 “双” 是指这个范畴具有两种不同的幺半结构: 加法和乘法. 部分文献中, 它被称为 “rig” 范畴, 其中 “rig ” 代表 “ring without negatives”.

定义 11.5.1 ([2]). 一个对称幺半群型范畴 (symmetric bimonoidal category)$\mathbf{C}$ 是一个有两个对称幺半结构的范畴: 加法 $(\mathbf{C}, \oplus, 0)$, 和乘法 $(\mathbf{C}, \otimes, 1)$. 另有如下结构.

(1) (左, 右分配律) 自然变换:

$$\delta_l : A \otimes (B \oplus C) \to (A \otimes B) \oplus (A \otimes C),$$

$$\delta_l : (A \oplus B) \otimes C \to (A \otimes C) \oplus (B \otimes C),$$

其中左右分配律均为单射.

(2) (消去律) 自然同构:

$$a_l : A \otimes 0 \to 0,$$

$$a_r : 0 \otimes A \to 0.$$

以上结构满足一系列一致性条件.

关于一致性条件及其关系的详细讨论, 我们请读者参阅 [2].

我们指出, 以上定义只要求分配律是单态. 我们主要考虑左分配律是自然同构的情况, 并把这样的范畴称为 “强对称双幺半群型范畴”.

例子 11.5.2.

(1) 集合范畴, 以例子 11.1.3(1) 为加法, 且以例子 11.1.3(2) 为乘法.

(2) 有一种对称双幺半群型范畴, 加法由范畴论余积给出, 乘法由范畴论积给出. 我们称这样的范畴为分配范畴 (distributive category). 例如:

- 全体有限集合的范畴.

- 全体拓扑空间的范畴.

定义 11.5.3. *一个双置换范畴* (bipermutative category) 是一个对称双幺半群型范畴, 满足

(1) 加法和乘法都给出置换范畴;

(2) 左分配律是自然同构, 右分配律是恒等;

(3) 以下图表交换

$$
\begin{tikzcd}
(A \oplus B) \otimes (C \oplus D) \arrow[r] \arrow[dd, equal] & (A \oplus B) \otimes C \oplus (A \oplus B) \otimes D \arrow[d, equal] \\
& (A \otimes C) \oplus (B \otimes C) \oplus (A \otimes D) \oplus (B \otimes D) \arrow[d] \\
A \otimes (C \oplus D) \oplus B \otimes (C \oplus D) \arrow[r] & (A \otimes C) \oplus (A \otimes D) \oplus (B \otimes C) \oplus (B \otimes D)
\end{tikzcd}
\cdot
$$

注 11.5.4. 以下交换图是对称双幺半群型范畴满足的一致性条件之一:

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes (B \oplus C) \arrow[r, "\delta_l"] \arrow[d, "c_\otimes"] & (A \otimes B) \oplus (A \otimes C) \arrow[d, "c_\otimes \oplus c_\otimes"] \\
(B \oplus C) \otimes A \arrow[r, "\delta_r"] & (B \otimes A) \oplus (C \otimes A).
\end{tikzcd}
$$

根据这个图表, 左分配律和右分配律是相互决定的. 在双幺半群型范畴的定义中, 要求左分配律是同构, 而右分配律是恒等. 上图垂直箭头只是同构, 因此一般来说我们无法要求左右都是恒等.

11.6. 双严格化

定理 11.6.1. [[3]] *任何强对称双幺半群型范畴都自然等价于双置换范畴.*

证明. 对于一个强对称双幺半群型范畴 $\mathbf{C}$, 我们构造双置换范畴 $\mathbf{D}$. 像幺半群型范畴的严格化定理证明中一样, 我们使用自由拓扑幺半群的构造.

(1) 我们分两步构造 $\mathbf{D}$ 的对象.

(a) 首先, 我们令 X 为 $M(\mathrm{obj}(\mathbf{C}))/\sim$, 其中商掉的关系为 $e = 1$ 和消去律, 1 是乘法的单位元. 我们用 $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$ 来记录 X 中的元素, 其中 A_i 是 $\mathbf{C}$ 的对象.

(b) 我们令 $\mathrm{obj}(\mathbf{D}) := M(X)/(e = 0)$, 其中 0 为加法的单位元. 我们用 $x_1 + \ldots + x_n$ 来记录其中的元素, 其中 x_n 在 X 中.

(2) 我们可以通过以下方式将 $\cdot$ 扩展到 $\mathbf{D}$ 的所有对象:

$$(x_1 + \ldots + x_n) \cdot (y_1 + \ldots + y_m) = (x_1 \cdot y_1) + (x_1 \cdot y_2) + \ldots + (x_n \cdot y_m).$$

其中 x_i 和 y_i 都在 M 中,$x_i \cdot y_j$ 是 x_i 和 y_j 的乘积.

双幺半结构由 $\cdot$ 和 $+$ 给出.

(3) 如同幺半群型范畴的严格化证明, 我们可以定义映射 $\pi_1 : M \to \mathrm{obj}(\mathbf{C})$. 我们另外定义 $\pi : \mathrm{obj}(\mathbf{D}) \to \mathrm{obj}(\mathbf{C})$ 如下

$$\pi(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \pi_1(A_1) \oplus \ldots \oplus \pi_1(A_n),$$

这里 A_i 在 M 中.

(4) 定义态射:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(x,y)=\{x\}\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\pi(x),\pi(y))\times\{y\}.$$

不难验证 $\mathbf{D}$ 是双置换范畴.

(5) 如同幺半群型范畴的严格化证明, 不难验证 π 可以拓展成一个函子. 同样地, 我们可以定义 $\iota:\mathbf{C}\to\mathbf{D}$.

(6) 不难验证 π 和 ι 都保持对称双幺半结构, 并且 $\pi\iota=\mathrm{id}$, 且 $\iota\pi$ 自然同构于 id. □

注 11.6.2. 在定理 11.6.1 的证明中, 所构造的范畴 $\mathbf{D}$ 的左分配律是同构, 而不是恒等.

假设 A,B,C,D 是原始强对称双幺半群型范畴中的元素. 考虑 $\mathbf{D}$ 中的元素 A,B, 和 $C+D$. 左分配律给出

$$(A+B)\cdot(C+D)\to(A+B)\cdot C+(A+B)\cdot D.$$

根据 $\cdot$ 的定义, 我们有

$$\mathrm{LHS}=A\cdot C+A\cdot D+B\cdot C+B\cdot D\neq A\cdot C+B\cdot C+A\cdot D+B\cdot D=\mathrm{RHS}.$$

我们在注11.5.4中提到了分配律的不对称性. 事实上, 我们可以使用对称的定义, 要求左分配律是恒等, 右分配率是同构; 如果如此定义, 我们需要调整定理11.6.1的证明.

参考文献

[1] John R Isbell. On coherent algebras and strict algebras. Journal of Algebra, 13(3):299–307, 1969.

[2] Miguel L Laplaza. Coherence for distributivity. In Coherence in categories, pages 29–65. Springer, 2006.

[3] J. Peter May. E_∞ ring spaces and E_∞ ring spectra, volume Vol. 577 of Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977. With contributions by Frank Quinn, Nigel Ray, and Jørgen Tornehave.

CHAPTER 12

从对称双幺半群型范畴到 E_∞-环谱

张宇

本次讲座的主要目标是介绍一种由对称双幺半群型范畴出发，构造 E_∞-环谱的方式。下面的路线图给出了我们所讨论的构造的思路。

$$
\begin{tikzcd}
\text{对称幺半群型范畴} \arrow[d, "\text{严格化}"'] & \text{强对称双幺半群型范畴} \arrow[d, "\text{双严格化}"'] \\
\text{置换范畴} \arrow[d] & \text{双置换范畴} \arrow[d] \\
\mathcal{F}\text{-范畴} \arrow[d, "\mathrm{B}"'] & (\mathcal{F}\int\mathcal{F})\text{-范畴} \arrow[d, "\mathrm{B}"'] \\
\mathcal{F}\text{-空间} \arrow[d, shift left, "1"] & (\mathcal{F}\int\mathcal{F})\text{-空间} \arrow[d, shift left, "3"] \\
\widehat{\mathcal{C}}\text{-空间} \arrow[u, shift left] \arrow[dd, shift left, "2"] & (\widehat{\mathcal{G}}\int\widehat{\mathcal{C}})\text{-空间} \arrow[u, shift left] \arrow[d, shift left, "4"] \\
 & (\widehat{\mathcal{C}},\widehat{\mathcal{G}})\text{-空间} \arrow[u, shift left] \arrow[d, shift left, "5"] \\
\mathcal{C}\text{-空间} = E_\infty\text{-空间} \arrow[uu, shift left] \arrow[d, shift left, "\text{加法无穷回路机器}"] & (\mathcal{C},\mathcal{G})\text{-空间} = E_\infty\text{-环空间} \arrow[u, shift left] \arrow[d, shift left, "\text{乘法无穷回路机器}"] \\
\text{谱} \arrow[u, shift left, "\Omega^\infty"] & E_\infty\text{-环谱} \arrow[u, shift left, "\Omega^\infty"]
\end{tikzcd}
$$

路线图：构造谱和 E_∞-环谱

在这个路线图中，我们给出了相互对应的两个构造，分别是构造谱和构造 E_∞-环谱。我们将左侧的构造称为加法路线，右侧的构造称为乘法路线。这里

涉及到的具体构造比较复杂，时间所限，我们只能着重介绍一些关键的想法，而略去一些细节。本节将重点讨论路线图中所标注出的五个从上到下的映射。

12.1. 加法路线

定义 12.1.1. 令 $\mathcal{F}$ 表示由全体有限带基点集合 $\underline{n} = \{0, 1, \cdots, n\}$（其中 0 为基点）及相应的保基点映射构成的范畴。令 $\Pi \subset \mathcal{F}$ 表示 $\mathcal{F}$ 的一个子范畴，其态射 $\phi : \underline{m} \to \underline{n}$ 满足如下额外条件：对于每个 $1 \le j \le n$，$|\phi^{-1}(j)| \le 1$, 其中 $|S|$ 表示有限集 S 的元素个数。令 $\Upsilon \subset \Pi$ 表示 Π 的一个子范畴，其态射 $\phi : \underline{m} \to \underline{n}$ 满足如下额外条件：对于每个 $1 \le j \le n$，$|\phi^{-1}(j)| = 1$。

定义 12.1.2. 令 C 表示一个算单子，我们定义范畴 $\widehat{C}$ 如下：对象是全体集合 $\underline{n}$ $(n \ge 0)$, 态射空间被定义为：

$$\widehat{C}(\underline{m}, \underline{n}) = \coprod_{\phi \in \mathcal{F}(\underline{m}, \underline{n})} \prod_{1 \le j \le n} C(|\phi^{-1}(j)|)$$

当 n=0 时，我们定义 $\widehat{C}(\underline{m}, \underline{n})$ 为一个点。态射的单位和复合法则由 C 的单位和算单子结构诱导给出。

例子 12.1.3. 考虑算单子 $\mathcal{N}$ 使得对任意 $j \ge 0$ 都有 $\mathcal{N}(j) = *$。不难看出 $\widehat{\mathcal{N}} = \mathcal{F}$。

对于满足全体 $C(j)$ 非空的算单子 C，映射 $C(j) \to *$ 诱导出映射 $\widehat{C} \to \mathcal{F}$。这个映射是在对象上是恒等映射，在态射空间上是满射。

定义 12.1.4. 沿用之前的记号，一个 $\mathcal{U}$ 中的 $\widehat{C}$-空间指的是一个连续函子 $Y : \widehat{C} \to \mathcal{U}$。我们使用记号 $\underline{n} \mapsto Y_n$。令 $\widehat{C}[\mathcal{U}]$ 表示全体 $\widehat{C}$-空间的范畴。

现在，我们可以给出函子 ① : $\mathcal{F}[\mathcal{U}] \to \widehat{C}[\mathcal{U}]$ 的构造。① 直接由与 $\widehat{C} \to \mathcal{F}$ 的复合给出。

接下来，我们讨论 ② 的相关构造。

令 $\mathcal{V} = \Upsilon[\mathcal{U}]$ 表示全体 Υ-空间的范畴。对于空间 $X \in \mathcal{U}$，我们定义 $RX \in \Upsilon[\mathcal{U}]$ 使得 $(RX)_n = X^n$, 其态射由相应的投影给出。对于 $Y \in \Upsilon[\mathcal{U}]$, 我们定义 $LY = Y_1$。这样一来，我们得到了一组伴随函子：

$$\mathcal{V} = \Upsilon[\mathcal{U}] \underset{R}{\overset{L}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}}}} \mathcal{U}$$

回顾在之前的讲座中，我们已经知道了对于算单子 C，存在一个 $\mathcal{U}$ 上的单子 C 使得 $\mathcal{U}$ 中的 C-代数构成的范畴 $C[\mathcal{U}]$ 同构于 C-空间范畴 $C[\mathcal{U}]$。

类似的，我们可以定义一个 $\mathcal{V}$ 上的单子 $\widehat{C}$ 使得 $\widehat{C}$-空间的范畴 $\widehat{C}[\mathcal{U}]$ 同构于 $\mathcal{V}$ 上的 $\widehat{C}$-代数构成的范畴 $\widehat{C}[\mathcal{V}]$。

性质 12.1.5. $LR = id, L\widehat{C}R = C$, 且自然映射 $\delta : \widehat{C}R \to RL\widehat{C}R = RC$ 是一个同构。

定理 12.1.6. R 诱导了映射 $C[\mathcal{U}] = C[\mathcal{U}] \to \widehat{C}[\mathcal{V}] = \widehat{C}[\mathcal{U}]$. 与此同时，我们可以借助双边 Bar-构造将映射②定义为 $\Lambda : \widehat{C}[\mathcal{U}] = \widehat{C}[\mathcal{V}] \to C[\mathcal{U}] = C[\mathcal{U}]$, 其中 $\Lambda Y = B(CL, \widehat{C}, Y)$.

12.2. 乘法路线

定义 12.2.1. 令 $(\mathcal{C},\mathcal{G})$ 表示一组算单子偶。我们可以将一对范畴 $(\widehat{\mathcal{C}},\widehat{\mathcal{G}})$ 转化为一个圈积范畴 $\mathcal{J}=\widehat{\mathcal{G}}\int\widehat{\mathcal{C}}$，其对象是有限带基点集合构成的 n-元组 $n\geq 0$。我们将 $\mathcal{J}$ 的对象记作 $(n;S)$, 其中 S 是一个 n-元组，$S=(\underline{s_1},\cdots,\underline{s_n})$。$\mathcal{J}$ 中由 $(m;R)$ 到 $(n;S)$ 的态射空间被定义为：

$$\coprod_{\phi\in\mathcal{F}(\underline{m},\underline{n})}\epsilon^{-1}(\phi)\times\prod_{1\leq j\leq n}\widehat{\mathcal{C}}(\wedge_{\phi(i)=j}\underline{r_i},\underline{s_j}),\quad \epsilon:\widehat{\mathcal{G}}\to\mathcal{F}$$

这里，我们沿用以下记号：$\wedge_{\varnothing}\underline{r_i}=\underline{1}$; $\underline{m}\wedge\underline{n}=\underline{mn}$ 通过对 (a,b) 进行字典排序得到。

注意到这里存在一个自然的函子 $\mathcal{J}=\widehat{\mathcal{G}}\int\widehat{\mathcal{C}}\to\mathcal{F}\int\mathcal{F}$，其在对象上是恒等映射，在态射空间上是满射。

定义 12.2.2. 一个 $\mathcal{U}$ 中的 $\mathcal{J}$-空间指的是一个连续函子 $Z:\mathcal{J}\to\mathcal{U}$。我们使用记号 $(n;S)\mapsto Z(n;S)$。令 $\mathcal{J}[\mathcal{U}]$ 表示全体 $\mathcal{J}$-空间的范畴。

与 1 相似的，映射 3 $:(\mathcal{F}\int\mathcal{F})[\mathcal{U}]\to\mathcal{J}[\mathcal{U}]$ 是由与 $\mathcal{J}\to\mathcal{F}\int\mathcal{F}$ 的复合给出的。

定义 12.2.3. 一个 $(\Upsilon\int\Upsilon)$-空间指的是一个连续函子 $\Upsilon\int\Upsilon\to\mathcal{U}$。用 $\mathcal{W}=(\Upsilon\int\Upsilon)[\mathcal{U}]$ 表示全体 $(\Upsilon\int\Upsilon)$-空间的范畴。

我们有如下伴随函子：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{W} \arrow[r, shift left, "L''"] \arrow[rr, bend left, "L"] & \mathcal{V} \arrow[l, shift left, "R''"] \arrow[r, shift left, "L'"] & \mathcal{U} \arrow[l, shift left, "R'"] \arrow[ll, bend left, "R"]
\end{tikzcd}$$

需要特别注意的是此处的记号有所变化。对于 $X\in\mathcal{U}$, 我们通过如下方式定义 $RX\in\mathcal{W}$: $(RX)(0;*)=*$, 对于 $n\geq 1$, $(RX)(n;S)=X^{s_1+\cdots+s_n}$. **此处的** L',R' **在加法路线中被称作** L,R. 对于 Υ-空间 Y，我们通过如下方式定义 $(\Upsilon\int\Upsilon)$-空间 $R''Y$: $(R''Y)(0;*)=*$, 对于 $n\geq 1$, $(R''Y)(n;S)=Y_{s_1}\times\cdots\times Y_{s_n}$. 我们有 $R=R''R'$. 对于 $(\Upsilon\int\Upsilon)$-空间 Z, 令 $L''Z$ 表示由 $Z(1;s)$ 定义出的 Υ-空间. 最后，令 $LZ=L'L''Z=Z(1;1)$.

定义 12.2.4. 令 $(\mathcal{C},\mathcal{G})$ 表示一组算单子偶，$\mathcal{J}=\widehat{\mathcal{G}}\int\widehat{\mathcal{C}}$。我们用一个 $(\widehat{\mathcal{C}},\widehat{\mathcal{G}})$-空间指代一个对象 $Y\in\mathcal{V}$ 以及在 $R''Y$ 上的一个 $\mathcal{J}$-空间的结构。一个 $(\widehat{\mathcal{C}},\widehat{\mathcal{G}})$-空间的态射 $f:Y\to Y'$ 指的是一个 $\mathcal{V}$ 中的态射 $f:Y\to Y'$ 使得 $R''f:R''Y\to R''Y'$ 是一个 $\mathcal{J}$-空间的态射。

依据上述定义，函子 R'' 将 $(\widehat{\mathcal{C}},\widehat{\mathcal{G}})$-空间范畴嵌入为了 $\mathcal{J}[\mathcal{U}]$ 的具有 $R''Y$ 形式对象所构成的满子范畴。

依据此前讲座讲过的内容，可以构造范畴 $\mathcal{W}$ 中的单子 $\overline{J}$ 使得 $\mathcal{J}$-空间的范畴 $\mathcal{J}[\mathcal{U}]$ 同构于 $\mathcal{W}$ 上的 $\overline{J}$-代数构成的范畴 $\overline{J}[\mathcal{W}]$。我们定义 $\widetilde{J}=L''\overline{J}R''$.

性质 12.2.5. $L''R''=id$, 且自然映射 $\delta'':\overline{J}R''\to R''L''\overline{J}R''=R''\widetilde{J}$ 是一个同构。因此, $\widetilde{J}$ 可以从 $\overline{J}$ 继承一个单子结构。$(\widehat{C},\widehat{\mathcal{G}})$-空间范畴同构于 $\widetilde{J}$-代数范畴 $\widetilde{J}[\mathcal{V}]$ (参考 [1, 第 14 节])。

与 (2) 相似的，我们可以按如下方式定义 (4):

$$\Lambda'':\mathcal{J}-\text{空间}=\overline{J}[\mathcal{W}]\to\widetilde{J}[\mathcal{V}]=(\widehat{C},\widehat{\mathcal{G}})-\text{空间}$$

$$Z\mapsto B(\widetilde{J}L'',\overline{J},Z)$$

令 $(\mathcal{C},\mathcal{G})$ 表示一组算单子偶。存在单子 C,G 使得 $\mathcal{C}[\mathcal{U}]=C[\mathcal{U}]$，$\mathcal{G}[\mathcal{U}]=G[\mathcal{U}]$。$C$ 诱导了一个在 G-代数范畴 $G[\mathcal{U}]$ 上定义的单子，我们同样称之为 C。$(\mathcal{C},\mathcal{G})$-空间范畴与 $G[\mathcal{U}]$ 中的 C-代数范畴同构。我们希望能够对 $(\widehat{C},\widehat{\mathcal{G}})$-空间范畴有一个类似的描述。

定义 12.2.6. 令 $\overline{C}$ 表示 $\mathcal{W}$ 上的一个单子, 使得 $\overline{C}$ 代数就是 $\Upsilon\int\widehat{C}$-空间. 令 $\overline{G}$ 表示 $\mathcal{W}$ 上的一个单子, 使得 $\overline{G}$ 代数就是 $\widehat{\mathcal{G}}\int\Upsilon$-空间.

性质 12.2.7. $\overline{C}$, $\overline{G}$ 能够诱导 $L''\overline{C}R''$ 和 $L''\overline{G}R''$ 上的单子结构。并且有 $L''\overline{C}R''=\widehat{C}$.

定义 12.2.8. 令 $\widetilde{G}:=L''\overline{G}R''$。令 $\widetilde{G}[\mathcal{V}]$ 表示全体 $\mathcal{V}$ 中的 $\widetilde{G}$-代数构成的范畴。

定理 12.2.9. $\widehat{C}\widetilde{G}$ 是一个 $\mathcal{V}$ 上的单子，$\mathcal{V}$ 中的全体 $\widehat{C}\widetilde{G}$-代数构成的范畴与 $\widetilde{G}[\mathcal{V}]$ 中全体 $\widehat{C}$-代数构成的范畴同构。并且，存在单子间的同构 $\widehat{C}\widetilde{G}\to\widetilde{J}$. 因此，$(\widehat{C},\widehat{\mathcal{G}})$-空间范畴同构于 $\mathcal{V}$ 中全体 $\widehat{C}\widetilde{G}$-代数构成的范畴.

性质 12.2.10. 伴随函子 (L',R') 诱导了伴随函子:

$$\begin{tikzcd}\widetilde{G}[\mathcal{V}] \arrow[r, shift left, "L'"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & G[\mathcal{U}] \arrow[l, shift left, "R'"]\end{tikzcd}$$

注意到我们有 $L'\widehat{C}R'=C$, 这里的 L',R' 在加法路线中被称作 L,R。因此，我们可以通过相似的方式定义 (5):

$$(5):(\widehat{C},\widehat{\mathcal{G}})\text{-空间}=\widehat{C}[\widetilde{G}[\mathcal{V}]]\to C[G[\mathcal{U}]]=(\mathcal{C},\mathcal{G})\text{-空间}$$

参考文献

[1] J. P. May. The construction of E_∞ ring spaces from bipermutative categories. In New topological contexts for Galois theory and algebraic geometry (BIRS 2008), volume 16 of Geom. Topol. Monogr., pages 283–330. Geom. Topol. Publ., Coventry, 2009.

CHAPTER 13

Barratt–Priddy–Quillen **定理和代数 K–理论**

张凝川

回顾在讲座7中, 我们证明了:

定理 13.0.1 (Barratt–Priddy–Quillen). $\alpha\colon CS^0 := \coprod_n B\Sigma_n \longrightarrow \Omega^\infty\Sigma^\infty S^0 = QS^0$ 是一个群完备化 (group completion) 态射.

在这一讲中, 我们将要介绍这个定理在代数 K–理论 (algebraic K-theory) 中的主要推论: 球谱的零空间 QS^0 是对称双幺半范畴 (有限集, $\coprod, \times$) 的代数 K–空间. 本讲的主要参考文献为 Weibel, [2]. 首先，我们将回忆代数 K–理论的基本构造. 这包括 K_0 和 K_1 群的具体定义以及 Quillen 用 +-构造定义的环的代数 K–空间和高阶代数 K 群. 然后, 我们将用群完备化的想法给出幺半范畴 C 的代数 K–空间的定义. 当 C 是对称 (双) 幺半范畴时, 这样定义出来的代数 K–空间将具有自然的 E_∞-(环) 空间结构. 最后, 我们将用代数 K–理论重新解释 Barratt–Priddy–Quillen 定理13.0.1, 并计算球面的第一个稳定同伦群.

13.1. **代数 K–理论的基本构造**

我们首先定义第 0 个代数 K–群.

定义 13.1.1. 设 $(C, \otimes, 1_C)$ 为一对称幺半范畴. 我们定义 $\mathrm{K}_0(C, \otimes, 1_C)$ 为其元素同构类在 $\otimes$ 乘法下的群完备化.

例子 13.1.2. 考虑所有有限集组成的范畴. 这个范畴上有两个不同的对称幺半结构: 不交并 $\coprod$ 和笛卡尔积 $\prod$. 它们对应的 K_0 群分别如下:

$$\mathrm{K}_0(\text{有限集}, \coprod) = (\mathbb{N}, +)_{\mathrm{gp}} = \mathbb{Z},$$
$$\mathrm{K}_0(\text{有限集}, \prod) = (\mathbb{N}, \times)_{\mathrm{gp}} = \{0\}.$$

例子 13.1.3. 考虑域 $\mathbb{F}$ 上的有限维向量空间范畴. 其在直和 $\oplus$ 与张量积 $\otimes$ 下的 K_0 群分别是 $\mathbb{Z}$ 和 $\{0\}$. 更进一步地, 取有限集自由生成的 $\mathbb{F}$–向量空间

$$(\text{有限集}, \coprod, \prod) \longrightarrow (\text{有限维}\mathbb{F}\text{–向量空间}, \oplus, \otimes), \qquad X \longmapsto \mathbb{F}\{X\}.$$

是一个强双幺半 (strong bi-monodial) 函子, 其在代数 K_0–群上诱导了同构映射.

例子 13.1.4. 令 X 是一个拓扑空间. 在代数拓扑中, 我们定义 X 的**实/复拓扑 K–理论**为:

$$\begin{aligned}\mathrm{KO}(X) &:= \mathrm{K}_0\{X\text{上的有限维实向量丛}, \oplus\},\\ \mathrm{KU}(X) &:= \mathrm{K}_0\{X\text{上的有限维复向量丛}, \oplus\}.\end{aligned}$$

定义 13.1.5. 对一个环 R, 我们定义其 K_0–群为:

$$\mathrm{K}_0(R) := \mathrm{K}_0\{\text{有限生成投射 } R\text{-(左) 模}, \oplus\}.$$

类似的, 对一个概形 (scheme)X, 我们定义其 K_0–群为:

$$\mathrm{K}_0(X) := \mathrm{K}_0\{X \text{ 上的有限生成局部自由拟凝聚层}, \oplus\}.$$

注 13.1.6. 上述定义中的有限生成条件不可省却, 否则我们得到的群为零。这是代数 K–理论中经典的 Eilenberg "骗术" (Eilenberg swindle):[1]

$$M^{\oplus\infty} \cong M \oplus (M^{\oplus\infty}) \Longrightarrow [M] = [0] \in \mathrm{K}_0\{\text{投射 } R\text{-(左) 模}, \oplus\}.$$

例子 13.1.7. 若 R 是一个局部交换环, 则由 Nakayama 引理可知 $\mathrm{K}_0(R) = \mathbb{Z}$.

定义 13.1.8. 对一个环 R, 我们定义其 K_1–群为:

$$\mathrm{K}_1(R) := \mathrm{GL}(R)^{\mathrm{ab}} \cong \mathrm{GL}(R)/\mathrm{E}(R), \qquad \mathrm{GL}(R) := \operatorname*{colim}_n \mathrm{GL}_n(R),$$

其中 $\mathrm{E}(R)$ 是 $\mathrm{GL}(R)$ 中由所有初等矩阵生成的正规子群; 余极限中的结构映射是分块对角矩阵嵌入: $P \mapsto \begin{pmatrix} P & \\ & 1\end{pmatrix}$.

注 13.1.9. 当 R 是交换环时, 矩阵的行列式诱导了一个群的裂满同态

$$\det\colon \mathrm{K}_1(R) \twoheadrightarrow R^\times.$$

若 R 是域 ([2, Example III.1.1.2]) 或者数域的整数环 (Bass-Milnor-Serre, [1]), 则此映射为同构 $\mathrm{K}_1(R) \cong R^\times$.

$\mathrm{K}_2(R)$ 也有具体的构造, 但比较复杂, 故在此略过. Quillen 将一个环 R 的高阶代数 K–群定义为一个拓扑空间的同伦群. 这个空间的构造用到了 Quillen 的 + 构造. 其基本想法是通过贴胞腔来使一个空间的基本群交换化, 并同时保证其同调群不变.

构造 13.1.10 (Quillen 的 + 构造). 设 X 是一个联通的 CW 复形, $P \trianglelefteq \pi_1(X)$ 是一个完满 (perfect) 正规子群. 则 X 相对于 P 的 + 构造是一个满足以下条件的胞腔映射 $f\colon X \to Y$:

(1) 在基本群上, f 诱导满射且核为 P. 也就是说我们有如下短正合列:

$$1 \to P \longrightarrow \pi_1(X) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y) \to 1.$$

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Eilenberg-Mazur_swindle

(2) 对任意局部系数系统 (local coefficient system) (亦即 $\pi_1(X)$-模) $\underline{M}$, f 在所有同调群上诱导同构:

$$f_*\colon H_*(X;\underline{M}) \xrightarrow{\cong} H_*(Y;\underline{M}).$$

若无特别声明, 我们一般取 P 为 $\pi_1(X)$ 的交换子子群 (commutator subgroup), 并将此时的 Y 记作 X^+.

定理 13.1.11 (Quillen, + 构造的万有性质 [2, Theorem VI.1.5]). 设 $f\colon X \to Y$ 是相对于完满正规子群 $P \trianglelefteq \pi_1(X)$ 的 + 构造. 对于任一映射 $g\colon X \to Z$, 如果 $g_*(P) = 0 \subseteq \pi_1(Z)$, 则存在同伦意义下唯一的映射 $h\colon Y \to Z$ 使得 $g = h \circ f$. 特别地, 如果 $g\colon X \to Z$ 是另一个相对于 P 的 + 构造, 则上述映射 $h\colon Y \xrightarrow{\sim} Z$ 是一个同伦等价.

定义 13.1.12. 对于一个环 R, 我们定义其**代数** K–**空间**和**代数** K–**群**为:

$$\mathrm{K}(R) := \mathrm{K}_0(R) \times \mathrm{BGL}(R)^+, \qquad \mathrm{K}_n(R) := \pi_n \mathrm{K}(R).$$

其中 $\mathrm{K}_0(R)$ 上取离散拓扑.

我们可以检查这个定义中的 K_0 和 K_1–群和之前的定义吻合. 通过这个构造, Quillen 计算了所有有限域的高阶代数 K–群.

定理 13.1.13 (Quillen). 对所有的有限域 $\mathbb{F}_q$, 我们有如下的等值子序列 (equalizer sequence):

$$\mathrm{BGL}(\mathbb{F}_q)^+ \longrightarrow \mathrm{BU} \underset{\psi^q}{\overset{\mathrm{Id}}{\rightrightarrows}} \mathrm{BU}, \tag{13.1.14}$$

其中 ψ^q 是 BU 上的第 q 个 Adams 运算.

推论 13.1.15. 由等值子序列(13.1.14)在同伦群上的诱导的长正合列, Bott 周期律和 ψ^q 在 $\pi_*(\mathrm{BU})$ 上的作用, 不难得出:

$$\mathrm{K}_t(\mathbb{F}_q) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & t = 0; \\ \mathbb{Z}/(q^n - 1), & t = 2n-1 > 0; \\ 0, & \text{其他情况}. \end{cases}$$

注意到在等值子序列(13.1.14)中, BU 是无穷回路 (Ω^∞) 空间且 $\mathrm{Id} = \psi^1$ 和 ψ^q 都是无穷回路空间映射. 这告诉我们:

推论 13.1.16. $\mathrm{BGL}(\mathbb{F}_q)^+$ 是一个 E_∞/无穷回路空间.

更进一步地, 我们可以把(13.1.14)升级到代数 K–空间上:

$$\mathrm{K}(\mathbb{F}_q) = \mathbb{Z} \times \mathrm{BGL}(\mathbb{F}_q)^+ \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathrm{BU} \underset{\psi^q}{\overset{\mathrm{Id}}{\rightrightarrows}} \mathbb{Z} \times \mathrm{BU}. \tag{13.1.17}$$

在这里, $\mathbb{Z} \times \mathrm{BU} \simeq \Omega^\infty \mathrm{ku}$ 是一个 E_∞-环空间, 且 $\mathrm{Id} = \psi^1$ 和 ψ^q 都是 E_∞-环空间映射. 这告诉我们 $\mathrm{K}(\mathbb{F}_q)$ 是一个 E_∞-环空间. 一个自然的问题是:

问题 13.1.18. 对于一般的交换环 R, 其代数 K–空间是 E_∞-环空间吗?

我们接下来将通过代数 K–理论的另一个构造来回答这个问题.

注 13.1.19. 上述 $\mathrm{K}(\mathbb{F}_q)$ 的等值子序列(13.1.17)与代数 K–理论的 Galois 下降性质有关. 具体而言, Suslin 证明了 $\mathrm{K}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ 在任何不整除 q 的素数 ℓ 处的完备化是:

$$\mathrm{K}(\overline{\mathbb{F}}_q)^\wedge_\ell \simeq \mathrm{ku}^\wedge_\ell.$$

在这个等价中, 左侧 Frobenius 映射 (q-次方) 的诱导作用对应于右侧的 Adams ψ^q-运算.

如果我们先使代数 K-空间/谱的 Bott 元素 β 可逆, 再进行 ℓ-完备化, 则我们得到了代数 K-谱关于第一个 Morava K-理论 K(1)“ :=″ KU/ℓ 的 Bousfield 局部化

$$\mathrm{L}_{\mathrm{K}(1)}\mathrm{K}(-) := \left(\mathrm{K}(-)[\beta^{-1}]\right)^\wedge_\ell.$$

这个局部化后的代数 K-理论满足 Galois 下降 (descent) 性质: 若 $R_1 \to R_2$ 是特征不为 ℓ 的交换环的 G-Galois 扩张, 则 $\mathrm{L}_{\mathrm{K}(1)}\mathrm{K}(R_1) \to \mathrm{L}_{\mathrm{K}(1)}\mathrm{K}(R_2)$ 是 K(1)-局部 E_∞-环谱的 G-Galois 扩张. 同时 K(1)-局部单位映射

$$\mathrm{L}_{\mathrm{K}(1)}S^0 \longrightarrow \mathrm{L}_{\mathrm{K}(1)}\mathrm{K}(\mathbb{F}_q)$$

是一个 K(1)-局部 E_∞-环谱的有限 Galois 扩张.

13.2. 群完备化和代数 K–理论

在本节中, 我们将通过对称幺半范畴 $\mathcal{C}$ 的群完备化来定义它们的代数 K-空间. 这样定义出来空间 $\mathrm{K}(\mathcal{C})$ 将具有自然的 E_∞ 结构.

定义 13.2.1. 一个范畴 $\mathcal{C}$ 的分类空间 (classifying space) 是其神经 (nerve) 的几何实现 (geometric realization):

$$\mathrm{B}\mathcal{C} := |\mathcal{N}(\mathcal{C})|.$$

例子 13.2.2. 设 $\mathcal{C} = */\!\!/G$ 是一个只有一个元素的群胚, 且其唯一元素的自同构群是 G. 则范畴 $\mathcal{C}$ 在上述定义下的分类空间与群 G 在代数拓扑中定义的分类空间 $\mathrm{B}G$ 等价.

我们注意到以下事实:

- 若范畴 $\mathcal{C}$ 由初始元素 (inital object), 则其分类空间 $\mathrm{B}\mathcal{C}$ 可缩.
- 范畴之间的等价 $F\colon \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$ 诱导了它们分类空间之间的同伦等价 $F_*\colon \mathrm{B}\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}\mathcal{D}$.
- 若 $\mathcal{C}$ 是一个群胚, 则其分类空间等价于:

$$\mathrm{B}\mathcal{C} \simeq \coprod_{c\in\mathcal{C}\text{中元素的同构类}} \mathrm{B}\,\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}(c).$$

在此情况下, $\mathrm{B}C$ 的同伦群只有 π_0 和 π_1 非平凡:

$$\pi_0(\mathrm{B}C) = C \text{ 中元素的同构类}, \qquad \pi_0(\mathrm{B}C, c) = \mathrm{Aut}_C(c).$$

- 若 C 是一个对称幺半范畴, 则其分类空间 $\mathrm{B}C$ 是一个同伦结合交换的 H-空间. 此时 $\pi_0(\mathrm{B}C)$ 有自然的交换群结构.

基于以上观察, 我们希望一个对称幺半群胚 C 的代数 K-空间能满足:

- $\pi_0\mathrm{K}(C)$ 和我们之前在13.1.5定义的 $\mathrm{K}_0(C)$ 一致.
- 单位环上的有限生成投射左模范畴的代数 K-空间和之前在13.1.12用 Quillen + 构造定义的代数 K-空间等价.

仿造 K_0 的定义13.1.5, 我们将用群完备化的想法来定义代数 K-空间.

构造 13.2.3. 设 C 是一个幺半群胚. 定义 $C^{-1}C$ 为如下范畴:

- 元素: $(m, n) \in C \times C$, 此元素应被视作 “$m - n$”.
- 态射: (m_1, n_1) 到 (m_2, n_2) 态射是如下态射复合

$$(m_1, n_1) \xrightarrow{s\otimes -} (s \otimes m_1, s \otimes n_1) \xrightarrow{f,g} (m_2, n_2)$$

的等价类. 如果存在 C 中同构 $\alpha\colon s \xrightarrow{\cong} s'$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
& (s\otimes m_1, s\otimes n_1) \arrow[dr, "f,g"] \arrow[dd, dashed, "\alpha\otimes\alpha"] & \\
(m_1, n_1) \arrow[ur, "s\otimes -"] \arrow[dr, "s'\otimes -"'] & & (m_2, n_2), \\
& (s'\otimes m_1, s'\otimes n_1) \arrow[ur, "f',g'"'] &
\end{tikzcd}$$

则上下两个态射等价.

从上述构造出发, 我们可以证明:

引理 13.2.4. 范畴 $C^{-1}C$ 在乘法

$$(m_1, n_1) \otimes (m_1, n_2) := (m_1 \otimes m_2, n_1 \otimes n_2)$$

下是幺半范畴, 且 $C \to C^{-1}C, m \mapsto (m, 1_C)$ 是一个强幺半函子.

定理 13.2.5 (Quillen). 设 C 是一个幺半群胚. 若对于 C 中任何元素 c, c', 左乘 c' 诱导的映射 $\mathrm{Aut}_C(c) \to \mathrm{Aut}_C(c' \otimes c)$ 是单射, 则分类空间上的诱导映射 $\mathrm{B}C \to \mathrm{B}C^{-1}C$ 是一个 H-空间的群完备化映射.

定义 13.2.6. 一个幺半群胚 C 的代数 K-空间是:

$$\mathrm{K}(C) := \mathrm{B}C^{-1}C.$$

从之前讲座的无穷回路空间理论直接可得:

性质 13.2.7. 一个对称 (双) 幺半群胚 C 的代数 K-空间 $\mathrm{K}(C)$ 是一个 E_∞-(环) 空间.

注 13.2.8. 在讲座12中, 我们提到一个从对称双幺半范畴构造 E_∞-环空间的过程中, 必须先将其双严格化 (bi-strictification) 成双置换范畴. 我们注意到这个 (双) 严格化的过程不改变范畴的等价类, 因此它也不会改变其分类空间的同伦类.

例子 13.2.9. 设 C 为交换环 R 上有限秩自由模和 R-模同构组成的双幺半群胚. 则群胚 C 的骨架形如:

$$\begin{tikzcd} R^0 \arrow[loop below, "\mathrm{GL}_0(R)=\{\mathrm{Id}\}"] & R^1 \arrow[loop below, "\mathrm{GL}_1(R)"] & R^2 \arrow[loop below, "\mathrm{GL}_2(R)"] & R^3 \arrow[loop below, "\mathrm{GL}_3(R)"] & \cdots & R^n \arrow[loop below, "\mathrm{GL}_n(R)"] & \cdots \end{tikzcd}$$

定理 13.2.10. $\mathrm{K}(C) := \mathrm{B}C^{-1}C \simeq \mathbb{Z} \times \mathrm{BGL}(R)^+$

证明. 考察下面空间之间的映射

$$f\colon \mathrm{B}C \simeq \coprod_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{BGL}_n(R) \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathrm{BGL}(R)^+$$

其中 f 在第 n 个连通分支 $\mathrm{BGL}_n(R)$ 的限制是:

$$\mathrm{BGL}_n(R) \to \{n\} \times \mathrm{BGL}_n(R) \hookrightarrow \{n\} \times \mathrm{BGL}(R) \to \{n\} \times \mathrm{BGL}(R)^+$$

我们可以验证这个映射是 H-空间的群完备化. □

如果定义 C 是 R 上有限生成投射模和 R-模同构组成的双幺半群胚, 则同理可证:

$$\mathrm{K}(C) := \mathrm{B}(C^{-1}C) \simeq \mathrm{K}_0(R) \times \mathrm{BGL}(R)^+.$$

13.3. Barratt–Priddy–Quillen 定理及其应用

上节介绍的构造13.2.3让我们能用代数 K-理论重新解释 Barratt–Priddy–Quillen 定理13.0.1. 考虑对称双幺半群胚

$$(\text{有限集, 双射}, \coprod, \prod).$$

则其分类空间是 $\mathrm{B}(\text{有限集, 双射}) \simeq \coprod_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}\Sigma_n$. Barratt–Priddy–Quillen 定理13.0.1指出

$$\coprod_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}\Sigma_n \longrightarrow QS^0$$

是一个群完备化映射. 于是由构造13.2.3和 Quillen 的定理13.2.5, 我们可知:

推论 13.3.1. $\mathrm{K}(\text{有限集}) \simeq QS^0$.

在这里, 有限集上的笛卡尔积给出了 K(有限集) 的 E_∞ 环空间结构. 同时我们注意到这个有限集群胚在所有对称双幺半群胚中是初始元. 设 $(C, \oplus, \otimes)$ 是一个对称双幺半群胚并将其在 $\otimes$ 下的单位元记作 1_C. 那我们有从 $(\text{有限集}, \coprod, \prod)$ 到 $(C, \oplus, \otimes)$ 的唯一双幺半函子: (参见13.1.3)

$$F_C\colon (\text{有限集}, \coprod, \prod) \longrightarrow (C, \oplus, \otimes), \qquad X \longmapsto \bigoplus_X 1_C.$$

这个双幺半函子诱导了一个 E_∞-环空间的映射:

$$\mathrm{K}(F_C)\colon QS^0 \longrightarrow \mathrm{K}(C).$$

由于 QS^0 是所有 E_∞-环空间中的初始元, 这个代数 K-空间上的诱导映射 $\mathrm{K}(F_C)$ 正是 $\mathrm{K}(C)$ 作为 E_∞-环空间的单位映射.

接下来, 我们将介绍如何用 Barratt–Priddy–Quillen 定理的推论13.3.1来计算球的第一个稳定同伦群 $\pi_1(QS^0)$. 为此, 我们希望像定义13.1.12一样, 对好的对称双幺半群胚也能用 Quillen 的 +-构造13.1.10来定义其代数 K-空间. 在定义13.1.12中, 环上的有限生成投射 (左) 模范畴有一族特殊的元素: 有限生成自由模 —- 所有的投射模都是它们的直和项. 仿照这一性质, 我们可以证明:

定理 13.3.2. *设 $(C,\oplus)$ 是一个对称幺半群胚. 假设 C 中有一族元素 $s_1, s_2, \cdots, s_k, \cdots$ 满足:*

- *存在 $a_k \in C$ 使得 $s_k = a_k \oplus s_{k-1}$;*
- *$\mathrm{Aut}_C(s_{k-1}) \xrightarrow{a_k\oplus -} \mathrm{Aut}_C(s_k)$ 是单射;*
- *对于 C 中任意元素 s, 存在 $s' \in C$ 和正整数 k, 使得 $s \oplus s' \cong s_k$.*

定义 $\mathrm{Aut}(C) := \mathrm{colim}_k \mathrm{Aut}_C(s_k)$. 则我们有空间的同伦等价:

$$\mathrm{K}(C) \simeq \mathrm{K}_0(C) \times \mathrm{B}\,\mathrm{Aut}(C)^+.$$

在有限集中, 任意一族严格递增的有限集 $X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \cdots \subsetneq X_k \subsetneq \cdots$ 均满足定理13.3.2的假设. 同时我们可以验证 $\mathrm{Aut}(\text{有限集}) \cong \Sigma_\infty := \mathrm{colim}_k \Sigma_k$. 那么由 Barratt–Priddy–Quillen 定理的推论13.3.1和定理13.3.2可知:

$$QS^0 \simeq \mathrm{K}(\text{有限集}) \simeq \mathbb{Z} \times \mathrm{B}\Sigma_\infty^+.$$

由此, 我们可以算出球的第一个稳定同伦群:

推论 13.3.3. *$\pi_1^s(S^0) = \pi_1(QS^0) \cong \pi_1(\mathrm{B}\Sigma_\infty^+) = (\Sigma_\infty)^{ab} = \mathbb{Z}/2$, 其生成元是奇置换在 Σ_∞ 中的等价类.*

对无穷交错群 (alternating group) A_∞, 我们可以进一步证明 $\mathrm{B}\Sigma_\infty^+ \simeq \mathrm{B}\mathbb{Z}/2 \times \mathrm{B}A_\infty^+$. 这告诉我们:

$$\pi_n^s(S^0) \cong \pi_n(\mathrm{B}\Sigma_\infty^+) \cong \pi_n(\mathrm{B}A_\infty^+), \qquad n \geq 2.$$

参考文献

[1] H. Bass, J. Milnor, and J.-P. Serre. Solution of the congruence subgroup problem for $\mathrm{SL}_n\,(n \geq 3)$ and $\mathrm{Sp}_{2n}\,(n \geq 2)$. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 33:59–137, 1967.

[2] Charles A. Weibel. The *K*-book, volume 145 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2013. An introduction to algebraic *K*-theory.

CHAPTER 14

E_∞-环谱判别法：Goerss–Hopkins 阻碍理论简述

李谷川

14.1. 导言

这一讲简介一种构造和判别 E_∞-环谱的方法: Goerss–Hopkins 阻碍理论 (Goerss–Hopkins obstruction theory).

Goerss 和 Hopkins 在文章 [3, 4] 中发展了这一理论. 基于 Hopkins 和 Lurie[5] 中的观察, Pstragowski 和 VanKoughnett 用和声谱 (synthetic spectra) 在无穷范畴的框架下给出了这一阻碍理论 [6, Section 6]. 如果想快速了解结论, 可以参考文献 [2] 中 Goerss–Hopkins 阻碍理论一节.

Goerss–Hopkins 阻碍定理回答下述问题. 给定一个 E_∞-环谱 E, 假定满足 E_*E 是平坦 E_*-模等条件 (精确的条件可以参见 [6]). 在 E_*E-余模范畴中, 给定一个交换的 E_*-代数 A.

问题 14.1.1. *是否存在一个 E_∞-环谱 X 使得作为 E_*E-余模 $E_*X \simeq A$?*

“**定理**” 14.1.2. [3, Corollary 5.9] 存在一系列代数定义的阻碍元素 (某些 André–Quillen 上同调，我们在14.4小节中简要回顾), 如果这些阻碍元素都是平凡的, 那么上述问题的回答是肯的, 即存在 E_∞-环谱 X, 将 A 实现为 E_*X.

Goerss–Hopkins 阻碍定理的一个重要应用是给出了 Morava E-理论是 E_∞-环谱 (定理 14.1.3). 这是色展同伦理论 (chromatic homotopy theory) 中非常重要的结果 (我们在14.5小节简要介绍).

定理 14.1.3. [3, Corollary 7.6] *高度 n 的 Morava E-理论 E_n 有本质唯一的 E_∞-环谱结构, 并且 Morava 稳定群 $\mathbb{G}_n$ 在其上的作用是 E_∞ 作用.*

我们先简要概述 Goerss–Hopkins 阻碍理论的想法. 我们定义问题 14.1.1中所有可能的实现组成的模空间如下.

定义 14.1.4. 定义 $\mathcal{E}(A)$ 为所有 E-同调群作为 E_*E-余模同构于 A 的 E_∞-环谱构成的范畴. 即对象为 E_∞-环谱 X, 满足作为 E_*E-余模 $E_*X \cong A$; 态射为对象间的诱导 E-同调同构的 E_∞-环谱映射. 定义模空间 $\mathcal{TM}(A)$ 为范畴 $\mathcal{E}(A)$ 的脉 (nerve).

模空间 $\mathcal{TM}(A)$ 可以用单纯集合描述. Goerss—Hopkins 理论构造了一个如下图所示的单纯集合塔. 这里我们不展开 $\mathcal{TM}_n(A)$ 的具体定义 [3, Definition 5.1], 仅指出塔的起始项 $\mathcal{TM}_0(A)$ 是问题 14.1.1中给的代数信息, 而极限项

$\mathcal{TM}_\infty$ 的几何实现给出了模空间 $\mathcal{TM}(A)$. 从而我们通过一层一层地爬这个塔, 来完成从代数信息出发试图构造相应的拓扑对象. 每一层的爬升需要特定的阻碍元素平凡, 具体可以表述为下面塔中的同伦拉回图表 [3, Theorem 5.8].

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{TM}_\infty \simeq \lim \mathcal{TM}_n \arrow[d] & \\
\vdots \arrow[d] & \\
\mathcal{TM}_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{BAut}(A, \Omega^n A) \arrow[d] \\
\mathcal{TM}_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \text{阻碍元素所在的 André–Quillen 同调} \\
\vdots \arrow[d] & \\
\mathcal{TM}_0 \arrow[r, "\simeq"] & \mathrm{BAut}(A)
\end{tikzcd}
$$

14.2. 阻碍理论

我们先回顾一些熟悉的情形, 介绍阻碍理论的一些基本例子.

例子 14.2.1. 给定一个 CW 复形 X 和连通 CW 复形 Y, Y 满足条件 $\pi_1 Y$ 在 $\pi_n Y$ 上作用平凡 (保证了其 Postinikov 塔是主纤维丛). 对于 X 的子复形 X', 一个映射 $f\colon X' \to Y$ 延拓到 $\tilde{f}\colon X \to Y$ 的阻碍元素在 $H^{n+1}(X, X', \pi_n Y)$ 中 (参见 Hatcher 的 Corollary 4.73).

为了简便, 我们假设 $X' \simeq *$. 考虑 Y 的 Postinikov 塔.

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \\
 & Y[1] \arrow[r, "k_2"] \arrow[d] & \Sigma^3 H\pi_2 Y \\
X \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[uur] & Y[0] \arrow[r, "k_1"] & \Sigma^2 H\pi_1 Y
\end{tikzcd}
$$

因为 Y 连通, 我们有 $Y[0] \simeq *$, 从而有映射 $f_0\colon X \to Y[0]$. 如果复合映射 $X \xrightarrow{f_0} Y[0] \xrightarrow{k_1} \Sigma^2 H\pi_1 Y$ 是零伦的, 则存在提升 $f_1\colon X \xrightarrow{f_1} Y[1]$ 爬升到下一层. 注意到每一层的阻碍元素 $\theta_i \in H^{n+1}(Y, \pi_n Y)$ 是同调群, 是一个代数量.

我们下面考虑一个更复杂, 更接近问题 14.1.1的情形. 我们用 $\mathcal{A}_*$ 记对偶 Steenrod 代数, 则一般空间的同调群有 $\mathcal{A}_*$-余模结构.

例子 14.2.2. 给定 $\mathcal{A}_*$-余模 M, 什么时候存在 X 使得作为 $\mathcal{A}_*$-余模 $H_*X \cong M$?

为了简便, 我们考虑对偶情形 $\mathcal{A}$-模 M (这里我们混用了记号 M). 如果 M 是自由 $\mathcal{A}$-模, 则用 Eleinberg-MacLane 谱可以实现 M 为空间的上同调群. (如果用 $H\mathbb{F}_p$ 记 ($\mathbb{F}_p$-)Eleinberg-MacLane 谱, 则有 $\mathcal{A} \cong H^*(H\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)$, 即 $H\mathbb{F}_p$ 实现 $\mathcal{A}$ 为上同调群.) 对于一般的 M, 假设如果存在 X 实现 M 为 H^*X, 考虑 X 的 Adams 消解

$$X \xrightarrow{d} K^0 \xrightarrow{d} K^1 \xrightarrow{d} K^2 \xrightarrow{d} \cdots$$

则我们有

$$0 \leftarrow H^*X \leftarrow H^*K^0 \leftarrow H^*K^1 \leftarrow H^*K^2 \leftarrow \cdots$$

是 $H^*X \cong M$ 作为 $\mathcal{A}$ 的一个自由消解. 同时 X (准确说是 X 的 p-完备化 $X_p^\wedge$) 是其 Adams 塔的同伦极限.

故而从 M 构造 X 的一个自然的思路是从 M 的自由消解来构造 X 的 Adams 塔. 取 M 的一个自由消解

$$M \leftarrow M_0 \leftarrow M_1 \leftarrow M_2 \leftarrow \cdots.$$

因为 M_i 是自由 $\mathcal{A}$, 故可以取谱映射

$$K^0 \to K^1 \to K^2 \to \cdots$$

使得在上同调上诱导的映射为

$$M_0 \leftarrow M_1 \leftarrow M_2 \leftarrow \cdots.$$

我们尝试构造一个 Adams 塔如下, 取 $X_0 = K^0$ 和 $X_1 = \mathrm{fib}(K^0 \xrightarrow{d_0} K^1)$, 即取 X_1 为映射 d_0 的纤维.

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \\
X_1 = \mathrm{fib}(k_0) \arrow[r, "k_1"] \arrow[d] & \Sigma^{-1}K^2 \\
X_0 = K^0 \arrow[r, "k_0 = d_0"] & K^1
\end{tikzcd}$$

希望可以递归的构造映射 $k_i \colon X_i \to \Sigma^{-I}K^{i+1}$ 和 $X_{i+1} = \mathrm{fib}(k_i)$. 例如要构造 k_1, 考虑纤维列 $X_0 \to K^1 \to \Sigma X_1$, 代数信息给了映射 $d_1 \colon K^1 \to K^2$. 由于复合映射 $X_0 = K^0 \to K^1 \to K^2$ 是平凡的, 映射 d_1 可以穿过 ΣX_1 给出映射 k_1. 注意到, 如果重复这一方法, 在下一层我们需要复合映射 $\theta_1 \colon X_1 \to \Sigma^{-1}K^2 \to \Sigma^{-1}K^3$ 是平凡的, 但是这不能由初始的代数信息保证. (只能保证 $K^1 \to K^2 \to K^3$ 是平凡的, 但是和前面不同 $X_1 \neq K^1$.) 这里 θ_1 成为了爬升的阻碍. 通过更多的论证, 可以验证这些阻碍元素在下述 Ext 群中.

定理 14.2.3. [7], 另见 [6, Thm 1.3] 令 $\mathcal{A}_*$ 是素数 p 的对偶 Steenrod 代数, M 是下有界的 $\mathcal{A}_*$-余模. 那么, 可以对 $n \geqslant 1$, 定义下述阻碍元素

$$\theta_n \in \mathrm{Ext}_A^{n+2,n}(M, M)$$

使得存在谱 X 实现 M 为 H_*X 当且仅当上述阻碍元素均消失, 即所有 $\theta_n = 0$.

14.3. Goerss–Hopkins **阻碍理论**

我们回到 E_∞-环谱情形的讨论. 如果模仿上述想法, 一个困难是自由的 E_∞-代数的同调群很复杂. 例如, X 上自由 E_∞-代数形如

$$C(X) = \vee C(j) \underset{\Sigma_j}{\times} X^j \tag{14.3.1}$$

其中 $C(j)$ 是 E_∞-算单子. 若 X 是单点 $*$, 则 $C(j) \underset{\Sigma_j}{\times} X^j \simeq B\Sigma_j$. 其同调群是非常复杂的, 并且对 E_∞-代数我们还需要考虑其上更丰富的代数结构 (Dyer–Lashof 代数). 这样我们并不能像例子例子 14.2.2中一样, 将自由的代数对象和之间的映射在拓扑上轻易实现. Goerss–Hopkins 采用的策略是从 E_*E-余模的代数结构出发, 并不指定上面的 Dyer–Lashof 代数结构. 相应的, 需要对算单子做消解, 使得消解中的算单子 $C_n(j)$ 满足 $\pi_0 C_n(j)$ 有自由的 Σ_j-作用. 这样在类似 eq. (14.3.1) 的计算中 $C_n(j) \underset{\Sigma_j}{\times} X^j \simeq C_n(j)/\Sigma_j \times X^j$ 避免了关于 $B\Sigma_j$ 同调群和其上 Dyer–Lashof 代数结构的计算. 这一消解由单纯算单子实现, 详见 [3, Therome 2.1 2]. 粗略的说, 我们有单纯算单子 T 使得其几何实现 $|T| \to C$ 是个弱同伦等价. 单纯结构给出的滤层 T_n 满足 $\pi_0(T_n(j))$ 是 Σ_j-自由集合, 并满足其他一些性质.

这样类似于 Postinkov 塔, 在 section 14.4中, $\mathcal{TM}_n$ 为 $\mathcal{TM}$ 的 n-阶可能实现 (potential n stage), 是算单子 T_n 代数. 爬升的阻碍阻碍元素可以通过下面的递归步骤中的同伦拉回图表的一角给出. 由于时间原因, 我们不展开说明这个递归步骤, 而是在下一章简要回顾 André–Quillen 同调的来源和在这里出现的一些直观原因.

14.4. André–Quillen **同调**

我们回顾 Goerss–Hopkins 阻碍理论的递归步骤是由下面同伦拉回图表给出

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{TM}_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{BAut}(A, \Omega^n A) \arrow[d] \\
\mathcal{TM}_{n-1} \arrow[r] & \text{阻碍元素所在的 André–Quillen 同调.}
\end{tikzcd}$$

其中右下角是 André–Quillen 同调. 这一部分我们不展开具体讲解, 而是简要回顾微分 (derivation), 平方零扩张 (square zero extension) 等概念, 非常粗略地解释为什么阻碍元素可以用 André–Quillen 同调计算.

令 k 是一个域, A 是一个交换 k-代数, M 是一个 A-模.

定义 14.4.1. A 的一个取值在 M 的 k-导子 (a k-derivation of A valued in M) 是一个 k-线性映射 $D\colon A \to M$, 使得 $D(ab) = D(a) \cdot b + a \cdot D(b)$.

记如上全体导子为 $\mathrm{Der}_k(A, M)$. 其被一个 A-模 $\Omega_{A/k}$ 表示, 即 $Der_k(A, M) = \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/k}, M)$.

注 14.4.2. 上述 $\Omega_{A/k}$ 被称为相对凯勒微分模 (module of relative Kaller differential). 令 $I = ker(A \otimes_k A \to A)$, 则 $\Omega_{A/k} = I/I^2$.

定义 14.4.3. 一个平方零扩张 (square zero extension) $A \ltimes M$ 是一个 A-代数. 作为 A-模它同构于 $A \oplus M$, 其上的乘法如下

$$(a, m)(a', m') = (aa', am' + a'm).$$

上述两个概念导子与平方零扩张有如下的联系. 固定一个 A 上的 k-代数 B, 我们有

$$\mathrm{Hom}_{A\text{上的}k\text{代数}}(BA \ltimes M) \cong \mathrm{Der}_k(B, M) \cong \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/k}, M) \cong \mathrm{Hom}_A(\Omega_{B/k} \otimes_B A, M).$$

André-Quillen 上同调群定义为 $\mathrm{Der}_k(A, M)$ 的导出函子. 我们不展开这个定义, 仅粗略给一个直观解释, 为什么问题 14.1.1的阻碍元素在适当的 André-Quillen 上同调群中.

我们从答案出发, 假设有一个 E_∞-环谱 X, Igor 证明了 Postnikov 塔可以在 E_∞-环谱范畴中构造, 其中递归的步骤可以由下述平方零扩张给出

$$\begin{tikzcd}
X[n+1] \arrow[r] \arrow[d] & H\pi_0 X \arrow[d] \\
X[n] \arrow[r] & \Sigma^{n+2} H\pi_{n+1} X \vee H\pi_0 X.
\end{tikzcd}$$

详细说明参见 [1, Section 8].

由此可见, 平方零扩张自然出现在 E_∞-环谱的 Postnikov 塔的递归构造中. 与之相关的 André-Quillen 上同调群出现在 Goerss–Hopkins 阻碍理论的塔的递归构造中就并不令人意外了.

14.5. Morava E-理论

在本讲的最后, 我们简要介绍 Morava E-理论和 Goerss–Hopkins 阻碍理论如何说明是 E_∞-环谱.

色展同伦论提供一个理论框架, 对于每一个给定的素数 p, 有一系列 2 周期的上同调理论: Morava E-理论 E_n. 使得对于一个有限谱, p-局部化谱 X, 可以进一步对于这些上同调理论 E_n 做 Bousfiled 局部化 (记为 $L_{E_n}X$). 像从 p-局部化和有理局部化可以恢复一个有限生成交换群一样, p-局部化有限谱 X 也可以如下从 $\{L_{E_n}X\}$ 恢复 (Hopkins 和 Ravenel 证明的色展同伦收敛定理)

$$X \simeq \mathrm{holim}(\cdots L_{E_2}X \to L_{E_1}X \to L_{E_0}X).$$

进一步 $L_{E_{n+1}}X$ 可以通过 $L_{E_n}X$ 和 $L_{Kn+1}X$ 构造, 其中 $K(n+1)$ 是 Morava K-理论. 与这里的联系是, Devinatz 和 Hopkins 证明了 $K(n)$ 局部化球面 $L_{K(n)}S^0$ 等价于 Morava E-理论 E_n 在 Morava 稳定群 $\mathbb{G}_n$ 作用下的同伦不动点 $E_n^{h\mathbb{G}_n}$. 故而, 说明 Morava E-理论 E_n 是 E_∞-环谱, 并且其上 Morava 稳定群 $\mathbb{G}_n$ 的作用是 E_∞-作用是非常重要的问题.

我们简要说明这一情形下可能阻碍所在的群全部是平凡的大致原因.

(1) 从局部完备环 E_n 化简到其剩余域 k 的情形;

(2) 证明这时的余切复形是平凡的，从而其相应的 André–Quillen 同调平凡.

从而, 可能阻碍元素必然平凡, 由 Goerss–Hopkins 阻碍理论知存在 E_∞-环谱 E_n 作为 Morava E-理论.

参考文献

[1] Maria Basterra. André–Quillen cohomology of commutative s-algebras. Journal of pure and applied algebra, 144(2):111–143, 1999.

[2] Christopher L. Douglas, John Francis, André G. Henriques, and Michael A. Hill, editors. Topological modular forms, volume 201 of Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.

[3] P. G. Goerss and M. J. Hopkins. Moduli spaces of commutative ring spectra. In Structured ring spectra, volume 315 of London Math. Soc. Lecture Note Ser., pages 151–200. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[4] P. G. Goerss and M. J. Hopkins. Moduli problems for structured ring spectra. preprint, 1086, 2005.

[5] Jacob Lurie and Michael Hopkins. On Brauer groups of Lubin-Tate spectra i, 2017.

[6] Piotr Pstragowski and Paul VanKoughnett. Abstract Goerss-Hopkins theory. Adv. Math., 395:Paper No. 108098, 51, 2022.

[7] Hirosi Toda. On spectra realizing exterior parts of the Steenrod algebra. Topology, 10(1):53–65, 1971.

CHAPTER 15

无穷回路理论的等变推广

段志鹏

本讲的主要参考文献为 [7],[2].

这一讲主要介绍等变同论理论并介绍无穷回路理论在等变情形的的推广. 在本次讲座中我们始终假定群 G 是一个有限群而拓扑空间指的是紧致生成的弱 Hausdorff 空间.

15.1. 等变同伦理论

定义 15.1.1. (1) 一个拓扑空间 X 称为一个 G-空间如果 X 上带有连续的 G-作用.

(2) 对于给定的两个 G-空间 X, Y, 他们之间的一个连续映射 $f : X \to Y$ 称为 G-等变如果对于 X 中任意一点 x 和任意群元素 g 我们均有

$$f(gx) = gf(x).$$

我们将 X, Y 之间所有 G-等变映射组成的集合记为 $\mathrm{Hom}^G(X, Y)$.

例子 15.1.2. 对于任意两个 G-空间我们可以构造如下两个自然的 G-空间:

- $X \times Y$: 他们的 G-作用由对角作用给出, i.e., $g(x, y) = (gx, gy)$;
- $\mathrm{Hom}(X, Y)$: 他们的 G-作用由共轭作用给出, i.e., $(g \cdot f)(x) = gf(g^{-1}x)$. 且 $\mathrm{Hom}^G(X, Y)$ 为 $\mathrm{Hom}(X, Y)$ 在此作用下的 G-不动点.

定义 15.1.3. 令 π^G 为所有的 G-空间和他们之间的 G-等变映射所组成的范畴.

性质 15.1.4. 范畴 π^G 和 Cartesian 乘积 $\times$ 与单点 $*$ 组成了一个对称幺半范畴.

注 15.1.5. 我们有由所有带基点的 G 空间组成的范畴 π^G_*, 其中这个基点在群 G 的作用下是不动的. 此时, 范畴 π^G_* 和压挤乘积 (smash product) $\wedge$ 以及 S^0 组成了一个对称幺半范畴.

对于一个 G-空间, 我们可以考虑群 G 的任意子群 H 在 X 上的作用, 这定义了一个从 π^G 到 π^H 的一个函子 Res^G_H 称为限制 (restriction) 函子. 相反的, 对于一个 H-空间 X 我们可以构造两个 G-空间 $G \times_H X$ 和 $\mathrm{Hom}^H(G, X)$. 这两个构造分别给出了两个从 π^H 到 π^G 的函子 Ind^G_H 和 CoInd^G_H. 不难验证, 这两个函子分别是限制函子的左伴随函子和右伴随函子.

注 15.1.6. 对于带基点的空间组成的范畴中上述两个函子的构造分别可以写为 $G_+ \wedge_H X$ 和 $\mathrm{Hom}^H(G_+, X)$, 其中 G_+ 是由群 G 并上一个在 G 作用下不动的基点 $*$.

在非等变情形下我们知道 CW-复形是拓扑空间的 Quillen 模型范畴中的双纤维对象 (fibrant and cofibrant object), 在同伦论中具有良好的性质. 在等变情形中我们有如下的自然推广.

定义 15.1.7. 一个 G-CW 复形 X 是由如下一系列 G-空间 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的合集组成

$$\varnothing = X^{-1} \subset X^0 \subset X^1 \subset \cdots \subset \bigcup_i X^i = X.$$

其中 X_0 是一个离散的 G-集合, i.e, X_0 由一系列 G-轨道 G/H_i 的非交并构成. 而空间 X_{n+1} 是通过如下的推出 (push out) 图表将 G-包腔和空间 X_n 粘在一起:

$$\begin{tikzcd} \coprod_i G/H_i \times S^n \arrow[r] \arrow[d] & X_n \arrow[d] \\ \coprod_i G/H_i \times D^{n+1} \arrow[r] & X_{n+1}. \end{tikzcd}$$

G-CW 复形的拓扑和非等变情形的定义一致.

注 15.1.8. (1) 在以上定义中球面 S^n 和圆盘 D^{n+1} 带有平凡的 G-作用;

(2) 我们也可以类似定义带基点的 CW-复形.

例子 15.1.9. 令 $G = C_2$, σ 是 C_2 的符号表示 (sign representation). 则该一维表示的一点紧致化 S^σ 有如下的 C_2-CW 结构:

- $X_0 = C_2/C_2\{a\} \sqcup C_2/C_2\{b\}$;
- $X_1 = C_2 \times D^1\{e\}$.

其中粘接映射为一维包腔 e 的端点的 C_2 轨道分别粘到点 $\{a\}$ 和 $\{b\}$.

在非等变情形中, 经典的 Whitehead 定理告诉我们 CW-复形之间的弱同伦等价就是同伦等价. 我们将这个结论推广到 G-等变情形中. 我们首先介绍一些基本概念.

定义 15.1.10. 给定一个带有基点的 G-空间 X 和 G 的一个子群 H, X 的 H-等变 n-阶同伦群可以定义为

$$\pi_n^H X := [G/H_+ \wedge S^n, X]^G \cong \pi_n X^H.$$

定义 15.1.11. 我们称一个 G-等变映射 $f : X \to Y$ 是一个 G-弱同伦等价 (G-weak equivalence) 如果对于 G 的任意子群 H, f 诱导的在不动点上的映射 $f^H : X^H \to Y^H$ 是一个弱同伦等价, i.e., 对于 X^H 上任取的基点 x_0 和任意 $* \in \mathbb{N}$, f^H 诱导的同伦群上的同态是一个同构.

$$f_*^H : \pi_* X^H \xrightarrow{\cong} \pi_* Y^H.$$

定理 15.1.12. G-CW 复形之间的 G-弱同伦等价是一个 G-同伦等价.

证明. 定理的证明和非等变情形类似, 可以参考 [7, Chapter I]. □

定义 15.1.13. (1) 群 G 的轨道范畴 O_G 是范畴 π^G 中由所有陪集 G/H 所组成的满子范畴，其中 H 遍历 G 的所有子群.

(2) 群 G 的一个系数系统 M 是一个函子:

$$M : O_G^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$$

例子 15.1.14. 令 X 是一个 G-空间. 当 $n \geq 2$ 时, X 的同伦群

$$\underline{\pi}_n(X) : O_G^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$$

是一个系数系统. 其中 $\underline{\pi}_n(X)(G/H) := \pi_n(x^H)$.

在非等变情形中，给定一个 Abel 群 A 和一个正整数 n (我们允许当 $n = 1$ 时 A 只是一个群), 我们有由如下同伦群所刻画的 Eilenberg-Maclane 空间 $K(A, n)$:

$$\pi_*(K(A, n)) = \begin{cases} A & * = n; \\ 0 & * \neq n. \end{cases}$$

在等变情形下我们有对应的等变 Eilenberg-Maclane 空间.

定理 15.1.15. 对于每一个系数系统 M (我们允许 M 在 $n = 1$ 时的取值在一般的群范畴), 我们有一个 G-空间 $K(M, n)$，其同伦群作为一个系数系统满足如下性质:

$$\underline{\pi}_*(K(M, n)) = \begin{cases} M & * = n; \\ 0 & * \neq n. \end{cases}$$

和非等变情形类似，一个满足适当条件的 G-CW 复形 X 有一个对应的 Postnikov 塔, 其中塔之间的纤维映射的纤维都是同伦群对应的等变 Eilenberg-Maclane 空间. 具体细节可以参考 [7, Chapter 2].

15.2. 等变稳定同伦理论

在本节中我们简要介绍等变稳定同伦理论. 稳定同伦范畴的研究对象为谱 (spectra), 我们可以将这个概念推广到等变情形中. 在本节中，有限群 G 所有的表示都是有限维实表示.

定义 15.2.1. (1) 一个 G-预谱 (pre-spectrum) X 包含以下对象. 对于任意的一个 G-表示 V 我们有带基点的 G-空间 $X(V)$ 且对于任意两个表示 $V \subset W$ 我们有如下的 G-等变映射称为结构映射

$$\sigma_{V,W} : \Sigma^{W-V} \to X(W),$$

其中 $W - V$ 表示 V 在 W 中的正交补. 这些结构映射将满足如下条件:

- 当 $V = W$ 时, $\sigma_{V,V} = \mathrm{id}$,
- 对于任意表示 $V \subset W \subset Z$ 我们有以下交换图表:

$$\begin{tikzcd} \Sigma^{Z-W} \wedge \Sigma^{W-V} \wedge X(V) \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma^{Z-W} \wedge X(W) \arrow[d] \\ \Sigma^{Z-V} \wedge X(V) \arrow[r] & X(Z) \end{tikzcd}$$

(2) 两个 G-预谱之间的态射 $f : X \to Y$ 包含一系列保基点的映射 $f(V) : X(V) \to Y(V)$. 这个映射会与 X, Y 的结构映射交换. 我们将由所有 G-预谱所组成的范畴记为 $\mathbf{PSp}^G$.

(3) 一个 G-预谱称为一个 G-谱如果结构映射的伴随映射

$$\tilde{\sigma}_{V,W} : X(V) \to \Omega^{W-V} X(W),$$

是一个同胚. 我们将所有 G-谱组成的范畴记为 $\mathbf{Sp}^G$.

注 15.2.2. 在本定义中我们隐含着使用了由所有不可约 G-表示所组成的完备 G-宇宙 (G-universe) $\mathcal{U}$[7, Chapter XII].

和预层与层之间的关系类似, 从 $\mathbf{PSp}^G$ 到 $\mathbf{Sp}^G$ 的遗忘函子 (forgetful functor) U 拥有一个从 $\mathbf{Sp}^G$ 到 $\mathbf{PSp}^G$ 的左伴随函子 L.

例子 15.2.3. G-预谱的一个重要来源是带基点的 G-空间. 令 $X \in \pi_*^G$, 我们定义 X 的悬浮谱 (suspension spectrum) $\Sigma^\infty X$ 如下. 对于任意的 G-表示 V, 我们定义 $\Sigma^\infty X(V) := \Sigma^V X = S^V \wedge X$. 而且对于任意两个 G-表示 $V \subset W$, 结构映射定义为

$$\sigma_{V,W} : \Sigma^{W-V} \wedge S^V \wedge X \to S^W \wedge X.$$

特别的, 当 $X = S^0$ 时, 对应的悬浮谱是等变球谱也记为 S^0.

和稳定同伦理论类似, 在由 G-预谱或者 G-谱所组成的范畴中建立一个点集层面上的幺半结构是困难的. 我们希望能有一个由 G-谱组成的一个满足以下性质的对称幺半范畴 C, 这个范畴与 π_*^G 存在一个伴随对 (adjoint pair) $(\Sigma^\infty, \Omega^\infty)$

$$\Sigma^\infty : \pi_*^G \rightleftarrows C : \Omega^\infty.$$

且这对伴随函子满足以下三个性质:

(1) Ω^∞ 是一个对称幺半函子;

(2) $\Sigma^\infty S^0$ 是 C 中的一个单位;

(3) 对于伴随对的单位映射 $\eta : X \to \Omega^\infty \Sigma^\infty X$, 存在一个弱等价 $f : \Omega^\infty \Sigma^\infty X \to QX$ 使得如下图表交换

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & \Omega^\infty \Sigma^\infty X \arrow[d] \\ & QX \end{tikzcd}$$

其中 $QX=\operatorname*{colim}_{V\in\mathcal{U}}\Omega^V\Sigma^V X$.

但 Lewis 的定理 [5, Theorem 1.1] 告诉我们同时满足这些“自然”性质的范畴是不存在的. 退而求其次，在点集层面上，数学家建立了如下几种可以满足不同目的的模型.

(1) Elmendorf-Kriz-Mandell-May 构造了 S-模范畴 (S-modules)[1];
(2) Mandell–May–Schewede–Shipley 构造了正交谱范畴 (orthogoal spectra)[6];
(3) Hovey–Shipley–Smith 构造了对称谱范畴 (symmetric spectra)[4];

这三个模型本质上都是 Quillen 等价的. 在本讲接下来的内容中我们将不会涉及到任意一种具体的模型. 我们接下来所有的构造都是在 G-预谱层面上.

定义 15.2.4. 令 X 为一个 G-预谱, 对于群 G 的每一个子群 H 我们定义如下同伦群:

$$\pi_q^H X:=\begin{cases}\operatorname*{colim}_{V\in\mathcal{U}_H}\pi_q^H\Omega^V X(V);q\geq 0\\ \operatorname*{colim}_{V\in\mathcal{U}_H}\pi_0^H\Omega^V X(V\oplus\mathbb{R}^{-q});q<0\end{cases}$$

其中 $\mathcal{U}_H=\operatorname{Res}^G_H\mathcal{U}$.

注 15.2.5. 和非稳定的情形类似, 预谱 X 在不同子群 H 下的同伦群会组成一个系数系统 $\underline{\pi}_*X$.

在等变同伦论中, 除了整数指标的同伦群的定义以外, 我们还有实表示环 $RO(G)$-指标的同伦群. $RO(G)$ 是由所有的有限维 G-表示所组成的幺半群的 Grothendieck 群. 给定任意一个有限维 G-表示 V, 我们有如下定义

$$\pi_V^G X:=\operatorname*{colim}_{W\in\mathcal{U}}\pi_0^G\Omega^{V\oplus W}X(W).$$

在等变同伦论中，不仅同伦群有 $RO(G)$-指标, 各种等变同调理论 (例如 Bredon 同调) 也有类似的 $RO(G)$ 指标. 我们发现即使对于一些具有简单的同伦群或者 Bredon 同调群的谱而言, 其上的 $RO(G)$-指标的计算也会非常复杂. 但这些 $RO(G)$-指标所给出的信息在很多情形有重要应用. 例如在 Hill–Hopkins–Ravenel 解决 Kervaire 不变量得文章中 [3], 检测谱 Ω 的整数周期的计算就是由 $RO(C_8)$-周期的计算信息得出.

定义 15.2.6. G-预谱 X,Y 之间的态射 $f:X\to Y$ 称为 G-等变稳定等价如果其在任意子群 H 下的同态 $\pi_*^H X\to\pi_*^H Y$ 均为同构. 令 $\mathcal{W}$ 为所有 G-等变稳定等价映射组成的类, G-等变同伦范畴 $\operatorname{Ho}(\mathbf{PSp}^G)$ 定义为 $\mathbf{PSp}^G[\mathcal{W}^{-1}]$.

和 G-空间的情形类似, 从 $\mathbf{PSp}^G$ 到 $\mathbf{PSp}^H$ 的限制函子 Res^G_H 同时拥有一个左伴随函子 Ind^G_H 和右伴随函子 CoInd^G_H. 这两个函子的定义分别为 $\operatorname{Ind}^G_H X(V)=G_+\wedge_H X(V):=G_+\wedge_H X(\operatorname{Res}^G_H V)$ 和 $\operatorname{CoInd}^G_H X(V)=\operatorname{Hom}^H(G_+,X)(V):=\operatorname{Hom}^H(G_+,X(\operatorname{Res}^G_H V))$.

但是和 G-空间的情形不同, 在稳定情形下, 这两个函子在等变同伦范畴中是等价的.

定理 15.2.7 (WirthMüller). 对于一个 H-预谱 X, 存在一个 G-等变稳定等价映射 $\Phi : \mathrm{Ind}_H^G X \xrightarrow{\sim} \mathrm{CoInd}_H^G X$.

证明. 参见 [7, Chapter XVI] □

注 15.2.8. 在代数中, 我们知道当 G 为有限群时, 从 $H_0(G, M)$ 到 $H^0(G, M)$ 的 norm 映射是同构映射. 定理 15.2.7可以看作此经典代数结论在等变稳定同伦上的推广.

作为定理 15.2.7的一个重要应用, 我们可以在同伦群上定义一个和限制映射 Res_H^G 方向相反的同态 Tr_H^G 称为转移映射 (transfer map), 这个方向的同态映射在非稳定的情形是不存在的.

$$\mathrm{Tr}_H^G : \pi_*^H X \simeq \pi_*^G \mathrm{CoInd}_H^G X \xrightarrow{\simeq} \pi_*^G \mathrm{Ind}_H^G X \xrightarrow{\pi_*^G(\mathrm{act})} \pi_*^G X,$$

其中映射 $\mathrm{act} : \mathrm{Ind}_H^G X \to X$ 的定义就是群 G 在空间 $X(V)$ 上的作用. 这些在不同子群层面的转移映射和之前由同伦群所给出的系数系统中的结构映射如限制映射, 共轭映射等组合在一起可以给出一个新的代数结构称为 Mackey 函子, 该函子在等变同伦的相关计算中有着重要作用.

15.3. 无穷回路理论的等变推广

我们将在本节简要介绍在等变情形下的无穷回路机器. 我们首先介绍等变 E_∞ 算单子.

定义 15.3.1. 一个等变 E_∞-算单子 C_G 是定义在范畴 T^G 上的一个算单子,i.e, 对于任意 j, $C(j)$ 是一个 G-空间; 且满足对于任意 $j \geq 1$, $C(j)$ 是一个万有 (G, Σ_j) 主丛. 具体来说, 对于群 $G \times \Sigma_j$ 的一个子群 Λ 而言, 如果 $\Lambda \cap \Sigma = \{e\}$ 则不动点 $C(j)^\Lambda$ 是可缩的; 反之不动点是一个空集.

对于一个给定的等变 E_∞-算单子 C_G, 我们称其在 T^G 上的代数为 E_∞ G-空间. 经典的 E_∞-算单子例如 Steiner 算单子和线性等距算单子等都有对应的等变推广, 具体可以参考 [2].

我们知道经典的无穷回路机器会给予一个 E_∞-空间 X 一个连通谱 Z 使得 $\Omega^\infty Z$ 是 X 的弱群化, 而且这个无穷回路机器可以推广到乘法结构和 (双) 置换范畴中. 在等变同伦中我们也有类似的等变无穷回路机器, 我们在此给予简要介绍.

对于任意一个 G-表示 V, 等变 E_∞-算单子 C_G 和带有其作用的 E_∞ G-空间 X, 令 $C_V = C_G \times \mathcal{K}_V$ 且 $\mathbb{C}_V$ 是算单子 C_V 对应的单子. 空间 X 可以通过投影映射 $C_V \to C_G$ 是为一个 C_V-空间.

定理 15.3.2. (等变逼近定理) 对于任意 G-表示 V, 伴随对 (Σ^V, Ω^V) 会诱导一个单子态射 $\alpha : \mathbb{C}_V \to \Sigma^V \Omega^V$ 使得对于任意 G-空间 X, 当 V 包含一个平凡表示 $\mathbb{R}$ 时, 映射 α_X 是一个弱群化映射.

基于如上定理我们将构造一个 G-预谱 E_GX 如下. 对于一个 G-表示 V, 令

$$E_GX(V) := B(\Sigma^V, \mathbb{C}_V, X).$$

对于 $V \subset W$, 我们有诱导的单子态射 $\mathbb{C}_V \to \mathbb{C}_W$, 此态射可以构造如下的结构映射:

$$\sigma_{V,W} : \Sigma^{W-V} E_GX(V) \cong B(\Sigma^W, \mathbb{C}_V, X) \to B(\Sigma^W, \mathbb{C}_V, X) \cong E_GX(W).$$

可以验证此构造 E_GX 是一个 G-预谱[1]. 和经典情况类似我们有如下映射

$$X \xleftarrow{\epsilon} B(\mathbb{C}_V, \mathbb{C}_V, X) \xrightarrow{B(\alpha,id,id)} B(\Omega^V\Sigma^V, \mathbb{C}_V, X) \xrightarrow{\zeta} \Omega^V B(\Sigma^V, \mathbb{C}_V, X),$$

其中 ϵ 是 G-同伦等价映射; 当 V 包含 $\mathbb{R}$ 时,$B(\alpha, id, id)$ 是一个弱群化映射; 映射 ζ 是一个 G-弱同伦等价映射. 所以 E_G 是在等变同伦情形中由算单子方法所构造的等变无穷回路机器.

注 15.3.3. (1) 本节中的等变无穷回路机器也可以推广到置换 G-范畴中, 具体细节可以参考 [2];

(2) 关于具有乘法结构的等变无穷回路机器也是存在的, 但是目前出版的文献中没有很详尽的记载.

参考文献

[1] A. D. Elmendorf, I. Kriz, M. A. Mandell, and J. P. May. Rings, modules, and algebras in stable homotopy theory, volume 47 of Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. With an appendix by M. Cole.

[2] Bertrand J. Guillou and J. Peter May. Equivariant iterated loop space theory and permutative G-categories. Algebr. Geom. Topol., 17(6):3259–3339, 2017.

[3] M. A. Hill, M. J. Hopkins, and D. C. Ravenel. On the nonexistence of elements of Kervaire invariant one. Ann. Math. (2), 184(1):1–262, 2016.

[4] Mark Hovey, Brooke Shipley, and Jeff Smith. Symmetric spectra. J. Amer. Math. Soc., 13(1):149–208, 2000.

[5] L. Gaunce Lewis, Jr. Is there a convenient category of spectra? J. Pure Appl. Algebra, 73(3):233–246, 1991.

[6] MA Mandell, JP May, S Schwede, and B Shipley. Diagram spaces, diagram spectra, and fsp’s. preprint, 1998.

[7] J. P. May. Equivariant homotopy and cohomology theory. Dedicated to the memory of Robert J. Piacenza, volume 91 of Reg. Conf. Ser. Math. Providence, RI: AMS, American Mathematical Society, 1996.

[1] 此构造实际上是一个等变正交谱 [2].

CHAPTER 16

Atiyah–Segal **完备化定理**

李谷川

16.1. **导言**

我们前面讨论了等变情形的无穷回路空间的结构，和相应的 $G - E_\infty$-算单子. 等变交换环谱的例子，如等变拓扑 K-理论，等变复配变理论，之前就有很多重要的研究. 原本的题目包含了 Atiyah–Segal 完备化定理, Segal 猜想, 等变配边理论和偶性猜想 (the evenness conjecture) 等一系列重要的工作. Peter May 教授在这一系列问题中做出了许多重要贡献. 由于时间原因本讲只简述 Atiyah–Segal 完备化定理的证明. 我们采用 Adams, Haeberly, Jackowski, 和 Peter May[1] 的方法, 参考 Mathew 的博客文章 [9] 和 Ding 在芝加哥大学的本科生科研 (REU, Research Experiences for Undergraduates program) 文章 [5].

我们先简单说明上述定理之间的联系, 这一部分推荐参考 Carlsson 的文章 [3] 和 Hilman 的硕士论文开头的历史文献回顾部分 [10, A historical context].

在 1961 年的文章 [2] 中, Atiyah 计算了

$$R(G)^\wedge_I \cong KU^0(BG).$$

其中 $R(G)$ 是有限群 G 的复表示环, I 是增广理想 (augmentation ideal, 即映射 $R(G) \to \mathbb{C}$ 的核). 如果将 $R(G)$ 换为 Burnside 环 $A(G)$, 即球面的 0 维等变同伦群. 则上述定理的类比是著名的 Segal's Burnside 环猜想, 即

$$A(G)^\wedge_I \cong \pi^0(BG).$$

如果从等变角度考虑上述问题, 将指标 0 加强到一般指标, 可以陈述如下: 由 BG_+ 到 S^0 的映射诱导的映射 (完备化后) 是同构.

$$KU^*_G(S^0)^\wedge_I \to KU^*_G(EG_+),$$

$$\pi^*_G(S^0)^\wedge_I \to \pi^*_G(EG_+).$$

其中 Segal 猜想的一个几何版本的叙述是映射

$$(S_G)^G \to (S_G)^{hG}$$

是完备化. 非稳定情形是著名的 Sullivan 猜想. 另一个推广方向是对其它的无穷环谱有没有类似的结论. Löffler [8], Comezana 和 Peter May [4] 证明了类似的结论对等变复配边理论 MU_G 也成立. Greenlees 和 May 在 G-无穷环谱的语

言基础上对类似结论进行了讨论, 特别的适用于 MU_G 的情形 [6]. 其中关于从复配边理论构造的 Morava K-理论的偶性猜想被 Kriz 证否 [7].

本讲概述 Atiyah–Segal 完备化定理的证明.

定理 16.1.1. Atiyah–Segal 完备化定理

$$R(G)^\wedge_I \cong KU^0(BG).$$

16.2. 基本概念

我们先定义拓扑 K 群. 拓扑 K-理论是比较好的空间 (紧豪斯多夫空间) 范畴上的一种广义上同调理论.

定义 16.2.1. 称向量丛 E 和 E' 为稳定等价的当且仅当有平凡向量从 $[n]$, $[m]$, 和向量从同构

$$E \oplus [n] \cong E' \oplus [m].$$

定义 16.2.2. 对一个紧豪斯多夫空间 X, $K^0(X)$ 是 X 上向量丛的稳定等价类在直和下构成的交换幺半群的格罗滕迪克群完备化 (Grothendieck group completion).

类似地, 对于紧李群 G, 我们可以定义等变的向量丛和拓扑 K 群如下.

定义 16.2.3. 一个 G 等变空间 X 上的 G-等变 (复) 向量丛是一个 (复) 向量丛 $p\colon E \to X$, 满足 p 是 G-等变映射, 且对于任意 $g \in G$, $x \in X$, $g\colon E_x \to E_{gx}$ 是线性空间同构. 这里 E_x 是向量丛 p 在 x 处上的向量空间.

定义 16.2.4. $K^0_G(X)$ 是 X 上 G-等变向量丛的稳定等价类在直和下构成的交换幺半群的格罗滕迪克群完备化 (Grothendieck group completion).

练习 16.2.5. 一点的 G 等变拓扑 K 群, 即一点上的等变向量丛的等价类的群完备化, 就是群 G 的复表示环 $R(G)$, 即

$$K^0_G(*) = R(G).$$

16.3. 证明概述

首先，我们将 Atiyah–Segal 完备化定理叙述成一个关于等变拓扑 K-理论 K_G 的命题. 我们需要用到如下事实: 对于有自由 G-作用的空间 X, 我们有

$$K^*_G(X) \cong K^*(X/G).$$

特别的, $K^0_G(EG) \cong K^0(BG)$. 这样定理 16.1.1可以叙述为

$$(K^0_G(*))^\wedge_I \cong K^0_G(EG).$$

注意到等变映射 $EG \to *$ 诱导了 K^0_G 上同调群上的映射

$$K^0_G(*) \to K^0_G(EG).$$

为了证明上述映射是对于增广理想 I 的完备化, 我们采用如下策略. 考虑余纤维列 (cofiber sequence)

$$EG \to S^0 \to \widetilde{EG}.$$

我们希望证明

(1) 函子 $(K_G^*(-))_I^\wedge$ 可以像上同调理论一样, 从余纤维列得到长正和列;
(2) $(K_G^*(\widetilde{EG}))_I^\wedge$ 是平凡的;
(3) $(K_G^*(EG))_I^\wedge = K_G^*(EG)$.

注意到 (1) 和 (2) 说明 $(K_G^0(*))_I^\wedge \to (K_G^0(EG))_I^\wedge$ 是同构, 结合 (3) 就可以完成证明. 这里 (1) 由于 $(-)_I^\wedge$ 不是正合函子, 所以并不是真的成立. (2) 是这个证明中需要的具体计算. (3) 是相对形式化的证明。

我们解决 (1) 并不成立的方法是注意到如果只考虑诺特环上的有限生成模, 那么完备化 $(-)_I^\wedge$ 是正合的. 对于 G-CW 复形 X, 这里我们将 $K_G^*(X)$ 视作一个投射群 (progroup), 即 $\{K_G^*(X_\alpha)\}$, 其中 X_α 遍历所有 X 有限 G-CW 子复形. 注意到所有空间可以由有限空间在适当余极限下生成. 故而这样函子 $(K_G^*(-))_I^\wedge$ 可以看作从有限空间到投射交换群的函子 (详见 Mathew 的博客 [9]). 注意到在投射范畴中的态射定义为

$$\mathrm{Hom}(\{A_\alpha\}, \{B_\beta\}) = \lim_\beta \operatorname*{colim}_\alpha \mathrm{Hom}(A_\alpha, B_\beta).$$

可以验证作为到投射交换群的函子, $(K_G^*(-))_I^\wedge$ 像上同调理论一样可以把余纤维列映射到投射交换群的正合列.

对于 (2), 我们证明下述这个更一般的定理.

定理 16.3.1. *如果 X 是一个 G-CW 复形, 满足遗忘 G 作用后是可缩的, 则*

$$(\tilde{K}_G^*(X))_I^\wedge = 0.$$

这里 $\tilde{K}_G^*(X)$ 是约化的 K_G 上同调群. 特别的, $\widetilde{EG}$ 满足条件, 从而 (2) 是上述定理的推论. 我们简要说明证明的原理, 严格的证明可以参见 Ding 的 REU 文章 [5]. 采用递归证明, 假设上述定理对紧李群 G 的所有真子群都成立, 我们证明该定理对于 G 自己也成立, 从而完成证明. 这个假设可以处理形如 $(G/H)_+ \wedge S^n$ 的胞腔, 从而我们可以将 X 约化到特殊情形: 形如 S^V, 其中 V 是只有原点是不动点的 G-表示. 由于条件遗忘 G 作用后, S^V 是可缩空间, 可知 V 是无穷维表示, 其遗忘 G 作用后是 S^∞. 只需对 S^V 这个情形证明, 即可完成递归步骤.

这样化归为计算 $(\tilde{K}_G^*(S^V))_I^\wedge = 0$. 这是证明中的实质计算. 取 V 一个有限维 G 表示的逼近

$$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V$$

给出一串空间 $S^{V_0} \subset S^{V_1} \subset S^{V_2} \subset \cdots \subset S^V$. 注意到对于每一个 V_n, 我们有 Thom 同构 $\tilde{K}_G(S^{V_n}) \cong \tilde{K}_G(S^0)$. 关键的观察是注意到 $\tilde{K}_G(S^{V_{n+1}}) \to \tilde{K}_G(S^{V_n})$ 的映射是乘

V_{n+1}/V_n 对应的欧拉类 a_{V_{n+1}/V_n}, 而这个元素是在增广理想 I 中的. 我们跳过细节, 指出这一事实可以论证在投射范畴中 $\{\tilde{K}_G(S^{V_n})\}$ 在对 I 的完备化下是平凡的. 注意这里的平凡是在投射范畴中平凡, 否则并不成立. 这样我们解释了 (2) 中需要的计算.

对于 (3), 我们简述其原因. 回忆 $K_G^*(X)$ 作为一个投射群 (progroup) 定义为 $\{K_G^*(X_\alpha)\}$, 其中 X_α 遍历所有 X 有限 G-CW 子复形. 从投射群可以通过取极限得到通常的群. 当 X 是 EG 时, 我们计算极限时可以取 X_α 为一些列 G-自由的有限子复形 X_n, 即 X_n^G 为空集. 观察到这时对于足够大的 k, 我们有 $I^k K^*(X_n/G) = 0$, 特别的 $K^*(X_n/G) = (K^*(X_n/G))_I^\wedge$. 从而, (3) 可以证明如下

$$(K_G(EG))_I^\wedge = \lim(K_G(X_n))_I^\wedge = \lim(K^*(X_n/G))_I^\wedge = \lim K^*(X_n/G) = K_G(EG).$$

如前所述, (1), (2), (3) 完成了定理16.1.1的证明.

参考文献

[1] JF Adams, J-P Haeberly, S Jackowski, and JP May. A generalization of the Atiyah-Segal completion theorem. Topology, 27(1):1–6, 1988.

[2] Michael F Atiyah. Characters and cohomology of finite groups. Publications Mathématiques de l'IHÉS, 9:23–64, 1961.

[3] Gunnar Carlsson. Equivariant stable homotopy and segal's burnside ring conjecture. Annals of Mathematics, pages 189–224, 1984.

[4] Gustavo Comezana and J Peter May. A completion theorem in complex cobordism. In CBMS Regional conference series in math, volume 91, pages 327–332, 1996.

[5] Lihuang Ding. A simple proof of the Atiyah-Segal completion theorem. Chicago University Research Experiences for Undergraduates program paper. http://math.uchicago.edu/ may/REU2020/REUPapers/Ding,Lihuang.pdf.

[6] John PC Greenlees and J Peter May. Localization and completion theorems for mu-module spectra. Annals of Mathematics, pages 509–544, 1997.

[7] Igor Kriz. Morava K-theory of classifying spaces: some calculations. Topology, 36(6):1247–1273, 1997.

[8] Peter Löffler. Bordismengruppen unitärer Torusmannigfaltigkeiten. Manuscripta Math., 12:307–327, 1974.

[9] Akhil Mathew. The atiyah-segal completion theorem. Blog: Climbing Mount Bourbaki. https://amathew.wordpress.com/2012/07/26/the-atiyah-segal-completion-theorem/.

[10] Kaif Muhammad Borhan Tan. The Segal conjecture for finite groups. Master thesis, Copenhagen University.