Projektna naloga

PROBLEM NA NAPAKE ODPORNE METRIčNE DIMENZIJE

Anamarija Potokar, Hana Samsa

Mentorja: doc. dr. Janoš Vidali,
prof. dr. Riste Škrekovski

Fakulteta za matematiko in fiziko

december 2024

1 Na napake odporna metrična dimenzija

Množica $S \in V$ v grafu G je razrešljiva, če za vsak par vozlišč $x, y \in V(G)$ ostaja vozlišče $s \in S$, da velja $d(x,s) \neq d(y,s)$. Rečemo, da sta x in y razrešeni z vozliščem s. Množica S je odporna na napake, če je $S \setminus \{v\}$ prav tako razrešljiva za vsak $v \in S$.

Metrična dimenzija neusmerjenega in povezanega grafa $G = (V, E)$ je najmanjša podmnožica nabora vozlišč $S \subset V$ z lastnostjo, da so vsa vozlišča v V enolično določena z njihovimi razdaljami do vozlišč podmnožice S.

Na napake odporna metrična dimenzija grafa G, je velikost najmanjše razčlenujoče množice S, odporne na napake in jo označimo z $ftdim(G)$.

Naloga projektne naloge je bila, da s pomočjo celoštevilskega linearnega programa poiščemo grafe z $dim(G) = 2$ in $ftdim(G) = 5, 6, 7$ ali več. Pri tem se za manjše grafe, torej grafe z malo vozlišči, uporablja sistematično iskanje (ang. *systematic search*), za večje grafe pa metahevristični pristop (ang. *simulated annealing search*).

2 Celoštevilski linearni program

Imamo povezan in neusmerjen graf $G = (V, E)$, kjer je $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ množica vozlišč in $\mid E \mid = m$. Naj bo $d(u, v)$ najkrajša pot med vozliščema $u, v \in V$.

V naslednjem celoštevilskem lineearnem programu naj velja $1 \leq u < v \leq n$ in $1 \leq i < j \leq n$. Najprej definirajmo matriko koeficientov A. Spremenljivka x_i, definirana s predpisom (2) nam pove ali vozlišče i pripada množici S.

$$A_{(u,v),i} = \begin{cases} 1, d(u,i) \neq d(v,i) \\ 0, d(u,i) = d(v,i) \end{cases} \tag{1}$$

$$x_i = \begin{cases} 1, i \in S \\ 0, i \notin S \end{cases} \tag{2}$$

$$\min \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_{(u,v),i} \cdot x_i \geq 2, \ 1 \leq u < v \leq n \tag{4}$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \ 1 \leq i \leq n \tag{5}$$

Enačba (3) predstavlja najmanjšo podmnožico S. Enačba (4) pa nam da pogoj, da je poodmnožica S razrešljiva množica, odporna na napake. To pomeni, da če za vozlišči i velja $d(u, i) \neq d(v, i)$ in je hkrati $i \in S$ bo potem vsota enaka 2, kar pa je ravno to kar iščemo.

3 Potek dela

4 Koda

Komentirana koda je dostopna na povezavi.

5 Sistematično iskanje

V prvi fazi sva se iskanja ustreznih grafov z lastnostima dim(G)= 2 in ftdim(G) = 5, 6, 7 oziroma več, lotili tako, da sva za konstantno vrednost dim postopoma povečevali željeno ftdim in število vozlišč, za katerega iščemo ustrezne grafe. Najprej sva kodo preizkusili za vrednosti dim = 2 in ftdim = 4:

- na 4 vozliščih obstajata dva taka grafa, čas izvajanja kode je 0.04 sekunde,
- na 5 vozliščih obstaja 8 takih grafov, čas izvajanja kode je 0.11 sekunde,
- na 6 vozliščih obstaja 46 takih grafov, čas izvajanja kode je 0.69 sekunde,
- na 7 vozliščih obstaja 232 takih grafov, čas izvajanja kode je 7.19 sekund,
- na 8 vozliščih obstaja 1525 takih grafov, čas izvajanja kode je 2 minuti in 1 sekunda.

Nato sva se lotili iskanja odgovora na vprašanje naloge: za ftdim(G) = 5 sva najprej ugotovili, da za manj kot 7 vozlišč tak graf sploh ne obstaja. Na 7 vozliščih obstajata dva ustrezna grafa, katera je algoritem našel in izrisal v 5.96 sekundah:

Na 8 vozliščih obstaja že bistveno več grafov, za katere velja dim(G) = 2 in ftdim(G) = 5, in sicer 65, tudi koda pa v primerjavi z grafi na 7 vozliščih rabi veliko dlje časa, da se izvede; ustrezne grafe je poiskala in izrisala v 1 minuti in 58 sekundah. Primer nekaj takšnih grafov:

Pri iskanju in risanju takih grafov na 9 vozliščih se je koda po pol ure dela prenehala izvajati in ni našla vseh ustreznih grafov. Primer nekaj takšnih grafov:

Očitno se torej že pri ftdim=5 in 9 vozliščih koda ne izvede v sprejemljivem času. Preverili sva še, kako časovno zahtevno je iskanje grafov z dim = 2 in ftdim = 6, za kar je potrebnih najmanj 12 vozlišč; tudi ta koda se ni izvedla v normalnem času, zato sva za primere pri ftdim = 5 in več kot 8 vozlišč ter ftdim = 6, 7, ... grafe iskali s pomočjo metahevrističnih algoritmov.