

PROJEKTNA NALOGA

---

# PROBLEM NA NAPAKE ODPORNE METRIČNE DIMENZIJE

---

Anamarija Potokar, Hana Samsa

Mentorja: doc. dr. Janoš Vidali,  
prof. dr. Riste Škrekovski

Fakulteta za matematiko in fiziko

December 2024

---

# 1 Na napake odporna metrična dimenzija

Množica  $S \subseteq V$  v grafu  $G$  je razrešljiva, če za vsak par vozlišč  $x, y \in V(G)$  ostaja vozlišče  $s \in S$ , da velja  $d(x, s) \neq d(y, s)$ . Rečemo, da sta  $x$  in  $y$  razrešeni z vozliščem  $s$ . Množica  $S$  je odporna na napake, če je  $S \setminus \{v\}$  prav tako razrešljiva za vsak  $v \in S$ .

Metrična dimenzija neusmerjenega in povezanega grafa  $G = (V, E)$  je najmanjša podmnožica nabora vozlišč  $S \subset V$  z lastnostjo, da so vsa vozlišča v  $V$  enolično določena z njihovimi razdaljami do vozlišč podmnožice  $S$ .

Na napake odporna metrična dimenzija grafa  $G$ , je velikost najmanjše razčlenjujoče množice  $S$ , odporne na napake in jo označimo z  $ftdim(G)$ .

Naloga projektne naloge je bila, da s pomočjo celoštevilskega linearnega programa poiščemo grafe z  $dim(G) = 2$  in  $ftdim(G) = 5, 6, 7$  ali več. Pri tem se za manjše grafe, torej grafe z malo vozlišči, uporablja sistematično iskanje (ang. *systematic search*), za večje grafe pa metahevristični pristop (ang. *simulated annealing search*).

## 2 Celoštevski linearni program

Imamo povezan in neusmerjen graf  $G = (V, E)$ , kjer je  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  množica vozlišč in  $|E| = m$ . Naj bo  $d(u, v)$  najkrajša pot med vozliščema  $u, v \in V$ .

V naslednjem celoštevilskem linearnem programu naj velja  $1 \leq u < v \leq n$  in  $1 \leq i < j \leq n$ . Najprej definirajmo matriko koeficientov  $A$ . Spremenljivka  $x_i$ , definirana s predpisom (2) nam pove ali vozlišče  $i$  pripada množici  $S$ .

$$A_{(u,v),i} = \begin{cases} 1, d(u, i) \neq d(v, i) \\ 0, d(u, i) = d(v, i) \end{cases} \quad (1)$$

$$x_i = \begin{cases} 1, i \in S \\ 0, i \notin S \end{cases} \quad (2)$$

$$\min \sum_{i=1}^n x_i \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n A_{(u,v),i} \cdot x_i \geq 2, \quad 1 \leq u < v \leq n \quad (4)$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (5)$$

---

Enačba (3) predstavlja najmanjšo podmnožico  $S$ . Enačba (4) pa nam da pogoj, da je podmnožica  $S$  razrešljiva množica, odporna na napake. To pomeni, da če za vozlišči  $i$  velja  $d(u, i) \neq d(v, i)$  in je hkrati  $i \in S$  bo potem vsota enaka 2, kar pa je ravno to kar iščemo.

### 3 Potek dela

### 4 Koda

Komentirana koda je dostopna na povezavi.

### 5 Sistematično iskanje

V prvi fazi sva se iskanja ustreznih grafov z lastnostima  $\dim(G)=2$  in  $\text{ftdim}(G) = 5, 6, 7, \dots$  lotili tako, da sva za konstantno vrednost  $\dim$  postopoma povečevali željeno  $\text{ftdim}$  in število vozlišč, za katerega iščemo ustrezne grafe. Najprej sva kodo preizkusili za vrednosti  $\dim = 2$  in  $\text{ftdim} = 4$ :

- na 4 vozliščih obstajata dva taka grafa, čas izvajanja kode je 0.04 sekunde,
- na 5 vozliščih obstaja 8 takih grafov, čas izvajanja kode je 0.11 sekunde,
- na 6 vozliščih obstaja 46 takih grafov, čas izvajanja kode je 0.69 sekunde,
- na 7 vozliščih obstaja 232 takih grafov, čas izvajanja kode je 7.19 sekund,
- na 8 vozliščih obstaja 1525 takih grafov, čas izvajanja kode je 2 minuti in 1 sekunda.

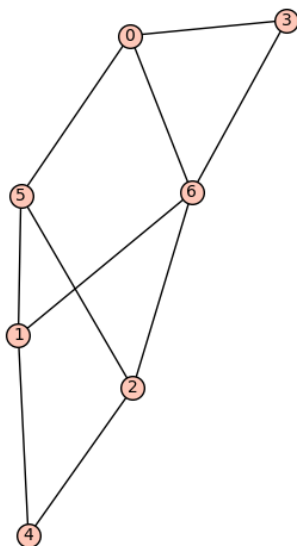
Rezultate za  $\text{ftdim} = 4$  ponazorimo še s tabelo:

št. vozlišč	št. grafov	čas izvajanja
4	2	0.04s
5	8	0.11s
6	46	0.69s
7	232	7.19s
8	1525	2min1s

**Tabela 1:** Rezultati za  $\text{ftdim} = 4$

---

Nato sva se lotili iskanja odgovora na vprašanje naloge: za  $\text{ftdim}(G) = 5$  sva najprej ugotovili, da za manj kot 7 vozlišč tak graf sploh ne obstaja. Na 7 vozliščih obstajata dva ustrezna grafa, katera je algoritem našel in izrisal v 5.96 sekundah:



**Slika 1:** Maksimalno število povezav v odvisnosti od  $d$  pri različnih  $n$ .

Na 8 vozliščih obstaja že bistveno več grafov, za katere velja  $\dim(G) = 2$  in  $\text{ftdim}(G) = 5$ , in sicer 65, tudi koda pa v primerjavi z grafi na 7 vozliščih rabi veliko dlje časa, da se izvede; ustrezne grafe je poiskala in izrisala v 1 minuti in 58 sekundah. Primer nekaj takšnih grafov:

Pri iskanju in risanju takih grafov na 9 vozliščih se je koda po pol ure dela prenehala izvajati in ni našla vseh ustreznih grafov. Primer nekaj takšnih grafov:

Rezultate za  $\text{ftdim} = 5$  ponazorimo še s tabelo:

št. vozlišč	št. grafov	čas izvajanja
7	2	5.96s
8	65	1min58s

**Tabela 2:** Rezultati za  $\text{ftdim} = 5$

Očitno se torej že pri  $\text{ftdim}=5$  in 9 vozliščih, kar se zdi dokaj malo, koda ne izvede v sprejemljivem času. Preverili sva še, kako časovno zahtevno je iskanje grafov z  $\dim = 2$  in  $\text{ftdim} = 6$ , za kar je potrebnih najmanj 12 vozlišč; tudi ta koda se ni izvedla v normalnem času, zato sva za primere pri  $\text{ftdim} = 5$  in več kot 8 vozlišč ter  $\text{ftdim} = 6, 7, \dots$  grafe iskali s pomočjo metahevrističnih algoritmov.