1 Metrična dimenzija

Množica $S \in V$ je v grafu G razrešljiva, če za vsak par $x, y \in V(G)$ ostaja $s \in S$, da velja $d(x,s) \neq d(y,s)$. Rečemo, da sta x in y razrešeni z vozliščem s. Množica S je odporna na napake, če je $S \setminus \{v\}$ prav tako razrešljiva za vsak $v \in S$.

Metrična dimenzija neusmerjenega in povezanega grafa $G = (V, E)$ je najmanjša podmnožica nabora vozlišč S iz V z lastnostjo, da so vsa vozlišča v V enolično določena z njihovimi razdaljami do vozlišč podmnožice S.

Primer uporabe metrične dimenzije je problem robotske navigacije. Pri tem pusitmo robota, da navigira v nekem prostoru, ki je določen z grafom G. Pri tem so povezave grafa G poti. Robot pošlje signal do posameznega niza vozlišč imenovanih orientacijske točke, da ugotovi kako daleč od njih se nahaja. Pri tem je določanje najmanjše množice orientacijskih točk in njihov položaj, da robot lahko enolično določi, kje se nahaja, simetričen problemu metrične dolžine. Problem nastane, če ena od teh točk ne deluje pravilno, kar pomeni da robot nima dovolj informacij za enolično določanje svoje lokacije. Pri teh težavah nam prav pridejo metrične dolžine, odporne na napake. Nabor za razreševanje, odporen na napake zagotavlja, da tudi če ena od imenovanih točk ne deluje pravilnno bomo dobili prave informacije.

Metrična dimenzija G, odporna na napake, je velikost najmanjše razčlenujoče množice S, odporne na napake (v primeru robotske navigacije je to nabor za razreševanje) in jo označimo z $ftdim(G)$.

2 Matematična formulacija

Imamo povezan in neusmerjen graf $G = (V, E)$, kjer je $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ množica vozlišč in $\mid E \mid= m$. Naj bo $d(u, v)$ najkrajša pot med vozliščema $u, v \in V$.

2.1 Celoštevilski linearni program

V naslednjem celoštevilskem lineearnem programu naj velja $1 \leq u < v \leq n$ in $1 \leq i < j \leq n$. Najprej definirajmo matriko koeficientov A. Spremenljivka x_i, definirana s predpisom (2) nam pove ali vozlišče i pripada množici S. Podobno spremenljivka $y_{i,j}$ definirana s (3) pove ali oba vozlišča i in j ležita v S.

$$A_{(u,v),i} = \begin{cases} 1, d(u,i) \neq d(v,i) \\ 0, d(u,i) = d(v,i) \end{cases} \tag{1}$$

$$x_i = \begin{cases} 1, i \in S \\ 0, i \notin S \end{cases} \tag{2}$$

$$\min \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_{(u,v),i} \cdot x_i \geq 2, \ 1 \leq u < v \leq n \tag{4}$$

$$x_i \in \{0,1\},\ 1 \leq i \leq n \tag{5}$$

Enačba (3) predstavlja najmanjšo podmnožico S. Enačba (4) pa nam da pogoj, da je poodmnožica S razrešljiva množica, odporna na napake. To pomeni, da če za vozlišči i velja $d(u,i) \neq d(v,i)$ in je hkrati $i \in S$ bo potem vsota enaka 2, kar pa je ravno to kar iščemo.