1 Metrična dimenzija

Množica $S \in V$ je v grafu G razrešljiva, če za vsak par $x, y \in V(G)$ ostaja $s \in S$, da velja $d(x,s) \neq d(y,s)$. Rečemo, da sta x in y razrešeni z vozliščem s. Množica S je odporna na napake, če je $S \setminus \{v\}$ prav tako razrešljiva za vsak $v \in S$.

Metrična dimenzija neusmerjenega in povezanega grafa $G = (V, E)$ je najmanjša podmnožica nabora vozlišč $S \subset V$ z lastnostjo, da so vsa vozlišča v V enolično določena z njihovimi razdaljami do vozlišč podmnožice S.

Primer uporabe metrične dimenzije je problem robotske navigacije. Pri tem pusitmo robota, da navigira v nekem prostoru, ki je določen z grafom G. Pri tem so povezave grafa G poti. Robot pošlje signal do posameznega niza vozlišč imenovanih orientacijske točke, da ugotovi kako daleč od njih se nahaja. Pri tem je določanje najmanjše množice orientacijskih točk in njihov položaj, da robot lahko enolično določi, kje se nahaja, simetričen problemu metrične dolžine. Problem nastane, če ena od teh točk ne deluje pravilno, kar pomeni da robot nima dovolj informacij za enolično določanje svoje lokacije. Pri teh težavah nam prav pridejo metrične dolžine, odporne na napake. Nabor za razreševanje, odporen na napake zagotavlja, da tudi če ena od imenovanih točk ne deluje pravilnno bomo dobili prave informacije.

Metrična dimenzija G, odporna na napake, je velikost najmanjše razčlenujoče množice S, odporne na napake (v primeru robotske navigacije je to nabor za razreševanje) in jo označimo z $ftdim(G)$.

2 Matematična formulacija

Imamo povezan in neusmerjen graf $G = (V, E)$, kjer je $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ množica vozlišč in $\mid E \mid = m$. Naj bo $d(u, v)$ najkrajša pot med vozliščema $u, v \in V$.

2.1 Celoštevilski linearni program

V naslednjem celoštevilskem lineearnem programu naj velja $1 \leq u < v \leq n$ in $1 \leq i < j \leq n$. Najprej definirajmo matriko koeficientov A. Spremenljivka x_i, definirana s predpisom (2) nam pove ali vozlišče i pripada množici S.

$$A_{(u,v),i} = \begin{cases} 1, d(u,i) \neq d(v,i) \\ 0, d(u,i) = d(v,i) \end{cases} \tag{1}$$

$$x_i = \begin{cases} 1, i \in S \\ 0, i \notin S \end{cases} \tag{2}$$

$$\min \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_{(u,v),i} \cdot x_i \geq 2, \; 1 \leq u < v \leq n \tag{4}$$

$$x_i \in \{0, 1\},\ 1 \leq i \leq n \tag{5}$$

Enačba (3) predstavlja najmanjšo podmnožico S. Enačba (4) pa nam da pogoj, da je poodmnožica S razrešljiva množica, odporna na napake. To pomeni, da če za vozlišči i velja $d(u, i) \neq d(v, i)$ in je hkrati $i \in S$ bo potem vsota enaka 2, kar pa je ravno to kar iščemo.

3 Načrt dela

Ideja prve faze projekta je identifikacija grafov z določenimi lastnostmi glede na njihovo metrično dimenzijo in na napake odporno metrično dimenzijo. V najini kodi sva na začetku napisali funkciji, ki izračunata metrično in na napake odporno metrično dimenzijo grafa. Za vsak graf G funkciji preštejeta število vozlišč in medsebojne razdalje za poljuben par, nato pa rešita ustrezen CLP in vrneta moč razrešljivih množic. Funkciji bova nato uporabili za iskanje grafov, ki ustrezajo podanim parametrom, ki so ciljna metrična dimenzija, ciljna na napake odporna metrična dimenzija in največje število vozlišč, do katerega preverjamo grafe.

V naslednji fazi bi za iskanje grafov uporabile metahevristični sistem. To je vrsta algoritma v stohastični optimizaciji, ki uporablja naključnost za iskanje optimalnih ali čim boljših rešitev za zahtevne probleme. Njihov namen ni nujno, da poišče optimalno rešitev, temveč da poišče dovolj dobre rešitve v razumnem času, še posebej kadar je popolna rešitev težko dosegljiva zaradi kompleknosti problema.

Naša pričakovanja so, da grafov z matrično dimenzijo, odporno na napake ni veliko in jih je tudi težko poiskati. Na podlagi tega pričakujemo, da bo poskusov nekoliko več kot smo sprva pričakovale. Poleg tega domnevamo, da čim manjša je razlika med metrično dolžino in metrično dolžino, odporno na napake, tem lažje je poiskati grafe.