

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Институт компьютерных наук и технологий  
Высшая школа программной инженерии

## **Отчет по лабораторной работе**

Вариант 11. Применение RKF45 и метода семейства Рунге-Кутты  
для решение системы дифференциальных уравнений, а также  
нахождение устойчивости метода семейства Рунге-Кутты

Выполнил студент гр. в3530904/00022 <подпись> В.Я. Копылов

Руководитель

доцент, к.ф.- м.н.

<подпись> С.П. Воскобойников

Санкт-Петербург  
2022г.

## Оглавление

Условия задачи	3
Исходный код	4
Вывод программы	8
Нахождение границы устойчивости для метода из семейства Рунге-Кутты	12
Вывод	13

## Условия задачи

### ВАРИАНТ N 11

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = -71x_1 - 70x_2 + e^{1-t^2}; \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + \sin(1-t);$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1; \quad t \in [0, 4]$$

следующими способами с одним и тем же шагом печати  $h_{\text{print}} = 0.2$  :

I) по программе **RKF45** с  $\text{EPS}=0.0001$ ;

II) методом семейства Рунге-Кутты

$$z_{n+1} = z_n + (23k_1 + 125k_3 - 81k_5 + 125k_6)/192,$$

$$k_1 = hf(t_n, z_n),$$

$$k_2 = hf(t_n + h/3, z_n + k_1/3),$$

$$k_3 = hf(t_n + 0.4h, z_n + 0.16k_1 + 0.24k_2),$$

$$k_4 = hf(t_n + h, z_n + 0.25k_1 - 3k_2 + 3.75k_3),$$

$$k_5 = hf(t_n + 2h/3, z_n + (6k_1 + 90k_2 - 50k_3 + 8k_4)/81),$$

$$k_6 = hf(t_n + 4h/5, z_n + (6k_1 + 36k_2 + 10k_3 + 8k_4)/75),$$

с двумя постоянными шагами интегрирования:

а)  $h_{\text{int}} = 0.2$

б) любой другой, позволяющий получить качественно верное решение.

Сравнить результаты.

Рисунок 1. Условие задачи

## Исходный код

main.f90:

```
program lab3_RKF

  use Environment
  use Group_Process
  ! Важные переменные для RKF45
  real(R_) :: T, TOUT, RELERR, ABSERR
  real(R_), allocatable :: WORK(:), x(:), dx(:)
  integer(I_) :: NEQN, IFLAG
  integer(I_), allocatable :: IWORK(:)

  ! Важные переменные для Рунгу-Кутты
  real(R_) :: TR1, TR2
  real(R_) :: xr1(2), xr2(2)

  ! Для циклов, ввода-вывода и прочего
  integer(I_) :: i = 0, Out = 1
  character(:), allocatable :: output_file, format
  ! подготовка файла
  output_file = "rkf45.txt"

  ! подготовка к решению по RKF45
  NEQN = 2 ! число уравнений

  ! EPS = 0.0003
  ABSERR = 1.E-4
  RELERR = 1.E-4

  allocate(x(NEQN))
  allocate(dx(NEQN))

  allocate(WORK(3+6*NEQN)) ! расчет как 3+6*NEQN
  allocate(IWORK(5)) ! не меньше 5

  ! начальные условия
  x(1) = 0
  x(2) = 1

  ! границы
  T = 0.0
  TOUT = 0.0
  IFLAG = +1 ! указатель настройки
программы ! режим: многошаговый
интегратор

  ! подготовка к решению по Рунге-Кутты системе
```

```

TR1      = 0.0
TR2      = 0.0
xr1(1)   = 0
xr1(2)   = 1
xr2(1)   = 0
xr2(2)   = 1

! чистка файла
open (file=output_file, newunit=Out, position="rewind")
close(Out)

do while (TOUT < 4.1)
    open (file=output_file, newunit=Out, position="append")
    write(Out, "(a, 1f3.1, a, 1f3.1)") " Отрезок: ", T,
" до ", TOUT

    call RKF45(system, NEQN, x, T, TOUT, RELERR,
ABSERR, IFLAG, WORK, IWORK)
    call runge_kutte(system, xr1, TR1, TOUT, 0.0001)
    call runge_kutte(system, xr2, TR2, TOUT, 0.2)

    write(Out, *) "RKF45, h=0.2000, x1:", x(1)
    write(Out, *) "RU-KU, h=0.0001, x1:", xr1(1)
    write(Out, *) "RU-KU, h=0.2000, x1:", xr2(1)
    write(Out, *) " "
    write(Out, *) "RKF45, h=0.2000, x2:", x(2)
    write(Out, *) "RU-KU, h=0.0001, x2:", xr1(2)
    write(Out, *) "RU-KU, h=0.2000, x2:", xr2(2)
    if (IFLAG /= 2) then
        write(Out, *) "Flag :", IFLAG
    end if
    write(Out, *) "-----"
close(Out)

! RKF45
T      = TOUT
! RU-KU
TR1    = TOUT
TR2    = TOUT

! GLOBAL
TOUT   = TOUT + 0.2
end do

contains
real(R_) function find_dx1(x1, x2, t)
    real(R_) :: x1, x2, t
    find_dx1 = -71 * x1 - 70 * x2 + exp(1 - t * t)
end function find_dx1

```

```

real(R_) function find_dx2(x1, t)
  real(R_)      :: x1, t
  find_dx2 = x1 + sin(1 - t)
end function find_dx2

```

```

subroutine system(t, x, dx)
  real(R_), intent(inout) :: t, x(2)
  real(R_), intent(inout) :: dx(2)

```

```

  dx(1) = find_dx1(x(1), x(2), t)
  dx(2) = find_dx2(x(1), t)
end subroutine system

```

```

subroutine runge_kutte(func, x, T, TOUT, step)
  ! входные переменные
  external      :: func
  real(R_), intent(inout) :: x(2)
  real(R_), intent(inout) :: T
  real(R_), intent(in)    :: TOUT, step

```

```

  ! локальные
  real(R_)      :: k1(2), k2(2), k3(2),
k4(2), k5(2), k6(2)

```

```

  do while (T < TOUT)
    k1(1) = step * find_dx1(x(1), x(2), T)
    k1(2) = step * find_dx2(x(1), T)

```

```

    k2(1) = step * find_dx1(x(1) + k1(1)/3, &
                           x(2) + k1(2)/3, &
                           T + step/3)
    k2(2) = step * find_dx2(x(1) + k1(1)/3, &
                           T + step/3)

```

```

    k3(1) = step * find_dx1(x(1) + 0.16 * k1(1) + 0.24
* k2(1), &
                           x(2) + 0.16 * k1(2) + 0.24
* k2(2), &
                           T + 0.4 * step)
    k3(2) = step * find_dx2(x(1) + 0.16 * k1(1) + 0.24
* k2(1), &
                           T + 0.4 * step)

```

```

    k4(1) = step * find_dx1(x(1) + 0.25 * k1(1) - 3 *
k2(1) + 3.75 * k3(1), &
                           x(2) + 0.25 * k1(2) - 3 *
k2(2) + 3.75 * k3(2), &

```

```

                                T + step)
    k4(2) = step * find_dx2(x(1) + 0.25 * k1(1) - 3 *
k2(1) + 3.75 * k3(1), &
                                T + step)

```

```

    k5(1) = step * find_dx1(x(1) + (6 * k1(1) + 90 *
k2(1) - 50 * k3(1) + 8 * k4(1)) / 81, &
                                x(2) + (6 * k1(2) + 90 *
k2(2) - 50 * k3(2) + 8 * k4(2)) / 81, &
                                T + 2 * step / 3)
    k5(2) = step * find_dx2(x(1) + (6 * k1(1) + 90 *
k2(1) - 50 * k3(1) + 8 * k4(1)) / 81, &
                                T + 2 * step / 3)

```

```

    k6(1) = step * find_dx1(x(1) + (6 * k1(1) + 36 *
k2(1) + 10 * k3(1) + 8 * k4(1)) / 75, &
                                x(2) + (6 * k1(2) + 36 *
k2(2) + 10 * k3(2) + 8 * k4(2)) / 75, &
                                T + 4 * step / 5)
    k6(2) = step * find_dx2(x(1) + (6 * k1(1) + 36 *
k2(1) + 10 * k3(1) + 8 * k4(1)) / 75, &
                                T + 4 * step / 5)

```

```

    x(1) = x(1) + (23 * k1(1) + 125 * k3(1) - 81 *
k5(1) + 125 * k6(1)) / 192
    x(2) = x(2) + (23 * k1(2) + 125 * k3(2) - 81 *
k5(2) + 125 * k6(2)) / 192

```

```

    T = T + step
end do
end subroutine runge_kutte
end program lab3_RKF

```

## Вывод программы

```
1  Отрезок: 0.0 до 0.0
2  RKF45, h=0.2000, x1:  0.00000000
3  RU-KU, h=0.0001, x1:  0.00000000
4  RU-KU, h=0.2000, x1:  0.00000000
5
6  RKF45, h=0.2000, x2:  1.00000000
7  RU-KU, h=0.0001, x2:  1.00000000
8  RU-KU, h=0.2000, x2:  1.00000000
9  -----
10 Отрезок: 0.0 до 0.2
11 RKF45, h=0.2000, x1: -0.932477355
12 RU-KU, h=0.0001, x1: -0.932476938
13 RU-KU, h=0.2000, x1: -3133.26953
14
15 RKF45, h=0.2000, x2:  0.980374873
16 RU-KU, h=0.0001, x2:  0.980374634
17 RU-KU, h=0.2000, x2:  45.7280388
18 -----
19 Отрезок: 0.2 до 0.4
20 RKF45, h=0.2000, x1: -0.885232747
21 RU-KU, h=0.0001, x1: -0.885205805
22 RU-KU, h=0.2000, x1: 10191163.0
23
24 RKF45, h=0.2000, x2:  0.926926434
25 RU-KU, h=0.0001, x2:  0.926895201
26 RU-KU, h=0.2000, x2: -145587.125
27 -----
28 Отрезок: 0.4 до 0.6
29 RKF45, h=0.2000, x1: -0.818625867
30 RU-KU, h=0.0001, x1: -0.818601012
31 RU-KU, h=0.2000, x1: -3.31572838E+10
32
33 RKF45, h=0.2000, x2:  0.851929605
34 RU-KU, h=0.0001, x2:  0.851904452
35 RU-KU, h=0.2000, x2:  473675584.
36 -----
37 Отрезок: 0.6 до 0.8
38 RKF45, h=0.2000, x1: -0.731589019
39 RU-KU, h=0.0001, x1: -0.731566608
40 RU-KU, h=0.2000, x1:  1.07878338E+14
41
42 RKF45, h=0.2000, x2:  0.755572557
43 RU-KU, h=0.0001, x2:  0.755549014
44 RU-KU, h=0.2000, x2: -1.54111902E+12
45 -----
46 Отрезок: 0.8 до 1.0
47 RKF45, h=0.2000, x1: -0.624715269
48 RU-KU, h=0.0001, x1: -0.624638319
49 RU-KU, h=0.2000, x1: -3.50985861E+17
50
51 RKF45, h=0.2000, x2:  0.639563680
52 RU-KU, h=0.0001, x2:  0.639540493
53 RU-KU, h=0.2000, x2:  5.01408065E+15
```

Рисунок 2. Скриншот файла вывода 1



```

1  Отрезок: 1.0 до 1.2
2  RKF45, h=0.2000, x1: -0.500028074
3  RU-KU, h=0.0001, x1: -0.499987572
4  RU-KU, h=0.2000, x1: 1.14194426E+21
5
6  RKF45, h=0.2000, x2: 0.506893754
7  RU-KU, h=0.0001, x2: 0.506871939
8  RU-KU, h=0.2000, x2: -1.63134925E+19
9  -----
10 Отрезок: 1.2 до 1.4
11 RKF45, h=0.2000, x1: -0.361249626
12 RU-KU, h=0.0001, x1: -0.361223072
13 RU-KU, h=0.2000, x1: -3.71535584E+24
14
15 RKF45, h=0.2000, x2: 0.361564010
16 RU-KU, h=0.0001, x2: 0.361543387
17 RU-KU, h=0.2000, x2: 5.30765024E+22
18 -----
19 Отрезок: 1.4 до 1.6
20 RKF45, h=0.2000, x1: -0.213052332
21 RU-KU, h=0.0001, x1: -0.213028535
22 RU-KU, h=0.2000, x1: 1.20880351E+28
23
24 RKF45, h=0.2000, x2: 0.208295539
25 RU-KU, h=0.0001, x2: 0.208275914
26 RU-KU, h=0.2000, x2: -1.72686206E+26
27 -----
28 Отрезок: 1.6 до 1.8
29 RKF45, h=0.2000, x1: -6.07735738E-02
30 RU-KU, h=0.0001, x1: -6.07469678E-02
31 RU-KU, h=0.2000, x1: -3.93288159E+31
32
33 RKF45, h=0.2000, x2: 5.22636995E-02
34 RU-KU, h=0.0001, x2: 5.22453226E-02
35 RU-KU, h=0.2000, x2: 5.61840417E+29
36 -----
37 Отрезок: 1.8 до 2.0
38 RKF45, h=0.2000, x1: 8.99910554E-02
39 RU-KU, h=0.0001, x1: 9.00079980E-02
40 RU-KU, h=0.2000, x1: 1.27957602E+35
41
42 RKF45, h=0.2000, x2: -0.101145878
43 RU-KU, h=0.0001, x2: -0.101162650
44 RU-KU, h=0.2000, x2: -1.82796516E+33

```

Рисунок 3. Скриншот файла вывода 2

```

1  Отрезок: 2.0 до 2.2
2  RKF45, h=0.2000, x1: 0.233651668
3  RU-KU, h=0.0001, x1: 0.233866200
4  RU-KU, h=0.2000, x1: NaN
5
6  RKF45, h=0.2000, x2: -0.246562853
7  RU-KU, h=0.0001, x2: -0.246777654
8  RU-KU, h=0.2000, x2: NaN
9  -----
10 Отрезок: 2.2 до 2.4
11 RKF45, h=0.2000, x1: 0.364937484
12 RU-KU, h=0.0001, x1: 0.365294546
13 RU-KU, h=0.2000, x1: NaN
14
15 RKF45, h=0.2000, x2: -0.378846675
16 RU-KU, h=0.0001, x2: -0.379203975
17 RU-KU, h=0.2000, x2: NaN
18 -----
19 Отрезок: 2.4 до 2.6
20 RKF45, h=0.2000, x1: 0.479057044
21 RU-KU, h=0.0001, x1: 0.479504853
22 RU-KU, h=0.2000, x1: NaN
23
24 RKF45, h=0.2000, x2: -0.493291140
25 RU-KU, h=0.0001, x2: -0.493738979
26 RU-KU, h=0.2000, x2: NaN
27 -----
28 Отрезок: 2.6 до 2.8
29 RKF45, h=0.2000, x1: 0.571875751
30 RU-KU, h=0.0001, x1: 0.572366595
31 RU-KU, h=0.2000, x1: NaN
32
33 RKF45, h=0.2000, x2: -0.585815012
34 RU-KU, h=0.0001, x2: -0.586305380
35 RU-KU, h=0.2000, x2: NaN
36 -----
37 Отрезок: 2.8 до 3.0
38 RKF45, h=0.2000, x1: 0.640065849
39 RU-KU, h=0.0001, x1: 0.640554845
40 RU-KU, h=0.2000, x1: NaN
41
42 RKF45, h=0.2000, x2: -0.653132200
43 RU-KU, h=0.0001, x2: -0.653621256
44 RU-KU, h=0.2000, x2: NaN

```

Рисунок 4. Скриншот файла вывода 3

```

1  Отрезок: 3.0 до 3.2
2  RKF45, h=0.2000, x1: 0.681226015
3  RU-KU, h=0.0001, x1: 0.681675732
4  RU-KU, h=0.2000, x1: NaN
5
6  RKF45, h=0.2000, x2: -0.692892194
7  RU-KU, h=0.0001, x2: -0.693340957
8  RU-KU, h=0.2000, x2: NaN
9  -----
10 Отрезок: 3.2 до 3.4
11 RKF45, h=0.2000, x1: 0.693987131
12 RU-KU, h=0.0001, x1: 0.694362998
13 RU-KU, h=0.2000, x1: NaN
14
15 RKF45, h=0.2000, x2: -0.703784406
16 RU-KU, h=0.0001, x2: -0.704159379
17 RU-KU, h=0.2000, x2: NaN
18 -----
19 Отрезок: 3.4 до 3.6
20 RKF45, h=0.2000, x1: 0.678062558
21 RU-KU, h=0.0001, x1: 0.678337574
22 RU-KU, h=0.2000, x1: NaN
23
24 RKF45, h=0.2000, x2: -0.685599864
25 RU-KU, h=0.0001, x2: -0.685873866
26 RU-KU, h=0.2000, x2: NaN
27 -----
28 Отрезок: 3.6 до 3.8
29 RKF45, h=0.2000, x1: 0.634201705
30 RU-KU, h=0.0001, x1: 0.634425521
31 RU-KU, h=0.2000, x1: NaN
32
33 RKF45, h=0.2000, x2: -0.639247179
34 RU-KU, h=0.0001, x2: -0.639401078
35 RU-KU, h=0.2000, x2: NaN
36 -----
37 Отрезок: 3.8 до 4.0
38 RKF45, h=0.2000, x1: 0.564488053
39 RU-KU, h=0.0001, x1: 0.564529717
40 RU-KU, h=0.2000, x1: NaN
41
42 RKF45, h=0.2000, x2: -0.566728234
43 RU-KU, h=0.0001, x2: -0.566745877
44 RU-KU, h=0.2000, x2: NaN
45 -----
46

```

Рисунок 5. Скриншот файла вывода 4

## Нахождение границы устойчивости для метода из семейства Рунге-Кутты

Неравенство ограничения на шаг интегрирования для метода из семейства Рунге-Кутты 6 степени:

$$\left| 1 + h * \lambda + \frac{h^2 * \lambda^2}{2} + \frac{h^3 * \lambda^3}{6} + \frac{h^4 * \lambda^4}{24} + \frac{h^5 * \lambda^5}{120} + \frac{h^6 * \lambda^6}{720} \right| < 1$$

где  $\lambda$  - это наибольшее отрицательное число матрицы А.

Если заменить  $h * \lambda$  на  $\chi$  и поставить в неравенство, то можно найти константу, больше которой выражение  $h * \lambda$  будет означать неустойчивость системы, данная константа будет левой границей интервала данного неравенства:

$$|h * \lambda| < 3.553$$

Ниже представлена матрица А и ее собственные числа для данной системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{pmatrix} -71 & -70 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = -70 \\ \hline \lambda_2 = -1 \end{array}$$

Исходя из этого за  $\lambda$  принимается соб. число, равное 70.

Исходя из всего вышеперечисленного окончательное неравенство для устойчивости данной системы примет вид:

$$|h * 70| < 3.553$$

## Вывод

Касательно реализации метода из семейства Рунге-Кутты стало понятно, почему при шаге  $h=0.2$  программа вела себя некорректно. При вычислении границы устойчивости было выявлено, что  $h=0.2$  выходит за рамки найденной границы, а значит решение ведет себя некорректно.

Приблизительный шаг, с которого можно вычислять данный метод 6 порядка  $h \approx \frac{3.553}{70} \approx 0.0507$