

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт компьютерных наук и технологий

Высшая школа программной инженерии

## **Отчет по лабораторной работе**

Вариант 6. Разложение дискретизированного сигнала в действительный и  
комплексный ряд Фурье

|                                     |           |              |
|-------------------------------------|-----------|--------------|
| Выполнил студент гр. в3530904/00321 | <подпись> | В.Я. Копылов |
| Руководитель                        | <подпись> | В.С. Тутыгин |

Санкт-Петербург  
2022г.

## **Оглавление**

|                             |    |
|-----------------------------|----|
| Цель работы                 | 3  |
| Программа работы            | 4  |
| Результат работы            | 6  |
| Выводы                      | 13 |
| Приложение. Тексты программ | 14 |

## Цель работы

Требуется исследовать зависимость точности представления функции  $f(x)$  с помощью ограниченного ряда Фурье от количества членов ряда  $K$ , количества точек дискретизации  $N$  и вида функции.

Заданная функция по варианту:

$$6. f(x) = \text{abs}(\sin(x));$$

Рисунок 1. Функция, заданная вариантом

## Программа работы

Определить зависимости погрешность восстановления значений:

- гармонической функции с целым количеством периодов;
- гармонической функции с нецелым количеством периодов;
- заданной функции.

от количества членов ряда Фурье и количества отсчётов.

Интересующий диапазон допустимых погрешностей (СКО) - не более 10%.

Последовательность действий:

1. Задать большое количество отсчётов  $N - 1024$ ;
2. Увеличивать количество членов  $K$  ряда Фурье ( $K_P < K < N/4$ ) и фиксировать погрешности восстановления. Построить график зависимости  $\delta = f(K)$
3. Выбрать оптимальное количество членов  $K$  ряда Фурье и количество отсчётов  $N$  при допустимой погрешности 1%.

Крайние значения восстановленной функции при расчёте погрешности исключить.

Также проанализировать зависимость погрешности для комплексного разложения ряда Фурье.

## Результаты работы

Для заданной по варианту функции, было выбрано количество точек  $x = 1024$ , интервалом от  $[-\pi; \pi]$ , количество периодов  $k_p = 1$ . Количество членов ряда Фурье было задано такими значениями: 8, 16, 32, 64, 128, 256.

Для каждого различного числа членов ряда Фурье был построен график оригинальной функции и восстановленной, а также график амплитуд.

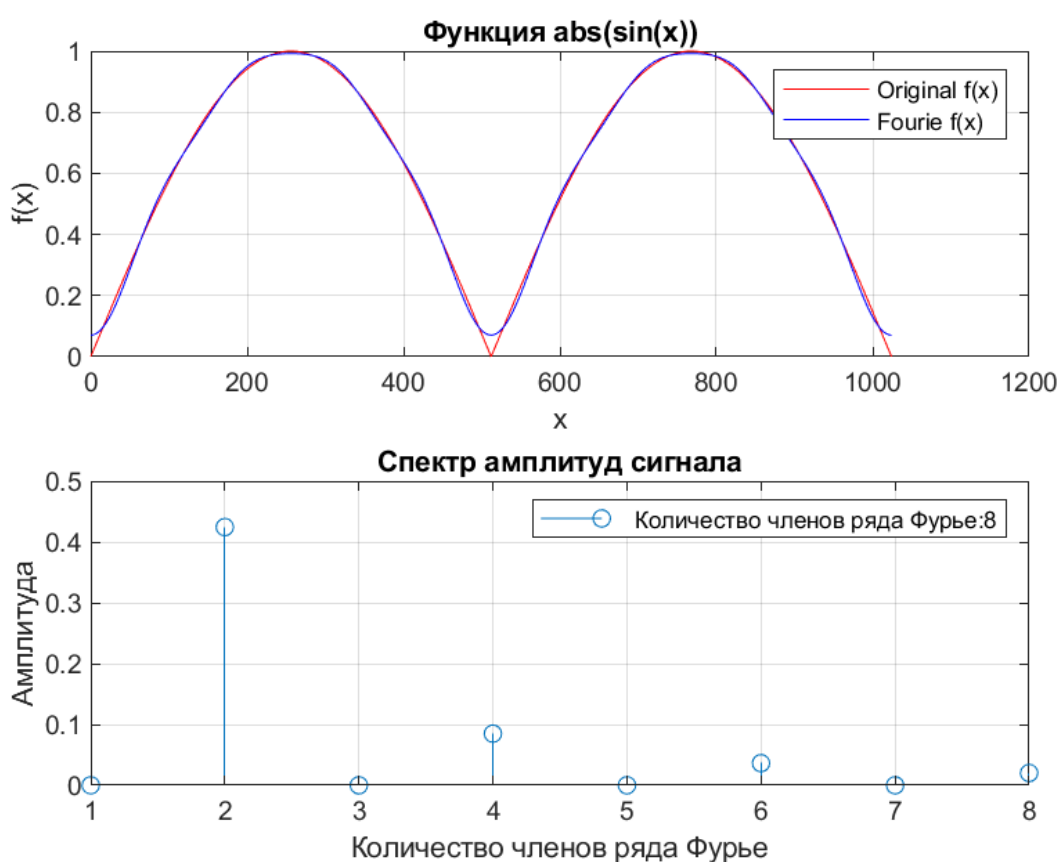


Рисунок 2 - Графики исходной и восстановленной функции, а также спектр амплитуд сигнала для количества членов ряда равного 8

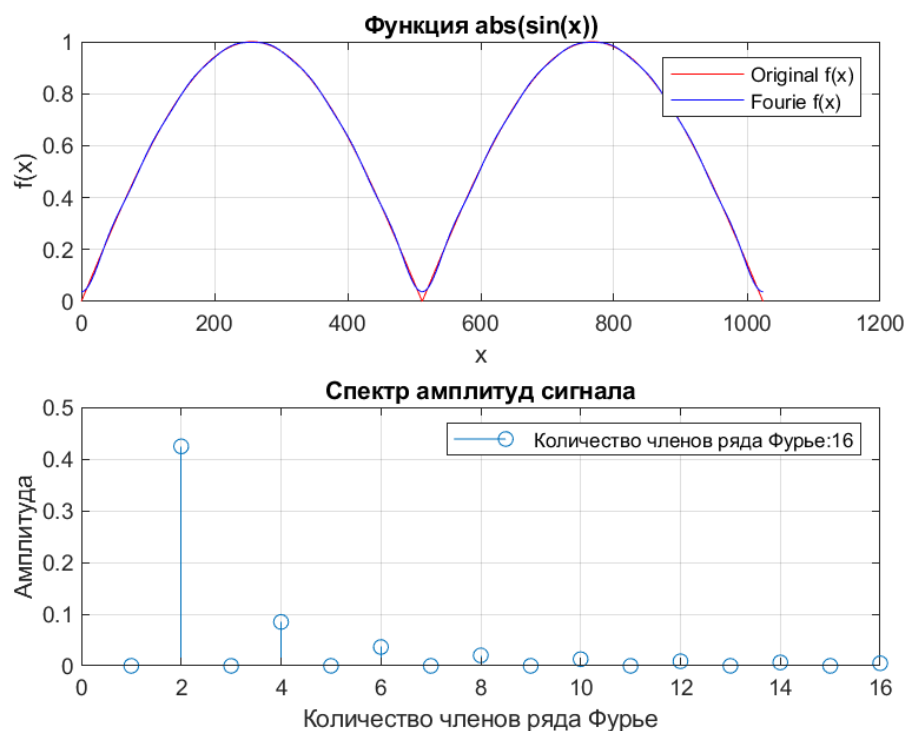


Рисунок 3 - Графики исходной и восстановленной функции, а также спектр амплитуд сигнала для количества членов ряда равного 16

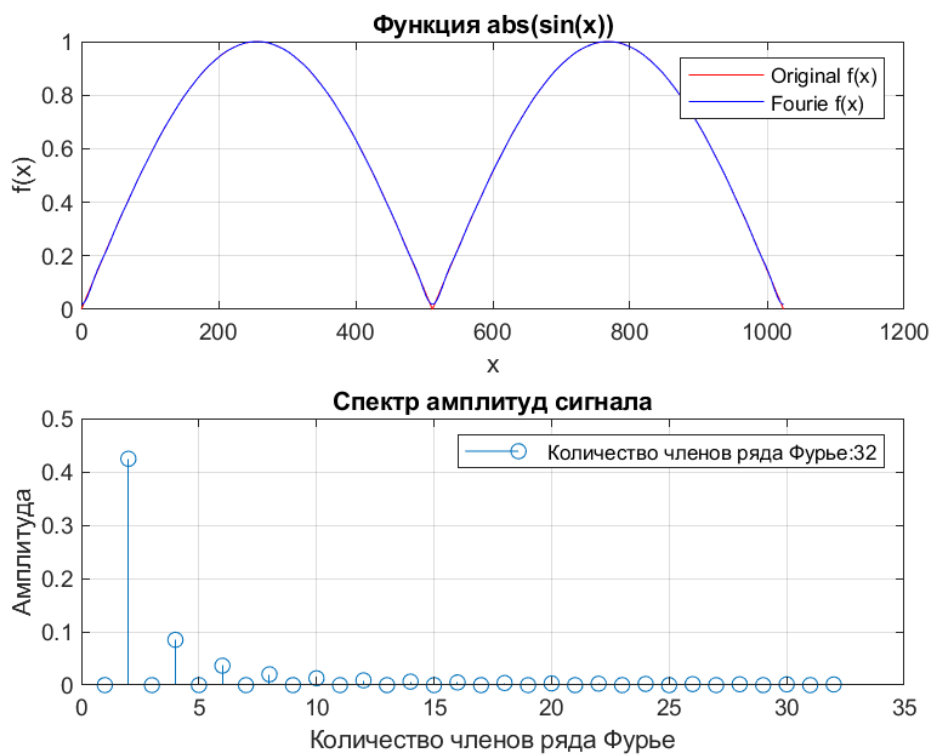


Рисунок 4 - Графики исходной и восстановленной функции, а также спектр амплитуд сигнала для количества членов ряда равного 32

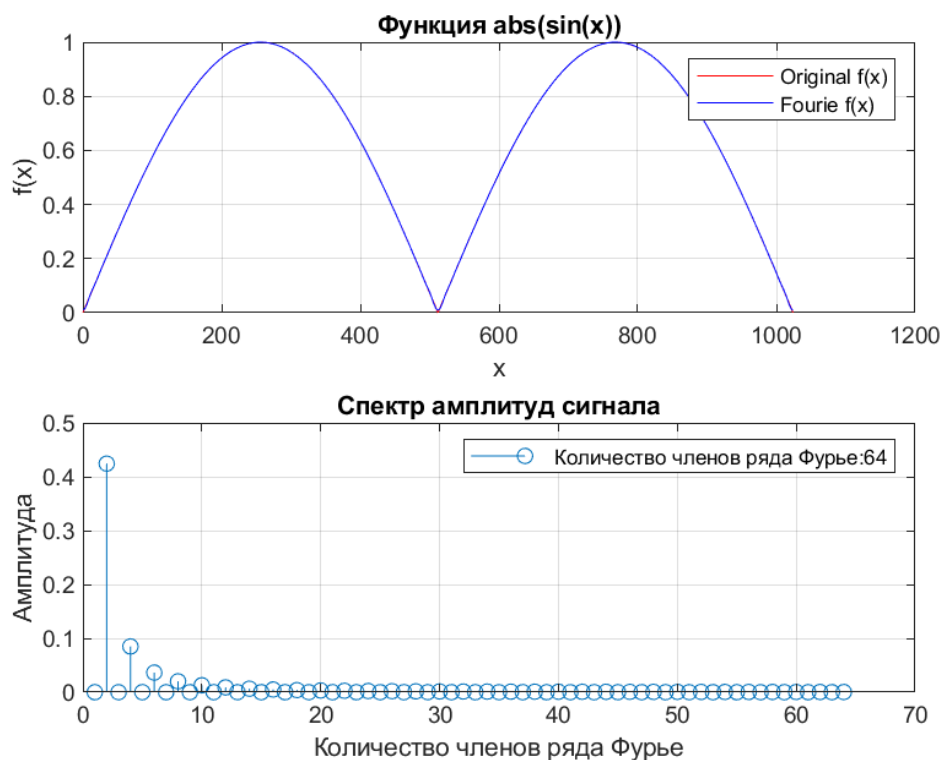


Рисунок 5 - Графики исходной и восстановленной функции, а также спектр амплитуд сигнала для количества членов ряда равного 64

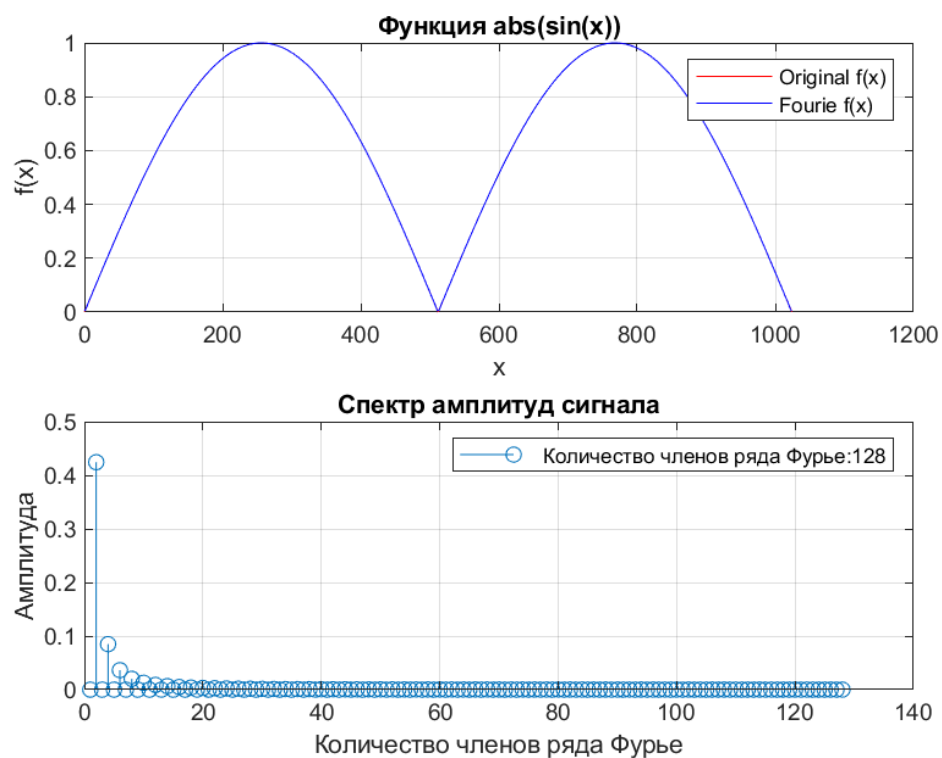


Рисунок 6 - Графики исходной и восстановленной функции, а также спектр амплитуд сигнала для количества членов ряда равного 128.

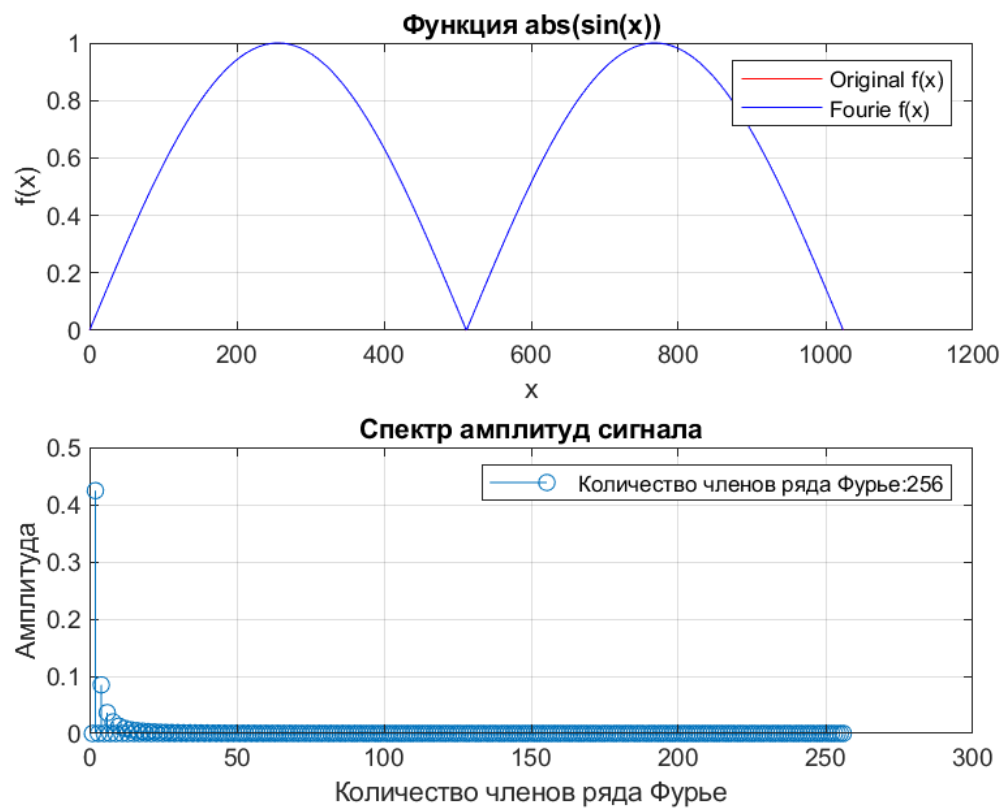


Рисунок 7 - Графики исходной и восстановленной функции, а также спектр амплитуд сигнала для количества членов ряда равного 256.



Также была высчитана зависимость погрешности функции от количества членов ряда для заданных параметров.

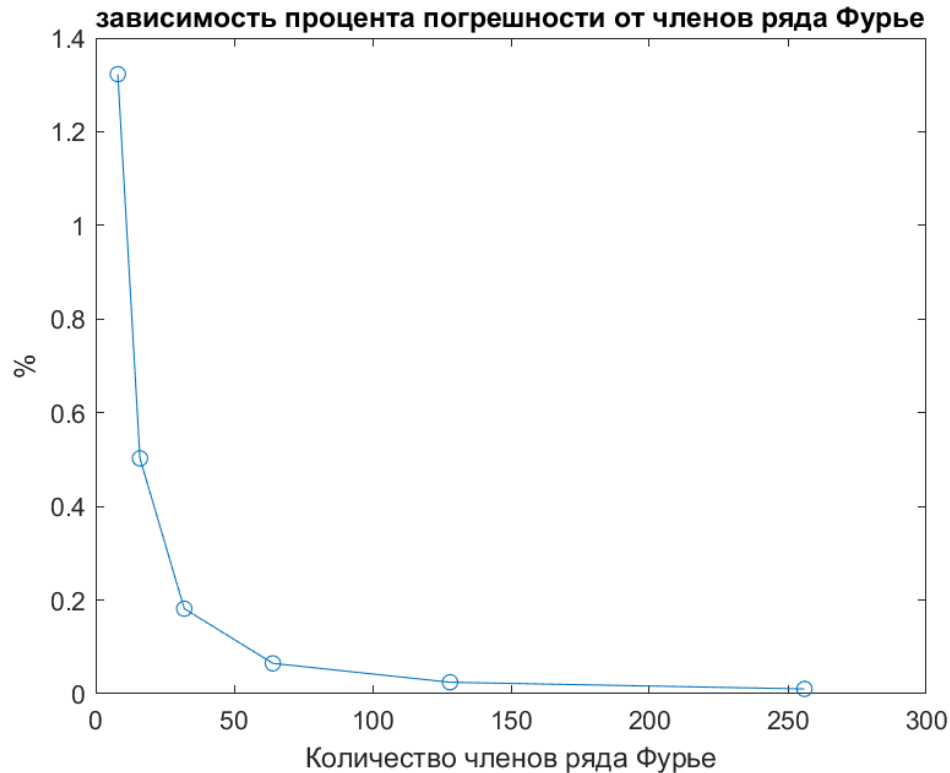


Рисунок 8 - График зависимости для целого числа интервалов.

На данном графике видно, что для заданной функции  $|\sin(x)|$ , с количестве точек 1024, интервалом от  $[-\pi; \pi]$ , количество периодов  $k_p = 1$ :

1. Для количество членов ряда Фурье = 8, погрешность достигает 130%
2. Погрешность в 1% достигается при количестве членов ряда Фурье в 256 (далее при данном количестве точек нецелесообразно повышать количество членов ряда, т.к. условие  $K < N / 4$  не будет выполняться)

Также необходимо было разложить данную функцию в **комплексный ряд Фурье**. т.е. та же самая функция с параметрами: количество точек 1024, интервал от  $[0: 2\pi]$ , количество периодов  $k_p = 1$ . Количество членов ряда Фурье было задано такими значениями: 8, 16, 32, 64, 128, 256.

Из соображений экономии места, результаты приводятся для количество членов равного 16 и 128.

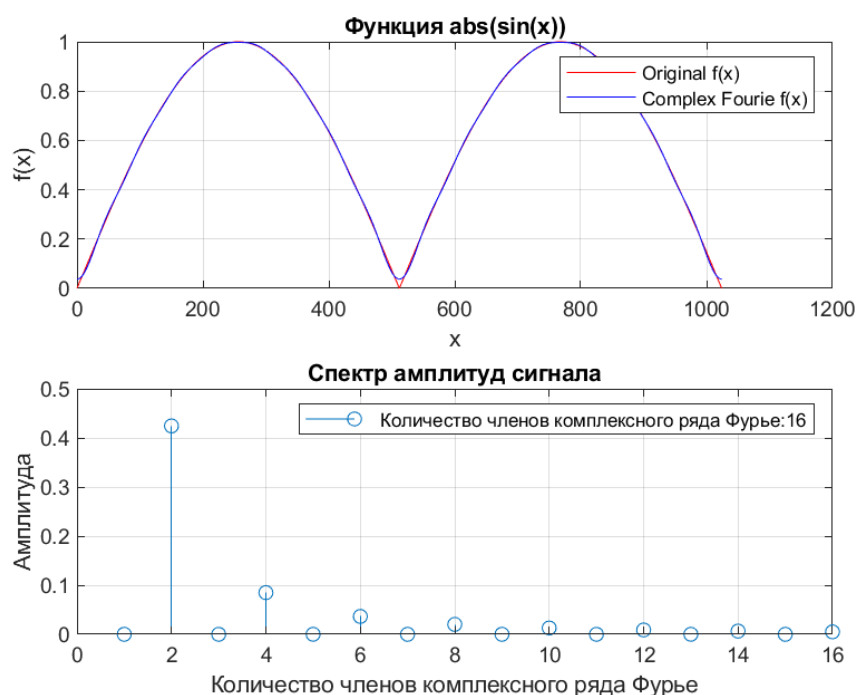


Рисунок 10 - Графики исходной и восстановленной функции, а также спектр амплитуд сигнала для количества членов ряда равного 16.

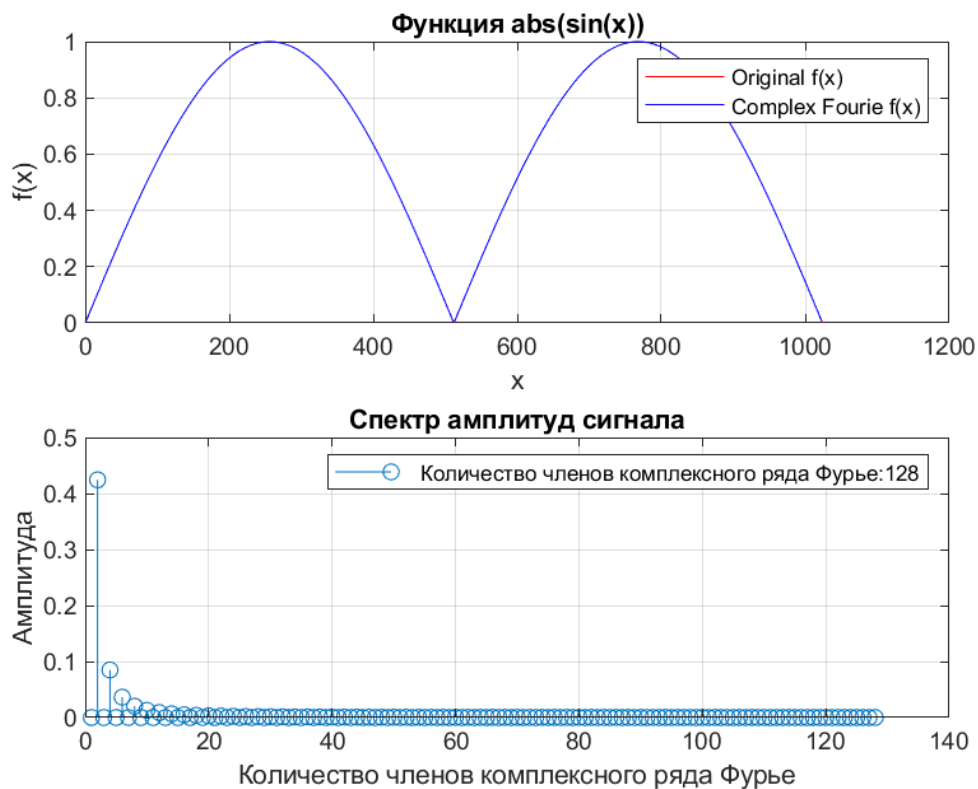
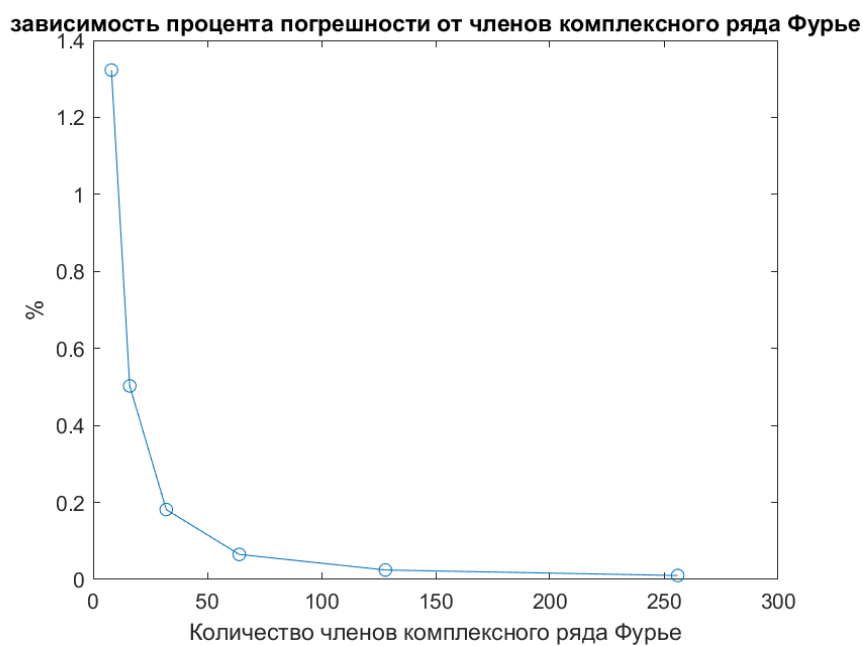


Рисунок 10 - Графики исходной и восстановленной функции, а также спектр амплитуд сигнала для количества членов ряда равного 128.

Также был построен график зависимости погрешности от количества членов комплексного ряда Фурье.



## Выводы

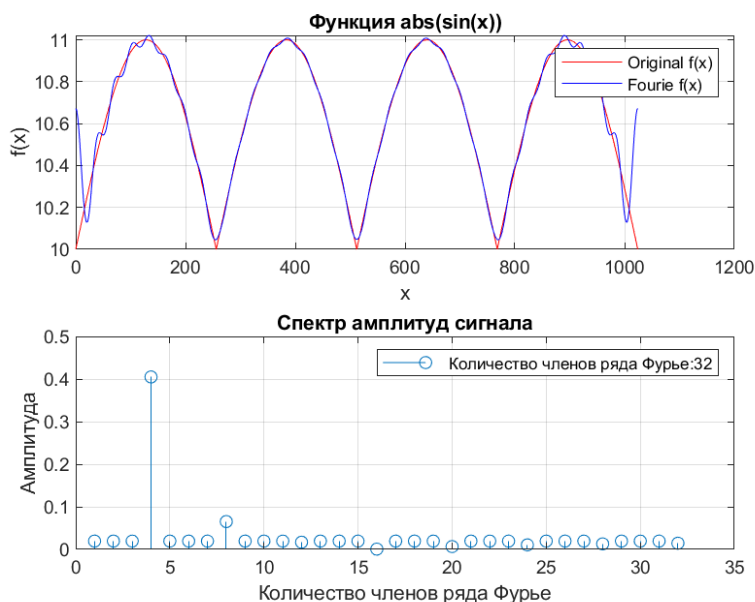
После проделанной работы удалось исследовать зависимость точности представления функции от количества членов ряда Фурье и количества точек дискретизации - **обратно пропорциональная зависимость**. Чем больше членов Фурье, тем более низкий процент погрешности.

Но необходимо соблюдать условие  $K < N / 4$ , где:

1.  $K$  - количество членов ряда Фурье
2.  $N$  - количество точек дискретизации

Также было выявлено, что процент погрешности от количества членов комплексного и обычного ряда Фурье - **эквивалентное**.

Также было обнаружено, что при смещении заданной функции происходит разрыв и функция аппроксимируется гораздо хуже. Пример предоставлен ниже.



## Приложение. Тексты программ

### Программа для действительного ряда Фурье.

```
clear, clc, close all;

dots_num = 1024; % кол-во точек
N = 0:1:dots_num; % интервал точек
T = pi; % диапазон изменения функции f(i) равен +/-T
kp = 10; % количество периодов гармонической функции

fourie_parts_arr = [8, 16, 32, 64, 128, 256]; % разные количества членов ряда
Фурье
STD_percent_arr = []; % массив для создания графика
SKO_percent=f(fourie_parts)

for fourie_parts = fourie_parts_arr % fourie_parts - текущие количество
членов ряда Фурье

    idx = zeros(1, length(N));
    f = zeros(1, length(N)); % исходная функция

    % ---- Вычисление ряда Фурье ----
    for i=1:dots_num + 1
        idx(i) = 2 * T * (i-1 - dots_num/2) / dots_num;
        f(i) = abs(sin(kp * idx(i)));
    end

    Sa0 = sum(f) / dots_num;
    Sa = zeros(1, fourie_parts);
    Sb = zeros(1, fourie_parts);

    for i=1:dots_num + 1
        for j=1:fourie_parts
            Sa(j) = Sa(j) + f(i) * cos(j * idx(i));
            Sb(j) = Sb(j) + f(i) * sin(j * idx(i));
        end
    end

    % ---- нормализация ряда Фурье ----
    for i=1:fourie_parts
        Sa(i) = Sa(i) / (dots_num / 2);
```

```

    Sb(i) = Sb(i) / (dots_num / 2);
end

% ---- Вычисление графика дискретного сигнала ----
f_disc = zeros(1, length(N));
for i=1:dots_num + 1
    for j=1:fourie_parts
        f_disc(i) = f_disc(i) +...
            Sa(j) * cos(j * idx(i)) +...
            Sb(j) * sin(j * idx(i));
    end
    f_disc(i) = f_disc(i) + Sa0;
end

% ---- Вычисление спектра амплитуд ----
Sab = zeros(1, fourie_parts);
for j=1:fourie_parts
    Sab(j) = sqrt(Sa(j)^2 + Sb(j)^2);
end

% ---- Вычисление погрешности ----

df = zeros(1, dots_num); % Абсолютная погрешность
for i=2:dots_num-1
    df(i) = f(i) - f_disc(i);
end

STD = std(df / (max(f) - min(f)) * 100); % STD в процентном отношении
STD_percent_arr(end+1) = STD;

disp(fourie_parts);
disp(STD);
disp('---');

% ---- Визуализация графиков ----
% 1 - спектр амплитуд
% 2 - графики функции и восстановленной функции

figure
subplot(2, 1, 1),
plot(N, f, 'r-', 'DisplayName', 'Original f(x)'), hold on,
plot(N, f_disc, 'b-', 'DisplayName', 'Fourie f(x)'),
title('Функция abs(sin(x))'),

```

```

xlabel('x'),
ylabel('f(x)'),
legend(),
grid on;

subplot(2, 1, 2),
stem(Sab),
title('Спектр амплитуд сигнала'),
xlabel('Количество членов ряда Фурье'),
ylabel('Амплитуда'),
legend(strcat('Количество членов ряда Фурье: ', num2str(fourie_parts)));
grid on;
saveas(gcf, strcat('fourie_part', num2str(fourie_parts), '.png'));
end

figure, plot(fourie_parts_arr, STD_percent_arr, '-o'),
title('зависимость процента погрешности от членов ряда Фурье'),
ylabel('%'),
xlabel('Количество членов ряда Фурье');
saveas(gcf, 'STD_depend.png');

```

### Программа для комплексного ряда Фурье.

```
clear, clc, close all;
```

```
dots_num = 1024; % кол-во точек  
N = 0:1:dots_num; % интервал точек  
T = 2 * pi; % размер периода функции  
kp = 1; % количество периодов гармонической функции
```

```
fourie_parts_arr = [8, 16, 32, 64, 128, 256]; % разные количества членов  
комплексного ряда Фурье
```

```
STD_percent_arr = []; % массив для создания графика  
SKO_percent=f(fourie_parts)
```

```
for fourie_parts = fourie_parts_arr % fourie_parts - текущие количество  
членов комплексного ряда Фурье
```

```
idx = zeros(1, length(N));  
f = zeros(1, length(N)); % исходная функция
```

```
% ---- Вычисление комплексного ряда фурье ----
```

```
for i=1:dots_num + 1  
    idx(i) = T * (i-1) / dots_num;  
    f(i) = abs(sin(kp * idx(i)));  
end
```

```
C0 = sum(f) * (2 / dots_num);  
C = zeros(1, fourie_parts);
```

```
for i=1:dots_num + 1  
    for j=1:fourie_parts  
        C(j) = C(j) + f(i) * exp(1i * 2 * pi * j * (i-1) / dots_num);  
    end  
end
```

```
% ---- нормализация комплексного ряда Фурье ----
```

```
for i=1:fourie_parts  
    C(i) = C(i) * (2 / dots_num);  
end
```

```
% ---- Вычисление графика дискретного сигнала ----
```

```
f_complex = zeros(1, length(N));  
for i=1:dots_num + 1
```



```

    for j=1:fourie_parts
        f_complex(i) = f_complex(i) + ...
            C(j) * exp(1i * 2 * pi * j * (i-1) / dots_num);
    end
    f_complex(i) = f_complex(i) + C0/2;
end

% ---- Вычисление спектра амплитуд ----
Cab = zeros(1, fourie_parts);
for j=1:fourie_parts
    Cab(j) = abs(C(j));
end

% ---- Вычисление погрешности ----

df = zeros(1, dots_num); % Абсолютная погрешность
for i=2:dots_num-1
    df(i) = f(i) - real(f_complex(i));
end

STD = std(df / (max(real(f)) - min(real(f))) * 100); % STD в процентном
отношении
STD_percent_arr(end+1) = STD;

disp(fourie_parts);
disp(STD);
disp('---');

% ---- Визуализация графиков ----
% 1 - спектр амплитуд
% 2 - графики функции и восстановленной функции

figure
subplot(2, 1, 1),
plot(N, f, 'r-', 'DisplayName', 'Original f(x)'), hold on,
plot(N, real(f_complex), 'b-', 'DisplayName', 'Complex Fourie f(x)'),
title('Функция abs(sin(x))'),
xlabel('x'),
ylabel('f(x)'),
legend(),
grid on;

subplot(2, 1, 2),

```

```

stem(Cab),
title('Спектр амплитуд сигнала'),
xlabel('Количество членов комплексного ряда Фурье'),
ylabel('Амплитуда'),
legend(strcat('Количество членов комплексного ряда Фурье: ',
num2str(fourie_parts)));
grid on;
saveas(gcf, strcat('fourie_complex_part', num2str(fourie_parts), '.png'));
end

```

```

figure, plot(fourie_parts_arr, STD_percent_arr, '-o'),
title('зависимость процента погрешности от членов комплексного ряда
Фурье'),
ylabel('%'),
xlabel('Количество членов комплексного ряда Фурье');
saveas(gcf, 'STD_complex_depend.png');

```

попробуй к функции  $\text{abs}(\sin(x)) + 2$