Вариант 41

$$X_{k+2} - X_{k+1} - 12X_k = -3\cdot k + 4 \quad (*) \; ; \quad X_0 = -3, \; X_1 = 4$$

неоднородное разностное уравнение $\quad | \; f_k = -3\cdot k + 4.$

I Метод вариации произвольных постоянных Лагранжа.

а) Общее решение однородного уравнения.

$$X_{k+2} - X_{k+1} - 12\cdot X_k = 0 \; ; \; X_0 = -3, \; X_1 = 4$$

$$X_k = C\gamma^k$$

Характеристическое уравнение:

$$\gamma^2 - \gamma - 12 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\gamma_1 = -3 \\ \gamma_2 = 4\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}X_k^{(1)} = C_1\cdot(-3)^k \\ X_k^{(2)} = C_2\cdot 4^k\end{array}\right. \Rightarrow X_k = C_1\cdot(-3)^k + C_2\cdot 4^k$$

б) поиск X_k, X_{k+1}, X_{k+2}.

$$X_k = C_1(k)\cdot(-3)^k + C_2(k)\cdot 4^k \; ; \quad (1)$$

$$X_{k+1} = C_1(k+1)\cdot(-3)^{k+1} + C_2(k+1)\cdot 4^{k+1} = C_1(k+1)\cdot(-3)^{k+1} - C_1(k)\cdot(-3)^{k+1} + C_1(k)(-3)^{k+1} + C_2(k+1)\cdot 4^{k+1} - C_2(k)\cdot 4^{k+1} + C_2(k)\cdot 4^{k+1} =$$

$$= \Delta C_1(k)\cdot(-3)^{k+1} + C_1(k)\cdot(-3)^{k+1} + \Delta C_2(k)\cdot 4^{k+1} + C_2(k)\cdot 4^{k+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{При условии, что:} \\ \Delta C_1(k)\cdot(-3)^{k+1} + \Delta C_2(k)\cdot 4^{k+1} = 0 \quad (!)\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_{k+1} = C_1(k)\cdot(-3)^{k+1} + C_2(k)\cdot 4^{k+1} \quad (2)$$

$$x_{k+2} = \Delta C_1(k)\cdot(-3)^{k+2} + C_1(k)\cdot(-3)^{k+2} + \Delta C_2(k)\cdot 4^{k+2} + C_2(k)\cdot 4^{k+2} \quad (4)$$

в) подставим ф-лы (1), (2), (3) в (*)

$$(*) \Leftrightarrow \Delta C_1(k)\cdot(-3)^{k+2} + C_1(k)\cdot(-3)^{k+2} + \Delta C_2(k)\cdot 4^{k+2} + C_2(k)\cdot 4^{k+2} - 1(C_1(k)\cdot(-3)^{k+1} + C_2(k)\cdot 4^{k+1})$$

$$-12(C_1(k)\cdot(-3)^k + C_2(k)\cdot 4^k) = f_k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta C_1(k)\cdot(-3)^{k+2} + C_1(k)\cdot(-3)^k\cdot((-3)^2 - 1\cdot(-3) - 12) + \Delta C_2(k)\cdot 4^{k+2} + C_2(k)\cdot 4^k\cdot(4^2 - 1\cdot 4 - 12) = f_k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta C_1(k)\cdot(-3)^{k+2} + \Delta C_2(k)\cdot 4^{k+2} = f_k \quad (4)$$

г) Создаем систему из (4) и (1) и найдем $\Delta C_1(k)$ и $\Delta C_2(k)$

$$\begin{cases} \Delta C_1(k)\cdot(-3)^{k+1} + \Delta C_2(k)\cdot 4^{k+1} = 0 \\ \Delta C_1(k)\cdot(-3)^{k+2} + \Delta C_2(k)\cdot 4^{k+2} = f_k \end{cases}$$

$$\underbrace{\Delta C_1(k) = \frac{-\Delta C_2(k)\cdot 4^{k+1}}{(-3)^{k+1}}}$$

$$12\,\Delta C_2(k)\cdot 4^k + 16\,\Delta C_2(k)\cdot 4^k = f_k$$

$$28\,\Delta C_2(k)\cdot 4^k = f_k$$

$$\Delta C_2(k) = f_k\cdot 4^{-k}\cdot 28^{-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Delta C_2(k) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k\cdot 4^{-k}\cdot 28^{-1} = C_2(n) - C_2(0)$$

$$C_2(k) = C_2(0) + \frac{1}{28}\sum_{m=0}^{k-1} f_m\cdot 4^{-m}$$

$$\Delta C_2(k) = \frac{-\Delta C_1(k)\cdot(-3)^{k+1}}{4^{k+1}}$$

$$-\Delta C_1(k)\cdot(-3)^{k+1}\cdot 4 + \Delta C_1(k)\cdot(-3)^{k+2} = f_k$$

$$12\,\Delta C_1(k)\cdot(-3)^k + 9\,\Delta C_1(k)\cdot(-3)^k = f_k$$

$$21\,\Delta C_1(k)\cdot(-3)^k = f_k$$

$$\Delta C_1(k) = f_k\cdot(-3)^{-k}\cdot 21^{-1}$$

$$C_1(n) - C_1(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta C_1(k) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k\cdot(-3)^{-k}\cdot 21^{-1}$$

$$C_1(k) = C_1(0) + \frac{1}{21}\sum_{m=0}^{k-1} f_m\cdot(-3)^{-m}$$

д) подставим $c_1(k)$ и $c_2(k)$ в ①

① $\Leftrightarrow$ $x_k = (-3)^k \cdot c_1(0) + \frac{(-3)^k}{21} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} f_m \cdot (-3)^{-m} + 4^k \cdot c_2(0) + \frac{4^k}{28} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} f_m \cdot 4^{-m}$

е) найдем $c_1(0)$ и $c_2(0)$.

$x_0 = -3, \; x_1 = 4.$

$$\begin{cases} c_1(0) + c_2(0) = -3 \\ -3c_1(0) - \frac{1}{7} \cdot f_0 + 4c_2(0) + 1/7 \cdot f_0 = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1(0) + c_2(0) = -3 \\ -3 \cdot c_1(0) + 4c_2(0) = 4 \end{cases}$$

$c_1(0) = -\frac{16}{7}$

$c_2(0) = -\frac{5}{7}$

ж) подставим $c_1(0)$ и $c_2(0)$ в ①

$x_k = (-3)^k \cdot \left(-\frac{16}{7}\right) + \frac{(-3)^k}{21} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} f_m \cdot (-3)^{-m} + 4^k \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) + \frac{4^k}{28} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} f_m \cdot 4^{-m}$!!!!

з) $\boxed{\text{Проверка правильности } x_k.}$

$x_0 = 1 \cdot \left(-\frac{16}{7}\right) + \frac{1}{21} \cdot f_0 + 1 \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) + \frac{1}{28} \cdot f_0 = -\frac{56}{21} \approx -2,(7) \approx 3.$

$x_1 = -3 \cdot \left(-\frac{16}{7}\right) + \left(-\frac{3}{21} \cdot f_0\right) + 4 \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) + \frac{4}{28} \cdot f_0 = \frac{28}{7} = 4.$

и) Преобразуем суммы.

$f_m = -3 \cdot m + 4$

$\sum_{m=0}^{k-1} (-3)^{-m} \cdot f_m = \sum_{m=0}^{k-1} (-3)^{-m} \cdot (-3 \cdot m + 4)$

$\sum_{m=0}^{k-1} 4^{-m} \cdot f_m = \sum_{m=0}^{k-1} 4^{-m} \cdot (-3m + 4)$

$$-3\sum_{m=0}^{K-1}(-3)^{-m}\cdot m+4\sum_{m=0}^{K-1}(-3)^{-m} \quad \Bigg| \quad -3\sum_{m=0}^{K-1}4^{-m}\cdot m+4\sum_{m=0}^{K-1}4^{-m}$$

к) Выделим формулы сумм.

1) $\sum_{m=0}^{K-1} a^m \ ; \ a:\{(-3)^{-1};4^{-1}\}$ K.1.

2) $\sum_{m=0}^{K-1} a^m\cdot m \ ; \ a:\{(-3)^{-1};4^{-1}\}$ K.2.

л) Выделим линейные формулы сумм для всех a.
(по Абелю)

$\boxed{\text{для K.1.}}$

$$\sum_{m=0}^{K-1}(-3)^{-m}=\frac{(-3)^{-K}-1}{(-3)^{-1}-1}=-3\cdot\left((-3)^{-K}-1\right)\cdot 4^{-1}$$ Л.1

$$\sum_{m=0}^{K-1}4^{-m}=\frac{4^{-K}-1}{4^{-1}-1}=-4\cdot\left(4^{-K}-1\right)\cdot 3^{-1}$$ Л.2

$\boxed{\text{для K.2.}}$

Л.3

$$\sum(-3)^{-m}\cdot m=\frac{a^K\cdot(K-1)}{a-1}-\frac{a(a^{K-1}-1)}{(a-1)^2}\ \left[\text{ф-ла рас-ов}\right]=-3\cdot 4^{-1}\cdot\left(\left[(-3)^{-K}\cdot(K-1)\right]-\left[\left((-3)^{-K+1}-1\right)\cdot 4^{-1}\right]\right)$$

$$\sum 4^{-m}\cdot m=4\cdot 3^{-1}\cdot\left(\left[4^{-K}\cdot(K-1)\cdot(-1)\right]-\left[\left(4^{-K+1}-1\right)\cdot 3^{-1}\right]\right)$$ Л.4

м) Преобразуем формулы приведенных сумм к общему виду.

$$1)\ \sum_{m=0}^{K-1}(-3)^{-m}\cdot f_m = -3\sum_{m=0}^{K-1}(-3)^{-m}\cdot m + 4\cdot\sum_{m=0}^{K-1}(-3)^{-m} = -3\cdot \text{л.3} + 4\cdot \text{л.1} =$$

$$= 9\cdot 4^{-1}\cdot\left(\left[(-3)^{-K}\cdot(K-1)\right]-\left[\left((-3)^{-K+1}-1\right)\cdot 4^{-1}\right]\right)+\left(-12\cdot\left((-3)^{-K}-1\right)\cdot 4^{-1}\right)\quad \text{м.1}$$

$$2)\ \sum_{m=0}^{K-1}4^{-m}\cdot f_m = -3\cdot\sum_{m=0}^{K-1}4^{-m}\cdot m + 4\sum_{m=0}^{K-1}4^{-m} = -3\cdot \text{л.4} + 4\cdot \text{л.2} =$$

$$= -4\cdot\left(\left[4^{-K}\cdot(K-1)\cdot(-1)\right]-\left[\left(4^{-K+1}-1\right)\cdot 3^{-1}\right]\right)+\left(-16\cdot\left(4^{-K}-1\right)\cdot 3^{-1}\right)\quad \text{м.2}$$

и) Преобразуем X_K. !!!! (№ ф-лы)

$$X_K = (-3)^K\cdot\left(-\frac{16}{7}\right)+\frac{(-3)^K}{21}\cdot \text{м.1} + 4^K\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)+\frac{4^K}{28}\cdot \text{м.2}.$$

II Метод подбора.

а) составим $x_k^{(\text{частное})}$

$x_k = x_k^{(\text{частное})} + c_1 \cdot x_k^{(1)} + c_2 \cdot x_k^{(2)}$; из общего решения однородного уравнения:

$$\begin{cases} x_k^{(1)} = c_1 \cdot (-3)^k \\ x_k^{(2)} = c_2 \cdot 4^k \end{cases}$$

$x_k^{(\text{частное})} = A \cdot k + B$

б) подставим выведенную ф-лу в *

$$* \Rightarrow A(k+2) + B - (A(k+1)+B) - 12(Ak+B) = -3k+4$$

$$Ak + 2A + B - Ak - A - B - 12Ak - 12B = -3k+4$$

$$(2A + B - A - B - 12B) + k(A - A - 12A) = -3k+4$$

$$(A - 12B) + k(-12A) = -3k+4$$

в) составим систему линейных уравнений и найдем A и B.

$$\begin{cases} A - 12B = 4 \\ -12A = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/4 \\ B = -5/16 \end{cases}$$

г) составим $x_k^{(\text{частное})}$, x_k, c_1, c_2

$x_k^{(\text{частное})} = 1/4 \cdot k - 5/16$

$x_k = 1/4 \cdot k - 5/16 + c_1 \cdot (-3)^k + c_2 \cdot 4^k$

при $K=0$:

$$-\frac{5}{16}+C_1+C_2=-3$$

$$C_1+C_2=-3+\frac{5}{16}$$

$$C_1+C_2=-\frac{48}{16}+\frac{5}{16}$$

$$C_1+C_2=-\frac{43}{16}$$

при $K=1$:

$$\frac{1}{4}-\frac{5}{16}-3C_1+4C_2=4$$

$$-3C_1+4C_2=4-\frac{1}{4}+\frac{5}{16}$$

$$-3C_1+4C_2=\frac{15}{4}+\frac{5}{16}$$

$$-3C_1+4C_2=\frac{60}{16}+\frac{5}{16}$$

$$-3C_1+4C_2=\frac{65}{16}$$

$$\begin{cases} C_1+C_2=-\frac{43}{16} \\ -3C_1+4C_2=\frac{65}{16} \end{cases}$$

$$C_1=-\frac{237}{112}$$

$$C_2=-\frac{4}{7}$$

$$X_K=\frac{1}{4}\cdot K-\frac{5}{16}-\frac{237}{112}\cdot(-3)^K-\frac{4}{7}\cdot 4^K$$

9) Проверка X_K.

$K=0 \Rightarrow X_0=\approx -2,9(9)\approx -3$

$K=1 \Rightarrow X_1=\approx 4,00\approx 4$.