一、填空题（每题 2 分，共 10 题，总分 20 分）

1. 1；　　2. $\boldsymbol{A}$-3$\boldsymbol{E}$；　　3. -8；　　4. 0；　　5.只有零解（或者唯一解）；

6. n-1；　　7. 3；　　8. 0；　　9. -6；　　10. $\boldsymbol{AA}^T=\boldsymbol{E}$（或者其它等价说法，如 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^T$ 、$\boldsymbol{A}$ 的列向量组构成标准正交基等）

二、计算题：（每题 8 分，共 5 题，总分 40 分，需要写清解题步骤）

1. 1）

$$D=\begin{vmatrix}1&4&0&1\\2&2&2&2\\0&5&0&0\\-3&-1&1&-1\end{vmatrix}=-5\begin{vmatrix}1&0&1\\2&2&2\\-3&1&-1\end{vmatrix}=-10\begin{vmatrix}1&1\\-3&-1\end{vmatrix}=-20$$

2）

$$A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}=\begin{vmatrix}1&4&0&1\\2&2&2&2\\1&1&1&1\\-3&-1&1&-1\end{vmatrix}=0$$

2. 由 $\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&0\\1&-1&2\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\1&-2\end{pmatrix}+\boldsymbol{X}$ 可知 $\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\1&-2\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&1&0\\1&1&0&2&1\\1&-1&1&1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&1&0\\0&0&1&1&1\\0&-2&2&0&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1&-1\\0&1&0&1&2\\0&0&1&1&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\\1&1\end{pmatrix}$$

3. 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 可得 $R(A)+R(B)\le 3$， 又因为 $R(B)=1$，因此 $R(A)$最大为 2.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&0&2\\-3&t&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&8\\0&t+6&12\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&t&0\end{pmatrix}$$，因此 $t=0$.

4. 对系数矩阵做初等行变换：$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&-4\\4&3&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-3&-6\\0&-1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$

得到通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$（不唯一）（2 分），基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$（不唯一）

5. $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=-2\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$

令 $\varphi(\lambda)=-2\lambda^{-1}+\lambda+2$，则 $\varphi(\boldsymbol{A})$ 的 3 个特征值为：
$$\begin{aligned}\varphi(1)&=-2+1+2=1\\\varphi(2)&=-2\cdot 1/2+2+2=3\\\varphi(-1)&=2-1+2=3\end{aligned}$$

于是行列式 $|\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}|=1\cdot 3\cdot 3=9$

三、（**10 分**） 对矩阵进行初等行变换

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&2\\2&0&1&1\\1&1&1&1\\-1&0&-1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&2\\0&-2&1&-3\\0&0&1&-1\\0&1&-1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

分别用 a_1，a_2，a_3，a_4 表示 $\boldsymbol{A}$ 的列向量，则最大线性无关组由 a_1，a_2，a_3 组成。

且 $a_4= a_1+a_2-a_3$

四、（**10 分**）令 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&-1&0\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&1\\0&-1&0\\0&-3&2\end{pmatrix}$$

五、（**10 分**）该问题等价于解线性方程组 $\begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

解方程组，得到基础解系$(-2, 1, 2)^T$　　（不唯一）

单位化得到 $1/3(-2, 1, 2)^T$

六、（**10 分**）(1) 矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&-1&0\\-1&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

(2) 求矩阵 A 的特征值得到 2,4,-1.因此正交线性变换得到的标准形为 $2y_1^2+4y_2^2-y_3^2$

规范形为 $z_1^2+z_2^2-z_3^2$　　（不唯一，特征值顺序可换）

(3) 该二次型的秩为 3，正惯性指数为 2，不是正定二次型。