2016 通院线性代数 A 院考

一、填空题（每题 3 分，共 30 分）

1. 若行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=3$，则 $\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{31}-a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & 2a_{32}-a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & 2a_{33}-a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}=$__________。

2. 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式为 1，则 $\left|2\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^{*}\right|=$___________。

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶矩阵，若 $R(\boldsymbol{A})=2$，则 $R(\boldsymbol{A}^{*})=$__________。

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 5×3 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 3×5 矩阵，则 $|\boldsymbol{AB}|=$__________。

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & t & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为秩为 1 的 3×4 矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $t=$________。

6. 若 5 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的维数为__________。

7. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为列满秩矩阵，则 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)$ 的秩为____________。

8. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，则在向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 中，__________一定可以由其它向量线性表示。

9. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩为 r，则由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 生成的子空间的维数为__________。

10. 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2、5、λ，且 $|2\boldsymbol{A}|=-80$，则 $\lambda=$__________。

二、计算题（每题 8 分，共 48 分）

1. 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$，求（1）$D$；（2）$-2M_{14}+M_{24}-3M_{34}+5M_{44}$.

2. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$，试求解矩阵方程 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{X}$.

3. 求齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0 \\ 2x_1-x_2-3x_3=0 \\ 4x_1+3x_2-x_3=0 \end{cases}$的通解，并写出其基础解系。

4. 求向量组$a_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\end{pmatrix}^T, a_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}^T, a_3=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\end{pmatrix}^T, a_4=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\end{pmatrix}^T$的一个最大线性无关组，并将其它向量用该最大线性无关组线性表示。

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ 是线性无关的三维列向量，且满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_2=2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_3=3\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}_1$，（1）求矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)\boldsymbol{B}$；（2）求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值。

6. 设三阶不可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & x\end{pmatrix}$相似，求其中的参数 x，并求 $\boldsymbol{A}$ 的秩。

三、综合题（共 22 分）

1. **（本题 14 分）**设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+4x_1x_2$.

（1）用正交线性变换化二次型为标准型，并写出正交线性变换；

（2）求此二次型的秩及正惯性指数，判断是否为正定二次型。

2. **（本题 8 分）**证明：任意 n+1 个 n 维向量一定线性相关。