一、填空题（每空 3 分，共计 15 分）

1、$|2A^T| = -64$（负 64）；　　2、**9**；　　3、$(A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$

4、R(A) =2；　　5、Rs=**3**

二、计算题（每题 6 分，共计 30 分）

1、$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 9 \\ -2 & 10 & 19 \\ -4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$　$(\boldsymbol{AB})^T=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -3 & 10 & 5 \\ 9 & 19 & -1 \end{pmatrix}$

2、$(A\quad E)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} -7 & 4 & 2 \\ 6 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3、$A_1=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$

$|A^8|=|A|^8=|A_1|^8|A_2|^8=(-25)^8(4)^8=100^8=10^{16}$

4、$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix}$，　$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{vmatrix}=(k-1)^2(k+2)$

$\because \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$R^3$的一组基，$\therefore |A|\neq 0$，$k$应满足：$k\neq 1$且$k\neq -2$

5、$AB-A^2=3B-9E \Rightarrow (A-3E)B=A^2-9E \Rightarrow (A-3E)B=(A-3E)(A+3E)$

$\because |A-3E|\neq 0 \therefore$ 等式两边同时左乘$(A-3E)^{-1}$，得$B=A+3E=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

三、(8 分)

1)　$A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}=-6$

2) $M_{11}-M_{21}-2M_{41}=A_{11}+A_{21}+2A_{41}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}=14$

四、(8 分)

1、$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ (3分), $f=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

2、$a_{11}=1>0,\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=2>0,\quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix}=6>0$

A的各阶顺序主子式均为正，因此矩阵A为正定矩阵。

五、(8 分)

$$(A\quad b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

特解$\eta^*=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,基础解系$\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_3=\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

通解$\eta=\eta^*+c_1\xi_1+c_2\xi_2+c_3\xi_3$, $c_1,c_2,c_3\in R$

六、(8 分)

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_5=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\-1\end{pmatrix}$$

$$A=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)=\begin{pmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&3&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\mathrm{R}(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)=3$，最大无关组是$a_1,a_2,a_3$

$a_4=a_1+3a_2-a_3$，$a_5=-a_2+a_3$

七、（9 分）

$$b_1=a_1,\quad e_1=\frac{b_1}{\|b_1\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$b_2=a_2-\frac{[a_2,b_1]}{\|b_1\|^2}b_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad e_2=\frac{b_2}{\|b_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$b_3=a_3-\frac{[a_3,b_1]}{\|b_1\|^2}b_1-\frac{[a_3,b_2]}{\|b_2\|^2}b_2=\begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix}-\frac{14}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{8}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\quad e_3=\frac{b_3}{\|b_3\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$