西安邮电大学 2021----2022 学年第 1 学期试题卷

标准答案

课程：线性代数A 类型：A 卷 专业、年级：安全、对抗、网安2021级

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分	30	40	10	10	10					100

一、填空题（每空 2 分，共 15 空，总分 30 分）

1. $\frac{n(n-1)}{2}$ ； 2. 2； 3. 3, 1； 4. 0； 5. 1； 6. a_4； 7. 0；

8. 相关； 9. 2； 10. 5； 11. 1； 12. 是； 13. 2； 14. 2

二、计算题：（每题 8 分，共 5 题，总分 40 分，需要写清解题步骤）

1. $$D_n=\begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} na+b & a & \cdots & a \\ na+b & a+b & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ na+b & a & \cdots & a+b \end{vmatrix}$$ （每个等号分别 3-3-2 分，共 8 分）

$$=(na+b)\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}=b^{n-1}(na+b)$$

2. $$|A|=\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=3$$ （4 分）； $\left|A^4\right|=\left|A\right|^4=3^4=81$ （4 分）。

3. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$ （4 分）

因此所求逆矩阵为 $1/4\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. （4 分）

4. （1）根据题目可得 $B(a_1,a_2,a_3)=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，因此 $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ （4 分）

（2）令 $A=(a_1,a_2,a_3)$，则 $BA=AP$，因此 $|B|=|APA^{-1}|=|P|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}=10$ （4 分）

5. 首先由 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3 可知方程组 $\boldsymbol{A}x=0$ 的基础解系只有一个向量，容易得到是 $\eta=(1,1,0,1)^T$ （3 分）

又由已知可以看出 $\boldsymbol{A}x=b$ 的一个特解是 $\xi=(1,1,1,0)^T$ （3 分）

因此方程组的通解为：$x=k\eta+\xi, k\in R$. （2 分）

三（10 分） $Ap=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & -2 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ a+1 \\ b-2 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\lambda=1, a=0, b=3$ （5 分）

$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2)=-(\lambda-2)^2(\lambda-1)$，因此所有特征值为 $\lambda=1,2,2$ （5 分）

四（10 分） 合并矩阵做行变换 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ （6 分）；

向量组 a_1, a_2, a_3, a_4 的秩为 4，是一个基； （2 分）

b 的坐标为(-2,-3,4,-1) （2 分）

五（10 分） （1）二次型矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，求特征值得到 0, 3, 3 （3 分）

标准形为 $3y_2{}^2+3y_3{}^2$（不唯一，特征值顺序可换），规范形 $z_2{}^2+z_3{}^2$ （4 分）

（2）秩为 2，正惯性指数为 2，不是正定二次型。 （3 分）

说明：1．标准答案务必正确无误。 2．将每道大题得分和总分填入得分栏中。