课程： 线性代数 A 类型： A 卷 专业、年级：通院各专业 2018 级

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分	20	48	10	10	12					100

一、填空题（每题 2 分，共 10 题，总分 20 分）

1. -10； 2. -5； 3. 2； 4. 0； 5.0； 6. 2；

7. a_3； 8. 2； 9. 0； 10. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

二、计算题：（每题 8 分，共 6 题，总分 48 分，需要写清解题步骤）

1. $|AB|=|A||B|$，$|A|=4\times6=24, |B|=(-1\times(-4+6))=-2$

$|AB|=24\times(-2)=-48$（也可先计算 AB 的乘积，再算行列式）

2. $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=1\times(-2)=-2$，$|A^{10}|=|A|^{10}=(-2)^{10}=1024$

3. $AX=2E-A\Rightarrow X=A^{-1}(2E-A)$，$2E-A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，因此 $X=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 8 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $B(a_1,a_2,a_3)=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，因此 $P=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$B(a_1,a_2,a_3)=(a_1,a_2,a_3)P\Rightarrow B=(a_1,a_2,a_3)P(a_1,a_2,a_3)^{-1}$

$\Rightarrow|B|=|P|=1$

说明：1．标准答案务必要正确无误。

5. |A|=6（2 分）A^2-2A^*+3E 对应的多项式为 $x^2-12x^{-1}+3$ 对应于 A 的特征值 1,2,3，该矩阵的特征值分别为-8,1,8

6. $|A-\lambda E|=\left|\begin{pmatrix}1-\lambda & 1\\ 0 & 2-\lambda\end{pmatrix}\right|=(1-\lambda)(2-\lambda)$，1 和 2 为其特征值，特征向量为$(1\ 0)^T$，$(1\ 1)^T$ 故

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{-1},A^{2019}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}^{2019}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2^{2019}-1\\0&2^{2019}\end{pmatrix}$$

三、（**10 分**） 对增广矩阵进行行变换 $\begin{pmatrix}1&1&1&0&3\\0&1&2&-2&3\\1&1&0&2&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&-1\\0&1&0&2&5\\0&0&1&-2&-1\end{pmatrix}$ 得到通解 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}0\\-2\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\5\\-1\\0\end{pmatrix}$（不唯一）

四、（**10 分**）合并矩阵做行变换 $\begin{pmatrix}1&-1&0&1&1\\1&0&1&1&2\\0&1&1&-1&3\\-1&0&0&1&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&-6\\0&1&0&0&-9\\0&0&1&0&10\\0&0&0&1&-2\end{pmatrix}$

向量组 a_1, a_2,a_3,a_4 的秩为 4，是一个基，b 的坐标为(-6,-9,10,-2)

五、（**12 分**）(1) 二次型矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&2\\0&2&0\end{pmatrix}$，求特征值得到 1,-1,4，分别求解特征向量，并进行单位化，得到正交矩阵 $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\\0&-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$，标准形为 $y_1^2-y_2^2+4y_3^2$（不唯一，特征值顺序可换）

(2) 秩为 3，正惯性指数为 2，不是正定二次型。

2．将每道大题得分和总分填入得分栏中。