一、填空题（每题 3 分，共 10 题，总分 30 分）

1. -6；　2. 27；　3. 0；　4. 0；　5. 0；　6. 2；　7. 2；　8. α_4；　9. r；　10. -1

二、计算题：（每题 8 分，共 6 题，总分 48 分，需要写清解题步骤）

1. 1）$D=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&0&2\\-1&3&1&3\\2&5&0&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&2\\2&5&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&1&4\end{vmatrix}=2$

2）$-2M_{14}+M_{24}-3M_{34}+5M_{44}=\begin{vmatrix}1&2&0&2\\0&1&0&1\\-1&3&1&3\\2&5&0&5\end{vmatrix}=0$

2. 由 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{X}$ 可知 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=2\boldsymbol{E},\boldsymbol{X}=2(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}$（3 分）

$$\begin{pmatrix}-1&1&2&2&0&0\\0&2&0&0&2&0\\1&-1&-1&0&0&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&1&2&2&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&2&0&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&2&1&4\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&2&0&2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2&1&4\\0&1&0\\2&0&2\end{pmatrix}$$

3. 对系数矩阵进行行变换 $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&-1&-3\\4&3&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-5&-5\\0&-5&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

可以得到通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，　基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix}1&1&2&2\\2&0&2&2\\-1&-1&0&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$，$a_1,a_2,a_3$ 为最大无关组，$a_4=2a_3-a_1-a_2$

5. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&0\\1&0&3\end{pmatrix}$，因此 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&0\\1&0&3\end{pmatrix}$

$|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}|=\left|\begin{pmatrix}1-\lambda&2&-1\\0&1-\lambda&0\\1&0&3-\lambda\end{pmatrix}\right|=(1-\lambda)(\lambda-2)^2$，$\boldsymbol{A}$ 的特征值与 $\boldsymbol{B}$ 的相同，为 1,2,2

6. 由 $\boldsymbol{A}$ 不可逆知 0 为其特征值，故 $x=0$；　　R($\boldsymbol{A}$)=R($\boldsymbol{\Lambda}$)=2

三、综合题：（第一题 14 分，第二题 8 分，共 22 分）

1. （本题 14 分）（1）二次型的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\left|\begin{pmatrix}1-\lambda&2&0\\2&4-\lambda&0\\0&0&1-\lambda\end{pmatrix}\right|=\lambda(1-\lambda)(\lambda-5)$，可得特征值 0,1,5

分别求解线性方程组得到特征向量：$\begin{array}{l}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{p}_1=(-2,1,0)^T\\(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{p}_2=(0,0,1)^T\\(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{p}_3=(1,2,0)^T\end{array}$ --不唯一

正交化后得到正交矩阵$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}}&0&\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&0&\frac{2}{\sqrt{5}}\\0&1&0\end{pmatrix}$

正交线性变换为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$，得到的二次型的标准形为 $f=y_2^2+5y_3^2$ --不唯一，此处 $\boldsymbol{P}$ 的列向量换位置之后，相应 y_i 的系数也换位置，都算对。

（2）秩为 2，正惯性指数为 2，不是正定二次型。

2. （本题 8 分）设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_{n+1}$ 为 n+1 个 n 维列向量，令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_{n+1})$

则 A 为 n 行 n+1 列矩阵，其秩最大只能为 n.

因此$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_{n+1}$线性相关。 ---证明方法不唯一，可具体分析。