Tutorato 5

Sara Trabucco

29 Ottobre, 2025

Esercizi

Esercizio 1.

Sia X v.a. continua di cui risulta nota la densità

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

dove $x > 0$ e sia $Y = 1 - e^{-\lambda X}$ una trasformazione di tale v.a.. Determinare:

- la funzione di densità di Y;
- $P\left(\frac{1}{2} \leq Y \leq \frac{3}{4}\right)$.

Esercizio 2.

Siano $X_1, \ldots, X_{10}$ v.a. indipendenti ed identicamente distribuite secondo una normale standard. Si definiscano

$$W = \sum_{i=1}^{9} X_i^2$$

e

$$T = 3\frac{X_{10}}{\sqrt{W}}$$

e si calcoli:

a. La probabilità $P(W > 14.6837)$, un valore approssimato per $P(3 \leq W \leq 18)$, la mediana di W ed il quantile di ordine 0.95;

b. La probabilità $P(T > 2.2622)$, un valore approssimato per $P(-1 \leq T \leq 2.2)$, la mediana di T ed il quantile di ordine 0.05.

Esercizio 3.

Un'azienda si occupa della produzione di batterie; la durata di tali batterie risulta essere in media 60 giorni, con una deviazione standard pari a 5.

Un acquirente decide di acquistare un lotto di 20 batterie, a condizione che la durata media campionaria delle stesse non si discosti, da quella dichiarata di 60 giorni, di al più 2 giorni.

a. Utilizzando la disuguaglianza di Chebychev, determinare il limite inferiore della probabilità che il lotto richiesto sia conforme;

b. Applicando il Teorema del Limite Centrale, dare una stima della medesima probabilità;

c. Quanto dovrebbe essere n se volessimo che tale probabilità fosse almeno 0.99?

Esercizio 4.

Si supponga che una v.a. Y abbia distribuzione con media μ e varianza $\sigma^2 = 2$.
Quanto dev'essere grande un campione affinché la probabilità che la media campionaria $\bar{Y}_n$ disti dalla media della popolazione per non più di 0.5 sia almeno il 95%?

Esercizio 5.

Sia $X_1, \ldots, X_{10}$ un campione casuale tale per cui $X_i \sim \mathcal{N}(2, \sigma^2)$ con media nota e varianza sconosciuta. Sapendo che S^2 rappresenta la varianza campionaria e $\bar{X}$ la media campionaria, calcolare a,b e c tali per cui

- $P(S^2 \leq a\sigma^2) = 0.9$
- $P(\bar{X} - \mu \geq b \cdot S) = 0.2$
- se $\sigma^2 = 1$, $P(|\bar{X} - 2| \geq c) = 0.3$