

Tutorato 7

Sara Trabucco

12 Novembre, 2025

Esercizi

Esercizio 1.

Sia dato un campione (y_1, \dots, y_n) estratto da una distribuzione normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Si ricavino gli stimatore di massima verosimiglianza per μ e σ^2 (ignote).

$[\hat{\mu}_{MV} = \bar{X}, \hat{\sigma}_{MV}^2 = \hat{\sigma}^2 \text{ (varianza campionaria distorta)}]$

Esercizio 2.

Sia (y_1, \dots, y_n) un campione casuale da Y avente densità $f(y; \theta) = \frac{1}{\theta}$, $\theta \leq y \leq 2\theta$. Si consideri lo stimatore

$$T_n = \frac{2}{3} \bar{Y}_n$$

dove $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$.

- Verificare che lo stimatore T_n è corretto per θ ;
- Si determini l'errore quadratico dello stimatore T_n . È consistente in media quadratica?
- Si consideri ora lo stimatore

$$T'_n = \frac{1}{2} Y_1 + \frac{1}{6} Y_2$$

Si supponga $n = 3$: quale tra T_n e T'_n è da preferire come stimatore per θ ? Perché?

[a. Lo stimatore è corretto, b. $MSE_{T_n}(\theta) = \frac{\theta^2}{27n}$ ed è consistente, c. T_3 è preferibile perché ha varianza minore (è più efficiente, anche se entrambi sono non distorti)]

Esercizio 3.

Sia $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$ un campione proveniente da un'esponenziale di parametro λ .

- Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza per $\theta = \frac{1}{\lambda}$;
- Dimostrare che si tratta di uno stimatore non distorto per θ e consistente;
- Verificare se raggiunge il limite inferiore di Cramér-Rao.

[a. $\hat{\theta}_{MV} = \bar{Y}$, b. è sia non distorto che consistente, c. raggiunge il limite inferiore di Cramér-Rao]

Esercizio 4.

Siano X_1 e X_2 due osservazioni provenienti da una normale di media μ ignota e varianza σ^2 nota. Si definisce il seguente stimatore per la media μ :

$$T = aX_1 + (1 - a)X_2$$

- Determinare per quali valori di a lo stimatore T è non distorto per la media;
- Determinare per quali valori di a la varianza dello stimatore è minima;
- Se $a = \frac{1}{3}$, determinare quale sia lo stimatore più efficiente tra T e \bar{X} per μ .

[a. Qualsiasi valore di a , b. $a = \frac{1}{2}$, c. \bar{X} è più efficiente]