

# Tutorato 7

Sara Trabucco

12 Novembre, 2025

## Esercizi

### Esercizio 1.

Sia dato un campione  $(y_1, \dots, y_n)$  estratto da una distribuzione normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Si ricavino gli stimatore di massima verosimiglianza per  $\mu$  e  $\sigma^2$  (ignote).

### Esercizio 2.

Sia  $(y_1, \dots, y_n)$  un campione casuale da  $Y$  avente densità  $f(y; \theta) = \frac{1}{\theta}$ ,  $\theta \leq y \leq 2\theta$ . Si consideri lo stimatore

$$T_n = \frac{2}{3} \bar{Y}_n$$

dove  $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ .

- Verificare che lo stimatore  $T_n$  è corretto per  $\theta$ ;
- Si determini l'errore quadratico dello stimatore  $T_n$ . È consistente in media quadratica?
- Si consideri ora lo stimatore

$$T'_n = \frac{1}{2} Y_1 + \frac{1}{6} Y_2$$

Si supponga  $n = 3$ : quale tra  $T_n$  e  $T'_n$  è da preferire come stimatore per  $\theta$ ? Perché?

### Esercizio 3.

Sia  $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$  un campione proveniente da un'esponenziale di parametro  $\lambda$ .

- a. Determinare lo stimatore di massima verosimiglianza per  $\theta = \frac{1}{\lambda}$ ;
- b. Dimostrare che si tratta di uno stimatore non distorto per  $\theta$  e consistente;
- c. Verificare se raggiunge il limite inferiore di Cramér-Rao.

### Esercizio 4.

Siano  $X_1$  e  $X_2$  due osservazioni provenienti da una normale di media  $\mu$  ignota e varianza  $\sigma^2$  nota. Si definisce il seguente stimatore per la media  $\mu$ :

$$T = aX_1 + (1 - a)X_2$$

- a. Determinare per quali valori di  $a$  lo stimatore  $T$  è non distorto per la media;
- b. Determinare per quali valori di  $a$  la varianza dello stimatore è minima;
- c. Se  $a = \frac{1}{3}$ , determinare quale sia lo stimatore più efficiente tra  $T$  e  $\bar{X}$  per  $\mu$ .