Tutorato 12

Sara Trabucco

15 Dicembre, 2025

Esercizi

Esercizio 1.

Sia $Y_1, \dots, Y_n$ un campione casuale da una v.a. Gamma con parametri $r = 2$ e $\lambda > 0$ (incognito).

a. Sia $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$; determinare k tale che $k \cdot S_n$ abbia una distribuzione chi-quadrato;

b. Utilizzando il risultato al punto precedente, determinare un intervallo di confidenza al 90% per λ e per μ, la media della popolazione.

Esercizio 2.

Si vuole verificare l'ipotesi nulla che il parametro di una distribuzione esponenziale λ sia pari a 1 contro l'alternativa che sia $\lambda = 2$. Si dispone di un'unica osservazione e si decide di accettare H_0 se si presenta un valore maggiore di 0.2. Si determini:

a. il livello di significatività del test;

b. la potenza del test.

Esercizio 3.

Un'indagine campionaria su 900 utenti di un provider internet ha permesso di rilevare che il 73% di essi è completamente soddisfatto del servizio.

a. Costruire un intervallo di confidenza al livello del 98% per la proporzione di clienti soddisfatti nella popolazione;

b. Si determini l'ampiezza del campione n^* che assicura che la lunghezza dell'intervallo di cui al punto a) sia inferiore al 5%;

c. Si verifichi il sistema d'ipotesi $H_0 : p = 0.8$ contro $H_1 : p < 0.8$ sulla base del campione di cui sopra, ponendo il livello del test pari a 0.01. Si ottenga quindi il livello di significatività osservato;

d. Qualche anno dopo si riscontra che su un campione di 750 utenti il 76% è completamente soddisfatto del servizio. Si vuole verificare, al livello di significatività $\alpha = 0.05$, se la proporzione di utenti soddisfatti sia aumentata nel tempo.

Esercizio 4.

In una popolazione la variabile Y è descritta adeguatamente dalla distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$. Si dispone di un campione casuale $(Y_1, \dots, Y_n)$, proveniente da Y e si vuole sottoporre al seguente sistema d'ipotesi:

$$H_0 : \lambda = \lambda_0$$
$$H_1 : \lambda = \lambda_1 > \lambda_0$$

Fissato il livello di significatività del test $\alpha = 0.05$, determinare la regione di rifiuto del test più potente per la ipotesi date.

Esercizio 5.

Sia Y una variabile aleatoria con densità

$$f(y;\theta) = \frac{2(\theta - y)}{\theta^2}, \qquad 0 < y < \theta, \quad \theta > 0.$$

Si consideri un campione casuale $Y_1, \dots, Y_n$ di ampiezza n.

a. Calcolare $\mathbb{E}(Y)$.

b. Scrivere la funzione di verosimiglianza per θ.

c. Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza per θ e quello basato sul metodo dei momenti.