

Tutorato 4

Sara Trabucco

22 Ottobre, 2025

Esercizi

Esercizio 1.

Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti, $X \sim \text{Bin}(n_1, p)$ e $Y \sim \text{Bin}(n_2, p)$. Sia data $Z = X + Y$, determinare la distribuzione di Z , la sua media e la sua varianza.

Esercizio 2.

Siano X e Y due variabili aleatorie normali, tali per cui $\mathbb{E}[X] = 8$, $\mathbb{E}[Y] = 10$ e $\text{Var}(X) = 16$, $\text{Var}(Y) = 9$.

Se $Z = \frac{1}{2}X - Y$, che distribuzione (e con che parametri) segue Z se:

- X e Y sono indipendenti;
- X e Y sono dipendenti e la loro correlazione è pari a 0.2.

Esercizio 3.

Sia data la funzione di densità della v.a. Y definita come:

$$f(y, \theta) = \theta(1 + y)^{-\theta-1} \quad y > 0, \theta > 0$$

Verificare che la v.a. $W = \log(1 + Y)$ ha distribuzione esponenziale di parametro θ .

Esercizio 4.

In una fabbrica vengono prodotte valvole; il diametro di ciascuna di queste (misurato in cm) si può modellare con una v.a. X_i di media $\mathbb{E}[X_i] = 30$ e varianza $\text{Var}(X_i) = 0.1$.

Un fornitore richiede che, dato un lotto di n valvole, la media delle valvole presenti del lotto non superi quella desiderata di 30cm di non più 0.1 con probabilità almeno pari al 99%.

Determinare il numero di valvole n necessarie a soddisfare il fornitore fornendo una stima usando:

- a. la disuguaglianza di Chebychev;
- b. il Teorema del Limite Centrale;
- c. Confrontare poi i risultati.

Esercizio 5.

Ci troviamo sull'isola di Bayes: a causa di una tempesta, per nessuno dei 100.001 abitanti è possibile né andarsene, né per nessun altro dall'esterno raggiungere l'isola.

Un uomo viene trovato morto sulla spiaggia da un abitante intento a portare a spasso il cane: dalle indagini, risulta che l'uomo è stato assassinato con un coltello sul quale si trova il DNA del colpevole.

Gli investigatori decidono di comparare il DNA sull'arma con quello delle 100.000 presenti (si assume che quel DNA appartenga ad una sola persona, niente gemelli).

Se il test risulta positivo, allora il DNA rinvenuto è compatibile con quello dell'assassino, tuttavia *il test non è perfetto*:

- Su 10.000 casi testati, il test è risultato positivo ma la persona era innocente;
- Su 100.000 casi testati, il test è risultato negativo ma la persona era colpevole.

Basandoci su questo test, se testassimo tutte le persone presenti sull'isola il test ritornerebbe un risultato positivo per 11 di queste. Quale sarebbe la probabilità che una di queste sia effettivamente il colpevole?