Tutorato 8

Sara Trabucco

19 Novembre, 2025

Esercizi

Esercizio 1.

Sia $X_1, \ldots, X_n$ un campione casuale proveniente da una distribuzione con densità

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}$$

con $x \in (0,1)$ e $\theta > 0$.

a. Trovare, se possibile, lo stimatore di massima verosimiglianza per θ;

b. Determinare uno stimatore per θ usando il metodo dei momenti;

c. Sapendo che in questo caso lo stimatore è distorto (come si potrebbe dimostrare?), possiamo affermare se il bias sia in questo caso positivo o negativo? Se sì, come?

Bonus: che distribuzione segue X_i?
[a. $\hat{\theta}_{MV} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}$, b. $\hat{\theta}_{MOM} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$, c. Lo stimatore è distorto e la distorsione (bias) è positiva (sovrastima); si trova con Jensen]

Esercizio 2.

Un negozio propone un sondaggio ai suoi clienti per capire se siano soddisfatti o meno: su 120 clienti, 90 si sono ritenuti soddisfatti.

a. Fornire la stima di massima verosimiglianza per la propozione di clienti soddisfatti;

b. Mostrare che lo stimatore trovato è consistente e asintoticamente efficiente;

c. Mostrare che distribuzione segue lo stimatore (sia esattamente che asintoticamente);

[a. $\hat{p} = 0.75$, b. è sia consistente ($\mathrm{MSE}_{\hat{p}}(p) \to 0$, per $n \to \infty$) che efficiente ($\mathrm{Var}(\hat{p}) = \frac{1}{\mathcal{I}_n(p)}$), c. $\hat{p} \sim Bin(n,p)$ riscalata di $\frac{1}{n}$ e $\hat{p} \dot{\sim} \mathcal{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$]

Esercizio 3.

Sia Y una v.a. con densità

$$f(y;\theta) = \frac{2y}{\theta^2}$$

dove $y \in (0,\theta)$ e $\theta > 0$. Si consideri un campione casuale di ampiezza n da Y:

a. Determinare $\mathbb{E}[\bar{Y}_n]$, dove $\bar{Y}_n$ è la media campionaria;

b. Scrivere la funzione di verosimiglianza per θ;

c. Ottenere lo stimatore di massima verosimiglianza per θ.

[a. $\mathbb{E}[\bar{Y}_n] = \frac{2\theta}{3}$, b. $\mathcal{L}(\theta) = 2^n \theta^{-2n} \prod_{i=1}^n y_i \cdot \mathbb{I}_{\{y_i \in (0,\theta)\}}$, c. $\hat{\theta}_{MV} = Y_{(n)}$]

Esercizio 4.

Sia $W \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ e Y una v.a. χ^2 con $\nu = 4$ gradi di libertà.

a. Sapendo che $\mu = 0$ e $P(W < 1.5) = 0.6$, per quale valore a risulta essere $P(|W| \leq a) = 0.9$?

b. Si determini b tale che $P(|X| \leq b\sqrt{Y}) = 0.9$, dove $X = \frac{W-\mu}{\sigma}$ ed è noto che X e Y sono indipendenti.

[a. $a = 9.84$, b. $b = 1.0659$]