

Tutorato 8

Sara Trabucco

19 Novembre, 2025

Esercizi

Esercizio 1.

Sia X_1, \dots, X_n un campione casuale proveniente da una distribuzione con densità

$$f_{\theta}(x) = \theta x^{\theta-1}$$

con $x \in (0, 1)$ e $\theta > 0$.

- Trovare, se possibile, lo stimatore di massima verosimiglianza per θ ;
- Determinare uno stimatore per θ usando il metodo dei momenti;
- Sapendo che in questo caso lo stimatore è distorto (come si potrebbe dimostrare?), possiamo affermare se il bias sia in questo caso positivo o negativo? Se sì, come?

Bonus: che distribuzione segue X_i ?

Esercizio 2.

Un negozio propone un sondaggio ai suoi clienti per capire se siano soddisfatti o meno: su 120 clienti, 90 si sono ritenuti soddisfatti.

- Fornire la stima di massima verosimiglianza per la proporzione di clienti soddisfatti;
- Mostrare che lo stimatore trovato è consistente e asintoticamente efficiente;
- Mostrare che distribuzione segue lo stimatore (sia esattamente che asintoticamente);

Esercizio 3.

Sia Y una v.a. con densità

$$f(y; \theta) = \frac{2y}{\theta^2}$$

dove $y \in (0, \theta)$ e $\theta > 0$. Si consideri un campione casuale di ampiezza n da Y :

- a. Determinare $\mathbb{E}[\bar{Y}_n]$, dove \bar{Y}_n è la media campionaria;
- b. Scrivere la funzione di verosimiglianza per θ ;
- c. Ottenere lo stimatore di massima verosimiglianza per θ .

Esercizio 4.

Sia $W \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ e Y una v.a. χ^2 con $\nu = 4$ gradi di libertà.

- a. Sapendo che $\mu = 0$ e $P(W < 1.5) = 0.6$, per quale valore a risulta essere $P(|W| \leq a) = 0.9$?
- b. Si determini b tale che $P(|X| \leq b\sqrt{Y}) = 0.9$, dove $X = \frac{W-\mu}{\sigma}$ ed è noto che X e Y sono indipendenti.