# Chapitre 1 : Langage des probabilités

Nathaël Gozlan

17 septembre 2020

# Plan

# Présentation informelle

## Définition informelle

Une expérience aléatoire est une expérience qui, *répétée à l'identique*, peut conduire à *plusieurs résultats possibles*, et dont il est impossible de prévoir à l'avance le résultat *avec certitude*.

**Exemples d'expériences aléatoires** :

- jeux de hasard : lancer de dé, jeu de pile ou face, tirage d'une carte, loto, fléchettes, . . .
- le hasard intervient aussi dans les phénomènes physiques, économiques, sociologiques, . . . : relevé de température en un point donné, durée de vie d'une ampoule, durée du trajet domicile-université, nombre de naissances en France en 2021, cours de la bourse . . .

**Objectif du cours** : définir un cadre mathématique permettant de représenter une expérience aléatoire et dans lequel il sera possible de faire des calculs de probabilités.

# Plan

# Univers $\Omega$

On commence par modéliser l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire.

On appelle *univers des possibles* cet ensemble et on le note traditionnellement $\Omega$.

Un élément $\omega$ de $\Omega$ est désigné sous le nom d'*éventualité*.

Autres noms possibles pour $\Omega$ : *espace fondamental* ou *espace d'états*.

**Exemples :**

**Lancer de dé**. Le résultat de l'expérience aléatoire est un nombre entier compris entre 1 et 6. On pose donc

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

**Deux lancers de dés successifs**. Le résultat de l'expérience est un couple $(i, j)$ de nombres compris entre 1 et 6. On pose $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$.

# Exemples

Revenons sur les exemples mentionnés précédemment et donnons pour chacun d'eux l'univers $\Omega$.

1. **Jeu de pile ou face**. Le résultat de l'expérience est 'pile' ou 'face'. On peut prendre par exemple $\Omega = \{P; F\}$ ou $\Omega = \{0, 1\}$ (en codant par exemple 'pile' par 1, et 'face' par 0).
2. **Tirage d'une carte**. On prend par exemple un jeu de 52 cartes. On peut numéroter les cartes de 1 à 52. Le résultat de l'expérience est alors un nombre compris entre 1 et 52 : $\Omega = \{1, 2, \ldots, 52\}$.
3. **Température**. $\Omega = \mathbf{R}$.
4. **Durée du trajet domicile-université**. $\Omega = [0, +\infty[$.
5. **Naissance en France**. $\Omega = \mathbb{N}$.
6. **Cours d'une action en bourse**. On observe la valeur d'une action à un moment donné de la journée. Le résultat est un nombre positif. $\Omega = \mathbf{R}^+$.
7. **Cours d'une action en bourse sur une journée**. On observe cette fois le cours d'une action durant la période d'ouverture de la bourse. On observe une fonction donnant le cours en fonction du temps. Ici

$$\Omega = \mathcal{C}([9; 17,5]; \mathbf{R}^+) \qquad \text{fonctions continues positives définies sur } [9\,;\,17{,}5]$$

(les horaires d'ouverture de la bourse de Paris sont de 9h à 17h30).

## Exercice

Au jeu du loto, un joueur coche au hasard 5 numéros dans une grille comportant 49 numéros. Donner l'univers $\Omega$ correspondant à ce jeu.

# Plan

# Evénements aléatoires

## Définition

Un événement est un ensemble d'éventualités dont on peut dire, au vu de l'expérience, s'il est réalisé ou non.

Un événement est donc tout simplement un sous-ensemble de $\Omega$.

Les événements sont souvent notés avec des lettres capitales : $A, B, C, \ldots$

On notera $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de toutes les parties (c'est-à-dire les sous-ensembles) de $\Omega$.
Avec cette notation, un événement est donc un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$.

# Exemples d'événements

1. **Lancer de dé**. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
   L'événement 'Le résultat est 6' est représenté par
   $$A = \{6\} \subset \Omega = \{1,2,3,4,5,6\}.$$
   L'événement 'Le résultat est pair' est représenté par
   $$A = \{2,4,6\} \subset \Omega.$$
2. **Deux lancers de dés successifs**. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$.
   L'événement 'Les deux dés présentent une face paire' est représenté par
   $$A = \{(2,2);(2,4);(2,6);(4,2);(4,4);(4,6);(6,2);(6,4);(6,6)\}.$$
   L'événement 'La somme des deux dés est 4' est représenté par
   $$A = \{(2,2);(1,3);(3,1)\}.$$
3. **Durée du trajet domicile-université**. $\Omega = [0,+\infty[$.
   L'événement 'la durée du trajet est supérieure ou égale à 1h est représenté par
   $$A = [1,+\infty[.$$
4. **Naissances en France**. $\Omega = \mathbb{N}$.
   L'événement 'Il y a eu moins de 900000 naissances' est représenté par
   $$A = \{1,2,3,\ldots,899999\} \subset \Omega = \mathbb{N}.$$

Dans la pratique, on confond souvent la description syntaxique d'un événement et sa représentation ensembliste : par exemple, dans le cas du lancer de dés on écrira
$$A = \{ \text{ Le résultat du lancer est pair } \} = \{2,4,6\}.$$

# Rappels de théorie des ensembles

Comme les événements sont représentés par des sous-ensembles d'un ensemble $\Omega$, il sera utile pour la suite de bien maîtriser le vocabulaire et les opérations de la théorie des ensembles.

- **Ensemble vide** : c'est l'ensemble noté $\emptyset$ ne contenant aucun élément.
- **Inclusion** : si $A, B$ sont deux sous-ensembles de $\Omega$, on note $A \subset B$ si tout élément de $A$ appartient aussi à $B$. On dit alors que $A$ est inclus dans $B$.
  **Exemple :** $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$.
- **Intersection** : si $A, B \subset \Omega$, on note $A \cap B$ le sous ensemble constitué des éléments appartement à la fois à $A$ et à $B$.
  **Exemple :** si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{3, 4, 5\}$, on a $A \cap B = \{3\}$.
  Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que $A$ et $B$ sont disjoints.
- **Union** : si $A, B \subset \Omega$, on note $A \cup B$ le sous ensemble constitué des éléments appartement à au moins l'un des deux sous-ensembles $A$ et $B$.
  **Exemple :** si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{3, 4, 5\}$, on a $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- **Complémentaire** : si $A \subset \Omega$, on note $A^c$ ou parfois $\overline{A}$ le sous ensemble de $\Omega$ contenant les éléments n'appartenant pas à $A$ : $A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$.
  **Exemple :** si $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $A = \{3, 4\}$ alors $A^c = \{1, 2, 5\}$.
  Si $A, B \subset \Omega$, on note $A \setminus B$ l'ensemble des éléments qui sont dans $A$ mais pas dans $B$.
  Autrement dit $A \setminus B = A \cap B^c$.

# Rappels de théorie des ensembles

## Proposition

Si $A, B \subset \Omega$, on a

- **Distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$** :

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

  C'est l'analogue de

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

  ($\cap$ joue le rôle de $\cdot$ et $\cup$ celui de $+$).

- **Complémentaire d'une union** :

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

- **Complémentaire d'une intersection** :

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

# Rappels de théorie des ensembles

Dans ce cours, on travaillera souvent avec des suites d'événements/ensembles.
Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de sous-ensembles de $\Omega$, on définit de même

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{\omega \in \Omega : \exists n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n\}$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{\omega \in \Omega : \forall n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n\}$$

On a les mêmes règles que précédemment :

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap C).$$

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c.$$

$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c.$$

# Langage ensembliste / Langage probabiliste

Les opérations ensemblistes que nous avons revues précédemment se transcrivent de la manière suivante dans le langage des probabilités.

| Ensembles | Evénements |
|---|---|
| $\emptyset$ | Evénement impossible |
| $\Omega$ | Evénement certain |
| $A \cup B$ | Un au moins des deux événements est réalisé |
| $A \cap B$ | Les deux événements $A$ et $B$ sont réalisés |
| $A \cap B = \emptyset$ | Les événements $A$ et $B$ sont incompatibles |
| $A^c$ | L'événement $A$ n'est pas réalisé |
| $A \subset B$ | $A$ implique $B$ |

## Exercice

Deux joueurs Alice et Bob jouent au jeu suivant. On lance un dé : Alice gagne si le score est pair et Bob gagne si le score est $1, 2$ ou $3$. On note $A$ l'événement 'Alice gagne' et $B$ l'événement 'Bob gagne'.

- Donner $\Omega$.
- Décrire $A$ et $B$.
- Donner l'événement 'Alice et Bob gagnent'.
- Donner l'événement 'Alice et Bob perdent' ;
- Donner l'événement 'L'un des deux joueurs gagne'.
- Donner l'événement 'Exactement un joueur gagne'.

## Exercice

Deux joueurs Alice et Bob jouent une infinité de fois au jeu précédent.
Pour tout $n \geq 1$, on note $A_n$ l'événement 'Alice gagne à la nième partie' et $B_n$ l'événement 'Bob gagne à la nième partie'.

- Donner $\Omega$.
- Donner l'événement 'Alice gagne toutes les parties à partir de la 5ème'.
- Donner l'événement 'Bob gagne au moins une fois'.
- Donner l'événement 'Les deux joueurs perdent toutes les parties de rang pair'.

# Plan

# Séries convergentes

## Définitions

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs réelles, on note, pour tout $n \geq 0$, $S_n$ la *somme partielle de rang $n$* définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *série de terme général $u_n$*. On désigne cette nouvelle suite sous la notation $\Sigma_{n\geq 0} u_n$.
Lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, on dit que la série $\Sigma_{n\geq 0} u_n$ est convergente et on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sa limite.

# Séries à termes positifs

Dans la suite de ce cours on travaillera beaucoup avec des séries à termes positifs.
Pour ces séries, on a le théorème suivant

## Théorème

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbf{R}^+$.

1. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. La série $\sum_n u_n$ converge si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que $S_n \leq M$ pour tout $n$. Dans le cas contraire $S_n \to +\infty$.

Si $S_n \to +\infty$, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.
Grâce à ce théorème, on voit donc que pour une série à termes positifs, le nombre $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est donc toujours bien défini dans $\mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

## Démonstration.

1. $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$, donc la suite $S_n$ est bien croissante.
2. On sait qu'une suite croissante et majorée converge vers une limite finie. Une suite croissante et non majorée, tend quant à elle vers $+\infty$. □

# Exemples classiques de séries convergentes/divergentes :

- La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
- La série $\sum_{n\geq 0} r^n$, $r \in \mathbf{R}$, est convergente si et seulement si $|r| < 1$.

## Exercice

Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

# Plan

# Mesure de probabilité

Rappel : $\mathcal{P}(\Omega)$ désigne l'ensemble des sous-ensembles de $\Omega$.

## Définition (provisoire)

On appelle mesure de probabilité sur $\Omega$, une fonction

$$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux disjoints (c'est-à-dire tels que $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$), alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

# Premières propriétés des mesures de probabilité

## Proposition

Soit $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité sur $\Omega$ et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. Si $A \cap B = \emptyset$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
3. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

## Exercice

Montrer que si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

## Exercice

Montrer que

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \leq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n).$$

# Plan

# Probabilités sur un ensemble fini

## Proposition

Soit $\Omega$ un ensemble *fini*.

1. Si $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur $\Omega$, alors en notant $p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\})$, on a la formule suivante
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega, \qquad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega).$$
2. Réciproquement, si $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est une famille de nombres positifs telle que $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$, la fonction $\mathbb{P}$ définie en posant
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega, \qquad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega).$$
est une mesure de probabilité sur $\Omega$.

**Exemple :** Sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ on peut définir une mesure de probabilité en posant

$$p_1 = 0,5, p_2 = 0,3, p_3 = 0,1, p_4 = 0,1.$$

Pour calculer la probabilité de l'événement $A = \{1, 2, 4\}$, on écrit

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in \{1,2,4\}} p_i = p_1 + p_2 + p_4 = 0,5 + 0,1 + 0,1 = 0,7.$$

# Probabilité uniforme sur un ensemble

Notation : si $\Omega$ est un ensemble fini, on note

$$\mathrm{Card}(\Omega) \qquad \text{ou} \qquad |\Omega|$$

le *cardinal* de $\Omega$, c'est-à-dire son nombre d'éléments.

## Définition

Si $\Omega$ est un ensemble fini, on appelle probabilité uniforme, et on note $\mathbb{P}_{unif}$, la mesure de probabilité obtenue en posant $p_\omega = \frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)}$. On a la formule

$$\mathbb{P}_{unif}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}, \qquad \forall A \subset \Omega.$$

La probabilité *uniforme* tient son nom du fait qu'elle ne privilégie aucune éventualité : tous les événements $\{\omega\}$ ont même probabilité.

Lorsque rien n'est précisé dans l'énoncé d'un exercice, c'est qu'implicitement on travaille avec probabilité uniforme. On parle aussi parfois d'*équiprobabilité*.

# Exemples

- Un dé non truqué tombe sur chaque face avec probabilité $1/6$. On modélise donc ce jeu par l'espace de probabilité $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ muni de la probabilité uniforme.
- Pour modéliser un jeu de pile ou face, on pose $\Omega = \{0, 1\}$.
  Par convention, $\{0\}$ représente l'événement 'la pièce tombe sur face' et $\{1\}$ l'événement 'la pièce tombe sur pile.'
  Reste à définir la probabilité de ces deux événements : on pose $p = \mathbb{P}(\{1\})$ et on a alors $1 - p = \mathbb{P}(\{0\})$.
  - Le cas $p = 1/2$ permet de modéliser une pièce *équilibrée*.
  - Les autres valeurs de $p$ permettent de modéliser une pièce *truquée* qui tombera plus souvent sur pile que sur face ou inversement selon que $p > 1/2$ ou $p < 1/2$.

# Lois de Dirac et de Bernoulli

## Définition (Loi de Bernoulli)

Soit $p \in [0,1]$ ; la mesure de probabilité définie sur $\Omega = \{0,1\}$ en posant $\mathbb{P}(\{1\}) = p$ et $\mathbb{P}(\{0\}) = 1-p$ est appelée *loi de Bernoulli* de paramètre $p$. On la note $\mathcal{B}(p)$.

## Définition (Loi de Dirac)

Soit $\Omega$ un ensemble fini et $\omega_o \in \Omega$.
On appelle mesure de Dirac en $\omega_o$ la mesure de probabilité notée $\delta_{\omega_o}$ définie par

$$\delta_{\omega_o}(\{\omega_o\}) = 1 \qquad \text{et} \qquad \delta_{\omega_o}(\{\omega\}) = 0 \qquad \text{si} \qquad \omega \neq \omega_o$$

La loi de Dirac permet de modéliser un phénomène déterministe.

## Exercice

Un tricheur s'est fabriqué un dé qui tombe 2 fois plus souvent sur 6 et 3 fois plus souvent sur 5 qu'un dé normal. Les autres faces du dé truqué ont toutes la même probabilité. Donner la probabilité de chacune des faces du dé truqué.

## Exercice

Un tricheur s'est fabriqué un dé qui tombe toujours sur 6. Par quelle loi de probabilité peut-on modéliser le lancer de ce dé truqué ?

# Plan

# Retour sur la définition des mesures de probabilité

La définition donnée dans le dernier cours des mesures de probabilité n'est pas tout à fait complète. En effet, pour des raisons techniques qui dépassent le niveau de ce cours, les mesures de probabilité ne peuvent pas toujours être définies sur la classe $\mathcal{P}(\Omega)$ de toutes les parties de $\Omega$.

On est donc souvent amené à les définir sur une sous-classe $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant de bonnes propriétés de stabilité vis à vis des opération ensemblistes usuelles.

## Définition (Tribu)

On dit que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est une *tribu* ou une *$\sigma$-algèbre* sur $\Omega$ si elle vérifie les conditions suivantes :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$,
2. si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$,
3. si $A \in \mathcal{A}$ alors $A^c \in \mathcal{A}$.

**Exemples :**

- $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu,
- $\{\emptyset; \Omega\}$ est une tribu,
- si $A \subset \Omega$, $\{A; A^c; \Omega; \emptyset\}$ est une tribu.

# Retour sur la définition des mesures de probabilité

## Définition (Mesure de probabilité)

Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur $\Omega$. Une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une fonction

$$\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$ (c'est-à-dire tels que $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$), alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

Le triplet

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$$

est appelé *espace de probabilité*.

Cette définition sera revue en détail en L3.

**Remarque importante** : Lorsque $\Omega$ est un ensemble fini ou dénombrable (cadre le plus fréquent dans ce cours), on peut toujours prendre $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

**Exercice**

Montrer qu'une intersection quelconque de tribus est encore une tribu.

# Unions croissantes et intersections décroissantes

## Proposition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

1. Pour toute suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ (ie $A_n \subset A_{n+1}$, pour tout $n$), la suite $\mathbb{P}(A_n)$ est croissante et converge vers $\mathbb{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$.
2. Pour toute suite décroissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ (ie $A_{n+1} \subset A_n$, pour tout $n$), la suite $\mathbb{P}(A_n)$ est décroissante et converge vers $\mathbb{P}(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n)$.
3. Pour toute suite quelconque $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\mathbb{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n.)$

# Plan

# Rappels de dénombrement

Soit $A$ un ensemble fini ; on rappelle qu'on note $|A|$ ou $\mathrm{Card}(A)$ le cardinal de $A$, c'est-à-dire son nombre d'éléments.

Quand on travaille avec la probabilité uniforme sur un ensemble fini $\Omega$, la probailité d'un événement $A \subset \Omega$ est donnée par la formule

$$\mathbb{P}_{unif}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Le calcul de cette probabilité se ramène donc à un calcul de dénombrement (dénombrer un ensemble signifie déterminer son cardinal).

# Partitionnement

## Proposition

Si $A_1, \dots, A_n$ sont $n$ sous-ensembles finis deux à deux disjoints d'un ensemble $\Omega$, alors

$$\mathrm{Card}(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(A_i).$$

Cette formule est en fait un cas particulier de la propriété d'additivité de la probabilité uniforme vue plus haut.

# Ensembles produits

Si $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ sont $n$ ensembles finis, alors on note

$$\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \Omega_i\}$$

le produit cartésien de ces ensembles.

## Proposition

$$\mathrm{Card}(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(\Omega_i).$$

En particulier,

$$\mathrm{Card}(\Omega^n) = \mathrm{Card}(\Omega)^n.$$

## Exercice

Le code Morse est constitué de signaux courts ($\cdot$) et longs ($-$).
Combien de signaux Morse de 8 caractères peut on coder ?

# Nombre d'applications entre deux ensembles finis

Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis.
Notons $\mathcal{F}(E; F)$ l'ensemble des fonctions définies sur $E$ et à valeurs dans $F$.

## Corollaire

$$\mathrm{Card}(\mathcal{F}(E; F)) = |F|^{|E|}$$

# Nombre d'arrangements

## Définition

Soit $E$ un ensemble de cardinal $n$ et $p$ un nombre entier.
Un $p$-arrangement de $E$ est un vecteur $(x_1, \ldots, x_p)$ d'éléments de $E$ tel que $x_i \neq x_j$ pour tout $i \neq j$.

On note $A_n^p$ le nombre de $p$-arrangements de $E$.

## Proposition

$$A_n^p = \begin{cases} \frac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

Un $n$-arrangement est aussi appelé une permutation de $E$. Il y a en particulier $n!$ permutations de $E$.

## Corollaire

Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis. En notant $p = \mathrm{Card}(E)$ et $n = \mathrm{Card}(F)$, le nombre d'applications injectives de $E$ dans $F$ vaut $A_n^p$. Il y a en particulier $p!$ bijections de $E$ dans lui même.

## Exercice

On tire successivement et sans remise deux cartes dans un jeu de 32 cartes.
Quelle est la probabilité d'obtenir deux trèfles ?

# Nombre de combinaisons

On cherche maintenant à déterminer le nombre de parties à $p$ éléments dans un ensemble à $n$ éléments $E$. Notons $\mathcal{P}_p(E)$ cet ensemble :

$$\mathcal{P}_p(E) = \{A \subset E : \mathrm{Card}(A) = p\}.$$

## Proposition

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}_p(E)) = \binom{n}{p} := \frac{n!}{p!(n-p)!}, \qquad \forall p \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

## Exercice

Une urne contient 20 jetons numérotées de 1 à 20. On tire simultanément 3 jetons de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir trois numéros qui se suivent ?

# Plan

# Tirage dans une urne

On considère une urne contenant $N$ boules numérotées de 1 à $N$.
Parmi ces boules, il y a :

- $N_1$ boules rouges (numérotées de 1 à $N_1$),
- $N_2$ boules noires (numérotées de $N_1 + 1$ à $N$),

avec $N = N_1 + N_2$.

On effectue $n$ tirages successifs et on va s'intéresser à l'événement

$$A_k = \text{Obtenir exactement } k \text{ boules rouges sur ces } n \text{ tirages.}$$

On distinguera deux modes opératoires :

- Tirage avec remise : après chaque tirage, la boule sélectionnée est remise dans l'urne.
- Tirage sans remise : après chaque tirage, la boule sélectionnée est retirée définitivement de l'urne.

Intuitivement, on voit que les deux situations sont assez différentes, puisque dans le second cas la composition de l'urne en boule rouge et noire change à chaque tirage tandis que dans le premier cas elle est invariante.

# Tirage avec remise

Modélisons l'espace des épreuves : l'expérience aléatoire donne pour résultat un $n$ uplet $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ correspondant aux numéros des boules tirées ordonnés par ordre de tirage.
On choisit donc

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) : \omega_i \in \{1, \ldots, N\}\} = \{1, \ldots, N\}^n.$$

Le cardinal de cet ensemble vaut

$$\mathrm{Card}(\Omega) = N^n.$$

Il n'y a pas lieu de privilégier un $n$-uplet plutôt qu'un autre. On va donc munir $\Omega$ de la mesure de probabilité uniforme $\mathbb{P}_{unif}$ définie par

$$\mathbb{P}_{unif}(\{\omega\}) = \frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)}, \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

L'événement $A_k$ (obtenir $k$ boules rouges) est représenté par

$$A_k = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega : \omega_i \in \{1, \ldots, N_1\} \text{ pour exactement } k \text{ valeurs de } i\}$$

La probabilité de $A_k$ est donc

$$\mathbb{P}_{unif}(A_k) = \frac{\mathrm{Card}(A_k)}{N^n}.$$

Il reste à calculer $\mathrm{Card}(A_k)$.

# Tirage avec remise

## Proposition

$$\mathrm{Card}(A_k) = \binom{n}{k} N_1^k N_2^{n-k}.$$

En conclusion,

$$\mathbb{P}(A_k) = \binom{n}{k} \left(\frac{N_1}{N}\right)^k \left(\frac{N_2}{N}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

où $p = N_1/N$ est la proportion de boules rouges dans l'urne.

## Définition

Sur $\Omega = \{0, 1, \ldots, n\}$, la probabilité binomiale de paramètres $n$ et $p$ est la mesure de probabilité définie par

$$\mathbb{P}(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad \forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

On la note $\mathcal{B}(n, p)$.

# Tirage sans remise

L'espace des épreuves est cette fois

$$\Omega' = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) : \omega_i \text{ deux à deux distincts}\},$$

car, du fait de l'absence de remise, le même numéro de boule ne peut pas sortir plusieurs fois de suite.
L'ensemble $\Omega'$ est non-vide uniquement si $n \leq N$ ce que nous supposerons dans la suite.
Son cardinal vaut

$$\mathrm{Card}(\Omega') = A_N^n = \frac{N!}{(N-n)!}$$

(nombre d'arrangements de $n$ objets parmi $N$).
Aucune suite de numéros de boule n'étant privilégiée, on opte pour la probabilité uniforme sur $\Omega'$.
L'événement $A_k$ est défini par

$$A_k = \left\{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega' : \omega_i \in \{1, \ldots, N_1\} \text{ pour exactement k valeurs de i}\right\}.$$

Sa probabilité vaut

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{\mathrm{Card}(A_k)}{\mathrm{Card}(\Omega')}.$$

# Tirage sans remise

Déterminons $\mathrm{Card}(A_k)$.

## Proposition

$$\mathrm{Card}(A_k) = n!\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

## Exercice

Proposer une autre modélisation pour le tirage sans remise et retrouver le résultat précédent.