Algèbre 3
Chapitre 1
Les Espaces Vectoriels

Licence 2 MAE 2020-2021

Université de Paris - Paris Descartes

Marc Briant

(Fortement inspiré des cours de MM. G. Roussel et R. Lounès)

Table des matières

Avant-propos : L'algèbre cherche à dénicher ce qui fait marcher les mathématiques en construisant des structures abstraites et en les étudiant de manière générale. Cela permet de s'extraire des problématiques spécifiques à un sujet particulier et de prendre une réelle hauteur. Par exemple, si nous prenons des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ du plan alors $3\vec{u}$ ou $\vec{u}+2\vec{v}$ sont de nouveaux vecteurs. Mais nous pouvons faire exactement les mêmes manipulations avec deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ f et g puisque $3f$ et $f+2g$ seront bien continues sur $\mathbb{R}$. L'algèbre propose donc de regarder de manière abstraite : “que peut-on faire dans des ensembles où l'on peut additionner les éléments et les multiplier par des scalaires ?”. Ces structures sont les espaces vectoriels.

Dans tout ce cours, $(\mathbb{K},+,.)$ **désigne un corps commutatif.**

1 Les espaces vectoriels en toute généralité

Nous rappelons les définitions d'un groupe et d'un corps.

Définition 1.1. Un **groupe commutatif (ou abélien)** est un couple $(G,+)$ où G est un ensemble et $+$ est une loi de composition interne (de $G\times G$ dans G) qui satisfont

(i) Associativité : $\forall(a,b,c) \in G^3$, $(a+b)+c = a+(b+c)$;

(ii) Neutre : il existe un élément neutre e tel que $\forall a\in G$, $a+e=e+a=a$;

(iii) Symétrique : pour tout élément a de G il existe un élément de G noté $-a$ tel que $a+(-a) = (-a)+a=e$.

(iv) Commutativité : $\forall(a,b)\in G^2$, $a+b=b+a$.

Un **corps commutatif** est un triplet $(\mathbb{K},+,.)$ où $(\mathbb{K},+)$ est un groupe abélien de neutre $0_{\mathbb{K}}$, $(\mathbb{K}\setminus\{0_{\mathbb{K}}\},.)$ est un groupe abélien de neutre $1_{\mathbb{K}}$ et tels que la loi . soit distributive par rapport à la loi $+$:

$$\forall(a,b,c)\in\mathbb{K}^3,\ a.(b+c)=a.b+a.c.$$

En dehors des seules définitions, aucun résultat sur ces structures algébriques n'est requis. Notons toutefois que l'élément neutre est unique et qu'on le note par convention 0_G pour une loi $+$ et 1_G pour une loi $\cdot$.

1.1 La structure d'espace vectoriel

Définition 1.2. Un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ - ou $\mathbb{K}$**-espace vectoriel** - est un triplet $(E,\boldsymbol{+},\bullet)$ où E est un ensemble, $\boldsymbol{+}$ est une loi de composition interne (de $E\times E$ dans E) et $\bullet$ est une loi de composition externe (de $\mathbb{K}\times E$ dans E) qui satisfont

(i) $(E,\boldsymbol{+})$ est un groupe abélien de neutre 0_E ;

(ii) $\forall\alpha\in\mathbb{K},\forall(x,y)\in E^2,\quad \alpha\bullet(x\boldsymbol{+}y)=\alpha\bullet x\boldsymbol{+}\alpha\bullet y$;

(iii) $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\forall x\in E,\quad (\alpha+\beta)\bullet x=\alpha\bullet x\boldsymbol{+}\beta\bullet x$;

(iv) $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\ \forall x\in E,\quad (\alpha\beta)\bullet x=\alpha\bullet(\beta\bullet x)$;

(v) $\forall x\in E,\quad 1_{\mathbb{K}}\bullet x=x$.

Les éléments de E sont appelés des **vecteurs** et ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés des **scalaires**.

Remarque 1.3

La plupart du temps le symbole $\boldsymbol{+}$ sera écrit $+$ comme pour l'addition sur $\mathbb{K}$ tandis que les symboles multiplicatifs . et $\bullet$ seront omis : $(\alpha.\beta)\bullet x =$ sera écrit $(\alpha\beta)x$. Nous emploierons dans ce cours l'abréviation $\mathbb{K}-ev$ pour écrire $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Nous sommes déjà bien familiers de telles structures algébriques.

Exemple : [Des exemples réels] 1) Le plan $\mathbb{R}^2$ et l'espace $\mathbb{R}^3$ sont des $\mathbb{R}$-ev.

2) Les complexes $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev mais aussi un $\mathbb{C}$-ev.

3) L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles est un $\mathbb{R}$-ev.

4) L'ensemble $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ des applications de $I\subset\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-ev.

Rien qu'avec cette définition nous pouvons démontrer des propriétés vectorielles universelles. D'abord sur les vecteurs nuls :

Proposition 1.4

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et considérons $\alpha\in\mathbb{K}$ et $x\in E$. Alors

1. $\alpha\bullet 0_E=0_E$ et $0_{\mathbb{K}}\bullet x=0_E$.
2. Si $\alpha\bullet x=0_E$ alors ($\alpha=0_{\mathbb{K}}$ ou $x=0_E$).

Puis sur les inverses

Proposition 1.5

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et considérons $\alpha\in\mathbb{K}$ et $x\in E$. Alors

$$(-\alpha)\bullet x=\alpha\bullet(-x)=-(\alpha\bullet x)$$

et

$$(-\alpha)\bullet(-x)=\alpha\bullet x.$$

1.2 Construire des espaces vectoriels

Proposition 1.6 (*Un corps* $\mathbb{K}$ *comme* $\mathbb{K}$*-ev*)

Soit $(\mathbb{K},+,.)$ est un corps commutatif.

- Alors il peut être considéré comme un $\mathbb{K}$-ev de loi $\boldsymbol{+}=+$ et $\bullet=.$.
- Si L est un corps commutatif tel que $L\subset\mathbb{K}$ alors $(\mathbb{K},+,.)$ est un L-ev.

Exemple : Nous avons donc que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-ev mais peut aussi être considéré comme un $\mathbb{Q}$-ev.
Un exemple plus abstrait, l'ensemble

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists(a, b) \in \mathbb{Q},\ x = a + b\sqrt{2}\right\}$$

est un sous-corps de $\mathbb{R}$ et on peut voir $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$-ev.

Proposition 1.7 (*Espace vectoriel produit*)

Soient $(E_1, +, .)$ et $(E_2, +, .)$ des $\mathbb{K}$-ev. Sur $E = E_1 \times E_2$ nous définissons les lois suivantes pour tous $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ de E et tout α de $\mathbb{K}$ par

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

et

$$\alpha \bullet (x_1, x_2) = (\alpha.x_1, \alpha.x_2).$$

Alors $(E, +, \bullet)$ est un $\mathbb{K}$-ev que l'on nomme **espace vectoriel produit**.

Remarque 1.8

Il faut que nous soyons vigilants car, comme le montre l'énoncé ci-dessus, les mathématiques ont tendance à employer les symboles $(+, .)$ pour tous les ev alors que bien entendu les lois sont différentes sur chaque ev. En toute rigueur nous devrions écrire $(E_1, +_1, ._1)$ et $(E_2, +_2, ._2)$ mais cela alourdit les écritures. De même un ev $(E, +, .)$ sera souvent simplement noté E, les lois restant implicites.
Ayons donc quand même le réflexe de regarder si les vecteurs additionés vivent bien dans le même ensemble de départ.

Corollaire 1.9

Soient E_1, E_2,..,E_n des $\mathbb{K}$-ev. En appliquant la proposition précédente par récurrence nous pouvons munir $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ d'une structure de $\mathbb{K}$-ev.

Exemple : Si $\mathbb{K}$ est un corps commutatif alors $\mathbb{K}^n$ muni des loi d'ev produit est un $\mathbb{K}$-ev.

2 Les sous-espaces vectoriels

2.1 Définitions et exemples

Si $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-ev alors il peut être intéressant de savoir s'il existe des parties "plus petites" de E qui sont stables par les lois du produit vectoriel. Par exemple, dans l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les vecteurs du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ restent dans ce plan.

Remarque 2.1 (*Briques élémentaires en Algèbre*)

L'idée d'étudier ces "briques plus petites" vient de la volonté algébrique de décrire les ensembles généraux de la manière la plus simple possible. En reprenant l'exemple de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ nous nous rendons compte qu'il n'est pas nécessaire de connaître chaque point de l'espace : pour se rendre n'importe où il suffit de se balader sur le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ puis de remonter (ou descendre) à la verticale ! Ainsi pour connaître $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ il suffit de connaître $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et la verticale. Cela ne paraît rien mais en itérant nous comprenons qu'il suffit, pour décrire $\mathbb{R}^3$, de connaître les droites $(O\vec{i})$,$(O\vec{j})$ et $(O\vec{k})$: quel gain !

Définition 2.2. Soient $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-ev et F un partie de E. Nous disons que F est un **sous-espace vectoriel de** E si et seulement si
(i) $F \neq \emptyset$;
(ii) $\forall(x, y) \in F^2, \quad x + y \in F$;
(iii) $\forall\alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \quad \alpha.x \in F$.

Remarque 2.3

Notons que si F est un sous-ev de E alors $0_E \in F$.

Exemple : $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ est un sous-ev de $\mathbb{R}^4$.

Si nous munissons F des lois $(+, .)$ restreintes à F alors un sous-espace vectoriel F est un $\mathbb{K}$-ev. Il existe une méthode directe pour prouver qu'une partie de E est un sous-ev.

Théorème 2.4

Soient $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-ev et F un partie de E. Alors F est un sous-ev de E si et seulement si
a) $F \neq \emptyset$ et
b) $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall(x, y) \in F^2, \quad \alpha x + \beta y \in F$.

Remarque 2.5

Si F vérifie le point $b)$ alors on dit que F est stable par combinaison linéaire. Pour montrer le point $a)$ il est souvent très commode de simplement vérifier que $0_E \in F$.

Exemple : [Exemples élémentaires et importants.] 1) $\{0_E\}$ et E sont des sous-ev de E appelés **sous-ev triviaux.**

2)Projection sur un ev produit : si $E_1 \times E_2$ est un $\mathbb{K}$-ev produit alors $\{0_{E_1}\} \times E_2$ et $E_1 \times \{0_{E_2}\}$ sont des sous-ev de $E_1 \times E_2$. Cela s'étend par récurrence aux espaces produits de n ev.

3)Droite vectorielle : Soit x non nul dans E un $\mathbb{K}$-ev. Alors la droite vectorielle de E engendrée par x est définie par

$$\mathbb{K}x = \{y \in E \mid \exists\alpha \in \mathbb{K},\ y = \alpha x\}$$

est un sous-ev de E.

4) L'ensemble $C^0([a, b])$ des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ est un sous-ev des applications $\mathbb{R}^I$. De même pour $C^k(]a, b[)$.

5) L'ensemble des suites réelles qui convergent est un sous-ev de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.

Proposition 2.6

L'intersection de sous-ev d'un $\mathbb{K}$-ev E est un sous-ev de E.

Remarque 2.7 (*ATTENTION !*)

L'union de sous-ev n'est pas, en général, un sous-ev ! Nous avons un contre-exemple puisque dans $\mathbb{R}^2$ l'union $\mathbb{R}(1, 0) \cup \mathbb{R}(0, 1)$ n'est pas un sous-ev.

2.2 Somme de sous-ev et sous-ev supplémentaires

Comme les ev ont été créés pour effectuer des combinaisons linéaires, que deviennent ces manipulations sur des sous-ev ? Regardons l'idée la plus simple.

Définition 2.8. Soient E un $\mathbb{K}$-ev et F et G deux sous-ev de E. Nous définissons

$$F + G = \{x \in E \mid \exists(x_F, x_G) \in F \times G,\ x = x_F + x_G\}.$$

Théorème 2.9

Si F et G sont deux sous-ev d'un $\mathbb{K}$-ev E alors $F + G$ est un sous-ev de E contenant F et G.

Nous rappelons que l'idée de l'algèbre est de décrire des ensembles généraux de la manière la plus simple possible. Maintenant que nous savons que $F + G$ est un sous-ev et donc pour décrire l'ensemble $H = F + G$ il suffit de connaître les vecteurs de F et ceux de G. Si nous pouvions écrire l'espace entier $E = F + G$ nous aurions donc "gagné" en simplicité. D'où l'idée de s'intéresser aux sommes directes.

Définition 2.10. Soient E un $\mathbb{K}$-ev et E_1 et E_2 deux sous-ev de E. Nous disons que E_1 et E_2 sont des **sous-ev supplémentaires de** E ou encore que **E est somme directe de** E_1 **et** E_2 si et seulement si

$$\forall x \in E,\ \exists!(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2,\ x = x_1 + x_2.$$

Cela se note

$$E = E_1 \oplus E_2$$

et nous disons que E_2 est **un supplémentaire dans** E de E_1, et réciproquement.

Notons que si

$$\forall x \in E_1 + E_2,\ \exists!(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2,\ x = x_1 + x_2$$

mais que $E \neq E_1 + E_2$, nous dirons simplement que E_1 et E_2 sont **en somme directe**.

Exemple : Dans le plan $\mathbb{R}^2$ nous avons $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}(1,0) \oplus \mathbb{R}(0,1)$ donc il suffit de connaître les droite $\mathbb{R}\vec{i}$ et $\mathbb{R}\vec{j}$ pour décrire le plan.

Remarque 2.11 (*IMPORTANT : Méthode*)

En algèbre dès que nous voyons la phrase "Il existe un unique" il faut penser à l'analyse-synthèse ! Pour montrer que $E = F \oplus G$ il faut faire

1. *Analyse :* Soit x dans E, supposons qu'il s'écrive $x = x_F + x_G$ avec $(x_F, x_G) \in F \times G$. Là on travaille au corps et on débusque qui sont x_F et x_G - **en fonction de** x **bien sûr !** Cela prouve **l'unicité en cas d'existence**.
2. *Synthèse :* Maintenant nous définissons $x_F = ..$ et $x_G = ..$ comme trouvés lors de l'analyse. On vérifie que ces vecteurs appartiennent respectivement à F et G puis que $x = x_F + x_G$. Cela prouve **l'existence**.

Application : Nous nous plaçons dans l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors $\mathcal{P}$ (applications paires) et $\mathcal{I}$ (applications impaires) sont des sous-ev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

Proposition 2.12 (*Caractérisation*)

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et E_1 et E_2 deux sous-ev de E. Alors

$$(E = E_1 \oplus E_2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} E = E_1 + E_2 \\ E_1 \cap E_2 = \{0_E\} \end{array} \right. .$$

Remarque 2.13

En pratique cette caractérisation est très utilisée dans les livres d'exercices mais elle ne sert à rien en général. En effet, montrer que $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$ se fait souvent bien mais comment montrer que $E = E_1 + E_2$? Eh bien il faut prendre x dans E et montrer qu'il s'écrit $x = x_1 + x_2$. Il faudra donc faire une analyse (ce que souvent les livres "cachent" en écrivant directement "posons $x_1 = ..$ et $x_2 = ..$" sans que l'étudiant·e ne sache d'où ça vient) ... Si nous comprenons bien ce qu'est une analyse-synthèse alors autant ne pas perdre de temps et d'énergie et faisons-la de suite !

Notre ambition étant de trouver des briques de plus en plus petites nous pouvons itérer cette définition de somme de sous-ev au cas de plusieurs sous-ev.

Définition 2.14. Soient E un $\mathbb{K}$-ev et E_1,...,E_N des sous-ev de E. Alors nous définissons

$$E_1 + .. + E_N = \{x \in E \,|x = x_1 + .. + x_N,\ \forall i, x_i \in E_i\}.$$

De plus nous dirons que ces sous-ev sont en somme directe et nous noterons

$$E_1 \oplus \cdots \oplus E_N = \bigoplus_{i=1}^{N} E_i.$$

si et seulement si tout vecteur de $E_1 + .. + E_N$ s'écrit de manière **unique** en une somme $x_1 + .. + x_N$ d'élements de E_1,..,E_N.