Devoir maison de la Toussaint

A rendre en TD ou en amphi la semaine du 2 Novembre 2020

Exercice 1 : Calcul de limites

1. Calculer les limites suivantes :
   (a) $u_n = \ln(n)\ln(2+n^2) - \sqrt{\ln(n)^2 + 4\ln(n)^4}$.
   (b) $u_n = n^2\left(\exp\left(\frac{1}{n^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.
   (c) $u_n = \frac{n\sin(n!)}{\sqrt{n^5+1}\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)}$.
   (d) $u_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.
   (e) $u_n = n^3\left(\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - 3\cos\left(\frac{1}{n}\right) + 3 - \frac{1}{n}\right)$.
2. Montrer que les suites suivantes tendent vers 0 :
   (a) $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{n} dt$.
   (b) $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$.
   (c) $u_n = \int_0^{2\pi} \sin(t+n) dt$.
   (d) $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{t}{n}\right) dt$.
   (e) $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nt) dt$.
   Indication On pourra utiliser les complexes.
   (f) $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin(\sin(\cdots(\sin(t)))}_{n \text{ fois}} dt$.
   Indication On pourra étudier la convergence de la suite v_n définit par $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sin(v_n)$ et $v_0 = \sin(\frac{\pi}{2})$ et utiliser la croissance de la fonction sous l'intégrale.

Exercice 2 : Escalier ou ascenseur ?

On souhaite calculer dans cet exercice la probabilité qu'un élève prenne l'ascenseur pour aller en cours. Pour accéder à sa salle, l'élève a le choix entre prendre l'ascenseur ou prendre l'escalier. S'il prend l'escalier, il peut, à chaque pas, monter une ou deux marches à la fois, ou bien abandonner, c'est à dire redescendre et prendre l'ascenseur. On modélise l'expérience aléatoire par une loi uniforme sur l'ensemble des façons d'arriver en haut de l'escalier.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose e_n le nombre de façon différentes d'arriver en haut d'un escalier de taille n. On pose par convention $e_0 = 1$ (il n'y a qu'une seule façon de monter un escalier sans marche, c'est de ne rien faire).

1. Calculer e_1, e_2 et e_3.
2. Montrer que e vérifie la relation de récurrence suivante : $\forall n \geq 2, e_n = e_{n-1} + e_{n-2} + 1$.

On se propose, dans la suite de l'exercice, d'exprimer le terme général de e en fonction de n

3. On s'intéresse pour commencer aux suites vérifiant la relation de récurrence "linéarisé" suivante $\forall n \geq 2, u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. Soit E l'ensemble de ces suites. On a $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \forall n \geq 2, u_n = u_{n-1} + u_{n-2}\}$.
   (a) Montrer que E est un espace vectoriel.
   (b) Soit $a \in E$ telle que $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ et $b \in E$ telle que $b_0 = 1$ et $b_1 = 1$. Montrer que (a, b) est une base de E. En déduire la dimension de E.
   (c) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $u^{(\lambda)} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite géométrique de raison λ et de premier terme $u_0 = 1$. Montrer que $u^{(\lambda)} \in E \Leftrightarrow P(\lambda) = 0$ avec P un polynôme que l'on explicitera.
   (d) En déduire que $E = Vect(u^{(\lambda_1)}, u^{(\lambda_2)})$ avec $u^{(\lambda_1)}, u^{(\lambda_2)}$ deux suites géométriques que l'on explicitera.
   (e) Exprimer a et b en fonction de $u^{(\lambda_1)}$ et $u^{(\lambda_2)}$. En déduire le terme général de la suite a, aussi connue sous le nom de suite de Fibonacci, et de la suite b.
   (f) Montrer que b_n correspond au nombre de façons de monter un escalier de taille n quand l'ascenseur est en panne.

4. On considère maintenant E' l'ensemble des suites vérifiant la même relation de récurrence que notre suite e. On a $E' = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \forall n \geq 2, u_n = u_{n-1} + u_{n-2} + 1\}$.
   (a) Soient $v, w \in E'$ deux suites de E'. Montrer que $v - w \in E$. En déduire que $\forall v \in E', E' = \{v\} + E$.
   (b) Trouver une suite simple de E'.
   Indication On pourra chercher une suite arithmétique.
   (c) En déduire une expression de e_n en fonction de n.

5. On note p_n la probabilité qu'un élève prenne l'ascenseur.
   (a) Exprimer p_n en fonction de n.
   (b) Calculer numériquement la probabilité qu'un élève ayant cours au premier étage de l'université prenne l'ascenseur (on considère qu'il ne peut que prendre l'escalier principal).
   (c) Calculer la limite de p_n quand n tend vers l'infini. Que peut-on en conclure sur la pertinance de cette modélisation ?

6. (*) On décide maintenant de prendre en compte le pied avec lequel on monte les marches (chaque pas peut être fait du pied gauche ou du pied droit). Donner la nouvelle relation de récurrence vérifiée par e, et donner une expression de son terme général en suivant la même méthode. Calculer la nouvelle probabilité de prendre l'ascenseur pour aller au premier étage.

Exercice 3 : Espaces vectoriels finis

Nous avons considéré jusqu'à présent uniquement des espaces vectoriels sur des corps infinis comme $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$. Nous allons nous intéresser dans cet exercice au cas où le corps est fini. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ muni de l'addition et la multiplication modulo p. On admet que si p est premier, alors $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps.

1. Rappeler la définition de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie et du cardinal d'un ensemble fini.

2. Expliciter l'inverse pour l'addition et la multiplication (si possible) de chaque élément de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Essayer de faire de même pour $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Quels élements n'ont pas d'inverse pour la multiplication ? En déduire que $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ n'est pas un corps.

3. On pose $E_2 = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\}$.
   (a) Lister tout les éléments de E_2. En déduire le cardinal de E_2.

(b) En admettant que $\mathbb{C}$ est un ${}^{\mathbb{Z}}/_{5\mathbb{Z}}$-espace vectoriel, montrer que E_2 est ${}^{\mathbb{Z}}/_{5\mathbb{Z}}$-un espace vectoriel pour la somme et la multiplication modulo 5.

(c) Donner une base de E_2. En déduire sa dimension. Quel lien observe-t-on avec ${}^{\mathbb{Z}}/_{p\mathbb{Z}}$ et le cardinal de E ?

On fixe maintenant un nombre premier p, et on considère pour la suite E un $\mathbb{F}_{|}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$.

4. En considérant une base de E, montrer que E est fini et calculer son cardinal en fonction de p et de n. Vérifier que la formule fonctionne en l'appliquant à l'espace E_2 de la question 3.

5. On s'intéresse maintenant à $\mathcal{L}(E)$, l'ensemble des applications linéaires de E. On pose $\mathcal{B}$ une base de E.

   (a) (Question de cours) Rappeler pourquoi l'application $\psi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \to \mathcal{M}_{n,n}({}^{\mathbb{Z}}/_{p\mathbb{Z}}) \\ u & \to M_{\mathcal{B}}(u) \end{cases}$ est un isomorphisme.

   (b) En déduire le cardinal et la dimension de $\mathcal{L}(E)$. Faire le lien avec la question 4.

6. Pour $d \in \mathbb{N}$, on souhaite maintenant compter le nombre $\mathcal{I}_d$ de familles libres de E à d éléments. On se place dans le cas où l'ordre des vecteurs compte, c'est à dire la famille (e_1, e_2) n'est pas la même que la famille (e_2, e_1).

   (a) Calculer $\mathcal{I}_d$ pour $d > n$.

   On suppose maintenant $d \leq n$.

   (b) Montrer que tout vecteur non nul de E forme une famille libre. En déduire $\mathcal{I}_1$.

   On pose $(e_1, \ldots, e_d)$ une famille à d éléments de E.

   (c) Montrer que $(e_1, \ldots, e_d)$ est libre $\Leftrightarrow [e_1 \neq 0, (e_2, \ldots, e_d)$ est libre et $Vect(e_2, \ldots, e_n) \cap Vect(e_1) = \{0\}]$.

   (d) Montrer que $(e_1, \ldots, e_d)$ est libre $\Leftrightarrow [e_1 \neq 0, e_2 \notin Vect(e_1), \ldots, e_d \notin Vect(e_1, \ldots, e_{d-1})]$.
   Indication On pourra s'inspirer de la question précédente pour faire une récurrence finie.

   (e) Montrer que $|\mathcal{I}_d| = \prod_{k=0}^{d} p^n - p^k$. En déduire le nombre de base de E.

   (f) Montrer que l'image d'une base par un isomorphisme est une base. En déduire qu'il existe une bijection entre l'ensemble des bases de E et l'ensemble $GL(E)$ des isomorphismes sur E.

   (g) En déduire que la probabilité $\mathbb{P}_{n,p}$ qu'un endomorphisme d'un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension n pris au hasard soit inversible vaut $\frac{\prod_{d=0}^{n-1} p^n - p^d}{p^{n^2}}$. Calculer $\lim_{p \to +\infty} \mathbb{P}_{n,p}$. Que peut-on conjecturer sur la densité des isomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n ?

7. On s'intéresse maintenant au nombre de sous-espaces-vectoriels de E de dimension d que l'on notera $\begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix}$.

   (a) Calculer $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$, le nombre de droites vectorielles de E.

   (b) Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. Donner le nombre de familles libres de F de taille d.

   (c) Montrer que $\begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix} = \frac{\prod_{k=0}^{d-1} 1 - p^{n-k}}{\prod_{k=0}^{d-1} 1 - p^{d-k}}$.
   Indication On pourra remarquer qu'on peut associer à chaque sous-espace de dimension d un certain nombre de famille libre de taille d de E.

   (d) Montrer en utilisant des arguments combinatoires que $\begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-d \end{bmatrix}$. On admettra que chaque sous-espace vectoriel possède un unique supplémentaire orthogonal.

   (e) Vérifier le résultat de la question précédente par le calcul.