Chapitre 5 : Convergence de suites de variables aléatoires et théorèmes limites

Nathaël Gozlan

2 décembre

Plan

Différents modes de convergence

Définition (Convergence presque sûre)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge presque sûrement* vers une variable aléatoire X si

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\}\right) = 1.$$

Autrement dit X_n converge presque sûrement vers X s'il existe un ensemble $A \subset \Omega$ de probabilité 1 tel que $X_n(\omega) \to X(\omega)$ lorsque $n \to \infty$ pour tout $\omega \in A$.

Définition (Convergence en probabilité)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en probabilité* vers une variable aléatoire X si pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \to 0, \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Définition (Convergence en moyenne d'ordre p)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en moyenne d'ordre p*, $p \geq 1$, vers une variable aléatoire X si

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \to 0, \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Hiérarchie

Proposition

La convergence en moyenne d'ordre p entraîne la convergence en probabilité.

Démonstration.

D'après l'inégalité de Markov, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_n - X|^p]}{\varepsilon^p}.$$

Le théorème des gendarmes entraîne que $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$. □

Proposition

La convergence presque sûre entraîne la convergence en probabilité.

Démonstration.

Admis. □

Exemples

Exercice 1

Considérons une suite X_n de variables aléatoires telles que $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 1/n^2$ et $\mathbb{P}(X_n = n^2) = 1/n^2$. montrer que X_n converge vers 0 en probabilité mais pas en moyenne.

Exercice 2

Considérons une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ telles que $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 1/n$ et $\mathbb{P}(X_n = 1) = 1/n$.

1. Montrer que X_n converge en probabilité et en moyenne vers 0.
2. Justifier que
$$\{X_n \to 0\} = \cup_{k\in\mathbb{N}^*}\{X_n = 0, \forall n \geq k\}$$
3. Dans cette question on distingue deux situtations :
   (a) On suppose en plus que les variables $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes. Montrer que la suite X_n ne converge pas vers 0 presque sûrement.
   (b) On suppose maintenant que $X_n = \mathbf{1}_{\{U\leq 1/n\}}$, où U est une variable aléatoire uniforme sur $]0,1]$. Montrer que la suite X_n converge vers 0 presque sûrement.

Plan

Loi faibles des grands nombres

Théorème (Loi faible des grands nombres)

Soit X_i une suite i.i.d de variables aléatoires réelles possédant un moment d'ordre 2 fini. Notons

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

la moyenne empirique de $X_1, \ldots, X_n$.
La suite M_n converge en moyenne quadratique (et donc en probabilité) vers $m = \mathbb{E}[X_1]$ lorsque $n \to +\infty$.

Loi faible des grands nombres

Démonstration.

Comme les X_i sont i.i.d

$$\mathrm{Var}(M_n) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{n}\mathrm{Var}(X_1).$$

Par ailleurs

$$\mathbb{E}[M_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X_1] = m.$$

Donc

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(M_n - m)^2] = \frac{1}{n}\mathrm{Var}(X_1) \to 0 \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

Autrement dit M_n converge vers m en moyenne quadratique. $\square$

Loi forte des grands nombres

Théorème (Loi forte des grands nombres)

Si les X_i sont i.i.d et intégrables, alors M_n converge presque sûrement vers $\mathbb{E}[X]$.

Démonstration.

La preuve de ce résultat sera vue en L3. $\square$

Interprétation de la loi des grands nombres

Si les X_i sont i.i.d et intégrables et $A \subset \mathbb{R}$, alors avec probabilité 1,

$$\mathbb{P}(X_1 \in A) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{Card}\{1 \leq i \leq n : X_i \in A\}}{n}.$$

Exercice 3

Démontrer cette affirmation.

La probabilité d'un événement apparaît donc comme la limite des fréquences de réalisation de cet événement quand on répète l'expérience aléatoire de façon indépendante.

Par exemple, si X_i représente le score lors du ième lancer d'un dé équilibré et $A = \{5\}$ on trouve :

$$\frac{1}{6} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{Card}\{1 \leq i \leq n : X_i = 5\}}{n}.$$

Plan

Convergence en loi

Définition

On dit qu'une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires à valeurs réelles converge en loi vers une variable aléatoire X si pour toute fonction continue bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$ lorsque $n \to +\infty$.

Proposition

La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers X si et seulement si $F_{X_n}(t) \to F_X(t)$ en tout point t où la fonction de répartition F_X de X est continue.

Démonstration.

Admis. $\square$

La convergence en loi est un mode de convergence plus faible que ceux vus précédemment :

Proposition

La convergence en probabilité entraîne la convergence en loi.

Démonstration.

Admis. $\square$

Cas des variables à valeurs entrières

Dans le cas particulier où les variables sont à valeurs entières, on a la caractérisation suivante de la convergence en loi :

Proposition

Si X et la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers X si et seulement $\mathbb{P}(X_n = k) \to \mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Preuve

Démonstration.

Montrons que la convergence en loi entraîne la convergence des masses de probabilité.
Prenons $k \in \mathbb{N}$, alors

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_n \in]k - 1/2, k + 1/2]) = F_{X_n}(k + 1/2) - F_{X_n}(k - 1/2)$$

et de même

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \in]k - 1/2, k + 1/2]) = F_X(k + 1/2) - F_X(k - 1/2).$$

Comme la fonction de répartition F_X est continue en $k - 1/2$ et en $k + 1/2$, on conclut grâce à la convergence en loi que $\mathbb{P}(X_n = k) \to \mathbb{P}(X = k)$.

Réciproquement, supposons que $\mathbb{P}(X_n = k) \to \mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et montrons que X_n converge en loi vers X.
Il suffit pour cela de remarquer que pour tout $t \geq 0$

$$F_{X_n}(t) = \mathbb{P}(X_n \leq t) = \sum_{0 \leq k \leq t, k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X_n = k).$$

La somme étant finie, on peut passer à la limite et on en déduit que $F_{X_n}(t) \to F_X(t)$ pour tout $t \geq 0$. Comme $F_{X_n}(t) = F_X(t) = 0$ pour tout $t < 0$, la convergence a bien lieu pour tout $t \in \mathbb{R}$ et donc X_n converge bien vers X en loi. $\square$

Approximation binomiale - Poisson

Théorème (Approximation binomiale - Poisson)

Soit X_n une suite de v.a. de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$, où $p_n \in [0,1]$ est une suite de nombres telles que $np_n \to \lambda > 0$. Alors X_n converge en loi vers X avec $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

On appelle parfois ce résultat 'loi des petits nombres' car il étudie le comportement du nombre de succès dans une suite d'expériences de Bernoulli ou le paramètre de succès p_n tend vers 0.

Exercice 4

Démontrer le théorème précédent.

Plan

Le théorème limite central

Rappelons que $M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ désigne la moyenne empirique des variables X_i jusqu'au rang n.

Théorème (Limite Central)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{E}[X_1^2] < +\infty$. Posons $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$. Alors la suite

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(M_n - m)$$

converge vers en loi vers Z, où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Démonstration.

Admis - voir cours de L3 $\square$

Ce théorème indique que la convergence de M_n vers m a lieu à la vitesse $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Applications

Corollaire

Avec les notations précédentes, pour tout $a < b$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(M_n - m) \in]a, b]\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\, dx = \mathbb{P}(Z \in]a, b]).$$

Exercice 5

Démontrer ce corollaire.

Application :Pour la loi gaussienne, on sait que $\mathbb{P}(|Z| \leq 1,96) \geq 0,95$.Donc si n est très grand, on a avec une probabilité proche de 95%,

$$M_n \in \left] m - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; m + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

ou de manière équivalente

$$m \in \left] M_n - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; M_n + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

Ce dernier point est très utile en pratique quand on cherche à estimer la moyenne inconnue m d'une loi à partir de réalisations indépendantes de cette loi. On sait qu'avec une grande probabilité, le nombre m se trouve dans un intervalle entièrement calculable en fonction des données observées.