Algèbre 3
TD 2
Applications linéaires entre espaces vectoriels

Licence 2 MAE 2020-2021

Université Paris Descartes

Marc Briant

Dans tout ce TD, $(\mathbb{K}, +, .)$ **désigne un corps commutatif.**

Des applications linéaires explicites

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants dire (et démontrer !) si les applications sont linéaires.

1) $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow R^3$ définie par $f(x, y) = (2x - 3y, x, -y)$.
2) $f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow R$ définie par $f(x, y, z) = x - z$.
3) $f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow R^2$ définie par $f(x, y, z) = (x + y + a, z + b)$. Il faudra discuter suivant les valeurs des réels a et b.
4) $f_4 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \overline{z}$. Il faudra discuter suivant si l'on voit $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-ev ou comme un $\mathbb{C}$-ev.

Exercice 2

Dans les cas suivants montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^k$ et calculer f^{-1}.

1) $k = 2$ et $f(x, y) = (x + y, x - y)$ 2) $k = 3$ et $f(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y)$

Exercice 3 *: Mixons avec de l'analyse*

Dans chacun des cas suivants montrer que φ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-ev E puis déterminer son noyau, son image et dire s'il est ou non injectif ou surjectif.

1) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\varphi(u) = v$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1}$.
2) $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\varphi(f) = f'$.

Exercice 4 *: Un exercice bien complet*

Nous travaillons dans le $\mathbb{R}$-ev $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Nous définissons l'ensemble

$$P_\infty = \{f \in E \mid \quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x)\}$$

sur lequel agit l'application : $\forall f \in P_\infty,\ d(f) = f'$.

a) Montrer que P_∞ est un $\mathbb{R}$-ev et que $d \in L(P_\infty)$.
b) Déterminer $\mathrm{Ker}(d)$ et $\mathrm{Im}(d)$.
c) Montrer que $P_\infty = \mathrm{Ker}(d) \oplus \mathrm{Im}(d)$

À propos des Images et des Noyaux

Exercice 5

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et u un endomorphisme de E. Montrer les assertions suivantes

1) $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0_E\}$.
2) $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2) \Leftrightarrow E = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Ker}(u)$.

Exercice 6

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et f et g dans $L(E)$. Montrer que

1) $g \circ f = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
2) Si $f \circ g = \mathrm{Id}_E$ alors $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$ et enfin $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 7 *: Relation polynômiale et automorphisme*

Prenons E un $\mathbb{K}$-ev et $u \in L(E)$. Nous rappelons que $u^n = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ fois}}$.

1) Supposons que $u^2 = \mathrm{Id}_E$.
   a) Montrer que u est un automorphisme et expliciter u^{-1} en fonction de u.
   b) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$.
2) Supposons que $u^2 - 3u + 2\mathrm{Id}_E = 0$.
   a) Montrer que u est un automorphisme et expliciter u^{-1} en fonction de u.
   b) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E)$.
3) Supposons que $u^2 - 5u + 6\mathrm{Id}_E = 0$.
   a) Montrer que u est un automorphisme et expliciter u^{-1} en fonction de u.
   b) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - 3\mathrm{Id}_E)$.

Projecteurs, symétries et homothéties

En réalité on ne fera que des exercices sur les projecteurs puisque si s est une symétrie alors par définition $p = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}Id_E$ est un projecteur et nous travaillerons avec p ! Ne jamais apprendre de choses redondantes...

Exercice 8

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et soient p et q deux projecteurs de $L(E)$ dans chacun des cas suivants établir que r est un projecteur et déterminer son noyau et son image

1) $r = \mathrm{Id}_E - p$.
2) Pour p et q qui commutent $r = p \circ q$.
3) Pour $p \circ q = 0$, $r = p + q - q \circ p$. *Ici $Im(p) + Im(q)$ pourrait jouer un rôle...*
4) Pour $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(q)$, $r = p + q - p \circ q$.

Exercice 9 *: Somme de projecteurs*

Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev E. Nous voulons étudier $p + q$.

a) Montrer que $p + q$ est un projecteur ssi $p \circ q = q \circ p = 0$.
b) Si $p + q$ est un projecteur montrer que

$$\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q).$$

Exercice 10 *: Une fois qu'on connait la liberté...*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et supposons qu'il existe un endomorphisme $f \in L(E)$ tel que

$$\forall x \in E,\ \exists \lambda_x \in \mathbb{K}, \quad f(x) = \lambda_x x.$$

Montrer que f est une homothétie de E :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E, \quad f(x) = \lambda x.$$