Université Paris Descartes **Analyse 3**

1$^{\text{er}}$ semestre 2017-2018

Examen - Session 2

Vendredi 15 juin 2018 - Durée : 2h

Tout document, calculatrice, téléphone portable et autre appareil électronique est interdit. L'énoncé comporte 5 exercices indépendants.

Une part substantielle de la note portera sur la rédaction. Une juxtaposition d'équations sans liens logiques ni quantificateurs appropriés ne se verra pas attribuer une note élevée.

On attend que vous citiez précisément les théorèmes utilisés. En l'absence de la totalité des hypothèses requises, votre résultat sera considéré comme faux.

Exercice 1 (Question de cours) :

1. Donner l'énoncé du Théorème fondamental de l'analyse.
2. Démontrer ce théorème.

Exercice 2 : Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ deux suites réelles. Pour tout $n \geq 1$, on pose $U_n = \sum_{k=1}^n u_k$ et $V_n = \sum_{k=1}^n v_k$. On suppose dans tout l'exercice que

— $\forall n \geq 1, v_n > 0$,

— $\lim_{n\to\infty} V_n = +\infty$.

1. Le but de cette question est de montrer que si
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \in \mathbb{R},$$
alors
$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = l.$$
   (a) Montrer que pour tout $N_1 \geq 1$, tout $n > N_1$,
$$\left|\frac{U_n}{V_n} - l\right| \leq \left|\frac{U_{N_1} - lV_{N_1}}{V_n}\right| + \frac{\sum_{k=N_1+1}^n \left|\frac{u_k}{v_k} - l\right| v_k}{V_n}.$$
   (b) Ecrire avec des quantificateurs appropriés la convergence de $\frac{u_n}{v_n}$ vers l.

   (c) Ecrire avec des quantificateurs appropriés le fait que $V_n \to_{n\to\infty} +\infty$.

   (d) Conclure.

   Correction : Calculons :
$$\left|\frac{U_n}{V_n} - l\right| = \left|\frac{U_n - lV_n}{V_n}\right| = \left|\frac{U_{N_1} - lV_{N_1}}{V_n} + \frac{U_n - U_{N_1} - l(V_n - V_{N_1})}{V_n}\right|,$$
$$= \left|\frac{U_{N_1} - lV_{N_1}}{V_n} + \frac{\sum_{k=N_1+1}^n (u_k - lv_k)}{V_n}\right|.$$
   Le résultat s'en déduit en factorisant par $v_k \neq 0$ et par inégalité triangulaire. La convergence de $\frac{u_n}{v_n}$ vers l se traduit par : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\left|\frac{u_n}{v_n} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Le fait que $V_n \to \infty$ s'écrit : pour tout $A > 0$, il existe $n_1 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $V_n \geq A$.
   On applique l'inégalité à $N_1 = n_0$: alors pour $n \geq n_0$
$$\left|\frac{U_n}{V_n} - l\right| \leq \left|\frac{U_{N_1} - lV_{N_1}}{V_n}\right| + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\sum_{k=N_1+1}^n v_k}{V_n} \leq \left|\frac{U_{N_1} - lV_{N_1}}{V_n}\right| + \frac{\varepsilon}{2}$$
   On prend alors $n \geq \max(n_0, n_1)$ et $A = \frac{2\left|U_{N_1} - lV_{N_1}\right|}{\varepsilon}$ et donc $\left|\frac{U_n}{V_n} - l\right| < \varepsilon$.

2. Application : montrer l'existence et donner la valeur de la limite
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}},$$

pour $k \in \mathbb{N}$ fixé. *On posera bien sûr $u_n = n^k$ et $v_n = n^{k+1} - (n-1)^{k+1}$ pour $n \geq 1$ et on détaillera proprement le calcul de la limite de $\frac{u_n}{v_n}$.*
Correction : On a d'une part $V_n = n^{k+1} \to \infty$. D'autre part : $\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{n(1-(1-1/n)^{k+1})}$. On effectue un développement limité du dénominateur : $n(1-(1-1/n)^{k+1}) = n(1-(1-\frac{k+1}{n}+o(1/n))) = n(\frac{k+1}{n}+o(1/n)) = k+1+o(1)$. Par conséquent, $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{k+1}$. D'après la question précédente, la quantité demandée converge aussi vers $\frac{1}{k+1}$.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ qui s'annule en au moins $n+1$ points distincts de I.

1. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule en au moins un point de I.
2. Soit α un réel. Montrer que la dérivée $(n-1)$ième de $f' + \alpha f$ s'annule au moins une fois sur I. *On pourra s'intéresser à la fonction $g : x \mapsto f(x)e^{\alpha x}$.*

Correction : La première question est un grand classique, vu en TD. On raisonne par récurrence sur n : soit $\mathcal{P}(n)$ l'affirmation suivante : "pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^n$ qui s'annule en au moins $n+1$ points distincts de I alors $f^{(n)}$ s'annule en au moins un point". Tout d'abord $\mathcal{P}(0)$ est vraie : c'est une tautologie, il n'y a rien à montrer, puisque $f^{(0)} = f$ par définition. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain n, prouvons $\mathcal{P}(n+1)$: soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ qui s'annule en au moins $n+2$ points de I. On note $x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1}$ ces $n+2$ points. On applique le Théorème de Rolle sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ pour $i = 0, \ldots, n$: la fonction f est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$, dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$ telle que $f(x_i) = f(x_{i+1})$. Par conséquent, il existe $y_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $f'(y_i) = 0$. On est en mesure d'appliquer l'hypothèse de récurrence à la fonction $g = f'$ (qui est de classe $\mathcal{C}^n$, car f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, et s'annule en les $n+1$ points y_i distincts : par hypothèse de récurrence, $g^{(n)}$ s'annule en au moins un point de I. Or $g^{(n)} = f^{(n+1)}$ et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'où la propriété par récurrence.

Soit la fonction $g : x \mapsto g(x) = f(x)e^{\alpha x}$. Alors, g est de classe $\mathcal{C}^n$, comme f. Toute la question se fonde sur l'observation que $g'(x) = (f'(x) + \alpha f(x))e^{\alpha x}$. De façon équivalente, $f'(x) + \alpha f(x) = g'(x)e^{-\alpha x}$. Posons $h(x) = g'(x)e^{-\alpha x}$. Comme $e^{-\alpha x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, h s'annule si et seulement si g' s'annule. Or, la fonction g s'annule (comme f) en au moins $n+1$ points sur I. Donc g' s'annule en au moins n points de I. Donc h, de classe $\mathcal{C}^{n-1}$, s'annule en au moins n points sur I. Par application de la première question $h^{(n-1)}$ s'annule en au moins un point sur I.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

1. Montrer que f admet un minimum global.
2. Ce minimum est-il ou non unique ? Si oui, vous donnerez une démonstration, si non, vous donnerez un contre-exemple.
3. Le résultat de la question 1. est-il toujours vrai si on ne suppose plus que f est continue ? Si oui, vous donnerez une démonstration, si non, vous donnerez un contre-exemple.

Correction : Ecrivons le fait que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$: pour tout $B > 0$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x > A$, $f(x) > B$. De même, comme $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, donc pour tout $B > 0$, il existe $A' > 0$ tel que pour tout $x < -A'$, $f(x) > B$. Choisissons $B = f(0) + 1$. Alors, pour tout x en dehors du segment $[-A', A]$, on a $f(x) > f(0) + 1$. De plus, f est continue sur le segment $[-A', A]$. Par théorème de la borne atteinte, f admet un minimum sur $[-A', A]$, atteint en $x_0 \in [-A', A]$. Pour conclure, il suffit de voir que non seulement x_0 est un minimum de f sur $[-A', A]$, mais aussi sur $\mathbb{R}$ tout entier, puisque, $0 \in [-A', A]$ et donc $f(x_0) \leq f(0)$ et donc $f(x_0) \leq f(0) < f(0) + 1 < f(x)$ pour tout $x \in [-A', A]$.

Ce minimum n'a aucune raison d'être unique : contre-exemple : $f(x) = 1$ sur $[-1, 1]$ et $f(x) = x^2$ ailleurs.

Le résultat n'est plus nécessairement vrai si f n'est plus continue : contre-exemple $f(x) = x^2$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 2019$: cette fonction n'admet pas de minimum.

Exercice 5 : Soit l'équation différentielle suivante :

$$ty'(t) - y(t) = -t^2 \ln(|t|). \tag{1}$$

1. Résoudre cette équation sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. *Vous détaillerez votre réponse pour* $]0, +\infty[$ *et vous pourrez vous contenter de donner la réponse pour* $]-\infty, 0[$.
2. Existe t-il des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur $\mathbb{R}$ et qui sont solutions de (1) sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$? Si oui, lesquelles ? Vous justifierez précisément votre réponse.

Correction : On résout d'abord sur $]0, +\infty[$: l'équation homogène s'écrit $y'(t) - \frac{1}{t}y(t) = 0$, dont l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_0 := \left\{y : t \mapsto ce^{-A(t)}, c \in \mathbb{R}\right\}$, où A est une primitive de $t \mapsto -\frac{1}{t}$, par exemple $A(t) = -\ln(t)$. Donc $\mathcal{S}_0 := \{y : t \mapsto ct, c \in \mathbb{R}\}$. Trouvons ensuite une solution particulière de l'équation (1) : par variations de la constante, on cherche une solution sous la forme $y(t) = c(t)t$ où c est une fonction inconnue. Il vient alors $c'(t)t = -t\ln(t)$ et donc $c'(t) = -\ln(t)$. En particulier, $c(t) = t - t\ln(t)$ convient. Une solution particulière de (1) est donc $y(t) = t^2 - t^2\ln(t)$. Par théorème du cours, toute solution de (1) est donc de la forme $y(t) = ct + t^2 - t^2\ln(t)$, où c est une constante quelconque.

De la même façon, toute solution sur $]-\infty, 0[$ s'écrit sous la forme $y(t) = dt + t^2 - t^2\ln(-t)$, où d est une constante quelconque.

Pour trouver les éventuelles solutions de (1) sur $\mathbb{R}$ tout entier, on procède par Analyse/Synthèse :

Analyse : supposons qu'une telle solution y existe : alors nécessairement, il existe deux constantes c et d telles que $y(t) = ct + t^2 - t^2\ln(t)$ pour $t > 0$ et $y(t) = dt + t^2 - t^2\ln(-t)$ pour $t < 0$. Une telle solution est nécessairement continue en 0. Par croissance comparée d'un polynôme et d'un logarithme, on a $y(t) \xrightarrow[t\to0, t>0]{} 0$ et $y(t) \xrightarrow[t\to0, t<0]{} 0$. Il est donc possible de prolonger par continuité y en 0 en posant $y(0) = 0$. Vérifions la dérivabilité de y en 0 : on a pour $t > 0$, $\frac{y(t)-y(0)}{t} = ct + t - t\ln(t) \xrightarrow[t\to0, t>0]{} c$ et pour $t < 0$, $\frac{y(t)-y(0)}{t} = dt + t - t\ln(t) \xrightarrow[t\to0, t>0]{} d$. y est donc dérivable en 0 si et seulement si les dérivées à droite et à gauche sont égales, c'est-à-dire $c = d$.

Synthèse : soit c une constante quelconque et posons la fonction $y(t) = ct + t^2 - t^2\ln(|t|)$ pour $t \neq 0$ et $y(0) = 0$. Une telle fonction est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et bien solution de (1) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Fin de l'épreuve.