Algèbre 3
Chapitre 6
La théorie des Matrices

Licence 2 MAE 2020-2021

Université de Paris - Paris Descartes

Marc Briant

(Fortement inspiré des cours de MM. G. Roussel et R. Lounès)

Table des matières

Avant-propos : À partir des applications linéaires nous avons pu construire des ensembles de matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ainsi que des lois externes et internes $(\widetilde{\cdot}, \widetilde{+}, \widetilde{\times})$ (dont nous omettrons les "tildes") qui reflètent les lois des applications linéaires. Nous pouvons donc désormais nous affranchir de la structure des ev sous-jacents pour n'étudier plus que ces ensembles de tableaux de scalaires : c'est la théorie des matrices !.

Algébriquement c'est très puissant puisque quelque soient les espaces E et F initiaux ($\mathbb{R}^n$, Vect $(\{x \mapsto \sin kx,\ 1 \leqslant k \leqslant 9\})$,..., aussi abstraits que l'on veut), leurs applications linéaires sont réduites à des tableaux de scalaires pour lesquels nous avons des propriétés indépendantes des ev : addition et multiplication matricielles, inversibilité, matrices équivalentes, matrices semblables... En étudiant ces matrices en tant que telles (indépendamment de E et F) nous obtiendrons alors des propriétés applicables ensuite à toutes les applications linéaires entre ev de dimensions finies !

Dans tout ce cours, $(\mathbb{K}, +, .)$ **désigne un corps commutatif.**

1 Calcul matriciel général

1.1 Espace vectoriel et règles de calcul

Muni de la multiplication par un scalaire et de l'addition matricielle (nous rappelons que cela signifie "terme à terme"), l'espace $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un ev dont une base est aisément constructible.

Théorème 1.1

Soient $p, n \geqslant 1$ alors $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie np dont le neutre est la matrice nulle. De plus, si l'on appelle **matrices élémentaires** les matrices

$$E_{kl} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

alors la famille

$$(E_{11}, E_{12}, .., E_{1p}, E_{21}, .., E_{2p}, .., E_{n1}, .., E_{np})$$

est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée **base canonique**.

Remarque 1.2

Rappelons que le symbole δ_{ij} est le **symbole de Kronecker** qui est une façon rapide d'écrire :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Ainsi E_{kl} est la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf celui à l'intersection de la ligne k et de la colonne l, qui lui vaut $1_{\mathbb{K}}$.

Le produit matriciel, quant à lui, est plus compliqué et nécessite des conditions entre nombre de lignes et nombre de colonnes (voir chapitre précédent). Par exemple si l'on peut définir un produit de matrices AB, la multiplication BA n'est souvent pas possible ! Il existe cependant des règles de calcul entre les différentes opérations matricielles.

Proposition 1.3 (*Propriétés du produit matriciel*)

1. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$,
$$A(BC) = (AB)C.$$
2. $\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})^2$, $\forall B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$, $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$.
3. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $\forall (B_1, B_2) \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$,
$$A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2.$$
4. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $\forall B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$,
$$(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B).$$

1.2 Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes

Comme dans tout $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, les vecteurs de base - et donc ici les matrices élémentaires - jouent des rôles importants. Regardons alors ce que donne la multiplication par ces matrices élémentaires.

Lemme 1.4

Pour $E_{kl} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, multiplier à gauche une matrice par E_{kl} revient à isoler sa ligne l et la placer en ligne k tandis que multiplier à droite une matrice par E_{kl} revient à isoler sa colonne k et la placer en colonne l.

Exemple :

$$E_{23} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \times E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Dès lors nous pouvons imaginer jouer avec des lignes et des colonnes bien définies d'une matrice.

Définition 1.5. On considère $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle **opération élémentaire sur les lignes de** A l'une des actions suivantes :

- Permuter les lignes i et j ($L_i \leftrightarrow L_j$) ;
- Multiplier la ligne i par un scalaire α ($L_i \leftarrow \alpha L_i$) ;
- Additionner la ligne i avec la ligne j multipliée par un scalaire ($L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$).

On appelle **opération élémentaire sur les colonnes de** A les actions ci-dessus effectuées sur les colonnes et non les lignes.

Théorème 1.6

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors toute matrice A' de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ obtenue à partir de A par une succession d'opérations élémentaires sur

- les lignes s'écrit : $\exists U \in GL_n(\mathbb{K}),\ A' = UA$;
- les colonnes s'écrit : $\exists V \in GL_p(\mathbb{K}),\ A' = AV$;
- les lignes et les colonnes s'écrit :

$$\exists (U, V) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K}),\ A' = UAV.$$

Corollaire 1.7

Deux matrices obtenues l'une de l'autre par une succession d'opérations élémentaires sont équivalentes.

Application : [Changements de base explicites] Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-ev alors si l'on connait une représentation matricielle dans des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ de $u \in L(E, F)$, des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de $M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ donnent des représentations matricielles de u dans de nouvelles bases : $M_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(u) = U\, M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)\, V$.
Comme U et V peuvent être connues explicitement, puisque CL de multiplications par E_{kl}, nous connaissons les matrices de passage et donc les nouvelles bases aisément.

1.3 Transposition d'une matrice

Outre les opérations élémentaires, une idée assez simple de modification de matrice est d'inverser ses lignes et ses colonnes.

Définition 1.8. Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ un matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ notée ${}^tA = (b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ définie par

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ \forall j \in [\![1, n]\!], \quad b_{ij} = a_{ji}.$$

Proposition 1.9

La transposition est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Elle satisfait les règles de calcul suivantes.

1. $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2,\ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2,$
$${}^t(\alpha A + \beta B) = \alpha\, {}^tA + \beta\, {}^tB.$$
2. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K}),$
$${}^t(AB) = ({}^tB)({}^tA).$$
3. $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad {}^t({}^tA) = A.$

2 Rang d'une matrice

Dans les ev de dimension finie, nous avons réussi à réduire l'étude à celui des familles. Pour comprendre les matrices de la manière la plus simple possible nous allons donc essayer de copier ces idées. Lors de la création de la théorie des matrices nous avons vu qu'une matrice colonne pouvait représenter les coordonnées d'un vecteur dans une base d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Le $\mathbb{K}$-ev de dimension finie le plus évident est $\mathbb{K}^n$ et donc nous allons essayer de mesurer la "liberté" des vecteurs colonnes qui composent une matrice, puis essayer d'en extraire des "classements" des matrices.

2.1 Définition et premières propriétés

Définition 2.1. Soit $M = (m_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Nous appelons C_1,..,C_p les vecteurs colonnes qui composent M : $C_k = (m_{1k}, m_{2k}, .., m_{nk}) \in \mathbb{K}^n$.
Nous appelons **rang de la matrice** M l'entier

$$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(C_1, .., C_p) = \dim\mathrm{Vect}\left(\{C_1, .., C_p\}\right).$$

Exemple : [Deux exemples importants]

1)Matrice nulle. Pour M dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ nous avons

$$\mathrm{rg}(M) = 0 \Leftrightarrow M = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}.$$

2)Matrices J_r. Pour $n, p \geqslant 1$ deux entiers nous définissons pour tout entier $0 \leqslant r \leqslant \min\{n, p\}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ suivante

$$J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} 1_{\mathbb{K}} & & 0_{\mathbb{K}} & \vdots & & & \\ & \ddots & & \vdots & & 0_{\mathbb{K}} & \\ 0_{\mathbb{K}} & & 1_{\mathbb{K}} & \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & & & \\ & 0_{\mathbb{K}} & & \vdots & & 0_{\mathbb{K}} & \\ & & & \vdots & & & \end{pmatrix}$$

qui s'écrit aussi par blocs

$$J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & \vdots & 0_{\mathcal{M}_{r,p-r}(\mathbb{K})} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0_{\mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})} & \vdots & 0_{\mathcal{M}_{n-r,p-r}(\mathbb{K})} \end{pmatrix}.$$

Nous avons $\mathrm{rg}(J_{n,p,r}) = r$.

Remarque 2.2

Il est de coutume d'écrire seulement J_r au lieu de $J_{n,p,r}$ mais il faut bien se rappeler que la taille de J_r change avec l'ordre (n, p) des matrices considérées.

Comprenons alors que ce rang d'une matrice est une généralisation de toutes les définitions de rang que nous avons vu jusque-là et que donc tout calcul de rang dans un ev se ramène au calcul de rang d'une matrice.

Proposition 2.3

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et considérons $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ une base de E et de F respectivement.

1. Si $(a_1, .., a_p)$ sont des vecteurs de E alors $\mathrm{rg}(a_1, .., a_p) = \mathrm{rg}(M_{\mathcal{B}}(a_1, .., a_p))$.
2. Si $u \in L(E, F)$ alors $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u))$.

Proposition 2.4

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$.

- Si A est inversible (donc $n = m$) alors $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(B)$.
- Si B est inversible (donc $m = p$) alors $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(A)$.

2.2 Caractérisation d'une matrice par son rang

Théorème 2.5

Soient A dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et un entier $r \leqslant \min\{n,p\}$.

$$(\mathrm{rg}(A) = r) \Leftrightarrow (A \text{ est équivalente à } J_{n,p,r}).$$

Corollaire 2.6

Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ont le même rang si et seulement si elles sont équivalentes.

Application : [Calcul du rang par opérations élémentaires] Comme nous l'avons vu, faire des applications élémentaires sur les lignes et les colonnes du matrice donne des matrices équivalentes. Ainsi pour trouver le rang d'une matrice A il nous suffit de manipuler ses lignes et colonnes avec des opérations élémentaires jusqu'à obtenir une matrice de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} a_1 & * & * & \vdots & * & * & * \\ & \ddots & * & \vdots & * & * & * \\ 0_{\mathbb{K}} & & a_r & \vdots & * & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & & & \\ & 0_{\mathbb{K}} & & \vdots & & 0_{\mathbb{K}} & \\ & & & \vdots & & & \end{pmatrix}$$

où les $a_r \neq 0_{\mathbb{K}}$ dont le rang est aisément calculable : r.
Cet algorithme porte le nom de **algorithme du pivot de Gauss**.

Exemple : Le rang de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ vaut 3.

Application : [Impact sur les applications linéaires] Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $p \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$. Si $u \in L(E,F)$ et que $\mathrm{rg}(u) = r$ alors il existe $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F telles que $M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F} = J_{n,p,r}$.
L'algorithme des opérations élémentaires sur les changements de base permet de trouver les matrices de passage - et donc des bases dans lesquelles la matrice de u est J_r.

Proposition 2.7

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ nous avons $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)$.

3 Les matrices carrées d'ordre n

L'intérêt des matrices carrées en terme de calcul est que si l'on prend deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors les produits AB et BA sont toujours définis et sont encore des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le produit matriciel est donc une loi de composition interne.

3.1 Anneau et $\mathbb{K}$-algèbre

Nous avons déjà vu le mot $\mathbb{K}$-algèbre même s'il n'est pas au programme. Cela signifie que nous avons un ev avec une deuxième loi interne qui est distributive par rapport aux autres. Par exemple : dans le cas des matrices la multiplication matricielle, dans le cas des applications linéaires la composition. Les lois de calculs obtenues pour la multiplication matricielle donnent

Théorème 3.1

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau dont l'élément neutre pour la multiplication est I_n.
$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \cdot, +, \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension n^2.

Remarque 3.2 (*Attention : non commutativité !*)

Si effectivement AB et BA existent, nous pouvons très bien avoir $AB \neq BA$ comme nous l'avons vu notamment en multipliant par des matrices élémentaires à gauche ou à droite.
De plus, l'anneau n'est pas intègre puisqu'on peut avoir $AB = 0$ alors que $A \neq 0$ ET $B \neq 0$ (calculer $E_{11}E_{22}$ dans $M_2(\mathbb{R})$ par exemple).

Comme dans tous les anneaux, nous pouvons alors définir les puissances d'une matrice carrées.

Définition 3.3. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}$. Nous appellons **puissance k^{eme} de** A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$A^k = \begin{cases} \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}} & \text{si } k \geqslant 1 \\ I_n & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Comme notre anneau n'est pas commutatif il peut exister des matrices dont la puissance devient 0.

Définition 3.4. Nous disons que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente d'ordre $p \geqslant 1$ si et seulement si $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$.

Exemple : [Comprendre ce que font les matrices] Bien entendu, une matrice est nilpotente si et seulement si elle est la représentation matricielle d'un endomorphisme nilpotent. Donc comprendre ce que fait une matrice en tant qu'endomorphisme est très utile.

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est nilpotente puisque $A^2 = 0$. A envoie e_1 sur 0 puis e_2 sur e_1 - donc A^2 fait $e_1 \to 0 \to 0$ et $e_2 \to e_1 \to 0$.

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente par calcul $A^3 = 0$ mais aussi car $e_1 \to 2e_2 \to 6e_3 \to 0$ et $e_2 \to 3e_3 \to 0 \to 0$ et $e_3 \to 0 \to 0 \to 0$.

Proposition 3.5 (*Formule du binôme*)

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. **Si** A **et** B **commutent** - $AB = BA$ alors

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

La transposition envoie $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même et donc nous pouvons mettre en avant certaines matrices spéciales vis-à-vis de leur transposée. Si dans ce cours cela est anecdotique, vous verrez plus tard qu'elles sont très importantes.

Définition 3.6. Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite

- **Symétrique** ssi ${}^tA = A$;
- **Antisymétrique** ssi ${}^tA = -A$.

Nous notons $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n qui sont symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ les antisymétriques.

Proposition 3.7

1. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est antisymétrique alors tous ses coefficients diagonaux sont nuls.
2. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Enfin, nous nous rappelons que pour calculer le rang, l'algorithme des opérations élémentaires essaie toujours de faire apparaître des matrices dont les coefficients diagonaux sont précédés de 0. Nous pouvons donc mettre en avant ces matrices.

Définition 3.8. Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite
- **Triangulaire supérieure** ssi $\forall\, i > j,\ a_{ij} = 0_{\mathbb{K}}$;
- **Triangulaire inférieure** ssi $\forall\, i < j,\ a_{ij} = 0_{\mathbb{K}}$;
- **Diagonale** ssi $\forall\, i \neq j,\ a_{ij} = 0_{\mathbb{K}}$, on note alors souvent $A = \mathrm{Diag}(a_{11}, ..a_{nn})$.

Proposition 3.9

L'ensemble des matrices triangulaires supérieures, l'ensemble des matrices triangulaires inférieures et l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-algèbre de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \cdot, +, \times)$.

Remarque 3.10

En pratique la proposition ci-dessus implique que si nous faisons une CL, ou que nous multiplions entre elles, des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures, resp. diagonales) alors nous obtiendrons toujours des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures, resp. diagonales).

Proposition 3.11

Le rang d'une matrice triangulaire supérieure, inférieure ou diagonale est le nombre de ses coefficients diagonaux non nuls.

3.2 Les matrices inversibles $GL_n(\mathbb{K})$

Nous avons déjà vu que certaines matrices carrées sont inversibles, nous pouvons alors les étudier, d'autant plus qu'elles semblent apparaître partout (matrices équivalentes, matrices semblables, changement de base...).

Proposition 3.12

$(GL_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe d'élément neutre I_n. Plus particulièrement : $\forall (A, B) \in GL_n(\mathbb{K})^2$

$$AB \in GL_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Tout comme le rang d'une application linéaire en dimension finie, celui d'une matrice est étroitement lié à son inversibilité.

Théorème 3.13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Nous avons équivalences des propriétés suivantes

(i) $\mathrm{rg}(A) = n$.

(ii) A est inversible.

(iii) A est **inversible à droite** :

$$\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AB = I_n.$$

(iv) A est **inversible à gauche** :

$$\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ BA = I_n.$$

Application : [Calcul algorithmique de l'inverse] Comme pour trouver le rang d'une matrice, trouver son inverse se ramène à des opérations élémentaires : **la méthode du pivot de Gauss**. En effet, si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ alors on effectue des opérations élémentaires sur les lignes de A jusqu'à obtenir l'identité : $I_n = UA$.
Dès lors, on effectue **les mêmes** opérations élémentaires sur les lignes de la matrice identité : $UI_n = B$. Nous avons alors $BA = UI_nA = UA = I_n$ et donc $B = A^{-1}$.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Proposition 3.14

Si $P \in GL_n(\mathbb{K})$ alors ${}^tP \in GL_n(\mathbb{K})$ et $({}^tP)^{-1} = {}^t(P^{-1})$.

3.3 Trace d'une matrice carrée, trace d'un endomorphisme

Définition 3.15. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Nous appelons **trace de** A le scalaire $\mathrm{tr}(A)$ défini par

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Proposition 3.16

L'application trace est une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$: pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$,

$$\mathrm{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \mathrm{tr}(A) + \beta \mathrm{tr}(B).$$

Regardons alors comment la trace se comporte avec le produit matriciel.

Proposition 3.17

Si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

En conséquence, deux matrices semblables ont la même trace.

Remarque 3.18 (*Trace d'un endomorphisme*)

Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, nous savons que deux représentations matricielles d'un même endomorphisme $u \in L(E)$ dans deux bases différentes sont des matrices semblables. Ainsi, quelque soit la base de E choisie, la matrice de u a toujours la même trace. Nous définissons donc la **trace de l'endomorphisme** u par $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(M_{\mathcal{B}}(u))$ où $\mathcal{B}$ est n'importe quelle base de E.
En étudiant les matrices nous avons donc réussi à extraire une propriété intrinsèque des endomorphismes : une propriété indépendante des bases choisies !

Exemple : [Trace d'un projecteur] Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Alors pour tout projecteur $p \in L(E)$ nous avons $\mathrm{rg}(p).1_{\mathbb{K}} = \mathrm{tr}(p)$.