Algèbre 3
Chapitre 4
Espaces Vectoriels de dimension finie

Licence 2 MAE 2020-2021

Université de Paris - Paris Descartes

Marc Briant

(Fortement inspiré des cours de MM. G. Roussel et R. Lounès)

Table des matières

Avant-propos : Nous venons de voir qu'il existe des cas où un espace vectoriel est entièrement généré par une famille de vecteurs. Dans le cas où il existe une famille génératrice finie l'ev peut-être décrit simplement par des CL finies. Cela les rend algébriquement intéressants puisque d'une certaine manière ils représentent les ev construits directement par des "briques élémentaires".

Dans tout ce cours, $(\mathbb{K},+,.)$ désigne un corps commutatif.

1 Les bases dans un ev de dimension finie

1.1 La dimension d'un espace vectoriel

Définition 1.1. Un $\mathbb{K}$-ev E est de **dimension finie** si et seulement si E admet au moins une famille génératrice finie.
Autrement dit, E est un ev de dimension finie ssi il existe une famille $(x_1,..,x_d)$ de E telle que

$$E = \mathrm{Vect}\left(\{x_1,..,x_d\}\right).$$

Dans le cas contraire nous dirons que E est de **dimension infinie**.

Théorème 1.2

Si E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$ alors il existe au moins une base de E.
De plus, toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments.

Définition 1.3 (Dimension d'un EV)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie non réduit à $\{0_E\}$. Le cardinal commun à toutes les bases de E est appelé **dimension du $\mathbb{K}$-ev** E, on le note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$.

Exemple : 1) L'espace nul. $\{0_E\}$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Par convention nous disons qu'il est de dimension nulle. Un $\mathbb{K}$-ev est de dimension nulle ssi $E = \{0_E\}$.

2) L'espace $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie et $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$.

3)Espace de dimension 2. Si E est de dimension 2 alors (e_1, e_2) est une base si et seulement si e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires.

4)Influence du corps sur la dimension. Nous avons $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ car $(1,i)$ est une base de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-ev alors $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ car $\{1\}$ ou $\{i\}$ sont des bases de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{C}$-ev.

Remarque 1.4 (*Notation*)

Dans les cas où il n'y a aucune ambigüité sur le corps de base $\mathbb{K}$ nous noterons simplement $\dim(E)$.

Contre-Exemple : [Dimension infinie.] Nous avions vu que $E = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto e^{kx},\ k \in \mathbb{N}\right)$ n'a pas de génératrice finie et il est donc de dimension infinie.

Un ev de dimension finie possède une caractéristique intrinsèque : sa dimension. Cette unicité est très forte et rend les ev de même dimension très similaires.

Théorème 1.5

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie d.

1. Si F est un $\mathbb{K}$-ev isomorphe à E alors F est de dimension finie et $\dim_{\mathbb{K}}(F) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$.
2. E est isomorphe à $\mathbb{K}^d$.

Corollaire 1.6

Deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.

1.2 Sous-ev d'un ev de dimension finie

La dimension d'un ev "mesure" en quelque sorte la "grosseur" d'un ev en terme de CL libres possibles.

Proposition 1.7

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $d \geqslant 1$. Tout sous-ev F de E est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.

Application : [Dimension infinie de l'espace des fonctions.] Grâce à $E = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto e^{kx},\ k \in \mathbb{N}\right)$ qui est un sous-ev de l'espace $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ nous déduisons que l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont continues est de dimension infinie.

Remarque 1.8 (*Un peu de vocabulaire*)

Dans un ev de dimension d on appelle

- **Droite Vectorielle** tout sous-ev de dim 1.
- **Plan Vectoriel** tout sous-ev de dimension 2.
- **Hyperplan** tout sous-ev de dimension $d-1$.

Proposition 1.9

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F et G deux sous-ev de E.
Si $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$ alors $F = G$.

Remarque 1.10

Remarquons que le résultat ci-dessus entraîne que si un sous-ev a la même dimension que E alors ce ne peut être que E lui-même !

1.3 Cardinalité et dimension

La dimension d'un ev agit comme une barrière sur la grandeur des familles de vecteurs libres ou génératrices. Remarquons que la grandeur de comptage (cardinal) est différente de la grandeur dimensionnelle.

Définition 1.11. Soit $(x_1, .., x_n)$ une famille d'un $\mathbb{K}$-ev. On appelle **rang de la famille** $(x_1, .., x_n)$ l'entier

$$\operatorname{rg}(x_1, .., x_n) = \dim(\operatorname{Vect}(\{x_1, .., x_n\})).$$

Exemple : [Un exemple à retenir] Une famille $(x_1, .., x_n)$ d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie est libre si et seulement si $\operatorname{rg}(x_1, .., x_n) = n$.

Proposition 1.12

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $d \geqslant 1$.

1. Une famille libre de E a **au plus** d vecteurs et c'est une base ssi elle en a **exactement** d.
2. Une famille génératrice de E a **au moins** d vecteurs et c'est une base ssi elle en a **exactement** d.

Une fois que l'on sait que l'ev est de dimension finie alors on peut construire des bases à partir de familles libres.

Théorème 1.13 (*Théorème de la base incomplète*)

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $d \geqslant 1$ et $(e_1, .., e_p)$ une famille libre de E (donc $p \leqslant d$).

1. Il existe $d-p$ vecteurs $e_{p+1}, .., e_d$ dans E tels que $(e_1, .., e_d)$ soit une base de E.
2. Si $(g_1, .., g_q)$ est une famille génératrice de E alors on peut compléter $(e_1, .., e_p)$ en une base de E en utilisant uniquement des vecteurs de $(g_1, .., g_q)$.

1.4 Constructions de bases et calculs de dimensions

Le théorème de la base incomplète indique que tout sous-ev de E peut être "complété" pour décrire E.

Proposition 1.14

Tout sous-ev d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie admet un supplémentaire.

Cela permet également d'obtenir des relations algébriques sur les dimensions.

Proposition 1.15

Soient F et G deux sous-ev d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

En particulier si F et G sont en somme directe alors

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G).$$

Contre-Exemple : [Attention à la somme de dimensions !] Si $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$ implique que F et G sont en somme directe, $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ N'implique PAS que $E = F + G$! Prenons $E = \mathbb{R}^3$, $F = \operatorname{Vect}(e_1)$ et $G = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$.

Calculer la dimension d'un ev ou d'un sous-ev revient souvent à construire une base explicite.

Exemple : $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ est un sous-ev de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$.

Théorème 1.16 (*Produit d'ev*)

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie alors $E \times F$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F).$$

Plus précisément, si $(e_1, .., e_p)$ est une base de E et $(f_1, .., f_q)$ est une base de F alors $((e_1, 0_F), .., (e_p, 0_F), (0_E, f_1), .., (0_E, f_q))$ est une base de $E \times F$.

Remarque 1.17

Le résultat ci-dessus s'étend bien sûr au cas de n ev $E_1 \times .. \times E_n$.

Théorème 1.18 (*Théorème de la base adaptée*)

Soient $E_1, .., E_n$ des sous-ev en somme directe de E : $E = E_1 \oplus .. \oplus E_n$.
Si pour tout i de $[\![1, n]\!]$ nous connaissons une base $(e_1^{(i)}, .., e_{p_i}^{(i)})$ de E_i alors la famille $(e_1^{(1)}, .., e_{p_1}^{(1)}, e_1^{(2)}, .., e_{p_2}^{(2)}, ..e_{p_n}^{(n)})$ est une base de E.

2 Applications linéaires entre ev de dimension finie

2.1 Rang d'une application linéaire

Prenons E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $d \geqslant 1$ et appelons $(e_1, .., e_d)$ une de ses bases. Pour tout x dans E il vient

$$\exists (x_1, .., x_d) \in \mathbb{K}^d, \quad x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i.$$

Si F est un $\mathbb{K}$-ev et que $u \in L(E, F)$ alors comme une application linéaire respecte les CL nous pouvons avoir une écriture de u pour tout x :

$$\forall x \in E,\ u(x) = u\left(\sum_{i=1}^{d} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{d} x_i u(e_i).$$

Ce calcul nous indique donc que nous connaissons la valeur de u partout dès que nous connaissons les valeurs $(u(e_1), .., u(e_d))$. C'est très puissant : u est parfaitement déterminée par ses valeurs sur une base.

Proposition 2.1

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $d \geqslant 1$ et F un $\mathbb{K}$-ev. Si $(e_1, .., e_d)$ est une base de E et que $(\epsilon_1, .., \epsilon_d)$ est une famille de F alors il existe une unique application linéaire $f \in L(E, F)$ telle que

$$\forall i \in [\![1, d]\!], \quad f(e_i) = \epsilon_i.$$

Il devient donc très intéressant de nous intéresser simplement à la famille $(u(e_1), .., u(e_d)) = u(\{e_1, .., e_d\})$.

Définition 2.2. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F un $\mathbb{K}$-ev. Pour tout $f \in L(E,F)$, le sous-ev $\mathrm{Im}\,(f) \subset F$ est de dimension finie. Nous écrivons

$$\mathrm{rg} f = \dim(\mathrm{Im}\,(f)).$$

cette dimension que nous appelons **rang de l'application f.**

Proposition 2.3

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $d \geqslant 1$ et F un $\mathbb{K}$-ev. Pour tout $f \in L(E,F)$ et pour toute base $(e_1, .., e_d)$ de E,

$$\mathrm{rg}(f) = \dim\mathrm{Vect}\left(\{f(e_1), .., f(e_d)\}\right).$$

Corollaire 2.4

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Pour tout $f \in L(E,F)$, f est surjective si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$.

Théorème 2.5 (*Théorème du rang*)

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F un $\mathbb{K}$-ev et $f \in L(E,F)$.

1. Si E_0 est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,(f)$ dans E alors E_0 est isomorphe à $\mathrm{Im}\,(f)$.
2. **Formule du rang**

$$\dim(E) = \dim\mathrm{Ker}\,(f) + \mathrm{rg}(f).$$

Remarque 2.6 (*Attention !*)

Le théorème du rang NE dit PAS que $E = \mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f)$!

Application : [Rang et composition] Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et soient $f \in L(E,F)$ et $g \in L(F,G)$.

$$\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min\left\{\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f)\right\}.$$

Si f est **surjective** alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$
Si g est **injective** alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

Le théorème est très puissant car si E et F sont de dimension finie alors l'injectivité implique la surjectivité et implique la bijectivité pour les applications linéaires !

Proposition 2.7

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de même dimension finie d. Alors pour tout u de $L(E,F)$, les assertions suivantes sont équivalentes

(i) u est bijective
(ii) u est injective
(iii) $\mathrm{Ker}\,(u) = \{0_E\}$
(iv) u est surjective
(v) $\mathrm{rg}(u) = d$.

2.2 Formes linéaires et hyperplans

Nous rappelons qu'une **forme linéaire** sur un $\mathbb{K}$-ev E est une application de $L(E,\mathbb{K})$ et que cet espace s'appelle **l'espace dual de** E, que l'on note E^*. Cet espace est très intéressant car, comme nous allons le voir, il est très ressemblant à E.

Théorème 2.8

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie alors son dual est de dimension finie et $\dim(E^*) = \dim(E)$.
Plus précisément, si $\mathcal{B} = (e_1, .., e_d)$ est une base de E alors pour tout i de $[\![1,d]\!]$ nous définissons la forme linéaire $e_i^* : E \longrightarrow \mathbb{K}$ par

$$\forall j \in [\![1,d]\!], \quad e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

Alors $(e_1^*, .., e_n^*)$ est une base de E^* appelée base duale de $\mathcal{B}$.

Remarque 2.9

Le symbole δ_{ij} est le **symbole de Kronecker** qui est une façon rapide d'écrire :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Ainsi, $e_i^*(e_i) = 1$ alors que $e_i^*(e_j) = 0$ si $j \neq i$.

Cette correspondance entre les bases est réciproque.

Proposition 2.10

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie alors pour toute base $\mathcal{B}^*$ de E^* il existe une unique base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{B}^*$ soit la base duale de $\mathcal{B}$.

Comme l'espace d'arrivée des formes linéaires est de dimension 1 cela implique des propriétés fortes.

Théorème 2.11

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $d \geqslant 1$ et $\varphi \in E^*$.

1. Soit φ est l'application nulle soit φ est surjective.
2. Soit φ est l'application nulle soit $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$ est un hyperplan.

Les hyperplans peuvent donc être construits grâce à des formes linéaires non nulles. En réalité nous allons voir que tous les hyperplans sont des noyaux de formes linéaires.

Théorème 2.12

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et H un hyperplan de E.

1. Tout supplémentaire de H est une droite vectorielle et plus précisément

$$\forall a \in E \backslash H, \quad E = H \oplus \mathbb{K}a.$$

2. Il existe $\varphi_H \in E^*$ telle que $H = \mathrm{Ker}\,(\varphi_H)$.
3. S'il existe $\varphi \in E^*$ telle que $H = \mathrm{Ker}\,(\varphi)$ alors il existe un scalaire α tel que $\varphi = \alpha\varphi_H$.

Corollaire 2.13 (*Équation cartésienne d'un hyperplan*)

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, .., e_d)$ une base de E et H un hyperplan de E. Il existe des scalaires $\lambda_1, ..\lambda_d$ tels que

$$H = \left\{ x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i \in E \mid \quad \sum_{i=1}^{d} \lambda_i x_i = 0_{\mathbb{K}} \right\}.$$