Algèbre 3
Chapitre 5
Les applications linéaires entre espaces vectoriels de dimension finie : Construction de la théorie des Matrices

Licence 2 MAE 2020-2021

Université de Paris - Paris Descartes

Marc Briant

(Fortement inspiré des cours de MM. G. Roussel et R. Lounès)

Table des matières

Avant-propos : Dans les ev de dimension finie nous avons réussi à obtenir de belles clarifications sur les vecteurs : leur étude revient à celle de leurs composantes dans une base. L'autre attrait des ev sont les applications linéaires que nous aimerions bien désormais comprendre de manière plus simple. Cela conduit à la théorie des matrices.

Dans tout ce cours, $(\mathbb{K},+,.)$ désigne un corps commutatif.

1 Représentation matricielle des applications linéaires

1.1 Détermination des applications linéaires sur des bases

Nous avons vu que si F est un $\mathbb{K}$-ev quelconque et que E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $d \geqslant 1$, si nous connaissons une base $\mathcal{B}_E = (e_1,..,e_d)$ de E alors pour tout u de $L(E,F)$ nous avons

$$\forall x \in E,\ u(x) = u\left(\sum_{i=1}^{d} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{d} x_i u(e_i).$$

Cela nous a mené aux théories du rang de u.
Supposons alors que F soit aussi de dimension finie $n \geqslant 1$ avec une base $\mathcal{B}_F = (f_1,..,f_n)$. Comme $u(e_i) \in F$, il s'écrit sur la base :

$$u(e_1) = \sum_{j=1}^{n} a_{j1} f_j, u(e_2) = \sum_{j=1}^{n} a_{j2} f_j, .., u(e_d) = \sum_{j=1}^{n} a_{jn} f_j$$

ce qui s'écrit

$$\forall i \in [\![1,d]\!],\ u(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} f_j.$$

Ainsi, pour connaître complètement f sur E il faut et il suffit de connaître les coefficients de $(u(e_1),..,u(e_d))$ sur la base $(f_1,..,f_p)$ c'est-à-dire les $(a_{ji})_{\substack{1\leqslant i\leqslant d\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.

Définition 1.1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie d et n. **Si les bases $\mathcal{B}_E = (e_1,..,e_d)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1,..,f_n)$ sont fixées**, une applications $u \in L(E,F)$ est parfaitement déterminée par le tableau de nombre suivant que l'on nomme **Matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$**

$$M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) & \dots & u(e_d) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1d} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nd} \end{pmatrix}} \end{array} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to f_1 \\ \to f_2 \\ \vdots \\ \to f_n \end{array}$$

Exemple : Prenons $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}^3$ et considérons $u \in L(E,F)$ définie par $u(x,y) = (2x, 3y, x+y)$. En notant $\mathcal{B}_E$ la base canonique de E et $\mathcal{B}_F$ celle de F nous trouvons

$$M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.2. L'ensemble des matrices à n lignes et d colonnes dont les coefficients sont dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{K})$.
Dans le cas où $d = 1$ on dit que ce sont des **matrices colonnes** et dans le cas où $n = 1$ on dit que ce sont des **matrices lignes**.

Exemple : L'application nulle. Soient E et F deux ev de dimensions finie $d \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$ et $u \in L(E,F)$. Prenons $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ deux bases quelconques de E et F. Alors u est l'application nulle si et seulement si

$$M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}^{d \text{ colonnes}} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n \text{ lignes}\quad.$$

Cette matrice est appelée **matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{K})$** et se note $0_{\mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{K})}$.

Remarque 1.3 (*Le cas des endomorphismes*)

Si $F = E$ alors $u \in L(E)$ est un endomorphisme et quand on fixe une base $\mathcal{B}$ de E alors on note simplement

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u) = M_{\mathcal{B}}(u)$$

et c'est une matrice à n lignes et n colonnes.

Exemple : [La matrice identité] Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$. Alors quelque soit la base $\mathcal{B}$ de E nous avons la matrice de l'application identité

$$M_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est appelée **matrice identité d'ordre** n et se note I_n.

Définition 1.4. L'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes dont les coefficients sont dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et nous l'appelons **ensemble des matrices carrés d'ordre** n.

Proposition 1.5

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie respectives d et n alors $L(E,F)$ est de dimension finie dn et l'application

$$\begin{array}{rccl} M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F} : & L(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{K}) \\ & u & \longmapsto & M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) \end{array}$$

est une bijection.
Quand une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{K})$ satisfait $A = M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ nous dirons que u **est représentée par** A **dans les bases** $\mathcal{B}_E$ **et** $\mathcal{B}_F$ ou que A **représente** u **dans les bases** $\mathcal{B}_E$ **et** $\mathcal{B}_F$.

Exemple : [Influence des bases sur les représentations matricielles] Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^2$ et considérons $u \in L(\mathbb{R}^2)$ définie par $u(0,1) = \left(\frac{44-\pi}{3}, \frac{22-2\pi}{3}\right) =$ et $u(0,1) = \left(\frac{2\pi-22}{3}, \frac{4\pi-11}{3}\right)$. Dans la base canonique $\mathcal{B}$ nous avons

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \frac{44-\pi}{3} & \frac{2\pi-22}{3} \\ \frac{22-2\pi}{3} & \frac{4\pi-11}{3} \end{pmatrix}$$

alors que dans la base $\mathcal{B}' = ((1,2),(2,1))$ nous avons

$$M_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

1.2 Addition et composition : lois sur les matrices

Il nous reste à regarder comment évoluent ces tableaux de $\mathbb{K}$ lorsque l'on somme ou compose des applications. Cela permettra, comme c'est le but en algèbre, de travailler sur les "briques élémentaires" que sont ces tableaux de nombres au lieu des applications linéaires complètes.

Théorème 1.6 (*Additions sur les matrices*)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie d et n et fixons une base respective pour chacun : $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Si u et v sont dans $L(E,F)$ et (α,β) in $\mathbb{K}^2$ alors

$$M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\alpha u + \beta v) = \alpha \tilde{\cdot} M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) \,\tilde{+}\, \beta \tilde{\cdot} M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(v)$$

où les lois $\tilde{+} : \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{K})$ et $\tilde{\cdot} : \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{K})$ sont données par

$$\begin{aligned} (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant d}} \,\tilde{+}\, (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant d}} &= (c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant d}} \\ \alpha \tilde{\cdot} (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant d}} &= (d_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant d}} \end{aligned}$$

avec

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n,\ \forall\, 1 \leqslant j \leqslant d, \quad \begin{aligned} c_{ij} &= a_{ij} + b_{ij} \\ d_{ij} &= \alpha a_{ij}. \end{aligned}$$

Remarque 1.7 (*Attention !*)

Comme le montre la définition de l'addition $\tilde{+}$, et la multiplication par un scalaire $\tilde{\cdot}$, tout s'effectue terme à terme et donc seules des matrices de même taille (même nombre de lignes ET même nombre de colonnes) peuvent être additionnées.

Théorème 1.8 (*Multiplications sur les matrices*)

Soient E et F et G trois $\mathbb{K}$-ev de dimension finie d, $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$ et fixons une base respective pour chacun : $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$. Si $u \in L(E,F)$ et $v \in L(F,G)$ alors

$$M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(v \circ u) = M_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(v) \,\tilde{\times}\, M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(v)$$

où la loi $\tilde{\times} : \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,d}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{p,d}(\mathbb{K})$ est donnée par

$$(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}} \,\tilde{\times}\, (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant d}} = (c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant d}}$$

avec

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant p,\ \forall\, 1 \leqslant j \leqslant d, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Remarque 1.9 (*Attention !*)

Comme le montre la définition, on ne peut multiplier $\tilde{\times}$ des matrices qui si la matrice de gauche a un nombre de colonnes égales au nombre de lignes de la matrice de droite.

Maintenant que nous avons des lois $(\tilde{\cdot}, \tilde{+}, \tilde{\times})$ sur l'ensemble des matrices, nous omettrons les "tildes" ainsi que les lois multiplicatives dans les écritures lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité :

$$\begin{aligned} &\alpha \tilde{\cdot} A \,\tilde{+}\, \beta \tilde{\cdot} B = \alpha A + \beta B \\ &A \,\tilde{\times}\, B = AB. \end{aligned}$$

Exemple : [Le neutre de la multiplication matricielle] Un calcul direct nous donne que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad MI_n = I_n M = M$$

nous comprenons que comme l'identité est le neutre pour la composition, la matrice identité est le neutre pour la mutliplication matricielle.

1.3 Isomorphisme et inversion de matrices

La multiplication matricielle vient des propriétés de la composition des applications linéaires. Lorsque E et F ont les mêmes dimensions, certaines sont des isomorphismes. L'ensemble des matrices carrées va donc hériter d'une propriété d'inversibilité.

Proposition 1.10

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de même dimension finie $d \geqslant 1$ et fixons des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Si $u \in L(E,F)$ est un isomorphisme alors

$$M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) M_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u^{-1}) = M_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u^{-1}) M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) = I_n.$$

Définition 1.11. Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible si et seulement si il existe B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_d.$$

Nous dirons que B est **la matrice inverse de** A et nous la noterons A^{-1}. L'ensemble des **matrices carrées inversible d'ordre** n est noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Théorème 1.12

1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de même dimension finie $d \geqslant 1$. $u \in L(E,F)$ est inversible ssi une de ses représentations matricielles est inversible.
2. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi il existe E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension n tels que A représente une application $u \in L(E,F)$ inversible.

Remarque 1.13

Le caractère inversible d'une application linéaire ne dépendant pas du tout du choix des bases, il est normal que le théorème ci-dessus ne dépende pas du choix de base pour E ou F.
Notons également que le point 2. peut-être modifié en $u \in GL(E)$ puisque une matrice peut représenter des applications de E dans F mais aussi des endomorphismes de E indifféremment.

2 Changer de représentation matricielle : changements de base

Un des exercices précédents a mis en avant que

1. la représentation matricielle d'une application linéaire dépend fortement des bases mises en jeu ;
2. certaines bases semblent plus adaptées pour certaines applications linéaires puisqu'elles lui donnent une représentation matricielle très simple.

Regardons alors comment se traduit un changement de base au niveau des matrices afin d'obtenir facilement des matrices moins complexes (beaucoup de coefficients égaux à zéros par exemple).

2.1 Matrice de famille de vecteurs dans une base

Comme nous l'avons vu, la colonne j de la matrice $M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ sont les composantes de $u(e_j)$ sur la base $\mathcal{B}_F$. Il semble donc approprié d'écrire un vecteur sous la forme d'une matrice colonne.

Définition 2.1. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $d \geqslant 1$ et $\mathcal{B} = (e_1, .., e_d)$ une base de E. Prenons x dans E dont les composantes dans $\mathcal{B}$ sont $x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$. Nous appelons **matrice colonne des composantes de x dans $\mathcal{B}$** la matrice de $\mathcal{M}_{d1}(\mathbb{K})$

$$M_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.2

Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $d \geqslant 1$ et que $\mathcal{B}$ est une base de E alors l'application

$$\begin{array}{rccc} M_{\mathcal{B}} : & E & \longrightarrow & \mathcal{M}_{d1}(\mathbb{K}) \\ & x & \longmapsto & M_{\mathcal{B}}(x) \end{array}$$

est une bijection.
Quand une matrice $X \in \mathcal{M}_{d1}(\mathbb{K})$ satisfait $X = M_{\mathcal{B}}(x)$ nous dirons que x **est représenté par X dans la base $\mathcal{B}$** ou que X **représente x dans la base $\mathcal{B}$**.

Toutes ces représentations matricielles renvoie l'étude des applications linéaires et de leur action sur des vecteurs à de simples multiplications matricielles !

Théorème 2.3

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie d et n et fixons une base respective pour chacun : $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Alors $\forall u \in L(E,F)$, $\forall x \in E$

$$M_{\mathcal{B}_F}(u(x)) = M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) \,\widetilde{\times}\, M_{\mathcal{B}_E}(x).$$

Souvent l'on note $Y = M_{\mathcal{B}_F}(u(x))$, $A = M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ et $X = M_{\mathcal{B}_E}(x)$ et la formule ci-dessus devient

$$Y = AX.$$

De manière générale, si $\chi = (x^{(1)}, .., x^{(p)})$ est une famille de p vecteurs de E. Si les composantes de $x^{(j)} = \sum_{i=1}^{d} x_i^{(j)} e_i$, nous appelons **matrices de la famille χ relativement à la base $\mathcal{B}$** la matrice de $\mathcal{M}_{dp}(\mathbb{K})$

$$M_{\mathcal{B}}(\chi) = \overbrace{\begin{pmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \cdots\cdots & x_1^{(p)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \cdots\cdots & x_2^{(p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_d^{(1)} & x_d^{(2)} & \cdots\cdots & x_d^{(p)} \end{pmatrix}}^{\substack{M_{\mathcal{B}}(x^{(1)}) \quad M_{\mathcal{B}}(x^{(2)}) \quad \dots \quad M_{\mathcal{B}}(x^{(p)}) \\ \downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow}}.$$

2.2 Matrices de passage

Définition 2.4. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $d \geqslant 1$ et fixons $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Nous appelons **matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$** la matrice

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}').$$

Remarque 2.5 (*Attention aux conventions !*)

Prenons le temps de remarquer que, contrairement à l'appellation "de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$", la matrice $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ contient les coordonnées de la famille $\mathcal{B}'$ exprimée dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 2.6

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $d \geqslant 1$ et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ trois bases de E.

1. $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$.
2. $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$.
3. $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ appartient à $GL_d(\mathbb{K})$ avec $\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

Remarque 2.7 (*Evitons les erreurs visuellement*)

Etant donné la confusion possible entre les notations et l'appellation des matrices de passage, nous nous rappellerons que peu importe la notation, ce qui compte est de comprendre "ce qui rentre dans une matrice" et "ce qui en sort" et cela doit être cohérent.

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''} = \quad {\scriptstyle \text{sort } \mathcal{B}} \leftarrow \left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}}^{\downarrow \text{arrive } \mathcal{B}'} \times \quad {\scriptstyle \text{sort } \mathcal{B}'} \leftarrow \left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}}^{\downarrow \text{arrive } \mathcal{B}''} \right.\right. .$$

Ainsi visuellement nous comprenons qu'il faudra appliquer à $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}$ des vecteurs colonnes écrit dans la base $\mathcal{B}''$ et il en sortira une écriture sur la base $\mathcal{B}$.

Corollaire 2.8

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $d \geqslant 1$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Une famille $\mathcal{A} = (a_1, .., a_d)$ de E est une base de E ssi $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ est inversible.

2.3 Changements de base

Si nous avons bien compris ce que font les matrices de passage alors il vient les formules suivantes.

Proposition 2.9 (*Changement de base et vecteurs*)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

$$\forall x \in E, \quad M_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}}(x).$$

En d'autres termes si $\mathcal{B} = (e_1, .., e_d)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, .., e'_d)$ et si $x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$ et $x = \sum_{i=1}^{d} x'_i e'_i$ alors

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_d \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \quad \text{que l'on écrit} \quad X' = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} X.$$

Remarque 2.10 (*Attention une fois de plus !*)

Prenons le temps de remarquer que pour obtenir les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ à partir de celles dans la base $\mathcal{B}$ il faut multiplier par la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$! Mais si l'on garde en mémoire comment les matrices sont contruites alors le vocabulaire importe peu.

Proposition 2.11 (*Changement de base et* $L(E, F)$)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$ deux bases de E et $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}'_F$ deux bases de F. Alors pour tout u de $L(E, F)$:

$$M_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}(u) = P_{\mathcal{B}'_F}^{\mathcal{B}_F} M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) P_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}'_E}.$$

Encore une fois, pour éviter les erreurs dans cette formule, le vocabulaire importe peu, ce qui est important est de comprendre ce qui "rentre dans la matrice" et ce qui "en sort" (faire le dessin !) :

$$\left(\text{sort } \mathcal{B}'_F \leftarrow \{ \quad \overbrace{P_{\mathcal{B}'_F}^{\mathcal{B}_F}}^{\downarrow \text{entre } \mathcal{B}_F} \right) \left(\text{sort } u \text{ dans } \mathcal{B}_F \leftarrow \{ \overbrace{M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)}^{\downarrow \text{entre } u(\mathcal{B}_E)} \right) \left(\text{sort } \mathcal{B}_E \leftarrow \{ \quad \overbrace{P_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}'_E}}^{\downarrow \text{entre } \mathcal{B}'_E} \quad \right).$$

Cette relation entre $M_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F}(u)$ et $M_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$ sera traduite de manière abstraite en terme de matrices.

Définition 2.12. Deux matrices A et B de $M_{n,d}(\mathbb{K})$ sont dites **équivalentes** si et seulement si

$$\exists Q \in GL_n(\mathbb{K}), \ \exists P \in GL_d(\mathbb{K}), \quad B = Q^{-1} A P.$$

Théorème 2.13

Deux matrices A et B de $M_{n,d}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si il existe E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension respective d et n tels que A et B représentent la même application linéaire dans des bases différentes.

Si $E = F$ alors nous obtenons la formule

$$M_{\mathcal{B}'_E}(u) = P_{\mathcal{B}'_E}^{\mathcal{B}_E} M_{\mathcal{B}_E}(u) P_{\mathcal{B}_E}^{\mathcal{B}'_E} = P^{-1} M_{\mathcal{B}_E}(u) P.$$

Définition 2.14. Deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{K})$ sont dites **semblables** si et seulement si

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), \quad B = P^{-1} A P.$$

Théorème 2.15

Deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si il existe E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n tel que A et B représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

Remarque 2.16

Mettons en avant la subtilité entre être équivalentes et être semblables. Quand on parle de matrice d'endomorphisme, la base de départ et d'arrivée est la même et donc deux matrices semblables représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes (on écrit (e_i) sur $(e_1, .., e_n)$ et on écrit $u(e'_i)$ sur $(e'_1, .., e'_n)$. Quand on parle de matrice d'application linéaire on spécifie la base d'arrivée et celle de départ (on écrit $u(e_i)$ sur $(f_1, ..; f_n)$) et donc des matrices sont équivalentes quand elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes, de départ et/ou d'arrivée (on écrit $u(e'_i)$ sur $(f'_1, ..; f'_n)$).

Remarque 2.17 (*Relations d'équivalence (HP)*)

Notons que les relations "être équivalente à" et "être semblable à" sont des relations d'équivalence. Si on note cette relation $A \sim B$ alors elle est

- **Réflexive :** $\forall A, \ A \sim A$;
- **Symétrique :** $\forall (A, B), \ (A \sim B) \Rightarrow (B \sim A)$;
- **Transitive :** $\forall (A, B, C)$, si $A \sim B$ et $B \sim C$ alors $A \sim C$.