Algèbre 3
TD 8
Réduction des endomorphismes

Licence 2 MAE 2020-2021

Université Paris Descartes

Marc Briant

Dans tout ce TD, $(\mathbb{K}, +, .)$ désigne un corps commutatif.

Solution. Il n'y a pas réellement de difficultés dans les exercices sur la réduction de matrices ou d'endomorphismes. Cela se réduit à : écrire l'endomorphisme dans une base pour avoir sa matrice, calculer son polynôme caractéristique, en trouver les racines qui sont donc les valeurs propres, trouver une base de chacun des sous-espaces propres associés et enfin écrire la matrice dans cette nouvelle base.

Des réductions pures et simples

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, répondre aux questions :

a) Déterminer χ_A, le polynôme caractéristique de la matrice A.

b) La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{C}$? Si oui, donner une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel, formée de vecteurs propres de A et la matrice relativement à celle-ci.

$$1)\quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2)\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$3)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \qquad 4)\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution. **1)** Polynôme caractéristique et valeurs propres Cela est un simple calcul

$$\chi_A = \det(A - XI_2) = \begin{vmatrix} 3-X & -2 \\ 2 & 1-X \end{vmatrix} = (3-X)(1-X) + 4 = X^2 - 4X + 7.$$

Le déterminant de ce polynôme est $\Delta = 16 - 28 = -12$, il n'admet pas de racine réelles mais deux racines complexes distinctes qui sont les deux valeurs propres de A :

$$z_1 = 2 + i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_2 = 2 - i\sqrt{3}.$$

Diagonalisation sur $\mathbb{R}$. Le polynôme χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Diagonalisation sur $\mathbb{C}$. Le polynôme χ_A est pas scindé et à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc A est diagonalisable. Trouvons alors une base de vecteurs propres, il faut trouver une base des sous-espaces propres associés.

• Trouvons $\mathrm{Ker}\left(A - (2+i\sqrt{3})I_2\right)$. Rappelons-nous que nous voyons A comme une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} X \in \mathrm{Ker}\left(A - (2+i\sqrt{3})I_2\right) &\Leftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{C}^2, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } AX = (2+i\sqrt{3})X \\ &\Leftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{C}^2, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases} 3x - 2y = (2+i\sqrt{3})x \\ 2x + y = (2+i\sqrt{3})y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{C}^2, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases} y = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x \\ x\left[2 + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - (2+i\sqrt{3})\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $2 + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - (2+i\sqrt{3})\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$ et que $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ nous trouvons donc

$$X \in \mathrm{Ker}\left(A - (2+i\sqrt{3})I_2\right) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{C}, X = \begin{pmatrix} x \\ e^{-i\frac{\pi}{3}}x \end{pmatrix} \Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i\frac{\pi}{3}} \end{pmatrix}\right).$$

Nous avons donc trouvé un vecteur propre de A associé à la valeur propre $2+i\sqrt{2}$, à savoir

$$e_1 = (1, e^{-i\frac{\pi}{3}}).$$

• Trouvons $\text{Ker}\left(A-(2-i\sqrt{3})I_2\right)$. Rappelons-nous que nous voyons A comme une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Nous pouvons poser à nouveau le système mais nous pouvons également ruser car A n'a que des coefficients réels et donc en passant au conjugué nous voyons que si

$$AX = (2-i\sqrt{3})X \quad \text{alors} \quad \overline{AX} = \overline{A}\overline{X} = A\overline{X} = \overline{(2-i\sqrt{3})X} = \overline{(2-i\sqrt{3})}\,\overline{X} = (2+i\sqrt{3})\overline{X}.$$

Ainsi c'est comme pour les polynômes réels à racines complexes, si je connais un vecteur propre e_z dans C^2 associé à la valeur propre z de A alors si A n'a que des coeffients réelles nous connaissons un vecteur propres de A associé à la valeur propre $\overline{z}$, le vecteur $\overline{e_z}$. Ainsi

$$\text{Ker}\left(A-(2-i\sqrt{3})I_2\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\ e^{i\frac{\pi}{3}}\end{pmatrix}\right).$$

Nous avons donc trouvé un vecteur propre de A associé à la valeur propre $2-i\sqrt{2}$, à savoir

$$e_2 = (1, e^{i\frac{\pi}{3}}).$$

• Matrice diagonale semblable à A. Nous appelons u l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$. Nous définissons la nouvelle base de vecteurs propres de u $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Par définition nous avons

$$ue_1 = (2+i\sqrt{3})e_1 \quad \text{et} \quad ue_2 = (2+i\sqrt{3})e_2.$$

Ainsi nous trouvons une matrice semblable à A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et diagonale

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix}(2+i\sqrt{3}) & 0\\ 0 & (2-i\sqrt{3})\end{pmatrix}.$$

2) <u>Polynôme caractéristique et valeurs propres</u> Cela est un simple calcul

$$\chi_A = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix}-X & 7 & -6\\ -1 & 4-X & 0\\ 0 & 2 & -2-X\end{vmatrix} = -X\begin{vmatrix}4-X & 0\\ 2 & -2-X\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}7 & -6\\ 2 & -2-X\end{vmatrix}$$
$$= X(4-X)(2+X) + 7(-2-X) + 12 = -X^3 + 2X^2 + X - 2 = (X-1)(-X^2+X+2) = (X-1)(X-2)(-X-1).$$

Ce polynôme admet trois racines réelles distinctes qui sont les trois valeurs propres de A :

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = -1.$$

<u>Diagonalisation sur $\mathbb{R}$.</u> Le polynôme χ_A est scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Trouvons alors une base de vecteurs propres, il faut trouver une base des sous-espaces propres associés.

• Trouvons $\text{Ker}\,(A - I_3)$.

$$X \in \text{Ker}\,(A-I_3) \Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } AX = X\right) \Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } \left\{\begin{array}{l}7y-6z = x\\ -x+4y = y\\ 2y-2z = z\end{array}\right.\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } \left\{\begin{array}{l}x = 7y-6z\\ 6z-2y = 0\\ z = \frac{2}{3}y\end{array}\right.\right) \Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } \left\{\begin{array}{l}x = 3y\\ 0 = 0\\ z = \frac{2}{3}y\end{array}\right.\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\exists y\in\mathbb{R}, X = y\begin{pmatrix}3\\1\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(X \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\1\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}\right)\right).$$

Nous avons donc trouvé un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1, à savoir

$$e_1 = \left(3, 1, \frac{2}{3}\right).$$

• Trouvons $\text{Ker}\,(A + I_3)$.

$$X \in \text{Ker}\,(A+I_3) \Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } AX = -X\right) \Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } \left\{\begin{array}{l}7y-6z = -x\\ -x+4y = -y\\ 2y-2z = -z\end{array}\right.\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } \left\{\begin{array}{l}x = 6z-7y\\ 12y-6z = 0\\ z = 2y\end{array}\right.\right) \Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } \left\{\begin{array}{l}x = 5y\\ 0 = 0\\ z = 2y\end{array}\right.\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\exists y\in\mathbb{R}, X = y\begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(X \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix}\right)\right).$$

Nous avons donc trouvé un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1, à savoir

$$e_2 = (5,1,2)\,.$$

• Trouvons $\mathrm{Ker}\,(A-2I_3)$.

$$X \in \mathrm{Ker}\,(A-2I_3) \Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } AX=2X\right) \Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } \left\{\begin{array}{l} 7y-6z=2x\\ -x+4y=2y\\ 2y-2z=2z\end{array}\right.\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } \left\{\begin{array}{l} x=\frac{7}{2}y-3z\\ -\frac{3}{2}y+3z=0\\ y=2z\end{array}\right.\right) \Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } \left\{\begin{array}{l} x=4z\\ 0=0\\ y=2z\end{array}\right.\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\exists z\in\mathbb{R}, X=z\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(X\in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}\right)\right).$$

Nous avons donc trouvé un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1, à savoir

$$e_3 = (4,2,1)\,.$$

• Matrice diagonale semblable à A. Nous appelons u l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Nous définissons la nouvelle base de vecteurs propres de u $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$. Par définition nous avons

$$u(e_1)=e_1 \quad \text{et} \quad u(e_2)=-e_2 \quad \text{et} \quad u(e_3)=2e_3.$$

Ainsi nous trouvons une matrice semblable à A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et diagonale

$$M_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Diagonalisation sur $\mathbb{C}$. A étant diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ elle l'est bien évidemment dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dans la même base de vecteurs propres.

3) Polynôme caractéristique et valeurs propres Cela est un simple calcul

$$\chi_A=\det(A-XI_3)=\begin{vmatrix}1-X&-3&3\\3&-5-X&3\\6&-6&4-X\end{vmatrix} \underset{C_1\leftarrow C_1+C_2}{=} \begin{vmatrix}-2-X&-3&3\\-2-X&-5-X&3\\0&-6&4-X\end{vmatrix} = -(2+X)\begin{vmatrix}1&-3&3\\1&-5-X&3\\0&-6&4-X\end{vmatrix}$$
$$\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{=} -(2+X)\begin{vmatrix}1&-3&3\\0&-2-X&0\\0&-6&4-x\end{vmatrix} = -(2+X)(-2-X)(4-X)=(2+X)^2(4-X)$$

Ce polynôme admet deux racines réelles distinctes qui sont les deux valeurs propres de A :

$$\lambda_1=-2 \quad \lambda_2=4.$$

Diagonalisation sur $\mathbb{R}$. Le polynôme χ_A est scindé mais ses racines ne sont pas simples. Ainsi nous savons que A est trigonalisable mais pour savoir si elle est diagonalisable il faut trouver la dimension de ses espaces propres associés.2

• Trouvons $\mathrm{Ker}\,(A+2I_3)$.

$$X \in \mathrm{Ker}\,(A+2I_3) \Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } AX=X\right) \Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } \left\{\begin{array}{l} x-3y+3z=-2x\\ 3x-5y+3z=-2y\\ 6x-6y+4z=-2z\end{array}\right.\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } \left\{\begin{array}{l} x=y-z\\ 0=0\\ 0=0\end{array}\right.\right) \Leftrightarrow \left(\exists (y,z)\in\mathbb{R}^2, X=\begin{pmatrix}y-z\\y\\z\end{pmatrix}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\exists (y,z)\in\mathbb{R}^2, X=y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(X\in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)\right).$$

Nous avons donc trouvé deux vecteurs propres de A qui sont libres et associés à la valeur propre -2, à savoir

$$e_1=(1,1,0) \quad \text{et} \quad e_2=(-1,0,1).$$

Ainsi nous avons la dimension de $\mathrm{Ker}\,(A+2I_3)$ est égale à la multiplicité de 2 dans χ_A. Comme nous sommes dans $\mathbb{R}^3$ qui a une dimension 3 nous trouvons que la dimension de $\mathrm{Ker}\,(A-4I_3)$ sera de 1 et donc A est bien diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Mais nous pouvons le retrouver en étudiant le dernier espace propre.

• Trouvons $\mathrm{Ker}\,(A-4I_3)$.

$$X \in \mathrm{Ker}\,(A-4I_3) \Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } AX=X\right) \Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } \left\{\begin{array}{l} x-3y+3z=4x\\ 3x-5y+3z=4y\\ 6x-6y+4z=4z\end{array}\right.\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } \left\{\begin{array}{l} x=z-y\\ -12y+6z=0\\ x=y\end{array}\right.\right) \Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } \left\{\begin{array}{l} z=2x\\ 0=0\\ x=y\end{array}\right.\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\exists x\in\mathbb{R}, X=\begin{pmatrix}x\\x\\2x\end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(\exists x\in\mathbb{R}, X=x\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(X\in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)\right).$$

Nous avons donc trouvé un vecteur propre de A associé à la valeur propre 4, à savoir

$$e_3=(1,1,2)\,.$$

• Matrice diagonale semblable à A. Nous appelons u l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Nous définissons la nouvelle base de vecteurs propres de u $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$. Par définition nous avons

$$u(e_1)=-2e_1 \quad \text{et} \quad u(e_2)=-2e_2 \quad \text{et} \quad u(e_3)=4e_3.$$

Ainsi nous trouvons une matrice semblable à A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et diagonale

$$M_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

Diagonalisation sur $\mathbb{C}$. A étant diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ elle l'est bien évidemment dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ dans la même base de vecteurs propres.

4) Polynôme caractéristique et valeurs propres Cela est un simple calcul

$$\chi_A=\det(A-XI_4)=\begin{vmatrix}3-X&1&0&0\\-4&-1-X&0&0\\7&1&2-X&1\\-17&-6&-1&-X\end{vmatrix}=(3-X)\begin{vmatrix}-1-X&0&0\\1&2-X&1\\-6&-1&-X\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-4&0&0\\7&2-X&1\\-17&-1&-X\end{vmatrix}$$
$$=(3-X)(-1-X)\left[-X(2-X)+1\right]+4\left[-X(2-X)+1\right]=(X-1)^4$$

Ce polynôme admet une unique racine qui est la valeur propre de A :

$$\lambda=1.$$

Diagonalisation sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Le polynôme χ_A est scindé mais ses racines ne sont pas simples. Ainsi nous savons que A est trigonalisable mais pour savoir si elle est diagonalisable il faut trouver la dimension de ses espaces propres associés. Pour que A soit diagonalisables sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ il faut que la dimension de $\mathrm{Ker}\,(A-I_4)$ soit égale à l'ordre de multiplicité de 1 dans χ_A qui est 4. Or $4=\dim\left(\mathbb{R}^4\right)$ donc si $\dim\left(\mathrm{Ker}\,(A-I_4)\right)=4$ nous aurions $\mathbb{R}^4=\mathrm{Ker}\,(A-I_4)$ et donc

$$\forall X\in\mathbb{R}^4, \quad AX=X$$

ce qui veut dire que A représente l'identité mais alors $A=I_4$ ce qui n'est pas. Ainsi A n'est pas diagonalisable ni sur $\mathbb{R}$ ni sur $\mathbb{C}$.

Exercice 2

Dans les cas suivants calculer $\chi_{M(a)}$ et déterminer les réels a pour lesquels $M(a)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

$$1)\quad M(a)=\begin{pmatrix}1&-1&a\\0&2&-a\\1&1&(2-a)\end{pmatrix} \qquad 2)\quad M(a)=\begin{pmatrix}0&a&a^2\\\frac{1}{a}&0&a\\\frac{1}{a^2}&\frac{1}{a}&0\end{pmatrix}$$

Solution. **1)** Calculons le polynôme caractéristique pour trouver ses racines, et donc les valeurs propres de $M(a)$.

$$\chi_{M(a)}=\det(M(a)-XI_3)=\begin{vmatrix}1-X&-1&a\\0&2-X&-a\\1&1&2-a-X\end{vmatrix}=(1-X)\begin{vmatrix}2-X&-a\\1&2-a-X\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1&a\\2-X&-a\end{vmatrix}$$
$$=(1-X)(X^2+(a-4)X+4-a)+a(X-1)=(1-X)(X^2+(a-4)X+4-2a)$$

Le polynôme $X^2+(a-4)X+4-2a$ a un déterminant

$$\Delta=(a-4)^2-4(4-2a)=a^2\geqslant 0$$

et donc ce polynôme admet une racine si $a=0$ qui est 2 et deux si $a>0$ qui sont $\frac{4-a+|a|}{2}$ et $\frac{4-a-|a|}{2}$. Si $a>0$ les deux racines sont donc 2 et $2-a$ et si $a<0$ les deux racines sont $2-a$ et 2. Nous avons donc trois cas possibles :

$\underline{* \ a\neq 0 \text{ et } a\neq 1}$
Dans ce cas $\chi_{M(a)}=(1-X)(X-2)(X-(2-a))$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ et donc $M(a)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

$\underline{* \ a=1}$ Dans ce cas $\chi_{M(1)}=-(1-X)^2(X-2)$ donc $M(1)$ admet deux valeurs propres 1 et 2. Comme $\chi_{M(1)}$ est scindé sur $\mathbb{R}$, $M(1)$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
Pour savoir si $M(1)$ est diagonalisable nous devons montrer que $\dim(\mathrm{Ker}\,(M(1)-I_3))=2$ et $\dim(\mathrm{Ker}\,(M(1)-2I_3))=1$ qui sont les ordres de multiplicité des racines de $\chi_{M(1)}$. Nous sommes dans $\mathbb{R}^3$ donc comme nous avons $\dim(\mathrm{Ker}\,(M(1)-2I_3))\geqslant 1$ et que $\mathrm{Ker}\,(M(1)-2I_3)$ et $\mathrm{Ker}\,(M(1)-I_3)$ sont en somme directe, si nous trouvons que $\dim(\mathrm{Ker}\,(M(1)-I_3))=2$ alors il viendra bien que $\dim(\mathrm{Ker}\,(M(1)-2I_3))=1$.
Trouvons $\mathrm{Ker}\,(M(1)-I_3)$.

$$\begin{aligned}
X\in\mathrm{Ker}\,(M(1)-I_3) &\Leftrightarrow \left(\exists(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } M(1)X=X\right)\Leftrightarrow\left(\exists(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } \left\{\begin{array}{l}x-y+z=x\\2y-z=y\\x+y+z=z\end{array}\right.\right)\\
&\Leftrightarrow\left(\exists(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } \left\{\begin{array}{l}y=z\\y=z\\x=-y\end{array}\right.\right)\Leftrightarrow\left(\exists y\in\mathbb{R}, X=\begin{pmatrix}-y\\y\\y\end{pmatrix}\right)\\
&\Leftrightarrow\left(\exists y\in\mathbb{R}, X=y\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\Leftrightarrow\left(X\in\mathrm{Vect}\left(\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi $\dim(\mathrm{Ker}\,(M(1)-I_3))=1\neq 2$ donc $M(1)$ n'est pas diagonalisable ni sur $\mathbb{R}$ ni sur $\mathbb{C}$.

$\underline{* \ a=0}$ Dans ce cas $\chi_{M(0)}=(1-X)(X-2)^2$ donc $M(0)$ admet deux valeurs propres 1 et 2. Comme $\chi_{M(0)}$ est scindé sur $\mathbb{R}$, $M(0)$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
Pour savoir si $M(0)$ est diagonalisable nous devons montrer que $\dim(\mathrm{Ker}\,(M(0)-I_3))=1$ et $\dim(\mathrm{Ker}\,(M(0)-2I_3))=2$ qui sont les ordres de multiplicité des racines de $\chi_{M(0)}$. Nous sommes dans $\mathbb{R}^3$ donc comme nous avons $\dim(\mathrm{Ker}\,(M(0)-I_3))\geqslant 1$ et que $\mathrm{Ker}\,(M(0)-2I_3)$ et $\mathrm{Ker}\,(M(0)-I_3)$ sont en somme directe, si nous trouvons que $\dim(\mathrm{Ker}\,(M(0)-2I_3))=2$ alors il viendra bien que $\dim(\mathrm{Ker}\,(M(0)-2I_3))=1$.
Trouvons $\mathrm{Ker}\,(M(0)-2I_3)$.

$$\begin{aligned}
X\in\mathrm{Ker}\,(M(0)-2I_3) &\Leftrightarrow \left(\exists(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } M(0)X=X\right)\Leftrightarrow\left(\exists(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } \left\{\begin{array}{l}x-y=x\\2y=y\\x+y+2z=z\end{array}\right.\right)\\
&\Leftrightarrow\left(\exists(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \text{ et } \left\{\begin{array}{l}y=0\\y=0\\z=-x\end{array}\right.\right)\Leftrightarrow\left(\exists x\in\mathbb{R}, X=\begin{pmatrix}x\\0\\-x\end{pmatrix}\right)\\
&\Leftrightarrow\left(\exists x\in\mathbb{R}, X=x\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)\Leftrightarrow\left(X\in\mathrm{Vect}\left(\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi $\dim(\mathrm{Ker}\,(M(0)-2I_3))=1\neq 2$ donc $M(0)$ n'est pas diagonalisable ni sur $\mathbb{R}$ ni sur $\mathbb{C}$.

Nous concluons donc que

$$M(a) \text{ est diagonalisable si et seulement si } a\in\mathbb{R}\backslash\{0,1\}.$$

2) Ici nous prenons $a\neq 0$ sinon la matrice ne fait aucun sens... Calculons le polynôme caractéristique pour trouver ses racines, et donc les valeurs propres de $M(a)$.

$$\begin{aligned}
\chi_{M(a)}=\det(M(a)-XI_3)&=\begin{vmatrix}-X & a & a^2\\ \frac{1}{a} & -X & a\\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & -X\end{vmatrix}\underset{L_2\leftarrow L_2-aL_3}{=}\begin{vmatrix}-X & a & a^2\\ 0 & -1-X & a+aX\\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & -X\end{vmatrix}\\
&=-X\left[(1+X)X-\frac{1}{a}(a+aX)\right]+\frac{1}{a^2}\left[a^2+a^2X+a^2(1+X)\right]=-X^3+3X+2=(X+1)(-X^2+X+2)\\
&=(X+1)(X-2)(-1-X)=-(X+1)^2(X-2).
\end{aligned}$$

Le polynôme $\chi_{M(a)}$ est scindé sur $\mathbb{R}$ donc $M(a)$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$. Ses racines sont -1 et 2 qui sont donc les valeurs propres de $M(a)$.

Pour savoir si $M(a)$ est diagonalisable nous devons montrer que $\dim(\operatorname{Ker}(M(a)+I_3)) = 2$ et $\dim(\operatorname{Ker}(M(a)-2I_3)) = 1$ qui sont les ordres de multiplicité des racines de $\chi_{M(a)}$. Nous sommes dans $\mathbb{R}^3$ donc comme nous avons $\dim(\operatorname{Ker}(M(a)-2I_3)) \geqslant 1$ et que $\operatorname{Ker}(M(a)-2I_3)$ et $\operatorname{Ker}(M(a)+I_3)$ sont en somme directe, si nous trouvons que $\dim(\operatorname{Ker}(M(a)+I_3)) = 2$ alors il viendra bien que $\dim(\operatorname{Ker}(M(1)-2I_3)) = 1$.
Trouvons $\operatorname{Ker}(M(a)+I_3)$.

$$X \in \operatorname{Ker}(M(a)+I_3) \Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } M(a)X = -X\right) \Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \left\{\begin{array}{l} ay + a^2z = -x \\ \frac{x}{a} + az = -y \\ \frac{x}{a^2} + \frac{y}{a} = -z \end{array}\right.\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \left\{\begin{array}{l} x = -ay - a^2z \\ -y - az + az = -y \\ -\frac{y}{a} - z + \frac{y}{a} = -z \end{array}\right.\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \left\{\begin{array}{l} x = -ay - a^2z \\ 0 = 0 \end{array}\right.\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\exists (y,z) \in \mathbb{R}^2, X = \begin{pmatrix} ay - a^2z \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right).$$

Ainsi nous venons de trouver que

$$\operatorname{Ker}(M(a)+I_3) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Puisque $(a,1,0)$ et $(-a^2,0,1)$ sont libres c'est une base de $\operatorname{Ker}(M(a)+I_3)$. Ainsi nous avons trouvé que

$$\dim(\operatorname{Ker}(M(a)+I_3)) = 2 \quad \text{et donc comme expliqué} \quad \dim(\operatorname{Ker}(M(a)-2I_3)) = 1.$$

Les dimensions des sous-espaces propres sont égales aux ordres de multiplicité de $\chi_{M(a)}$ donc $M(a)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\mathbb{C}$.

Nous concluons donc que

$$M(a) \text{ est diagonalisable si et seulement si } a \in \mathbb{R}^*.$$

Exercice 3 : *Construisons des contre-exemples*

1. Donner un exemple de matrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui soit diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.
2. Donner un exemple de matrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonalisable ni sur $\mathbb{R}$ ni sur $\mathbb{C}$.

Solution. Pour construire des contre-exemples simples nous allons créer des polynômes caractéristiques qui ne satisfont pas les théorèmes du cours nous allons construire des matrices ayant de tels polynômes caractéristiques.

1) Le plus simple pour qu'une matrice soit diagonalisable sur $\mathbb{K}$ c'est qu'elle ait un polynôme caractéristique scindé à racines simples. Ainsi si une matrice a pour polynôme caractéristique scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, elle sera diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Pour qu'elle ne soit pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ il suffit alors que son polynôme caractéristique ne soit pas scindé sur $\mathbb{R}$. Le polynôme X^2+1 est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$ (puisqu'il est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$). Ainsi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{satisfait} \quad \chi_A = X^2+1$$

est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

2) Comme tous les polynômes sont scindés sur $\mathbb{C}$, pour avoir un exemple de matrice non diagonalisable sur $\mathbb{C}$ il faut créer une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc le polynôme caractéristique a des racines multiples dont l'ordre de multiplicité n'est pas égal à la dimension du sous-espace propre associé. Le polynôme de degré 2 avec une racine multiple le plus simple est X^2. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{satisfait} \quad \chi_A = X^2.$$

La seule valeur propre de A est donc 0. Si l'on avait $\dim(\operatorname{Ker}(A)) = 2$ alors cela impliquerait, puisque nous sommes dans $\mathbb{R}^2$, que $\operatorname{Ker}(A) = \mathbb{R}^2$ et donc $A = 0$, ce qui n'est pas le cas. Ainsi $\dim(\operatorname{Ker}(A)) < 2$ et ne vaut donc pas l'ordre de multiplicité de la racine double 0 de χ_A. Donc A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$, et donc a fortiori pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : *Du côté des endomorphismes*

Dans chacun des cas suivants, E est un $\mathbb{R}$-ev avec $\mathcal{B}$ sa base canonique et $f \in L(E)$. Déterminer si f est diagonalisable et si elle l'est déterminer une base $\mathcal{B}'$ de vecteurs propres de f ainsi que $M_{\mathcal{B}'}(f)$.

1. Soient $E = \mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$ et
$$f(e_1) = (a-1)e_2 + (a^2-1)e_3 \quad f(e_2) = (1-a)e_2 \quad f(e_3) = e_1 + e_2 + (2-a^2)e_3.$$
Peut-être devrons-nous discuter suivant les valeurs de a...
2. Soient $n \geqslant 1$, $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$, $a \in \mathbb{R}$ et $f(P) = (X-1)P' - (2n-a)P$. *Peut-être devrons-nous discuter suivant les valeurs de a...*

Solution. Pour montrer qu'un endomorphisme est diagonalisable il suffit d'écrire sa matrice dans un base et de montrer que cette matrice est diagonalisable comme nous l'avons fait en exercice 1. Mais par moments il peut être intéressant de regarder si l'on ne peut pas directement trouver des vecteurs propres et des valeurs propres. Si nous ne les voyons pas de manière évidente en 3-5mn alors nous faisons la méthode matricielle avec les polynômes caractéristiques et les espaces propres!

1) Pour cet exercice nous proposons une approche "plus fine" mais la méthode classique fonctionne. Appelons $\mathcal{B}$ la base (e_1, e_2, e_3). Dans cette base nous avons la matrice de f qui s'écrit
$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-1 & 1-a & 1 \\ a^2-1 & 0 & 2-a^2 \end{pmatrix}.$$
Déjà comme $f(e_2) = (1-a)e_2$ nous savons que $(1-a)$ est une valeur propre de f et que e_2 en est un vecteur propre.
De plus nous pouvons voir que
$$f(e_1+e_2+e_3) = e_1 + (a-1+1-a+1)e_2 + (a^2-1+2-a^2)e_3 = e_1+e_2+e_3$$
ce qui indique que 1 est une valeur propre de f et que $e_1' = e_1+e_2+e_3$ en est un vecteur propre.
Enfin nous voulons voir s'il y a une troisième valeur propre. Nous savons que sur $\mathbb{C}$ la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ est trigonalisable et ses coefficients diagonaux sont les valeurs propres de f. Ainsi la somme des valeurs propres de f vaut sa trace (voir cours sinon). Si λ est la troisième valeur propre de f (elle peut être égale à 1 ou $1-a$) nous voyons que
$$\mathrm{tr}(f) = 3 - a - a^2 = 1 + 1 - a + \lambda \quad \text{donc} \quad \lambda = 1 - a^2.$$
Nous voyons donc 3 cas suivant si les trois valeurs propres sont distinctes ou non.

<u>$*$ $a \neq 0$ et $a \neq 1$</u> Dans ce cas $1-a^2 \neq 1$ et $1-a^2 \neq 1-a$ il vient que f a trois valeurs propres distinctes 1, $1-a$ et $1-a^2$ dans un ev de dimension 3 et donc f est diagonalisable. Il existe donc une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que
$$M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix}.$$

<u>$*$ $a = 0$.</u> Dans ce cas-là $1 = 1-a = 1-a^2$ et donc f a une unique valeur propre 1. Si f était diagonalisable il existerait donc une base $\mathcal{B}'$ de vecteurs propres et donc
$$M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
ce qui impliquerait que $f = \mathrm{Id}_E$. Mais $f(e_1) = -e_2 - e_3 \neq e_1$ donc f n'est pas l'identité et donc f ne peut pas être diagonalisable.

<u>$*$ $a = 1$.</u> Dans ce cas-là nous avons f qui admet les valeurs propres 1 et $1-a = 1-a^2 = 0$. Nous avons
$$f(e_1) = 0 \quad f(e_2) = e_2 \quad f(e_1+e_2+e_3) = e_1+e_2+e_3.$$
Ainsi dans la base $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_1+e_2+e_3)$ nous avons
$$M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) • Comme cette fois-ci f est définie pour tout P et non pas seulement sur une base, vérifions que c'est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$. Comme la multiplication avec un polynôme donné et la dérivation sont linéaires il vient que f est une application linéaire. Regardons alors le degré de $f(P)$ quand $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$. Comme à chaque fois il faut distinguer le cas $P = 0$ et $P \neq 0$ quand on parle de degré.
Si $P = 0$ alors $f(P) = 0$ qui appartient bien à $\mathbb{R}_{2n}[X]$.
Si $P \neq 0$ alors $\deg P' = \deg P - 1$ et donc $\deg{(X-1)P'} = 1 + \deg P - 1 = \deg P$. Ainsi $\deg f(P) \leqslant \deg P \leqslant 2n$ donc $f(P) \in \mathbb{R}_{2n}[X]$.

$$f \text{ est bien dans } L\left(\mathbb{R}_{2n}[X]\right).$$

• Essayons d'écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_{2n}[X]$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2, .., X^{2n})$. Pour cela calculons

$$\forall i \in [\![0, 2n]\!], \quad f(X^i) = (X-1)(iX^{i-1}) - (2n-a)X^i = (i-2n+a)X^i - iX^{i-1}.$$

Avec cette formule nous pouvons voir directement que $M_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure. Mais si nous ne le voyons pas directement nous prenons le temps de bien écrire cette matrice (si le cas général pose problème il FAUT se forcer à faire les cas $n=2$ et $n=3$ pour comprendre ce qu'il se passe !).

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a-2n & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a-2n+1 & -2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a-1 & -2n \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Ainsi nous connaissons le polynôme caractéristique de f très facilement :

$$\chi_f = \det\left(M_{\mathcal{B}}(f) - XI_{2n}\right) = (a-2n-X)(a-2n+1-X)\cdots(a-1-X)(a-X).$$

Ce polynôme est scindé, regardons si ses racines sont toutes distinctes. Ses racines sont les $a-2n+i$ pour i allant de 0 à $2n$. Comme $a-2n+i \neq a-2n+j$ si $i \neq j$ nous voyons que χ_f est scindé à racines simples ce qui implique que f est diagonalisable.

$$f \text{ est diagonalisable et } f \text{ possède } 2n+1 \text{ valeurs propres distinctes qui sont } \lambda_i = a-2n+i \text{ pour } 0 \leqslant i \leqslant 2n.$$

• Comme les sous-espaces propres sont en sommes directs et que nous en avons ici $2n+1 = \dim\left(R_{2n}[X]\right)$ nous savons que chaque $\operatorname{Ker}(f-\lambda_i \mathrm{Id})$ est de dimension 1. Trouvons donc un vecteur non nul associé à la valeur propre λ_i.
Supposons que $P_i \in \operatorname{Ker}(f-\lambda_i\mathrm{Id})$ alors il vient que

$$f(P_i) = (X-1)P_i' - (2n-a)P_i = \lambda_i P_i = (a-2n+i)P_i.$$

Cela revient donc à

$$(X-1)P_i' = iP_i.$$

Ici nous avons donc deux méthodes possibles.

$*$ la bourrine. La bourrine consiste à écrire $P_i = \sum\limits_{k=0}^{2n} a_k X^k$ (ici a_{2n} peut être nul bien sûr puisque nous ne connaissons pas le degré de P_i). Nous calculons alors

$$\begin{aligned}(X-1)P_i' &= (X-1)\left(\sum_{k=0}^{2n} ka_kX^{k-1}\right) = \sum_{k=0}^{2n} ka_kX^k - \sum_{k=0}^{2n} ka_kX^{k-1} = \sum_{k=0}^{2n} ka_kX^k - \sum_{k=0}^{2n-1}(k+1)a_{k+1}X^k \\ &= 2na_{2n}X^{2n} + \sum_{k=0}^{2n-1}(ka_k - (k+1)a_{k+1})X^k.\end{aligned}$$

et l'égalité

$$2na_{2n}X^{2n} + \sum_{k=0}^{2n-1}(ka_k - (k+1)a_{k+1})X^k = i\sum_{k=0}^{2n} a_kX^k.$$

Nous donne des relations à résoudre :

$$2na_{2n} = ia_{2n} \quad \text{et} \quad \forall 0 \leqslant k \leqslant 2n-1,\ ka_k - (k+1)a_{k+1} = ia_k.$$

Nous obtenons des relations de récurrence qui peuvent se résoudre mais c'est un peu long.

$*$ la subtile. Nous nous souvenons que ce qu'on aime chez les polynômes ce sont les racines ! De $(X-1)P_i' = iP_i$ nous tirons que $P_i(1) = 0$ donc 1 est racine de P_i. Peut-on avoir une autre racine complexe ? Si $\lambda \neq 1$ est racine de P_i alors $(\lambda-1)P_i'(\lambda) = 0$ donc λ est une racine de P_i' aussi. Mais alors λ est racine double de P_i et donc racine double de $(X-1)P_i'$ donc racine double de P_i'. C'est donc une racine triple de P_i donc une racine triple de P_i' et donc une racine quadruple de P_i. Cela ne s'arrête jamais et nous trouvons donc que λ est une racine multiple de n'importe quel ordre. C'est absurde donc la seule racine possible de P_i est 1. Ainsi nous avons trouvé que

$$\exists a \in \mathbb{R}, \exists k_i \in \mathbb{N}, \quad P_i = a(X-1)^{k_i}.$$

En remplaçant cela dans l'équation nous trouvons

$$(X-1)ak_i(X-1)^{k_i-1} = i(X-1)^{k_i}$$

et donc que $k_i = i$. Nous concluons que si P_i est dans $\mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i \mathrm{Id})$ alors $P \in \mathrm{Vect}\,\big((X-1)^i\big)$.
La réciproque est directe en calculant $f(a(X-1)^i) = (i-(2n-a))a(X-1)^i$.

- Nous venons de prouver que

$$\forall i \in [\![0, 2n]\!], \quad \mathrm{Ker}\,(f-\lambda_i \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\,\big((X-1)^i\big).$$

Nous prenons donc la base $\mathcal{B}' = (1, X-1, (X-1)^2, .., (X-1)^{2n})$, qui est bien une base puisque chaque polynôme appartient à un sous-espace propre différent et que les sous-espaces propres sont en somme directe. Et nous avons

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{2n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a-2n+1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

De l'utilité de la réduction d'endomorphismes

Exercice 5 : *Matrices semblables*

Dans chacun des cas suivants calculer le rang, la trace, le déterminant et le polynôme caractéristique des matrices A et B. Ensuite déterminer si elles sont semblables.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ où a est un réel.

Solution. 1) $*$ Rang de A et B. Pour le rang nous nous donnons 1-2 mn pour trouver des relations évidentes entre les vecteurs colonnes puis, si ce n'est pas le cas, nous partons dans le pivot ou nous essayons de montrer qu'ils sont libres. Nous avons le choix ! Nous proposons ici le pivot pour A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{3}L_1}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{10}L_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

et pour B :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{10}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_3}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nous avons obtenu des matrices triangulaires donc nous connaissons leur rang

$$\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(B) = 3.$$

$*$ Trace de A et B. Un calcul direct donne $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B) = 8$.

$*$ Polynôme caractéristique et déterminant de A. Nous allons directement calculer le polynôme caractéristique. Il suffira de regarder sa valeur en 0 pour obtenir le déterminant.

$$\chi_A = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 3-X & 1 & -1 \\ 2 & 4-X & -2 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3}{=} \begin{vmatrix} 3-X & 1 & -1 \\ 0 & 2-X & 2X-4 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix}$$
$$= (3-X)\left[(2-X)(1-X) - 2X + 4\right] + \left[2X - 4 + 2 - X\right] = -X^3 + 8X^2 - 20X + 16$$

Ainsi nous trouvons

$$\chi_A = -(X-4)(X-2)^2 \quad \text{et} \quad \det A = \chi_A(0) = 16.$$

$*$ Polynôme caractéristique et déterminant de B. Nous allons directement calculer le polynôme caractéristique. Il suffira de regarder sa valeur en 0 pour obtenir le déterminant.

$$\chi_B = \det(B - XI_3) = \begin{vmatrix} 3-X & 2 & -1 \\ 1 & 4-X & 1 \\ -1 & -2 & 1-X \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} \begin{vmatrix} 3-X & 2 & -1 \\ 1 & 4-X & 1 \\ 0 & 2-X & 2-X \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_3}{=} \begin{vmatrix} 3-X & 3 & -1 \\ 1 & 3-X & 1 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix}$$
$$= (2-X) \begin{vmatrix} 3-X & 3 \\ 1 & 3-X \end{vmatrix} = (2-X)\left[(3-X)^2 - 3\right] = (2-X)(X^2 - 6X + 6)$$

Ainsi nous trouvons

$$\chi_B = (2-X)(X^2-6X+6) \quad \text{et} \quad \det A = \chi_B(0) = 12.$$

$*$ Conclusion Les matrices A et B ont même rang et même trace mais pas le même déterminant donc elle ne sont pas semblables. D'ailleurs elles n'ont pas les mêmes valeurs propres.

2) $*$ Rang de A et B. Pour le rang nous avons des matrices triangulaires donc les rangs sont faciles à calculer. Attention néanmoins au cas où $a=0$!

$$\mathrm{rg}\,(A) = \begin{cases} 4 & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}\,(B) = \begin{cases} 4 & \text{si } a \neq 0 \\ 2 & \text{si } a = 0 \end{cases}.$$

$*$ Trace de A et B. Un calcul direct donne $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B) = 4a$.

$*$ Polynôme caractéristique et déterminant de A et B. Comme nous avons des matrices triangulaires, le calcul du polynôme caractéristique et du déterminant est direct : Ainsi nous trouvons

$$\chi_A = \chi_B = (a-X)^4 \quad \text{et} \quad \det A = \det B = a^4.$$

$*$ ConclusionNous avons deux cas différents.

Si $a=0$ alors A et B ont même trace, même déterminant, même polynôme caractéristique mais elles n'ont pas le même rang donc elles ne sont pas semblables.

Regardons alors le cas $a \neq 0$ où A et B ont même rang, même trace, même déterminant et même polynôme caractéristique. Les matrices A et B ont les mêmes valeurs propres : a. Regardons alors si elles ont les mêmes espaces propres.

$$\begin{aligned}
X \in \mathrm{Ker}\,(A - aI_4) &\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \text{ et } y = 0\right) \Leftrightarrow \left(\exists (x,z,t) \in \mathbb{R}^3,\ X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \\ t \end{pmatrix}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\exists (x,z,t) \in \mathbb{R}^3,\ X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi nous venons de trouver que

$$\mathrm{Ker}\,(A - aI_4) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Nous faisons la même chose pour B :

$$\begin{aligned}
X \in \mathrm{Ker}\,(B - aI_4) &\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases} y = 0 \\ t = 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\exists (x,z) \in \mathbb{R}^2,\ X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\exists (x,z) \in \mathbb{R}^2,\ X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi nous venons de trouver que

$$\mathrm{Ker}\,(B - aI_4) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Les matrices A et B n'ont pas les mêmes espaces propres et ne représentent donc pas le même endomorphisme ce qui fait qu'elles ne sont pas semblables.

Exercice 6 : *Calcul de puissances par diagonalisation*

Calculer A^n pour tout entier naturel n pour les matrices A suivantes.

$$1)\quad A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\qquad 2)\quad A=\begin{pmatrix}0&2\\2&3\end{pmatrix}$$

$$3)\quad A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\quad 4)\quad A=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}$$

Solution. Nous avons déjà vu une manière de calculer des puissances quand nous avons des matrices triangulaires : on les décompose en diagonale plus nilpotente. Dans le cas général nous nous servons des valeurs propres pour réécrire la matrice A dans une base de sous-espaces propres pour obtenir une matrice A' semblable diagonale ou trigonale (toujours possible dans $\mathbb{C}$!) et c'est celle-ci que l'on va élever à la puissance.
En connaissant la matrice de passage P nous écrirons alors

$$A=P^{-1}A'P\quad\text{donc}\quad A^n=P^{-1}\left(A'\right)^nP.$$

IMPORTANT : pour ne pas se tromper de matrice P (je mets $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$ ou l'inverse ? ?) nous nous souvenons que cela se retrouve visuellement :

$$\left(\text{sort } u \text{ dans } \mathcal{B}\leftarrow\{\ \overbrace{M_{\mathcal{B}}(u)}^{\downarrow\text{entre } u(\mathcal{B})}\right)=\left(\text{sort } \mathcal{B}\leftarrow\{\ \overbrace{P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}}^{\downarrow\text{entre } \mathcal{B}'}\right)\left(\text{sort } u \text{ dans } \mathcal{B}'\leftarrow\{\ \overbrace{M_{\mathcal{B}'}(u)}^{\downarrow\text{entre } u(\mathcal{B}')}\right)\left(\text{sort } \mathcal{B}'\leftarrow\{\ \overbrace{P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}}^{\downarrow\text{entre } \mathcal{B}}\right).$$

1) Nous appelons $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Pour des commodités d'écriture nous confondrons e_1 et e_2 avec leur matrice dans la base $\mathcal{B}$.

$*$ Trouver les valeurs propres. Soit nous partons directement dans le polynôme caractéristique et on trouve des bases de espaces propres (ça fonctionne !) soit comme ici nous sommes en dimension 2 nous pouvons regarder en 2mn si on trouve rapidement les valeurs propres et des vecteurs propres. En effet :

$$A(e_1+e_2)=A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}=3(e_1+e_2)\quad\text{et}\quad A(e_1-e_2)=A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=-(e_1-e_2).$$

Nous venons de trouver deux valeurs propres pour A ainsi que les espaces propres puisqu'ils sont chacun de dimension 1 (nous sommes en dimension 2 et ils sont en somme directe d'après le cours !).

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\{-1,3\}\quad\text{et}\quad\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Ker}\,(A+I_2)=\mathrm{Vect}\,(e_1')\text{ avec } e_1'=e_1-e_2\\ \mathrm{Ker}\,(A-3I_2)=\mathrm{Vect}\,(e_2')\text{ avec } e_2'=e_1+e_2\end{array}\right..$$

$*$ Matrice semblable diagonale et calcul de puissance. Nous appelons alors la nouvelle base $\mathcal{B}'=(e_1',e_2')$ avec

$$\left\{\begin{array}{l}e_1'=e_1-e_2\\ e_2'=e_1+e_2\end{array}\right.\quad\text{donc}\quad\left\{\begin{array}{l}e_1=\frac{1}{2}(e_1'+e_2')\\ e_2=\frac{1}{2}(-e_1'+e_2')\end{array}\right.$$

et nous obtenons donc la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$:

$$P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\quad\text{et son inverse}\quad P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}.$$

Si nous appelons u l'endomorphisme associé à A dans $\mathcal{B}$ nous pouvons l'écrire dans $\mathcal{B}'$:

$$M_{\mathcal{B}'}(u)=\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}\quad\text{et la formule}\quad A=P^{-1}\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}P.$$

Nous avons donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad A^n=P^{-1}\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}^nP=P^{-1}\begin{pmatrix}(-1)^n&0\\0&3^n\end{pmatrix}P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(-1)^n+3^n&(-1)^n-3^n\\(-1)^n-3^n&(-1)^n+3^n\end{pmatrix}$$

2) Nous appelons $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Pour des commodités d'écriture nous confondrons e_1 et e_2 avec leur matrice dans la base $\mathcal{B}$.

$*$ Trouver les valeurs propres. Nous ne voyons pas rapidement des vecteurs propres et des valeurs propres donc nous calculons :

$$\chi_A=\det A-XI_2=\begin{vmatrix}-X&2\\2&3-X\end{vmatrix}=X(X-3)-4=X^2-3X-4=(X+1)(X-4).$$

Ce polynôme est scindé à racines simples donc A est bien diagonalisable et nous allons trouver ses espaces propres :

$$X \in \mathrm{Ker}\,(A+I_2) \Leftrightarrow \left(\exists (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ et } A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(\exists (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases} 2y=-x \\ 2x+3y=-y\end{cases}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\exists (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases} x=-2y \\ 0=0\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\exists y\in\mathbb{R},\ X=y\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow X\in \mathrm{Vect}\,(-2e_1+e_2)$$

et le deuxième :

$$X \in \mathrm{Ker}\,(A-4I_2) \Leftrightarrow \left(\exists (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ et } A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(\exists (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases} 2y=4x \\ 2x+3y=4y\end{cases}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\exists (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases} y=2x \\ 0=0\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\exists x\in\mathbb{R},\ X=x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow X\in \mathrm{Vect}\,(e_1+2e_2)\,.$$

Ainsi nous venons d'obtenir que

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\{-1,4\} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathrm{Ker}\,(A+I_2)=\mathrm{Vect}\,(e'_1) \text{ avec } e'_1=-2e_1+e_2 \\ \mathrm{Ker}\,(A-4I_2)=\mathrm{Vect}\,(e'_2) \text{ avec } e'_2=e_1+2e_2 \end{cases}.$$

$*$ Matrice semblable diagonale et calcul de puissance. Nous appelons alors la nouvelle base $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2)$ avec

$$\begin{cases} e'_1=-2e_1+e_2 \\ e'_2=e_1+2e_2 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} e_1=\frac{1}{5}(-2e'_1+e'_2) \\ e_2=\frac{1}{5}(e'_1+2e'_2) \end{cases}$$

et nous obtenons donc la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$:

$$P=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \quad \text{et son inverse} \quad P^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Si nous appelons u l'endomorphisme associé à A dans $\mathcal{B}$ nous pouvons l'écrire dans $\mathcal{B}'$:

$$M_{\mathcal{B}'}(u)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix} \quad \text{et la formule} \quad A=P^{-1}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}P.$$

Nous avons donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad A^n=P^{-1}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}^n P = P^{-1}\begin{pmatrix}(-1)^n & 0\\ 0 & 4^n\end{pmatrix}P=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4(-1)^n+4^n & -2((-1)^n-4^n)\\ -2((-1)^n-4^n) & (-1)^n+4^{n+1}\end{pmatrix}$$

3)Nous appelons $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Pour des commodités d'écriture nous confondrons e_1, e_2 et e_3 avec leur matrice dans la base $\mathcal{B}$.

$*$ Trouver les valeurs propres. Soit nous partons directement dans le polynôme caractéristique et on trouve des bases de espaces propres (ça fonctionne !) soit comme ici nous sommes en dimension 3 nous pouvons regarder en 2mn si on trouve rapidement les valeurs propres et des vecteurs propres. En effet :

$$A(e_1-e_3)=A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0 \quad \text{et} \quad A(e_2)=2e_2 \quad \text{et} \quad A(e_1+e_2+e_3)=A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}=2(e_1+e_2+e_3).$$

Nous venons de trouver deux valeurs propres pour A ainsi que les espaces propres(ils sont en somme directe d'après le cours et nous avons bien 3 vecteurs libres dans $\mathbb{R}^3$!).

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\{0,2\} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathrm{Ker}\,(A)=\mathrm{Vect}\,(e'_1) \text{ avec } e'_1=e_1-e_3 \\ \mathrm{Ker}\,(A-2I_2)=\mathrm{Vect}\,(e'_2,e'_3) \text{ avec } e'_2=e_2 \text{ et } e'_3=e_1+e_2+e_3 \end{cases}.$$

$*$ Matrice semblable diagonale et calcul de puissance. Nous appelons alors la nouvelle base $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ avec

$$\begin{cases} e'_1=e_1-e_3 \\ e'_2=e_2 \\ e'_3=e_1+e_2+e_3 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} e_1=\frac{1}{2}e'_1-\frac{1}{2}e'_2+\frac{1}{2}e'_3 \\ e_2=e'_2 \\ e_3=-\frac{1}{2}e'_1-\frac{1}{2}e'_2+\frac{1}{2}e'_3 \end{cases}$$

et nous obtenons donc la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$:

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \quad \text{et son inverse} \quad P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Si nous appelons u l'endomorphisme associé à A dans $\mathcal{B}$ nous pouvons l'écrire dans $\mathcal{B}'$:

$$M_{\mathcal{B}'}(u)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \quad \text{et la formule} \quad A=P^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}P.$$

Nous avons donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad A^n=P^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}^n P=P^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\\ 0 & 2^n & 0\\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1}\end{pmatrix}.$$