Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence de Mathématiques et Informatique 2020-2021

Analyse 3

TD1

Exercice 1.

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $x < y$ si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$, $x + \varepsilon < y$.

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \leq y$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, $x < y + \varepsilon$.

3. Donner un énoncé semblable pour l'assertion $x \geq y$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer l'assertion :

$$(\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon) \Leftrightarrow x = 0$$

Exercice 2. Le maximum de deux nombres x, y (c'est-à-dire le plus grand des deux) est noté $\max(x, y)$. De même on notera $\min(x, y)$ le plus petit des deux nombres x, y. Démontrer que :

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \text{ et } \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

Trouver une formule pour $\max(x, y, z)$.

Exercice 3. Soient a et b deux réels strictement positifs. Déterminer, s'ils existent, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

1. $A_1 =]-1, 1] \cup \{2\}$

2. $A_2 = \{a + nb, n \in \mathbb{N}\}$

3. $A_3 = \{a + (-1)^n b, n \in \mathbb{N}\}$

4. $A_4 = \{a + \frac{b}{n}; n \in \mathbb{N}^*\}$

5. $A_5 = \{(-1)^n a + \frac{b}{n}; n \in \mathbb{N}^*\}$

6. $A_6 = \{a + (-1)^n \frac{b}{n}; n \in \mathbb{N}^*\}$

Exercice 4. Déterminer, s'ils existent, un majorant, un minorant, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de l'ensemble :

$$A = \left\{ \frac{2x-1}{x+2},\ x \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

.

Exercice 5. Déterminer la borne supérieure et inférieure (si elles existent) de : $A = \{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ en posant $u_n = 2^n$ si n est pair et $u_n = 2^{-n}$ sinon.

Exercice 6. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in A \times B, x \leqslant y$$

Montrer que :

1. $\forall y \in B, \sup A \leqslant y$

2. $\sup A \leqslant \inf B$

3. On regarde le cas d'égalité dans l'inégalité précédente. Montrer l'équivalence :

$$\sup(A) = \inf(B) \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A)(\exists y \in B)(|x - y| < \varepsilon)$$

Exercice 7. Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Montrer que :

1. Si $A \subset B$ alors $\sup A \leqslant \sup B$

2. $A \cup B$ est majorée puis que $\sup A \cup B = \sup(\sup A, \sup B)$

3. Supposons $A \cap B \neq \emptyset$, alors $A \cap B$ est majorée puis que $\sup A \cap B \leq \inf(\sup A, \sup B)$. Donner un exemple pour lequel l'inégalité est stricte.

4. Soit $A + B = \{x \in \mathbb{R} / \exists a \in A, \exists b \in B, x = a + b\}$. Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

5. Soit $A \cdot B = \{x \in \mathbb{R} / \exists a \in A, \exists b \in B, x = a \times b\}$. A t-on : $\sup(A \cdot B) = \sup A \times \sup B$?

Exercice 8. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée.

1. On note $-A$ l'ensemble :

$$-A = \{y \in \mathbb{R} / \exists a \in A, y = -a\}$$

Montrer que $-A$ est non vide, $-A$ est majorée et que : $\sup(-A) = -\inf A$

2. Soit B l'ensemble des minorants de A. Montrer que $B \neq \emptyset$, B est majorée et que $\sup B = \inf A$

Exercice 9. Soit $\left(a_{ij}\right)_{(i,j)\in I\times J}$ une famille non vide et bornée de réels ; comparer :

$$\inf_i(\sup_j a_{ij}) \quad \text{avec} \quad \sup_j(\inf_i a_{ij}).$$

Exercice 10. Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$ d'au moins deux éléments et x un élément de A.

1. Montrer que si $x < \sup A$, alors $\sup(A \setminus \{x\}) = \sup A$.

2. Montrer que si $\sup(A \setminus \{x\}) < \sup A$, alors $x = \sup A$.

Exercice 11.

1. Dans cet exercice, A est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$ (i.e. il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $|x| \leq M$). On pose

$$B = \{|x-y|\,,\ x, y \in A\}\ .$$

Ainsi, B est l'ensemble de toutes les distances entre deux points quelconques de A.

2. Montrer que $\sup(B)$ existe. On appelle ce réel diamètre de A et on notera $\text{Diam}(A) = \sup(B)$.

3. Montrer que $\text{Diam}(A) = 0$ si et seulement si A est un singleton ($A = \{x\}$, pour $x \in \mathbb{R}$).

4. Justifier que $\inf(A)$ et $\sup(A)$ existent puis montrer que $\text{Diam(A)} \leq \sup(A) - \inf(A)$.

5. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x, y \in A$ tels que $\sup(A) - \inf(A) - \varepsilon < x - y$.

6. En déduire que $\text{Diam}(A) = \sup(A) - \inf(A)$.