Algèbre 3
Chapitre 3
Familles de vecteurs et dimension

Licence 2 MAE 2020-2021
Université de Paris - Paris Descartes
Marc Briant
(Fortement inspiré des cours de MM. G. Roussel et R. Lounès)

Table des matières

Avant-propos : Nous avons vu avec les sous-ev qu'il peut être possible d'étudier un ev grâce à des "parties plus petites" qui restent stables par combinaisons linéaires (**CL**). Pour comprendre les ev plus en détail, il convient de trouver des "briques élémentaires" qui permettraient de décrire un ev très simplement. Quoi de plus élémentaire dans un ev qu'un vecteur ? Nous allons donc étudier les familles de vecteurs et comprendre comment elles peuvent générer des sous-ev -voire même des ev tout entier !

Dans tout ce cours, $(\mathbb{K},+,.)$ **désigne un corps commutatif.**

1 Les grandes catégories de familles de vecteurs

1.1 Sous-ev engendré par une famille de vecteurs

À la recherche de "briques élémentaire", si nous considérons $A \subset E$ nous savons qu'il existe un sous-ev de E qui contient A : E lui-même. La question qui se pose est donc de savoir quel est "le plus petit" sous-ev de E contenant A. Dans les ensembles, "plus petit" signifie plus petit au sens de l'inclusion donc "contenu dans tous les autres".

Théorème 1.1 (*Sous-ev engendré par une partie*)

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $A \subset E$. L'intersection de tous les sous-ev de E contenant A est un sous-ev de E et c'est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-ev de E contenant A.
Ce sous-ev est appelé **sous-ev engendré par** A et nous le notons $\mathrm{Vect}\,(A)$.

Exemple : **1)** $\mathrm{Vect}\,(\emptyset) = \{0_E\}$.

2) Si F est un sous-ev de E si et seulement si $\mathrm{Vect}\,(F) = F$.

3)Union de sous-ev Si F et G sont deux sous-ev de E alors nous avons vu que $F \cup G$ n'est souvent pas un sous-ev. En revanche nous connaissons le plus petit sous-ev contenant $F \cup G$:

$$\mathrm{Vect}\,(F \cup G) = F + G$$

Proposition 1.2

Soient A et B deux parties d'un $\mathbb{K}$-ev E. On a
- $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{Vect}\,(A)) = \mathrm{Vect}\,(A)$.
- Si $A \subset B$ alors $\mathrm{Vect}\,(A) \subset \mathrm{Vect}\,(B)$.
- $\mathrm{Vect}\,(A \cup B) = \mathrm{Vect}\,(A) + \mathrm{Vect}\,(B)$.

Un exemple important de partie est celle qui contient un nombre fini d'éléments. Dans ce cas nous avons une description complète du sous-ev engendré.

Théorème 1.3 (*Sous-ev engendré par une famille*)

Soient x_1, x_2,..,x_p des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev E. Alors le sous-ev engendré par la famille $A = \{x_1, \dots, x_p\}$ est l'ensemble de toutes les CL de ces vecteurs :

$$\mathrm{Vect}\,(A) = \left\{ x \in E \mid \exists (\lambda_1, .., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k \right\}.$$

Exemple : Nous avons déjà vu les droites vectorielles et désormais nous savons que $\forall x \neq 0_E$, $\mathrm{Vect}\,(\{x\}) = \mathbb{K}x$.. De même pour une famille (e_1, e_2, e_3) de E nous venons de voir que

$$\mathrm{Vect}\,(\{e_1, e_2, e_3\}) = \mathbb{K}e_1 + \mathbb{K}e_2 + \mathbb{K}e_3.$$

1.2 Famille libre, génératrice, base

Comme nous le connaissons depuis longtemps en géométrie, il existe des vecteurs qui permettent de définir un espace tout entier - par exemple $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans $\mathbb{R}^3$. De plus nous nous apercevons que nous pouvons construire le vecteur $(3, 2, 0)$ avec $\vec{i}$ et $\vec{j}$ mais qu'il sera impossible de construire $\vec{k}$ avec ces derniers. Les définitions ci-dessous rendent très exactement compte de ces phénomènes.

Définition 1.4. Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $(x_1, .., x_n) \in E^n$. On dit que la famille $(x_1, .., x_n)$ est
- **Une famille libre** ssi pour tout $(\lambda_1, .., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$:
$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \right) \Rightarrow (\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = 0)\,.$$
- **Une famille liée** ssi elle n'est pas libre :
$$\exists (\lambda_1, .., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \backslash \{(0, .., 0)\}\,,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E.$$
- **Une famille génératrice de** E - on dit aussi qu'elle **engendre** E - ssi
$$\forall x \in E,\ \exists (\lambda_1, .., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$
- **Une famille base de** E ssi
$$\forall x \in E,\ \exists ! (\lambda_1, .., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

  Les (λ_i) sont appelées les **coordonnées de** x **sur la base** $(x_1, .., x_n)$.

Exemple : **1)Des exemples triviaux.** Si E est un $\mathbb{K}$-ev alors toute famille contenant 0_E est liée. Pour tout x de E la famille (x, x) est liée.

2)Des exemples dans $\mathbb{R}^3$**.**La famille $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est libre, génératrice et est une base.

La famille $(\vec{i}, \vec{j}, (3,2,0))$ est liée tandis que la famille $(\vec{i}, \vec{j}, (3,2,1))$ est libre.
La famille $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, (1,1,1))$ est génératrice mais elle est liée.

Remarque 1.5

Remarquons que deux vecteurs sont liés si et seulement si ils sont colinéaires. La notion de liberté "mesure" la possibilité d'une relation entre les vecteurs d'une famille.
La notion de génératrice est très intéressante puisque cela signifie que tout vecteur s'écrit comme une CL de la famille. Une base est encore mieux puisqu'alors la CL est unique !

Théorème 1.6

Soit $(x_1, .., x_n)$ une famille d'un $\mathbb{K}$-ev E. Alors

1. Elle est génératrice ssi $E = \text{Vect}(\{x_1, .., x_n\})$.
2. Elle est une base de E ssi elle est libre et génératrice.

Exemple : Des exemples dans $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-ev. Il existe plein de bases différentes dans un ev : $(1, i)$ et $(1, e^{\frac{2i\pi}{3}})$ et $(e^{\frac{2i\pi}{3}}, i)$ sont des bases du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$. Plus généralement, pour tout complexe z, $(1, z)$ est une base de $\mathbb{C}$ ssi $\text{Im}(z) \neq 0$.

Remarque 1.7

La notion de base ou de famille génératrice dépend fortement du corps de base $\mathbb{K}$. En effet, $\{1\}$ est une base du $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}$.

Proposition 1.8

Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

1. $\{x\}$ est libre ssi $x \neq 0_E$.
2. Une famille est liée ssi un des éléments est une CL des autres.
3. Une famille $(x_1, .., x_n)$ est génératrice du sous-ev $\text{Vect}(\{x_1, .., x_n\})$.
4. L'écriture sur une famille libre $(x_1, .., x_n)$ est unique :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\right) \Rightarrow (\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = \mu_i).$$

2 Quelques propriétés

2.1 Familles et cardinalité

Les exemples de la section précédente dans $\mathbb{R}^3$ semblent indiquer que si on peut espérer des bases avec trois vecteurs, nous ne pouvons pas en avoir avec seulement 2 vecteurs même s'ils sont libres ni avec 4 vecteurs même s'ils sont générateurs.

L'ev $\mathbb{K}^n$ est très important car il possède une base "évidente" liée à l'indice n.

Théorème 2.1

Sur $\mathbb{K}^n$ nous définissons $e_1 = (1_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, .., 0_{\mathbb{K}})$, $e_2 = (0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}, .., 0_{\mathbb{K}})$,..,$e_n = (0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, .., 1_{\mathbb{K}})$.
La famille $(e_1, .., e_n)$ est une base du $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{K}^n$ que l'on nomme **base canonique de $\mathbb{K}^n$**.

Il semble donc y avoir certains liens entre cardinalité d'une famille et ses propriétés.

Définition 2.2. Soit $(x_1, ..x_n)$ une famille d'un $\mathbb{K}$-ev E. On appelle **sous-famille** - resp. **sur-famille** - toute famille obtenue en ôtant - resp. en ajoutant - des éléments de E à $(x_1, .., x_n)$.

Comme nous avons essayé de le pressentir, une famille libre peut toujours être diminuée et une génératrice peut toujours être augmentée.

Proposition 2.3 (*Libre et sous-famille*)

Soit $(x_1, .., x_n)$ une famille libre de E. Alors

1. Toute sous-famille de $(x_1, .., x_n)$ est libre.
2. Si $x \in E$ n'est pas une CL des $(x_1, .., x_n)$ alors $(x_1, .., x_n, x)$ est libre.

Proposition 2.4 (*Génératrice et sur-famille*)

Soit $(y_1, .., y_n)$ une famille génératrice de E. Alors

1. Toute sur-famille de $(y_1, .., y_n)$ est génératrice.
2. Si chaque y_i est une CL d'une famille $(x_1, .., x_p)$ alors $(x_1, .., x_p)$ est génératrice.

Remarque 2.5 (*Une réflexion importante*)

De manière intuitive et non rigoureuse, une famille libre pourrait être une base si on lui ajoute suffisamment de vecteurs libres tandis qu'une famille génératrice pourrait être une base si on lui enlève les vecteurs "redondants" - ceux qui sont une CL des autres. Cela se comprend bien en terme de cardinalité.

Théorème 2.6

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et prenons $X = (x_1, .., x_p)$ et $Y = (y_1, .., y_q)$ deux familles de vecteurs de E.

1. Si X est libre et Y est génératrice alors $p \leqslant q$.
2. Si X est génératrice et Y est une base alors $p \geqslant q$.
3. Si X est génératrice alors il existe une sous-famille de X qui est une base.

Contre-Exemple : [Important : des génératrices infinies] Le point 3. ci-dessus nécessite le fait que la famille soit finie ! Mais il existe plein d'ev qui n'ont pas de base finie et donc nous ne pouvons pas nécessairement extraire d'une génératrice infinie une base finie. Pensons à $E = \text{Vect}(x \mapsto e^{kx},\ k \in \mathbb{N})$.

2.2 Familles et applications linéaires

Nous pouvons alors nous demander comment évolue une famille sous l'action d'une application linéaire.

Proposition 2.7

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-ev et si $u \in L(E, F)$ alors pour toute famille $(x_1, .., x_n)$ de E nous avons

$$u(\text{Vect}(\{x_1, .., x_n\})) = \text{Vect}(\{u(x_1), .., u(x_n)\}).$$

Théorème 2.8

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, $u \in L(E, f)$ et $(e_1, .., e_n)$ une famille de E.

1. Si $(e_1, .., e_n)$ est **génératrice** de E et u est **surjective** alors $(u(e_1), .., u(e_n))$ engendre F.
2. Si $(e_1, .., e_n)$ est **libre** dans E et u est **injective** alors $(u(e_1), .., u(e_n))$ est libre F.
3. Si $(e_1, .., e_n)$ est une **base** de E et u est **bijective** alors $(u(e_1), .., u(e_n))$ est une base de F.