ANA

Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris

Analyse 3 - Contrôle no. 2

Durée : 30 minutes – Les documents ne sont pas autorisés

NOM : .... PRENOM : ....

NUMERO ETUDIANT : ....

Quelques applications directes du cours. Répondre par "VRAI" ou "FAUX", sans justification, aux affirmations suivantes.
Une réponse juste vaut 1 *point, une fausse vaut* $-0,25$ *point et une absence de réponse vaut* 0 *point.*
Dans tout ce qui suit, (u_n), (v_n), (w_n) *sont des suites réelles. La notation* a.p.c.r *signifie* à partir d'un certain rang.

Solution. (1) (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall n_0 \geqslant 0,\ \exists n \geqslant n_0,\ |u_n - l| < \varepsilon$: FAUX, relire la définition du cours.

(2) Si (u_n) tend vers $+\infty$ pour $n \to \infty$, alors (u_n) est croissante a.p.c.r : FAUX : considérer des suites qui tendent vers $+\infty$ en oscillant, par exemple $u_n = n + 2(-1)^n$. Cette suite tend vers $+\infty$, mais n'est jamais croissante.

(3) Si (u_n) tend vers 0 pour $n \to \infty$, alors soit $u_n > 0$ a.p.c.r., soit $u_n < 0$ a.p.c.r : FAUX, prendre $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

(4) Si (u_n) tend vers 1 pour $n \to \infty$, alors $u_n > 0$ a.p.c.r : VRAI, cette suite va être dans $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ à partir d'un certain rang.

(5) Si $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \geqslant 0$ avec (u_n) croissante et non majorée. Alors $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$: VRAI, c'est l'application du théorème de convergence des suites monotones pour u suivi d'un théorème des gendarmes.

(6) Si (u_n) est monotone et non majorée, alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$: VRAI : les suites décroissantes sont majorées par leur premier terme. Donc la suite en question est croissante non majorée donc tend vers $+\infty$.

(7) Si la suite $(|u_n|)$ converge vers l, alors la suite (u_n) converge vers l ou $-l$: FAUX, prendre $u_n = (-1)^n$.

(8) Si pour tout $n \geqslant 0$, on a $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ avec $\lim_{n\to\infty}(w_n - u_n) = 0$. Alors $\lim_{n\to\infty} v_n$ existe : FAUX, prendre $u_n = v_n = w_n = (-1)^n$.

(9) Si (u_n) est minorée par 1 et strictement décroissante, alors (u_n) converge vers 1 : grossièrement FAUX : $u_n = 2020 + \frac{1}{n}$.

(10) Si (u_n) ne tend ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$ alors (u_n) est bornée : FAUX : prendre $u_n = 0$ si n pair et $u_n = n$ pour n impair.

Exercice 1. Démontrer, en utilisant **uniquement** la définition de la convergence d'une suite, que la suite (u_n) donnée par

$$u_n = \frac{3\sin(n) + 1}{n^2 + 1}$$

tend vers 0 pour $n \to \infty$.

Solution. On a pour tout $n \geqslant 0$, $|u_n| \leqslant \frac{4}{n^2+1}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\frac{4}{n^2+1} < \varepsilon$ si et seulement si $\frac{4}{\varepsilon} - 1 < n^2$. Deux cas sont possibles : soit $\varepsilon > 4$, auquel cas $\frac{4}{\varepsilon} - 1 \leqslant 0$ et donc $\frac{4}{\varepsilon} - 1 < n^2$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, soit $\epsilon \leqslant 4$, auquel cas $\frac{4}{\varepsilon} - 1 < n^2$ équivaut à $\sqrt{\frac{4}{\varepsilon} - 1} < n$ puis à (comme n est un entier) $\left\lfloor \sqrt{\frac{4}{\varepsilon} - 1} \right\rfloor + 1 \leqslant n$. Prenons donc en toute généralité $n_0 := \left\lfloor \sqrt{\frac{4}{\varepsilon} - 1} \right\rfloor + 1$. Alors pour $n \geqslant n_0$, le calcul précédent dit que $\frac{4}{n^2+1} < \varepsilon$ et donc $|u_n| < \varepsilon$. D'où le résultat.

Exercice 2. Soit (u_n) la suite récurrente définie par

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$$

(1) Montrer que $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 0$.

Solution. $u_0 = 2 \geqslant 1$. Supposons par récurrence que $u_n \geqslant 1$ pour un certain n. Alors, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1} \geqslant \sqrt{2 - 1} = 1$. D'où la propriété par récurrence.

(2) Etudier la monotonie de (u_n).

Solution. Pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n - 1} - u_n = \frac{2u_n - 1 - u_n^2}{\sqrt{2u_n - 1} + u_n} = -\frac{(u_n - 1)^2}{\sqrt{2u_n - 1} + u_n} \leqslant 0$, donc (u_n) est décroissante.

(3) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, calculer sa limite.

Solution. La suite u est décroissante, minorée par 1 donc convergente, vers $\ell \geqslant 1$. Par continuité de $x \mapsto \sqrt{2x - 1}$ sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$, il vient $\ell = \sqrt{2\ell - 1}$ et donc $\ell^2 - 2\ell + 1 = (\ell - 1)^2 = 0$ et donc $\ell = 1$.

Quelques commentaires :

- il y a du grand n'importe quoi généralisé quand il s'agit de gérer les calculs d'inégalités. Méfiez-vous des signes ! En particulier, il n'est pas normal d'écrire en L2 la phrase suivante : $u_n \geqslant 1$ et $u_{n+1} \geqslant 1$ donc $u_n - u_{n+1} \geqslant 1 - 1 = 0$! C'est une horreur !
- je suis désolé, mais sortir son discriminant pour factoriser le polynôme $\ell^2 - 2\ell + 1$ est d'une naïveté confondante pour un.e étudiant.e de 2ième année de Licence ! Le pire est même atteint quand vous vous trompez dans votre calcul et écrivez n'importe quoi. Pour rappel : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Identit%C3%A9_remarquable`
- Pour la question (2) : pour prouver que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ certains regardent les variations de la fonction $f(x) = \sqrt{2x - 1} - x$. Soit. Mais il n'y a aucun lien entre le fait que f soit décroissante et le fait que u soit décroissante. Ce ne sont pas les variations de f qui importent, c'est son signe !