Université Paris Descartes **Analyse 3**
1^{er} semestre 2018-2019

Partiel

Mercredi 14 novembre 2018 - Durée : 1h30

Exercice 1 (Question de cours) :

1. Enoncer le Théorème des gendarmes.
2. Démontrer ce théorème.

Exercice 2 : Soit la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n e^{-u_n}, \; n \geq 0. \tag{1}$$

1. Déterminer le signe de u_n pour tout $n \geq 0$.
   Correction : On prouve que $u_n > 0$ pour tout $n \geq 0$ par récurrence : c'est vrai pour $n = 0$ par hypothèse. Supposons que $u_n > 0$ pour un certain n, alors $u_{n+1} = u_n e^{-u_n} > 0$. D'où la propriété par récurrence.
2. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
   Correction : Pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n = u_n \left(e^{-u_n} - 1\right) \leq 0$, car $u_n \geq 0$. Donc la suite (u_n) est décroissante.
3. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0 pour $n \to \infty$.
   Correction : Ainsi, (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge, de limite $\ell \geq 0$. Par continuité de $x \mapsto xe^{-x}$, cette limite vérifie nécessairement $\ell = \ell e^{-\ell}$, i.e. $\ell(1 - e^{-\ell}) = 0$. Dans les deux cas, $\ell = 0$. Donc la suite (u_n) tend vers 0 quand $n \to \infty$.
4. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ fixé. Donner un équivalent de la suite $v_n = u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ pour $n \to \infty$.
   Correction : Calculons :
   $$v_n = u_n^\beta e^{-\beta u_n} - u_n^\beta = u_n^\beta \left(e^{-\beta u_n} - 1\right).$$
   Comme $u_n \to 0$, en utilisant un développement limité de $u \mapsto e^{-u}$ en $u = 0$, il vient, pour $n \to \infty$
   $$e^{-\beta u_n} = 1 - \beta u_n + o(u_n)$$
   et donc
   $$v_n = u_n^\beta \left(-\beta u_n + o(u_n)\right) = -\beta u_n^{\beta+1} + o(u_n^{\beta+1})$$
   et donc (possible car $u_n \neq 0$ pour tout n)
   $$v_n \sim_{n\to\infty} -\beta u_n^{\beta+1}.$$
5. Déterminer β de telle sorte que $(v_n)_{n\geq 0}$ admette une limite finie non nulle pour $n \to \infty$.
   Correction : On prend $\beta = -1$: le calcul précédent montre que $v_n \sim_{\to\infty} 1$ et donc $\lim_{n\to\infty} v_n = 1$.

6. En déduire un équivalent de la suite (u_n). *On rappelle pour cette question la propriété de Cesaro : si une suite (v_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors sa moyenne de Cesaro $\frac{v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}}{n}$ aussi.*
   Correction : La suite $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ est donc convergente de limite 1. Sa moyenne de Cesaro converge donc aussi vers 1 et on a donc $\frac{v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}}{n} \to 1$. Or cette dernière quantité est égale à $\frac{1}{nu_n} - \frac{1}{nu_0}$. Par conséquent,

$$u_n \sim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.$$

Exercice 3 : Dans tout cet exercice, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie la relation suivante :

$$\exists \alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[, \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \ |f(x) - f(y)| \leq \alpha \, |f(x) - x| + \alpha \, |f(y) - y| \, . \tag{2}$$

Le but de cet exercice est de montrer que f admet un unique point fixe, c'est-à-dire un unique réel l vérifiant

$$f(l) = l.$$

1. Montrer que si ce point fixe existe, il est unique.
   Correction : Prenons deux points fixes l_1 et l_2 et montrons que $l_1 = l_2$. En appliquant la propriété à $x = l_1$ et $y = l_2$, il vient $|f(l_1) - f(l_2)| \leq \alpha \, |f(l_1) - l_1| + \alpha \, |f(l_2) - l_2|$. Or $f(l_i) = l_i$ pour $i = 1, 2$, donc $|l_1 - l_2| = 0$ et donc $l_1 = l_2$.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère la suite récurrente définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq k \, |u_n - u_{n-1}| \, , \tag{3}$$

   où

$$k = \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

   Correction : Appliquons la propriété à $x = u_n$ et $y = u_{n-1}$: il vient $|f(u_n) - f(u_{n-1})| \leq \alpha \, |f(u_n) - u_n| + \alpha \, |f(u_{n-1}) - u_{n-1}|$ et donc $|u_{n+1} - u_n| \leq \alpha \, |u_{n+1} - u_n| + \alpha \, |u_n - u_{n-1}|$. Ainsi $(1-\alpha) \, |u_{n+1} - u_n| \leq \alpha \, |u_n - u_{n-1}|$ et donc $|u_{n+1} - u_n| \leq k \, |u_n - u_{n-1}|$ puisque $1 - \alpha > 0$.

3. En déduire que $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n \, |u_1 - u_0|$ puis que, pour tout $q \geq p \geq 1$,

$$|u_q - u_p| \leq \frac{k^p - k^q}{1-k} \, |u_1 - u_0| \, .$$

   Correction : La première inégalité se déduit de la question précédente par une récurrence évidente. Par ailleurs, pour tout $q \geq p \geq 1$, par inégalité triangulaire,

$$|u_q - u_p| \leq \sum_{j=p}^{q-1} |u_{j+1} - u_j| \leq \sum_{j=p}^{q-1} k^j \, |u_1 - u_0| = \frac{k^p - k^q}{1-k} \, |u_1 - u_0| \, .$$

4. En déduire que (u_n) est convergente. On note l sa limite.
Correction : Notons que $k = \frac{\alpha}{1-\alpha} < 1$ car $\alpha < \frac{1}{2}$. L'inégalité précédente implique $|u_q - u_p| \leq \frac{k^p}{1-k} |u_1 - u_0|$. Comme $k^p \to 0$ quand $p \to \infty$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $p \geq n_0$, $k^p < (1-k)\frac{\varepsilon}{|u_1-u_0|+1}$. Donc pour ce n_0, pour tout $q \geq p \geq n_0$, $|u_p - u_q| < \varepsilon$. Ainsi (u_n) est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc convergente, de limite l.
5. Montrer que pour tout $n \geq 0$
$$|f(l) - u_{n+1}| \leq \alpha |f(l) - l| + \alpha |u_{n+1} - u_n| . \tag{4}$$
Correction : Appliquons la propriété à $x = l$ et $y = u_n$: il vient $|f(l) - f(u_n)| \leq \alpha |f(l) - l| + \alpha |f(u_n) - u_n|$ et donc $|f(l) - u_{n+1}| \leq \alpha |f(l) - l| + \alpha |u_{n+1} - u_n|$.
6. En déduire que $f(l) = l$.
Correction : Toutes quantités étant convergentes dans cette inégalité, il vient, pour $n \to \infty$, $|f(l) - l| \leq \alpha |f(l) - l|$ et donc $f(l) = l$ car $\alpha < 1$.

Exercice 4 : 1. Soit A une partie de $\mathbb{N}$ non vide.
   (a) Montrer que A (en tant que partie de $\mathbb{R}$) admet une borne inférieure $\inf A \in \mathbb{R}$.

   Correction : A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (par hypothèse) et minorée par 0. Donc par axiome de l'analyse, A admet une borne inférieure.
   (b) Rappeler la caractérisation de la borne inférieure d'un ensemble par les ε.
   Correction : Soit $I \in \mathbb{R}$. Alors $I = \inf(A)$ si et seulement si I est un minorant de A et si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $I \leq a < I + \varepsilon$.
   (c) Soit $n = \lfloor \inf A \rfloor$ la partie entière de $\inf A$. Montrer que, dans ce cas, $\inf A = n \in A$. *On pourra s'aider de la question (b) pour un ε bien choisi.* Conclure que $\inf A$ est le minimum de A.
   Correction : Par définition de la partie entière, on a $n \leq \inf(A) < n + 1$. Choisissons $\varepsilon > 0$ de telle sorte que $n \leq \inf(A) < \inf(A) + \varepsilon < n + 1$. Il existe donc un élément a de A (et donc a est un entier) tel que $n \leq \inf(A) \leq a < n + 1$. Or, le seul entier dans $[n, n+1[$ est n. Donc $a = n = \inf(A)$. Donc $\inf(A) = a \in A$, donc $\inf(A) = \min(A)$.
2. On souhaite dans cette question re-prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel. *Remarque importante : on suppose dans cette question qu'on ne connait rien sur $\sqrt{2}$, à part uniquement sa définition en tant que l'unique racine positive de $x^2 = 2$. Toute propriété élémentaire sur $\sqrt{2}$ que vous souhaiteriez utiliser dans votre démonstration doit être justifiée à partir de cette définition.*
Soit
$$A = \left\{ n \in \mathbb{N}^*, n\sqrt{2} \in \mathbb{Z} \right\}.$$
   (a) Montrer qu'il s'agit de prouver que A est vide.
   Correction : A est non vide si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ et donc si et seulement si $\sqrt{2}$ est rationnel.

On raisonne par l'absurde et on suppose que A est non vide. D'après la question 1., on note $k = \min(A)$.

(b) Montrer que $k(\sqrt{2}-1) \in A$.
Correction : Soit $n = k(\sqrt{2}-1)$. Alors, d'une part, $n = k\sqrt{2}-k$ et est donc un entier (a priori relatif) par différence de deux entiers. Or $k \geq 1$ et $\sqrt{2}-1 > 0$ (car $2 > 1$). Donc en particulier, $n > 0$. C'est donc un entier strictement positif donc $n \in \mathbb{N}^*$. D'autre part, on a $n\sqrt{2} = 2k - k\sqrt{2}$ qui est donc un entier, par définition de $k \in A$. Donc $k(\sqrt{2}-1) \in A$.

(c) Conclure à une contradiction.
Correction : Ceci est absurde car $\sqrt{2}-1 < 1$ et donc $k(\sqrt{2}-1) < k$ ce qui contredit la minimalité de k. Donc A est vide et $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

3. *Question bonus, hors-barème :* généraliser le raisonnement de la question 2. pour prouver l'assertion suivante : pour tout entier $m \geq 1$, $\sqrt{m}$ est soit un entier, soit un irrationnel.
Correction : On pose de même $A = \{n \in \mathbb{N}^*, n\sqrt{m} \in \mathbb{Z}\}$. Deux possibilités : soit A est vide auquel cas $\sqrt{m}$ est un irrationnel, soit A n'est pas vide. Dans ce cas, A admet un minimum k. On pose alors $k' := k(\sqrt{m} - \lfloor \sqrt{m} \rfloor) < k$. Deux possibilités : soit $\sqrt{m} = \lfloor \sqrt{m} \rfloor$, auquel cas $\sqrt{m}$ est un entier. Soit $\sqrt{m} > \lfloor \sqrt{m} \rfloor$, auquel cas $k' > 0$. De plus, c'est un entier car $k' = k\sqrt{m} - k\lfloor \sqrt{m} \rfloor$ donc $k' \in \mathbb{N}^*$. De plus, $\sqrt{m}k' = km - k\sqrt{m}\lfloor \sqrt{m} \rfloor$ est un entier, par différence de deux entiers. Donc $k' \in A$. Or $k' < k$, ce qui contredit la minimalité de k. Absurde. Donc la seule possibilité pour que A ne soit pas vide est que $\sqrt{m}$ soit un entier.

Fin de l'épreuve.