Algèbre 3
Chapitre 10
Réduction des endomorphismes en dimension finie

Licence 2 MAE 2020-2021

Université de Paris - Paris Descartes

Marc Briant

Table des matières

Avant-propos : Nous revenons dans ce chapitre aux endomorphismes en dimension finie et donc aux matrices. Comme à chaque fois, notre but est de trouver une manière simple de les étudier. Nous avons vu que ce que nous faisons avec des matrices c'est : calculer des déterminants, calculer des rangs ou calculer des puissances. Dans tous les TDs il est apparu que les matrices très faciles à utiliser pour de tels calculs étaient les matrices triangulaires et les matrices diagonales. Le but de ce chapitre est de comprendre dans quelles circonstances nous pouvons trouver une base adaptée à un endomorphismes pour que dans cette base sa matrice soit triangulaire, voire même mieux : diagonale.
On appelle ce procédé **réduction de l'endomorphisme**, ou **reduction de matrice** - car trouver une nouvelle base pour l'endomorphisme u est équivalent à construire une matrice semblable pour $M_{\mathcal{B}}(u)$.

Dans tout ce cours, $(\mathbb{K},+,.)$ désigne un corps commutatif.

1 Éléments propres d'un endomorphisme

1.1 Motivation : représentation diagonale

Prenons E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. Imaginons que nous ayons un endormorphisme $u \in L(E)$ et une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $M_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale. Cela signifie qu'il existe n scalaires $\lambda_1,..,\lambda_n$ (pouvant être égaux) tels que

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(\lambda_1,..,\lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Cela signifie que

$$u(e_1) = \lambda_1 e_1, \quad u(e_2) = \lambda_2 e_2, \quad \cdots, \quad u(e_n) = \lambda_n e_n.$$

Nous nous apercevons donc de manière plus théorique que

$$e_1 \in \mathrm{Ker}\,(u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E), \quad \cdots, \quad e_n \in \mathrm{Ker}\,(u - \lambda_n \mathrm{Id}_E).$$

Ainsi, s'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $M_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(\lambda_1,..,\lambda_n)$ alors les espaces $\mathrm{Ker}\,(u-\lambda_i\mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$. En termes d'endomorphismes cela signifie que $u - \lambda_i \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif et comme nous sommes en dimension finie cela est équivalent au fait qu'il n'est pas bijectif et cela est équivalent au fait que $\det(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E) = 0$.

Remarque 1.1

Ainsi nous venons de voir que s'il existe une base où u est représentée par une matrice diagonale alors nécessairement il existe des scalaires λ_i (ils peuvent être égaux) tels que $\det(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E) = 0$ ce qui est équivalent à l'existence de vecteurs e_i tels que $u(e_i) = \lambda_i e_i$. Les λ_i, les e_i et les $\mathrm{Ker}\,(u-\lambda_i\mathrm{Id}_E)$ sont donc à la base de la possibilité ou non d'avoir une représentation matricielle diagonale. Nous allons donc étudier cela.

1.2 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 1.2. Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $u \in L(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. λ est appelée **valeur propre de** u s'il existe un vecteur e_λ non nul tel que $u(e_\lambda) = \lambda e_\lambda$. On dit alors que e_λ est un **vecteur propre de** u **associé à** λ.

Remarque 1.3

Pour un valeur propre λ il existe plusieurs vecteurs propres, tous les vecteurs non nuls de $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda\mathrm{Id}_E)$.

Proposition 1.4

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $u \in L(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes
(i) λ est une valeur propre de u;
(ii) $\exists e_\lambda \in E\backslash\{0_E\}$, $u(e_\lambda) = \lambda e_\lambda$;
(iii) $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda\mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$;
(iv) $\det(u - \lambda\mathrm{Id}_E) = 0_{\mathbb{K}}$.

Définition 1.5. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in L(E)$. L'ensemble des valeurs propres de u est appelé **spectre de** u et se note $\mathrm{Sp}(u)$.

Remarque 1.6 (*(HP) Spectre en dimension infinie*)

La proposition précédente nécessite que E soit de dimension finie pour que $(iii) \Leftrightarrow (iv)$. Si $\dim E = +\infty$ alors $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ peut être injectif mais pas bijectif. Si la dimension est infinie la définition du spectre est plus générale. Si E est un $\mathbb{K}$-ev et $u \in L(E)$, on appelle **spectre de** u, que l'on note $\mathrm{Sp}(u)$ ou $\sigma(u)$, l'ensemble des scalaires λ de $\mathbb{K}$ tels que $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ ne soit pas inversible.

$$\mathrm{Sp}(u) = \sigma(u) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid u - \lambda \mathrm{Id}_E \notin GL(E)\}.$$

Notons que les valeurs propres sont incluses dans le spectre mais que le spectre peut contenir des scalaires qui ne sont pas valeurs propres lorsque $\dim E = +\infty$.

Exemple : Considérons un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie.

1) Homothéties. Si u est une homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda\}$.

2) Projecteurs. Si u est un projecteur non nul alors $\mathrm{Sp}(u) = \{1_\mathbb{K}\}$.

3) Symétries. Si u est une symétrie différente de Id_E alors $\mathrm{Sp}(u) = \{-1_\mathbb{K}, 1_\mathbb{K}\}$.

1.3 Espaces propres et somme directe

Il semble donc que les espaces suivants soient important dans l'étude des endomorphismes.

Définition 1.7. Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $u \in L(E)$. Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ nous appelons **sous-espace propre de** u **associé à** λ le sous-ev défini par

$$E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{Id}_E).$$

Proposition 1.8

Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $u \in L(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. $E_\lambda(u) \neq \{0_E\}$ si et seulement si λ est une valeur propre de u.
Dans ce cas, les vecteurs propres de u associés à λ sont les vecteurs non nuls de $E_\lambda(u)$.

Théorème 1.9

Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $u \in L(E)$ et n un entier non nul. Pour tous scalaires $\lambda_1,..,\lambda_n$ deux à deux distincts nous avons

$$E_{\lambda_1}(u) \oplus E_{\lambda_2}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n}(u).$$

Corollaire 1.10

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in L(E)$. u possède au plus n valeurs propres distinctes.

2 Polynôme caractéristique et calcul des valeurs propres

2.1 Vocabulaire pour les matrices carrées

Les définitions et propositions ci-dessus s'étendent aux matrices grâce au résultat suivant.

Proposition 2.1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $\exists X_\lambda \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$, $AX_\lambda = \lambda X_\lambda$;

(ii) $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n) \neq \{0_E\}$;

(iii) $\det(A - \lambda I_n) = 0_\mathbb{K}$.

Remarque 2.2

Pour deux matrices semblables A et B nous avons $\det(A - \lambda I_n) = \det(B - \lambda I_n)$. Ainsi nous pouvons définir le concept de valeur propre d'une matrice en adéquation avec celle pour les endomorphismes.

Définition 2.3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est appelé **valeur propre de** A si λ est une valeur propre de l'endomorphisme associé à A dans une base quelconque de $\mathbb{K}^n$.

L'ensemble des valeurs propres de A sur $\mathbb{K}$ est appelé spectre de la matrice A et se note $\mathrm{Sp}_\mathbb{K}(A)$ - ou $\mathrm{Sp}(A)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le corps de base.

On appelle **sous-espace propre associé à** λ l'ensemble $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n)$ et les vecteurs non nuls de $E_\lambda(A)$ sont appelés **vecteurs propres associés à** λ.

Remarque 2.4

Par définition même, deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

Encore une fois les matrices triangulaires et diagonales sont très simples à analyser.

Proposition 2.5

Les valeurs propres d'une matrice carrée triangulaire supérieure, ou triangulaire inférieure, ou diagonale, sont ses coefficients diagonaux.

Exemple : Influence du corps de base. Comparées à des endomorphismes qui sont définis sur un ev donné, les matrices peuvent représenter des endomorphismes d'ev très différents et n'évoluant pas forcément sur les mêmes corps.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 121 \\ -121 & 0 \end{pmatrix}$$

vue comme une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'a pas de valeurs propres mais elle en a deux si on la voit comme une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Nous trouvons

$$\mathrm{Sp}_\mathbb{R}(A) = \emptyset \quad \text{mais} \quad \mathrm{Sp}_\mathbb{C}(A) = \left\{-i\sqrt{11}, i\sqrt{11}\right\}.$$

2.2 Le polynôme caractéristique

Une méthode simplement calculatoire pour calculer les valeurs propres est de trouver les scalaires λ tels que $\det(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0_\mathbb{K}$, ou que $\det(M_\mathcal{B}(u) - \lambda I_n) = 0_\mathbb{K}$ dans n'importe quelle base $\mathcal{B}$. Le déterminant d'une matrice A étant une combinaison linéaire de multiplications des coefficients de A il vient que $\det(M_\mathcal{B}(u) - \lambda I_n)$ est une fonction polynôme en λ.

Définition 2.6. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et $u \in L(E)$. On appelle **polynôme caractéristique de** u, noté χ_u le polynôme défini par

$$\chi_u = \det(u - X\mathrm{Id}_E).$$

Et de la même manière on appelle **polynôme caractéristique de** A, noté χ_A le polynôme défini par

$$\chi_A = \det(A - XI_n).$$

Notons que $\deg(\chi_u) = \deg(\chi_A) = n$.

Remarque 2.7

Comme les déterminants de deux matrices semblables sont les mêmes, la définition fait bien sens puisque si $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E nous avons bien $\chi_u = \chi_{M_\mathcal{B}(u)}$.

Exemple : **1) Matrices triangulaires et diagonales** Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure, ou inférieure, ou diagonale et que ses coefficients diagonaux sont $a_1, .., a_n$ alors

$$\chi_M = (X - a_1) \cdots (X - a_n).$$

2) Quelques coefficients de χ_M. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors nous avons

$$\chi_M = (-1)^n \left(X^n - \operatorname{tr}(M)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(M)\right).$$

Ce résultat s'applique bien évidemment aussi au cas $u \in L(E)$.

Proposition 2.8

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $u \in L(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u (resp. de A) si et seulement si λ est racine de χ_u (resp. de χ_A).

Corollaire 2.9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors

1. A a au plus n valeurs propres distinctes.
2. A et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres.
3. Si $\mathbb{K}$ algébriquement clos ($\mathbb{C}$ par exemple) alors A admet au moins une valeur propre.

L'étude des polynômes nous a donné des outils que l'on peut utiliser ici.

Définition 2.10. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $u \in L(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u (resp. de A), on appelle **ordre de multiplicité de λ comme valeur propre de** u (resp. de A), l'ordre de multiplicité de λ comme racine de χ_u (resp. de χ_A). On le note $m_\lambda(u)$ (resp. $m_\lambda(A)$).

Proposition 2.11

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure, ou inférieure ou diagonale de coefficients diagonaux $a_1, .., a_n$. Chaque a_i est une valeur propre de A d'ordre de multiplicité

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad m_{a_i} = \operatorname{Card}\left\{j \in [\![1, n]\!] \mid a_j = a_i\right\}.$$

3 Réductions diagonales et trigonales

Nous allons maintenant voir des propriétés qui permettent d'affirmer qu'un endomorphisme peut-être écrit dans une base où sa matrice sera diagonale ou, au moins, triangulaire.

3.1 Caractérisation de la diagonalisation

Définition 3.1. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in L(E)$. Nous dirons que u est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $M_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale.

Une matrice carrée est dite **diagonalisable** ssi elle est semblable à une matrice diagonale.

Remarque 3.2

Deux matrices carrées sont semblables ssi elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes donc la définition est cohérente : u est diagonalisable ssi pour toute base $\mathcal{B}$ de E la matrice $M_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonalisable.

Théorème 3.3

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in L(E)$. u est diagonalisable si et seulement il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

Corollaire 3.4

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$ et $u \in L(E)$. On appelle $\lambda_1, .., \lambda_p$ les valeurs propres de u.

1. u est diagonalisable ssi E est la somme directe des sous-ev propres de u :
$$E = E_{\lambda_1}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(u).$$
2. u est diagonalisable ssi χ_u est scindé et que
$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad \dim E_{\lambda_i}(u) = m_{\lambda_i}(u).$$
3. Si u possède n valeurs propres distinctes alors u est diagonalisable.

Exemple : **1)** La matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable : elle est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

2) Influence du corps de base. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -121 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mais dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ elle l'est : elle est semblable à $\begin{pmatrix} 11i & 0 \\ 0 & -11i \end{pmatrix}$.

Corollaire 3.5

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que A soit diagonalisable. Si λ_1,..,λ_n sont les valeurs propres de A apparaissant avec leur ordre de multiplicité alors A est semblable à

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi il vient que

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Remarque 3.6

Ne pas oublier les ordres de multiplicité des valeurs propres dans les formules ci-dessus ! Une valeur propre apparaît autant de fois que sa multiplicité dans χ_A.

3.2 Caractérisation de la trigonalisation

Bien entendu, être diagonalisable est très fort donc nous pouvons essayer de demander "un peu moins" pour finalement pouvoir réduire plus d'endomorphismes. Regardons alors les endomorphismes qui peuvent s'écrire sous la forme de matrices triangulaires.

Définition 3.7. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in L(E)$. Nous dirons que u est **trigonalisable** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle $M_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure.

Une matrice carrée est dite **trigonalisable** ssi elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Remarque 3.8

Encore une fois la définition est cohérente : u est trigonalisable ssi pour toute base $\mathcal{B}$ de E la matrice $M_{\mathcal{B}}(u)$ est trigonalisable.

La trigonalisation étant plus générale que la diagonalisation, la caractérisation est également plus simple.

Théorème 3.9

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in L(E)$. u est trigonalisable si et seulement χ_u est scindé.

Corollaire 3.10

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que A soit trigonalisable. Si $\lambda_1,..,\lambda_n$ sont les valeurs propres de A apparaissant avec leur ordre de multiplicité alors A est semblable à

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi il vient que

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Remarque 3.11

Ne pas oublier les ordres de multiplicité des valeurs propres dans les formules ci-dessus ! Une valeur propre apparaît autant de fois que sa multiplicité dans χ_A.

Corollaire 3.12

Le cas de $\mathbb{R}$-ev et des $\mathbb{C}$-ev satisfait donc

1. Tout endomorphisme sur un $\mathbb{C}$-ev de dimension fini est trigonalisable.
2. Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.
3. Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et donc si on appelle $\lambda_1,..,\lambda_n$ ses valeurs propres complexes apparaissant avec leur ordre de multiplicité il vient

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$