Université Paris Descartes **Analyse 3**
1$^{\text{er}}$ semestre 2018-2019

Examen

Lundi 14 janvier 2019 - Durée : 2h

Tout document, calculatrice, téléphone portable et autre appareil électronique est interdit. L'énoncé comporte 4 exercices indépendants.

Une part substantielle de la note portera sur la rédaction. Une juxtaposition d'équations sans liens logiques ni quantificateurs appropriés ne se verra pas attribuer une note élevée.

On attend que vous citiez précisément les théorèmes utilisés. En l'absence de la totalité des hypothèses requises, votre résultat sera considéré comme faux.

Exercice 1 (Question de cours) :

1. Enoncer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n \geq 1$ (avec les bonnes hypothèses requises). On donnera en particulier l'expression explicite du polynôme de Taylor à l'ordre n.
2. Démontrer cette formule.

Exercice 2 : Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction sur I.

1. (a) Montrer l'équivalence entre

$$f \text{ est uniformément continue sur } I \tag{1}$$

et

$$\text{Pour toutes suites } (x_n)_{n\geq 1} \text{ et } (y_n)_{n\geq 1} \text{ telles que } |x_n - y_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \\ \text{alors } |f(x_n) - f(y_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{2}$$

On pourra raisonner par contraposée pour l'implication (2) $\Rightarrow$ (1).
Correction : Montrons (1) $\Rightarrow$ (2) : Soient (x_n) et (y_n) deux suites telles que $|x_n - y_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $|x - y| < \eta$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Mais alors il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|x_n - y_n| < \eta$ et donc $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$. Nous venons de montrer que $|f(x_n) - f(y_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
Montrons (2) $\Rightarrow$ (1) : on suppose que f n'est pas uniformément continue : il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x, y \in I$ tels que $|x - y| < \eta$ et $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. C'est en particulier vrai pour $\eta = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi, il existe x_n et y_n tels que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. En particulier, $f(x_n) - f(y_n)$ ne tend pas vers 0.

   (b) Application : montrer que la fonction $t \mapsto \cos(t^2) + 2019$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
Correction : Posons $x_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ et $y_n = \sqrt{2n\pi}$. Alors $f(x_n) = 2019$ et $f(y_n) = 2020$. On a donc $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$ et $|x_n - y_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Donc f n'est pas uniformément continue.

2. On suppose dans cette question que f est uniformément continue et que I est un intervalle ouvert de la forme $I =]a, b[$. Le but de cette question est de montrer que f est prolongeable par continuité en a.

   (a) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de $]a, b[$ qui tend vers a. Rappeler pourquoi $(u_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy, puis montrer que $(f(u_n))_{n\geq 1}$ est alors aussi une suite de Cauchy.
Correction : (u_n) est une suite convergente, donc de Cauchy. Montrons que $(f(u_n))$ est de Cauchy : comme f est uniformément continue sur $I =]a, b[$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in I$, si $|x - y| < \eta$ alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Mais alors, comme (u_n) est de Cauchy, il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $p, q \geq n_0$, $|u_p - u_q| < \eta$. Mais alors $|f(u_p) - f(u_q)| < \varepsilon$ et donc $(f(u_n))$ est de Cauchy.

   (b) En déduire qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.
Correction : $(f(u_n))$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc convergente.

(c) Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ une autre suite de $]a,b[$ qui tend vers a. Un raisonnement identique à la question précédente (*qu'il n'est pas nécessaire de refaire, bien sûr !*) montre qu'il existe $\ell' \in \mathbb{R}$ tel que $f(v_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell'$. Montrer que $\ell = \ell'$.
Correction : Comme $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ alors $|u_n - v_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Par conséquent, $|f(u_n) - f(v_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ d'après la question 1), (a). Donc $\ell = \ell'$.

(d) Conclure.
Correction : Nous venons donc de montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$, unique, tel que pour toute suite (u_n) qui tend vers a, $(f(u_n))$ tend vers ℓ. Par caractérisation séquentielle de la limite, c'est exactement dire que f est prolongeable par continuité en a.

(e) L'application $x \mapsto \tan(x)$ est-elle uniformément continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$?
Correction : Cette fonction f n'est pas uniformément continue, car f admet des limites infinies en $\pm\frac{\pi}{2}$ et donc n'est pas prolongeable par continuité.

Exercice 3 : *Je ne saurais trop vous conseiller de faire un dessin pour cet exercice !*

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ telle que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} f(a)$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

1. Que pouvez-vous dire dans le cas où la fonction f est constante (égale à $f(a)$) ?
Correction : Si f est constante, sa dérivée est identiquement nulle, donc n'importe quel c convient.
On suppose dorénavant que f n'est pas constante : il existe donc $b \in]a, +\infty[$ tel que $f(b) \neq f(a)$. Sans perte de généralité, on suppose que $f(b) > f(a)$. Dans toute la suite, on pose $y = \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

2. Montrer qu'il existe $u \in]a, b[$ tel que $f(u) = y$.
Correction : Par construction, $y \in]f(a), f(b)[$. De plus f est continue sur $[a, b]$. Par théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $u \in]a, b[$ tel que $f(u) = y$.

3. Montrer qu'il existe $v \in]b, +\infty[$ tel que $f(v) = y$.
Correction : Comme $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} f(a)$, pour $\varepsilon := \frac{f(b)-f(a)}{2} > 0$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x > A$, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. On considère alors le segment $[b, A+1]$. Par construction, $f(A+1) < y$ et $f(b) > y$. Comme f est continue sur $[b, A+1]$, on peut de nouveau appliquer le théorème des valeurs intermédiaires, qui donne l'existence de $v > b$ tel que $f(v) = y$.

4. Conclure à l'existence de $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.
Correction : Il s'agit maintenant d'appliquer le théorème de Rolle sur l'intervalle $[u, v]$: f est continue sur $[u, v]$, dérivable sur $]u, v[$ tel que $f(u) = f(v) = y$. Il existe donc $c \in]u, v[$ tel que $f'(c) = 0$.

5. Le résultat de l'exercice est-il encore vrai si on suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$ avec $\ell \neq f(a)$?

Correction : Non : contre-exemple : la fonction arctan sur $[0, +\infty[$ a sa dérivée qui ne s'annule jamais et $\arctan(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{\pi}{2} \neq \arctan(0) = 0$.

Exercice 4 : Soit l'équation différentielle suivante :

$$t^4 y'(t) + y(t) = 1. \tag{3}$$

1. Résoudre cette équation sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$. *On fera uniquement la preuve dans le cas $]0, +\infty[$ et on se contentera de donner le résultat pour $]-\infty, 0[$.*

   Correction : Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $t \mapsto \lambda e^{\frac{1}{3t^3}}$, où λ est une constante réelle et 1 est une solution triviale de la solution avec second membre. Ainsi toute solution sur $]0, +\infty[$ (resp. sur $]-\infty, 0[$) est de la forme $t \mapsto \lambda e^{\frac{1}{3t^3}} + 1$.

2. Existe-t-il des solutions de (3) définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ? Si oui, lesquelles ? Vous expliquerez précisément votre raisonnement.

   Correction : Analyse : toute solution y sur $\mathbb{R}$ est nécessairement telle que $y(t) = \lambda e^{\frac{1}{3t^3}} + 1$ pour $t > 0$ et $y(t) = \mu e^{\frac{1}{3t^3}} + 1$ pour $t < 0$, pour deux constantes λ et μ. On a $\lim_{t\to 0, t>0} y(t) = \varepsilon\infty$ dès que $\lambda \neq 0$, où $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ est le signe de λ. Donc nécessairement $\lambda = 0$, auquel cas $\lim_{t\to 0, t>0} y(t) = 1$. De plus, $\lim_{t\to 0, t<0} y(t) = 1$ quel que soit $\mu \in \mathbb{R}$. Une telle fonction admet alors un prolongement par continuité en 0 en posant $y(0) = 1$.

   Une telle fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Etudions la dérivabilité en 0. Le taux d'accroissements $\frac{y(t)-y(0)}{t}$ est nul pour $t > 0$ et vaut $\frac{\mu e^{\frac{1}{3t^3}}}{t}$ pour $t < 0$. Par croissance comparée, cette quantité tend vers 0 pour $t \to 0$ et donc la fonction est dérivable en $t = 0$ et donc sur $\mathbb{R}$ tout entier.

   Synthèse : toute fonction y définie par $y(t) = 1$ pour $t \geq 0$ et $y(t) = \mu e^{\frac{1}{3t^3}} + 1$ pour $t < 0$ est solution de l'équation sur $\mathbb{R}$ (car elle l'est sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et l'égalité est triviale pour $t = 0$).

Fin de l'épreuve.