Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence de Mathématiques et Informatique 2020-2021

Analyse 3

TD2

1 Exercices d'application

Exercice 1. Montrer, en utilisant la définition de la limite, que :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(n)+n+1}{n} = 1$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$

Exercice 2. Soit $(u_n)_n$ une suite convergente. La suite $(\lfloor u_n \rfloor)_n$ (où $\lfloor\cdot\rfloor$ désigne la fonction partie entière) est-elle convergente ?

Exercice 3. Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que si $(u_n)_n$ converge, alors $(u_n)_n$ est stationnaire.

Exercice 4. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. On pose $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. On suppose que $(u_n)_n$ converge vers 0. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geqslant N$, on ait $|u_n| \leqslant \varepsilon$.

   1.1. Montrer qu'il existe une constante M_N tel que, pour tout $n \geqslant N$, on a :

   $|S_n| \leqslant \frac{M_N}{n} + \varepsilon$

   1.2. En déduire que $(S_n)_n$ converge vers 0.

2. On suppose que $(u_n)_n$ converge vers l. Montrer que $(S_n)_n$ converge vers l.
3. On suppose que $u_n = (-1)^n$. Que dire de $(S_n)_n$? Qu'en déduisez-vous ?

4. On suppose que $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$. Montrer que $(S_n)_n$ tend vers $+\infty$.

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs telle que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$

1. On suppose $l < 1$ et on fixe $\varepsilon > 0$ tel que $l + \varepsilon < 1$.

1.1. Montrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$, on ait : $u_n \leqslant u_N(l+\varepsilon)^{n-N}$

1.2. En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0

2. On suppose $l > 1$. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$.

3. Étudier le cas $l = 1$.

Exercice 6. Étudier la nature des suites suivantes, et calculer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \dfrac{\sin n + 3\cos(n^2)}{\sqrt{n}}$

2. $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$

3. $u_n = \dfrac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin n + \ln n}$

4. $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, où $a, b > 0$

Exercice 7. Étudier la nature des suites suivantes :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n+k}$

2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k}$

Exercice 8. Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ lorsque :

1. $u_n = \sqrt{n^2+9} - n$;

2. $u_n = (1 + \dfrac{1}{n})^n$;

3. $u_n = (n^2 + n + 1)^{1/n}$;

4. $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nt}}{1+e^{-t}} \mathrm{d}t$;

5. $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + e^{-k}\right)$;

6. $u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) \mathrm{d}t$ (plus difficile).

Exercice 9.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

2. En déduire le comportement de la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Exercice 10. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0, 1]$.

2. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 11. Soit k un entier naturel non nul. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^{k+1} + x^k - n.$$

1. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel positif x tel que $f_n(x) = 0$. On le note u_n.

2. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 12. Soit a et b tels que $0 < a < b$, on considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = a,\ v_0 = b,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n).$$

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite l.

2 Exercices de synthèse

Exercice 13. Soit $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. En utilisant une intégrale, montrer que pour tout $n > 0$: $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$.

2. En déduire que $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$.

3. Déterminer la limite de H_n.

4. Montrer que $u_n = H_n - \ln(n)$ est décroissante et positive.

5. Conclusion ?

Exercice 14. Soit $a > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par u_0 un réel vérifiant $u_0 > 0$ et par la relation

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

1. Montrer que $u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}$

2. Montrer que si $n \geqslant 1$ alors $u_n \geqslant \sqrt{a}$ puis que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

3. En déduire que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$

4. Donner une majoration de $u_{n+1} - \sqrt{a}$ en fonction de $u_n - \sqrt{a}$

5. Si $u_1 - \sqrt{a} \leqslant k$ et pour $n \geqslant 1$, montrer que

$$u_n - \sqrt{a} \leqslant 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$$

Exercice 15. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

On pose $v_n = \ln u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer pour tout $x \geqslant 0$, l'inégalité :

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$$

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. En déduire que :

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leqslant v_n \leqslant \frac{n+1}{2n}$$

4. Montrer que $(v_n)_n$ converge et préciser sa limite.

5. Montrer que $(u_n)_n$ converge et préciser sa limite.