Proba3 - Corrigé TD 4

Exercice 1

Dans la mémoire d'un ordinateur, on appelle quartet un ensemble de 4 bits (prenant la valeur 0 ou 1). On suppose que la mémoire de l'ordinateur n'a pas été initialisée. Ainsi, tous les bits de la mémoire se trouvent, indépendamment, dans l'état 1 avec probabilité $p \in [0, 1]$. On considère un quartet pris au hasard et on note X le nombre entier dont ce quartet est l'écriture en base 2.

1. Quelles valeurs peut prendre X ?

> **Solution:** Chaque bit peut prendre les valeurs 1 ou 0, donc X peut prendre toutes les valeurs entre 0 et $\overline{1111}^2 = 15$.

2. Calculer la probabilité que X soit impair puis $\mathbb{P}(X > 3)$.

> **Solution:** On note X_0, X_1, X_2, X_3 les valeurs des bits de X. On a
>
> $$X = X_0 + X_1 \times 2 + X_2 \times 2^2 + X_3 \times 2^3$$
>
> Donc $X = X_0[2]$. Donc $\mathbb{P}(X \text{impair}) = \mathbb{P}(X_0 = 1) = p$.
>
> En outre,
>
> $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 3) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 3) = 1 - (\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3)) \\ &= 1 - ((1-p)^4 + p(1-p)^3 + p(1-p)^3 + p^2(1-p)^2) \\ &= 1 - (1-p)^2(1 + p^2 - 2p + 2p(1-p) + p^2) = 1 - (1-p)^2 = (1 - (1-p))(1 + 1 - p) \\ &= p(2-p)\end{aligned}$$

Exercice 2

Au bowling, Pierre a une probabilité $\frac{3}{4}$ de faire tomber toutes les quilles (« strike »). Dans une soirée, il lance 18 boules et on considère les lancers indépendants. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de « strike » réussis par Pierre.

1. Quelle est la loi de X ?

> **Solution:** X est une somme de 18 loi de Bernouilli de paramètre $\frac{3}{4}$. C'est donc une loi Binomial de paramètre $18, \frac{3}{4}$.

2. Calculer la probabilité pour que Pierre réussisse dix « strike ».

Solution: On a donc, pour tout $k \in \{0, \dots, 18\}, \mathbb{P}(X = k) = \binom{18}{k} (\frac{3}{4})^k (\frac{1}{4})^{18-k}$. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 10) = \binom{18}{10} (\frac{3}{4})^{10} (\frac{1}{4})^8 &= \frac{18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11}{8!} \times \frac{3^{10}}{4^{18}} \\ &= \frac{9 \times 17 \times 11 \times 13 \times 3^{10}}{2 \times 4^{18}} \approx 0.9\%\end{aligned}$$

3. Quelle est l'espérance du nombre de « strike » réussis dans une soirée, sa variance ?

Solution: On sait que la loi Binomiale de paramètre n, p a pour espérance np et variance $np(1-p)$. Donc

$$\mathbb{E}[X] = \frac{18 \times 3}{4} = \frac{27}{2} \text{ et } V[X] = \frac{27}{8}$$

Exercice 3

Une compagnie de transports possède $n = 15$ cars, tous en état de marche en début de journée. La probabilité pour qu?un car tombe en panne ce jour est $p = 0.1$.

1. Soit X le nombre de cars tombant en panne ce jour. Quelle est la loi de probabilité de X ? En moyenne, combien de cars tombent en panne chaque jour ?

Solution: C'est une loi Binomiale de paramètre 15 et 0.1. On a doit $\mathbb{E}[X] = 15 \times 0.1 = 1.5$.

En moyenne, trois voitures tombent en panne tout les deux jours.

2. Un car tombé en panne sera réparé dans la journée si un réparateur est libre, la réparation prenant le reste de la journée. Sachant que la compagnie emploie 2 réparateurs, quelle est la probabilité pour que tous les cars soient en état de marche le lendemain matin ?

Solution: La probabilité voulue est

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq 2) &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) \\ &= \binom{15}{0} 0.1^0 0.9^{15} + \binom{15}{1} 0.1^1 0.9^{14} + \binom{15}{2} 0.1^2 0.9^{13} \\ &= 0.9^{15} + \frac{15}{10} \times 0.9^{14} + \frac{15 \times 14}{2 \times 100} \times 0.9^{13} \\ &= 0.9^{13} [0.9^2 + 1.5 \times 0.9 + \frac{21}{20}] \approx 80\%\end{aligned}$$

Le choix du nombre de réparateur est mathématiquement bon. Ce calcul est un bon complément du calcul de l'espérance pour comprendre la loi X. Mais attention, se baser sur l'espérance (et même sur ce calcul) pour déterminer le nombre de réparateur peut être casse-gueule. Par exemple, si la loi de X était plutôt $\mathbb{P}(X = 0) = 0.9$ et $\mathbb{P}(X = 15) = 0.1$, on aurait aussi $\mathbb{E}[X] = 1.5$, et $\mathbb{P}(\text{toutes les voitures opérationnelles}) = 0.9$ mais les deux réparateurs ne servirait pas à grand chose...

Exercice 4

Soient X, Y deux variables indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et $\mu > 0$.

1. Déterminer la loi de $X + Y$.

> **Solution:** On a $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.
> Et
>
> $$\begin{aligned} PP(X + Y = k) = \mathbb{P}(X = k - Y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k - Y | Y = n) \times \mathbb{P}(Y = n) \\ &= \sum_{n=0}^{k} \mathbb{P}(X = k - n)\mathbb{P}(Y = n) = e^{-\lambda} e^{-\mu} \sum_{n=0}^{k} \frac{\lambda^{k-n}\mu^n}{n!(k-n)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{n=0}^{k} \frac{k!}{n!(k-n)!} \times \mu^k \lambda^{n-k} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} \times \mu^k \lambda^{n-k} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} (\lambda + \mu)^k \end{aligned}$$
>
> Donc $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

2. Quelle est la loi conditionnelle de X sachant $X + Y = n$, $n \in \mathbb{N}$ fixé ?

> **Solution:**
> Si $X + Y = n$, alors $X \in \{0, \ldots, n\}$. On a, pour $k \leq n$,
>
> $$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k | X + Y = n) &= \frac{\mathbb{P}((X = k) \cap (X + Y = n))}{\mathbb{P}(X + Y = n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}((X = k) \cap (Y = n - k)}{\mathbb{P}(X + Y = n)} \\ &= \frac{\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \times \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\mu}}{\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!} e^{-(\lambda+\mu)}} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times (\frac{\lambda}{\lambda + \mu})^k (\frac{\mu}{\lambda + \mu})^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} (\frac{\lambda}{\lambda + \mu})^k (\frac{\mu}{\lambda + \mu})^{n-k} \end{aligned}$$
>
> C'est donc une loi Binomiale de paramètre n, $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$

Exercice 5

Dans un bureau de poste, il y a 10 guichets. En une journée, le nombre de clients qui se présentent à ce bureau de poste est une v.a. X, de loi de Poisson de paramètre λ. On suppose que les clients choisissent au hasard un guichet, de façon indépendante. Soit Y le nombre de clients qui choisissent le guichet 1.

1. Calculer $P(Y = k|X = n)$ où k et n sont des entiers naturels.

Solution: Dans le cas où l'on conditionne par $X = n$, on a $Y = Y_1 + \cdots + Y_n$ où $Y_1, \ldots, Y_n$ sont des v.a. indépendantes valant 1 avec probabilité $\frac{1}{10}$ et 0 sinon.

Y suit donc une loi Binomiale de paramètre $n, \frac{1}{10}$ et on a

$$\mathbb{P}(Y = k|X = n) = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (\frac{1}{10})^k (\frac{9}{10})^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. En déduire la loi de Y et calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Solution: Soit $k \in \mathbb{N}$.

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k|X = n) \times \mathbb{P}(X = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (\frac{1}{10})^k (\frac{9}{10})^{n-k} \times \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\
&= \frac{1}{k!10^k} e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{(n-k)!} (\frac{9}{10})^{n-k} \lambda^n \\
&= \frac{1}{k!10^k} e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} (\frac{9}{10})^m \lambda^{m+k} \\
&= \frac{1}{k!10^k} e^{-\lambda} \lambda^k \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} (\frac{9\lambda}{10})^m \\
&= \frac{\lambda^k}{k!10^k} e^{-\lambda} e^{\frac{9\lambda}{10}} \\
&= \frac{(\frac{\lambda}{10})^k}{k!} e^{-\frac{\lambda}{10}}
\end{aligned}$$

Y suit donc une loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{10}$

Exercice 6

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur (Ω, A, P), à valeurs dans l?ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = (1 - a)a^n$, et $\mathbb{P}(Y = n) = (1 - b)b^n, 0 < a < b < 1$.

1. On pose $M = \min(X, Y)$ et $k \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(X \geq k)$.

Solution: On a

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{n=k}^{+\infty} (1-a)a^n = a^k(1-a)\sum_{i=0}^{+\infty} a^i = a^k \frac{1-a}{1-a} = a^k$$

(b) Calculer $\mathbb{P}(M \geq k)$ et en déduire $\mathbb{P}(M = k)$.

Solution: On a $\mathbb{P}(M \geq k) = \mathbb{P}(\min(X,Y) \geq k) = \mathbb{P}((X \geq k) \cap (Y \geq k)) = a^k \times b^k$ par indépendance.
On a donc

$$\mathbb{P}(M = k) = \mathbb{P}(M \geq k) - \mathbb{P}(M \geq k+1) = (ab)^k - (ab)^{k+1} = (ab)^k(1-a)$$

On retrouve une loi géométrique.

(c) Calculer $\mathbb{P}(Y \geq X)$.

Solution: On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \geq X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y \geq X | X = k) \times \mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y \geq k) \times \mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} b^k \times (1-a)a^k = (1-a)\frac{1}{1-ab} = \frac{1-a}{1-ab}
\end{aligned}$$

2. On suppose que $a = b$ et on pose $U = X + Y$ et $V = Y - X$.

(a) Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(U = k)$.

Solution: On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U = k) = \mathbb{P}(X + Y = k) &= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X = k - Y | Y = i)\mathbb{P}(Y = i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X = k - i)\mathbb{P}(Y = i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} (1-a)a^{k-i}(1-b)b^i = (1-a)(1-b)a^k \sum_{i=0}^{k} (\frac{b}{a})^i \\
&= (1-a)(1-b)a^k \frac{1 - (\frac{b}{a})^{k+1}}{1 - \frac{b}{a}} \\
&= (1-a)(1-b)\frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a - b}
\end{aligned}$$

(b) Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Y = l | U = k)$.

Solution: On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = l | U = k) = \mathbb{P}(Y = l | X + Y = k) &= \frac{\mathbb{P}((Y = l) \cap (X + Y = k))}{\mathbb{P}(X + Y = k)} \\
&= \frac{\mathbb{P}((Y = l) \cap (X = k - l))}{\mathbb{P}(X + Y = k)} \\
&= \begin{cases} \frac{(1-b)b^l(1-a)a^{k-l}}{(1-a)(1-b)\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}} = \frac{(a-b)b^l a^{k-l}}{a^{k+1}-b^{k+1}} & \text{si } l \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

(c) Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(M = k, V = r)$. Pour cela, on distinguera les cas $r \geq 0$ et $r < 0$.

Solution: On suppose $r \geq 0$. Dans ce cas $Y - X = r$ implique $Y \geq X$ et donc $\min(X, Y) = X = Y - r$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M = k, V = r) &= \mathbb{P}((Y = X + r) \cap (\min(X, Y) = k)) = \mathbb{P}((Y = X + r) \cap (X = k)) \\
&= \mathbb{P}((Y = k + r) \cap (X = k)) = \mathbb{P}(Y = k + r) \times \mathbb{P}(X = k) \\
&= (1 - b)(1 - a)b^{k+r}a^k
\end{aligned}$$

Si $r < 0$, de même, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M = k, V = r) &= \mathbb{P}((X = Y - r) \cap (\min(X, Y) = k)) = \mathbb{P}((X = Y - r) \cap (Y = k)) \\
&= \mathbb{P}((X = k - r) \cap (Y = k)) = \mathbb{P}(X = k - r) \times \mathbb{P}(Y = k) \\
&= (1 - b)(1 - a)a^{k-r}b^k
\end{aligned}$$

3. Trouver la loi de V. Que peut-on dire des variables M et V ?

Solution: On a, pour $r \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y - X = k) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = X + r | X = i) \times \mathbb{P}(X = i) \\
&= (1 - a)(1 - b) \sum_{i=0}^{+\infty} b^{r+i}a^i \\
&= (1 - a)(1 - b)b^r \frac{1}{1 - ab}
\end{aligned}$$

De même, pour $r < 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y - X = r) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = Y - r | Y = i) \times \mathbb{P}(Y = i) \\
&= (1 - a)(1 - b) \sum_{i=0}^{+\infty} a^{i-r}b^i \\
&= (1 - a)(1 - b)a^{-r} \frac{1}{1 - ab}
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V=r)\times\mathbb{P}(M=k) &= \begin{cases}\frac{(1-a)(1-b)b^r}{1-ab}(1-ab)(ab)^k & \text{si } k\geq 0\\ \frac{(1-a)(1-b)a^{-r}}{1-ab}(1-ab)(ab)^k & \text{si } k<0\end{cases}\\ &= \begin{cases}(1-a)(1-b)b^{r+k}a^k & \text{si } k\geq 0\\ (1-a)(1-b)a^{k-r}b^k & \text{si } k<0\end{cases}\\ &= \mathbb{P}(V=r, M=k)\end{aligned}$$

V et M sont donc indépendants, ce qui n'est pas évident.

Exercice 7

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi de probabilité est donnée par :

$y\backslash x$	-1	1	2
-1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

1. Calculer la loi marginale de X, la loi marginale de Y . Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$.

Solution: On a $\mathbb{P}(X=-1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$, $\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{8}$ et $\mathbb{P}(X=2)=\frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(Y=-1)=\frac{3}{8}$ et $\mathbb{P}(Y=1)=\frac{5}{8}$.
On a, par la formule,

$$\mathbb{E}[X]=-1\times\frac{3}{8}+1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$$

et

$$\mathbb{E}[Y]=-1\times\frac{3}{8}+1\times\frac{5}{8}=\frac{1}{4}$$

2. X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution: On a $\mathbb{P}(X=1, Y=-1)=0\neq\mathbb{P}(X=1)\times\mathbb{P}(Y=-1)=\frac{1}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{64}$, donc X et Y ne sont pas indépendants.

Exercice Bonus

On considère une rue infiniment longue et rectiligne. On souhaite aller à un numéro précis de cette rue. Devant chaque numéro se trouve une place de parking. On cherche à savoir à partir de quel moment on doit commencer à s?intéresser aux places disponibles pour pouvoir se garer au plus près de l?arrivée. Au départ, nous sommes au début de la rue. Par convention, nous poserons que le début de la rue a pour numéro 0. Devant chaque numéro n, il y a une place de parking qui peut être libre avec une probabilité $p\in]0,1[$. On suppose que p ne dépend pas de n et que les occupations des places sont indépendantes les unes par rapport aux autres. Notre stratégie est la suivante : on se donne s un entier naturel. On roule sans interruption jusqu'au numéro s de la rue et on choisit la première place disponible à partir du numéro s (inclus). On note X le numéro de la place libre trouvée par cette méthode.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?

2. Déterminer la loi de X.

3. Soit $Y = X - s + 1$. Démontrer que Y suit une loi géométrique de paramètre p.

4. En déduire l'espérance et la variance de X.

5. On souhaite aller au numéro d de cette rue avec $d \in \mathbb{N}^*$. Notre stratégie consiste à choisir un numéro s compris entre 0 et d. L'espérance $D_s = \mathbb{E}(|X_s?d|)$ est la distance moyenne à l'arrivée (on admet l'existence de D_s). Établir que $D_s = S_1 + S_2$, avec $S_1 = \sum_{n=s}^{D_s}(d-n)\mathbb{P}(X=n)$ et $S_2 = \sum_{n=d+1}^{+\infty}(n-d)\mathbb{P}(X=n)$.

6. Soit la suite (uk) définie pour $k \geq 0$ par $u_k = \sum_{i=0}^{k}(k-i)(1-p)^i$. Démontrer que pour tout $k \geq 0, u_{k+1} = (1-p)u_k + k + 1$.

7. Montrer par récurrence que, pour tout $k \geq 0$, $u_k = \frac{k}{p} - \frac{1-p}{p^2} + \frac{1-p}{p^2}(1-p)^k$.

8. En déduire une expression de S_1 en fonction de d et s.

9. Justifier que $S_2 - S_1 = \mathbb{E}(X-d)$. En déduire la valeur de S_2 puis celle de D_s.

10. Démontrer que D_s est minimal pour s le plus petit entier strictement supérieur à $\alpha = d + \ln 2 \ln(1-p)$.