Chapitre 4 : Introduction aux phénomènes aléatoires continus

Nathaël Gozlan

2 décembre

Introduction

Dans ce chapitre, nous souhaitons modéliser des quantités aléatoires continues telles que :

- La température T dans une pièce : $T \in \mathbb{R}$,
- La durée de vie D d'un composant électronique : $D \in [0, \infty[$,
- Le temps d'attente A à un guichet : $A \in [0, \infty[$,
- ...

Ces variables T, D, A ont pour point commun de varier continuement : elles peuvent prendre toutes les valeurs intermédiaires entre deux valeurs fixées.

Pour avoir une modélisation satisfaisante, on ne peut pas supposer que ces variables sont à valeurs dans un sous ensemble E fini ou dénombrable de $\mathbb{R}$ et on doit donc autoriser ces variables à prendre une infinité *non*-dénombrable de valeurs.

Dans ce chapitre, nous allons présenter succinctement la classe des *variables aléatoires à densité* qui permet de modéliser ce type de phénomènes aléatoires continus.

Variables aléatoires à valeurs réelles

On se place dans un espace de probabilité général $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, où $\mathcal{A}$ est une tribu sur l'espace Ω.

Définition

Une variable aléatoire à valeurs réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\{X \leq t\} \in \mathcal{A}$.

Lorsque $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, la condition $\{X \leq t\} \in \mathcal{A}$ est automatiquement vérifiée.
Par conséquent, si Ω est fini ou dénombrable et est équipé de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ (choix usuel dans ce cadre), toute fonction est une variable aléatoire. On retrouve la définition du chapitre 3.

Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition

Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire, la fonction $F_X : t \mapsto \mathbb{P}(X \leq t)$ est appelée la fonction de répartition de X.

Cette fonction est bien définie, puisqu'on suppose que $\{X \leq t\}$ appartient à $\mathcal{A}$.

Proposition

La fonction F_X est croissante, continue à droite, admet une limite finie à gauche en tout point et tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$.

Démonstration.

La preuve est identique à celle donnée dans le cas des variables aléatoires définies sur un espace fini ou dénombrable. □

Densité de probabilité

Définition (Densité de probabilité)

Une fonction $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une *densité de probabilité* si

1. $p \geq 0$,
2. p est continue par morceaux,
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = 1$.

Définition

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire et p une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
On dit que X admet p pour densité si

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} p(x)\, dx, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Densité de probabilité

Si X a pour densité p alors la probabilité de l'événement $\{X \leq t\}$ correspond à l'aire sous la courbe représentative de p sur l'intervalle $]-\infty, t]$.

Dérivée de la fonction de répartition

Proposition

Soit X une variable aléatoire à densité. La fonction F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en tout point t où p est continue.

Démonstration.

Pour simplifier, nous faisons la preuve en supposant que p est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Fixons $t \in \mathbb{R}$. Comme p est continue en t, si $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $u \in [t-\eta, t+\eta]$, on a $|p(u) - p(t)| \leq \varepsilon$.

Prenons $t \leq s \leq t+\eta$, on a alors

$$F_X(s) - F_X(t) = \int_t^s p(u)\, du \leq \int_t^s p(t) + \varepsilon\, du = (p(t)+\varepsilon)(s-t).$$

Donc

$$\frac{F_X(s) - F_X(t)}{s-t} \leq p(t) + \varepsilon$$

On voit de même que

$$\frac{F_X(s) - F_X(t)}{s-t} \geq p(t) - \varepsilon$$

On a donc montré que

$$\lim_{s \to t^+} \frac{F_X(s) - F_X(t)}{s-t} = p(t).$$

En raisonnant de même pour la limite à gauche, on trouve

$$\lim_{s \to t^-} \frac{F_X(s) - F_X(t)}{s-t} = p(t).$$

Autrement dit $\lim_{s \to t} \frac{F_X(s)-F_X(t)}{s-t} = p(t)$, ce qui prouve que $F_X'(t) = p(t)$. □

Probabilité d'un intervalle

Proposition

Si X admet p pour densité

$$\mathbb{P}(X \in]a,b]) = \int_a^b p(x)\,dx.$$

Démonstration.

Si $a \leq b$, on a

$$\mathbb{P}(X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq a) + \mathbb{P}(X \in]a,b])$$

Donc, par la relation de Chasles,

$$\mathbb{P}(X \in]a,b]) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{-\infty}^b p(t)\,dt - \int_{-\infty}^a p(t)\,dt = \int_a^b p(t)\,dt.$$

□

Absence d'atomes

La principale différence entre les variables discrètes et continues est que la probabilité qu'une variable à densité prenne une valeur fixée à l'avance est toujours nulle.

Proposition

Si X est une variable aléatoire à densité, alors $\mathbb{P}(X = a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

Remarquons que
$$\{X = a\} = \cap_{n \in \mathbb{N}^*} \{X \in]a - 1/n, a]\}.$$
Les événements $A_n = \{X \in]a - 1/n, a]\}$ formant une suite décroissante, on a donc, en utilisant les axiomes des mesures de probabilité
$$\mathbb{P}(X = a) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X \in]a - 1/n, a]).$$
Or, comme X admet une densité p, la fonction de répartition F_X de X est continue en a et donc
$$\mathbb{P}(X \in]a - 1/n, a]) = F_X(a) - F_X(a - 1/n) \to 0,$$
lorsque $n \to +\infty$. On en déduit que $\mathbb{P}(X = a) = 0$. $\square$

Conséquence

Corollaire

Si X admet une densité, $\mathbb{P}(X \in]a,b]) = \mathbb{P}(X \in [a,b]) = \mathbb{P}(X \in [a,b[) = \mathbb{P}(X \in]a,b[)$.

Démonstration.

Par exemple,

$$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \mathbb{P}(\{X = a\} \cup \{X \in]a,b]\}) = \mathbb{P}(X = a) + \mathbb{P}(X \in]a,b]) = \mathbb{P}(X \in]a,b]).$$

□

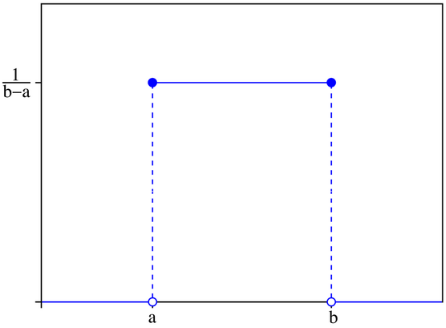
Plan

Densité uniforme sur $[a, b]$

Définition

On dit que X suit la loi uniforme sur $[a, b]$ et on note $X \sim \mathcal{U}([a, b])$ si X admet la densité p suivante :

$$p(t) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$



Densité uniforme sur $[a, b]$

Proposition

Si $X \sim \mathcal{U}([a, b])$, alors

$$F_X(t) = \begin{cases} \frac{t-a}{b-a} & \text{si } t \in [a, b] \\ 0 & \text{si } t < a \\ 1 & \text{si } t > b \end{cases}$$

Démonstration.

Par définition, si $t \in [a, b]$,

$$F_X(t) = \frac{1}{b-a} \int_{-\infty}^{t} \mathbf{1}_{[a,b]}(x)\, dx = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{t} 1\, dx = \frac{t-a}{b-a}.$$

$\square$

Plan

Densité exponentielle

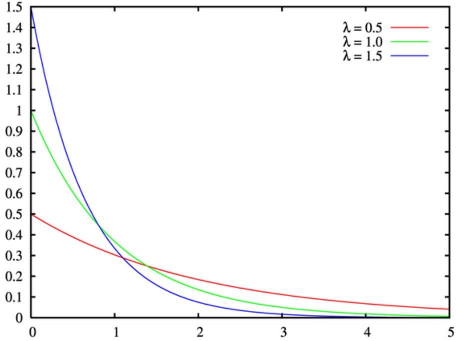
Définition

On dit que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et on note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ si X admet la densité p_λ suivante :

$$p_\lambda(t) = \lambda e^{-\lambda t}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Il s'agit bien d'une densité car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_\lambda(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = [-e^{-\lambda t}]_0^{+\infty} = 1.$$



Densité exponentielle

Proposition

Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Remarquons que $\mathbb{P}(X > 0) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 0) = 1$.
La densité exponentielle est souvent utilisée pour modéliser des durées : temps d'attente, durée de vie, ...

Démonstration.

Prenons $t \geq 0$,

$$F_X(t) = \lambda \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\, dx = \lambda \int_0^t e^{-\lambda x}\, dx = [-e^{-\lambda x}]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}.$$

□

Plan

Densité gaussienne

C'est peut être la densité la plus importante en théorie des probabilités !

Définition

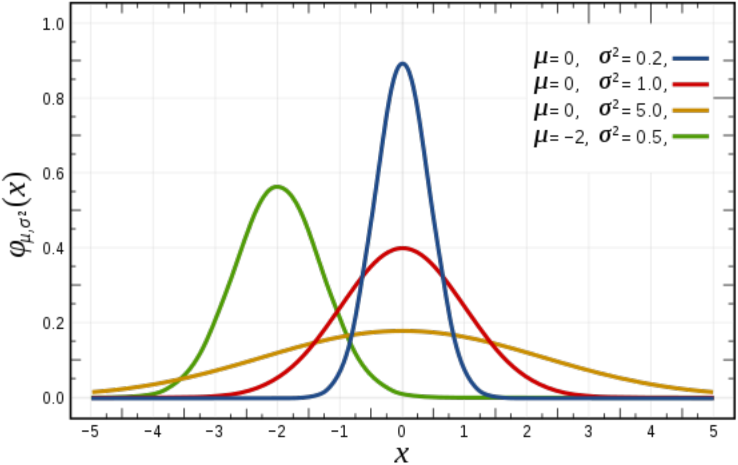
On dit que X suit la loi gaussienne de paramètres $m \in \mathbb{R}$ et σ^2 et on note $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si X admet la densité p_{m,σ^2} suivante :

$$p_{m,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2\right), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lorsque $m = 0$ et $\sigma^2 = 1$, on dit que X est centrée réduite. On dit que la loi $\mathcal{N}(0,1)$ est la loi gaussienne standard.

Nous allons voir que le paramètre m correspond à la moyenne de X et σ^2 à sa variance.
On ne dispose pas de formule explicite pour F_X.

Densité Gaussienne



Densité gaussienne

Pour montrer que p_{m,σ^2} est une densité, on utilise d'abord le fait que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{m,\sigma^2}(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2\right)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)\,du$$

où la dernière égalité vient du changement de variable $u = (x-m)/\sigma$,puis la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)\,du = \sqrt{2\pi}. \tag{1}$$

Il y plusieurs moyens classiques de montrer (1) : changement de variables polaires, utilisation des formules de Wallis, résolution d'une équation différentielle,. . . (cf L3)

Densité gaussienne

On peut montrer une propriété de stabilité des variables aléatoires gaussiennes :

Proposition

Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $Y = \sigma X + m \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Démonstration.

On remarque que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$Y \leq t \Leftrightarrow X \leq (t-m)/\sigma.$$

Donc

$$G_Y(t) = \mathbb{P}(X \leq (t-m)/\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(t-m)/\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) d$$

en effectuant le changement de variable $u = (x-m)/\sigma$.
Donc Y a pour densité p_{m,σ^2}. □

Plan

Espérance et moments des variables aléatoires à densité

Définition

Soit X une variable aléatoire ayant une densité p_X.

- Pour toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux telle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)| p_X(x)\, dx$ converge, on pose
$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) p_X(x)\, dx. \tag{2}$$
Cette quantité est appelée *espérance de* $h(X)$.
- En particulier si $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| p_X(x)\, dx$ converge alors l'espérance de X est définie par
$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x)\, dx.$$
- Plus généralement, si $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k p_X(x)\, dx$ converge pour $k \in \mathbb{N}$ alors le moment d'ordre k de X est défini par
$$\mathbb{E}[X^k] = \int x^k p_X(x)\, dx.$$

Espérance et moments des variables aléatoires à densité

Remarque

- La formule (2) est l'analogue continu de la formule

$$\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{i=0}^{+\infty} h(x_i)\mathbb{P}(X = x_i),$$

pour une variable aléatoire discrète à valeurs dans $E = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$.

- Remarquons que si $h(x) = \mathbf{1}_{[a,b]}(x)$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)p_X(x)\,dx$ converge et on a

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{[a,b]}(X)] = \int_a^b p_X(x)\,dx = \mathbb{P}(X \in [a,b]).$$

La notion d'espérance est donc une extension aux fonctions de la notion de probabilité.

Variance

Définition (Variance)

Si X est une variable aléatoire de densité p_X possédant un moment d'ordre 2 fini, on appelle variance de X la quantité

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{\mathbb{R}} \left(x - \int_{\mathbb{R}} y p_X(y)\, dy \right)^2 p_X(x)\, dx$$

On a la formule

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Inégalités

Proposition (Inégalité de Markov)

Si X admet un moment d'ordre 1 fini, alors

$$\mathbb{P}(|X| > a) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{a}, \qquad \forall a > 0$$

Démonstration.

$$\mathbb{E}[|X|] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| p_X(x)\, dx \geq \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \mathbf{1}_{|x|>a} p_X(x)\, dx \geq a\mathbb{E}[\mathbf{1}_{|X|>a}] = a\mathbb{P}(|X| > a).$$

$\square$

Corollaire

Si X admet un moment d'ordre 2 fini, on a

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}, \qquad \forall a > 0.$$

Plan

Loi uniforme

Proposition

Si $X \sim \mathcal{U}([a, b])$, alors

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Loi exponentielle

Proposition

Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$, alors

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Loi gaussienne

Proposition

Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors

$$\mathbb{E}[X] = m \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2.$$