Algèbre 3
Chapitre 8
Polynômes à une indéterminée

Licence 2 MAE 2020-2021

Université de Paris - Paris Descartes

Marc Briant

(Fortement inspiré des cours de MM. G. Roussel et R. Lounès)

Table des matières

Avant-propos : Nous connaissons depuis des années les fonctions réelles polynômes : $x \mapsto 11 + \pi x + 5x^5 + x^8$ par exemple. Nous avons vu que si nous remplacions la multiplication par la composition nous pouvions étudier des combinaisons linéaires de composée d'un endomorphisme $u : 11\mathrm{Id}_E + \pi u + 5u^5 + u^8$ par exemple, où $u^k = u^{\circ k}$. Et nous venons de voir que le même genre d'expressions faisait sens avec la multiplication matricielle pour une matrice carrée A : $11 + \pi A + 5A^5 + A^8$. De plus, certains exercices de TD ont révélé qu'étudier des relations polynômiales pour un endomorphisme (et donc aussi pour une matrice) peut mener à des propriétés d'inversibilité. Il est donc temps de proposer un cadre abstrait et algébrique pour l'étude de telles expressions dites polynômiales.

Dans tout ce cours, $(\mathbb{K}, +, .)$ **désigne un corps commutatif.**

1 Construction des polynômes

1.1 La $\mathbb{K}$-algèbre des polynômes

Une écriture polynomiale souvent lue est la suivante : $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...$, c'est-à-dire que les puissances de x (un réel, un endomorphisme ou une matrice par exemple) sont séparées. Si l'on isole chaque puissance, les coefficients a_0, a_1, a_2,.. semblent définir l'écriture (ils peuvent être nuls) et cela ressemble fortement à une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cela conduit à la définition suivante.

Définition 1.1. On appelle **polynôme à une indéterminée** à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute suite $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ qui est nulle à partir d'un certain rang :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \quad a_n = 0_{\mathbb{K}}.$$

Les scalaires a_n sont appelés **coefficients de** P.
L'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

Comme lors de la construction des matrices, maintenant que nous avons un ensemble qui répond à notre attente nous souhaitons construire des lois sur cette ensemble qui "copient" celles que nous connaissons pour nos exemples. Prenons un exemple simple avec deux fonctions polynômes réelles $f(x) = a_0 + a_1x$ et $g(x) = b_0 + b_1x$ et un réel λ :

$$\begin{aligned}(\lambda f)(x) &= (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x \\ (f+g)(x) &= (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x \\ (f\times g)(x) &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x.\end{aligned}$$

Bien entendu ces formules se généralisent pour des puissances de x plus grandes. Cela mène donc aux lois sur $\mathbb{K}[X]$.

Définition 1.2. Sur l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ nous définissons deux lois de compositions internes :
- **L'addition** de $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
  $P + Q = (c_n) \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ c_n = a_n + b_n.$
- **La multiplication** de $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$P \times Q = PQ = (d_n) \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Ainsi qu'une loi de composition externe
- **La multiplication par un scalaire** de $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\alpha \in \mathbb{K}$:
  $\alpha \cdot P = \alpha P = (h_n) \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ h_n = \alpha a_n.$

Remarque 1.3 (*Notation somme dans le produit*)

Explicitons le terme d_n dans la multiplication

$$d_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0.$$

Profitons-en pour remarquer que puisque le corps de base $\mathbb{K}$ est commutatif il vient que $\mathbb{K}[X]$ aussi : $PQ = QP$.

Il faut alors regarder si les lois définies plus haut forment bien des polynômes et satisfont les règles d'associativité, distributivité, etc... que l'on aime bien.

Théorème 1.4

L'ensemble $(\mathbb{K}[X], \cdot, +, \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative dont l'élément nul est $0_{\mathbb{K}[X]} = (0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, ..)$ et le neutre est $1_{\mathbb{K}[X]} = (1_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, ..)$.

Comme $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif, nous avons accès à la notion de divisibilité.

Définition 1.5. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Nous disons que Q **divise** P ou Q **est un diviseur de** P ou P **est un multiple de** Q dans $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si

$$\exists R \in \mathbb{K}[X], \quad P = QR.$$

Nous le notons alors $Q|P$.

Exemple : 1) Le polynôme nul. Le polynôme $0_{\mathbb{K}[X]}$ est divisible par tous les polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

2) Le polynôme unité. Tous les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ sont divisibles par $1_{K[X]}$.

3) Le polynôme $(-2,1,1,0,\dots)$ est divisible par $(-1,1,0,\dots)$ et $(2,1,0,\dots)$ dans $\mathbb{R}[X]$. *Nous traduirons cela plus tard par* $(X-1)$ *et* $(X+2)$ *divisent* $(-2+X+X^2)$.

1.2 Notations et écriture d'un polynôme

Nous sommes donc en présence d'un $\mathbb{K}$-ev et ce que nous aimons dans les $\mathbb{K}$-ev ce sont...les bases.

Théorème 1.6

Pour tout entier naturel k notons $e_k = (0_\mathbb{K},..,0_\mathbb{K},1_\mathbb{K},0_\mathbb{K},..)$ le polynôme dont tous les coefficients sont nuls exceptés le k^{eme} qui vaut $1_\mathbb{K}$ - en d'autres termes $e_k = (\delta_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$.
La famille $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ et nous avons la propriété suivante

$$\forall (k,k') \in \mathbb{N}^2, \quad e_k e_{k'} = e_{k+k'}.$$

Grâce au théorème ci-dessus nous voyons que $e_k = e_1^k$ et cela permet d'obtenir l'écriture définitive d'un polynôme.

Définition 1.7. Le polynôme défini par $(0_\mathbb{K},1_\mathbb{K},0_\mathbb{K},0_\mathbb{K},..)$ est appelé **indéterminée de** $\mathbb{K}[X]$ et se note X.

Remarque 1.8 (*Attention définition !*)

Remarquons de suite que X est un polynôme et que $X^k = (\delta_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$. Notons qu'avec cette convention nous retrouvons l'habituel

$$X^0 = (1_\mathbb{K},0_\mathbb{K},0_\mathbb{K},..) = 1_{\mathbb{K}[X]}.$$

Il ne faut pas confondre X avec un réel et c'est une suite non nul bien définie et donc écrire "si X=0" ne fait aucun sens.

Corollaire 1.9

Pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ il existe une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang telle que

$$P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n.$$

Les a_n sont exactement les coefficients de P.

Remarque 1.10 (*Pas d'identification !*)

Puisque $(X^0, X, X^2,..)$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ il vient que

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n\right) \Leftrightarrow (\forall n\in\mathbb{N},\ a_n = b_n).$$

Il n'y a donc aucune histoire d'identification des puissances comme nous avons pu faire ou lire souvent ! C'est simplement la définition d'une base dans un $\mathbb{K}$-ev.

Notons qu'avec nos nouvelles notations

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n\right) + \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n+b_n) X^n$$
$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n X^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) X^n$$
$$\alpha\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha a_n X^n$$

Définition 1.11. Nous appelons **polynôme constant** tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de la forme $(a_0,0_\mathbb{K},0_\mathbb{K},..) = a_0 1_{\mathbb{K}[X]}$ avec a un scalaire.

Remarque 1.12 (*Scalaires et polynômes constants*)

Si nous regardons le morphisme $\varphi : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}[X]$ qui envoie le scalaire $a\in\mathbb{K}$ sur le polynôme constant $\varphi(a) = (a,0_\mathbb{K},0_\mathbb{K},..)$ nous voyons que c'est une isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev et de plus $\varphi(a)P = aP$ pour tout scalaire a et tout polynôme P.
Ainsi, il n'y a aucun danger à confondre le polynôme constant $\varphi(a)$ et le scalaire a lui-même. Nous ne ferons donc aucune distinction entre $a1_{\mathbb{K}[X]}$ et a.
En conséquence nous noterons $0_{\mathbb{K}[X]} = 0_\mathbb{K} = 0$ ainsi que $1_{\mathbb{K}[X]} = 1_\mathbb{K} = 1$.

1.3 Composition des polynômes

Définition 1.13. Soient $P = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$ et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Nous définissons le **composé de** P **par** Q le polynôme

$$P\circ Q = P(Q) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n Q^n.$$

Remarque 1.14 (*Encore de la notation*)

Nous voyons que $P\circ X = X$ ce qui se réécrit $P(X) = P$; nous utiliserons les deux expressions indifféremment.

Proposition 1.15

Soient P, Q et R des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et α et β des scalaires de $\mathbb{K}$.

1. $(P\circ Q)\circ R = P\circ(Q\circ R)$.
2. $(\alpha P + \beta Q)\circ R = \alpha(P\circ R) + \beta(Q\circ R)$.

1.4 Degré et coefficient dominant

Comme nous savons qu'un polynôme est une suite d'élément de $\mathbb{K}$ qui est nulle à partir d'un certain rang, il peut être intéressant de regarder ce rang de plus près.

Définition 1.16. Soit $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On appelle **degré de** P le rang du dernier élément non nul de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\deg(P) = \begin{cases} \max\{n\in\mathbb{N} \mid a_n \neq 0_\mathbb{K}\} & \text{si } P\neq 0 \\ -\infty & \text{si } P = 0 \end{cases}$$

Nous appelons alors **coefficient dominant de** P le coefficient de plus haut degré $a_{\deg(P)}$.
Quand $a_{\deg(P)} = 1_\mathbb{K}$ nous dirons que le polynôme est **unitaire**.

Un polynôme P de degré d s'écrit donc $P = \sum\limits_{n=0}^{d} a_n X^n$.

Proposition 1.17

Soient P et Q des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et α un scalaire non nul de $\mathbb{K}$.
- $\deg(\alpha P) = \deg(P)$.
- $\deg(P+Q) \leqslant \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$ avec égalité quand $\deg(P) \neq \deg(Q)$.
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Remarque 1.18

Comme $PQ = 0$ ssi $P = 0$ ou $Q = 0$ (l'anneau des polynômes est dit **intègre**) nous avons pris ci-dessus la convention $n + (-\infty) = -\infty$ pour tout naturel n.

Définition 1.19. Soit $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n se note $\mathbb{K}_n[X]$:

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \quad \deg(P) \leqslant n\}.$$

Théorème 1.20

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $(\mathbb{K}_n[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n+1$.
En particulier $(1, X, .., X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

2 Racines d'un polynôme

Comme tout le temps en algèbre nous allons essayer de trouver des caractéristiques intrinsèques des polynômes afin de les comprendre plus simplement. $\mathbb{K}$ étant le corps de base, essayons de relier $\mathbb{K}[X]$ à $\mathbb{K}$.

2.1 Les fonctions polynômes

Ici nous relions la théorie des polynômes à une indéterminée aux fonctions polynômes que nous connaissions au commencement.
Si nous considérons le polynôme $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n$ alors pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ nous définissons le scalaire $P(\lambda) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \lambda^n$. Nous substituons donc λ à l'indéterminée X.
L'application $\lambda \mapsto P(\lambda)$ est une application de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ et s'appelle **fonction polynôme associée à** P. Ce qui porte souvent à confusion est que nous notons x le scalaire et $x \mapsto P(x)$ la fonction polynôme. Il faut bien faire attention à ne pas confondre x et X !
Remarquons alors que les fonctions polynômes ont les propriétés attendues - puisque nous avons construit les polynômes ainsi.

Proposition 2.1

Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$, α et β dans $\mathbb{K}$ et soit x un scalaire dans $\mathbb{K}$.
1. $(\alpha P + \beta Q)(x) = \alpha P(x) + \beta Q(x)$.
2. $(PQ)(x) = P(x)Q(x)$.
3. $(P \circ Q)(x) = P(Q(x))$.

2.2 Racines d'un polynôme

L'élément nul dans un corps $\mathbb{K}$ est très particulier puisque c'est le seul scalaire non inversible pour la multiplication. Nous avons vu comment relier $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}$ par le biais des fonctions polynômes. Nous pouvons alors regarder les scalaires qui annulent un polynôme.

Définition 2.2. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a **est une racine de** P **dans** $\mathbb{K}$ si et seulement si $P(a) = 0_{\mathbb{K}}$.

Exemple : **1)** Le polynôme $P = X^2 - X - 1$ admet $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ comme racines réelles.
2) Dépendance du corps $\mathbb{K}$. Dans la définition, la mention du corps $\mathbb{K}$ est importante. En effet $P = (X-1)(X^2+1)$ n'admet que 1 comme racine dans $\mathbb{R}$ alors qu'il admet 1, i et $-i$ comme racines dans $\mathbb{C}$.

Théorème 2.3

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, non nul, et $a \in \mathbb{K}$. a est une racine de P dans $\mathbb{K}$ si et seulement si $(X-a)|P$ dans $\mathbb{K}[X]$.

Cela commence à nous aiguiller vers une écriture simple d'un polynôme puisque si a est racine de P alors $P = (X-a)Q$ et $\deg(Q) < \deg(P)$. Q peut alors avoir des racines, qui seront donc aussi racines de P et nous diminuerons encore le degré du polynôme diviseur. Parfois a sera également racine de Q.

Définition 2.4. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$ une racine de P. Nous appelons **ordre de multiplicité de** a **(dans** P**)** le plus grand entier naturel k tel que $(X-a)^k|P$.

Remarque 2.5

Lorsque l'ordre de multiplicité d'une racine a de P vaut 1 nous dirons que a **est une racine simple de** P, sinon nous dirons que a **est une racine multiple (double, triple,..) de** P.

Proposition 2.6

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, non nul, $a \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Il y a équivalence des assertions suivantes
(i) a est une racine de P de multiplicité k ;
(ii) $(X-a)^k|P$ dans $\mathbb{K}[X]$ et $(X-a)^{k+1} \not| P$;
(iii) $\exists Q \in \mathbb{K}[X], \quad P = (X-a)^k Q$ et $Q(a) \neq 0$.

Application : Dans $\mathbb{Q}[X]$, 2 est racine d'ordre 2 de $P = X^4 - 4X^2 + 4X$ et 1 est racine simple de $Q = X^4 - X^2 - X + 1$. Dans ces deux polynômes 0 est racine double.

En regroupant tous ces résultats nous pouvons trouver de nombreux diviseurs d'un polynôme.

Proposition 2.7

Soit P dans $\mathbb{K}[X]$. Si a_1,..,a_q sont des racines deux à deux distincts de P de multiplicité respective n_1,..,n_q alors $(X-a_1)^{n_1} \cdots (X-a_p)^{n_q}|P$.

Théorème 2.8

Considérons $n \in \mathbb{N}$. Tout polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ de degré n admet au plus n racines deux à deux distinctes.

Remarque 2.9

Remarquons alors que le polynôme nul est l'unique polynôme de $\mathbb{K}[X]$ qui admet une infinité de racines dans $\mathbb{K}$. Très souvent pour montrer que deux polynômes sont égaux $P = Q$ nous étudions le polynôme $R = P - Q$ et nous montrons que R a plus de racines que son degré.

2.3 Polynôme scindé et corps algébriquement clos

Définition 2.10. Nous disons que $P \in \mathbb{K}[X]$ est **scindé sur** $\mathbb{K}$ si est seulement si il est constant ou est un produit de polynômes de degré un de $\mathbb{K}[X]$.
En d'autres termes P est scindé ssi il existe des scalaires (pouvant être égaux) a, α_1,..,α_d tels que

$$P = a\prod_{i=1}^{d}(X-\alpha_i)$$

où a est le coefficient dominant de P.

Remarque 2.11 (*Relations racines et coefficients*)

Remarquons que

$$\begin{aligned}(X-\alpha_1)(X-\alpha_2) &= X^2-(\alpha_1+\alpha_2)X+\alpha_1\alpha_2\\ (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3) &= X^3-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)X^2\\ &\quad+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)X\\ &\quad-\alpha_1\alpha_2\alpha_3\end{aligned}$$

et cela se généralise aisément pour tout polynôme scindé. Ainsi les coefficients d'un polynôme scindé sont parfaitement déterminés par ses racines ! Cela permet de calculer rapidement des expressions algébriques des racines sans les connaître.

Exemple : Considérons $P = 11 + X + X^3$ et soient a, b et c ses racines complexes. Calculer $(a+b+c)^6$ et $a^3+b^3+c^3$.

Les polynômes scindés plaisent car ils sont constitués de "briques élémentaires" très simples. Donc les endroits où tous les polynômes sont scindés jouent un rôle en algèbre.

Définition 2.12. Nous disons qu'un corps commutatif $\mathbb{K}$ est un **corps algébriquement clos** si tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré supérieur ou égal à un admet une racine dans $\mathbb{K}$.

Proposition 2.13

Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos alors tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est scindé.

Contre-Exemple : $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas algébriquement clos puisque $X^2-2 \in \mathbb{Q}[X]$ n'admet pas de racines dans $\mathbb{Q}$ et $X^2+3 \in \mathbb{R}[X]$ n'a pas de racines dans $\mathbb{R}[X]$.

Théorème 2.14 (*Théorème de d'Alembert-Gauss*)

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 admet une racine dans $\mathbb{C}$.
Ainsi $\mathbb{C}$ est algébriquement clos et tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

Exemple : [Racines n^{eme} de l'unité !] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^n - 1 = (X-1)(X-\omega)\cdots(X-\omega^{n-1}) \quad \text{où} \quad \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$$

et les ω^k sont appelés les racines n^{eme} de l'unité.

3 Polynôme dérivé d'un polynôme

3.1 Dérivation d'un polynôme

Définition 3.1. Soit $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_nX^n$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Nous appelons **polynôme dérivé de** P le polynôme noté P' défini par

$$P' = \sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)a_{n+1}X^n.$$

Remarque 3.2

Plus clairement, $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d$ alors $P' = a_1 + 2a_2X + \cdots + da_dX^{d-1}$. Ainsi la définition de dérivée d'un polynôme agit comme la dérivée des fonctions polynômes réelles. MAIS c'est une définition algébrique et n'a rien à voir avec la notion de taux d'accroissement.

Proposition 3.3

Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$ et α et β dans $\mathbb{K}$.

1. $(\alpha P+\beta Q)' = \alpha P' + \beta Q'$.
2. $(PQ)' = P'Q + PQ'$.
3. $(P\circ Q)' = (P'\circ Q)\times Q'$.

Proposition 3.4

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P' = 0$ ssi P est constant.
Pour $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant $\deg(P') = \deg(P) - 1$.

3.2 Dérivées successives d'un polynôme

Définition 3.5. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, par récurrence nous définissons $P^{(0)} = P$, $P^{(1)} = P'$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P^{(k)} = \left(P^{(k-1)}\right)'$. Le polynôme $P^{(k)}$ est appelé **polynôme dérivé** k^{eme} **de** P.

Proposition 3.6

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

1. $\forall (k,q) \in \mathbb{N}^*,\ P^{(k+q)} = \left(P^{(k)}\right)^{(q)}$.
2. Si $k > \deg(P)$ alors $P^{(k)} = 0$.
3. Si $1 \leqslant k \leqslant \deg(P)$ alors $\deg(P^{(k)}) = \deg(P) - k$.

Théorème 3.7 (*Formules importantes*)

Pour tous P et Q de $\mathbb{K}[X]$, $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{K}$ nous avons les formules suivantes.

- **Formule de Leibniz**

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P^{(k)}Q^{(n-k)}.$$

- **Formule de Taylor**

$$P(X+a) = \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}X^k.$$

En particulier si $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors $a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

Remarque 3.8 (*Un avant-goût d'analyse*)

La formule de Taylor sont très puissantes puisque la translation par a se traduit uniquement en terme de valeur des dérivées en a, ce qui rend l'étude locale des fonctions polynômes efficace et leur utilité en analyse.

3.3 Dérivation et multiplicité des racines

Un seul mais important résultat ici.

Théorème 3.9

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$. a est une racine de multiplicité n de P si et seulement si $P(a) = P'(a) = ..P^{(n-1)}(a) = 0$ et $P^{(n)}(a) \neq 0$.