Algèbre 3
TD 5
Matrices

Licence 2 MAE 2020-2021

Université Paris Descartes

Marc Briant

Dans tout ce TD, $(\mathbb{K}, +, .)$ **désigne un corps commutatif.**

Applications linéaires, matrices et changement de base

Exercice 1 *: Écrire des applications linéaires sous forme de matrices*

Dans chacun des cas suivants écrire la matrice de l'application linéaire f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

1) $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (x+y, y-2x+z)$ dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

2) $\forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3,\ f(x_1,x_2,x_3) = (x_2+x_3, x_3+x_1, x_1+x_2)$ dans $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ f(M) = AM$ dans $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ f(M) = MA$ dans $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5) Soit $a \in \mathbb{C}^*$, $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = z + a\bar{z}$ dans $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = (1, i)$ base du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$.

Solution. Si nous avons une base $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$ et une base $\mathcal{B}' = (f_1, .., f_p)$ il faut se souvenir de la définition de la matrice de f dans ces bases. C'est tout simplement un tableau de nombre dans lequel la j^{eme} colonne contient les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $(f_1, .., f_p)$. Par exemple si

$$f(e_1) = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + \cdots + a_{p1}f_p$$

alors la première colonne de la matrice sera

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix}$$

et donc la matrice finale sera :

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{n2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}} & \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \begin{array}{c} \to f_1 \\ \to f_2 \\ \vdots \\ \to f_p \end{array} \end{array}$$

L'exercice ici demande donc seulement de savoir calculer des fonctins sur des bases, c'est de la lecture d'énoncé et de savoir revenir sous forme de CL de vecteurs de $\mathcal{B}'$.

1) Calculons f sur la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ et écrivons-le comme une CL de la base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ avec $e'_1 = (1,0)$ et $e'_2 = (0,1)$. C'est un calcul direct

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0,0) = (1,-2) = e'_1 - 2e'_2 \\ f(e_2) &= f(0,1,0) = (1,1) = e'_1 + e'_2 \\ f(e_3) &= f(0,0,1) = (0,1) = e'_2. \end{aligned}$$

Et ainsi nous remplissons la matrice

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2)Calculons f sur la base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ où $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$ et écrivons-le comme une CL de la même base $\mathcal{B}$. C'est un calcul direct

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0,0)=(0,1,1)=0.e_1+e_2+e_3 \\ f(e_2) &= f(0,1,0)=(1,0,1)=e_1+0.e_2+e_3 \\ f(e_3) &= f(0,0,1)=(1,1,0)=e_1+e_2+0.e_3 \end{aligned}$$

Et ainsi nous remplissons la matrice

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

3) Cela paraît un peu plus délicat parce que nous partons dans des matrices mais conservons en tête ce qu'est un écriture sur la base et tout ira bien ! La base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est $\mathcal{B}=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ et nous rappelons que

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\quad E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\quad E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\quad E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à calculer et à faire bien attention à l'ordre des vecteurs dans la base $\mathcal{B}$!

$$\begin{aligned} f(E_{11}) &= AE_{11}=\begin{pmatrix}-1&0\\2&0\end{pmatrix}=-E_{11}+0.E_{12}+2E_{21}+0.E_{22} \\ f(E_{12}) &= AE_{12}=\begin{pmatrix}0&-1\\0&2\end{pmatrix}=0.E_{11}-E_{12}+0.E_{21}+2E_{22} \\ f(E_{21}) &= AE_{21}=\begin{pmatrix}2&0\\-4&0\end{pmatrix}=2E_{11}+0.E_{12}-4E_{21}+0.E_{22} \\ f(E_{22}) &= AE_{22}=\begin{pmatrix}0&2\\0&-4\end{pmatrix}=0.E_{11}+2E_{12}+0.E_{21}-4E_{22}. \end{aligned}$$

Et ainsi nous remplissons la matrice

$$M_{\mathbf{B},\mathbf{B}}(f)=\begin{pmatrix}-1&0&2&0\\0&-1&0&2\\2&0&-4&0\\0&2&0&-4\end{pmatrix}$$

4) Cela paraît un peu plus délicat parce que nous partons dans des matrices mais conservons en tête ce qu'est un écriture sur la base et tout ira bien ! La base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est $\mathcal{B}=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ et nous rappelons que

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\quad E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\quad E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\quad E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à calculer et à faire bien attention à l'ordre des vecteurs dans la base $\mathcal{B}$!

$$\begin{aligned} f(E_{11}) &= E_{11}A=\begin{pmatrix}-1&2\\0&0\end{pmatrix}=-E_{11}+2E_{12}+0.E_{21}+0.E_{22} \\ f(E_{12}) &= E_{12}A=\begin{pmatrix}2&-4\\0&0\end{pmatrix}=2E_{11}-4E_{12}+0.E_{21}+0.E_{22} \\ f(E_{21}) &= E_{21}A=\begin{pmatrix}0&0\\-1&2\end{pmatrix}=0.E_{11}+0.E_{12}-E_{21}+2E_{22} \\ f(E_{22}) &= E_{22}A=\begin{pmatrix}0&0\\2&-4\end{pmatrix}=0.E_{11}+0.E_{12}+2E_{21}-4E_{22}. \end{aligned}$$

Et ainsi nous remplissons la matrice

$$M_{\mathbf{B},\mathbf{B}}(f)=\begin{pmatrix}-1&2&0&0\\2&-4&0&0\\0&0&-1&2\\0&0&2&-4\end{pmatrix}$$

5) Calculons f sur la base $\mathcal{B}=(1,i)$ et écrivons-le comme une CL de la même base $\mathcal{B}$. On nous parle de $a\in\mathbb{C}^*$ donc écrivons-le entièrement en partie réelle et partie imaginaire : $a=R_a+iI_a$. Maintenant c'est un calcul direct

$$\begin{aligned} f(1) &= 1+(R_a+iI_a)\overline{1}=1+(R_a+iI_a)=(1+R_a).1+I_a.i \\ f(i) &= i+(R_a+iI_a)\overline{i}=i-(R_a+iI_a)i=I_a.1+(1-R_a).i \end{aligned}$$

Et ainsi nous remplissons la matrice

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}1+R_a&I_a\\I_a&1-R_a\end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Nous nous plaçons dans $E = \mathbb{R}^3$ pour lequel nous considérons une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et un endomorphisme f. Dans chacun des cas suivants nous donnons $M_{\mathcal{B}}(f)$ et une nouvelle base $\mathcal{B}'$. Écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ puis $M_{\mathcal{B}'}(f)$.

1) $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B}' = ((1,0,-1),(0,1,1),(1,0,1))$.

2) $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B}' = ((1,0,1),(-1,1,0),(1,1,1))$.

3) $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ définis par $e'_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $e'_2 = e_2$ et $e'_3 = e_3$. Les nombres a, b et c sont réels.

4) $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \beta^2 + \alpha^2 \cos\theta & \alpha \sin\theta & \alpha\beta(1-\cos\theta) \\ -\alpha \sin\theta & \cos\theta & \beta \sin\theta \\ \alpha\beta(1-\cos\theta) & -\beta\sin\theta & \alpha^2 + \beta^2\cos\theta \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ définis par $e'_1 = \beta e_1 + \alpha e_3$, $e'_2 = e_2$ et $e'_3 = -\alpha e_1 + \beta e_3$. Les nombres α et β sont des complexes tels que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ tandis que θ est un réel.

Solution. Dans ce genre d'exercice purement calculatoire on n'oublie pas de bien connaître ses définitions de matrice de passage ! Ensuite il faut se rappeler que la matrice de passage de $\mathbf{B}$ à $\mathbf{B}'$ correspond à la matrice où les vecteurs de $\mathbf{B}'$ sont écrits dans la base $\mathcal{B}$: $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.
L'important est de se rappeler que

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B},}(f) P$$

avec $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$. Si l'on ne retient que cela par coeur alors nous retrouvons nos bonnes définitions de matrice de passage en comprenant ce qui rentre et ce qui sort dans une matrice :

$$\text{sort } f \text{ dans } \mathcal{B}' \leftarrow \{ \quad \overbrace{M_{\mathcal{B}'}(f)}^{\downarrow\text{entre } f(\mathcal{B}')}$$

et donc on sait comment construire P :

$$\left(\text{sort } \mathcal{B}' \leftarrow \{ \quad \overbrace{P^{-1}}^{\downarrow\text{entre } \mathcal{B}} \right) \left(\text{sort } f \text{ dans } \mathcal{B} \leftarrow \{ \quad \overbrace{M_{\mathcal{B}}(u)}^{\downarrow\text{entre } f(\mathcal{B})} \right) \left(\text{sort } \mathcal{B} \leftarrow \{ \quad \overbrace{P}^{\downarrow\text{entre } \mathcal{B}'} \right)$$

et on doit bien choisir $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.
Une fois la matrice $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ écrite, pour trouver $M_{\mathcal{B}'}(f)$ nous avons deux options

a) Trouver $(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ et pour cela il faut soit inverser la matrice directement (méthode de Gauss par exemple) soit, ce qui est souvent plus simple, écrire les vecteurs de $\mathbf{B}$ dans la bas $\mathcal{B}'$. Une fois que nous avons cette matrice nous n'avons plus qu'à utiliser la formule de multiplication.

b) Nous calculons les valeurs de $f(\mathcal{B}')$, par exemple si $\mathcal{B}' = (e'_1, .., e'_n)$ alors on calcule $f(e'_j) = M_{\mathcal{B}}(f) e'_j$ que l'on exprime comme une CL des e'_i et cela nous donnera $M_{\mathcal{B}'}(f)$ comme dans l'exercice 1.

Ces deux méthodes sont équivalentes et dépendent de nos goûts personnels : préfère-t-on multiplier entre elles trois matrices ou bien regarder chaque vecteur individuellement ? Le correcteur de ces exercices a une forte préférence pour la deuxième option donc il va écrire les deux stratégies pour la question 1 puis ne faire que la stratégie 2 pour les autres.

1) Pour la matrice de passage il suffit d'écrire $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} e'_1 &= (1,0,-1) = e_1 + 0.e_2 - e_3 \\ e'_2 &= (0,1,1) = 0.e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_3 &= (1,0,1) = e_1 + 0.e_2 + e_3 \end{aligned}$$

ce qui conduit par simple lecture à

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- <u>Stratégie a) de multiplication.</u> Trouvons alors $(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ en écrivant (e_1, e_2, e_3) sur la base $\mathcal{B}'$.

$$\left\{ \begin{array}{l} e'_1 = e_1 - e_3 \\ e'_2 = e_2 + e_3 \\ e'_3 = e_1 + e_3 \end{array} \right. \text{ dans } \mathcal{B} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e_1 = e'_1 + e_3 \\ e_2 = e'_2 - e_3 \\ e'_3 = e'_1 + 2e_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e_1 = \frac{1}{2}(e'_1 + e'_3) \\ e_2 = e'_2 - e_3 \\ e_3 = \frac{1}{2}(e'_3 - e'_1) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e_1 = \frac{1}{2}e'_1 + 0.e'_2 + \frac{1}{2}e'_3 \\ e_2 = \frac{1}{2}e'_1 + e'_2 + \frac{-1}{2}e'_3 \\ e_3 = \frac{-1}{2}e'_1 + 0.e'_2 + \frac{1}{2}e'_3 \end{array} \right.$$

Ainsi nous avons trouvé

$$(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Il ne nous reste donc plus qu'à calculer

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{gros calcul faisable} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Stratégie b) de calcul de $f(\mathcal{B}')$. Nous allons calculer et écrire $f(e'_j)$ directement sur la base e'_j.

$$\begin{aligned} f(e'_1) &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2e'_1 + 0.e'_2 + 0.e'_3 \\ f(e'_2) &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.e'_1 + 2e'_2 + 0.e'_3 \\ f(e'_3) &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0.e'_1 + 0.e'_2 + 4e'_3 \end{aligned}$$

et donc la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ devient une simple recopie

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2) Pour la matrice de passage il suffit d'écrire $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} e'_1 &= (1,0,1) = e_1 + 0.e_2 + e_3 \\ e'_2 &= (-1,1,0) = -e_1 + e_2 + 0.e_3 \\ e'_3 &= (1,1,1) = e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned}$$

ce qui conduit par simple lecture à

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous allons calculer et écrire $f(e'_j)$ directement sur la base e'_j.

$$\begin{aligned} f(e'_1) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e'_1 + 0.e'_2 + 0.e'_3 \\ f(e'_2) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.e'_1 + e'_2 + 0.e'_3 \\ f(e'_3) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e'_1 + 0.e'_2 + e'_3 \end{aligned}$$

et donc la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ devient une simple recopie

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Pour la matrice de passage il suffit d'écrire $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_2 &= 0.e_1 + e_2 + 0.e_3 \\ e'_3 &= 0.e_1 + 0.e_2 + e_3 \end{aligned}$$

ce qui conduit par simple lecture à

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous allons calculer et écrire $f(e'_j)$ directement sur la base e'_j.

$$\begin{aligned}
f(e'_1) &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b+c\\a+b+c\\a+b+c\end{pmatrix} = (a+b+c)e'_1 + 0.e'_2 + 0.e'_3 \\
f(e'_2) &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\c\\a\end{pmatrix} = a_1e'_1 + a_2e'_2 + a_3e'_3 \\
f(e'_3) &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\a\\b\end{pmatrix} = b_1e'_1 + b_2e'_2 + b_3e'_3.
\end{aligned}$$

Ici c'est donc un peu moins direct car les coordonnées sur la base $\mathcal{B}'$ n'apparaissent pas de manière évidente. Mais un simple système suffira à en venir à bout !

$$\begin{pmatrix}b\\c\\a\end{pmatrix} = a_1e'_1 + a_2e'_2 + a_3e'_3 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = a_1 \\ c = a_1 + a_2 \\ a = a_1 + a_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 = b \\ a_2 = c - b \\ a_3 = a - b \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix}b\\c\\a\end{pmatrix} = be'_1 + (c-b)e'_2 + (a-b)e'_3$$

$$\begin{pmatrix}c\\a\\b\end{pmatrix} = b_1e'_1 + b_2e'_2 + b_3e'_3 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c = b_1 \\ a = b_1 + b_2 \\ b = b_1 + b_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b_1 = c \\ b_2 = a - c \\ b_3 = b - c \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix}c\\a\\b\end{pmatrix} = ce'_1 + (a-c)e'_2 + (b-c)e'_3$$

et donc la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ devient une simple recopie

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} a+b+c & b & c \\ 0 & c-b & a-c \\ 0 & a-b & b-c \end{pmatrix}.$$

4) Pour la matrice de passage il suffit d'écrire $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
e'_1 &= \beta e_1 + 0.e_2 + \alpha e_3 \\
e'_2 &= 0.e_1 + e_2 + 0.e_3 \\
e'_3 &= -\alpha e_1 + 0.e_2 + \beta e_3
\end{aligned}$$

ce qui conduit par simple lecture à

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \beta & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Nous allons calculer et écrire $f(e'_j)$ directement sur la base e'_j en se rappelant que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

$$\begin{aligned}
f(e'_1) &= \begin{pmatrix} \beta^2 + \alpha^2\cos\theta & \alpha\sin\theta & \alpha\beta(1-\cos\theta) \\ -\alpha\sin\theta & \cos\theta & \beta\sin\theta \\ \alpha\beta(1-\cos\theta) & -\beta\sin\theta & \alpha^2 + \beta^2\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta\\0\\\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta\\0\\\alpha\end{pmatrix} = e'_1 + 0.e'_2 + 0.e'_3 \\
f(e'_2) &= \begin{pmatrix} \beta^2 + \alpha^2\cos\theta & \alpha\sin\theta & \alpha\beta(1-\cos\theta) \\ -\alpha\sin\theta & \cos\theta & \beta\sin\theta \\ \alpha\beta(1-\cos\theta) & -\beta\sin\theta & \alpha^2 + \beta^2\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\sin\theta\\\cos\theta\\-\beta\sin\theta\end{pmatrix} = 0.e'_1 + \cos\theta e'_2 - \sin\theta e'_3 \\
f(e'_3) &= \begin{pmatrix} \beta^2 + \alpha^2\cos\theta & \alpha\sin\theta & \alpha\beta(1-\cos\theta) \\ -\alpha\sin\theta & \cos\theta & \beta\sin\theta \\ \alpha\beta(1-\cos\theta) & -\beta\sin\theta & \alpha^2 + \beta^2\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\alpha\\0\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\alpha\cos\theta\\\sin\theta\\\beta\cos\theta\end{pmatrix} = 0.e'_1 + \sin\theta e'_2 + \cos\theta.e'_3
\end{aligned}$$

et donc la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ devient une simple recopie

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 : *Matrices simples de projecteurs et symétries*

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $u \in L(E)$ non nul.

1) Supposons que u est un projecteur, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$ de E et $r \in [\![0, n]\!]$ tels que

$$\forall i \in [\![1, r]\!],\ u(e_i) = 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![r+1, n]\!],\ u(e_i) = e_i.$$

Donner la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

2) Supposons que u est une symétrie, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$ de E et $r \in [\![0, n]\!]$ tels que

$$\forall i \in [\![1, r]\!],\ u(e_i) = -e_i \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![r+1, n]\!],\ u(e_i) = e_i.$$

Donner la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

Solution. Nous nous souvenons que les deux seules choses que l'on peut faire quand on a un projecteur p sont

a) $p \circ p = p$ donc on compose par u dès que nous le pouvons ! On peut se rappeler aussi grâce à ça que $\forall x \in \mathrm{Im}\,(p)\,,\ p(x) = x$ mais cela se retrouve en composant.

b) $E = \mathrm{Ker}\,(p) \oplus \mathrm{Im}\,(()\,p)$.

Ensuite pour uns symétrie s on ne se rappelle que de deux propriétés

a) $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ donc on compose par s dès que nous le pouvons !

b) Soit on se rappelle que $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$ est un projecteur et on travaille avec p soit on se rappelle que $E = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$.

Avec cela en tête les exercices projections et symétries deviennent rapidement très directs.

1) Soit u un projecteur. On nous parle de base alors partons sur le fait que

$$E = \mathrm{Ker}\,(u) \oplus \mathrm{Im}\,(u)\,.$$

Prenons alors $(e_1, .., e_r)$ de $\mathrm{Ker}\,(u)$ et nous pouvons également prendre une base notée $(e_{r+1}, .., e_n)$ de $\mathrm{Im}\,(u)$. Comme $\mathrm{Ker}\,(u)$ et $\mathrm{Im}\,(u)$ sont supplémentaires il vient que $(e_1, .., e_n)$ est une base de E. Dans cette base nous pouvons aisément calculer $u(e_i)$. En effet,

- Pour $1 \leqslant i \leqslant r$, $e_i \in \mathrm{Ker}\,(u)$ donc $u(e_i) = 0_E$;
- Pour $r+1 \leqslant i \leqslant n$, $e_i \in \mathrm{Im}\,(u)$ donc $u(e_i) = e_i$.

Ceci est bien ce qu'il était demandé de prouver. Nous pouvons même écrire u dans cette base $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$, en l'écrivant par blocs :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0_{\mathcal{M}_r(\mathbb{K})} & | & 0_{\mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{K})} \\ - & - & - \\ 0_{\mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})} & | & I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

2) Soit u une symétrie. On nous parle de base alors partons sur le fait que

$$E = \mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)\,.$$

Prenons alors $(e_1, .., e_r)$ de $\mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{Id}_E)$ et nous pouvons également prendre une base notée $(e_{r+1}, .., e_n)$ de $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$. Comme $\mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires il vient que $(e_1, .., e_n)$ est une base de E. Dans cette base nous pouvons aisément calculer $u(e_i)$. En effet,

- Pour $1 \leqslant i \leqslant r$, $e_i \in \mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{Id}_E)$ donc $u(e_i) = -e_i$;
- Pour $r+1 \leqslant i \leqslant n$, $e_i \in \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$ donc $u(e_i) = e_i$.

Ceci est bien ce qu'il était demandé de prouver. Nous pouvons même écrire u dans cette base $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$, en l'écrivant par blocs :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -I_r & | & 0_{\mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{K})} \\ - & - & - \\ 0_{\mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})} & | & I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Du calcul matriciel bête et méchant

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants nous définissons une matrice $A \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{K})$. Calculer son rang puis en appelant f l'application linéaire représentée par A dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ déterminer des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad 2) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Solution. Comme dit en en-tête de cette série d'exercices, nous devons faire du calcul, du calcul et du calcul.
Tout d'abord nous nous souvenons que pour calculer rapidement le rang d'une matrice nous faisons des opérations élémentaires

sur ses lignes et ses colonnes jusqu'à obtenir une matrice dont nous connaissons aisément le nombre de vecteurs colonnes libres. Le mieux étant d'arriver à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 & * & * & \vdots & * & * & * \\ & \ddots & * & \vdots & * & * & * \\ 0_{\mathbb{K}} & & a_r & \vdots & * & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & & & \\ & 0_{\mathbb{K}} & & \vdots & & 0_{\mathbb{K}} & \\ & & & \vdots & & & \end{pmatrix}$$

avec les $a_i \neq 0_{\mathbb{K}}$ et auquel cas le rang est r.
Souvenons-nous également que si nous connaissons $M_{\mathcal{B}}(f)$ et que nous connaissons les coordonnées de X dans la base $\mathcal{B}$, que l'on écrit sous forme matrice colonne :

$$M_{\mathcal{B}}(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

alors nous connaissons les coordonnées de $f(X)$ dans la base $\mathcal{B}$ et elles sont données par la matrice colonne

$$M_{\mathcal{B}}(f(X)) = M_{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}(X).$$

Ainsi nous avons

$$X \in \mathrm{Ker}\,(f) \quad \Leftrightarrow \quad M_{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}(X) = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} \end{pmatrix}$$

$$X \in \mathrm{Im}\,(f) \quad \Leftrightarrow \quad \exists Y \in E, \quad M_{\mathcal{B}}(X) = M_{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}(Y)$$

Et toutes les doubles inclusions que nous avions l'habitude de faire jusqu'ici restent valables mais les calculs deviennent directs et matriciels. Ce qu'il y a de bien avec les matrices c'est que nous savons que leur j^{eme} colonne est la valeur de $f(e_j)$ et ainsi par définition même

$$\text{si } M_{\mathcal{B}}(f) = (C_1|C_2|\cdots|C_n) \text{ alors } \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(c_1, c_2, \ldots, c_n) \text{ où } c_j \text{ est le vecteur tel que } M_{\mathcal{B}}(c_j) = C_j.$$

1)• Le rang de A.
Essayons de trouver des opérations élémentaires qui rende la matrice la plus simple possible

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc obtenu une matrice de la forme souhaitée et cela nous donne directement que

$$\mathrm{rg}\,(A) = 2.$$

Remarquons que la dernière étape n'était pas obligatoire car la famille $\Big((1,3,5,7),(1,1,1,1)\Big)$ est clairement libre.

• Ker (f) où $A = M_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_4}(f)$ où $\mathcal{B}_3$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_4$ celle de $\mathbb{R}^4$.
Comme dans le TD4, essayons de mettre Ker (f) sous forme de vect. Dans le TD4 nous faisions tout par double inclusion, essayons ici de le faire directement avec de belles et rigoureuses équivalences.

$$X \in \mathrm{Ker}\,(f) \Leftrightarrow \left(M_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_4}(f)M_{\mathcal{B}_3}(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ X = (x,y,z) \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ X = (x,y,z) \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} x+2y+z=0 \\ 3x+4y+z=0 \\ 5x+6y+z=0 \\ 7x+8y+z=0 \end{array} \right. \right) \Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ X = (x,y,z) \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} z=-x-2y \\ 2x+2y=0 \\ 4x+4y=0 \\ 6x+6y=0 \end{array} \right. \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ X = (x,y,z) \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} z=-x-2y \\ x=-y \end{array} \right. \right) \Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ X = (x,y,z) \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} z=-y \\ x=-y \end{array} \right. \right)$$

$$\Leftrightarrow (\exists y \in \mathbb{R},\ X = (-y,y,-y)) \Leftrightarrow (\exists y \in \mathbb{R},\ X = y(-1,1,-1))$$

$$\Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\,((-1,1,-1)).$$

Nous venons donc de montrer que $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\,((-1,1,-1))$ et donc comme $(-1,1,-1)$ n'est pas nul c'est bien une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$.
Remarquons que des équivalences rigoureuses ne sont pas nécessairement moins longues à écrire que des doubles inclusions...

• Im (f) où $A = M_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_4}(f)$ où $\mathcal{B}_3$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_4$ celle de $\mathbb{R}^4$.
Comme dans le TD4, essayons de mettre $\mathrm{Im}\,(f)$ sous forme de vect. Dans le TD4 nous faisions tout par double inclusion mais comme nous l'avons décrit au début de l'exercice, par définition d'une matrice nous lisons de suite

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,((1,3,5,7),(2,4,6,8),(1,1,1,1)).$$

Comme $\mathrm{rg}\,(A) = 2$ nous savons que ces trois vecteurs sont liés et nous voyons que

$$(1,1,1,1) = (2,4,6,8) - (1,3,5,7)$$

donc $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,((1,3,5,7),(2,4,6,8))$ et la famille $((1,3,5,7),(2,4,6,8))$ est libre donc c'est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

1)• Le rang de A.
Essayons de trouver des opérations élémentaires qui rende la matrice la plus simple possible

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - \frac{3}{2}L_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc obtenu une matrice de la forme souhaitée et cela nous donne directement que

$$\mathrm{rg}\,(A) = 3.$$

• Ker (f) où $A = M_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_4}(f)$ où $\mathcal{B}_3$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_4$ celle de $\mathbb{R}^4$.
Comme dans le TD4, essayons de mettre $\mathrm{Ker}\,(f)$ sous forme de vect. Dans le TD4 nous faisions tout par double inclusion, essayons ici de le faire directement avec de belles et rigoureuses équivalences.

$$X \in \mathrm{Ker}\,(f) \Leftrightarrow \left(M_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_4}(f) M_{\mathcal{B}_3}(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ X = (x,y,z) \text{ et } \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ X = (x,y,z) \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y - z = 0 \\ 4x + 3y - z = 0 \\ -y + 2z = 0 \\ 3x + 3y - 2z = 0 \end{array} \right. \right) \Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ X = (x,y,z) \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} z = 2x + 2y \\ 2x + y = 0 \\ 4x + 3y = 0 \\ -x - y = 0 \end{array} \right. \right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ X = (x,y,z) \text{ et } x = y = z = 0 \right) \Leftrightarrow X = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Nous venons donc de montrer que $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Notons que nous aurions pu le trouver très rapidement puisque grâce au théorème du rang

$$3 = \dim\,(E) = \dim\,(\mathrm{Ker}\,(f)) + \mathrm{rg}\,(f) = \dim\,(\mathrm{Ker}\,(f)) + \mathrm{rg}\,(A) = \dim\,(\mathrm{Ker}\,(f)) + 3$$

ce qui donnait directement que $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$...

• Im (f) où $A = M_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_4}(f)$ où $\mathcal{B}_3$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_4$ celle de $\mathbb{R}^4$.
Comme dans le TD4, essayons de mettre $\mathrm{Im}\,(f)$ sous forme de vect. Dans le TD4 nous faisions tout par double inclusion mais comme nous l'avons décrit au début de l'exercice, par définition d'une matrice nous lisons de suite

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,((2,4,0,3),(2,3,-1,3),(-1-,1,2,-2)).$$

Comme $\mathrm{rg}\,(A) = 3$ nous savons que le rang de cette famille de vecteurs est 3 et donc elle est libre et ainsi c'est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Exercice 5 : *Calculer des puissances grâce à la nilpotence*

Dans chacun des cas suivants, calculer B^n et en déduire une expression pour A^n.

$$1)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - I_3 \qquad 2)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution. Calculer des puissances de matrice est très important en physique, ingénieurie, finance,... Mais comme nous le ressentons avec la formule de mutliplication de matrice, cela peut s'avérer très coûteux en temps de calcul d'ordinateur dès que les matrices sont de grandes tailles. En revanche les matrices nilpotentes deviennent nulles au bout d'un certain nombre de multiplications par elles-mêmes et cela est extrêmement utile en pratique pour déduire des puissances de matrices plus compliquées !

Notons que nous aimons bien également les puissances de matrices diagonales puisque si

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, .., \lambda_p) \text{ alors} D^n = \mathrm{diag}(\lambda_1^n, .., \lambda_p^n).$$

1) • Par définitions nous avons

$$B = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer B^2 et B^3 ci-dessus on a deux options :

* La bourrine que marche tout le temps mais qui peut être longue : on multiplie les matrices directement
* L'astucieuse qui consiste à considérer que B est la matrice dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ d'un endomorphisme f et on regarde ce que fait cet endormorphisme pour trouver $B^2 = M_{\mathcal{B}}(f \circ f)$ et $B^n = M_{\mathcal{B}}(f \circ f \circ ... \circ f)$. On n'a plus qu'à remplir ensuite les matrices B^2 et B^3 comme en exercice 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \right. \underset{\text{Applique } f}{\rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} f(e_1) = 0 \\ f(e_2) = 2e_1 \\ f(e_3) = 3e_1 + 2e_2 \end{array} \right. \underset{\text{Applique } f}{\rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} f^2(e_1) = 0 \\ f^2(e_2) = 2f(e_1) = 0 \\ f^2(e_3) = 3f(e_1) + 2f(e_2) = 4e_1 \end{array} \right. \underset{\text{Applique } f}{\rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} f^3(e_1) = 0 \\ f^3(e_2) = 0 \\ f^3(e_3) = 0 \end{array} \right.$$

Il faut alors conclure pour B^n pour tout n (nous n'oublions bien sûr pas le cas particulier $n = 0$...). Nous venons donc de montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B^n = \left\{ \begin{array}{ll} I_3 & \text{si } n = 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } n = 1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } n = 2 \\ 0_{M_3(\mathbb{R})} & \text{si } n \geqslant 3 \end{array} \right. .$$

• Revenons alors à A. Nous savons que $A = B + I_3$ et nous voulons calculer $A^n = (A = B + I_3)^n$. Cela nous fait penser à la formule du binôme mais on ne peut l'appliquer que si les matrices dans la parenthèse commutent. Ici bien sûr $BI_3 = I_3 B$ donc on peut appliquer la binôme en se rappelant que pour tout entier k : $I_3^k = I_3$.

$$\begin{aligned} \forall n \geqslant 2, \quad A^n = (B + I_3)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k = B^0 + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2 + 0_{M_3(\mathbb{R})} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 3n + 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et nous pouvons conclure

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \left\{ \begin{array}{ll} I_3 & \text{si } n = 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } n = 1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2n & n + 2n^2 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } n \geqslant 2 \end{array} \right. .$$

2) • Par définitions nous avons

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer B^2ci-dessus on a deux options :

* La bourrine que marche tout le temps mais qui peut être longue : on multiplie les matrices directement
* L'astucieuse qui consiste à considérer que B est la matrice dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ d'un endomorphisme f et on regarde ce que fait cet endormorphisme pour trouver $B^2 = M_{\mathcal{B}}(f \circ f)$ et $B^n = M_{\mathcal{B}}(f \circ f \circ ... \circ f)$. On n'a plus qu'à remplir ensuite la matrice B^2 comme en exercice 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \right. \underset{\text{Applique } f}{\rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} f(e_1) = 0 \\ f(e_2) = 0 \\ f(e_3) = 2e_1 + e_2 \end{array} \right. \underset{\text{Applique } f}{\rightarrow} \left\{ \begin{array}{l} f^2(e_1) = 0 \\ f^2(e_2) = 0 \\ f^2(e_3) = 2f(e_1) + f(e_2) = 0 \end{array} \right.$$

Il faut alors conclure pour B^n pour tout n (nous n'oublions bien sûr pas le cas particulier $n=0$...). Nous venons donc de montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B^n = \begin{cases} I_3 & \text{si } n=0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } n=1 \\ 0_{M_3(\mathbb{R})} & \text{si } n \geqslant 3 \end{cases}.$$

- Revenons alors à A. Nous savons que $A = B + D$ avec D la matrice diagonale définie par

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

et nous voulons calculer $A^n = (A = B + D)^n$. Cela nous fait penser à la formule du binôme mais on ne peut l'appliquer que si les matrices dans la parenthèse commutent. Il faut donc vérifier d'abord si $DB = BD$. Deux simples calculs offrent

$$DB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B \text{ tandis que } BD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4B$$

et donc malheureusement la formule du binôme n'est pas utilisable ici... Il va falloir donc faire cela à la main et voir ce que l'on obtient, en espérant trouver une relation simple (récurrence par exemple). Attention, lorsque nous recherchons une formule de récurrence il est important de conserver les constantes, ne pas les additionner ou multiplier explicitement sinon nous perdrons de vu comment ça marche ! Nous nous rappelons que $B^2 = 0_{M_3(\mathbb{R})}$ et donc

$$\begin{aligned} A^n &= (B+D)^n = (B+D)(B+D)(B+D)^{n-2} = (B^2 + BD + DB + D^2)(B+D)^{n-2} \\ &= ((1+4)B + D^2)(B+D)^{n-2} = ((1+4)B + D^2)(B+D)(B+D)^{n-3} = ((1+4)BD + D^2B + D^3)(B+D)^{n-3} \\ &= ((1+4)B + 4DB + D^3)(B+D)^{n-3} = ((1+4+4^2)B + D^3)(B+D)^{n-3} \end{aligned}$$

Il semblerait donc que

$$\forall n \geqslant 2, \quad A^n = (1 + 4 + \cdots + 4^{n-1})B + D^n$$

et donc montrons-le par récurrence

* Par récurrence montrons que $\mathcal{P}(n) : A^n = (1 + 4 + \cdots + 4^{n-1})B + D^n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.
* Initialisation : C'est vrai pour $n = 1$.
* Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie au rang $n \geqslant 1$. Alors il suffit de calculer

$$\begin{aligned} A^{n+1} = AA^n &= (B+D)\left((1+4+\cdots+4^{n-1})B + D^n\right) \\ &= (1+4+\cdots+4^{n-1})B^2 + BD^n + (1+4+\cdots+4^{n-1})DB + D^{n+1} \\ &= BD^n + (1+4+\cdots+4^{n-1})DB + D^{n+1}. \end{aligned}$$

  Or nous nous souvenons que $DB = B$ et ensuite $BD = 4B$ donc $BD^n = 4^nB$ et donc

$$A^{n+1} = 4^nB + (1+4+\cdots+4^{n-1})B + D^{n+1}$$

  ce qui nous donne bien que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Nous pouvons donc conclure, en se rappelant que

$$1 + 4 + \cdots + 4^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 4^k = \frac{4^n - 1}{4 - 1} = \frac{4^n - 1}{3} \text{ et que } D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{cases} I_3 & \text{si } n=0 \\ \dfrac{4^n-1}{3}B + D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\frac{4^n-1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4^n-1}{3} \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}.$$

Exercice 6 *: La finesse du pivot de Gauss...*

Dans chacun des cas suivants calculer A^{-1}.

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad 2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solution. La méthode du pivot de Gauss a été décrite dans le cours. Nous l'appliquons ici. C'est calculatoire et bourrin mais ça a le mérite d'être un algorithme qui fonctionne !
Nous effectuons donc des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A jusqu'à obtenir I_n et nous les copions sur la matrice I_n.

1) Nous mettons d'abord la première colonne sous forme $(1, 0, .., 0)$ puis la deuxième sous forme $(0, 1, 0, .., 0)$ etc...

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc trouvé $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Nous mettons d'abord la première colonne sous forme $(1, 0, .., 0)$ puis la deuxième sous forme $(0, 1, 0, .., 0)$ etc...

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons donc trouvé $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 : *Problèmes de commutation*

1) Trouver toutes les matrices qui commutent avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ où $\lambda_i \in \mathbb{K}$ sont deux à deux distincts.
2) Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution. Dans les problèmes où il faut "trouver tous les trucs tels que bidules" la meilleure des approches est souvent l'analyse-synthèse. On suppose qu'il y a un objet qui existe et on le débusque. Enfin, quand la propriété à vérifier doit être vraie "pour tout $M \in E$ alors il est souvent utile de l'appliquer pour $M = \{$les vecteurs de la base canonique$\}$.

1). On nous demande toutes les matrices qui commutent avec D donc on suppose qu'il y en a une qui existe !

• Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ tel que $MD = DM$. Nous allons tout simplement noter $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et regarder ce que valent les multiplications avec

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, .., \lambda_n) = (d_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \text{ où } d_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Soit nous l'écrivons sous forme de grosse matrice, soit nous regardons coefficient par coefficient. C'est la même chose, juste pas le même visuel, chacun·e choisit ce qu'il ou elle préfère. Nous faisons ici l'étude coefficient par coefficient pour changer un peu.

∗ Nous notons $MD = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et par définition de la multiplication nous savons que

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} d_{kj} = m_{ij} \lambda_j.$$

$*$ Nous notons $DM = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et par définition de la multiplication nous savons que

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} m_{kj} = \lambda_i m_{ij}.$$

$*$ Comme $MD = DM$ nous en concluons que pour tout i, j de $[\![1, n]\!]$ nous avons $a_{ij} = b_{ij}$ ce qui implique que

$$\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ m_{ij}\lambda_j = m_{ij}\lambda_i.$$

Comme $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $j \neq i$ nous en déduisons que

$$\forall i \neq j,\ m_{ij} = 0 \text{ et donc } M = \operatorname{diag}(m_{11}, .., m_{nn}).$$

• Ecrivons maintenant la synthèse et regardons si $MD = DM$ quand M est une matrice diagonale. D'après le cours nous savons que

$$\operatorname{diag}(m_{11}, .., m_{nn})\operatorname{diag}(\lambda_1, .., \lambda_n) = \operatorname{diag}(\lambda_1 m_{11}, .., \lambda_n m_{nn}) = \operatorname{diag}(\lambda_1, .., \lambda_n)\operatorname{diag}(m_{11}, .., m_{nn}).$$

• Nous concluons donc que les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec D sont les matrices diagonales.

2) • Supposons donc que $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ soit une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad AM = MA.$$

Comme cela est vrai pour toutes les matrices nous allons regarder ce que cela implique sur des matrices simples. Les plus basiques sont celles de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les matrices $E_{pq} = (\delta_{ip}\delta_{jq})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Il vient donc

$$\forall 1 \leqslant k, l \leqslant n, \quad E_{pq}A = AE_{pq}.$$

Soit nous l'écrivons sous forme de grosse matrice, soit nous regardons coefficient par coefficient. C'est la même chose, juste pas le même visuel, chacun·e choisit ce qu'il ou elle préfère. Nous faisons ici l'étude coefficient par coefficient pour changer un peu.

$*$ Nous notons $E_{pq}A = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et par définition de la multiplication nous savons que

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ip}\delta_{kq} a_{kj} = \delta_{ip} a_{qj} = \begin{cases} a_{qj} & \text{si } i = p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$*$ Nous notons $E_{pq}A = (c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et par définition de la multiplication nous savons que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kp}\delta_{jq} = a_{ip}\delta_{jq} = \begin{cases} a_{ip} & \text{si } j = q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

$*$ Comme nous avons $E_{pq}A = AE_{pq}$ il vient donc que $b_{ij} = c_{ij}$ pour tout i, j. Nous avons donc quatre cas à regarder

– Cas $i = p$ et $j = q$ alors $b_{pq} = a_{qq} = c_{pq} = a_{pp}$.
– Cas $i = p$ et $j \neq q$ alors $b_{pj} = a_{qj} = c_{pj} = 0$.
– Cas $i \neq p$ et $j = q$ alors $b_{iq} = 0 = c_{iq} = a_{ip}$.
– Cas $i \neq p$ et $j \neq q$ alors $0 = 0$.

Comme ceci est vrai pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$ et tout $1 \leqslant p, q \leqslant n$ il vient donc que $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$ et de plus $a_{11} = a_{22} = .. = a_{nn}$. Ainsi

$$A = \operatorname{diag}(a_{11}, .., a_{11}) = a_{11}I_n.$$

• Faisons le réciproque et considérons $A = \lambda I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$. Comme I_n commute avec toutes les matrices, il en est de même pour A.

• Nous concluons donc. Les seules matrices qui commutent avec toutes les matrices sont les matrices de la forme λI_n.

Des études plus abstraites

Exercice 8

Dans chacun des cas suivants montrer que F est un sous-ev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en expliciter une base et sa dimension.

1) $n = 2$ et $F \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \quad \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ M = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} & \frac{a-b}{2} \\ \frac{a-b}{2} & \frac{a+b}{2} \end{pmatrix} \right\}$.

2) $n = 3$ et $F \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \quad \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \right\}$.

Solution. Nous revenons ici à des exercices dignes des TD1, 2, 3 et 4 donc même si les objets étudiés sont des matrices nous recommençons les mêmes rédactions. Bien entendu, comme on nous demande des bases, nous allons écrire F comme un vect d'une famille ce qui montrera à la fois que F admet une famille génératrice et qu'en plus c'est bien un sous-ev. Comme à chaque fois pour faire cela, nous allons faire une double inclusion (nous pourrions également faire de belles équivalences tant qu'elles sont rigoureusement exactes !). Enfin, nous devrons extraire une famille libre de cette famille génératrice afin d'avoir une base et donc trouver la dimension de F.

1)• Soit $M \in F$, cela signifie qu'il existe a et b dans $\mathbb{R}^2$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} & \frac{a-b}{2} \\ \frac{a-b}{2} & \frac{a+b}{2} \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{A_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{A_2}.$$

Ainsi $M \in \text{Vect}(A_1, A2)$ et donc $F \subset \text{Vect}(A_1, A_2)$.

• Faisons alors l'inclusion réciproque. Si $M \in \text{Vect}(A_1, A_2)$ alors il existe λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{R}$ tels que

$$M = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} & \frac{\lambda_1-\lambda_2}{2} \\ \frac{\lambda_1-\lambda_2}{2} & \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} \end{pmatrix}$$

et donc $M \in F$ ce qui permet de dire que $F = \text{Vect}(A_1, A_2)$.

• La famille (A_1, A_2) est donc génératrice de F et il faut regarder si elle est libre. Soient λ_1 et λ_2 des réels :

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} & \frac{\lambda_1-\lambda_2}{2} \\ \frac{\lambda_1-\lambda_2}{2} & \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} = 0 \\ \frac{\lambda_1-\lambda_2}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Ainsi (A_1, A_2) est libre donc c'est une base de F d'où $\dim(F) = 2$.

2)• Soit $M \in F$, cela signifie qu'il existe a, b et c dans $\mathbb{R}^2$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A_2} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A_3}.$$

Ainsi $M \in \text{Vect}(A_1, A2, A_3)$ et donc $F \subset \text{Vect}(A_1, A_2, A_3)$.

• Faisons alors l'inclusion réciproque. Si $M \in \text{Vect}(A_1, A_2, A_3)$ alors il existe λ_1, λ_2 et λ_3 dans $\mathbb{R}$ tels que

$$M = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

et donc $M \in F$ ce qui permet de dire que $F = \text{Vect}(A_1, A_2, A_3)$.

• La famille (A_1, A_2, A_3) est donc génératrice de F et il faut regarder si elle est libre. Soient λ_1, λ_2 et λ_3 des réels :

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Ainsi (A_1, A_2, A_3) est libre donc c'est une base de F d'où $\dim(F) = 3$.

Exercice 9

Dans chacun des cas suivants calculer le rang des matrices A et B ainsi que leur trace. Déterminer ensuite si elles sont, ou non, équivalentes puis si elles sont, ou non, semblables

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

3) $A = \begin{pmatrix} u^2 & uv & uw \\ uv & v^2 & vw \\ uw & vw & w^2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où u, v et w sont trois complexes non nuls tels que $u^2 + v^2 + w^2 = 1$.

4) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(t) & \sinh(t) \\ 0 & \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$. On discutera suivant les valeurs du réel t.

Solution. Nous référons à la correction de l'exercice 4 pour calculer rapidement le rang d'une matrice avec la méthode du pivot. La trace est la somme des coefficients diagonaux. Nous rappelons également que

- A et B sont équivalentes ssi il existe P et Q inversibles telles que $A = PBQ$. IMPORTANT : deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.
- A et B sont semblables ssi il existe P inversible telle que $A = P^{-1}BP$.

ATTENTION : même si des matrices sont équivalentes et ont la même trace cela n'implique pas que ces matrices sont semblables ! Ainsi, pour savoir si A et B sont semblables nous devons voir si elles représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes. Nous devons donc soit trouver P tel que $A = P^{-1}BP$, soit écrire l'endormorphisme associé à A dans la base canonique et en déduire une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle $M_{\mathcal{B}'}(u)B$. Ces deux stratégies fonctionnent mais la multiplication matricielle est difficile car si on peut écrire $P = (p_{ij})$, il est en revanche difficile d'écrire P^{-1}.

1)• Ici nous n'avons pas besoin de faire l'algorithme car les rangs se trouvent très rapidement puisque par définition

$$\mathrm{rg}\,(A) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left((1,-2,-3),(1,-2,-3),(-1,2,3)\right)\right) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left((1,-2,-3),(-1,2,3)\right)\right)$$

et comme $(1,-2,-3) = -(-1,2,3)$

$$\mathrm{rg}\,(A) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left((1,-2,-3)\right)\right) = 1.$$

Tout aussi rapidement

$$\mathrm{rg}\,(B) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left((0,0,0),(1,0,0),(0,0,0)\right)\right) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left((1,0,0)\right)\right) = 1.$$

• Nous savons d'après le cours que A et B sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang. Ainsi A et B sont équivalentes.

• Calculons alors leur trace

$$\mathrm{tr}(A) = 1 - 2 + 3 = 2 \;\text{ et }\; \mathrm{tr}(B) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Si l'on avait l'existence de P inversible telle que $A = P^{-1}BP$ alors on aurait

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(P^{-1}BP) = \mathrm{tr}(BPP^{-1}) = \mathrm{tr}(B)$$

ce qui n'est pas donc A et B ne sont pas semblables.

2)• Nous savons déjà par la question précédente que $\mathrm{rg}\,(A) = 1$. Le rang de B ne semble pas immédiat donc nous allons faire l'algorithme

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\mathrm{rg}\,(B) = 3 \neq \mathrm{rg}\,(A)$ donc A et B ne peuvent être équivalentes et donc encore moins semblables. En revanche $\mathrm{tr}(A) = 2 = \mathrm{tr}(B)$.

3)• Si le $\mathrm{rg}\,(B) = 1$ est assez évident, le rang de A ne saute pas aux yeux donc nous allons utiliser l'algorithme.

$$\begin{pmatrix} u^2 & uv & uw \\ uv & v^2 & vw \\ uw & vw & w^2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{w}{u}L_1}{\rightarrow} \begin{pmatrix} u^2 & uv & uw \\ uv & v^2 & vw \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_3 - \frac{v}{u}L_1}{\rightarrow} \begin{pmatrix} u^2 & uv & uw \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces calculs sont possibles puisque $u \neq 0$ et donc nous avons donc $\mathrm{rg}\,(A) = 1$.

• Les matrices A et B sont de même rang donc elles sont équivalentes.

• Nous trouvons également

$$\mathrm{tr}(B) = 1 \;\text{ et }\; \mathrm{tr}(A) = u^2 + v^2 + w^2 = 1.$$

Pour savoir si A et B sont semblables nous devons voir si elles représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes. Posons alors $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et notons f l'endomorphisme associé à A sur la base $\mathcal{B}$. Nous avons alors

$$f(e_1) = u^2e_1 + uve_2 + uwe_3 = (u^2, uv, uw) \quad f(e_2) = uve_1 + v^2e_2 + vwe_3 = (uv, v^2, vw) \quad f(e_3) = uwe_1 + vwe_2 + w^2e_3 = (uw, vw, w^2).$$

Est-il alors possible de construire une base $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ telle que $M_{\mathcal{B}'}(f) = B$ c'est-à-dire trois vecteurs tels que

$$f(e_1') = e_1' \quad f(e_2) = 0_{\mathbb{R}^3} \quad f(e_3') = 0_{\mathbb{R}^3}?$$

Le calcul du rang nous aide bien évidemment puisqu'il nous indique quelles sont les annulations !

$$\frac{v}{u}f(e_1) - f(e_2) = 0 \quad \frac{w}{u}f(e_1) - f(e_3) = 0$$

Ainsi nous avons déjà

$$f\Big(\underbrace{\frac{v}{u}e_1 - e_2}_{e_2'}\Big) = f\Big(\underbrace{\frac{w}{u}e_1 - e_3}_{e_3'}\Big) = 0.$$

Pour trouver (ou montrer qu'il n'existe pas) e_1' tel que $f(e_1') = e_1'$ nous pouvons soit résoudre le système

$$f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 u^2 + \lambda_2 uv + \lambda_3 uw = \lambda_1 \\ \lambda_1 uv + \lambda_2 v^2 + \lambda_3 vw = \lambda_2 \\ \lambda_1 uw + \lambda_2 vw + \lambda_3 w^2 = \lambda_3 \end{cases}$$

soit se donner un peu de temps et voir que

$$\begin{aligned} \frac{u}{w}f(e_1) + \frac{v}{w}f(e_2) &= \left(\frac{u^3}{w} + \frac{uv^2}{w}\right)e_1 + \left(\frac{u^2v}{w} + \frac{v^3}{w}\right)e_2 + \left(u^2+v^2\right)e_3 = \frac{u}{w}(1-w^2)e_1 + \frac{v}{w}(1-w^2)e_2 + (1-w^2)e_3 \\ &= \left(\frac{u}{w}e_1 + \frac{v}{w}e_2 + e_3\right) - f(e_3). \end{aligned}$$

Ainsi

$$f\Big(\underbrace{\frac{u}{w}e_1 + \frac{v}{w}e_2 + e_3}_{e_1'}\Big) = \frac{u}{w}e_1 + \frac{v}{w}e_2 + e_3 = e_1'.$$

Nous avons donc trouvé une base (e_1', e_2', e_3') de $\mathbb{R}^3$ telle que $M_{\mathcal{B}'}(f) = B$ donc A et B sont semblables.

4)• Pour le rang de A nous pouvons utiliser l'algorithme puisque

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

qui nous donne donc que $\mathrm{rg}\,(A) = 3$.
Ensuite nous voyons clairement pour la matrice B que

$$\mathrm{rg}\,(B) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left((1,0,0),(0,\cos t,\sinh t),(0,\sinh t,\cosh t)\right)\right) = 1 + \dim\left(\mathrm{Vect}\left((\cos t,\sinh t),(\sinh t,\cosh t)\right)\right).$$

Regardons alors si ces deux vecteurs sont libres. Soient λ_1 et λ_2 tels que

$$\begin{aligned} \lambda_1(\cosh t,\sinh t) + \lambda_2(\sinh t,\cosh t) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1\cosh t + \lambda_2\sinh t = 0 \\ \lambda_1\sinh t + \lambda_2\cosh t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{\sinh t}{\cosh t}\lambda_2 \\ \lambda_2\left(\cosh t - \frac{\sinh^2 t}{\cosh t}\right) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{\sinh t}{\cosh t}\lambda_2 \\ \lambda_2\frac{1}{\cosh t} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi ces deux vecteurs sont libres et nous trouvons $\mathrm{rg}\,(B) = 3$.

• Les deux matrices ont le même rang donc elles sont équivalentes.

• Calculons alors

$$\mathrm{tr}(A) = 3 \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}(B) = 1 + 2\cosh t.$$

Nous savons que deux matrices semblables ont la même trace donc si $\cosh t \neq -1$ les matrices A et B ne sont pas semblables. Regardons alors si $\cosh t = 1$ c'est-à-dire $t = 0$. A ce moment-là nous avons $B = I_3$ mais alors pour toute matrice P inversible nous avons $P^{-1}BP = I_3 \neq A$. Ainsi dans tous les cas A et B ne sont pas semblables.

Exercice 10 : *Concluons avec des matrices sur les matrices...*

Nous fixons $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que (A, I_n) soit libre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Nous définissons

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array}.$$

a) Montrer que $\Phi \in L(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ et calculer $\mathrm{tr}(\Phi(M))$ pour tout M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Déterminer la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c) Montrer que $\dim\mathrm{Ker}(\Phi) \geqslant 2$ et en déduire $\mathrm{rg}(\Phi)$.

Solution. Le but de cet exercice est de tester si nous arrivons à rester dans l'abstraction de l'algèbre et des ev puisqu'il nous donne à étudier un endomorphisme dans l'espace des matrices. Nous restons solides sur nos connaissances de bases sur les ev : concentrons-nous sur les définitions pour ne pas écrire n'importe quoi. Mais c'est la seule difficulté ! Sauf pour le rang de Φ qui nécessite un vrai travail d'algèbre et de réflexion.

1) • Nous devons montrer qu'une application est bien définie et linéaire dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Que Φ soit bien définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est évident puisque ce ne sont que des multiplications et additions de matrices.
Prenons alors α et β deux réels et M_1 et M_2 deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculons

$$\Phi(\alpha M_1 + \beta M_2) = A(\alpha M_1 + \beta M_2) - (\alpha M_1 + \beta M_2)A = \alpha(AM_1 - M_1A) + \beta(AM_2 - M_2A) = \alpha\Phi(M_1) + \beta\Phi(M_2)$$

ce qui indique bien que $\Phi \in L(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.

• Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ nous avons $\Phi(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donc nous pouvons calculer sa trace :

$$\mathrm{tr}\,(\Phi(M)) = \mathrm{tr}\,(AM - MA) = \mathrm{tr}\,(AM) - \mathrm{tr}\,(MA) = \mathrm{tr}\,(AM) - \mathrm{tr}\,(AM) = 0.$$

2) Nous nous rappelons que la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$. Il suffit donc de calculer Φ de ces vecteurs et de les écrire sur la base $\mathcal{B}$. Afin de pouvoir calculer explicitement nos matrices nous appelons $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 2}$.

$$\Phi(E_{11}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.E_{11} - a_{12}E_{12} + a_{21}E_{21} + 0.E_{22}$$
$$\Phi(E_{12}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} \\ 0 & a_{21} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -a_{21}.E_{11} + (a_{11} - a_{22})E_{12} + 0.E_{21} + a_{21}E_{22}$$
$$\Phi(E_{21}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} = a_{12}.E_{11} + 0.E_{12} + (a_{22} - a_{11})E_{21} - a_{12}.E_{22}$$
$$\Phi(E_{22}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 0.E_{11} + a_{12}E_{12} - a_{21}E_{21} + 0.E_{22}.$$

Pour remplir la matrice il suffit alors de recopier les vecteurs colonnes

$$M_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & -a_{21} & a_{12} & 0 \\ -a_{12} & (a_{11} - a_{22}) & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & (a_{22} - a_{11}) & -a_{21} \\ 0 & a_{21} & -a_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

3)• Faisons attention à la question posée ! On ne nous demande pas de trouver la dimension de $\mathrm{Ker}\,(\Phi)$ mais de montrer qu'elle est supérieure à 2. Pour cela il suffit de montrer qu'il existe deux matrices qui sont libres dans $\mathrm{Ker}\,(\Phi)$. Les deux matrices données dans l'énoncé sont A et I_2. Regardons :

$$\Phi(A) = A^2 - A^2 = 0_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)} \quad \text{et} \quad \Phi(I_2) = A - A = 0_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)}.$$

Ainsi A et I_2 sont dans $\mathrm{Ker}\,(\Phi)$ ce qui implique puisque Φ est linéaire que $\mathrm{Vect}\,(A, I_2) \subset \mathrm{Ker}\,(\Phi)$. Comme (A, I_2) est une famille libre nous en déduisons bien que

$$\dim\,(\mathrm{Ker}\,(\Phi)) \geqslant \dim\,(\mathrm{Vect}\,(A, I_2)) = 2.$$

Pour celles et ceux qui n'auraient pas vu la subtilité de l'énoncé, pour trouver la dimension il nous faut une base et ainsi il faut écrire Ker (Φ) comme un vect d'une famille libre. Pour trouver le noyau de Φ il faut résoudre $\Phi(M) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. Pour ce faire plusieurs solutions que nous avons déjà vues. Servons-nous ici de la matrice de Φ.

$$\begin{aligned}
M \in \mathit{Ker}\,(\Phi) &\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, M_{\mathcal{B}}(M) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \ \mathit{et}\ M_{\mathcal{B}}(\Phi) M_{\mathcal{B}}(M) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, M_{\mathcal{B}}(M) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \ \mathit{et} \left\{\begin{array}{l} -a_{21}y + a_{12}z = 0 \\ -a_{12}x + (a_{11} - a_{22})y + a_{12}t = 0 \\ a_{21}x + (a_{22} - a_{11})z - a_{21}t = 0 \\ a_{21}y - a_{12}z = 0 \end{array}\right.\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, M_{\mathcal{B}}(M) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \ \mathit{et} \left\{\begin{array}{l} 2a_{21}y = 0 \\ -a_{12}x + (a_{11} - a_{22})y + a_{12}t = 0 \\ a_{21}x + (a_{22} - a_{11})z - a_{21}t = 0 \\ 2a_{12}z = 0 \end{array}\right.\right)
\end{aligned}$$

Nous devrions donc séparer les cas si les a_{12} et a_{21} sont nuls ou non. C'est du calcul mais ça fonctionnerait également.

• Nous devons alors trouver le rang de Φ et cette question est plus difficile car nous avons plein d'options à regarder. Φ étant un endomorphisme dans un ev de dimension finie, appliquons le théorème du rang :

$$\dim\,(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4 = \dim\,(\mathrm{Ker}\,(\Phi)) + \mathrm{rg}\,(\Phi)\,.$$

Ainsi le rang de Φ ne peut valoir que 0, 1 ou 2.

* Peut-on avoir $\mathrm{rg}\,(\Phi) = 0$? Dans ce cas, $\Phi = 0$ et ainsi pour toute matrice M nous avons $\Phi(M) = 0$ et donc A commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. D'après l'exercice 7.2) nous aurions $A = \lambda I_2$ et donc A et I_2 liées ce qui n'est pas. Ainsi $\mathrm{rg}\,(\Phi) = 0$ n'est pas possible.

* Peut-on avoir $\mathrm{rg}\,(\Phi) = 1$? Regardons si nous pouvons trouver 2 vecteurs libres qui n'annulent pas Φ. Nous voyons que

$$\Phi(E_{12}) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_{21} = 0 \\ a_{11} = a_{22} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \Phi(E_{21}) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_{12} = 0 \\ a_{11} = a_{22} \end{array} \right. .$$

Nous ne pouvons avoir $a_{12} = a_{21} = 0$ et $a_{11} = a_{22}$ puisque sinon $A = a_{11}I_2$ et (A, I_2) sont liées ce qui n'est pas.

– Soit $a_{12} \neq 0$ et alors $\Phi(E_{21}) \neq 0$ et $\Phi(E_{22}) \neq 0$ et de plus en regardant les coordonnées dans la base canonique

$$\Phi(E_{21}) = (a_{12}, 0, (a_{22} - a_{11}), -a_{12}) \quad \text{et} \quad \Phi(E_{22}) = (0, a_{12}, -a_{21}, 0)$$

nous voyons que $(\Phi(E_{21}), \Phi(E_{22}))$ est libre et dans $\mathrm{Im}\,(\Phi)$ donc $\dim(\mathrm{Im}\,(\Phi)) \geqslant 2$.

– Soit $a_{21} \neq 0$ et alors $\Phi(E_{12}) \neq 0$ et $\Phi(E_{11}) \neq 0$ et de plus en regardant les coordonnées dans la base canonique

$$\Phi(E_{12}) = (-a_{21}, (a_{11} - a_{22}), 0, a_{21}) \quad \text{et} \quad \Phi(E_{11}) = (0, -a_{12}, +a_{21}, 0)$$

nous voyons que $(\Phi(E_{12}), \Phi(E_{11}))$ est libre et dans $\mathrm{Im}\,(\Phi)$ donc $\dim(\mathrm{Im}\,(\Phi)) \geqslant 2$.

– Soit $a_{11} \neq a_{22}$ et dans ce cas-là nous trouvons que $(\Phi(E_{12}), \Phi(E_{21}))$ est libre et dans $\mathrm{Im}\,(\Phi)$ donc $\dim(\mathrm{Im}\,(\Phi)) \geqslant 2$.

Il est donc impossible que $\mathrm{rg}\,(\Phi) = 1$.

Nous avons donc démontré que $\mathrm{rg}\,(\Phi) = 2$ et donc également que $\dim(\mathrm{Ker}\,(\Phi)) = 2$.