Université Paris Descartes **Analyse 3**
1^{er} semestre 2018-2019

Partiel

Mercredi 14 novembre 2018 - Durée : 1h30

Tout document, calculatrice, téléphone portable et autre appareil électronique est interdit. L'énoncé comporte 4 exercices indépendants.

Une part substantielle de la note portera sur la rédaction. Une juxtaposition d'équations sans liens logiques ni quantificateurs appropriés ne se verra pas attribuer une note élevée.

On attend que vous citiez précisément les théorèmes utilisés. En l'absence de la totalité des hypothèses requises, votre résultat sera considéré comme faux.

Exercice 1 (Question de cours) :

1. Enoncer le Théorème des gendarmes.
2. Démontrer ce théorème.

Exercice 2 : Soit la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n e^{-u_n}, \ n \geq 0. \tag{1}$$

1. Déterminer le signe de u_n pour tout $n \geq 0$.
   Correction : On prouve que $u_n > 0$ pour tout $n \geq 0$ par récurrence : c'est vrai pour $n = 0$ par hypothèse. Supposons que $u_n > 0$ pour un certain n, alors $u_{n+1} = u_n e^{-u_n} > 0$. D'où la propriété par récurrence.
2. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
   Correction : Pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n = u_n\left(e^{-u_n} - 1\right) \leq 0$, car $u_n \geq 0$. Donc la suite (u_n) est décroissante.
3. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0 pour $n \to \infty$.
   Correction : Ainsi, (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge, de limite $\ell \geq 0$. Par continuité de $x \mapsto xe^{-x}$, cette limite vérifie nécessairement $\ell = \ell e^{-\ell}$, i.e. $\ell(1 - e^{-\ell}) = 0$. Dans les deux cas, $\ell = 0$. Donc la suite (u_n) tend vers 0 quand $n \to \infty$.
4. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ fixé. Donner un équivalent de la suite $v_n = u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ pour $n \to \infty$.
   Correction : Calculons :

   $$v_n = u_n^\beta e^{-\beta u_n} - u_n^\beta = u_n^\beta\left(e^{-\beta u_n} - 1\right).$$

   Comme $u_n \to 0$, en utilisant un développement limité de $u \mapsto e^{-u}$ en $u = 0$, il vient, pour $n \to \infty$

   $$e^{-\beta u_n} = 1 - \beta u_n + o(u_n)$$

   et donc

   $$v_n = u_n^\beta\left(-\beta u_n + o(u_n)\right) = -\beta u_n^{\beta+1} + o(u_n^{\beta+1})$$

   et donc (possible car $u_n \neq 0$ pour tout n)

   $$v_n \sim_{n\to\infty} -\beta u_n^{\beta+1}.$$
5. Déterminer β de telle sorte que $(v_n)_{n\geq 0}$ admette une limite finie non nulle pour $n \to \infty$.
   Correction : On prend $\beta = -1$: le calcul précédent montre que $v_n \sim_{\to\infty} 1$ et donc $\lim_{n\to\infty} v_n = 1$.
6. En déduire un équivalent de la suite (u_n). *On rappelle pour cette question la propriété de Cesàro : si une suite (v_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors sa moyenne de Cesàro $\frac{v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}}{n}$ aussi.*
   Correction : La suite $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ est donc convergente de limite 1. Sa moyenne de Cesaro converge donc aussi vers 1 et on a donc $\frac{v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}}{n} \to 1$. Or cette dernière quantité est égale à $\frac{1}{nu_n} - \frac{1}{nu_0}$. Par conséquent,

   $$u_n \sim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.$$

Exercice 3 : Dans tout cet exercice, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie la relation suivante :

$$\exists \alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[, \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \ |f(x) - f(y)| \leq \alpha |f(x) - x| + \alpha |f(y) - y|. \qquad (2)$$

Le but de cet exercice est de montrer que f admet un unique point fixe, c'est-à-dire un unique réel l vérifiant

$$f(l) = l.$$

1. Montrer que si ce point fixe existe, il est unique.
   Correction : Prenons deux points fixes l_1 et l_2 et montrons que $l_1 = l_2$. En appliquant la propriété à $x = l_1$ et $y = l_2$, il vient $|f(l_1) - f(l_2)| \leq \alpha |f(l_1) - l_1| + \alpha |f(l_2) - l_2|$. Or $f(l_i) = l_i$ pour $i = 1, 2$, donc $|l_1 - l_2| = 0$ et donc $l_1 = l_2$.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère la suite récurrente définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$,
   $$|u_{n+1} - u_n| \leq k |u_n - u_{n-1}|, \qquad (3)$$
   où
   $$k = \frac{\alpha}{1 - \alpha}.$$
   Correction : Appliquons la propriété à $x = u_n$ et $y = u_{n-1}$: il vient $|f(u_n) - f(u_{n-1})| \leq \alpha |f(u_n) - u_n| + \alpha |f(u_{n-1}) - u_{n-1}|$ et donc $|u_{n+1} - u_n| \leq \alpha |u_{n+1} - u_n| + \alpha |u_n - u_{n-1}|$. Ainsi $(1 - \alpha) |u_{n+1} - u_n| \leq \alpha |u_n - u_{n-1}|$ et donc $|u_{n+1} - u_n| \leq k |u_n - u_{n-1}|$ puisque $1 - \alpha > 0$.
3. En déduire que $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$ puis que, pour tout $q \geq p \geq 1$,
   $$|u_q - u_p| \leq \frac{k^p - k^q}{1 - k} |u_1 - u_0|.$$
   Correction : La première inégalité se déduit de la question précédente par une récurrence évidente. Par ailleurs, pour tout $q \geq p \geq 1$, par inégalité triangulaire,
   $$|u_q - u_p| \leq \sum_{j=p}^{q-1} |u_{j+1} - u_j| \leq \sum_{j=p}^{q-1} k^j |u_1 - u_0| = \frac{k^p - k^q}{1 - k} |u_1 - u_0|.$$
4. En déduire que (u_n) est convergente. On note l sa limite.
   Correction : Notons que $k = \frac{\alpha}{1-\alpha} < 1$ car $\alpha < \frac{1}{2}$. L'inégalité précédente implique $|u_q - u_p| \leq \frac{k^p}{1-k} |u_1 - u_0|$. Comme $k^p \to 0$ quand $p \to \infty$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $p \geq n_0$, $k^p < (1 - k) \frac{\varepsilon}{|u_1 - u_0| + 1}$. Donc pour ce n_0, pour tout $q \geq p \geq n_0$, $|u_p - u_q| < \varepsilon$. Ainsi (u_n) est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc convergente, de limite l.
5. Montrer que pour tout $n \geq 0$
   $$|f(l) - u_{n+1}| \leq \alpha |f(l) - l| + \alpha |u_{n+1} - u_n|. \qquad (4)$$
   Correction : Appliquons la propriété à $x = l$ et $y = u_n$: il vient $|f(l) - f(u_n)| \leq \alpha |f(l) - l| + \alpha |f(u_n) - u_n|$ et donc $|f(l) - u_{n+1}| \leq \alpha |f(l) - l| + \alpha |u_{n+1} - u_n|$.

6. En déduire que $f(l) = l$.
Correction : Toutes quantités étant convergentes dans cette inégalité, il vient, pour $n \to \infty$, $|f(l) - l| \leq \alpha |f(l) - l|$ et donc $f(l) = l$ car $\alpha < 1$.

Exercice 4 : 1. Soit A une partie de $\mathbb{N}$ non vide.

(a) Montrer que A (en tant que partie de $\mathbb{R}$) admet une borne inférieure $\inf A \in \mathbb{R}$.

Correction : A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (par hypothèse) et minorée par 0. Donc par axiome de l'analyse, A admet une borne inférieure.

(b) Rappeler la caractérisation de la borne inférieure d'un ensemble par les ε.
Correction : Soit $I \in \mathbb{R}$. Alors $I = \inf(A)$ si et seulement si I est un minorant de A et si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $I \leq a < I + \varepsilon$.

(c) Soit $n = \lfloor \inf A \rfloor$ la partie entière de $\inf A$. Montrer que, dans ce cas, $\inf A = n \in A$. *On pourra s'aider de la question (b) pour un ε bien choisi.* Conclure que $\inf A$ est le minimum de A.
Correction : Par définition de la partie entière, on a $n \leq \inf(A) < n + 1$. Choisissons $\varepsilon > 0$ de telle sorte que $n \leq \inf(A) < \inf(A) + \varepsilon < n + 1$. Il existe donc un élément a de A (et donc a est un entier) tel que $n \leq \inf(A) \leq a < n + 1$. Or, le seul entier dans $[n, n + 1[$ est n. Donc $a = n = \inf(A)$. Donc $\inf(A) = a \in A$, donc $\inf(A) = \min(A)$.

2. On souhaite dans cette question re-prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel. *Remarque importante : on suppose dans cette question qu'on ne connait rien sur $\sqrt{2}$, à part uniquement sa définition en tant que l'unique racine positive de $x^2 = 2$. Toute propriété élémentaire sur $\sqrt{2}$ que vous souhaiteriez utiliser dans votre démonstration doit être justifiée à partir de cette définition.*
Soit
$$A = \left\{ n \in \mathbb{N}^*, n\sqrt{2} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(a) Montrer qu'il s'agit de prouver que A est vide.
Correction : A est non vide si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ et donc si et seulement si $\sqrt{2}$ est rationnel.

On raisonne par l'absurde et on suppose que A est non vide. D'après la question 1., on note $k = \min(A)$.

(b) Montrer que $k(\sqrt{2} - 1) \in A$.
Correction : Soit $n = k(\sqrt{2} - 1)$. Alors, d'une part, $n = k\sqrt{2} - k$ et est donc un entier (a priori relatif) par différence de deux entiers. Or $k \geq 1$ et $\sqrt{2} - 1 > 0$ (car $2 > 1$). Donc en particulier, $n > 0$. C'est donc un entier strictement positif donc $n \in \mathbb{N}^*$. D'autre part, on a $n\sqrt{2} = 2k - k\sqrt{2}$ qui est donc un entier, par définition de $k \in A$. Donc $k(\sqrt{2} - 1) \in A$.

(c) Conclure à une contradiction.
Correction : Ceci est absurde car $\sqrt{2} - 1 < 1$ et donc $k(\sqrt{2} - 1) < k$ ce qui contredit la minimalité de k. Donc A est vide et $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

3. *Question bonus, hors-barème :* généraliser le raisonnement de la question 2. pour prouver l'assertion suivante : pour tout entier $m \geq 1$, $\sqrt{m}$ est soit un entier, soit un irrationnel.

Correction : On pose de même $A = \{n \in \mathbb{N}^*, n\sqrt{m} \in \mathbb{Z}\}$. Deux possibilités : soit A est vide auquel cas $\sqrt{m}$ est un irrationnel, soit A n'est pas vide. Dans ce cas, A admet un minimum k. On pose alors $k' := k(\sqrt{m} - \lfloor \sqrt{m} \rfloor) < k$. Deux possibilités : soit $\sqrt{m} = \lfloor \sqrt{m} \rfloor$, auquel cas $\sqrt{m}$ est un entier. Soit $\sqrt{m} > \lfloor \sqrt{m} \rfloor$, auquel cas $k' > 0$. De plus, c'est un entier car $k' = k\sqrt{m} - k \lfloor \sqrt{m} \rfloor$ donc $k' \in \mathbb{N}^*$. De plus, $\sqrt{m}k' = km - k\sqrt{m} \lfloor \sqrt{m} \rfloor$ est un entier, par différence de deux entiers. Donc $k' \in A$. Or $k' < k$, ce qui contredit la minimalité de k. Absurde. Donc la seule possibilité pour que A ne soit pas vide est que $\sqrt{m}$ soit un entier.

Fin de l'épreuve.