Chapitre 2 : Probabilités conditionnelles et indépendance

Nathaël Gozlan

7 octobre 2020

Introduction

La notion de probabilité conditionnelle permet de comprendre comment la probabilité d'un événement A est modifiée si on dispose de l'information qu'un autre événement B est réalisé. On parlera de *probabilité de A sachant B*, ou de *probabilité de A conditionnellement à B*.

Introduction

La notion de probabilité conditionnelle permet de comprendre comment la probabilité d'un événement A est modifiée si on dispose de l'information qu'un autre événement B est réalisé. On parlera de *probabilité de A sachant B*, ou de *probabilité de A conditionnellement à B*.

Exemple intuitif : on lance un dé équilibré et on s'intéresse à l'événement

$$A = \text{'Le résultat du tirage est pair.'}$$

On a $A = \{2, 4, 6\}$ et la probabilité de cet événement est donc $\mathbb{P}(A) = 1/2$.

Introduction

La notion de probabilité conditionnelle permet de comprendre comment la probabilité d'un événement A est modifiée si on dispose de l'information qu'un autre événement B est réalisé. On parlera de *probabilité de A sachant B*, ou de *probabilité de A conditionnellement à B*.

Exemple intuitif : on lance un dé équilibré et on s'intéresse à l'événement

$$A = \text{'Le résultat du tirage est pair.'}$$

On a $A = \{2, 4, 6\}$ et la probabilité de cet événement est donc $\mathbb{P}(A) = 1/2$.

Un observateur a accès au tirage et nous donne l'information partielle suivante : 'le résultat du tirage est > 3', mais il ne nous donne pas le résultat exact du tirage. Notons B cet événement.

Introduction

La notion de probabilité conditionnelle permet de comprendre comment la probabilité d'un événement A est modifiée si on dispose de l'information qu'un autre événement B est réalisé. On parlera de *probabilité de* A *sachant* B, ou de *probabilité de* A *conditionnellement à* B.

Exemple intuitif : on lance un dé équilibré et on s'intéresse à l'événement

$$A = \text{'Le résultat du tirage est pair.'}$$

On a $A = \{2, 4, 6\}$ et la probabilité de cet événement est donc $\mathbb{P}(A) = 1/2$.

Un observateur a accès au tirage et nous donne l'information partielle suivante : 'le résultat du tirage est > 3', mais il ne nous donne pas le résultat exact du tirage. Notons B cet événement.

Que peut on en déduire sur les chances de réalisation de l'événement A sachant que cet événement B est réalisé ?

Introduction

La notion de probabilité conditionnelle permet de comprendre comment la probabilité d'un événement A est modifiée si on dispose de l'information qu'un autre événement B est réalisé. On parlera de *probabilité de A sachant B*, ou de *probabilité de A conditionnellement à B*.

Exemple intuitif : on lance un dé équilibré et on s'intéresse à l'événement

$$A = \text{'Le résultat du tirage est pair.'}$$

On a $A = \{2, 4, 6\}$ et la probabilité de cet événement est donc $\mathbb{P}(A) = 1/2$.

Un observateur a accès au tirage et nous donne l'information partielle suivante : 'le résultat du tirage est > 3', mais il ne nous donne pas le résultat exact du tirage. Notons B cet événement.

Que peut on en déduire sur les chances de réalisation de l'événement A sachant que cet événement B est réalisé ?

L'univers des possibles se réduit maintenant à $B = \{4, 5, 6\}$ et donc la seule possibilité pour avoir un résultat pair est que le dé soit tombé sur 4 ou 6.
Intuitivement, la probabilité conditionnelle de A sachant B est donc $2/3$.

Plan

1. Probabilités conditionnelles et formules de Bayes
   - Probabilités conditionnelles
   - Formules de Bayes
2. Evénements indépendants
   - Indépendance de deux événements
   - Indépendance d'une famille d'événements

Probabilités conditionnelles

On se place dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Définition

Soit $B \subset \Omega$ un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. On appelle probabilité conditionnelle d'un événement $A \subset \Omega$ sachant B le nombre noté $\mathbb{P}(A|B)$ défini par

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Probabilités conditionnelles

On se place dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Définition

Soit $B \subset \Omega$ un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. On appelle probabilité conditionnelle d'un événement $A \subset \Omega$ sachant B le nombre noté $\mathbb{P}(A|B)$ défini par

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Remarquons que $\mathbb{P}(B|B) = 1$, ce qui est conforme à l'intuition puisqu'on on sait que B est réalisé.

Probabilités conditionnelles

On se place dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Définition

Soit $B \subset \Omega$ un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. On appelle probabilité conditionnelle d'un événement $A \subset \Omega$ sachant B le nombre noté $\mathbb{P}(A|B)$ défini par

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Remarquons que $\mathbb{P}(B|B) = 1$, ce qui est conforme à l'intuition puisqu'on on sait que B est réalisé.

Exemple : Revenons à l'exemple de l'introduction.
Le dé étant équilibré, on travaille avec la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Probabilités conditionnelles

On se place dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Définition

Soit $B \subset \Omega$ un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. On appelle probabilité conditionnelle d'un événement $A \subset \Omega$ sachant B le nombre noté $\mathbb{P}(A|B)$ défini par

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Remarquons que $\mathbb{P}(B|B) = 1$, ce qui est conforme à l'intuition puisqu'on on sait que B est réalisé.

Exemple : Revenons à l'exemple de l'introduction.
Le dé étant équilibré, on travaille avec la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Les événements considérés sont $B = \{4, 5, 6\}$ et $A = \{2, 4, 6\}$.

Probabilités conditionnelles

On se place dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Définition

Soit $B \subset \Omega$ un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. On appelle probabilité conditionnelle d'un événement $A \subset \Omega$ sachant B le nombre noté $\mathbb{P}(A|B)$ défini par

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Remarquons que $\mathbb{P}(B|B) = 1$, ce qui est conforme à l'intuition puisqu'on on sait que B est réalisé.

Exemple : Revenons à l'exemple de l'introduction.
Le dé étant équilibré, on travaille avec la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Les événements considérés sont $B = \{4, 5, 6\}$ et $A = \{2, 4, 6\}$.
On a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/2$ et $A \cap B = \{4, 6\}$ donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 2/6 = 1/3$.

Probabilités conditionnelles

On se place dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Définition

Soit $B \subset \Omega$ un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. On appelle probabilité conditionnelle d'un événement $A \subset \Omega$ sachant B le nombre noté $\mathbb{P}(A|B)$ défini par

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Remarquons que $\mathbb{P}(B|B) = 1$, ce qui est conforme à l'intuition puisqu'on on sait que B est réalisé.

Exemple : Revenons à l'exemple de l'introduction.
Le dé étant équilibré, on travaille avec la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Les événements considérés sont $B = \{4, 5, 6\}$ et $A = \{2, 4, 6\}$.
On a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/2$ et $A \cap B = \{4, 6\}$ donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 2/6 = 1/3$.
Finalement

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{2}{3},$$

ce qui est en accord avec le raisonnement intuitif.

Exercice

Soit B tel que $\mathbb{P}(B) > 0$; montrer que l'application $A \mapsto \mathbb{P}(A|B)$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Exercice

On tire successivement deux cartes sans remise d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité de tirer un as au deuxième coup ? Quelle est la probabilité de tirer un as au deuxième coup sachant qu'on en a tiré un au premier.

Formule des probabilités composées

Proposition (Formule des probabilités composées)

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_{n-1}) > 0$. On a

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

La formule des probabilités composées est très utile lorsqu'il y a une progression temporelle dans la suite d'événements $A_1, \ldots, A_n$, c'est-à-dire lorsque l'événement A_1 a lieu avant l'événement A_2 qui lui même a lieu avant l'événement A_3, etc...

Exemple

Une urne contient deux boules rouges et trois noires. Trois personnes tirent successivement et sans remise une boule de l'urne. La première personne qui tire une boule rouge a gagné. Calculons la probabilité de gain de la 3 ème personne.

Exemple

Une urne contient deux boules rouges et trois noires. Trois personnes tirent successivement et sans remise une boule de l'urne. La première personne qui tire une boule rouge a gagné. Calculons la probabilité de gain de la 3 ème personne.

Notons A_1 l'événement 'La première personne a tiré une boule noire', A_2 l'événement 'La deuxième personne a tiré une boule noire' et A_3 l'événement 'La troisième personne a tiré une boule rouge.'

Exemple

Une urne contient deux boules rouges et trois noires. Trois personnes tirent successivement et sans remise une boule de l'urne. La première personne qui tire une boule rouge a gagné. Calculons la probabilité de gain de la 3 ème personne.

Notons A_1 l'événement 'La première personne a tiré une boule noire', A_2 l'événement 'La deuxième personne a tiré une boule noire' et A_3 l'événement 'La troisième personne a tiré une boule rouge.'

L'événement 'La troisième personne a gagné' est donc

$$G = A_1 \cap A_2 \cap A_3.$$

Exemple

Une urne contient deux boules rouges et trois noires. Trois personnes tirent successivement et sans remise une boule de l'urne. La première personne qui tire une boule rouge a gagné. Calculons la probabilité de gain de la 3 ème personne.

Notons A_1 l'événement 'La première personne a tiré une boule noire', A_2 l'événement 'La deuxième personne a tiré une boule noire' et A_3 l'événement 'La troisième personne a tiré une boule rouge.'

L'événement 'La troisième personne a gagné' est donc

$$G = A_1 \cap A_2 \cap A_3.$$

On a par ailleurs,

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{3}{5}, \qquad \mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{2}{3}$$

Exemple

Une urne contient deux boules rouges et trois noires. Trois personnes tirent successivement et sans remise une boule de l'urne. La première personne qui tire une boule rouge a gagné. Calculons la probabilité de gain de la 3 ème personne.

Notons A_1 l'événement 'La première personne a tiré une boule noire', A_2 l'événement 'La deuxième personne a tiré une boule noire' et A_3 l'événement 'La troisième personne a tiré une boule rouge.'

L'événement 'La troisième personne a gagné' est donc

$$G = A_1 \cap A_2 \cap A_3.$$

On a par ailleurs,

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{3}{5}, \qquad \mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{2}{3}$$

D'après la formule des probabilités composées, on en déduit que

$$\mathbb{P}(G) = \frac{3}{5}\frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{1}{5}.$$

Plan

1. Probabilités conditionnelles et formules de Bayes
   - Probabilités conditionnelles
   - Formules de Bayes
2. Evénements indépendants
   - Indépendance de deux événements
   - Indépendance d'une famille d'événements

Formule des probabilités totales

Définition (Système complet d'événements)

Une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements si les E_i sont deux à deux disjoints et si $\mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = 1$.

Formule des probabilités totales

Définition (Système complet d'événements)

Une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements si les E_i sont deux à deux disjoints et si $\mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = 1$.

Cas particulier : si les E_i forment une partition de Ω, alors $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

Formule des probabilités totales

Définition (Système complet d'événements)

Une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements si les E_i sont deux à deux disjoints et si $\mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = 1$.

Cas particulier : si les E_i forment une partition de Ω, alors $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

Proposition (Formule des probabilités totales)

Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements. Pour tout $A \subset \Omega$, on a

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A|E_n)\mathbb{P}(E_n).$$

Si $\mathbb{P}(E_n) = 0$, on pose $\mathbb{P}(A|E_n) = 0$ (par exemple) de sorte que la formule précédente a toujours bien un sens.

Exercice

On dispose de trois urnes.
La première contient 2 boules blanches et 3 noires.
La deuxième contient 4 boules blanches et 2 noires.
La troisième contient 3 boules blanches et 3 noires.

Exercice

On dispose de trois urnes.
La première contient 2 boules blanches et 3 noires.
La deuxième contient 4 boules blanches et 2 noires.
La troisième contient 3 boules blanches et 3 noires.

On tire uniformément au hazard un numéro d'urne, puis on tire une boule uniformément dans l'urne choisie. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

Formule de Bayes

Proposition (Formule de Bayes)

Soit A un événement et $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements.

$$\mathbb{P}(E_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|E_i)\mathbb{P}(E_i)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|E_i)\mathbb{P}(E_i)}{\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(A|E_n)\mathbb{P}(E_n)}.$$

Exercice

Un individu est tiré au hazard dans une population où l'on trouve une proportion de 10^{-4} de personnes atteintes d'une certaine maladie et il passe un test de dépistage.

On sait que la probabilité que le résultat du test soit positif quand un individu est malade est de 0.99 et quand il ne l'est pas de 0.001.
Le test de l'individu s'avère être positif ; quelle est la probabilité qu'il soit vraiment malade ?

Plan

1. Probabilités conditionnelles et formules de Bayes
   - Probabilités conditionnelles
   - Formules de Bayes
2. Evénements indépendants
   - Indépendance de deux événements
   - Indépendance d'une famille d'événements

Introduction

On tire une carte uniformément au hasard dans un jeu de 52 cartes et on s'intéresse à l'événement

$$R = \text{'La carte est un roi'}$$

Introduction

On tire une carte uniformément au hasard dans un jeu de 52 cartes et on s'intéresse à l'événement

$$R = \text{'La carte est un roi'}$$

La probabilité de R est

$$\mathbb{P}(R) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

Introduction

On tire une carte uniformément au hasard dans un jeu de 52 cartes et on s'intéresse à l'événement

$$R = \text{'La carte est un roi'}$$

La probabilité de R est

$$\mathbb{P}(R) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

Un observateur regarde le tirage avant nous et nous donne l'information suivante : la carte tirée est une figure. Notons F cet événement.

Introduction

On tire une carte uniformément au hasard dans un jeu de 52 cartes et on s'intéresse à l'événement

$$R = \text{'La carte est un roi'}$$

La probabilité de R est

$$\mathbb{P}(R) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

Un observateur regarde le tirage avant nous et nous donne l'information suivante : la carte tirée est une figure. Notons F cet événement.
On calcule facilement,

$$P(R|F) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Introduction

On tire une carte uniformément au hasard dans un jeu de 52 cartes et on s'intéresse à l'événement

$$R = \text{'La carte est un roi'}$$

La probabilité de R est

$$\mathbb{P}(R) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

Un observateur regarde le tirage avant nous et nous donne l'information suivante : la carte tirée est une figure. Notons F cet événement.
On calcule facilement,

$$P(R|F) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Dans cet exemple, on voit que la réalisation de F a une influence sur celle de A.

Introduction

On tire une carte uniformément au hasard dans un jeu de 52 cartes et on s'intéresse à l'événement

$$R = \text{'La carte est un roi'}$$

La probabilité de R est

$$\mathbb{P}(R) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

Un observateur regarde le tirage avant nous et nous donne l'information suivante : la carte tirée est une figure. Notons F cet événement.
On calcule facilement,

$$P(R|F) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Dans cet exemple, on voit que la réalisation de F a une influence sur celle de A.

Ce n'est pas toujours le cas. Imaginons en effet que l'observateur nous donne l'information que la carte tirée est un coeur. En notant C cet événement, on a cette fois

$$\mathbb{P}(R|C) = \frac{1}{13}.$$

Introduction

On tire une carte uniformément au hasard dans un jeu de 52 cartes et on s'intéresse à l'événement

$$R = \text{'La carte est un roi'}$$

La probabilité de R est

$$\mathbb{P}(R) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

Un observateur regarde le tirage avant nous et nous donne l'information suivante : la carte tirée est une figure. Notons F cet événement.
On calcule facilement,

$$P(R|F) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Dans cet exemple, on voit que la réalisation de F a une influence sur celle de A.

Ce n'est pas toujours le cas. Imaginons en effet que l'observateur nous donne l'information que la carte tirée est un coeur. En notant C cet événement, on a cette fois

$$\mathbb{P}(R|C) = \frac{1}{13}.$$

Autrement dit $\mathbb{P}(R|C) = \mathbb{P}(R)$. La réalisation de C ne change en rien les chances de réalisation de l'événement F. On dit que ces événements sont *indépendants.*

Plan

1. Probabilités conditionnelles et formules de Bayes
   - Probabilités conditionnelles
   - Formules de Bayes
2. Evénements indépendants
   - Indépendance de deux événements
   - Indépendance d'une famille d'événements

Indépendance de deux événements

Définition (Indépendance)

Deux événements A et B sont dits indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Indépendance de deux événements

Définition (Indépendance)

Deux événements A et B sont dits indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Proposition

Si $\mathbb{P}(B) > 0$, alors A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

Indépendance de deux événements

Définition (Indépendance)

Deux événements A et B sont dits indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Proposition

Si $\mathbb{P}(B) > 0$, alors A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

Démonstration.

En effet, $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. □

Indépendance de deux événements

Définition (Indépendance)

Deux événements A et B sont dits indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Proposition

Si $\mathbb{P}(B) > 0$, alors A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

Démonstration.

En effet, $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. $\square$

Remarque : L'indépendance n'est pas une notion purement ensembliste, mais dépend fortement du choix de la mesure de probabilité $\mathbb{P}$. On fera en particulier bien la distinction entre l'indépendance et l'incompatibilité (A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$).

Indépendance de deux événements

Proposition

Si A et B sont indépendants alors A et B^c sont indépendants. De même pour A^c et B, A^c et B^c.

Indépendance de deux événements

Proposition

Si A et B sont indépendants alors A et B^c sont indépendants. De même pour A^c et B, A^c et B^c.

Démonstration.

En effet

$$\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c).$$

Les autres cas se démontrent de la même manière. $\square$

Plan

1. Probabilités conditionnelles et formules de Bayes
   - Probabilités conditionnelles
   - Formules de Bayes
2. Evénements indépendants
   - Indépendance de deux événements
   - Indépendance d'une famille d'événements

Indépendance d'une famille d'événements

La notion d'indépendance s'étend à une famille quelconque d'événements :

Définition

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements.

1. On dit que les événements A_i *sont deux à deux indépendants* si $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$ pour tout $i \neq j$.
2. On dit que les événements A_i sont *mutuellement indépendants* si pour tout sous-ensemble fini $J \subset I$,

$$\mathbb{P}(\bigcap_{j\in J} A_j) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j).$$

Dans toute la suite de ce cours on travaillera *exclusivement* avec la notion d'indépendance mutuelle. L'indépendance mutuelle est une notion plus forte que l'indépendance deux à deux.

Exemple

Si on veut montrer que trois événements A, B, C sont mutuellement indépendants, on doit montrer que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\
\mathbb{P}(A \cap C) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) \\
\mathbb{P}(B \cap C) &= \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \\
\mathbb{P}(A \cap B \cap C) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).
\end{aligned}$$

Les trois premières égalités définissent seulement l'indépendance deux à deux des événements A, B, C.

Exercice

On lance deux fois de suite une pièce équilibrée. L'univers des possibles est donc $\Omega = \{P, F\}^2$ muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On considère les événements

$$\begin{aligned}
A &= \text{'La première pièce est tombée sur pile'} \\
B &= \text{'La deuxième pièce est tombée sur pile'} \\
C &= \text{'Une seule pièce est tombée sur pile'}.
\end{aligned}$$

Montrer que les événements A, B, C sont deux à deux indépendants mais ne sont pas mutuellement indépendants.