Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence de Mathématiques et Informatique 2020-2021

Analyse 3

TD4

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1/3\} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$.

Prouver, en utilisant uniquement la définition de la limite (avec ε et δ) que la fonction f est continue en 0.

Exercice 2. Calculer les limites suivantes :

1. $\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$ en 1
2. $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ en 1
3. $\dfrac{x \sin x}{1-\cos x}$ en 0
4. $\dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$ en 0
5. $\dfrac{\sin x - \sin(2x)}{x^2}$ en 0
6. $\dfrac{x^3+x+5}{5x^3+7x^2+8}$ en $+\infty$
7. $\sqrt{x^2+2x} - x$ en $+\infty$
8. $\dfrac{\tan(4x)}{\sin x}$ en 0
9. $\dfrac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}}$ en $+\infty$
10. $\dfrac{\sin x - \sin(5x)}{\sin x + \sin(5x)}$ en 0
11. $\dfrac{\sin(x \ln x)}{x}$ en 0^+

12. $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$

Exercice 3. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x-2)\tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to 0, x>0}\dfrac{(\sin x)^x-1}{x^x-1}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x}{2}}$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x^x-1}}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$ où $a\in\mathbb{R}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ avec $a,b>0$
7. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ avec $a,b>0$

Exercice 4. Étudier la limite à droite en 0 des fonctions suivantes :

1. $f(x)=E\left(\dfrac{1}{x}\right)$
2. $g(x)=xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$
3. $h(x)=x^2E\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Exercice 5. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=E(x)+\sqrt{x-E(x)}$. Étudier la continuité de f.

Exercice 6. Dire si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier :

1. $f(x)=(\sin x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x\neq 0$
2. $g(x)=\cos x+\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x\neq 0$
3. $h(x)=\sin(x+1)\ln|1+x|$ si $x\neq -1$

Exercice 7. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que $\inf(f, g)$ et que $\sup(f, g)$ sont continues.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$. Montrer que f est discontinue en tout point.

Exercice 10. Étant donnés une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et un réel x_0, on dit que f est *semi-continue inférieurement* (sci) en x_0 si et seulement si

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \alpha > 0)\ (\forall x \in \mathbb{R})\ (|x - x_0| < \alpha \Longrightarrow f(x) > f(x_0) - \varepsilon)$$

1. **1.1.** Montrer que si f est continue en un point, elle y est aussi sci.

   1.2. La fonction $x \to 1_{]0,+\infty[}(x)$ est-elle sci sur $\mathbb{R}$? Et la fonction $x \to 1_{[0,+\infty[}(x)$? (On rappelle que si I est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, alors $1_I(x) = 1$ si $x \in I$ et $1_I(x) = 0$ sinon)

2. Soient f et g deux fonctions sci en un point $x_0 \in \mathbb{R}$.

   Montrer que $\inf(f, g)$, $\sup(f, g)$, $f + g$ et λf (avec λ une constante positive quelconque) sont sci en x_0.

3. Soit $(f_n)_{n \in N}$ une famille de fonctions réelles sci en un même point $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, la famille $(f_n(x), n \in \mathbb{N})$ est majorée, et on définit la fonction ϕ par

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \{f_n(x)\} \end{array}$$

   Montrer que ϕ est sci en x_0.