Devoir maison de la Toussaint

A rendre en TD ou en amphi la semaine du 2 Novembre 2020

Exercice 1 : Calcul de limites

1. Calculer les limites suivantes :

   (a) $u_n = \ln(n)\ln(2+n^2) - \sqrt{\ln(n)^2 + 4\ln(n)^4}$.

Solution:
On a

$$\begin{aligned}\ln(2+n^2) &= \ln\left(n^2 \times \left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\right)\\ &= 2\ln(n) + \frac{2}{n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sqrt{\ln(n)^2 + 4\ln(n)^4} &= 2\ln(n)^2 \times \sqrt{1 + \frac{1}{4\ln(n)^2}} = 2\ln(n)^2 \times \left(1 + \frac{1}{8\ln(n)^2} + \circ\left(\frac{1}{\ln(n)^2}\right)\right)\\ &= 2\ln(n)^2 + \frac{1}{4} + \circ(1)\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}u_n &= \ln(n)\left(2\ln(n) + \frac{2}{n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 2\ln(n)^2 - \frac{1}{4} + \circ(1)\\ &= -\frac{1}{4} + \frac{2\ln(n)^2}{n^2} + \circ(1) = -\frac{1}{4} + o(1)\end{aligned}$$

Donc $u_n \to -\frac{1}{4}$.

   (b) $u_n = n^2\left(\exp\left(\frac{1}{n^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Solution:
On a

$$\exp\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{1}{n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)$$

Donc

$$u_n = n^2\left(\exp\left(\frac{1}{n^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n^2\left(1 + \frac{1}{n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 + \frac{1}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= n^2 \times \left(\frac{3}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{3}{2} + \circ(1)$$

Donc $u_n \to \frac{3}{2}$.

(c) $u_n = \frac{n\sin(n!)}{\sqrt{n^5+1}\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)}$.

Solution:
On a

$$\exp\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)$$

et

$$\sqrt{n^5+1} = n^2\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n^5}} = n^2\sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n^5} + \circ\left(\frac{1}{n^5}\right)\right) = n^2\sqrt{n} + \frac{1}{2n^4} + \circ\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Donc

$$\sqrt{n^5+1}\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) = \left(n^2\sqrt{n} + \frac{1}{2n^4} + \circ\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \times \left(\frac{1}{n} + \circ\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= n\sqrt{n} + \frac{1}{2n^5} + \circ\left(\frac{1}{n^5}\right) + \circ(n\sqrt{n}) = n\sqrt{n} + \circ(n\sqrt{n})$$

et donc

$$u_n = \frac{n\sin(n!)}{\sqrt{n^5+1}\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)} = \frac{\sin(n!)}{\sqrt{n} + \circ(\sqrt{n})}.$$

Donc $u_n \to 0$ car $\sin(n!)$ est bornée.

(d) $u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Solution:
En travaillant un peu l'expression de u, on voit apparaître un produit téléscopique.

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} 1 - \frac{1}{k^2}$$
$$= \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{\prod_{k=2}^{n}(k-1) \times \prod_{k=2}^{n}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n} k \times \prod_{k=2}^{n} k}$$
$$= \frac{\prod_{k=1}^{n-1} k \times \prod_{k=3}^{n+1} k}{\prod_{k=2}^{n} k \times \prod_{k=2}^{n} k} \qquad \text{par changement de variable}$$
$$= \frac{1 \times (n+1)}{n \times 2} = \frac{n+1}{2n}$$

Donc $u_n \to \frac{1}{2}$.

(e) $u_n = n^3 \left(\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - 3\cos\left(\frac{1}{n}\right) + 3 - \frac{1}{n}\right)$.

Solution:
Il faut dans ce cas aller assez loin dans les DL. On a

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) &= \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{2}{n} - \left(\frac{2}{n}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{n}\right)^3 \times \frac{1}{3} + \circ\left(\frac{1}{n^3}\right) - \left(\frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{n}\right)^3 \times \frac{1}{3} + \circ\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= \frac{1}{n} - \frac{3}{2n^2} + \frac{7}{3n^3} + \circ(\frac{1}{n^3})\end{aligned}$$

et

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

D'où,

$$\begin{aligned}u_n &= n^3 \times \left(\frac{1}{n} - \frac{3}{2n^2} + \frac{7}{3n^3} + \circ\left(\frac{1}{n^3}\right) - 3 + \frac{3}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^3}\right) + 3 - \frac{1}{n}\right)\\ &= n^3 \times \left(\frac{7}{3n^3} + \circ\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &= \frac{7}{3} + \circ(1)\end{aligned}$$

Donc $u_n \to \frac{7}{3}$.

2. Montrer que les suites suivantes tendent vers 0 :

(a) $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{n} dt$.

Solution:
On a $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{n} dt = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt \to 0$ car $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt$ est une constante (qui vaut d'ailleurs 1).

(b) $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$.

Solution:
On doit pour cette suite passer par les ϵ.
Soit $\epsilon > 0$.
On a $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\epsilon}{2}} \sin^n(t)dt + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$ par la relation de Chasles. On va majorer indépendamment ces deux intégérales par $\frac{\epsilon}{2}$ à partir d'un certain rang.
On a $\forall t \in [\frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{2}, \frac{\pi}{2}], \sin(t) \leq 1$. Donc

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)dt \leq \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1dt = \frac{\epsilon}{2}$$

En outre, on sait que $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\epsilon}{2}\right)<1$, donc la suite $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\epsilon}{2}\right)^n \to 0$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\epsilon}{2}\right) \leq \frac{\epsilon}{\pi}$.
Par croissance de la fonction sin et donc $\sin^n$ sur $[0, \frac{\pi}{2}-\frac{\epsilon}{2}]$, on a donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\epsilon}{2}} \sin^n(t)dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\epsilon}{2}} \sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\epsilon}{2})dt \leq (\frac{\pi}{2}-\frac{\epsilon}{2}) \times \frac{\epsilon}{\pi} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Donc $\forall n \geq n_0, u_n \leq \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$.
Donc $u_n \to 0$.

(c) $u_n = \int_0^{2\pi} \sin(t+n)dt$.

Solution:
On fait un changement de variable, $u = t+n$, d'où $du = dt$ et donc

$$\begin{aligned}
u_n = \int_0^{2\pi} \sin(t+n)dt &= \int_n^{2\pi+n} \sin(u)du \\
&= \int_{n[2\pi]}^{2\pi+n[2\pi]} \sin(u)du && \text{par } 2\pi \text{ périodicité de } \sin \\
&= \int_{n[2\pi]}^{2\pi} \sin(u)du + \int_{2\pi}^{2\pi+n[2\pi]} \sin(u)du \\
&= \int_{n[2\pi]}^{2\pi} \sin(u)du + \int_0^{n[2\pi]} \sin(u)du = \int_0^{2\pi} \sin(u)du = 0
\end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$ et donc $u_n \to 0$.

(d) $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{t}{n}\right)dt$.

Solution:
On a $\forall t \geq 0, \sin(t) \leq t$. Donc $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin\left(\frac{t}{n}\right) \leq \frac{t}{n}$. Et donc

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{t}{n}\right)dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{n}dt = \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 0\right) = \frac{1}{8\pi^2 n}$$

Donc $u_n \to 0$.

(e) $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nt)dt$.
Indication On pourra utiliser les complexes.

Solution:
On a $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \sin(nt) = Im\left(e^{int}\right)$. Donc

$$\begin{aligned}
u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nt)dt &= Im\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{int}dt\right) = Im\left(\left[\frac{1}{in}e^{int}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) \\
&= Im\left(-\frac{i}{n}\left(e^{in\frac{\pi}{2}}-1\right)\right) = Im\left(\frac{1}{n}\left(i - ie^{in\frac{\pi}{2}}\right)\right)
\end{aligned}$$

Donc par continuité de la partie imaginaire, $u_n \to Im\left(\lim_n \frac{1}{n}\left(i-ie^{in\frac{\pi}{2}}\right)\right) = 0$.

(f) $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin(\sin(\cdots(\sin(t)))}_{n \text{ fois}} dt$.

Indication On pourra étudier la convergence de la suite v_n définit par $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sin(v_n)$ et $v_0 = \sin(\frac{\pi}{2})$ et utiliser la croissance de la fonction sous l'intégrale.

> **Solution:**
> On pose v la suite vérifiant $v_0 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sin(v_n)$.
>
> On sait que $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin(t) \leq t$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \sin(v_n) \leq v_n$. Donc la suite v est décroissante. On a également $\sin\left([0, \frac{\pi}{2}]\right) \subset [0, \frac{\pi}{2}]$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et donc v_n est minorée par 0.
>
> Donc v converge vers une limite $l \in [0, \frac{\pi}{2}]$ vérifiant $\sin(l) = l$ (par continuité du sinus). Donc $l = 0$.
>
> On a montré que la suite sous l'intégrale de u_n tend vers 0. Il ne reste plus qu'à conclure en utilisant les ϵ.
>
> Soit $\epsilon > 0$.
>
> On sait que $v_n \to 0$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, v_n \leq \frac{2\epsilon}{\pi}$. En outre, comme la fonction sinus est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, par une récurrence immédiate, on a la fonction $t \to \underbrace{\sin(\sin(\cdots(\sin(t)))}_{n \text{ fois}}$ croissante sur $[0\frac{\pi}{2}]$ pour tout n. Donc
>
> $$\forall n \geq n_0, u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin(\sin(\cdots(\sin(t)))}_{n \text{ fois}} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin(\sin(\cdots(\sin(\frac{\pi}{2})))}_{n \text{ fois}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v_n dt \leq \frac{\pi}{2} \times \frac{2\epsilon}{\pi} = \epsilon$$
>
> Donc $u_n \to 0$.

Exercice 2 : Escalier ou ascenseur ?

On souhaite calculer dans cet exercice la probabilité qu'un élève prenne l'ascenseur pour aller en cours. Pour accéder à sa salle, l'élève a le choix entre prendre l'ascenseur ou prendre l'escalier. S'il prend l'escalier, il peut, à chaque pas, monter une ou deux marches à la fois, ou bien abandonner, c'est à dire redescendre et prendre l'ascenseur. On modélise l'expérience aléatoire par une loi uniforme sur l'ensemble des façons d'arriver en haut de l'escalier.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose e_n le nombre de façon différentes d'arriver en haut d'un escalier de taille n. On pose par convention $e_0 = 1$ (il n'y a qu'une seule façon de monter un escalier sans marche, c'est de ne rien faire).

1. Calculer e_1, e_2 et e_3.

> **Solution:** Pour un escalier à 1 marche, soit on monte la marche, soit on prend l'ascenseur. Il y a donc 2 possibilités, soit $e_1 = 2$.
>
> Pour un escalier à 2 marches, soit on monte les deux marches d'un coup, soit on prend l'ascenseur, soit on monte la première marche auquel il reste le choix de finir l'escalier ou de prendre l'ascenseur. Ce qui donne $e_2 = 4$.
>
> Si l'escalier a 3 marches, soit on prend l'ascenseur, soit on monte les deux premières marches (il reste alors 2 choix, prendre l'ascenseur ou finir), soit on monte la première marche et il reste 2 marches à monter, soit 4 possibilités d'après ce qui précède. Donc $e_3 = 4 + 2 + 1 = 7$.

2. Montrer que e vérifie la relation de récurrence suivante : $\forall n \geq 2, e_n = e_{n-1} + e_{n-2} + 1$.

Solution: On pose $n \geq 2$. C'est le même raisonnement que la question d'avant. Pour monter un escalier de taille n, soit on prend l'ascenseur (1 possibilité), soit on monte la première marche et il reste un escalier à $n-1$ marche à monter (u_{n-1} possibilités), soit on monte les deux premières marches d'un coup et il reste un escalier de taille $n-2$ à monter (u_{n-2} possibilités).

D'où $u_n = u_{n-1} + u_{n-2} + 1$.

On se propose, dans la suite de l'exercice, d'exprimer le terme général de e en fonction de n

3. On s'intéresse pour commencer aux suites vérifiant la relation de récurrence "linéarisé" suivante $\forall n \geq 2, u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. Soit E l'ensemble de ces suites. On a $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \forall n \geq 2, u_n = u_{n-1} + u_{n-2}\}$.

   (a) Montrer que E est un espace vectoriel.

   Solution: On a $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui est lui-même un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Il suffit de montrer que E est un sous-espace vectoriel.
   Soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

   $$\forall n \geq 2, (u + \lambda v)_n = u_n + \lambda v_n = u_{n-1} + u_{n-2} + \lambda v_{n-1} + \lambda v_{n-2} = (u + \lambda v)_{n-1} + (u + \lambda v)_{n-2}$$

   Donc $u + \lambda v \in E$ et donc E est un espace vectoriel.

   (b) Soit $a \in E$ telle que $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ et $b \in E$ telle que $b_0 = 1$ et $b_1 = 1$. Montrer que (a, b) est une base de E. En déduire la dimension de E.

   Solution: La famille (a, b) est libre car a et b ne sont pas colinéaires.
   Soit $u \in E$, on a par un récurrence immédiate $u = u_0 \times b + (u_1 - u_0) \times a$, donc $u \in Vect(\{a, b\})$.
   Donc (a, b) est une base de E, qui est de dimension 2.

   (c) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $u^{(\lambda)} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite géométrique de raison λ et de premier terme $u_0 = 1$. Montrer que $u^{(\lambda)} \in E \Leftrightarrow P(\lambda) = 0$ avec P un polynôme que l'on explicitera.

   Solution: Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n^{(\lambda)} = \lambda^n$.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose $u^{(\lambda)} \in E$. On a alors

   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n^{(\lambda)} = \lambda^n = u_{n-1}^{(\lambda)} + u_{n-2}^{(\lambda)} = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}$$

   donc en particulier pour $n = 2$, on a $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, soit $P(\lambda) = 0$ avec

   $$P(X) = X^2 - X - 1$$

   Réciproquement, on suppose λ racine de P. On a alors $\lambda^2 = \lambda + 1$ et donc

   $$\forall n \geq 2, u_n^{(\lambda)} = \lambda^n = \lambda^{n-2} \times (\lambda^2) = \lambda^{n-2} \times (\lambda + 1) = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} = u_{n-1}^{(\lambda)} + u_{n-2}^{(\lambda)}$$

   Donc $u^{(\lambda)} \in E$.
   Donc $u^{(\lambda)} \in E \Leftrightarrow \lambda$ racine de P, avec $P(X) = X^2 - X - 1$.

   (d) En déduire que $E = Vect(u^{(\lambda_1)}, u^{(\lambda_2)})$ avec $u^{(\lambda_1)}, u^{(\lambda_2)}$ deux suites géométriques que l'on explicitera.

Solution: On cherche les racines de $X^2 - X - 1$. On a $\Delta = 1 + 4 = 5$. On a donc deux racines réelles,

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $u^{(\lambda_1)}$ et $u^{(\lambda_2)}$ ne sont pas proportionelles, et donc $(u^{(\lambda_1)}, u^{(\lambda_2)})$ est libre.
Et d'après les questions précédentes, on a $u^{(\lambda_1)} \in E, u^{(\lambda_2)} \in E$ et E est de dimension 2, donc $(u^{(\lambda_1)}, u^{(\lambda_2)})$ est une base de E.

(e) Exprimer a et b en fonction de $u^{(\lambda_1)}$ et $u^{(\lambda_2)}$. En déduire le terme général de la suite a, aussi connue sous le nom de suite de Fibonacci, et de la suite b.

Solution: On a $u_0^{(\lambda_1)} = 1$, $u_1^{(\lambda_1)} = \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $u_0^{(\lambda_2)} = 1$ et $u_1^{(\lambda_2)} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
On cherche $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $a = xu^{(\lambda_1)} + yu^{(\lambda_2)}$. Cela revient à trouver x et y tels que

$$\begin{cases} a_0 = xu_0^{(\lambda_1)} + yu_0^{(\lambda_2)} = x + y = 0 \\ a_1 = xu_1^{(\lambda_1)} + yu_1^{(\lambda_2)} = x\frac{1+\sqrt{5}}{2} + y\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} x = -y \\ x\frac{1+\sqrt{5}}{2} - x\frac{1-\sqrt{5}}{2} = x\sqrt{5} = 1 \end{cases}$$

Donc $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $y = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.
Donc $a = \frac{1}{\sqrt{5}}u^{(\lambda_1)} - \frac{1}{\sqrt{5}}u^{(\lambda_2)}$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Il est assez remarquable de noter que l'on a $a_n \in \mathbb{N}$, ce qui n'est pas du tout évident avec la formule ci-dessus !
En raisonnant de même, on trouve $b = \frac{5+\sqrt{5}}{10}u^{(\lambda_1)} - \frac{5-\sqrt{5}}{10}u^{(\lambda_2)}$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

(f) Montrer que b_n correspond au nombre de façons de monter un escalier de taille n quand l'ascenseur est en panne.

Solution: On appelle f_n le nombre de façons de monter un escalier de taille n sans prendre l'ascenseur. En reprenant le raisonnement de la question 2, on voit que monter un escalier de taille n revient à monter une marche puis un escalier de taille $n-1$ ou deux marches d'un coup puis un escalier de taille $n-2$. On a pour $n \geq 2, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, donc $f \in E$ et $f_0 = 1 = b_0$ par convention et $f_1 = 1 = b_1$, donc $f = b$.

4. On considère maintenant E' l'ensemble des suites vérifiant la même relation de récurrence que notre suite e. On a $E' = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \forall n \geq 2, u_n = u_{n-1} + u_{n-2} + 1\}$.
   (a) Soient $v, w \in E'$ deux suites de E'. Montrer que $v - w \in E$. En déduire que $\forall v \in E', E' = \{v\} + E$.

Solution: On sait que l'on a $v \in E'$ et $w \in E'$. Donc on a

$$\forall n \geq 2, v_n = v_{n-1} + v_{n-2} + 1 \text{ et } w_n = w_{n-1} + w_{n-2} + 1$$

et donc

$$\forall n \geq 2, v_n - w_n = v_{n-1} + v_{n-2} + 1 - w_{n-1} - w_{n-2} - 1 = (v-w)_{n-1} + (v-w)_{n-2}$$

Donc $v - w \in E$.
Soit $v \in E'$. Montrons $E' \subset \{v\} + E$. Soit $v' \in E'$, on a d'après ce qui précède, $v' = v + (v - v')$ avec $v \in \{v\}$ et $v - v' \in E$, donc $v' \in \{v\} + E$. Réciproquement, soit $v' \in \{v\} + E$, on a donc $v' = v + f$ avec $f \in E$ et donc

$$\forall n \geq 2, v'_n = v_{n-1} + v_{n-2} + 1 + f_{n-1} + f_{n-2} = (v+f)_{n-1} + (v+f)_{n-2} + 1 = v'_{n-1} + v'_{n-2} + 1$$

Donc $v' \in E'$.
Donc $E' = \{v\} + E$.

(b) Trouver une suite simple de E'.
Indication On pourra chercher une suite arithmétique.

Solution: Suivant l'indication, on cherche $u \in E'$ de la forme $u = u_0 + r \times n$. D'où

$$\forall n \geq 2, u_n = u_0 + nr = (u_0 + (n-1)r) + (u_0 + (n-2)r) + 1$$

Soit

$$\forall n \geq 2, u_0 = (3 - n)r - 1$$

On prend donc $r = 0$ et $u_0 = -1$ (seule solution arithmétique possible) et on a bien $u = -1 \in E'$.

(c) En déduire une expression de e_n en fonction de n.

Solution: D'après la question (a), on a $E' = \{-1\} + E$, donc on a $e - (-1) \in E$.
De même que dans la question (e), on cherche x et y tels que $e + 1 = xu^{(\lambda_1)} + yu^{(\lambda_2)}$. Cela revient à trouver x et y tels que

$$\begin{cases} e_0 + 1 = x + y = 2 \\ e_1 + 1 = x\frac{1+\sqrt{5}}{2} + y\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 3 \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} y = 2 - x \\ x\frac{1+\sqrt{5}}{2} + (2-x)\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 3 \end{cases}$$

ce qui donne $x = \frac{5+2\sqrt{5}}{5}$ et $y = \frac{5-2\sqrt{5}}{5}$.
Donc $e = \frac{5+2\sqrt{5}}{5}u^{(\lambda_1)} + \frac{5-2\sqrt{5}}{5}u^{(\lambda_2)} - 1$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, e_n = \frac{5+2\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-2\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1$$

5. On note p_n la probabilité qu'un élève prenne l'ascenseur.

(a) Exprimer p_n en fonction de n.

Solution: En combinant le résultat des question 3 et 4, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = 1 - \frac{b_n}{e_n} = 1 - \frac{\frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-2\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1}$$

(b) Calculer numériquement la probabilité qu'un élève ayant cours au premier étage de l'université prenne l'ascenseur (on considère qu'il ne peut que prendre l'escalier principal).

Solution: Il y a 30 marches à l'escalier principal. On applique la formule de la question précédente pour $n = 30$. On trouve $b_{30} = 1346269$, $e_{30} = 3524577$ et donc

$$p_{30} \approx 62\%$$

(c) Calculer la limite de p_n quand n tend vers l'infini. Que peut-on en conclure sur la pertinance de cette modélisation ?

Solution: On a

$$p_n = 1 - \frac{\frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-2\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1} = 1 - \frac{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} \times \frac{1 + \frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1 + \frac{5-2\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n - \frac{5}{5+2\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1+\sqrt{5}}\right)^n}$$

Donc $p_n \to 1 - \frac{5+\sqrt{5}}{10+4\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 0.62 < 1$.

Intuitivement, on devrait avoir $p_n \to 1$. En effet, plus l'escalier est grand, plus les gens ont une chance de se décourager et à la limite où $n \to +\infty$, personne ne peut plus monter l'escalier. Cette modélisation avec la loi uniforme n'est pas très pertinente. En particulier, la probabilité que quelqu'un abandonne devrait augmenter avec le nombre de marche montées.

En outre, prendre une loi uniforme sur les façons de monter les marches n'est pas très réaliste. En général, les gens ont plus de chance de monter toutes les marches de la même façon (une par une ou deux par deux), ou n'ont qu'un nombre limité de changement de rythme.

6. (*) On décide maintenant de prendre en compte le pied avec lequel on monte les marches (chaque pas peut être fait du pied gauche ou du pied droit). Donner la nouvelle relation de récurrence vérifiée par e, et donner une expression de son terme général en suivant la même méthode. Calculer la nouvelle probabilité de prendre l'ascenseur pour aller au premier étage.

Solution: On pose f_n le nombre de façon de monter l'escalier, et c_n le nombre de façon de le monter sans l'ascenseur.

On a cette fois ci $f_n = 2f_{n-1} + 2f_{n-2} + 1$ (de façons de monter une marche, deux façons de monter deux marches et l'ascenseur), avec $e_0 = 1$ et $e_1 = 3$ et $e_2 = 6 + 2 + 1 = 8$, et $c_n = 2c_{n-1} + 2c_{n-2}$, avec $c_0 = 1$, $c_1 = 2$ et $c_2 = 6$.

On pose $F = \{f_n \in \mathbb{N}, \forall n \geq 2, f_n = 2f_{n-1}+2f_{n-2}\}$ et $F' = \{f_n \in \mathbb{N}, \forall n \geq 2, f_n = 2f_{n-1}+2f_{n-2}+1\}$. On a alors, de même, pour $\lambda \neq 0$,

$$u^{(\lambda)} \in F \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}\}$$

On résout donc le système $\begin{cases} c_0 = 1 = x + y \\ c_1 = 2 = \left(1+\sqrt{3}\right)x + (1-\sqrt{3})y \end{cases}$, ce qui donne $x = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$ et $y = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$. D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \frac{3+\sqrt{3}}{6}\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}\left(1-\sqrt{3}\right)^n$$

Enfin, en cherchant une solution constante, on trouve $u = -\frac{1}{3} \in F'$. D'où $f - u \in F$. On résout le système $\begin{cases} f_0 - u_0 = \frac{4}{3} = x + y \\ f_1 - u_1 = \frac{10}{3} = \left(1+\sqrt{3}\right)x + (1-\sqrt{3})y \end{cases}$, ce qui donne $x = \frac{2+\sqrt{3}}{3}$ et $y = \frac{2-\sqrt{3}}{3}$. D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, e_n = \frac{2+\sqrt{3}}{3}\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \frac{2-\sqrt{3}}{3}\left(1-\sqrt{3}\right)^n - \frac{1}{3}$$

Ce qui donne

$$p_n = 1 - \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{6}\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}\left(1-\sqrt{3}\right)^n}{\frac{2+\sqrt{3}}{3}\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \frac{2-\sqrt{3}}{3}\left(1-\sqrt{3}\right)^n - \frac{1}{3}}$$

Et donc $p_n \to \frac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 0.37$. C'est encore pire. Cette extension du modèle ne change rien au vrai problème, qui est la loi uniforme.

Remarque : Cette méthode de résolution peut être appliquée de manière générale à toute forme de récurrence affine ou linéaire, c'est à dire de la forme $u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+(k-1)} + \ldots + a_1 un + 1 + a_0 u_n + \lambda$, *et se réduit à trouver les racines du polynôme :* $X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \ldots - a_1 X - a_0$ *et éventuellement une solution particulière si* $\lambda \neq 0$.

Exercice 3 : Espaces vectoriels finis

Nous avons considéré jusqu'à présent uniquement des espaces vectoriels sur des corps infinis comme $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$. Nous allons nous intéresser dans cet exercice au cas où le corps est fini. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ muni de l'addition et la multiplication modulo p. On admet que si p est premier, alors $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps.

1. Rappeler la définition de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie et du cardinal d'un ensemble fini.

Solution: Le cardinal d'un ensemble E est son nombre d'élément, c'est à dire l'unique entier n tel que il existe une bijection entre E et $\{1, \ldots, n\}$.

La dimension d'un espace vectoriel de dimension finie E est l'unique entier n tel que il existe une base de E de taille n.

2. Expliciter l'inverse pour l'addition et la multiplication (si possible) de chaque élément de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Essayer de faire de même pour $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Quels élements n'ont pas d'inverse pour la multiplication ? En déduire que $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ n'est pas un corps.

Solution: L'inverse pour l'addition d'un nombre x est un nombre y tel que $x + y = 0$. L'inverse pour la multiplication d'un nombre y est un nombre y tel que $x \times y = 1$.

Pour $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0,1,2\}$, les inverses de l'addition sont $0 \leftarrow 0$, $1 \leftarrow 2$ et $2 \leftarrow 1$ car $1+2 = 0[3]$. Pour la multiplication, $0 \leftarrow$pas d'inverse, $1 \leftarrow 1$ et $2 \leftarrow 2$ car $2 \times 2 = 1[3]$.

Pour $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{0,1,2,3,4,5,6\}$, les inverses de l'addition sont $0 \leftarrow 0$, $1 \leftarrow 6$, $2 \leftarrow 5$, $3 \leftarrow 4$, $4 \leftarrow 3$, $5 \leftarrow 2$ et $6 \leftarrow 1$ car $x + (7-x) = 0[7]$. Pour la multiplication, $0 \leftarrow$pas d'inverse, $1 \leftarrow 1$, $2 \leftarrow 4$ (car $2 \times 4 = 1[7]$), $3 \leftarrow 5$ (car $3 \times 5 = 1[7]$), $4 \leftarrow 2$, $5 \leftarrow 3$, $6 \leftarrow 6$ (car $6 \times 6 = 1[7]$).

Pour $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, les inverses de l'addition sont $0 \leftarrow 0$, $1 \leftarrow 7$, $2 \leftarrow 6$, $3 \leftarrow 5$, $4 \leftarrow 4$, $5 \leftarrow 3$, $6 \leftarrow 2$ et $7 \leftarrow 1$ car $x + (8-x) = 0[8]$, pas de problème. Pour la multiplication, $0 \leftarrow$pas d'inverse, $1 \leftarrow 1$, $3 \leftarrow 3$ (car $3 \times 3 = 1[8]$), $5 \leftarrow 5$ (car $5 \times 5 = 1[8]$), $7 \leftarrow 7$ (car $7 \times 7 = 1[8]$). 2, 4, 6 et 8 n'ont pas d'inverse (un nombre pair ne peut être congru à un nombre impair (en l'occurence 1) modulo 8). Cela correspond aux entiers non premiers avec 8.

3. On pose $E_2 = \{a + ib, (a,b) \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\}$.
   (a) Lister tout les éléments de E_2. En déduire le cardinal de E_2.

   Solution: E_2 correspond à toutes les combinaisons possibles de 1 et i avec les éléments de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. On trouve donc

$$\begin{array}{ccccc} 0+0 & 0+i & 0+2i & 0+3i & 0+4i \\ 1+0 & 1+i & 1+2i & 1+3i & 1+4i \\ 2+0 & 2+i & 2+2i & 2+3i & 2+4i \\ 3+0 & 3+i & 3+2i & 3+3i & 3+4i \\ 4+0 & 4+i & 4+2i & 4+3i & 4+4i \end{array}$$

   Il y a donc 25 éléments. Donc $|E| = 25 = 5^2$.

   (b) En admettant que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$-espace vectoriel, montrer que E_2 est $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$-un espace vectoriel pour la somme et la multiplication modulo 5.

   Solution: On montre que E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$. Soient $x = a + ib \in E_2$ et $x' = a' + ib' \in E_2$, $\lambda \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, on a

$$x + \lambda x' = (a + \lambda a')[5] + i(b + \lambda b'[5]) \in E_2$$

   car $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est stable par somme et multiplication modulo 5.

   (c) Donner une base de E_2. En déduire sa dimension. Quel lien observe-t-on avec $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et le cardinal de E ?

   Solution: 1 et i est évidemment une base de E_2 comme on peut le voir sur la définition ou dans la réponse à la question (a).
   On a donc $\dim(E) = 2$. On remarque que $|E| = 5^2 = |\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}|^{\dim(E)}$.

On fixe maintenant un nombre premier p, et on considère pour la suite E un $\mathbb{F}_{|}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$.

4. En considérant une base de E, montrer que E est fini et calculer son cardinal en fonction de p et de n. Vérifier que la formule fonctionne en l'appliquant à l'espace E_2 de la question 3.

Solution: Soit $(b_1, \ldots, b_n)$ une base de E. On a $E = Vect(\{b_1, \ldots, b_n\})$. Comme cette famille est libre, choisir un élément de $Vect(\{b_1, \ldots, b_n\})$ revient à choisir, pour chaque b_i, un coefficient $\lambda_i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Il y a p choix pour chaque b_i car $|\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}| = p$. Donc $|E| = p^n$.

5. On s'intéresse maintenant à $\mathcal{L}(E)$, l'ensemble des applications linéaires de E. On pose $\mathcal{B}$ une base de E.

   (a) (Question de cours) Rappeler pourquoi l'application $\psi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \to \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \\ u & \to M_{\mathcal{B}}(u) \end{cases}$ est un isomorphisme.

   Solution: On note $(b_1, \ldots, b_n)$ les éléments de $\mathcal{B}$. Pour tout $x \in E$, on a $x = \sum_i x_i b_i$, avec $x_i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Donc pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$, on a $u(x) = \sum_i x_i u(b_i)$. Toute application linéaire est donc caractérisée par ses images de la base $u(b_1), \ldots, u(b_n)$, elles-même caractérisées par leur coefficients $u(b_i)_j$ dans $\mathcal{B}$, ce qui correspond aux coefficients de la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$. L'application ψ est donc bijective, et on vérifie aisément qu'elle est linéaire (cf Théorème 1.6 du cours).

   (b) En déduire le cardinal et la dimension de $\mathcal{L}(E)$. Faire le lien avec la question 4.

   Solution: On a donc, par la question précédente, $\dim(\mathcal{L}(E)) = \dim(\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}))$ et $|\mathcal{L}(E)| = |\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})|$.
   Une matrice de taille n étant un tableau de n^2 coefficients, il y a pour chaque case de la matrice, $|\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}| = p$ possibilités. Donc $|\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = p^{n^2}$.
   En outre, la famille de matrices $(\delta_{k,l})_{1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq n}$ avec $(\delta_{k,l})_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) = (k,l) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (la matrice avec un 1 à la case (k,l) et 0 partout ailleurs) est clairement une base de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, donc $\dim(\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})) = n^2$.
   On a donc $\dim(\mathcal{L}(E)) = n^2$ et $|\mathcal{L}(E)| = p^{n^2} = p^{\dim(\mathcal{L}(E))}$. On retrouve la formule de la question 4, ce qui est logique vu que $\dim(\mathcal{L}(E))$ est lui-même un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel.

6. Pour $d \in \mathbb{N}$, on souhaite maintenant compter le nombre $\mathcal{I}_d$ de familles libres de E à d éléments. On se place dans le cas où l'ordre des vecteurs compte, c'est à dire la famille (e_1, e_2) n'est pas la même que la famille (e_2, e_1).

   (a) Calculer $\mathcal{I}_d$ pour $d > n$.

   Solution: Une famille libre d'un espace vectoriel de dimension n a au plus n vecteurs. Donc pour $d > n$, $\mathcal{I}_d = 0$.

   On suppose maintenant $d \leq n$.

   (b) Montrer que tout vecteur non nul de E forme une famille libre. En déduire $\mathcal{I}_1$.

   Solution: Soit $e \in E \backslash \{0\}$, et $\lambda \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que $\lambda e = 0$. On a alors $\lambda = 0$ car $e \neq 0$.
   Donc la famille (e) est libre. Il y a donc autant de familles libres à 1 élément que de vecteurs non nul de E.
   Donc $\mathcal{I}_1 = p^n - 1$.

   On pose $(e_1, \ldots, e_d)$ une famille à d éléments de E.

(c) Montrer que $(e_1, \dots, e_d)$ est libre $\Leftrightarrow [e_1 \neq 0, (e_2, \dots, e_d)$ est libre et $Vect(e_2, \dots, e_n) \cap Vect(e_1) = \{0\}]$.

> **Solution:** On raisonne par double équivalence.
> Supposons que $(e_1, \dots, e_d)$ est libre. On a alors $e_1 \neq 0$ sinon la famille serait liée. Montrons que $(e_2, \dots, e_d)$ est libre.
> Soient $\lambda_2, \dots, \lambda_d \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tels que $\sum_{i=2}^d \lambda_i e_i = 0$. On a alors $\sum_{i=1}^d \lambda_i e_i = 0$ avec $\lambda_1 = 0$. Donc $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i = 0$ et donc $(e_2, \dots, e_n)$ est libre.
> Enfin, on a bien $\{0\} \in Vect(e_2, \dots, e_d) \cap Vect(e_1)$. Soit y un élément de cette intersection. On a $y = \lambda_1 e_1$ et $y = \sum_{i=2}^d \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On a alors $\lambda_1 e_1 - \sum_{i=2}^d \lambda_i e_i = 0$, donc $\forall i, \lambda_i = 0$ par liberté de $(e_1, \dots, e_d)$ et donc $y = 0$.
> Donc $Vect(e_2, \dots, e_d) \cap Vect(e_1) = \{0\}$.
> Réciproquement, on suppose $e_1 \neq 0, (e_2, \dots, e_d)$ libre et $Vect(e_2, \dots, e_n) \cap Vect(e_1) = \{0\}$.
> Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ tels que $\sum_i \lambda_i e_i = 0$.
> On a alors $\sum_{i=2}^d \lambda_i e_i = -\lambda_1 e_1 \in Vect(e_2, \dots, e_d) \cap Vect(e_1) = \{0\}$.
> Donc $\lambda_1 = 0$ et par liberté de $(e_2, \dots, e_d)$, on a $\forall i \geq 2, \lambda_i = 0$.
> Donc $(e_1, \dots, e_d)$ est libre.

(d) Montrer que $(e_1, \dots, e_d)$ est libre $\Leftrightarrow [e_1 \neq 0, e_2 \notin Vect(e_1), \dots, e_d \notin Vect(e_1, \dots, e_{d-1})]$.
Indication On pourra s'inspirer de la question précédente pour faire une récurrence finie.

> **Solution:**
> Pour $k \in \{1, \dots, d\}$, on pose la propriété $\mathcal{P}(k)$:
>
> $$(e_1, \dots, e_d) \text{ est libre } \Leftrightarrow \left[\begin{cases} e_1 \neq 0, e_2 \notin Vect(e_1), \dots, e_k \notin Vect(e_1, \dots, e_{k-1}) \\ (e_{k+1}, \dots, e_d) \text{ est libre et } Vect(e_{k+1}, \dots, e_d) \cap Vect(e_1, \dots, e_k) = \{0\} \end{cases} \right]$$
>
> avec la convention $Vect(\emptyset) = \{0\}$. Montrons $P(d)$ par récurrence finie.
> L'initialisation $\mathcal{P}(1)$ est faite dans la question (c).
> Supposons $\mathcal{P}(k)$ pour $1 \leq k \leq d-1$. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$.
> Supposons $(e_1, \dots, e_d)$ libre. Par hypothèse de récurrence, on a $e_1 \neq 0, \dots, e_k \notin Vect(e_1, \dots, e_{k-1})$, $(e_{k+1}, \dots, e_d)$ est libre et $Vect(e_{k+1}, \dots, e_n) \cap Vect(e_1, \dots, e_k) = \{0\}$.
> Par le même raisonnement qu'en (c), on a $(e_{k+1}, \dots, e_d)$ libre, donc $(e_{k+2}, \dots, e_d)$ libre.
> Soit $y \in Vect(e_1, \dots, e_{k+1}) \cap Vect(e_{k+2}, \dots, e_d)$. On a $y = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i e_i = \sum_{i=k+2}^d \lambda_i e_i$ et donc par liberté, on montre que $\forall i, \lambda_i = 0$ et donc $y = 0$. Enfin $e_{k+1} \notin Vect(e_1, \dots, e_k)$, sinon cela contredirait la liberté de $(e_1, \dots, e_d)$.
> Réciproquement, on suppose $e_1 \neq 0, \dots, e_k \notin Vect(e_1, \dots, e_{k-1})$ et $e_{k+1} \notin Vect(e_1, \dots, e_k)$, $(e_{k+2}, \dots, e_d)$ libre et $Vect(e_{k+2}, \dots, e_d) \cap Vect(e_1, \dots, e_{k+1}) = \{0\}$.
> Montrons que $(e_{k+1}, \dots, e_d)$ est libre. Supposons $\sum_{i=k+1}^d \lambda_i e_i = 0$, alors on a $\lambda_{k+1} e_{k+1} = 0$, sinon on aurait un élément non nul de $Vect(e_{k+2}, \dots, e_d) \cap Vect(e_1, \dots, e_{k+1})$. Donc $\sum_{i=k+2}^d \lambda_i e_i = 0$ et donc par liberté de $(e_{k+2}, \dots, e_d)$ on a $\forall i \geq k+2, \lambda_i = 0$. Donc $(e_{k+1}, \dots, e_d)$ est libre.
> Enfin, pour $y \in Vect(e_{k+1}, \dots, e_d) \cap Vect(e_1, \dots, e_k)$, on a $\sum_{i=k+1}^d \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i$ et donc $\sum_{i=k+2}^d \lambda_i e_i = -\lambda_{k+1} e_{k+1} + \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i \in Vect(e_{k+2}, \dots, e_d) \cap Vect(e_1, \dots, e_{k+1}) = \{0\}$. Donc $y = 0$.
> Donc par hypothèse de récurrence, $(e_1, \dots, e_d)$ est libre et donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
> Donc $\forall k \in \{1, \dots, d\}, \mathcal{P}(k)$ est vraie et en particulier $\mathcal{P}(d)$, qui donne l'équivalence voulue.

(e) Montrer que $|\mathcal{I}_d| = \prod_{k=0}^d p^n - p^k$. En déduire le nombre de base de E.

> **Solution:** D'après la question (d), choisir une famille libre de E, revient à choisir un vecteur non nul de E ($p^n - 1$ possibilités), puis un vecteur non nul de $E \backslash Vect(e_1)$ (soit $p^n - p$ possibilités), et ainsi de suite jusqu'à e_d dans $E \backslash Vect(e_1, \ldots, e_{d-1})$ soit $p^n - p^{d-1}$ possibilités.
> Il y a donc en tout $(p^n - p^0) \times (p^n - p) \times (p^n - p^2) \times \cdots \times (p^n - p^{d-1})$ possibilités.
> Donc $\mathcal{I}_d = \prod_{k=0}^{d-1} p^n - p^k$.
> Enfin, on sait que les bases d'un espace de dimension n sont exactement les familles libres de taille n, donc $|\{\text{bases de } E\}| = \mathcal{I}_n = \prod_{k=0}^{n-1} p^n - p^k$

(f) Montrer que l'image d'une base par un isomorphisme est une base. En déduire qu'il existe une bijection entre l'ensemble des bases de E et l'ensemble $GL(E)$ des isomorphismes sur E.

> **Solution:** Soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E et $\phi \in GL(E)$.
> On pose $\phi(\mathcal{B}) = (\phi(b_1), \ldots, \phi(b_n))$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tel que $\sum_i \lambda_i \phi(b_i) = 0$. Alors $\phi(\sum_i \lambda_i b_i) = 0$ et donc $\sum_i \lambda_i b_i = 0$ par injectivité de ϕ et donc $\forall i, \lambda_i = 0$ par liberté de $\mathcal{B}$.
> Donc $\phi(\mathcal{B})$ est libre et de taille n, donc c'est une base de E (cette propriété est aussi vraie en dimension infinie, on pourrait montrer le caractère générateur à la main, mais dans ce cas, c'est plus rapide comme ça).
> On a donc montré que l'application $\psi : \begin{cases} GL(E) & \to \{\text{bases de } E\} \\ \phi & \to \phi(\mathcal{B}) \end{cases}$ est bien définie.
> Si $\phi(\mathcal{B}) = \phi'(\mathcal{B})$, on a donc $\forall i, \phi(b_i) = \phi'(b_i)$, donc ϕ et ϕ' coincident pour $\mathcal{B}$ donc sur $Vect(\mathcal{B}) = E$. Donc $\phi = \phi'$. Donc ψ est injective.
> En outre, pour $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de E, l'application ϕ définie par $\phi(f_1) = f_1, \ldots, \phi(f_n) = f_n$ est bien définie, et pour $x = \sum_i x_i f_i \in Ker(\phi)$, on a $\sum_i x_i \phi(f_i) = 0 = \sum_i x_i f_i = x$ par définition de ϕ, donc $Ker(\phi) = \{0\}$. Donc ϕ est un isomporphisme par le théorème du rang.
> Donc ψ est bijective et donc il y a autant de bases de E que d'isomorphismes sur E.

(g) En déduire que la probabilité $\mathbb{P}_{n,p}$ qu'un endomorphisme d'un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension n pris au hasard soit inversible vaut $\frac{\prod_{d=0}^{n-1} p^n - p^d}{p^{n^2}}$. Calculer $\lim_{p \to +\infty} \mathbb{P}_{n,p}$. Que peut-on conjecturer sur la densité des isomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n ?

> **Solution:** En combinant les résultats de la question 5, (e) et (f), on a
>
> $$\mathbb{P}_{n,p} = \frac{\prod_{d=0}^{n-1} p^n - p^d}{p^{n^2}} = \prod_{d=0}^{n-1} 1 - \frac{p^d}{p^n} \to_{p \to \infty} 1$$
>
> .
> A la limite où p tend vers l'infini, on voit qu'on a une probabilité 1 de choisir un isomorphisme en prenant une application au hasard. Cela laisse supposer que l'ensemble des isomorphisme est dense dans les $\mathbb{N}$-espaces vectoriels et donc dans les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Autrement dit, il n'y a quasiment pas d'applications linéaires non bijectives.

7. On s'intéresse maintenant au nombre de sous-espaces-vectoriels de E de dimension d que l'on notera $\begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix}$.

   (a) Calculer $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$, le nombre de droites vectorielles de E.

Solution: Pour choisir une droite vectorielle, on choisit un vecteur directeur, il y a $p^n - 1$ choix, et chaque droite vectorielle possède $p - 1$ vecteurs directeurs différents. On a donc

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{p^n - 1}{p - 1}$$

(b) Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. Donner le nombre de familles libres de F de taille d.

Solution: D'après la question (6), F possèdent $\prod_{k=0}^{d-1} p^d - p^k$ familles libres.

(c) Montrer que $\begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix} = \frac{\prod_{k=0}^{d-1} 1-p^{n-k}}{\prod_{k=0}^{d-1} 1-p^{d-k}}$.

Indication On pourra remarquer qu'on peut associer à chaque sous-espace de dimension d un certain nombre de famille libre de taille d de E.

Solution: Pour chaque famille libre de E de taille d, on peut associer un sous-espace vectoriel de dimension d. Réciproquement, pour chaque espace vectoriel de dimension d de E, on peut associer $\prod_{k=0}^{d-1} p^d - p^k$ familles libres de taille de d d'après la question précédente. On a donc

$$\begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix} = \frac{\prod_{k=0}^{d-1} p^n - p^k}{\prod_{k=0}^{d-1} p^d - p^k} = \frac{\prod_{k=0}^{d} 1 - p^{n-k}}{\prod_{k=0}^{d} 1 - p^{d-k}}$$

(d) Montrer en utilisant des arguments combinatoires que $\begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-d \end{bmatrix}$. On admettra que chaque sous-espace vectoriel possède un unique supplémentaire orthogonal.

Solution: A chaque sous-espace vectoriel de dimension d, on peut associer un unique sous-espace vectoriel supplémentaire orthogonal, qui est donc de dimension $n - d$. (On verra une preuve rigoureuse de ce résultat avec la notion d'orthogonalité ou de dualité). On a donc autant de sous-espace de dimension d que $n - d$, d'où

$$\begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-d \end{bmatrix}$$

(e) Vérifier le résultat de la question précédente par le calcul.

Solution: On a

$$\begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix} = \frac{\prod_{k=0}^{d-1} 1 - p^{n-k}}{\prod_{k=0}^{d-1} 1 - p^{(d-k}} = \frac{(1-p^n)(1-p^{n-1}) \times \cdots \times (1-p^{n-d+1})}{(1-p^d)(1-p^{d-1}) \times \cdots \times (1-p^1)}$$

Donc

$$\begin{bmatrix} n \\ n-d \end{bmatrix} = \frac{(1-p^n)(1-p^{n-1}) \times \cdots \times (1-p^{d+1})}{(1-p^{n-d})(1-p^{n-d-1}) \times \cdots \times (1-p^1)}$$

Et donc

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ n-d \end{bmatrix} &= \frac{(1-p^n)(1-p^{n-1})\times\cdots\times(1-p^{d+1})}{(1-p^{n-d})(1-p^{n-d-1})\times\cdots\times(1-p^1)} \\
&= \frac{(1-p^n)(1-p^{n-1})\times\cdots\times(1-p^{n-d+1})\times(1-p^{n-d})\times\cdots\times(1-p^{d+1})}{(1-p^{n-d})(1-p^{n-d-1})\times\cdots\times(1-p^{d+1})\times(1-p^{d})\times\cdots\times(1-p^1)} \\
&= \frac{(1-p^n)(1-p^{n-1})\times\cdots\times(1-p^{n-d+1})}{(1-p^{d})\times\cdots\times(1-p^1)} \times \frac{(1-p^{n-d})\times\cdots\times(1-p^{d+1})}{(1-p^{n-d})\times\cdots\times(1-p^{d+1})} \\
&= \frac{(1-p^n)(1-p^{n-1})\times\cdots\times(1-p^{n-d+1})}{(1-p^{d})\times\cdots\times(1-p^1)}
\end{aligned}$$

Donc $\begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-d \end{bmatrix}$

Cette quantité est une sorte d'équivalent au $\dbinom{n}{p}$ *pour la dimension. D'autres formules similaires peuvent être établies de manière combinatoire ou calculatoire. On peut par exemple montrer que :* $\begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ d-1 \end{bmatrix} + p^d \begin{bmatrix} n-1 \\ d \end{bmatrix} = p^{n-d} \begin{bmatrix} n-1 \\ d-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ d \end{bmatrix}$