**Université Paris Descartes** **Analyse 3**
**1$^{er}$ semestre 2018-2019**

**Examen**

Lundi 14 janvier 2019 - Durée : 2h

---

*Tout document, calculatrice, téléphone portable et autre appareil électronique est interdit. L'énoncé comporte 4 exercices indépendants.*

*Une part substantielle de la note portera sur la rédaction. Une juxtaposition d'équations sans liens logiques ni quantificateurs appropriés ne se verra pas attribuer une note élevée.*

*On attend que vous citiez précisément les théorèmes utilisés. En l'absence de la totalité des hypothèses requises, votre résultat sera considéré comme faux.*

**Exercice 1 (Question de cours) :**

1. Enoncer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n \geq 1$ (avec les bonnes hypothèses requises). On donnera en particulier l'expression explicite du polynôme de Taylor à l'ordre $n$.
2. Démontrer cette formule.

**Exercice 2 :** Soit $I$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction sur $I$.

1. (a) Montrer l'équivalence entre

$$f \text{ est uniformément continue sur } I \tag{1}$$

et

$$\text{Pour toutes suites } (x_n)_{n\geq 1} \text{ et } (y_n)_{n\geq 1} \text{ telles que } |x_n - y_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
$$\text{alors } |f(x_n) - f(y_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{2}$$

*On pourra raisonner par contraposée pour l'implication* (2) $\Rightarrow$ (1).

   (b) Application : montrer que la fonction $t \mapsto \cos(t^2)+2019$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2. On suppose dans cette question que $f$ est uniformément continue et que $I$ est un intervalle ouvert de la forme $I = ]a, b[$. Le but de cette question est de montrer que $f$ est prolongeable par continuité en $a$.
   (a) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de $]a, b[$ qui tend vers $a$. Rappeler pourquoi $(u_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy, puis montrer que $(f(u_n))_{n\geq 1}$ est alors aussi une suite de Cauchy.
   (b) En déduire qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.
   (c) Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ une autre suite de $]a, b[$ qui tend vers $a$. Un raisonnement identique à la question précédente (*qu'il n'est pas nécessaire de refaire, bien sûr !*) montre qu'il existe $\ell' \in \mathbb{R}$ tel que $f(v_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell'$. Montrer que $\ell = \ell'$.
   (d) Conclure.
   (e) L'application $x \mapsto \tan(x)$ est-elle uniformément continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ?

**Exercice 3 :** *Je ne saurais trop vous conseiller de faire un dessin pour cet exercice !*

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ telle que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} f(a)$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe $c \in ]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

1. Que pouvez-vous dire dans le cas où la fonction $f$ est constante (égale à $f(a)$) ?
   **On suppose dorénavant que $f$ n'est pas constante : il existe donc $b \in ]a, +\infty[$ tel que $f(b) \neq f(a)$. Sans perte de généralité, on suppose que $f(b) > f(a)$. Dans toute la suite, on pose $y = \frac{f(a)+f(b)}{2}$.**
2. Montrer qu'il existe $u \in ]a, b[$ tel que $f(u) = y$.
3. Montrer qu'il existe $v \in ]b, +\infty[$ tel que $f(v) = y$.
4. Conclure à l'existence de $c \in ]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

5. Le résultat de l'exercice est-il encore vrai si on suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$ avec $\ell \neq f(a)$ ?

**Exercice 4 :** Soit l'équation différentielle suivante :

$$t^4 y'(t) + y(t) = 1. \tag{3}$$

1. Résoudre cette équation sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$. *On fera uniquement la preuve dans le cas* $]0,+\infty[$ *et on se contentera de donner le résultat pour* $]-\infty,0[$.
2. Existe-t-il des solutions de (3) définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ? Si oui, lesquelles ? Vous expliquerez précisément votre raisonnement.

**Fin de l'épreuve.**