Algèbre 3
TD 1
Espaces vectoriels

Licence 2 MAE 2020-2021

Université Paris Descartes

Marc Briant

Dans tout ce TD, $(\mathbb{K}, +, .)$ désigne un corps commutatif.

Des sous-espaces vectoriels en vrac

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants montrer que les ensembles sont des $\mathbb{R}$-ev.

1) $F_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad x - 3y = \sqrt{2}z\right\}$.
2) $F_2 = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \quad 2y - 3z = 0 \text{ et } 5z - y + t = 0\right\}$.
3) $F_3 = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \quad f''(x) - xf'(x) = 0\}$.
4) $F_4 = \left\{u = (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \quad u \text{ est bornée}\right\}$.

Exercice 2

Les ensembles suivants sont-ils des sous-ev de $\mathbb{R}^2$?

1) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\right\}$ 2) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\right\}$

3) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\right\}$ 4) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\right\}$

Les ensembles suivants sont-ils des sous-ev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

5) $\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \quad f \text{ est monotone}\}$ 6) $\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \quad f \text{ s'annule}\}$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants montrer que F et G sont des sous-ev de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $F \cap G$.

1) $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad x + y = z\right\}$ et $G = \left\{(a - b, a + b, 2a - b) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
2) $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad x - 2y = 0\right\}$ et $G = \left\{(a + 2b, a + b, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Sommes de sous-ev et supplémentaires

Exercice 4

Soient F, G et H des sous-ev d'un $\mathbb{K}$-ev E. Montrer que

1) $F \cap G = F + G \Leftrightarrow F = G$.
2) $F \subset G \Rightarrow (F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H))$.

Exercice 5

Prenons un entier $d \geqslant 1$ et définissons

$$H = \left\{(x_1, .., x_d) \in \mathbb{K}^d \mid \quad x_1 + .. + x_d = 0\right\} \quad e = (1, .., 1) \in \mathbb{K}^d.$$

Montrer que H et $\mathbb{K}e$ sont des sous-ev supplémentaires de E.

Exercice 6

Soit E l'ensemble des suites réelles convergentes. On pose

$$F = \{u \in E \mid \quad u \text{ converge vers } 0\}, \quad G = \{u \in E \mid \quad u \text{ est constante}\}.$$

Montrer que F et G sont des sous-ev supplémentaires de E.

Exercice 7

Définissons les ensembles

$$F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \quad f(0) + f(1) = 0\} \quad G = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \quad f \text{ constante}\}.$$

Montrer que F et G sont des sous-ev supplémentaires de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 8

Plaçons-nous dans le $\mathbb{R}$-ev $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et définissons

$$F = \left\{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \quad f(0) = f'(0) = 0\right\}$$
$$G = \left\{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \quad \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \ f(x) = ax + b\right\}.$$

Montrer que F et G sont des sous-ev supplémentaires de $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.