Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence de Mathématiques et Informatique 2019-2020

Analyse 3

TD6

Exercice 1. On définit la fonction f sur $[-1,1]$ par $f(0)=1$ et pour $x\neq 0$:

$$f(x)=1-x^2(1+\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{x})).$$

1. Montrer que pour tout $x\neq 0$: $1-\dfrac{3}{2}x^2\leqslant f(x)\leqslant 1-\dfrac{1}{2}x^2$.
2. En déduire que f est continue en 0 et que f atteint son maximum en 0.
3. Montrer que f est dérivable au point 0 et que sa dérivée est nulle.
4. Calculer $f'(x)$ pour $x\neq 0$.
5. On pose, pour $n\geqslant 1$, $x_n=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ et $y_n=\dfrac{1}{\pi+2n\pi}$. Montrer que $f'(x_n)<0$ et $f'(y_n)>0$.
6. Existe-il un intervalle de la forme $[0,\varepsilon]$ ($\varepsilon>0$) où f est décroissante ?

Exercice 2.

1. **Contexte**
   Pour chacune des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ suivantes, dire si f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$:
2. $f:x\mapsto \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$.
3. $f(0)=0$ et $f(x)=x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$, si $x\neq 0$.
4. $f:x\mapsto x|x|$.

Exercice 3. On considère la fonction $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par la relation $g(x)=e^{-1/x^2}$ si $x\neq 0$ et $g(0)=0$.

1. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que $g^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$ pour tout $x \neq 0$.

3. En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout $\mathbb{R}$. Quels sont les valeurs des dérivées successives en 0 ?

Exercice 4.

1. Contexte
Soit f la fonction de $]-1, 1[$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. Démontrer que f est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy - 1 = 0$.

3. En déduire les dérivées successives de f en 0.

Exercice 5.

1. Soit g une fonction de classe C^n définie sur l'intervalle $[a, b]$ à valeur dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $n+1$ réels distincts : $a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} \leqslant b$ tels que $g(x_i) = 0$.

1.1. Montrer qu'il existe $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$ vérifiant : $y_i \in]x_i, x_{i+1}[, \quad g'(y_i) = 0$.

1.2. En déduire qu'il existe $z \in]a, b[$, tel que $g^{(n)}(z) = 0$.

2. Soit f une fonction de classe C^n définit sur l'intervalle $[a, b]$ à valeur dans $\mathbb{R}$, qui s'annule en n points $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ de $[a, b]$.

On fixe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) \neq 0$ et on pose :

$$g(t) = f(t) - A \prod_{i=1}^{n} (t - x_i)$$

2.1. Trouver A tel que g s'annule en $t = x$. Dans la suite on choisit ce A, mais on n'utilisera pas sa valeur.

2.2. Montrer que la dérivée n -iéme relativement à t de $\prod_{i=1}^{n}(t - x_i)$ est $n!$.

2.3. En appliquant les résultats de la question 1. à g (avec le A choisi), montrer qu'il existe $z \in [a, b]$ tel que $f(x) = \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$.

2.4. Montrer alors qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall x \in [a, b], \quad |f(x)| \leqslant \frac{M}{n!} \prod_{i=1}^{n} |x - x_i|$.

Exercice 6. Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ ($a < b$) et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

1. Montrer que $g(x) \neq g(b)$ pour tout $x \in [a, b[$.

2. Posons $p = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ et considérons la fonction $h(x) = f(x) - pg(x)$ pour $x \in [a, b]$. Montrer que h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et en déduire qu'il existe un nombre réel $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

3. On suppose que $\lim_{x \to b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, où ℓ est un nombre réel. Montrer que

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \ell.$$

4. Application. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\text{Arccos} x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Exercice 7.

1. Contexte
Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$ et soit h la fonction affine de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$ définie par $h(a) = f(a)$ et $h(b) = f(b)$.

2. Démontrer la formule d'interpolation linéaire suivante : pour tout $x \in [a, b]$, il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f(x) = h(x) + (x - a)(x - b)\frac{f''(c)}{2}.$$

3. En déduire que pour tout $x \in [a, b]$,

$$|f(x) - h(x)| \leq \frac{(b - a)^2}{8} \sup_{[a,b]} |f''|.$$

Exercice 8. Soit f une fonction de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$. Démontrer que la suite $\left(\sum_{p=1}^{n} f\left(\frac{p}{n^2}\right)\right)$ converge et admet $\frac{f'(0)}{2}$ pour limite.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Écrire la formule de Taylor-Lagrange d'un point $x \in \mathbb{R}$ au voisinage de 0 à l'ordre n.

Exercice 10.

1. Contexte
Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que si $f'(x) \to 0$ quand $x \to \infty$, alors $\frac{f(x)}{x} \to 0$ quand $x \to \infty$.

3. La réciproque est-elle vraie ?