Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence de Mathématiques et Informatique 2020-2021

Introduction aux probabilités

TD4 - Variables aléatoires discrètes (suite)

Exercice 1. Dans la mémoire d'un ordinateur, on appelle quartet un ensemble de 4 bits (prenant la valeur 0 ou 1). On suppose que la mémoire de l'ordinateur n'a pas été initialisée. Ainsi, tous les bits de la mémoire se trouvent, indépendamment, dans l'état 1 avec probabilité $p \in [0, 1]$. On considère un quartet pris au hasard et on note X le nombre entier dont ce quartet est l'écriture en base 2.

1. Quelles valeurs peut prendre X ?

2. Calculer la probabilité que X soit impair puis $\mathbb{P}(X > 3)$.

Exercice 2. Au bowling, Pierre a une probabilité 3/4 de faire tomber toutes les quilles (« strike »). Dans une soirée, il lance 18 boules et on considère les lancers indépendants. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de « strike » réussis par Pierre.

1. Quelle est la loi de X ?

2. Calculer la probabilité pour que Pierre réussisse dix « strike ».

3. Quelle est l'espérance du nombre de « strike » réussis dans une soirée, sa variance ?

Exercice 3. Une compagnie de transports possède $n = 15$ cars, tous en état de marche en début de journée. La probabilité pour qu'un car tombe en panne ce jour est $p = 0.1$.

1. Soit X le nombre de cars tombant en panne ce jour. Quelle est la loi de probabilité de X ? En moyenne, combien de cars tombent en panne chaque jour ?

2. Un car tombé en panne sera réparé dans la journée si un réparateur est libre, la réparation prenant le reste de la journée. Sachant que la compagnie emploie 2 réparateurs, quelle est la probabilité pour que tous les cars soient en état de marche le lendemain matin ?

Exercice 4. Soient X, Y deux variables indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et $\mu > 0$.

1. Déterminer la loi de $X + Y$.

2. Quelle est la loi conditionnelle de X sachant $\{X + Y = n\}$ ($n \in \mathbb{N}$ fixé) ?

Exercice 5. Dans un bureau de poste, il y a 10 guichets. En une journée, le nombre de clients qui se présentent à ce bureau de poste est une v.a. X, de loi de Poisson de paramètre λ. On suppose que les clients choisissent au hasard un guichet, de façon indépendante. Soit Y le nombre de clients qui choisissent le guichet 1.

1. Calculer $\mathbb{P}(Y = k|X = n)$ où k et n sont des entiers naturels.

2. En déduire la loi de Y et calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 6.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, à valeurs dans l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = (1 - a)a^n$, $P(Y = n) = (1 - b)b^n$, $0 < a, b < 1$.

1. On pose $M = min(X, Y)$ et soit $k \in \mathbb{N}$.

1.1. Calculer $P(X \geq k)$.

1.2. Calculer $P(M \geq k)$ et en déduire $P(M = k)$.

1.3. Calculer $P(Y \geq X)$.

2. On suppose que $a = b$ et on pose $U = X + Y$ et $V = Y - X$.

2.1. Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(U = k)$.

2.2. Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}$, $P(Y = l/U = k)$.

2.3. Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{Z}$, $P(M = k, V = r)$. Pour cela, on distinguera les cas $r \geq 0$ et $r < 0$.

2.4. Trouver la loi de V. Que peut-on dire des variables M et V ?

Exercice 7. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la loi de probabilité est donnée par :

$y \backslash x$	-1	1	2
-1	$1/4$	0	$1/8$
1	$1/8$	$1/8$	$3/8$

1. Calculer la loi marginale de X, la loi marginale de Y. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$.

2. X et Y sont-elles indépendantes ?