Université Paris Descartes **Analyse 3**
1^{er} semestre 2019-2020

Examen

Lundi 13 janvier 2020 - Durée : 2h

Tout document, calculatrice, téléphone portable et autre appareil électronique est interdit. L'énoncé comporte 4 exercices indépendants.

Une part substantielle de la note portera sur la rédaction. Une juxtaposition d'équations sans liens logiques ni quantificateurs appropriés ne se verra pas attribuer une note élevée.

On attend que vous citiez précisément les théorèmes utilisés. En l'absence de la totalité des hypothèses requises, votre résultat sera considéré comme faux.

Exercice 1 (Question de cours, $\approx$ 3pt) : Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et x_0, ℓ, ℓ' trois réels. Démontrer que si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$ et $g(y) \xrightarrow[y \to \ell]{} \ell'$, alors $g(f(x)) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell'$.

Exercice 2 ($\approx$ 5pt) : *Particulièrement dans cet exercice, tout calcul formel sans justification rigoureuse ne sera pas pris en compte.* Le but de cet exercice est de montrer, de deux manières différentes, que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2\arctan(|x|). \tag{1}$$

1. Justifier que les expressions intervenant dans l'égalité précédente ont bien un sens et qu'on peut, sans perte de généralité, supposer $x \geq 0$.
2. Première démonstration de (1) :
   (a) Pour $x \geq 0$, posons $y = 2\arctan(x)$. Exprimer $1 - x^2$ et $1 + x^2$ en fonction de $\cos\left(\frac{y}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{y}{2}\right)$.
   (b) En déduire une expression simple de $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ en fonction de y.
   (c) Conclure.
3. Deuxième démonstration de (1) : en supposant $x > 0$, dériver (en justifiant vos calculs) la fonction $x \mapsto \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) - 2\arctan(x)$. Conclure.

Exercice 3 ($\approx$ 4pt) : Soit $a < b$ deux réels et f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b) = 0$. On suppose de plus que sa dérivée f' est strictement décroissante sur $]a, b[$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Montrer que f est strictement croissante sur $[a, c]$ et strictement décroissante sur $[c, b]$ (*Indication : pour $x < y$, on pourra utiliser l'égalité des accroissements finis sur le segment* $[x, y]$). En déduire que f admet un maximum global en c.
3. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$.

Exercice 4 ($\approx$ 9pt) : Les hypothèses de cet exercice sont les suivantes : $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue qui admet une limite finie a quand $x \to \infty$. Le but de cet exercice est de montrer que f est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

1. Montrer la propriété suivante : si pour toutes suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ de $[0, +\infty[$ vérifiant $|x_n - y_n| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, on a $|f(x_n) - f(y_n)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, alors f est uniformément continue sur $[0, +\infty[$ (*Indication : on pourra procéder par contraposée*).

Dans toute la suite de l'exercice, $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ sont deux suites de $[0, +\infty[$ telles que $|x_n - y_n| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

2. Montrer que, sous les hypothèses de l'énoncé, la fonction f est bornée sur $[0, +\infty[$.
3. En déduire que la suite $(z_n)_{n\geq 1}$ définie par $z_n = |f(x_n) - f(y_n)|$ est bornée.

Dans ce qui suit, ℓ est une valeur d'adhérence de la suite $(z_n)_{n\geq 1}$ et ϕ une extraction pour laquelle $z_{\phi(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} \ell$. On distingue deux cas :

4. On suppose dans cette question que la suite $(x_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ est bornée.
   (a) Montrer alors que $(y_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ est aussi bornée.

(b) Montrer qu'il existe une seconde extraction ψ telle que $(x_{\phi(\psi(n))})_{n\geq 1}$ est convergente.

(c) Montrer alors que $(y_{\phi(\psi(n))})_{n\geq 1}$ est convergente, de même limite.

(d) En déduire que $\ell = 0$.

5. On suppose dans cette question que la suite $(x_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ n'est pas bornée.

   (a) Montrer qu'il existe une extraction ρ telle que $x_{\phi(\rho(n))} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

   (b) Montrer que de même $y_{\phi(\rho(n))} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

   (c) Conclure que $\ell = 0$.

6. Déduire des questions précédentes que $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ puis conclure.

Fin de l'épreuve.