Université Paris Descartes **Analyse 3**
1er semestre 2017-2018

Examen
Jeudi 21 décembre 2017 - Durée : 2h

Exercice 1 (Question de cours) :

1. Enoncer le Théorème du point fixe concernant les fonctions contractantes sur un intervalle fermé I.
2. Démontrer ce théorème.

Exercice 2 : Etudier la limite de $(x+1)\exp\left(\frac{1}{x+1}\right) - x\exp\left(\frac{1}{x}\right)$ quand $x \to +\infty$. On pourra s'aider de l'égalité des accroissements finis (en justifiant son utilisation).

Exercice 3 : Soit $a < b$ et f une fonction de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, supposée de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et trois fois dérivable sur $]a,b[$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe au moins un réel $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)\frac{f'(a)+f'(b)}{2} - \frac{(b-a)^3}{12} f^{(3)}(c). \tag{1}$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé, soit la fonction

$$\varphi_\lambda(x) = f(b) - f(x) - (b-x)\frac{f'(x)+f'(b)}{2} + \lambda(b-x)^3.$$

1. Que peut-on dire de la régularité de φ_λ sur l'intervalle $[a,b]$ (continuité, dérivabilité, etc.) ?
2. Montrer qu'il est possible de choisir $\lambda \in \mathbb{R}$ (que l'on déterminera) pour lequel on peut montrer l'existence de $u \in]a,b[$ tel que $\varphi'_\lambda(u) = 0$. Cette constante λ est fixée dans la suite de cet exercice.
3. Calculer $\varphi'_\lambda(x)$ pour tout $x \in [u,b]$ et en déduire l'existence d'un $c \in]u,b[$ tel que $\varphi''_\lambda(c) = 0$.
4. En déduire (1).
5. Interpréter graphiquement l'égalité (1) dans le cas où f est une fonction polynomiale de degré 2.

Exercice 4 : Soit $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{p-1} < t_p = 1$ une subdivision de $[0,1]$ et $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $[0,1]$. On dit que φ est une fonction en escalier adaptée à la subdivision $(t_i)_{0 \leq i \leq p}$ si, pour tout $i = 1, \ldots, p$, φ est une fonction constante sur $]t_{i-1}, t_i[$.

Soit f une application continue sur $[0,1]$. Le but de cet exercice est de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions en escalier φ et ψ telles que

$$\forall x \in [0,1],\ \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x), \tag{2}$$
$$\forall x \in [0,1],\ 0 \leq \psi(x) - \varphi(x) < \varepsilon. \tag{3}$$

Dans tout cet exercice, $\varepsilon > 0$ est fixé.

1. Pour tout $i = 0, \dots, n-1$, justifier l'existence de $m_i := \inf_{t \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]} f(t)$ et $M_i := \sup_{t \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]} f(t)$ et de $x_i, y_i \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$ tels que $f(x_i) = m_i$ et $f(y_i) = M_i$.
2. En s'aidant de la question précédente, construire deux fonctions en escalier φ et ψ adaptées à la subdivision $(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1)$ qui vérifient l'encadrement (2).
3. Montrer qu'il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$ et pour tout $x, y \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
4. Déduire des questions précédentes l'inégalité (3).

Exercice 5 : Soit l'équation différentielle suivante :

$$x^2 y'(x) + (1 - 2x) y(x) = x^2. \tag{4}$$

1. Résoudre cette équation sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
2. Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ? Si oui, lesquelles ? Vous justifierez précisément votre réponse.

Fin de l'épreuve.