Algèbre 3
TD 4
Quand la dimension est finie

Licence 2 MAE 2020-2021

Université Paris Descartes

Marc Briant

Dans tout ce TD, $(\mathbb{K}, +, .)$ **désigne un corps commutatif.**

Tout sur la dimension et la supplémentarité

Exercice 1

Dans les cas suivants, montrer que E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et donner sa dimension.

1) $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \quad x + 2y + 3z + 4t = 0\}$.

2) $E = \text{Vect}(\{(1, 2, 1, 2, 1), (2, 1, 2, 1, 2), (1, 0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1)\}$ dans $\mathbb{R}^5$.

3) $E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \quad \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ f(x) = (ax^2 + bx + c) \cos x\}$

4) $E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n\}$, $p \geqslant 1$ étant un entier fixé.

Solution. Pour trouver la dimension d'un sous-ev F il faut trouver une base de F. Pour se faire il faut mettre F sous forme de vect. Par double inclusion, nous prenons $X = (x_1, .., x_n) \in F$ et exprimons des relations entre les coordonnées de X pour écrire X sous forme $x_1e_1 + .. + x_ne_n$ (tous les x_i n'apparaissent pas forcément dans cette somme !) ce qui impliquera que $X \in \text{Vect}\,(e_1, .., e_n)$ donc $F \subset \text{Vect}\,(e_1, ..e_n)$. On fera ensuite l'inclusion réciproque pour obtenir $F = \text{Vect}\,(e_1, ..e_n)$. La famille $(e_1, .., e_n)$ sera donc génératrice de F et il restera à en extraire une famille libre pour avoir une base de F.

1) • Soit $X = (x, y, z, t)$ dans E. Cela signifie que $x + 2y + 3z + t = 0$ et donc que $t = -x - 2y - 3z$ (on aurait pu aussi choisir d'exprimer x ou y ou z en fonction des autres coordonnées). Ainsi nous avons trouvé que

$$X = (x, y, z, -x - 2y - 3z) = x\underbrace{(1, 0, 0, -1)}_{e_1} + y\underbrace{(0, 1, 0, -2)}_{e_2} + z\underbrace{(0, 0, 1, -3)}_{e_3}$$

Ainsi $X \in \text{Vect}\,(e_1, e_2, e_3)$ et nous avons montré que $E \subset \text{Vect}\,(e_1, e_2, e_3)$.

• Faisons l'inclusion réciproque. Soit $X \in \text{Vect}\,(e_1, e_2, e_3)$. Cela signifie qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, -\lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3).$$

Nous calculons alors

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + (-\lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3) = 0$$

ce qui indique que $X \in E$ et nous avons fini de montrer que $E = \text{Vect}\,(()\, e_1, e_2, e_3)$.

• Ainsi (e_1, e_2, e_3) est génératrice de E. Est-elle libre ? Prenons $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

La famille est donc également libre c'est donc une base de E et $\dim\,(E) = 3$.

2) Ici E est déjà sous forme de vect puisque $E = \text{Vect}\,(e_1, e_2, e_3, e_4)$ avec

$$e_1 = (1, 2, 1, 2, 1),\ e_2 = (2, 1, 2, 1, 2),\ e_3 = (1, 0, 1, 1, 0),\ e_4 = (0, 1, 0, 0, 1).$$

La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est génératrice de E, il faut voir si c'est une base. On se donne quelques secondes pour voir si on peut trouver des CL entres les vecteurs... On remarque que

$$e_1 + e_2 = 3(e_3 + e_4) \quad \text{donc} \quad e_1 = -e_2 + 3(e_3 + e_4)$$

ce qui fait que $E = \text{Vect}(e_2, e_3, e_4)$. Y a-t-il d'autres CL possibles ? Nous n'en voyons pas immédiatement donc essayons de voir si la famille (e_2, e_3, e_4) est libre. Prenons $(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^3$:

$$\lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -\frac{1}{2}\lambda_3 \\ -\frac{1}{2}\lambda_3 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = -\lambda_2 - \lambda_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

ce qui indique que (e_2, e_3, e_4) est libre et donc est une base de E, d'où $\dim(E) = 3$.

3) • Soit $f \in E$. Cela signifie qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) &= (ax^2 + bx + c)\cos x \\ &= a\underbrace{(x^2 \cos x)}_{g_1(x)} + b\underbrace{(x \cos x)}_{g_2(x)} + c\underbrace{\cos x}_{g_3(x)}. \end{aligned}$$

Ceci prouve donc que $f = ag_1 + bg_2 + cg_3$ et donc que $E \subset \text{Vect}(g_1, g_2, g_3)$.

• Faisons l'inclusion réciproque. Soit $f \in \text{Vect}(g_1, g_2, g_3)$. Cela signifie qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3$, ce qui veut dire

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) &= \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + \lambda_3 g_3(x) \\ &= \lambda_1 x^2 \cos x + \lambda_2 x \cos x + \lambda_3 \cos x \\ &= (\lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3)\cos x \end{aligned}$$

ce qui indique bien que $f \in E$. Nous avons donc fini de démontrer que $E = \text{Vect}(g_1, g_2, g_3)$.

• La famille (g_1, g_2, g_3) est génératrice de E donc il faut voir si elle est libre. Prenons $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 = 0 &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + \lambda_3 g_3(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1 x^2 \cos x + \lambda_2 x \cos x + \lambda_3 \cos x = 0. \end{aligned}$$

Nous allons donc appliquer l'égalité ci-dessus à des x particuliers (et faciles à trouver !) pour obtenir des renseignements sur les λ_i. Le plus simple est $x = 0$ qui nous donne donc $0 + 0 + \lambda_3 = 0$. Puis essayons $x = \pi$ qui donne $-\pi^2\lambda_1 + \pi\lambda_2 = 0$ et essayons avec $x = 2\pi$ qui donne $4\pi^2\lambda_2 + 2\pi\lambda_2 = 0$. Or

$$\begin{cases} -\pi^2\lambda_1 + \pi\lambda_2 = 0 \\ 4\pi^2\lambda_2 + 2\pi\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

et donc comme $\lambda_3 = 0$ aussi, la famille (g_1, g_2, g_3) est libre et c'est donc une base de E et nous concluons que $\dim(E) = 3$.

4) Pour obtenir des bases quand il s'agit de l'espace des suites il est toujours intéressant de voir une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme un n-uplet infini : $u = (u_0, u_1, u_2, ..., u_n, ...)$.

• Si l'on ne sait pas trop où aller, regardons quelques cas plus parlants.

∗ Cas $p = 1$: Alors $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ signifie que $u_n = u_{n+1}$ pour tout n. La suite u est donc constante d'où

$$u = (u_0, u_0, .., u_0, ..) = u_0(1, 1, 1, .., 1, ..)$$

et donc $u \in \text{Vect}(U_1)$ avec $U_1 = (1, 1, ..)$ la suite constante égale à 1.

∗ Cas $p = 2$: Alors $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ signifie que $u_n = u_{n+2}$ pour tout n. La suite u ressemble donc à

$$u = (u_0, u_1, u_0, u_1, .., u_0, u_1, ..) = u_0(1, 0, 1, 0, .., 1, 0, ..) + u_1(0, 1, 0, 1, .., 0, 1, ..)$$

et donc $u \in \text{Vect}(U_1, U_2)$ avec $U_1 = (1, 0, 1, 0, .., 1, 0, ..)$ et $U_2 = (0, 1, 0, 1, .., 0, 1, ..)$.

• Attaquons-nous alors proprement au cas p quelconque. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, cela signifie que pour tout n, $u_n = u_{n+p}$. Ainsi la suite u s'écrit

$$\begin{aligned} u &= (u_0, u_1, u_2, ..., u_{p-1}, u_0, u_1, u_2, ..., u_{p-1}, .., u_0, u_1, u_2.., u_{p-1}, ..) \\ &= u_0 \underbrace{(1, 0, .., 0, 1, 0, .., 0, 1, ...)}_{1 \text{ en positions } 0,p,2p,3p,...} + u_1 \underbrace{(0, 1, 0, .., 0, 1, 0, ..)}_{1 \text{ en positions } 1,p+1,2p+1,3p+1,...} + \cdots \\ &\quad + u_{p-1} \underbrace{(0, 0, ..., 1, 0, ..., 0, 1, 0..)}_{1 \text{ en position } p-1,2p-1,3p-1,..} \\ &= u_0 U_0 + u_1 U_1 + \cdots + u_{p-1} U_{p-1} \end{aligned}$$

ce qui montre que $u \in \text{Vect}(U_0, .., U_{p-1})$ où les suites U_k sont définies comme ci-dessus c'est-à-dire des 0 partout sauf aux positions k, $p + k$, $2p + k$,.. où elles valent 1. Ainsi nous venons de montrer que $E \subset \text{Vect}(U_0, .., U_{p-1})$.

• Montrons alors l'inclusion réciproque. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \text{Vect}(U_0, .., U_{p-1})$. Par définition il existe λ_0, λ_1,..,λ_{p-1} des réels tels que

$$\begin{aligned} u &= \lambda_0 U_0 + \lambda_1 U_1 + \cdots + \lambda_{p-1} U_{p-1} \\ &= (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{p-1}, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{p-1}, .., \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 .., \lambda_{p-1}, ..) \end{aligned}$$

ce qui implique bien que pour tout n, $u_n = u_{n+p}$ et donc que $u \in E$. Nous venons de montrer que $E = \text{Vect}(U_0, .., U_{p-1})$.

• La famille $(U_0, .., U_{p-1})$ est donc génératrice de E, regardons si elle est libre pour voir si c'est une base. Prenons λ_0, λ_1,..,λ_{p-1} des réels tels que

$$\lambda_0 U_0 + \lambda_1 U_1 + \cdots + \lambda_{p-1} U_{p-1} = 0$$

ce qui s'écrit en terme de termes des suites

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{p-1}, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{p-1}, .., \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 .., \lambda_{p-1}, ..) = (0, 0, 0, ...)$$

et donc $\lambda_1 = .. = \lambda_{p-1} = 0$. La famille est donc libre et ainsi c'est une base de E d'où $\dim(E) = p$.

Exercice 2

Nous nous plaçons dans $\mathbb{R}^3$, trouver une base puis un supplémentaire des sous-ev suivants

1) $F = \text{Vect}(\{(1,1,0), (2,1,1)\})$.
2) $F = \text{Vect}(\{(1,0,0), (0,1,1), (1,1,1)\}$.
3) $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\}$.
4) $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \quad x_1 - \sqrt{3}x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \quad \text{et} \quad x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$.

Solution. Comme pour l'exercice précédent, nous allons essayer de mettre F sous la forme d'un vect d'une famille. Après nous étudierons si cette famille est libre auquel cas nous aurons une base, sinon nous trouverons des CL pour diminuer la taille de la famille et en extraire une base. Trouver un supplémentaire est un peu plus ardu puisqu'il faut trouver un nouveau vect qui soit en somme direct avec F.

1) • Ici on a déjà $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$ avec $e_1 = (1,1,0)$ et $e_2 = (2,1,1)$. Dès lors (e_1, e_2) est génératrice de F. Regardons si elle est libre. Prenons λ_1 et λ_2 des réels :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

donc la famille est libre et c'est une base de F.

• Nous voulons un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$ c'est-à-dire un sous-ev de $\mathbb{R}^3$ appelé G tel que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$. Grâce aux dimensions nous savons que $\dim(G) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(F) = 3 - 2 = 1$ et ainsi que G est de la forme $\text{Vect}(e_3)$. Il nous suffit donc de trouver un vecteur e_3 tel que (e_1, e_2, e_3) soit une famille libre. Construire est un exercice difficile en maths donc soit nous essayons quelques vecteurs "faciles" (de la base canonique ou n'appartenant pas à F par exemple) soit nous faisons la méthode "bourrine" : nous prenons $e_3 = (x, y, z)$ et nous trouvons (x, y, z) tels que le système

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$$

implique $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Essayons d'abord le vecteur $e_3 = (1,0,0)$. Prenons λ_1, λ_2 et λ_3 des réels :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Ainsi la famille (e_1, e_2, e_3) est libre donc $\mathbb{R}^3 = F \oplus \text{Vect}((1,0,0))$.

2)• Nous avons déjà que $F = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,1)$ et $e_3 = (1,1,1)$. Donc la famille (e_1, e_2, e_3) est génératrice de F. Pour voir si c'est une base nous devons voir si elle est libre. Avant de faire la définition, regardons si nous n'avons pas des CL évidentes. Par exemple nous voyons ici que $e_1 + e_2 = e_3$ et donc $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = \text{Vect}(e_1, e_2)$. La famille (e_1, e_2) est donc génératrice de F.
Regardons si elle est libre. Prenons λ_1, λ_2 des réels :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

ce qui indique que (e_1, e_2) est libre et c'est donc une base de F.

• Nous voulons un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$ c'est-à-dire un sous-ev de $\mathbb{R}^3$ appelé G tel que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$. Grâce aux dimensions nous savons que $\dim(G) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) - \dim(F) = 3 - 2 = 1$ et ainsi que G est de la forme $\text{Vect}\,(e_3)$. Voir **1)** pour les méthodes de construction d'un supplémentaire.
Essayons un vecteur simple comme $e_3 = (0,0,1)$ (comme ça on ne touche pas les deux premières lignes du système ci-dessus qui sont simples !) et regardons si la famille (e_1, e_2, e_3) est libre. Prenons λ_1, λ_2 et λ_3 des réels :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Ainsi la famille (e_1, e_2, e_3) est libre donc $\mathbb{R}^3 = F \oplus \text{Vect}\,((0,0,1))$.

3) Ici nous devons donc d'abord mettre F sous forme d'un vect pour trouver une famille génératrice. Faisons les habituelles doubles inclusions.

• Soit $X = (x,y,z) \in F$, cela signifie que $x - 2y + 3z = 0$ et donc que $x = 2y - 3z$ (nous aurions tout aussi bien pu exprimer y ou z en fonction des autres coordonnées). Ainsi

$$X = (2y - 3z, y, z) = y \underbrace{(2,1,0)}_{e_1} + z \underbrace{(-3,0,1)}_{e_2}$$

ce qui prouve que $X \in \text{Vect}\,(e_1, e_2)$ et donc que $F \subset \text{Vect}\,(e_1, e_2)$.

• Faisons l'inclusion réciproque. Prenons X dans $\text{Vect}\,(e_1, e_2)$, cela signifie qu'il existe λ_1 et λ_2 deux réels tels que

$$X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = (2\lambda_1 - 3\lambda_2, \lambda_1, \lambda_2).$$

Calculons alors

$$(2\lambda_1 - 3\lambda_2) + 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$$

donc $X \in F$. Nous venons de montrer que $F = \text{Vect}\,(e_1, e_2)$.

• La famille (e_1, e_2) est génératrice de F donc regardons si elle est libre. Prenons λ_1 et λ_2 des réels :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

ce qui indique que (e_1, e_2) est libre et est donc une base de F.

• Nous voulons un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$ c'est-à-dire un sous-ev de $\mathbb{R}^3$ appelé G tel que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$. Grâce aux dimensions nous savons que $\dim(G) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) - \dim(F) = 3 - 2 = 1$ et ainsi que G est de la forme $\text{Vect}\,(e_3)$. Voir **1)** pour les méthodes de construction d'un supplémentaire.
Essayons un vecteur simple comme $e_3 = (1,0,0)$ (comme ça on ne touche pas les deux dernières lignes du système ci-dessus qui sont simples !) et regardons si la famille (e_1, e_2, e_3) est libre. Prenons λ_1, λ_2 et λ_3 des réels :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Ainsi la famille (e_1, e_2, e_3) est libre donc $\mathbb{R}^3 = F \oplus \text{Vect}\,((1,0,0))$.

4) Ici nous devons donc d'abord mettre F sous forme d'un vect pour trouver une famille génératrice. Faisons les habituelles doubles inclusions.

• Soit $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in F$, cela signifie que

$$\begin{cases} x_1 - \sqrt{3}x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_3 - x_4 \\ x_1 = \sqrt{3}x_2 - x_3 + 2x_4 = x_3(-1+\sqrt{3}) + x_4(2-\sqrt{3}) \end{cases}$$

(nous aurions tout aussi bien pu exprimer x_3 ou x_4 en fonction des autres coordonnées). Ainsi

$$X = (x_3(-1+\sqrt{3}) + x_4(2-\sqrt{3}), x_3 - x_4, x_3, x_4) = x_3 \underbrace{(-1+\sqrt{3}, 1, 1, 0)}_{e_1} + x_4 \underbrace{(2-\sqrt{3}, -1, 0, 1)}_{e_2}$$

ce qui prouve que $X \in \text{Vect}\,(e_1, e_2)$ et donc que $F \subset \text{Vect}\,(e_1, e_2)$.

• Faisons l'inclusion réciproque. Prenons X dans $\text{Vect}\,(e_1, e_2)$, cela signifie qu'il existe λ_1 et λ_2 deux réels tels que

$$X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = (\lambda_1(-1+\sqrt{3}) + \lambda_2(2-\sqrt{3}), \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2).$$

Calculons alors

$$\left(\lambda_1(-1+\sqrt{3}) + \lambda_2(2-\sqrt{3})\right) - \sqrt{3}\,(\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$$

et

$$(\lambda_1 - \lambda_2) - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

donc $X \in F$. Nous venons de montrer que $F = \text{Vect}\,(e_1, e_2)$.

• La famille (e_1, e_2) est génératrice de F donc regardons si elle est libre. Prenons λ_1 et λ_2 des réels :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1(-1+\sqrt{3}) + \lambda_2(2-\sqrt{3}) = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

ce qui indique que (e_1, e_2) est libre et est donc une base de F.

• Nous voulons un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$ c'est-à-dire un sous-ev de $\mathbb{R}^4$ appelé G tel que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$. Grâce aux dimensions nous savons que $\dim(G) = \dim\left(\mathbb{R}^4\right) - \dim(F) = 4 - 2 = 1$ et ainsi que G est de la forme $\text{Vect}\,(e_3, e_4)$. Voir **1)** pour les méthodes de construction d'un supplémentaire avec cette fois-ci deux vecteurs à trouver.
Essayons deux vecteurs simples comme $e_3 = (1,0,0,0)$ et $e_4 = (0,1,0,0)$ (comme ça on ne touche pas les deux dernières lignes du système ci-dessus qui sont simples !) et regardons si la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre. Prenons λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 des réels :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1(-1+\sqrt{3}) + \lambda_2(2-\sqrt{3}) + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Ainsi la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre donc $\mathbb{R}^4 = F \oplus \text{Vect}\,((1,0,0,0),(0,1,0,0))$.

Exercice 3

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F et G deux sous-ev de E.

1) **[*]** Supposons que $\dim(F) = \dim(G)$. Montrer alors que F et G on un supplémentaire commun. *Une récurrence descendante sur* $\dim(F)$ *est une bonne idée...*

2) Supposons que F et G soit supplémentaires dans E et on appelle $(e_1, .., e_p)$ une base de F. Fixons $a \in G$. Montrer que $\text{Vect}(\{e_1 + a, .., e_p + a\})$ est un supplémentaire de G.

Solution. Pour ces exercices de supplémentaires il y a deux cas

* quand la dimension est infinie : bien entendu c'est Analyse-Synthèse dans l'immense majorité des cas.
* quand la dimension est finie et là montrer que $E = F \oplus G$ peut se faire de différente façons.
  - Analyse-Synthèse bien évidemment (très utile quand par exemple F ou G sont des noyaux d'endomorphismes)
  - Avec les dimensions. En effet, nous nous souvenons du cours qui dit que si deux sous-ev ont même dimension et que l'un est inclus dans l'autre alors ils sont égaux. Ainsi en dimension finie, si l'on connaît explicitement F et G alors il faut montrer que $F \cap G = \{0_E\}$ ce qui implique que $F \oplus G$. Puis comme $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$ et que $F \oplus G \subset E$, si on trouve $\dim(F)$, $\dim(G)$ et que $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ alors la conclusion tombe : $E = F \oplus G$.
  - Enfin, si l'on connait bien F et G on peut trouver une base de $F = \text{Vect}\,(f_1, .., f_p)$, trouver une base de $G = \text{Vect}\,(g_1, .., g_q)$ et montrer que $(f_1, .., f_p, g_1, .., g_p)$ est libre et que $p + q = \dim(E)$, nous aurons donc trouvé une base de E et $E = F \oplus G$.

1) Cet exercice est très difficile et nécessite du recul sur la notion de dimension et de sous-ev en dimension finie. Il s'adresse essentiellement aux étudiantes et étudiants voulant aller plus loin.

Pour clarifier les notations nous appellerons $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = \dim(G) = p$. Considérons alors $(f_1, .., f_p)$ une base de F (rappelons alors que $F = \text{Vect}\,(f_1, .., f_p)$) et $(g_1, .., g_p)$ une base de G (rappelons alors que $G = \text{Vect}\,(g_1, .., g_p)$).

• **Analysons l'énoncé.** L'exercice nous demande de montrer qu'il existe un sous-ev H de E tel que

$$E = F \oplus H = G \oplus H.$$

D'après la formule des dimensions nous savons que $\dim(H) = \dim(E) - \dim(F) = n - p$ et donc l'exercice nous demande de construire des vecteurs e_1,..,e_{n-p} tels que

$$E = \text{Vect}\,(f_1, .., f_p) \oplus \text{Vect}\,(e_1, ..e_{n-p}) = \text{Vect}\,(g_1, .., g_p) \oplus \text{Vect}\,(e_1, ..e_{n-p})$$

c'est-à-dire tels que $(f_1, .., f_p, e_1, .., e_{n-p})$ et $(g_1, .., g_p, e_1, .., e_{n-p})$ soient des bases de E. En dimension finie être une base ou être une famille libre à n vecteurs est équivalent. Nous devons donc trouver des vecteurs e_1,..,e_{n-p} tels que les familles $(f_1, .., f_p, e_1, .., e_{n-p})$ et $(g_1, .., g_p, e_1, .., e_{n-p})$ soient libres.

• Résolvons maintenant l'exercice. Essayons tout d'abord avec des valeurs de p connues.

* Si $n = p$ alors $\dim(F) = \dim(E)$ donc $F = E$ et de même $G = E$ donc $G = F = E$ et nous avons $\{0_E\}$ qui est un supplémentaire commun de F et de G.
* Si $p = n - 1$ alors peut-on trouver un vecteur e_1 tel que $(f_1, .., f_{n-1}, e_1)$ et $(g_1, .., g_{n-1}, e_1)$ soit libres ?
  - Si $F = G$ alors un tel vecteur existe puisque $f_i = g_i$ et que $\dim(E) = \dim(F) + 1$.

– Si $F \neq G$ alors comme ils ont même dimension il vient que $F \not\subset G$ donc il existe $x_F \in F$ tel que $x_F \notin G$ et de même $G \not\subset F$ donc il existe $x_G \in G$ tel que $x_G \notin F$. Dès lors posons $e_1 = x_F + x_G$ alors $e_1 \notin F$ (sinon $e_1 - x_F = x_G \in F$ ce qui n'est pas) et $e_1 \notin G$ (sinon $e_1 - x_G = x_F \in G$ ce qui n'est pas). Montrons alors que $(f_1, .., f_{n-1}, e_1)$ est libre. Prenons $\lambda_1, .., \lambda_n$ des scalaires tels que

$$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_{n-1} f_{n-1} + \lambda_n e_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_n e_1 = -\lambda_1 f_1 - \cdots - \lambda_{n-1} f_{n-1}$$

ce qui implique que $\lambda_n e_1 \in F$ ce qui n'est possible que si $\lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$. Ensuite la liberté de la famille $(f_1, .., f_{n-1})$ entraîne que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$. Ainsi $(f_1, .., f_{n-1}, e_1)$ est libre et c'est donc une base de E. Pour les mêmes raisons $(g_1, .., g_{n-1}, e_1)$ est une base de E. Nous avons montré que

$$\text{Si } p = n-1 \text{ alors } \exists e_1 \in E, \quad E = F \oplus \operatorname{Vect}(e_1) = G \oplus \operatorname{Vect}(e_1).$$

∗ Supposons alors que le résultat soit vrai pour $p = n$, $p = n-1$,...,$p = n-k$. Supposons alors que $p = n-k-1$.

– Si $F = G$ alors le résultat est évident puisque dans un ev de dimension finie il existe toujours un supplémentaire.

– Si $F \neq G$ alors comme ils ont même dimension il vient comme tout à l'heure que il existe $x_F \in F$ tel que $x_F \notin G$ et de même $G \not\subset F$ donc il existe $x_G \in G$ tel que $x_G \notin F$. Notons alors $e_1 = x_F + x_G$ et comme ci-dessus nous prouvons que $(f_1, .., f_{n-k-1}, e_1)$ et $(g_1, .., g_{n-k-1}, e_1)$ sont deux familles libres. Nous définissons alors

$$F' = F \oplus \operatorname{Vect}(e_1) \quad \text{et} \quad G' = G \oplus \operatorname{Vect}(e_1).$$

Ces deux sous-ev ont même dimension avec $\dim(F') = \dim(G') = n-k$. Nous pouvons donc utiliser l'hypothèse de récurrence et savoir qu'il existe H un sous-ev tel que

$$E = F' \oplus H = G' \oplus H$$

ce qui implique que

$$E = F \oplus (\operatorname{Vect}(e_1) \oplus H) = G \oplus (\operatorname{Vect}(e_1) \oplus H)$$

et donc F et G ont bien un supplémentaire commun.

2) Nous avons $E = F \oplus G$ et comme $\dim(F) = p$ il vient $\dim(G) = \dim(E) - p$. Notons $F' = \operatorname{Vect}(e_1 + a, .., e_p + a)$. Comme nous l'avons décrit plus haut, montrons que $F' \cap G = \{0_E\}$ puis que $\dim(F') = p$ (une analyse-synthèse, bien qu'assez théorique donc un peu difficile fonctionne aussi très bien ici !).

• Prenons $X \in F' \cap G$. Cela signifie que $X \in G$ et que $X \in F'$. Comme $X \in F'$ cela veut dire qu'il existe λ_1,..,λ_p tels que

$$X = \lambda_1(e_1 + a) + \cdots + \lambda_p(e_p + a).$$

Nous avons transcrit toutes les hypothèses donc essayons de rassembler ce qui se ressemble et voyons ce qu'on peut en dire :

$$X = \underbrace{\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p}_{\in F} + \underbrace{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_p)\, a}_{\in G}.$$

Nous n'avons pas encore utilisé que $X \in G$ donc rassemblons un peu plus tout ce qui est dans G et F nous pouvons utiliser cela ainsi :

$$\underbrace{\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p}_{\in F} = \underbrace{X - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_p)\, a}_{\in G}.$$

Nous venons donc de trouver que le vecteur $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$ appartient à $F \cap G$ mais comme F et G sont supplémentaires nous avons $F \cap G = \{0_E\}$ et ainsi $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = 0_E$.
Enfin, nous nous rappelons que $(e_1, .., e_p)$ est une base de F donc une famille libre donc il vient $\lambda_1 = .. = \lambda_p = 0_{\mathbb{K}}$. Mais alors $X = 0_E$! Nous concluons donc que $F' \cap G = \{0_E\}$ et donc F' et G sont en somme directe.

• D'après le cours $\dim(F' \oplus G) = \dim(F') + \dim(G) = \dim(F') + \dim(E) - p$. Trouvons alors $\dim(F')$. Nous savons déjà que la famille $(e_1 + a, .., e_p + a)$ est génératrice de F', montrons qu'elle est libre comme ça nous aurons trouvé une base de F', et donc sa dimension. Prenons λ_1,..,λ_p des scalaires tels que $\lambda_1(e_1 + a) + \cdots + \lambda_p(e_p + a) = 0$. Comme ci-dessus, réunissons ce qui vit dans les mêmes sous-ev et nous trouvons

$$\underbrace{\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p}_{\in F} = \underbrace{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_p)\, a}_{\in G}.$$

Donc $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$ appartient à $F \cap G$ mais comme $F \cap G = \{0_E\}$ il vient $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$ et enfin, comme $(e_1, .., e_p)$ est libre, $\lambda_1 = .. = \lambda_p = 0_{\mathbb{K}}$.
Nous venons de montrer que $(e_1 + a, .., e_p + a)$ est libre donc c'est une base de F' et ainsi $\dim(F') = p$. Ainsi

$$F' \oplus G \subset E \text{ et } \dim(F' \oplus G) = \dim(E)$$

ce qui implique que

$$E = F' \oplus G.$$

Applications linéaires et dimension finie

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes

1) $f(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
2) $f(x,y,z,t) = (2x+y+z, x+y+t, x+z-t)$ de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$.
3) $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par $f(0,0,1) = (1,0)$, $f(1,0,1) = (1,1)$ et $f(1,1,1) = (0,1)$. Nous commencerons par justifier que f est bien définie.
4) $f \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ définie par $f(1,2) = (1,2,0)$, $f(2,1) = (1,0,2)$. Nous commencerons par justifier que f est bien définie.

Solution. Comme dans les Exercices 1 et 2 nous allons par double inclusion écrire les ensembles demandés sous forme de vect puis trouver une base à partir de cette famille génératrice (voir la description de la méthode en exercice 1).

1) f est bien définie sur $\mathbb{R}^3$ et elle est bien linéaire.

Noyau de f :

• Soit $X = (x,y,z) \in \operatorname{Ker}(f)$. Cela signifie que $f(X) = 0$ c'est-à-dire

$$\begin{cases} y-z=0 \\ z-x=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z.$$

Ainsi nous avons montré que $X = (x,x,x) = x(1,1,1)$ et donc que $X \in \operatorname{Vect}((1,1,1))$ ce qui implique que $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Vect}((1,1,1))$.

• Faisons l'inclusion réciproque. Soit $X \in \operatorname{Vect}((1,1,1))$ ce qui signifie qu'il existe λ_1 réel tel que $X = \lambda_1(1,1,1) = (\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1)$ et donc nous calculons

$$f(X) = (\lambda_1 - \lambda_1, \lambda_1 - \lambda_1, \lambda_1 - \lambda_1) = (0,0,0)$$

et donc $X \in \operatorname{Ker}(f)$. Nous avons donc montré que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}((1,1,1))$.

• Le vecteur $(1,1,1)$ est générateur de $\operatorname{Ker}(f)$ et comme il n'est pas nul il est libre. Le vecteur $(1,1,1)$ est une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

Image de f :

• Soit $X \in \operatorname{Im}(f)$. Cela signifie qu'il existe $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = f(Y)$ et donc

$$X = (y_2 - y_3, y_3 - y_1, y_1 - y_2) = y_1 \underbrace{(0,-1,1)}_{e_1} + y_2 \underbrace{(1,0,-1)}_{e_2} + y_3 \underbrace{(-1,1,0)}_{e_3}.$$

Ainsi $X \in \operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ ce qui montre que $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_3)$.

• Faisons l'inclusion réciproque. Soit $X \in \operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ ce qui signifie qu'il existe des réels λ_1, λ_2, λ_3 tels que

$$X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = (\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_3 - \lambda_1, \lambda_1 - \lambda_2) = f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Ainsi nous avons $X \in \operatorname{Im}(f)$ et nous avons prouvé que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_3)$.

• La famille (e_1, e_2, e_3) est génératrice de $\operatorname{Im}(f)$. Pour savoir si elle est libre regardons si nous pouvons rapidement trouver des CL, sinon nous ferons la définition de la liberté. Nous remarquons que

$$e_1 + e_2 + e_3 = (0,0,0) \text{ donc } e_3 = -e_1 - e_2$$

et donc $\operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_3) = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$. Ainsi (e_1, e_2) est génératrice de $\operatorname{Im}(f)$. Prouvons qu'elle est libre en prenant λ_1 et λ_2 deux réels :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

ce qui prouve que la famille (e_1, e_2) est libre donc c'est une base de $\operatorname{Im}(f)$.

2) f est bien définie sur $\mathbb{R}^4$ et elle est bien linéaire.

Noyau de f :

• Soit $X = (x,y,z,t) \in \operatorname{Ker}(f)$. Cela signifie que $f(X) = 0$ c'est-à-dire

$$\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x+y+t=0 \\ x+z-t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x-y \\ t = -x-y \\ x + (-2x-y) - (-x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x-y \\ t = -x-y \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Ainsi nous avons montré que

$$X = (x, y, -2x-y, -x-y) = x \underbrace{(1,0,-2,-1)}_{e_1} + y \underbrace{(0,1,-1,-1)}_{e_2}$$

et donc que $X \in \text{Vect}(e_1, e_2)$ ce qui implique que $\text{Ker}(f) \subset \text{Vect}(e_1, e_2)$.

• Faisons l'inclusion réciproque. Soit $X \in \text{Vect}(e_1, e_2)$ ce qui signifie qu'il existe λ_1 et λ_2 réels tels que

$$X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = (\lambda_1, \lambda_2, -2\lambda_1 - \lambda_2, -\lambda_1 - \lambda_2)$$

et donc nous calculons

$$\begin{aligned} f(X) &= (2\lambda_1 + \lambda_2 + (-2\lambda_1 - \lambda_2), \lambda_1 + \lambda_2 + (-\lambda_1 - \lambda_2), \lambda_1 + (-2\lambda_1 - \lambda_2) - (-\lambda_1 - \lambda_2)) \\ &= (0,0,0) \end{aligned}$$

et donc $X \in \text{Ker}(f)$. Nous avons donc montré que $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(e_1, e_2)$.

• La famille (e_1, e_2) est génératrice de $\text{Ker}(f)$, regardons si elle est libre. Prenons λ_1 et λ_2 des réels

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Cela prouve que (e_1, e_2) est libre donc c'est une base de $\text{Ker}(f)$.

Image de f :

• Soit $X \in \text{Im}(f)$. Cela signifie qu'il existe $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = f(Y)$ et donc

$$\begin{aligned} X &= (2y_1 + y_2 + y_3, y_1 + y_2 + y_4, y_1 + y_3 - y_4) \\ &= y_1 \underbrace{(2,1,1)}_{e_1} + y_2 \underbrace{(1,1,0)}_{e_2} + y_3 \underbrace{(1,0,1)}_{e_3} + y_4 \underbrace{(0,1,-1)}_{e_4}. \end{aligned}$$

Ainsi $X \in \text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$ ce qui montre que $\text{Im}(f) \subset \text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$.

• Faisons l'inclusion réciproque. Soit $X \in \text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$ ce qui signifie qu'il existe des réels λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 tels que

$$X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = (2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4, \lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4) = f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4).$$

Ainsi nous avons $X \in \text{Im}(f)$ et nous avons prouvé que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$.

• La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est génératrice de $\text{Im}(f)$. Pour savoir si elle est libre regardons si nous pouvons rapidement trouver des CL, sinon nous ferons la définition de la liberté. Bien évidemment ici, comme $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}^3$ nous savons bien que la famille qui a 4 vecteurs est liée (si on va plus loin, avec le théorème du rang, nous savons même que $\dim(\text{Im}(f)) = 2$...). Nous remarquons que

$$e_2 = e_3 + e_4 \text{ donc } \text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4) = \text{Vect}(e_1, e_3, e_4)$$

mais aussi que

$$e_1 = 2e_3 + e_1 \text{ donc } \text{Vect}(e_1, e_3, e_4) = \text{Vect}(e_3, e_4).$$

Ainsi (e_3, e_4) est génératrice de $\text{Im}(f)$. Prouvons qu'elle est libre en prenant λ_3 et λ_4 deux réels :

$$\lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

ce qui prouve que la famille (e_3, e_4) est libre donc c'est une base de $\text{Im}(f)$.

3) La difficulté de cet exercice est que nous ne connaissons pas f explicitement à la base. Il nous faudra donc passer par la définition d'une application linéaire :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$$

et sans cesse nous rappeler que les coordonnées que nous regarderons seront dans la nouvelle base e_i et pas dans la base canonique.

• L'énoncé nous donne f en trois points seulement. Le cours nous a appris qu'une application linéaire est parfaitement définie par ses valeurs sur une base. Pour que f soit bien définie il suffit donc que les vecteurs $e_1 = (0,0,1)$, $e_2 = (1,0,1)$ et $e_3 = (1,1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ et que nous avons trois vecteurs la famille sera une base ssi elle est libre. Prenons trois réels λ_1, λ_2 et λ_3 :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Ainsi (e_1, e_2, e_3) est libre donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
Ainsi f est bien définie et nous avons sa formule

$$f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = (x + y, y + z).$$

Noyau de f :

• Soit $X \in \text{Ker}(f)$, ce qui signifie que $f(X) = 0$. Comme (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = xe_1 + ye_2 + ze_3$ et donc comme $f(X) = 0$ il vient $x + y = 0$ et $y + z = 0$ donc $x = z = -y$. Ainsi

$$X = xe_1 - xe_2 + xe_3 = x[e_1 - e_2 + e_3] = x(0, 1, 1)$$

ce qui indique que $X \in \text{Vect}((0, 1, 1))$ et donc que $\text{Ker}(f) \subset \text{Vect}((0, 1, 1))$.

• Faisons l'inclusion réciproque. Soit $X \in \text{Vect}((0, 1, 1))$ ce qui signifie qu'il existe λ réel tel que $X = \lambda(0, 1, 1)$. Pour calculer $f(X)$ il nous faut les coordonnées de X sur la base (e_1, e_2, e_3). D'après le calcul ci-dessus nous savons que

$$X = \lambda(0, 1, 1) = \lambda[e_1 - e_2 + e_3] = \lambda e_1 - \lambda e_2 + \lambda e_3$$

et donc $f(X) = (\lambda + (-\lambda), (-\lambda) + \lambda) = (0, 0)$ ce qui indique que $X \in \text{Ker}(f)$ et donc que $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((0, 1, 1))$.

• Le vecteur $(0, 1, 1)$ est générateur de $\text{Ker}(f)$ et comme il n'est pas nul il est libre. Le vecteur $(0, 1, 1)$ est une base de $\text{Ker}(f)$

Image de f :

• Soit $X \in \text{Im}(f)$ cela signifie qu'il existe $Y \in \mathbb{R}^3$ tel que $X = f(Y)$. Comme (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ il existe des réels y_1, y_2 et y_3 tels que $Y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ et donc par définition de f

$$X = f(Y) = (y_1 + y_2, y_2 + y_3) = y_1 \underbrace{(1, 0)}_{f_1} + y_2 \underbrace{(1, 1)}_{f_2} + y_3 \underbrace{(0, 1)}_{f_3}$$

ce qui indique que $X \in \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ et donc que $\text{Im}(f) \subset \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.

• Faisons l'inclusion réciproque. Soit $X \in \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$, cela signifie qu'il existe λ_1, λ_2 et λ_3 tels que

$$X = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2 + \lambda_3) = f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3).$$

Ainsi $X \in \text{Im}(f)$ et nous avons montré que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.

• La famille (f_1, f_2, f_3) est génératrice de $\text{Im}(f)$. Essayons de voir si nous trouvons de CL avant de regarder si on est libre. Bien entendu ici nous avons 3 vecteurs dans un ev de dimension 2 donc nous savons que nous ne sommes pas libres. Nous remarquons alors que

$$f_2 = f_1 + f_3 \text{ donc } \text{Vect}(f_1, f_2, f_3) = \text{Vect}(f_1, f_3).$$

Ainsi (f_1, f_3) est génératrice de $\text{Im}(f)$ et c'est une famille libre (évident puisque base canonique) donc c'est une base de $\text{Im}(f)$.

4) La difficulté de cet exercice est que nous ne connaissons pas f explicitement à la base. Il nous faudra donc passer par la définition d'une application linéaire :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$$

et sans cesse nous rappeler que les coordonnées que nous regarderons seront dans la nouvelle base e_i et pas dans la base canonique.

• L'énoncé nous donne f en deux points seulement. Le cours nous a appris qu'une application linéaire est parfaitement définie par ses valeurs sur une base. Pour que f soit bien définie il suffit donc que les vecteurs $e_1 = (1, 2)$ et $e_2 = (2, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$. Comme $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ et que nous avons deux vecteurs la famille sera une base ssi elle est libre. Prenons deux réels λ_1 et λ_2 :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Ainsi (e_1, e_2) est libre donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$.
Ainsi f est bien définie et nous avons sa formule

$$f(xe_1 + ye_2) = xf(e_1) + yf(e_2) = (x + y, 2x, 2y).$$

Noyau de f :

• Soit $X \in \text{Ker}(f)$, ce qui signifie que $f(X) = 0$. Comme (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $X = xe_1 + ye_2$ et donc comme $f(X) = 0$ il vient $(x + y, 2x, 2y) = (0, 0, 0)$ donc $x = y = 0$. Ainsi

$$X = 0e_1 + 0e_2 = (0, 0)$$

ce qui indique donc que $\text{Ker}(f) \subset \{(0, 0)\}$. L'inclusion réciproque est directe puisque $(0, 0)$ est contenu dans tous les sous-ev de $\mathbb{R}^2$. Ainsi $\text{Ker}(f) = \{(0, 0)\}$.

Image de f :

• Soit $X \in \text{Im}(f)$ cela signifie qu'il existe $Y \in \mathbb{R}^2$ tel que $X = f(Y)$. Comme (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ il existe des réels y_1 et y_2 tels que $Y = y_1e_1 + y_2e_2$ et donc par définition de f

$$X = f(Y) = (y_1 + y_2, 2y_1, 2y_2) = y_1 \underbrace{(1, 2, 0)}_{f_1} + y_2 \underbrace{(1, 0, 2)}_{f_2}$$

ce qui indique que $X \in \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2)$ et donc que $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2)$.

• Faisons l'inclusion réciproque. Soit $X \in \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2)$, cela signifie qu'il existe λ_1 et λ_2 tels que

$$X = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = (\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1, 2\lambda_2) = f(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2).$$

Ainsi $X \in \mathrm{Im}\,(f)$ et nous avons montré que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2)$.

• La famille (f_1, f_2) est génératrice de $\mathrm{Im}\,(f)$. Essayons de voir si nous trouvons de CL avant de regarder si on est libre. On n'en voit pas donc prenons λ_1 et λ_2 des réels :

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2, 2\lambda_1, 2\lambda_2) = (0,0,0) \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

donc (f_1, f_2) est libre et c'est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Exercice 5 *: Du rang, rien que du rang*

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et soient $f \in L(E,F)$ et $g \in L(F,G)$. Montrer que

1. $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min\{\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f)\}$.
2. Si f est surjective alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$.
3. Si g est injective alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

Solution. Quand on nous parle d'applications linéaires en dimension finie il n'y a que deux choses que nous pouvons faire : utiliser la définition de linéarité et le théorème du rang. Ainsi quand on est bloqué on écrit le théorème du rang et on se débloque ! Enfin, nous nous rappelons qu'en dimension finie, injectivité, surjectivité et bijectivité sont la même chose pour les endomorphismes. Enfin, quand on nous parle de $\mathrm{rg}\,(f)$ la définition nous dit que c'est $\dim\,(\mathrm{Im}\,(f))$ donc en réalité on nous demande de regarder $\mathrm{Im}\,(f)$!

1) On nous demande des renseignements sur les rangs de trois applications linéaires donc cela veut dire qu'il faut comparer leurs images. Et si on n'y arrive pas...théorème du rang et on ne réfléchit qu'après !

• Essayons de relier $\mathrm{Im}\,(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}\,(g)$. Soit $x \in \mathrm{Im}\,(g \circ f)$, cela signifie qu'il existe $y \in E$ tel que $x = (g \circ f)(y) = g(f(y))$ donc $x \in \mathrm{Im}\,(g)$. Nous venons de montrer que $\mathrm{Im}\,(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\,(g)$ donc $\dim\,(\mathrm{Im}\,(g \circ f)) \leqslant \dim\,(\mathrm{Im}\,(g))$ ce qui est exactement

$$\mathrm{rg}\,(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}\,(g)\,.$$

• Si on essaie de comparer $\mathrm{Im}\,(g \circ f)$ avec $\mathrm{Im}\,(f)$ nous n'y arrivons pas (mais il faut essayer !). Nous sommes bloqués donc appliquons le théorème du rang. Nous pouvons l'appliquer à f et $g \circ f$ donc faisons les deux et nous aviserons après :

$$\dim\,(E) = \dim\,(\mathrm{Ker}\,(f)) + \mathrm{rg}\,(f) \;\text{ et }\; \dim\,(E) = \dim\,(\mathrm{Ker}\,(g \circ f)) + \mathrm{rg}\,(g \circ f)\,.$$

En combinant les deux égalités nous obtenons donc

$$\mathrm{rg}\,(g \circ f) - \mathrm{rg}\,(f) = \dim\,(\mathrm{Ker}\,(f)) - \dim\,(\mathrm{Ker}\,(g \circ f))$$

et donc pour relier les rangs il suffit de relier les noyaux.
Prenons alors $x \in \mathrm{Ker}\,(f)$ cela signifie que $f(x) = 0_F$ et donc $g(f(x)) = g(0_F) = 0_G$ ce qui indique que $x \in \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$ et donc que $\mathrm{Ker}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$ et en passant aux dimensions $\dim\,(\mathrm{Ker}\,(f)) \leqslant \dim\,(\mathrm{Ker}\,(g \circ f))$ d'où :

$$\mathrm{rg}\,(g \circ f) - \mathrm{rg}\,(f) = \dim\,(\mathrm{Ker}\,(f)) - \dim\,(\mathrm{Ker}\,(g \circ f)) \leqslant 0.$$

Nous avons donc bien prouvé que $\mathrm{rg}\,(g \circ f) \leqslant \min\{\mathrm{rg}\,(g)\,, \mathrm{rg}\,(f)\}$.

2) On nous dit que f est surjective cela signifie que

$$\forall x_F \in F,\; \exists x_E \in E, \quad x_F = f(x_E).$$

On nous demande de comparer les rangs donc nous comparons les images. Nous avons déjà prouvé en 1) que $\mathrm{Im}\,(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\,(g)$, montrons l'inclusion réciproque.
Soit $x \in \mathrm{Im}\,(g)$, cela signifie qu'il existe $x_F \in F$ tel que $x = g(x_F)$. D'après la surjectivité de f nous avons qu'il existe $x_E \in E$ tel que $x_F = f(x_E)$ et ainsi $x = g(x_F) = g(f(x_E))$ et donc $x \in \mathrm{Im}\,(g \circ f)$. Nous venons donc de prouver que $\mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Im}\,(g \circ f)$ donc nous avons l'égalité $\mathrm{Im}\,(g) \subset \mathrm{Im}\,(g \circ f)$. En passant aux dimensions cela donne bien $\mathrm{rg}\,(g) = \mathrm{rg}\,(g \circ f)$.

3) On nous dit que g est injective ce qui signifie pour une application linéaire que $\mathrm{Ker}\,(g) = \{0_F\}$. Nous devons comparer les rangs donc nous voulons comparer les images. En relisant la question 1) nous nous rappelons que nous n'arrivons pas à relier $\mathrm{Im}\,(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ et que nous avons appliqué le théorème du rang pour trouver que

$$\mathrm{rg}\,(g \circ f) - \mathrm{rg}\,(f) = \dim\,(\mathrm{Ker}\,(f)) - \dim\,(\mathrm{Ker}\,(g \circ f))\,.$$

Il nous faut donc comparer les noyaux et en question 1) nous avons déjà prouvé que $\mathrm{Ker}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$. Montrons donc l'inclusion réciproque.
Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$ cela signifique que $g(f(x)) = 0_G$ et donc par définition que $f(x) \in \mathrm{Ker}\,(g)$. Mais g est injective donc son noyau est réduit à 0_F ce qui implique que $f(x) = 0_F$ et donc que $x \in \mathrm{Ker}\,(f)$. Nous venons de montrer que $\mathrm{Ker}\,(g \circ f) \subset \mathrm{Ker}\,(f)$, ce qui implique l'égalité $\mathrm{Ker}\,(g \circ f) = \mathrm{Ker}\,(f)$ et donc

$$\mathrm{rg}\,(g \circ f) - \mathrm{rg}\,(f) = \dim\,(\mathrm{Ker}\,(f)) - \dim\,(\mathrm{Ker}\,(g \circ f)) = 0.$$

Exercice 6 : *Et encore que du rang !*

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et u et v deux endomorphismes de E. Démontrer les assertions suivantes

1) Si $u+v$ est bijectif et $v \circ u = 0$ alors $\dim(E) = \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.
2) Si $u^3 = 0$ alors $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(u^2) \leqslant \dim(E)$.
3) $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u^2) \Leftrightarrow E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.
4) Si $E = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$ et $E = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)$ alors ce sont des sommes directes.

Solution. Quand on nous parle d'applications linéaires en dimension finie il n'y a que deux choses que nous pouvons faire : utiliser la définition de linéarité et le théorème du rang. Ainsi quand on est bloqué on écrit le théorème du rang et on se débloque ! Enfin, nous nous rappelons qu'en dimension finie, injectivité, surjectivité et bijectivité sont la même chose pour les endomorphismes. Enfin, quand on nous parle de $\mathrm{rg}\,(f)$ la définition nous dit que c'est $\dim\left(\mathrm{Im}\,(f)\right)$ donc en réalité on nous demande de regarder $\mathrm{Im}\,(f)$!
Retenons toutefois qu'une fois que nous utilisons le théorème du rang nous devrons jongler avec des dimensions plutôt que des sous-ev, ça peut demander un peu d'astuce.

1) Nous avons que $u+v$ est bijectif ce qui signifie que

$$\forall x \in E,\ \exists! y_x \in E, \quad x = (u+v)(y_x).$$

Nous avons ensuite $v \circ u = 0$ donc pour tout x de E, $v(u(x)) = 0_E$.

• Si nous regardons la formule qu'on nous demande de montrer cela nous fait penser à $E = \mathrm{Im}\,(u) \oplus \mathrm{Im}\,(v)$. Montrons-le ! D'après notre hypothèse, pour tout x de E nous avons

$$x = (u+v)(y_x) = \underbrace{u(y_x)}_{\in \mathrm{Im}(u)} + \underbrace{v(y_x)}_{\in \mathrm{Im}(v)}$$

et donc $x \in \mathrm{Im}\,(u) + \mathrm{Im}\,(v)$ ce qui implique que $E \subset \mathrm{Im}\,(u) + \mathrm{Im}\,(v)$ et donc

$$E = \mathrm{Im}\,(u) + \mathrm{Im}\,(v)\,.$$

• Regardons si la somme est directe. Prenons $x \in \mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v)$ cela signifie que
  * Il existe $y_u \in E$ tel que $x = u(y_u)$ et
  * Il existe $y_v \in E$ tel que $x = v(y_v)$.

Nous ne nous sommes pas encore servi de l'hypothèse $v \circ u = 0$ donc faisons-le en composant par v : $v(x) = v(u(y_u)) = 0$ ce qui nous donne $x \in \mathrm{Ker}\,(v)$ et donc $\mathrm{Im}\,(v) \cap \mathrm{Im}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(v)$ que l'on ne connait pas... Nous semblons bloqués alors appliquons des théorèmes du rang.
Nous pouvons appliquer le théorème du rang à u et v, faisons-le :

$$\dim(E) = \dim\left(\mathrm{Ker}\,(v)\right) + \mathrm{rg}\,(v) = \dim\left(\mathrm{Ker}\,(u)\right) + \mathrm{rg}\,(u)\,.$$

Comme $v \circ u = 0$ et que nous n'avons plus que des dimensions il faut le traduire en terme de dimension (pas comme ci-dessus). Avoir $v \circ u = 0$ cela signifie que $\mathrm{Im}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(v)$ et donc $\mathrm{rg}\,(u) \leqslant \dim\left(\mathrm{Ker}\,(v)\right)$. Ainsi

$$\dim(E) = \dim\left(\mathrm{Ker}\,(v)\right) + \mathrm{rg}\,(v) \geqslant \mathrm{rg}\,(u) + \mathrm{rg}\,(v)\,.$$

Il semblerait que nous ne soyons plus très loin... Nous avions prouvé que $E = \mathrm{Im}\,(u) + \mathrm{Im}\,(v)$ donc en passant aux dimensions

$$\dim(E) = \dim\left(\mathrm{Im}\,(u) + \mathrm{Im}\,(v)\right) = \mathrm{rg}\,(u) + \mathrm{rg}\,(v) - \dim\left(\mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,(v)\right) \leqslant \mathrm{rg}\,(u) + \mathrm{rg}\,(v)$$

ce qui nous donne au final que

$$\dim(E) = \mathrm{rg}\,(u) + \mathrm{rg}\,(v)\,.$$

2) Contrairement à l'exercice ci-dessus nous n'avons pas d'égalité mais une inégalité donc on ne peut pas s'attendre à ce que $E = \mathrm{Im}\,(u) + \mathrm{Im}\left(u^2\right)$. Nous ne savons donc pas bien quels sous-ev construire ou regarder.

• Ecrivons alors le théorème du rang pour voir

$$\dim(E) = \mathrm{rg}\,(u) + \dim\left(\mathrm{Ker}\,(u)\right).$$

Il semblerait donc que si l'on peut comparer $\mathrm{Ker}\,(u)$ et $\mathrm{Im}\left(u^2\right)$ on obtiendrait une relation.

• Prenons alors $x \in \mathrm{Im}\left(u^2\right)$, cela signifie qu'il existe $y \in E$ tel que $x = u^2(y)$. Nous n'avons pas utilisé l'hypothèse sur u donc on compose et on obtient $u(x) = u^3(y) = 0$ ce qui indique que $x \in \mathrm{Ker}\,(u)$. Ainsi $\mathrm{Im}\left(u^2\right) \subset \mathrm{Ker}\,(u)$ et donc $\mathrm{rg}\left(u^2\right) \leqslant \dim\left(\mathrm{Ker}\,(u)\right)$. En combinant ça avec la relation du rang :

$$\dim(E) = \mathrm{rg}\,(u) + \dim\left(\mathrm{Ker}\,(u)\right) \geqslant \mathrm{rg}\,(u) + \mathrm{rg}\left(u^2\right).$$

3) Nous avons une équivalence à montrer donc nous faisons une implication puis l'autre. De plus, nous référons au début de l'exercice 3 pour les méthodes pour montrer la supplémentarité en dimension finie.

$\Rightarrow$:

Supposons que $\text{rg}(u) = \text{rg}(u^2)$ cela veut dire que $\dim(\text{Im}(u)) = \dim(\text{Im}(u^2))$.

• Commençons par montrer que $\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0_E\}$. Soit $x \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u)$ cela signifie que $u(x) = 0$ et qu'il existe $y_x \in E$ tel $x = u(y_x)$. En combinant ces deux propriétés nous trouvons $u(x) = 0 = u(u(y_x)) = u^2(y_x)$. Cela nous indique que $y_x \in \text{Ker}(u^2)$. Nous paraissons alors bloqués donc utilisons le théorème du rang, nous pouvons le faire sur u et sur u^2 :

$$\dim(E) = \text{rg}(u) + \dim(\text{Ker}(u)) = \text{rg}(u^2) + \dim(\text{Ker}(u^2))$$

et grâce à l'hypothèse $\text{rg}(u) = \text{rg}(u^2)$ nous trouvons que $\dim(\text{Ker}(u)) = \dim(\text{Ker}(u^2))$. Mais comme $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$ (puisque si $u(x) = 0_E$ alors bien sûr $u(u(x)) = 0_E$) nous avons que

$$\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2).$$

Nous avions trouvé que $y_x \in \text{Ker}(u^2)$ mais alors $y_x \in \text{Ker}(u)$ et ainsi $x = u(y) = 0_E$. Cela conclut que $\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0_E\}$ et donc nous avons la somme directe $\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.

Regardons alors les dimensions :

$$\dim(\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)) = \dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim(E)$$

grâce au théorème du rang. Cette égalité de dimension donne que $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.

$\Leftarrow$:

Supposons que $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$. Cela signifie que

$$\forall x \in E,\ \exists!(x_k, x_i) \in \text{Ker}(u) \times E, \quad x = x_k + u(x_i).$$

Nous devons comparer les rangs de u et de u^2 donc comparons $\text{Im}(u)$ et $\text{Im}(u^2)$.

• Soit $x \in \text{Im}(u^2)$, cela signifie qu'il existe $y \in E$ tel que $x = u^2(y) = u(u(y))$ donc par définition $x \in \text{Im}(u)$. Nous venons de montrer que $\text{Im}(u^2) \subset \text{Im}(u)$.

• Soit $x \in \text{Im}(u)$ cela signifie qu'il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$. Utilisons alors notre hypothèse de somme directe. Nous pouvons le faire avec x ou y, avec x ça ne donne rien donc on essaie avec y :

$$\exists(y_k, y_i) \in \text{Ker}(u) \times E, \quad y = y_k + u(y_i).$$

Ainsi

$$x = u(y) = u(y_k + u(y_i)) = u(y_k) + u(u(y_i)) = u(u(y_i)).$$

Ceci montre que $x \in \text{Im}(u^2)$ et donc que $\text{Im}(u) \subset \text{Im}(u^2)$.
Au final nous avons montré que $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$ et donc en passant aux dimensions nous trouvons bien $\text{rg}(u) = \text{rg}(u^2)$.

4) • Les sommes proposées ne sont pas directes donc comme nous pensons appliquer un jour le théorème du rang regardons ce que cela nous dit en termes de dimensions. L'égalité $E = \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$ donne

$$\dim(E) = \dim(\text{Im}(u) + \text{Im}(v)) = \text{rg}(u) + \text{rg}(v) - \dim(\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)). \tag{1}$$

L'égalité $E = \text{Ker}(u) + \text{Ker}(v)$ donne

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(u) + \text{Ker}(v)) = \dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Ker}(v)) - \dim(\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)). \tag{2}$$

• Nous pouvons appliquer le théorème du rang à u et à v donc faisons-le !

$$\dim(E) = \text{rg}(u) + \dim(\text{Ker}(u)) = \text{rg}(v) + \dim(\text{Ker}(v)).$$

En sommant (1) et (2) nous trouvons

$$\begin{aligned} 2\dim(E) = &[\text{rg}(u) + \dim(\text{Ker}(u))] + [\text{rg}(v) + \dim(\text{Ker}(v))] \\ &- \dim(\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)) - \dim(\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)). \end{aligned}$$

Ainsi grâce au théorème du rang écrit au-dessus il vient que

$$\dim(\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)) + \dim(\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)) = 0$$

et comme les dimensions sont positives nous trouvons

$$\dim(\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)) = 0 \text{ et } \dim(\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)) = 0.$$

Cela montre que

$$\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v) = \{0_E\} \text{ et } \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v) = \{0_E\}$$

et donc que les sommes sont bien directes.

Exercice 7 : *Autour de la nilpotence*

Prenons E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et $u \in L(E)$ tel que u soit nilpotent d'ordre $p \geqslant 1$ et $u \neq 0_{L(E)}$.

1) Montrer que $p \leqslant n$. *Nous pourrons réfléchir à ce que veut dire que u^{p-1} est non nul. Après, ce que nous aimons dans les ev de dimension finie ce sont les bases...*
2) Si $p = 2$ montrer que $\mathrm{Id}_E - u$ est un automorphisme de E et donner $(\mathrm{Id}_E - u)^{-1}$. Généraliser au cas $p \leqslant n$ en regardant $\mathrm{Id}_E + u + u^2 + .. + u^{p-1}$.

Solution. La définition d'être nilpotent d'ordre $p \geqslant 1$ est que $u^{p-1} \neq 0_{L(E)}$ et $u^p = 0_{L(E)}$. Attention, nous parlons bien ici d'application linéaire donc ce sont des puissances de compositions, pas de multiplications !

1) • Par définition u^{p-1} n'est pas l'application nulle donc il existe un vecteur $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$. L'énoncé nous aide en nous parlant de base en dimension finie et il nous demande de comparer p et $n = \dim(E)$. Connaissons-nous une famille à p vecteurs non nuls ? OUI :

$$(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{p-1}(x)).$$

Si cette famille est libre alors forcément $p \leqslant n$.

• Montrons donc qu'elle est libre en prenant λ_0,..,λ_{p-1} des scalaires tels que

$$\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0.$$

Nous ne nous sommes pas encore servi du fait que $u^p = 0_{L(E)}$, faisons-le apparaître en composant par u

$$\begin{aligned} 0_E &= u\left(\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x)\right) = \lambda_0 u(x) + \lambda_1 u^2(x) + \cdots + \lambda_{p-1} u^p(x) \\ &= \lambda_0 u(x) + \lambda_1 u^2(x) + \cdots + \lambda_{p-2} u^{p-2}(x). \end{aligned}$$

Recomposons encore par u pour trouver

$$0_E = \lambda_0 u^2(x) + \lambda_1 u^3(x) + \cdots + \lambda_{p-3} u^{p-3}(x)$$

et encore une fois et encore une fois jusqu'à finalement obtenir

$$0_E = \lambda_0 u^{p-1}(x).$$

Mais comme $u^{p-1}(x) \neq 0_E$ nous trouvons enfin $\lambda_0 = 0_{\mathbb{K}}$.

• Il nous reste donc

$$\lambda_1 u(x) + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0.$$

Nous recommençons exactement le même procédé en composant une fois de moins par u et on finit avec

$$\lambda_1 u^{p-1}(x) = 0_E$$

et donc $\lambda_1 = 0_{\mathbb{K}}$. En itérant ce procédé nous trouvons donc bien au final que $\lambda_0 = \lambda_1 = .. = \lambda_{p-1} = 0_{\mathbb{K}}$. Ainsi la famille $(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre dans un espace à p dimension donc $p \leqslant n$.

2) • Comme $p = 2$ nous avons $u^2 = 0_{L(E)}$. On nous demande de nous intéresser à $v = \mathrm{Id}_E - u$. Nous allons essayer de trouver un endomorphisme w tel que $v \circ w = w \circ v = \mathrm{Id}_E$. w doit commuter avec v, les endomorphismes "faciles" qui commutent avec v sont Id_E et v donc nous allons essayer de les faire apparaître partout où c'est possible.
Nous voulons faire apparaître du u^2 donc composons v par v :

$$\begin{aligned} v \circ v &= (\mathrm{Id}_E - u) \circ (\mathrm{Id}_E - u) = \mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E - u \circ \mathrm{Id}_E - \mathrm{Id}_E \circ u + u \circ u = -2u + \mathrm{Id}_E \\ &= 2v - \mathrm{Id}_E \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathrm{Id}_E = 2v - v \circ v = v \circ (2\mathrm{Id}_E - v) = (2\mathrm{Id}_E - v) \circ v$$

et donc v est un automorphisme dont l'inverse est

$$(\mathrm{Id}_E - u)^{-1} = v^{-1} = 2\mathrm{Id}_E - v = \mathrm{Id}_E + u.$$

• L'exercice semble nous aiguiller vers une application particulière donc calculons

$$\begin{aligned} (\mathrm{Id}_E - u) \circ (\mathrm{Id}_E + u + u^2 + .. + u^{p-1}) &= \left(\mathrm{Id}_E \circ (\mathrm{Id}_E + u + u^2 + .. + u^{p-1})\right) \\ &\quad - \left(u \circ (\mathrm{Id}_E + u + u^2 + .. + u^{p-1})\right) \\ &= \left(\mathrm{Id}_E + u + u^2 + .. + u^{p-1}\right) \\ &\quad - \left(u + u^2 + u^3 + .. + u^{p-1} + u^p\right) \\ &= \mathrm{Id}_E - u^p = \mathrm{Id}_E. \end{aligned}$$

Et comme u et Id_E commutent nous calculons de même

$$(\mathrm{Id}_E + u + u^2 + .. + u^{p-1}) \circ (\mathrm{Id}_E - u) = \mathrm{Id}_E.$$

Ainsi si u est nilpotent d'ordre p nous avons montré que $(\mathrm{Id}_E - u)$ est un automorphisme et que

$$(\mathrm{Id}_E - u)^{-1} = \mathrm{Id}_E + u + u^2 + .. + u^{p-1}.$$

Exercice 8 : *Parlons formes linéaires*

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et φ et ψ deux formes linéaires non nulles sur E. Démontrer les propositions suivantes.

1) $\exists e \in E, \quad \varphi(e)\psi(e) \neq 0_{\mathbb{K}}$.

2) $\forall e \in E\backslash\mathrm{Ker}(\varphi), \quad E = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Vect}(e)$.

Solution. Lorsque nous avons affaire à des formes linéaires nous savons uniquement que l'ensemble de ces formes est de dimension la dimension n de E et aussi, grâce au théorème du rang, que soit la forme linéaire est nulle soit son noyau est de dimension $d-1$ (et donc son image est de dimension 1) c'est donc un hyperplan. Et ce qu'on aime bien avec les hyperplans c'est que leur supplémentaires sont de dimension 1. Il faudra donc penser, quand on est bloqué, aux supplémentaires quand on travaille avec des formes linéaire.

1)• Comme φ est non nulle il existe $e_\varphi \in E$ tel que $\varphi(e_\varphi) \neq 0_{\mathbb{K}}$. Comme ψ est non nulle il existe $e_\psi \in E$ tel que $\psi(e_\psi) \neq 0_{\mathbb{K}}$. Nous imaginons que nous avons déjà construit deux vecteurs donc ils vont jouer un rôle. Nous avons trois cas.

* Si $\psi(e_\varphi) \neq 0_{\mathbb{K}}$ alors $\varphi(e_\varphi)\psi(e_\varphi) \neq 0_{\mathbb{K}}$ et donc on a résolu le problème.
* Si $\varphi(e_\psi) \neq 0_{\mathbb{K}}$ alors $\varphi(e_\psi)\psi(e_\psi) \neq 0_{\mathbb{K}}$ et donc on a résolu le problème.
* Sinon $\psi(e_\varphi) = 0_{\mathbb{K}}$ et $\varphi(e_\psi) = 0_{\mathbb{K}}$. Dès lors, ce que l'on aime faire dans les ev ce sont les CL et nous pensons donc à

$$e = e_\varphi + e_\psi.$$

Nous calculons $\varphi(e)\psi(e) = \varphi(e_\varphi)\psi(e_\psi) \neq 0_{\mathbb{K}}$.

Dans tous les cas nous avons trouvé un vecteur e tel que $\varphi(e)\psi(e) \neq 0_{\mathbb{K}}$.

2) Comme φ n'est pas nulle nous savons que $E\backslash\mathrm{Ker}\,(\varphi) \neq \emptyset$. Prenons alors $e \in E\backslash\mathrm{Ker}\,(\varphi)$. Nous relisons attentivement les méthodes pour prouver que deux sous-ev sont supplémentaires rédigées à l'exercice 3 ! Donc soit on fait une analyse-synthèse soit on part sur les dimension.

• Les deux fonctionnent bien mais comme nous avons une forme linéaire non nulle nous savons par le cours que $\dim(\mathrm{Ker}\,(\varphi)) = \dim(E) - 1$ ce qui nous indique déjà que

$$\dim(\mathrm{Ker}\,(\varphi)) + \dim(\mathrm{Vect}\,(e)) = \dim(E)\,.$$

• Il nous reste donc à prouver que $\mathrm{Ker}\,(\varphi) \cap \mathrm{Vect}\,(e) = \{0_E\}$. Soit donc $x\mathrm{Ker}\,(\varphi) \cap \mathrm{Vect}\,(e)$. Cela signifie que $\varphi(x) = 0_{\mathbb{K}}$ et que il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda e$. Combinons ces deux propriétés pour obtenir

$$0_{\mathbb{K}} = \varphi(x) = \varphi(\lambda e) = \lambda\varphi(E).$$

Comme $\varphi(e) \neq 0_{\mathbb{K}}$ il vient que $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ et par suite $x = 0_E$. Ainsi $\mathrm{Ker}\,(\varphi) \cap \mathrm{Vect}\,(e) = \{0_E\}$.

• Avoir $\mathrm{Ker}\,(\varphi) \cap \mathrm{Vect}\,(e) = \{0_E\}$ et $\dim(\mathrm{Ker}\,(\varphi)) + \dim(\mathrm{Vect}\,(e)) = \dim(E)$ implique que

$$E = \mathrm{Ker}\,(\varphi) \oplus \mathrm{Vect}\,(e)\,.$$

Exercice 9

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension 2, e un vecteur non nul de E et $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(e) \neq 0_{\mathbb{K}}$. Nous définissons

$$f: \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x + \varphi(x)e \end{array}.$$

1) Montrer que $f \in L(E)$ puis que l'ensemble des invariants de f est un sous-ev de dimension 1.

2) Montrer que $f \in GL(E) \Leftarrow \varphi(e) \neq -1_{\mathbb{K}}$.

Solution. Lorsque nous avons affaire à des formes linéaires nous savons uniquement que l'ensemble de ces formes est de dimension la dimension n de E et aussi, grâce au théorème du rang, que soit la forme linéaire est nulle soit son noyau est de dimension $d-1$ (et donc son image est de dimension 1) c'est donc un hyperplan. Et ce qu'on aime bien avec les hyperplans c'est que leur supplémentaires sont de dimension 1. Il faudra donc penser, quand on est bloqué, aux supplémentaires quand on travaille avec des formes linéaire.

1) • f est bien définie sur E donc montrons qu'elle est linéaire. Soient α, β dans $\mathbb{K}$ et x et y dans E.

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= (\alpha x + \beta y) + \varphi(\alpha x + \beta y)e = (\alpha x + \beta y) + (\alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y))\,e \\ &= \alpha(x + \varphi(x)e) + \beta(y + \varphi(y)e) = \alpha f(x) + \beta f(y) \end{aligned}$$

ce qui indique que $f \in L(E)$.

• On nous demande une dimension donc nous devons trouver une base. L'idée de base est d'écrire l'ensemble des invariants de f sous forme de vect puis extraire une base de cette famille génératrice. Nous rappelons que

$$x \text{ invariant de } f \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)\,.$$

$*$ Soit alors $x \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$. Cela signifie que $f(x) = x$ c'est-à-dire que

$$x = x + \varphi(x)e \text{ d'où } \varphi(x)e = 0_E.$$

Comme $e \neq 0_E$ nous en déduisons que $\varphi(x) = 0_0$ donc $x \in \operatorname{Ker}(\varphi)$. Nous venons de montrer que $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Ker}(\varphi)$. Ce n'est pas sous forme d'un vect mais au moins nous avons trouvé quelque chose, continuons et nous verrons !
$*$ Faisons l'inclusion réciproque. Soit $x \in \operatorname{Ker}(\varphi)$. cela signifie que $\varphi(x) = 0_E$ et donc par calcul $f(x) = x$ donc x est un invariant de f. Cela conclut le fait que $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) = \operatorname{Ker}(\varphi)$.
$*$ Nous ne connaissons pas $\operatorname{Ker}(\varphi)$ mais connait-on sa dimension ? Sans doute puisque le cours nous indique que tout ce que nous savons sur les formes linéaires est que soit elles sont nulles soit leur noyau est de dimension $\dim(E) - 1$. Ici $\dim(E) = 2$ ce qui implique que $\dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) = 1$. Ainsi

$$\dim(\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)) = 1.$$

2) On nous demande de montrer une équivalence alors nous faisons une implication puis l'autre.
$\underline{\Leftarrow :}$ Supposons que $f \in GL(E)$. Cela signifie que f est bijective : injective et surjective. Ainsi nous avons $\operatorname{Ker}(f) = 0_E$. D'où :

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \quad f(x) \neq 0_E \Leftrightarrow x + \varphi(x)e \neq 0_E.$$

Appliquons cela à un x en particulier et les seuls que nous connaissons sont 0_E et e donc appliquons cela à e :

$$(1 + \varphi(e))e \neq 0_E.$$

Comme $e \neq 0_E$ il vient de suite que $\varphi(e) \neq -1_{\mathbb{K}}$.
$\underline{\Rightarrow :}$ Supposons que $\varphi(e) \neq -1_{\mathbb{K}}$. Nous nous rappelons que en dimension finie, pour montrer la bijectivité il suffit de montrer l'injectivité. Nous allons donc simplement montrer que f est injectif, c'est-à-dire que $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$.
• Soit $x \in \operatorname{Ker}(f)$. Cela signifie que $f(x) = 0_E$ et donc que $x = -\varphi(x)e$ ce qui nous apprend que $x \in \operatorname{Vect}(e)$ et ainsi $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Vect}(e)$.
• Prenons alors $x \in \operatorname{Vect}(e)$. Cela signifie qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda e$. Calculons alors

$$f(x) = \lambda e + \varphi(\lambda e) = (1 + \varphi(e))x$$

et donc comme $1 + \varphi(e) \neq 0_E$, le seul vecteur de $\operatorname{Vect}(e)$ qui est dans $\operatorname{Ker}(f)$ est 0_E. Nous venons de voir que les vecteurs de $\operatorname{Ker}(f)$ sont dans $\operatorname{Vect}(e)$ et que le seul vecteur de $\operatorname{Vect}(e)$ qui annule f est 0_E. Ainsi

$$\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\} \text{ donc } f \text{ est injective donc } f \text{ est bijective car } \dim(E) < \infty.$$

Un problème complet pour s'entraîner

Exercice 10

Considérons un $\mathbb{K}$-ev E de dimension 3 et appelons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Pour a et b deux réels nous définissons $f \in L(E)$ par

$$f_{a,b}(e_1) = e_1 + (a-1)e_2, \quad f_{a,b}(e_2) = (b-1)e_2, \quad f_{a,b}(e_3) = ae_1 + be_3.$$

a) Pour $x = (x_1, x_2, x_3)$ dans $\mathcal{B}$, donner les coordonnées de $f_{a,b}(x)$ dans $\mathcal{B}$.
b) Trouver tous les b tels que $f_{2,b} \in GL(E)$.
c) Expliciter $\operatorname{Ker}(f_{2,1})$ et $\operatorname{Im}(f_{2,1})$. Ces sous-ev sont-ils supplémentaires ?
d) Existe-t-il un couple (a, b) pour lequel $f_{a,b}$ est un projecteur. Si oui, caractériser ce projecteur.
e) Soit $F = \operatorname{Vect}(\{e_1, e_2\})$.
  (i) Donner une équation cartésienne de F dans $\mathcal{B}$.
  (ii) Montrer que $f_{0,0}(F) = F$.
  (iii) Montrer que $s : F \longrightarrow F$ définie par $\forall x \in F$, $s(x) = f_{0,0}(x)$ est une symétrie de F que l'on caractérisera.

Solution. Nous référons à tous les débuts d'exercices précédents pour bien connaître les stratégies et méthodes en dimension finie.

a) Si $x = (x_1, x_2, x_3)$ dans $\mathcal{B}$ cela signifie que $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$. Comme $f_{a,b}$ est linéaire nous pouvons calculer directement

$$\begin{aligned} f_{a,b}(x) = f_{a,b}(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) &= x_1 f_{a,b}(e_1) + x_2 f_{a,b}(e_2) + x_3 f_{a,b}(e_3) \\ &= x_1(e_1 + (a-1)e_2) + x_2(b-1)e_2 + x_3(ae_1 + be_3) \\ &= (x_1 + ax_3)e_1 + ((a-1)x_1 + (b-1)x_2)e_2 + bx_3e_3 \end{aligned}$$

ce qui nous donne en terme de coordonnées sur la base $\mathcal{B}$

$$f_{a,b}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + ax_3, (a-1)x_1 + (b-1)x_2, bx_3)\,.$$

b) Nous sommes en dimension finie donc $f_{2,b}$ est bijective ssi elle est injective donc ssi $\operatorname{Ker}(f_{2,b}) = \{0_E\}$. Trouvons donc $\operatorname{Ker}(f_{2,b})$.

- Soit $X = (x_1, x_2, x_3) \in \operatorname{Ker}(f_{2,b})$. Cela signifie que $f(x) = 0_E$ et donc d'après la question a) :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + (b-1)x_2 = 0 \\ bx_3 = 0 \end{cases}.$$

Nous voyons donc 2 cas pour résoudre la dernière ligne du système. Regardons-les tous les 2 :

* Cas $b \neq 0_{\mathbb{K}}$. Dans ce cas il vient donc

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + (b-1)x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 = 0 \\ (b-1)x_2 = 0 \end{cases}.$$

Pour résoudre cette dernière égalité nous avons encore deux cas :

- Cas $b \neq 1_{\mathbb{K}}$. Dans ce cas nous avons donc $x_2 = 0_{\mathbb{K}}$. Et donc $x_1 = x_2 = x_3 = 0_{\mathbb{K}}$ ce qui implique que $x = 0_E$ et donc $\operatorname{Ker}(f_{2,b}) = \{0_{\mathbb{K}}\}$.
- Cas $b = 1_{\mathbb{K}}$. Dans ce cas nous avons donc $x_1 = x_3 = 0_{\mathbb{K}}$ mais aucune information sur x_2 donc $x = (0, x_2, 0) = x_2(0,1,0)$. Ce qui implique que $x \in \operatorname{Vect}(e_2)$ et donc $\operatorname{Ker}(f_{2,1}) \subset \operatorname{Vect}(e_2)$. Faisons l'inclusion réciproque, si $x \in \operatorname{Vect}(e_2)$ cela signifie qu'il existe λ dans $\mathbb{K}$ tel que $x = \lambda e_2 = (0, \lambda, 0)$. On calcule alors

$$f_{2,1}(0, \lambda, 0) = (0 + 2 \times 0, 0 + 0 \times \lambda, 0) = (0,0,0)$$

et donc $x \in \operatorname{Ker}(f_{2,1})$ ce qui conclut $f_{2,1} = \operatorname{Vect}(e_2)$.

* Cas $b = 0_{\mathbb{K}}$. Dans ce cas nous avons

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = -2x_3 \end{cases}.$$

Ainsi il vient $x = (-2x_3, -2x_3, x_3) = x_3(-2,-2,1)$ ce qui signifie que $x \in \operatorname{Vect}((-2,-2,1))$ et donc que $\operatorname{Ker}(f_{2,0}) \subset \operatorname{Vect}((-2,-2,1))$. Faisons l'inclusion réciproque, si $x \in \operatorname{Vect}((-2,-2,1))$ cela signifie qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda(-2,-2,1) = (-2\lambda, -2\lambda, \lambda)$ et nous calculons

$$f_{2,0}(x) = (-2\lambda + 2\lambda, -2\lambda - (-2\lambda), 0 \times \lambda) = (0,0,0)$$

et donc $x \in \operatorname{Ker}(f_{2,0})$ ce qui conclut $\operatorname{Ker}(f_{2,0}) = \operatorname{Vect}((-2,-2,1))$.

- Résumons donc ce que nous venons de trouver :

$$\operatorname{Ker}(f_{2,b}) = \begin{cases} \{0_E\} & \text{si } b \notin \{0,1\} \\ \operatorname{Vect}(e_2) & \text{si } b = 1 \\ \operatorname{Vect}((-2,-2,1)) & \text{si } b = 0 \end{cases}$$

Ainsi $f_{2,b}$ est bijective si et seulement si $b \notin \{0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}\}$.

c)Nous avons déjà trouvé que $\operatorname{Ker}(f_{2,1}) = \operatorname{Vect}(e_2)$. Trouvons alors $\operatorname{Im}(f_{2,1})$ sous la forme d'un vect d'une famille libre.

- Soit $x \in \operatorname{Im}(f_{2,1})$. Cela signifie qu'il existe $y = (y_1, y_2, y_3) \in E$ tel que $x = f(y)$. Ecrivons donc

$$x = f(y_1, y_2, y_3) = (y_1 + 2y_3, y_1, y_3) = y_1 \underbrace{(1,1,0)}_{w_1} + y_3 \underbrace{(2,0,1)}_{w_2}.$$

Ainsi $x \in \operatorname{Vect}(w_1, w_2)$ et nous avons montré que $\operatorname{Im}(f_{2,1}) \subset \operatorname{Vect}(w_1, w_2)$.

- Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in \operatorname{Vect}(w_1, w_2)$. Cela signifie qu'il existe des scalaires λ_1 et λ_2 tels que

$$x = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = (\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1, \lambda_2) = f_{2,1}(\lambda_1, 0, \lambda_2)$$

et donc $x \in \operatorname{Im}(f_{2,1})$ ce qui conclut que

$$\operatorname{Im}(f_{2,1}) = \operatorname{Vect}(w_1, w_2) \text{ avec } w_1 = (1,1,0) \text{ et } w_2 = (2,0,1).$$

- Nous savons que $\dim(E) = 3$ et que $\operatorname{Ker}(f_{2,1}) = \operatorname{Vect}(e_2)$ et $\operatorname{Im}(f_{2,1}) = \operatorname{Vect}(w_1, w_2)$. Ainsi si (e_2, w_1, w_2) est une famille libre alors $\operatorname{Ker}(f_{2,1})$ et $\operatorname{Im}(f_{2,1})$ seront supplémentaires. Prenons alors λ_1, λ_2 et λ_3 dans $\mathbb{K}$:

$$\lambda_1 e_2 + \lambda_2 w_1 + \lambda_3 w_3 = 0_E \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0_{\mathbb{K}}.$$

Ainsi (e_2, w_1, w_2) est bien une famille libre et donc une base de E et donc

$$E = \text{Ker}\,(f_{2,1}) \oplus \text{Im}\,(f_{2,1})\,.$$

d) • Etre un projecteur signifie que $f \circ f = f$. Calculons donc cette composition. Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in E$ nous avons

$$\begin{aligned} f_{a,b}(f_{a,b}(x)) &= f_{a,b}(x_1 + ax_3, (a-1)x_1 + (b-1)x_2, bx_3) \\ &= \Big((x_1 + ax_3) + a(bx_3), (a-1)(x_1+ax_3) + (b-1)((a-1)x_1 + (b-1)x_2) \\ &\qquad , b(bx_3)\Big) \\ &= \Big(x_1 + a(1+b)x_3, (a-1)bx_1 + (b-1)^2x_2 + a(a-1)x_3, b^2x_3). \end{aligned}$$

Ainsi $f_{a,b}$ est un projecteur si et seulement si

$$\begin{aligned} &\left(\forall (x_1,x_2,x_3) \in E,\ \begin{cases} x_1 + a(1+b)x_3 = x_1 + ax_3 \\ (a-1)bx_1 + (b-1)^2x_2 + a(a-1)x_3 = (a-1)x_1 + (b-1)x_2 \\ bx_3 = b^2x_3 \end{cases}\right) \\ \Leftrightarrow &\left(\forall (x_1,x_2,x_3) \in E,\ \begin{cases} abx_3 = 0 \\ (a-1)bx_1 + (b-1)^2x_2 + a(a-1)x_3 = (a-1)x_1 + (b-1)x_2 \\ b(1-b)x_3 = 0 \end{cases}\right). \end{aligned}$$

Ainsi nous avons nécessairement $b = 0$ ou $a = 0$. Regardons alors chacun des cas

* Cas $b = 0$. Dans ce cas $f_{a,0}$ est un projecteur si et seulement si

$$\left(\forall (x_1,x_2,x_3) \in E,\ \begin{cases} 0 = 0 \\ x_2 + a(a-1)x_3 = (a-1)x_1 - x_2 \\ 0 = 0 \end{cases}\right).$$

  Ceci est impossible puisque sinon en prenant $x_3 = x_1 = 0$ nous aurions $x_2 = -x_2$ pour tout x_2 ce qui n'est pas. Ainsi si $b = 0$, $f_{a,0}$ n'est jamais un projecteur.

* Cas $b \neq 0$ donc $a = 0$. Dans ce cas $f_{0,b}$ est un projecteur si et seulement si

$$\begin{aligned} &\left(\forall (x_1,x_2,x_3) \in E,\ \begin{cases} 0 = 0 \\ -bx_1 + (b-1)^2x_2 = -x_1 + (b-1)x_2 \\ (1-b)x_3 = 0 \end{cases}\right) \\ \Leftrightarrow &\left(\forall (x_1,x_2,x_3) \in E,\ \begin{cases} b = 1 \\ -x_1 = -x_1 \end{cases}\right). \end{aligned}$$

  Ce qui est bien vrai et donc $f_{0,1}$ est l'unique projecteur possible.

Nous venons de montrer que

$$f_{a,b} \text{ projecteur si et seulement si } (a,b) = (0,1).$$

• Pour caractériser un projecteur il faut connaître son noyau et son image. Nous avons

$$\forall (x_1,x_2,x_3) \in E, \quad f_{0,1}(x_1,x_2,x_3) = (x_1, -x_1, x_3).$$

Trouvons donc image et noyau.

<u>Noyau de $f_{0,1}$.</u> Soit $x = (x_1,x_2,x_3) \in \text{Ker}\,(f_{0,1})$. Cela signifie que

$$0_E = f_{0,1}(x) = (x_1, -x_1, x_3) \text{ donc } x_1 = x_3 = 0.$$

Ainsi $x = (0, x_2, 0) = x_2e_2$ donc $x \in \text{Vect}\,(e_2)$ et ainsi $\text{Ker}\,(f_{0,1}) \subset \text{Vect}\,(e_2)$. L'inclusion se fait facilement aussi puisque si $x = \lambda e_2$ alors $f_{0,1}(x) = \lambda f_{0,1}(e_2) = 0_E$ et $x \in \text{Vect}\,(e_2)$. Nous avons donc montré que $\text{Ker}\,(f_{0,1}) = \text{Vect}\,(e_2)$.

<u>Noyau de $f_{0,1}$.</u> Soit $x \in \text{Im}\,(f_{0,1})$. Cela signifie qu'il existe $y = (y_1,y_2,y_3) \in E$ tel que

$$x = f_{0,1}(y) = (y_1, -y_1, y_3) = y_1(1,-1,0) + y_3(0,0,1)$$

et donc $x \in \text{Vect}\,(e_1 - e_2, e_3)$ d'où $\text{Im}\,(f_{0,1}) \subset \text{Vect}\,(e_1 - e_2, e_3)$. Reciproquement si $x \in \text{Vect}\,(e_1 - e_2, e_3)$ alors il existe λ_1 et λ_2 tels que

$$x = \lambda_1(e_1 - e_2) + \lambda_2 e_3 = (\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_2) = f(\lambda_1, 0, \lambda_2)$$

donc $x \in \text{Im}\,(f_{0,1})$.

• Au final nous avons montré que

$$f_{0,1} \text{ est le projecteur sur } \text{Im}\,(f_{0,1}) = \text{Vect}\,(e_1 - e_2, e_3) \text{ parallèlement à } \text{Ker}\,(f_{0,1}) = \text{Vect}\,(e_2).$$

e) Nous avons $F = \text{Vect}\,(e_1, e_2)$ et on nous parle de $f_{0,0}$ qui s'écrit dans la base $\mathcal{B}$

$$f_{0,0}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_1 - x_2, 0).$$

e) (i) On nous demande une équation cartésienne en partant d'un vect. Nous faisons donc l'inverse de ce que nous faisons habituellement mais toujours pareil : une double inclusion !

• Soit $x \in F$, cela signifie qu'il existe λ_1 et λ_2 des scalaires tels que

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = (\lambda_1, \lambda_2, 0).$$

Il faut trouver des relations possibles entre les coordonnées (c'est ce que veut dire équation cartésienne) de $x = (x_1, x_2, x_3)$. Comme λ_1 et λ_2 sont quelconques la seule chose que nous trouvons est que $x_3 = 0_{\mathbb{K}}$. Ainsi nous définissons

$$F' = \{x = (x_1, x_2, x_3) \text{ dans } \mathcal{B} \mid\ x_3 = 0\}$$

et nous venons de montrer que $x \in F'$ et ainsi $F \subset F'$.

• Faisons l'inclusion réciproque. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in F'$, cela signifie que

$$x = (x_1, x_2, 0) = x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

donc $x \in F$. Nous venons de montrer que $F = F'$.

$$F = \{x = (x_1, x_2, x_3) \text{ dans } \mathcal{B} \mid\ x_3 = 0\}\,.$$

e) (ii) Nous devons montrer une égalité d'ensemble donc c'est parti pour une inclusion puis l'autre !

• Soit $x \in f_{0,0}(F)$. Cela signifie qu'il existe $y \in F$ tel que $x = f_{0,0}(y)$. Comme $y \in F$, d'après e)(i) cela signifie qu'il existe y_1 et y_2 dans $\mathbb{K}$ tels que dans $\mathcal{B}$, $y = (y_1, y_2, 0)$ et donc calculons

$$x = f_{0,0}(y) = (y_1, -y_1 - y_2, 0)$$

et donc la dernière coordonnée de x dans $\mathcal{B}$ est nulle donc $x \in F$. Ainsi $f_{0,0}(F) \subset F$.

• Soit $x \in F$ cela signifie que $x = (x_1, x_2, 0)$ avec x_1 et x_2 dans $\mathbb{K}$. Il va falloir trouver un y dans F tel que $x = f_{0,0}(y)$. Faisons donc une analyse-synthèse. Si un tel y existe alors $y = (y_1, y_2, 0)$ et

$$x = (x_1, x_2, 0) = f_{0,0}(y) = (y_1, -y_1 - y_2, 0).$$

Il s'agit donc de trouver y_1 et y_2 tels que

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = -y_1 - y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ y_2 = -y_1 - x_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$

Nous vérifions bien que

$$f_{0,0}(x_1, -x_1 - x_2, 0) = (x_1, -x_1 - (-x_1 - x_2), 0) = (x_1, x_2, 0) = x$$

et donc $x \in f_{0,0}(F)$. Au final nous avons montré que

$$f_{0,0}(F) = F.$$

e) (iii) Nous nous rappelons que soit nous connaisons le cours sur les symétries et tous les résultats soit nous nous rappelons juste qu'une symétrie c'est $s \circ s = \text{Id}_E$ et que $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$ est un projecteur et on travaille avec !

• Comme nous savons que $f_{0,0}$ envoie F sur F nous savons que s est bien définie. Etre une symétrie signifie que $s \circ s = \text{Id}_F$ donc nous n'avons qu'à calculer pour $x = (x_1, x_2, 0)$ dans F :

$$\begin{aligned} s(s(x)) &= f_{0,0}(f_{0,0}(x_1, x_2, 0)) = f_{0,0}(x_1, -x_1 - x_2, 0) = (x_1, x_1 - (-x_1, -x_2), 0) \\ &= (x_1, x_2, 0) = x. \end{aligned}$$

Nous avons donc $s \circ s = \text{Id}_F$ donc s est une symétrie.

• Pour caractériser une symétrie il faut trouver $\text{Ker}\,(s - \text{Id}_F)$ et $\text{Im}\,(s + \text{Id}_F)$ et si on ne s'en souvient pas on pose $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$ et on trouver $\text{Ker}\,(p)$ et $\text{Im}\,(p)$!

<u>$\text{Ker}\,(s - \text{Id}_F)$:</u>

$*$ Soit $x \in \text{Ker}\,(s - \text{Id}_F)$. Cela signifie que $x \in F$ donc $x = (x_1, x_2, 0)$ et que $s(x) = x$. Ainsi

$$f_{0,0}(x) = x \Leftrightarrow (x_1, -x_1 - x_2, 0) = (x_1, x_2, 0) \Rightarrow x_1 = -2x_2.$$

Ainsi $x = (-2x_2, x_2, 0) = x_2(-2, 1, 0)$ et donc $x \in \text{Vect}\,((-2, 1, 0))$ d'où $\text{Ker}\,(s - \text{Id}_F) \subset \text{Vect}\,((-2, 1, 0))$.

$*$ Faisons l'inclusion réciproque. Si $x \in \text{Vect}\,((-2, 1, 0))$. Cela signifie qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$x = \lambda(-2, 1, 0) = (-2\lambda, \lambda, 0).$$

Donc nous avons bien $x \in F$ et calculons

$$s(x) = f_{0,0}(-2\lambda, \lambda, 0) = (-2\lambda, -(-2\lambda) - \lambda, 0) = (-2\lambda, \lambda, 0) = x$$

et donc $x \in \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_F)$. Ainsi $\operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_F) = \operatorname{Vect}((-2, 1, 0))$.

$\underline{\operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_F) :}$
$*$ Soit $x \in \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_F)$. Cela signifie que $x \in F$ donc $x = (x_1, x_2, 0)$ et que $s(x) = -x$. Ainsi

$$f_{0,0}(x) = -x \Leftrightarrow (x_1, -x_1 - x_2, 0) = -(x_1, x_2, 0) \Rightarrow x_1 = 0.$$

Ainsi $x = (0, x_2, 0) = x_2(0, 1, 0)$ et donc $x \in \operatorname{Vect}((0, 1, 0))$ d'où $\operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_F) \subset \operatorname{Vect}((0, 1, 0))$.
$*$ Faisons l'inclusion réciproque. Si $x \in \operatorname{Vect}((0, 1, 0))$. Cela signifie qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$x = \lambda(0, 1, 0) = (0, \lambda, 0).$$

Donc nous avons bien $x \in F$ et calculons

$$s(x) = f_{0,0}(0, \lambda, 0) = (0, -0 - \lambda, 0) = (0, -\lambda, 0) = -x$$

et donc $x \in \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_F)$. Ainsi $\operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_F) = \operatorname{Vect}((0, 1, 0))$.

s est la symétrie de F, par rapport à $\operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_F) = \operatorname{Vect}((-2, 1, 0))$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_F) = \operatorname{Vect}((0, 1, 0))$.