Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence de Mathématiques et Informatique 2020-2021

Analyse 3

TD3

1 Exercices d'application

Exercice 1. Trouver un équivalent simple aux suites (u_n) suivantes et donner leur limite :

1. $u_n = (n + 3\ln n)\mathrm{e}^{-(n+1)}$

2. $u_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1}$

3. $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}$

4. $u_n = \sin \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

5. $u_n = \ln\left(\sin(\dfrac{1}{n})\right)$

6. $u_n = 1 - \cos\dfrac{1}{n}$

Exercice 2. Soit $\alpha > 0$. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = (n^\alpha + 1)^{1/\alpha} - n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que : $u_n = \dfrac{n^{1-\alpha}}{\alpha} + o(n^{1-\alpha})$.

2. Déterminer la nature de la suite (u_n) selon les valeurs du paramètre α.

Exercice 3. Déterminer la limite des suites (u_n) suivantes :

1. $u_n = n\sqrt{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2+1}\right)}$

2. $u_n = \left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)^n$

3. $u_n = \dfrac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$.

Exercice 4. On s'intéresse dans cet exercice à la suite récurrente donnée par $u_0 > 0$, et pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\arctan(u_n)$.

On rappelle que pour tout $u \geq 0$, $\arctan(u) \leq u$ et le développement limité suivant, valable pour $u \to 0$: $\arctan(u) = u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + o(u^5)$.

1. Donner le signe de (u_n) et étudier sa monotonie.

2. Montrer que (u_n) est convergente, de limite 0.

3. On pose $v_n = 2^n u_n$ pour $n \geq 0$. Donner un équivalent pour $n \to \infty$ de $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$, exprimé uniquement en fonction de u_n.

4. Montrer que $|u_n| \leq \frac{u_0}{2^n}$ pour $n \geq 0$ et en déduire que la série de terme général $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ converge.

5. En déduire que la suite (v_n) est convergente, de limite ℓ strictement positive.

6. En déduire un équivalent (exprimé en fonction de ℓ) de u_n pour $n \to \infty$.

Exercice 5. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites strictement positives. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$

1. Montrer que si $l \neq 1$ alors $\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln v_n$.

2. Que se passe t-il si $l = 1$?

Exercice 6. Le but de cet exercice est de montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} k! \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$$

1. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{n!} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{n!}$$

2. Nous allons ainsi montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{n!} = 0$.

   2.1. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{n!} = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k!}{n!}$$

2.2. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n(n-2)}$$

2.3. En déduire que :

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{n!} \leqslant \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)}$$

2.4. Conclure

Exercice 7. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites. Montrer que si $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ et si $v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)$ alors $u_n = 0$ à partir d'un certain rang.

Exercice 8.

1. Soit (u_n) une suite croissante. On suppose que (u_n) admet une sous-suite majorée. Que pouvez-vous dire de (u_n) ?

2. Soit (u_n) une suite croissante. On suppose que (u_n) admet une sous-suite convergente. Que pouvez-vous dire de (u_n) ?

3. Soit (u_n) une suite réelle non majorée. Montrer qu'il existe une suite extraite de (u_n) tendant vers $+\infty$.

Exercice 9. Donner un exemple de suite (u_n) divergente, telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ la suite (u_{kn}) converge.

Exercice 10. On souhaite montrer que la suite (u_n) donnée par $u_n = \sin(n)$ est divergente. Posons $v_n = \cos(n)$.

1. Exprimer u_{n+1} puis v_{n+1} en fonction de u_n et v_n.

2. Supposons que (u_n) convergente vers s. En déduire que (v_n) converge vers c.

3. Conclure.

Exercice 11.

1. Montrer que toute suite extraite d'une suite de Cauchy est aussi une suite de Cauchy.

2. Montrer que si (u_n) est une suite de Cauchy, on peut trouver une sous-suite $(u_{n_k})_{k\geq 1}$ de (u_n) telle que

$$\forall p \geq 1,\ \forall q \geq p,\ |u_{n_p} - u_{n_q}| \leq \frac{1}{2^p}$$

Exercice 12.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, l'équation $x - \ln x = n$ admet une unique solution $u_n \in [1, +\infty[$.

2. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

3. Montrer que :

$$u_n = n + \ln n + \frac{\ln n}{n} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

Exercice 13. Dans tout cet exercice, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie la relation suivante :

$$\exists \alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[, \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \ |f(x) - f(y)| \leq \alpha |f(x) - x| + \alpha |f(y) - y| .$$

Le but de cet exercice est de montrer que f admet un unique point fixe, c'est-à-dire un unique réel l vérifiant $f(l) = l$.

1. Montrer que si ce point fixe existe, il est unique.

2. Dans toute la suite de l'exercice, on considère la suite récurrente définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

2.1. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq k |u_n - u_{n-1}| ,$$

où $k = \frac{\alpha}{1-\alpha}$.

2.2. En déduire que $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$ puis que, pour tout $q \geq p \geq 1$, $|u_q - u_p| \leq \frac{k^p - k^q}{1-k} |u_1 - u_0|$.

2.3. En déduire que (u_n) est convergente. On note l sa limite.

2.4. Montrer que pour tout $n \geq 0$

$$|f(l) - u_{n+1}| \leq \alpha |f(l) - l| + \alpha |u_{n+1} - u_n| .$$

2.5. En déduire que $f(l) = l$.

2 Exercices de synthèse

Exercice 14. Soit u_n l'unique racine positive de l'équation $x^n + x - 1 = 0$.

Étudier la suite (u_n).

Exercice 15. Soit la suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}, \ n \geq 0$..

1. Déterminer le signe de u_n pour tout $n \geq 0$.

2. Etudier la monotonie de la suite (u_n).

3. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0 pour $n \to \infty$.

4. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ fixé. Donner un équivalent de la suite $v_n = u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta}$ pour $n \to \infty$.

5. Déterminer β de telle sorte que $(v_n)_{n\geq 0}$ admette une limite finie non nulle pour $n \to \infty$.

6. En déduire un équivalent de la suite (u_n). On rappelle pour cette question la propriété de Cesaro : si une suite (v_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors sa moyenne de Cesaro $\frac{v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}}{n}$ aussi.

Exercice 16. Soit $x \in]0, +\infty[$, un réel strictement positif. Soit $(r_n)_{n\geq 1}$ une suite de rationnels positifs qui converge vers x. On écrit $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec $p_n \in \mathbb{N}, q_n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si l'une des suites parmi $(p_n)_{n\geq 1}$ et $(q_n)_{n\geq 1}$ est bornée, alors l'autre l'est aussi.

2. On suppose dans cette sous-partie que l'une des suites $(p_n)_{n\geq 1}$ ou $(q_n)_{n\geq 1}$ est bornée.

   2.1. Montrer que dans ce cas, la suite $((p_n, q_n))_{n\geq 1}$ prend ses valeurs dans un ensemble fini.

   2.2. En déduire qu'il existe une sous-suite de $((p_n, q_n))_{n\geq 1}$ qui est constante.

   2.3. Conclure que $x \in \mathbb{Q}$.

3. Un résultat auxiliaire : soit (a_n) une suite réelle. On souhaite montrer dans cette question le résultat suivant : si pour toute sous-suite $(a_{\varphi(n)})$, on peut extraire une sous-sous-suite $(a_{\varphi(\psi(n))})_{n\geq 1}$ qui tend vers 0, alors la suite (a_n) tend vers 0. On raisonne par l'absurde : la suite (a_n) ne tend pas vers 0.

   3.1. Montrer alors qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une extraction φ tels que pour tout $n \geq 1$, $\left|a_{\varphi(n)}\right| > \varepsilon$.

   3.2. Conclure à une contradiction.

4. On suppose dans cette sous-partie que $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

   4.1. Que pouvez-vous déduire des questions précédentes à propos des suites (p_n) et (q_n) ?

   4.2. Montrer que si une suite est non majorée, alors il existe une sous-suite qui tend vers $+\infty$.

   4.3. Déduire des questions précédentes, que dans ce cas, on a $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et $q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Indication : on pourra s'intéresser à la suite $a_n = \frac{1}{p_n}$.