Algèbre 3
TD 6
Déterminants

Licence 2 MAE 2020-2021

Université Paris Descartes

Marc Briant

Dans tout ce TD, $(\mathbb{K},+,.)$ désigne un corps commutatif.

Exercice 1 : *Premières manipulations*

Pour $x \in \mathbb{R}$ nous définissons les déterminants suivants

$$P = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ -7 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Sans calculer les déterminants montrer que

1) P est une fonction polynôme en x divisible par $x+3$

2) Q est une fonction polynôme en x divisible par $x-1$

Solution. Ici on ne demande pas un calcul exact mais seulement de trouver "la ruse" de calcul (les opérations élémentaires) pour faire apparaître les quantités désirées. C'est la base du calcul de déterminant malin. ATTENTION A LA REGLE DES SIGNES QUAND ON DEVELOPPE!!!

1) Comme le cours donne la formule exacte du déterminant qui est un CL de produits de coefficients de la matrice. Ainsi P est un CL de produit de x avec lui-même et des réels. Ainsi P est bien une fonction polynôme en x.
Un calcul direct donne

$$P \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3+C_4}{=} \begin{vmatrix} x+3 & 1 & 1 & 1 \\ x+3 & x & 1 & 1 \\ x+3 & 1 & x & 1 \\ x+3 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x+3)P'$$

ce qui nous indique bien que $(x+3)$ divise P puisque P' est bien une fonction polynôme en x.

2) Comme le cours donne la formule exacte du déterminant qui est un CL de produits de coefficients de la matrice. Ainsi Q est un CL de produit de x avec lui-même et des réels. Ainsi Q est bien une fonction polynôme en x.
Essayons de faire apparaître des $(x-1)$

$$Q \underset{C_i \leftarrow C_i - C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & x-1 & (x-1)(x+1) & (x^2-1)(x^2+1) \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -7 & 9 & 6 & 10 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & x-1 & (x-1)(x+1) & (x^2-1)(x^2+1) \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -7 & 9 & 6 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x-1 & (x-1)(x+1) & (x-1)(x+1)(x^2+1) \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -7 & 9 & 6 & 10 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} x-1 & (x-1)(x+1) & (x-1)(x+1)(x^2+1) \\ 1 & 2 & 3 \\ 9 & 6 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1) \begin{vmatrix} 1 & x+1 & (x+1)(x^2+1) \\ 1 & 2 & 3 \\ 9 & 6 & 10 \end{vmatrix} = (x-1)Q'$$

ce qui nous indique bien que $(x-1)$ divise Q puisque Q' est bien une fonction polynôme en x.

Exercice 2 : *Du calcul pur et simple*

Pour $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$, calculer les déterminants suivants

1) $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$ **2)** $D_2 = \begin{vmatrix} a & a & b \\ a & b & a \\ b & a & a \end{vmatrix}$

3) $D_3 = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$ **4)** $D_4 = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ (a+2)^2 & (a+3)^2 & (a+4)^2 \end{vmatrix}$

Solution. Pour calculer un déterminant il n'y a pas 36 méthodes. Nous essayons d'y faire apparaître le plus de zéros possible grâce à des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes. Ici lorsque nous le développerons il y aura moins de termes et donc que ce sera plus facile. Donc dès que l'on peut soustraire les mêmes quantités on le fait et sinon on essaie de faire apparaître des quantités égales pour les soustraire ensuite. Après c'est de l'entraînement au calcul, il faut en faire ! ATTENTION A LA REGLE DES SIGNES QUAND ON DEVELOPPE !!!

1)

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & b-a & c \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b^2+ab+a^2) & (c-a)(c^2+ac+c^2) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{=} (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b^2+ab+a^2 & c^2+ac-b^2-ab \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(c^2+ac-b^2-ab) = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c).$$

2)

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & a & b \\ a & b & a \\ b & a & a \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 2a+b & a & b \\ 2a+b & b & a \\ 2a+b & a & a \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 2a+b & a & b \\ 0 & b-a & a-b \\ 2a+b & a & a \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 2a+b & a & b \\ 0 & b-a & a-b \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$= -(2a+b)(a-b)^2$$

3)

$$D_3 = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4}{=} \begin{vmatrix} a+2c+b & c & c & b \\ a+2c+b & a & b & c \\ a+2c+b & b & a & c \\ a+2c+b & c & c & a \end{vmatrix} \underset{L_i \leftarrow L_i - L_1}{=} \begin{vmatrix} a+2c+b & c & c & b \\ 0 & a-c & b-c & c-b \\ 0 & b-c & a-c & c-b \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+2c+b) \begin{vmatrix} a-c & b-c & c-b \\ b-c & a-c & c-b \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+2c+b)(a-b) \begin{vmatrix} a-c & b-c \\ b-c & a-c \end{vmatrix} = (a+2c+b)(a-b)\left[(a-c)^2 - (b-c)^2\right]$$

$$= (a+2c+b)(a-b)^2(a-2c+b)$$

4) Nous allons utiliser le fait que $(x+1)^2 - x^2 = 2x+1$ et $(x+2)^2 - x^2 = 4x+4$ afin d'ôter tout d'abord les carrés.

$$D_4 = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ (a+2)^2 & (a+3)^2 & (a+4)^2 \end{vmatrix} \underset{C_i \leftarrow C_i - C_1}{=} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 \\ (a+1)^2 & 2(a+1)+1 & 4(a+1)+4 \\ (a+2)^2 & 2(a+2)+1 & 4(a+2)+4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 \\ (a+1)^2 & 2a+3 & 4a+8 \\ (a+2)^2 & 2a+5 & 4a+12 \end{vmatrix} \underset{L_i \leftarrow L_i - L_1}{=} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 \\ 2a+1 & 2 & 4 \\ 4a+4 & 4 & 8 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{=} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 \\ 2a+1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 2a+1 & 4a+4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\,[8a+4-8a-8] = -8$$

Exercice 3 : *Déterminants et matrices par blocs*

Soit $A,\ B,\ C,\ D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Nous définissons les matrices par blocs suivantes

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

1) Calculer le produit $\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$. En déduire que $\det(N) = \det(A).\det(D)$.

2) **[*]** On suppose que les matrices C et D commutent et que D est inversible. Montrer que $\det(M) = \det(AD - BC)$.

Solution. Lorsque nous avons des matrices par blocs, si les blocs ont les bonnes tailles pour être multipliés alors le cours nous a dit que nous pouvons multiplier les matrices par bloc comme si chaque bloc était un coefficient scalaire. Cela N'EST PAS vrai pour le déterminant d'une matrice par blocs SAUF si la matrice est triangulaire par blocs. Face à des déterminants d'une matrice par blocs M, l'idée sera donc de multiplier par une matrice par blocs inversible B dont on connait le déterminant pour obtenir une nouvelle matrice par bloc A dont on connait également le déterminant. Ainsi, comme $MB = A$ en passant au déterminant nous trouvons $\det\det(B) = \det(A)$ et ainsi $\det(M) = \det(A)/\det(B)$.

1) Les matrices dans les blocs sont toutes de tailles $n \times n$ donc le produit des matrices globales peut se faire bloc par bloc :

$$\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n.A + 0.B & I_n.0 + B.I_n \\ 0.A + D.0 & 0.0 + D.I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = N.$$

Ainsi

$$\det(N) = \begin{vmatrix} I_n & B \\ 0 & D \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{vmatrix}$$

En développant suivant la première colonne puis la deuxième puis la troisième puis...puis la n^{eme} nous trouvons directement

$$\begin{vmatrix} I_n & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times \cdots \times 1\,|D| = \det(D).$$

De même, en développant par rapport à la dernière ligne puis l'avant dernière ligne puis...puis la n^{eme} ligne nous trouvons directement

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times \cdots \times 1\,|A| = \det(A).$$

Ainsi nous venons de prouver que $\det(N) = \det(A)\det(B)$.

2) Il va nous falloir ruser pour trouver une matrice par bloc qui nous offrira ce que l'on souhaite. Ici l'énoncé nous parle de matrices inversibles ou commutantes donc nous n'allons pas faire d'opération sur les lignes et colonnes mais plutôt trouvez à multiplier par une bonne matrice. Prenons une matrice par blocs quelconque

$$K = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$$

et nous voulons connaître son déterminant donc prenons-la triangulaire inférieure : $B_1 = 0_{M_n(\mathbb{R})}$. Si cela ne marche pas nous prendrons alors $C_1 = 0_{M_n(\mathbb{R})}$.

Nous calculons donc facilement

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & 0_{M_n(\mathbb{R})} \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA_1 + BC_1 & BD_1 \\ CA_1 + DC_1 & DD_1 \end{pmatrix}.$$

Nous voulons trouver une matrice triangulaire par blocs. Nous pourrions prendre $D_1 = 0_{M_n(\mathbb{R})}$ mais alors le déterminant de la matrice K serait nul ce qui ne nous aide en rien. Il faut donc que nous annulions

$$CA_1 + DC_1.$$

Regardons les hypothèses : C et D commutent donc nous pouvons choisir

$$A_1 = D \quad \text{et} \quad C_1 = -C$$

ce qui nous donne

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0_{M_n(\mathbb{R})} \\ -C & D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & BD_1 \\ 0_{M_n(\mathbb{R})} & DD_1 \end{pmatrix}.$$

Nous voyons alors apparaître exactement ce que l'on désire : $AD - BC$ donc il nous reste à utiliser le fait que D est inversible pour choisir le plus simple possible : $D_1 = D^{-1}$. Nous trouvons alors

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0_{M_n(\mathbb{R})} \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD - BC & BD_1 \\ 0_{M_n(\mathbb{R})} & I_n \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons alors passer aux déterminants :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} AD-BC & BD_1 \\ 0_{M_n(\mathbb{R})} & I_n \end{vmatrix} &= \det(AD-BC)\det(I_n) = \det(AD-BC) \\ &= \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}\begin{vmatrix} D & 0_{M_n(\mathbb{R})} \\ -C & D^{-1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}\det(D)\det(D^{-1}) \\ &= \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(M)\end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu.

Exercice 4 : *Des calculs plein de récurrence*

Dans chacun des cas suivants les déterminants sont de taille n. Les calculer pour tout entier $n \geqslant 1$.

1) Soit $a \in \mathbb{K}\setminus\{0_{\mathbb{K}}\}$, $D_n = \begin{vmatrix} 2a & a & & 0 \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & a & 2a \end{vmatrix}$.

2) **[*]Vandermonde.** Soient $(a_1,..,a_n) \in \mathbb{K}^n, V_n(a_1,..,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$

Solution. Quand nous devons calculer des déterminants d'ordre n quelconque il faut souvent trouver des opérations élémentaires qui nous permettent de nous ramener au même genre de déterminant mais d'ordre $n-1$. Et après il suffit de faire une récurrence. Attention cependant à bien prendre le temps d'écrire de beaux déterminants car les "petits points" que l'on met pour remplir la matrice peuvent être piégeurs ! !

1) Commençons par écrire proprement au moins les 2-3 premières lignes du déterminant avant de le manipuler ; comme ça nous éviterons les petits pièges. Enfin, comme D_n ne possède que deux coefficients non nuls sur la première ligne nous allons la développer directement sans chercher à mettre plus de zéros.

$$D_n = \begin{vmatrix} 2a & a & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a & 2a & a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a & 2a & a & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & a & 2a & a & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & 0 & a & 2a & a \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a & 2a \end{vmatrix} = 2aD_{n-1} - a \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a & 2a & a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a & 2a & a & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & a & 2a & a & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & 0 & a & 2a & a \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a & 2a \end{vmatrix}$$
$$= 2aD_{n-1} - a^2 D_{n-2}.$$

Nous avons donc une relation de récurrence à deux crans que nous savons résoudre.En effet,

$$D_n = 2aD_{n-1} - a^2 D_{n-2}$$

donc il nous faut trouver les complexes z tels que

$$z^2 - 2az + a^2 = (z-a)^2.$$

Il n'y a qu'une seule solution $z = a$ ce qui nous indique que

$$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad D_n = (A+Bn)a^n.$$

Il nous reste à trouver A et B donc regardons en $n=1$ et $n=2$.

$$\left\{\begin{array}{l} D_1 = |2a| = 2a = (A+B)a \\ D_2 = \begin{vmatrix} 2a & a \\ a & 2a \end{vmatrix} = 3a^2 = (A+2B)a^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A+B = 2 \\ A+2B = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow A = B = 1$$

et ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad D_n = (n+1)a^n.$$

2) Cet exercice est un classique de l'exercice sur les déterminants et il existe plein de manières astucieuses de le résoudre. L'idée naïve consisterait à enlever tous les 1 en soustrayant la première colonne aux autres. Nous voyons alors apparaître des quantités telles que
$$a_i^k - a_1^k = (a_i - a_1)(a_i^{k-1} + a_i^{k-2}a_1 + \cdots + a_i a_1^{k-2} + a_1^{k-1}.$$
Si les facteurs $(a_i - a_1)$ nous semblent intéressants car ils apparaissent partout, ce qu'il reste $(a_i^{k-1} + a_i^{k-2}a_1 + \cdots + a_i a_1^{k-2} + a_1^{k-1}$ est quand même sacrément moche à traiter...
Essayons alors d'être plus astucieux et astucieuses et gardons les 1. Travaillons alors à faire apparaître des 0 mais en jouant sur les lignes et non les colonnes.

$$V_n(a_1,..,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \underset{L_n \leftarrow L_n - a_1 L_{n-1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - a_1 L_{n-2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-3}(a_2 - a_1) & \dots & a_n^{n-3}(a_n - a_1) \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_2) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1 \end{vmatrix}$$

$$= \cdots \underset{L_{i+1} \leftarrow L_{i+1} - a_1 L_i}{=} \cdots$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & \dots & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-3}(a_2 - a_1) & \dots & a_n^{n-3}(a_n - a_1) \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & \dots & a_n(a_n - a_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2^{n-3}(a_2 - a_1) & \dots & a_n^{n-3}(a_n - a_1) \\ a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2^{n-3} & \dots & a_n^{n-3} \\ a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Nous reconnaissons alors

$$V_n(a_1,..,a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_n - a_1) V_{n-1}(a_2,..,a_n) = \left(\prod_{i=2}^{n} (a_i - a_1) \right) V_{n-1}(a_2,..,a_n)$$

et donc nous pouvons itérer ces calculs et trouver que

$$\begin{aligned} V_n(a_1,..,a_n) &= \left(\prod_{i=2}^{n} (a_i - a_1) \right) V_{n-1}(a_2,..,a_n) = \left(\prod_{i=2}^{n} (a_i - a_1) \right) \left(\prod_{i=3}^{n} (a_i - a_2) \right) V_{n-2}(a_3,..,a_n) \\ &= \left(\prod_{i=2}^{n} (a_i - a_1) \right) \left(\prod_{i=3}^{n} (a_i - a_2) \right) \left(\prod_{i=4}^{n} (a_i - a_3) \right) V_{n-3}(a_4,..,a_n) \\ &= \cdots \\ &= \left(\prod_{i=2}^{n} (a_i - a_1) \right) \left(\prod_{i=3}^{n} (a_i - a_2) \right) \left(\prod_{i=4}^{n} (a_i - a_3) \right) \cdots (a_{n-1} - a_n) \\ &= \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (a_i - a_j). \end{aligned}$$

Exercice 5 : *Motivons l'étude des polynômes et des valeurs propres*

Soient E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n avec $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On définit $f \in L(E)$ par sa matrice relativement à la base $\mathcal{B}$:

$$\textbf{1)} \quad A = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{2)} \quad A = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dans chacun des cas ci-dessus répondre au trois questions ci-dessus.

a) Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{K}$, a-t-on $\det(A - \lambda I_3) = 0$? Nous les noterons λ_i.

b) En étudiant les $\text{Ker}\,(f - \lambda_i \text{Id}_E)$ déterminer une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $M_{\mathcal{B}'}(f)$ soit diagonale.

Solution. Résoudre $\det(f - \lambda \text{Id}_E)$ est d'une importance capitale pour écrire les matrices dans des bases qui les simplifient grandement. Ce sera le sujet de notre dernier chapitre du cours. Mais rien n'empêche d'y jeter un coup d'oeil dès maintenant...

1) (a) Nous avons que pour $\lambda \in \mathbb{R}$

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 7 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Ainsi nous calculons directement (attention nous ne connaissons pas λ donc on ne divise pas par λ lors des calculs !)

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 7 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - \lambda L_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 7-\lambda(4-\lambda) & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 7-\lambda(4-\lambda) & -6 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (7 - 4\lambda + \lambda^2)(-2-\lambda) - (-12) = -2 + \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 = (1-\lambda)(-2-\lambda+\lambda^2) = (1-\lambda)(1+\lambda)(-2+\lambda).$$

Nous venons donc de trouver que $\det(A - \lambda I_3) = 0$ si et seulement si $\lambda \in \{-1, 1, 2\}$.

1) (b) Trouvons les noyaux demandés pour chaque valeur de λ. Nous pouvons le faire soit en passant par l'endomorphisme soit en passant directement par la matrice dans la base $\mathcal{B}$. Comme nous avons les matrices, faisons du calcul matriciel.

Noyau de $f - 2\text{Id}_E$. Par définition d'une matrice dans la base $\mathcal{B}$ nous avons

$$\begin{aligned}
X \in \text{Ker}\,(f - 2\text{Id}_E) &\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ M_{\mathcal{B}}(X) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \\
&\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ M_{\mathcal{B}}(X) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 7y - 6z \\ -x + 4y \\ 2y - 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \right) \\
&\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ M_{\mathcal{B}}(X) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} -2x + 7y - 6z = 0 \\ -x + 2y = 0 \\ 2y - 4z = 0 \end{array} \right. \right) \\
&\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ M_{\mathcal{B}}(X) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} -2x + 7y - 6z = 0 \\ x = 2y \\ x = 4z \end{array} \right. \right) \\
&\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ M_{\mathcal{B}}(X) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = 0 \\ x = 2y \\ z = 4z \end{array} \right. \right) \\
&\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ M_{\mathcal{B}}(X) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et}x \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 2z \\ x = 4z \end{array} \right. \right) \\
&\Leftrightarrow \left(\exists z \in \mathbb{R},\ M_{\mathcal{B}}(X) = \begin{pmatrix} 4z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} \right) \Leftrightarrow \left(\exists z \in \mathbb{R},\ M_{\mathcal{B}}(X) = z \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&\Leftrightarrow X \in \text{Vect}\,((4,2,1)).
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne que

$$\text{Ker}\,(f - 2\text{Id}_E) = \text{Vect}\,((4,2,1)) = \text{Vect}\,(e_1').$$

Noyau de $f-\mathrm{Id}_E$. Par définition d'une matrice dans la base $\mathcal{B}$ nous avons

$$\begin{aligned}
X\in \operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id}_E) &\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ M_{\mathcal{B}}(X)=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)\\
&\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ M_{\mathcal{B}}(X)=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}7y-6z\\-x+4y\\2y-2z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)\\
&\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ M_{\mathcal{B}}(X)=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases}-x+7y-6z=0\\-x+3y=0\\2y-3z=0\end{cases}\right)\\
&\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ M_{\mathcal{B}}(X)=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases}-x+7y-6z=0\\x=3y\\z=\frac{2}{3}y\end{cases}\right)\\
&\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ M_{\mathcal{B}}(X)=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases}0=0\\x=3y\\z=\frac{2}{3}y\end{cases}\right)\\
&\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ M_{\mathcal{B}}(X)=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad \text{et}x \quad \begin{cases}x=3y\\z=\frac{2}{3}y\end{cases}\right)\\
&\Leftrightarrow \left(\exists y\in\mathbb{R},\ M_{\mathcal{B}}(X)=\begin{pmatrix}3y\\y\\\frac{2}{3}y\end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(\exists y\in\mathbb{R},\ M_{\mathcal{B}}(X)=y\begin{pmatrix}3\\1\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}\right)\\
&\Leftrightarrow X\in \operatorname{Vect}\left(\left(3,1,\frac{2}{3}\right)\right)=\operatorname{Vect}\left((9,3,2)\right).
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne que

$$\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)=\operatorname{Vect}\left((9,3,2)\right)=\operatorname{Vect}\left(e_2'\right).$$

Noyau de $f+\mathrm{Id}_E$. Par définition d'une matrice dans la base $\mathcal{B}$ nous avons

$$\begin{aligned}
X\in \operatorname{Ker}(f+\mathrm{Id}_E) &\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ M_{\mathcal{B}}(X)=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)\\
&\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ M_{\mathcal{B}}(X)=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}7y-6z\\-x+4y\\2y-2z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\-y\\-z\end{pmatrix}\right)\\
&\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ M_{\mathcal{B}}(X)=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases}x+7y-6z=0\\-x+5y=0\\2y-z=0\end{cases}\right)\\
&\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ M_{\mathcal{B}}(X)=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases}x+7y-6z=0\\x=5y\\z=2y\end{cases}\right)\\
&\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ M_{\mathcal{B}}(X)=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases}0=0\\x=5y\\z=2y\end{cases}\right)\\
&\Leftrightarrow \left(\exists y\in\mathbb{R},\ M_{\mathcal{B}}(X)=\begin{pmatrix}5y\\y\\2y\end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow \left(\exists y\in\mathbb{R},\ M_{\mathcal{B}}(X)=y\begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix}\right)\\
&\Leftrightarrow X\in \operatorname{Vect}\left((5,1,2)\right).
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne que

$$\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id}_E)=\operatorname{Vect}\left((5,1,2)\right)=\operatorname{Vect}\left(e_3'\right).$$

• La famille (e_1',e_2',e_3') est libre (il faudrait le montrer...) donc c'est une base de E. Notons alors $\mathcal{B}'=(e_1',e_2',e_3')$ et remarquons que

$$f(e_1')=2e_1' \quad f(e_2')=e_2' \quad f(e_3')=-e_3'$$

et donc

$$M_{\mathcal{B}'}(f)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

2) (a) Nous avons que pour $\lambda \in \mathbb{R}$

$$A-\lambda I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 4 & 4-\lambda & 4 \\ 5 & 5 & 5-\lambda \end{pmatrix}.$$

Ainsi nous calculons directement (attention nous ne connaissons pas λ donc on ne divise pas par λ lors des calculs !)

$$\det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 4 & 4-\lambda & 4 \\ 5 & 5 & 5-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_3}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 4-\lambda & 4 \\ \lambda & 5 & 5-\lambda \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 4-\lambda & 4 \\ 0 & 7 & 7-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 \\ 7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\left[(4-\lambda)(7-\lambda) - 28\right] = (-\lambda)(-11\lambda + \lambda^2) = -\lambda^2(\lambda - 11).$$

Nous venons donc de trouver que $\det(A-\lambda I_3) = 0$ si et seulement si $\lambda \in \{0, 11\}$.

1) (b) Trouvons les noyaux demandés pour chaque valeur de λ. Nous pouvons le faire soit en passant par l'endomorphisme soit en passant directement par la matrice dans la base $\mathcal{B}$. Comme nous avons les matrices, faisons du calcul matriciel mais essayons aussi d'être malins et malines.

Noyau de f. Par définition d'une matrice dans la base $\mathcal{B}$ nous avons

$$X \in \mathrm{Ker}\,(f) \Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ M_{\mathcal{B}}(X) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Nous pourrions alors résoudre le système comme dans la questin 1). Mais ici nous pouvons ruser. En effet, regardons comment f fonctionne grâce à sa matrice. En effet

$$f(e_1) = f(e_2) = f(e_3)$$

et ainsi en posant

$$e_1' = e_1 - e_3 \quad \text{et} \quad e_2' = e_2 - e_3$$

il vient que $f(e_1') = f(e_2') = 0$. Ainsi e_1' et e_2' sont dans $\mathrm{Ker}\,(f)$ et comme f est linéaire cela entraîne que

$$\mathrm{Vect}\,(e_1', e_2') \subset \mathrm{Ker}\,(f)\,.$$

Nous pouvons aisément voir que (e_1', e_2') est libre et ainsi que $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) \geqslant 2$. Si $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) > 2$ alors comme $\dim(E) = 3$ nous aurions $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 3$ et donc $\mathrm{Ker}\,(f) = E$ et $f = 0_{L(E)}$ ce qui n'est pas ainsi. Nous venons donc de montrer que $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = 2$ et ainsi

$$\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(e_1', e_2')\,.$$

Noyau de $f - 11\mathrm{Id}_E$. Par définition d'une matrice dans la base $\mathcal{B}$ nous avons

$$\begin{aligned}
X \in \mathrm{Ker}\,(f - 11\mathrm{Id}_E) &\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ M_{\mathcal{B}}(X) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 11 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \\
&\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ M_{\mathcal{B}}(X) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2x+2y+2z \\ 4x+4y+4z \\ 5x+5y+5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11x \\ 11y \\ 11z \end{pmatrix} \right) \\
&\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ M_{\mathcal{B}}(X) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} -9x+2y+2z = 0 \\ 4x-7y+4z = 0 \\ 5x+5y-6z = 0 \end{array} \right. \right) \\
&\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ M_{\mathcal{B}}(X) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2}{9}y + \frac{2}{9}z \\ -\frac{55}{9}y + \frac{44}{9}z = 0 \\ \frac{55}{9}y - \frac{44}{9}z = 0 \end{array} \right. \right) \\
&\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ M_{\mathcal{B}}(X) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2}{9}y + \frac{2}{9}z \\ 5y = 4z \end{array} \right. \right) \\
&\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ M_{\mathcal{B}}(X) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2}{9}y + \frac{2}{9}z \\ -\frac{55}{9}y + \frac{44}{9}z = 0 \\ \frac{55}{9}y - \frac{44}{9}z = 0 \end{array} \right. \right) \\
&\Leftrightarrow \left(\exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ M_{\mathcal{B}}(X) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}y \\ z = \frac{5}{4}y \end{array} \right. \right) \\
&\Leftrightarrow \left(\exists y \in \mathbb{R},\ M_{\mathcal{B}}(X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y \\ y \\ \frac{5}{4}y \end{pmatrix} \right) \Leftrightarrow \left(\exists y \in \mathbb{R},\ M_{\mathcal{B}}(X) = \frac{y}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \\
&\Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\,((2,4,5))\,.
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne que

$$\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}\,((2,4,5)) = \mathrm{Vect}\,(e'_3)\,.$$

• La famille (e'_1, e'_2, e'_3) est libre (il faudrait le montrer...) donc c'est une base de E. Notons alors $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ et remarquons que

$$f(e'_1) = 0 \quad f(e'_2) = 0 \quad f(e'_3) = 11e'_3$$

et donc

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 *: Du déterminant caché*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

1. Montrer que s'il existe u et v dans $L(E)$ inversibles tels que $u \circ v + v \circ u = 0$ alors $\dim(E)$ est paire.
2. Soient $u \in GL(E)$ et $v \in L(E)$. Montrer que si $v \circ u \circ v = u$ alors v est aussi inversible.

Solution. Ces exercices énoncés comme cela seraient très ardus. Mais au vu du titre, si l'on pense au déterminant ils risquent de devenir limpides...

1) Supposons que de tels u et v existent. Cela veut dire que $u \circ v = -v \circ u$ donc en passant au déterminant

$$\det(u \circ v) = \det(u)\det(v) = \det(-v \circ u) = (-1)^{\dim(E)}\det(v \circ u) = (-1)^{\dim(E)}\det(u)\det(v).$$

Nous trouvons donc que

$$(1 - (-1)^{\dim(E)})\det(u)\det(v) = 0_{\mathbb{K}}$$

mais comme u et v sont inversibles cela implique que leur déterminants sont non nuls et donc

$$(-1)^{\dim(E)} = 1 \quad \text{donc } \dim(E) \text{ est paire.}$$

2) En passant au déterminant dans l'égalité $u = v \circ u \circ v$ nous obtenons

$$\det(u) = \det v \circ u \circ v = \det(v)\det(u)\det(v) = \det(u)\det(v)^2.$$

Comme nous savons que u est inversible nous avons que $\det(u) \neq 0_{\mathbb{K}}$ et donc

$$\det(v)^2 = 1 \neq 0_{\mathbb{K}}$$

ce qui indique que v est inversible également.