Université Paris Descartes **Analyse 3**
1^{er} semestre 2017-2018

Examen

Jeudi 21 décembre 2017 - Durée : 2h

Exercice 1 (Question de cours) :

1. Enoncer le Théorème du point fixe concernant les fonctions contractantes sur un intervalle fermé I.
2. Démontrer ce théorème.

Exercice 2 : Etudier la limite de $(x+1)\exp\left(\frac{1}{x+1}\right) - x\exp\left(\frac{1}{x}\right)$ quand $x \to +\infty$. On pourra s'aider de l'égalité des accroissements finis (en justifiant son utilisation).
Correction : Soit la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x\exp\left(\frac{1}{x}\right)$. Soit $x > 0$ fixé. f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$. Donc par égalité des accroissements finis, il existe $c_x \in]x, x+1[$ tel que $f(x+1) - f(x) = f'(c_x)(x+1-x) = f'(c_x)$. Or, pour tout $u > 0$, $f'(u) = \exp\left(\frac{1}{u}\right)\left(1 - \frac{1}{u}\right)$. Comme $c_x > x$, on a $c_x \to \infty$ quand $x \to \infty$. Ainsi, $f'(c_x) \to 1$ quand $x \to \infty$ et donc $f(x+1) - f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$.

Exercice 3 : Soit $a < b$ et f une fonction de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, supposée de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et trois fois dérivable sur $]a,b[$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe au moins un réel $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)\frac{f'(a)+f'(b)}{2} - \frac{(b-a)^3}{12}f^{(3)}(c). \tag{1}$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé, soit la fonction

$$\varphi_\lambda(x) = f(b) - f(x) - (b-x)\frac{f'(x)+f'(b)}{2} + \lambda(b-x)^3.$$

1. Que peut-on dire de la régularité de φ_λ sur l'intervalle $[a,b]$ (continuité, dérivabilité, etc.) ?
   Correction : La fonction φ_λ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et deux fois dérivable sur $]a,b[$.
2. Montrer qu'il est possible de choisir $\lambda \in \mathbb{R}$ (que l'on déterminera) pour lequel on peut montrer l'existence de $u \in]a,b[$ tel que $\varphi'_\lambda(u) = 0$. Cette constante λ est fixée dans la suite de cet exercice.
   Correction : La fonction φ_λ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. De plus, on a $\varphi_\lambda(b) = 0$. Posons $\lambda = \frac{1}{(b-a)^3}\left(f(a) - f(b) + (b-a)\frac{f'(a)+f'(b)}{2}\right)$. Pour cette valeur de λ, on a $\varphi_\lambda(a) = 0$. Pour cette valeur de λ, par application du théorème de Rolle, il existe $u \in]a,b[$ tel que $\varphi'_\lambda(u) = 0$.
3. Calculer $\varphi'_\lambda(x)$ pour tout $x \in [u,b]$ et en déduire l'existence d'un $c \in]u,b[$ tel que $\varphi''_\lambda(c) = 0$.
   Correction : La fonction φ_λ est dérivable sur $[a,b]$ et on a $\varphi'_\lambda(x) = \frac{f'(b)-f'(x)}{2} - (b-x)\frac{f''(x)}{2} - 3\lambda(b-x)^2$. La fonction φ'_λ est continue sur $[u,b]$ et dérivable sur $]u,b[$ et vérifie $\varphi'_\lambda(u) = \varphi'_\lambda(b) = 0$. Par application du théorème de Rolle, il existe $c \in]u,b[$ tel que $\varphi''_\lambda(c) = 0$.

4. En déduire (1).
Correction : Dérivons encore une fois φ'_λ sur $]a,b[$: $\varphi''_\lambda(x) = -(b-x)\frac{f^{(3)}(x)}{2} + 6\lambda(b-x)$. Ainsi pour $x=c$, il vient $\lambda = \frac{f^{(3)}(c)}{12}$. Remplaçant cette valeur dans la définition de φ_λ et en prenant $x=a$ pour lequel on a $\varphi_\lambda(a)=0$, on obtient le résultat demandé.
5. Interpréter graphiquement l'égalité (1) dans le cas où f est une fonction polynomiale de degré 2.
Correction : Pour une fonction polynomiale de degré 2, l'identité devient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(a)+f'(b)}{2}$. Géométriquement, cela signifie que la pente de la corde entre a et b est égale à la moyenne des pentes des tangentes en a et b.

Exercice 4 : Soit $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{p-1} < t_p = 1$ une subdivision de $[0,1]$ et $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $[0,1]$. On dit que φ est une fonction en escalier adaptée à la subdivision $(t_i)_{0\leq i\leq p}$ si, pour tout $i = 1,\ldots,p$, φ est une fonction constante sur $]t_{i-1}, t_i[$.

Soit f une application continue sur $[0,1]$. Le but de cet exercice est de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions en escalier φ et ψ telles que

$$\forall x \in [0,1],\ \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x), \tag{2}$$
$$\forall x \in [0,1],\ 0 \leq \psi(x) - \varphi(x) < \varepsilon. \tag{3}$$

Dans tout cet exercice, $\varepsilon > 0$ est fixé.

1. Pour tout $i = 0,\ldots,n-1$, justifier l'existence de $m_i := \inf_{t\in\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]} f(t)$ et $M_i := \sup_{t\in\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]} f(t)$ et de $x_i, y_i \in \left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]$ tels que $f(x_i) = m_i$ et $f(y_i) = M_i$.
Correction : La fonction f est continue sur le segment $\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]$. Elle est donc bornée sur ce segment et y atteint ses bornes.
2. En s'aidant de la question précédente, construire deux fonctions en escalier φ et ψ adaptées à la subdivision $(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1)$ qui vérifient l'encadrement (2).
Correction : Pour tout $i = 0,\ldots,n-1$, pour tout $x \in \left[\frac{i}{n},\frac{i1+}{n}\right[$, on définit $\psi(x) = M_i$ et $\varphi(x) = m_i$. De plus on pose $\psi(1) = f(1)$ et $\varphi(1) = f(1)$. Par construction, ces deux fonctions vérifient $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.
3. Montrer qu'il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, pour tout $i \in \{0,\ldots,n-1\}$ et pour tout $x, y \in \left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]$, $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.
Correction : La fonction f est continue sur le segment $[0,1]$ donc uniformément continue, par théorème de Heine. Ainsi, pour le $\varepsilon > 0$ donné en début d'énoncé, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [0,1]$, si $|x-y| < \eta$ alors $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Posons $n_0 = \lfloor \frac{1}{\eta} \rfloor + 1$. Pour tout $n \geq n_0$, on a $n > \frac{1}{\eta}$ et donc $\frac{1}{n} < \eta$. Ainsi, pour tout $i = 0,\ldots,n-1$, pour tout $x, y \in \left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]$, on a $|x-y| \leq \frac{1}{n} < \eta$ et donc $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.
4. Déduire des questions précédentes l'inégalité (3).
Correction : Appliquant la question précédente à $x = x_i$ et $y = y_i$, il vient $|f(x_i) - f(y_i)| < \varepsilon$. Or $f(x_i) = m_i = \varphi(x)$ pour tout $x \in [i/n, (i+1)/n[$ et $f(y_i) = M_i = \psi(x)$ pour tout $x \in [i/n, (i+1)/n[$. Ceci implique donc que $0 \leq \psi(x) - \varphi(x) < \varepsilon$ pour tout $x \in [0,1[$ et l'inégalité est triviale pour $x = 1$.

Exercice 5 : Soit l'équation différentielle suivante :

$$x^2y'(x) + (1-2x)y(x) = x^2. \tag{4}$$

1. Résoudre cette équation sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
   Correction : Résolvons tout d'abord l'équation homogène : $x^2y'(x)+(1-2x)y(x) = 0$. Sur ces deux intervalles, ceci est équivalent à $y'(x) + \frac{1-2x}{x^2}y(x) = 0$. Une primitive de $x \mapsto \frac{1-2x}{x^2}$ est donnée par $x \mapsto -\frac{1}{x} - 2\ln(|x|)$. Ainsi, toutes les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y(x) = \lambda x^2 e^{\frac{1}{x}}$. Cherchons maintenant une solution particulière de l'équation avec second membre : on la cherche par la méthode de variation de la constante sous la forme $y_0(x) = \lambda(x)x^2e^{\frac{1}{x}}$. Mettant y_0 dans l'équation, il vient $\lambda'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ et donc $\lambda(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ convient. Ainsi, $y_0(x) = x^2$ fournit une solution particulière à l'équation. Toute solution de l'équation est donc de la forme $y(x) = \lambda x^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2$ pour λ une constante réelle quelconque.
2. Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ? Si oui, lesquelles ? Vous justifierez précisément votre réponse.
   Correction : On procède par analyse/synthèse. Analyse : si une telle solution y existe, elle est nécessairement de la forme $y(x) = \lambda x^2e^{\frac{1}{x}} + x^2$ pour $x < 0$ et $y(x) = \mu x^2e^{\frac{1}{x}} + x^2$ pour $x > 0$, pour deux constantes réelles λ et μ. Une telle fonction est nécessairement continue en 0. Pour $x > 0$, $\mu x^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2$ diverge pour $x \to 0$ si $\mu \neq 0$. Donc nécessairement $\mu = 0$ et dans ce cas $y(x) \to 0$ quand $x > 0$ et $x \to 0$. De plus, pour tout λ, $y(x) \to 0$ pour $x \to 0$ et $x < 0$. Dans ce cas, définir $y(0) = 0$ donne une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. Vérifions maintenant qu'une telle fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$: une telle fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, il suffit donc d'étudier la dérivabilité en 0. On forme le taux d'accroissement : $\frac{y(x)-y(0)}{x-0} = x$ pour $x > 0$ et vaut $\lambda x e^{\frac{1}{x}} + x$ pour $x < 0$. Dans les deux cas, cette quantité tend vers 0 pour $x \to 0$ et donc y est dérivable en 0 de dérivée nulle.
   Synthèse : Soit λ une constante quelconque et la fonction définie par $y(x) = \lambda x^2e^{\frac{1}{x}} + x^2$, pour $x < 0$, $y(0) = 0$ et $y(x) = x^2$ pour $x > 0$. Une telle fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie bien l'équation initiale, par construction.

Fin de l'épreuve.