Université Paris Descartes **Analyse 3**
1^{er} semestre 2018-2019

Examen Session 2

Lundi 17 juin 2019 - Durée : 2h

Tout document, calculatrice, téléphone portable et autre appareil électronique est interdit. L'énoncé comporte 5 exercices indépendants.

Une part substantielle de la note portera sur la rédaction. Une juxtaposition d'équations sans liens logiques ni quantificateurs appropriés ne se verra pas attribuer une note élevée.

On attend que vous citiez précisément les théorèmes utilisés. En l'absence de la totalité des hypothèses requises, votre résultat sera considéré comme faux.

Exercice 1 (Question de cours) :

1. Enoncer le théorème de dérivation de la réciproque concernant une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. *Vous donnerez bien sûr toutes les hypothèses sur f requises.*
2. Démontrer ce résultat.

Exercice 2 : Etudier le comportement quand $n \to \infty$ des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{4n^2+1}}$, $n \geq 1$,
2. $v_n = n^{(n^2)} - (n^n)^2$, $n \geq 1$.

Exercice 3 : Soit la suite récurrente définie par

$$u_1 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}},\ n \geq 1.$$

1. Montrer que la suite v donnée par $v_n = u_n^2$, $n \geq 1$ est convergente et donner sa limite.
2. Est-il vrai que si $(u_n^2)_{n\geq 1}$ est convergente, alors $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente ? Si oui, vous donnerez une preuve, si non, un contre-exemple.
3. Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\geq 1}$.
4. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} < u_n + \frac{1}{2^{n+1}}$.
5. En déduire que pour tout $q \geq p \geq 1$, $|u_q - u_p| \leq \frac{1}{2^p}$.
6. Conclure quant à la convergence de $(u_n)_{n\geq 1}$ et donner sa limite.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $a < b$ deux réels. On suppose que $f'(a)f'(b) < 0$ (i.e. $f'(a)$ et $f'(b)$ sont de signes contraires). Le but de cet exercice est de montrer la propriété suivante (dite de Darboux) :

$$\text{Il existe } c \in]a, b[\text{ tel que } f'(c) = 0.$$

On suppose sans perte de généralité que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$.

1. Rappeler ce que veut dire le fait qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis prouver la propriété de Darboux dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$. *On pourra appliquer un théorème du cours à la fonction f'.*

Dorénavant, on ne suppose plus que f est de classe $\mathcal{C}^1$ mais seulement que f est dérivable.

2. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \min\{f(x),\ x \in [a, b]\}$. Vous justifierez en particulier que ce minimum existe.
3. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, si $|x - a| < \eta$ alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0$.
4. Déduire de la question précédente que $c \neq a$.
5. Prouver de même que $c \neq b$ et donc que $c \in]a, b[$. *Vous pouvez pour cette question vous contenter de donner les grandes lignes de la démonstration, sans redonner tous les détails.*
6. Conclure que $f'(c) = 0$.

Exercice 5 : Soit l'équation différentielle suivante :

$$t^2y'(t) - (1+t^2)y(t) = 0. \tag{1}$$

1. Résoudre cette équation sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$. *On fera uniquement la preuve dans le cas* $]0, +\infty[$ *et on se contentera de donner le résultat pour* $]-\infty, 0[$.
2. Existe-t-il des solutions de (1) définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ? Si oui, lesquelles ? Vous expliquerez précisément votre raisonnement.

Fin de l'épreuve.