Algèbre 3
Chapitre 7
Théorie des déterminants

Licence 2 MAE 2020-2021
Université de Paris - Paris Descartes
Marc Briant
(Fortement inspiré des cours de MM. G. Roussel et R. Lounès)

Table des matières

Avant-propos : Dans l'ensemble des chapitres précédents nous avons compris que les familles libres jouent un rôle important dans les espaces vectoriels. Et ce même dans la théorie des matrices vu que le rang d'une matrice lui-même mesure la liberté de la famille de vecteurs colonnes qui composent cette matrice. Nous désirons donc construire un outil efficace qui nous permette de déterminer si une famille est libre ou non. C'est le but de ce chapitre.

Dans tout ce cours, $(\mathbb{K},+,.)$ **désigne un corps commutatif.**

1 Déterminant dans une base en dimension finie

1.1 Formes n-linéaires

Nous désirons un outil qui permette de dire si une famille quelconque de n vecteurs est libre ou non. Nous voulons donc une application qui prenne en argument n vecteurs et linéaire, comme les propriétés des ev.

Définition 1.1. Soient E un $\mathbb{K}$-ev et n un entier avec $n \geqslant 2$. Une application $\varphi : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ est une **forme n-linéaire** si et seulement si pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, pour tout $(a_1,..,a_{j-1},a_{j+1},..,a_n) \in E^{n-1}$, l'application

$$\begin{array}{rccl} \phi : & E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \phi(x) = \varphi(a_1,..,a_{j-1},x,a_{j+1},..,a_n) \end{array}$$

est linéaire.

Remarque 1.2

Regardons le cas $n=3$ pour y voir plus clair. Si φ est 3-linéaire sur E alors pour tous $(x,x',y,y',z,z') \in E^6$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha x+\beta x',y,z) &= \alpha\varphi(x,y,z)+\beta\varphi(x',y,z) \\ \varphi(x,\alpha y+\beta y',z) &= \alpha\varphi(x,y,z)+\beta\varphi(x,y',z) \\ \varphi(x,y,\alpha z+\beta z') &= \alpha\varphi(x,y,z)+\beta\varphi(x,y,z'). \end{aligned}$$

Si $n=2$ nous parlerons aussi de **formes bilinéaires**, si $n=3$ de **formes trilinéaires**,...

Exemple : Plaçons dans dans $\mathbb{K}^2$ alors l'application φ définie sur $\mathbb{K}^2\times\mathbb{K}^2$ pour tous $X=(x_1,x_2)$ et $Y=(y_1,y_2)$ de $\mathbb{K}^2$ par $\varphi(X,Y)=x_1x_2+y_1y_2$ est une forme 2-linéaire, ou bilinéaire.

Proposition 1.3

Soient E un $\mathbb{K}$-ev, un entier $n \geqslant 1$ et φ une forme n-linéaire sur E. Alors pour tout $(x_1,..,x_n)$ de E^n :

1. $\forall\lambda\in\mathbb{K}, \quad \varphi(\lambda x_1,..,\lambda x_n)=\lambda^n\varphi(x_1,..,x_n)$;
2. Si l'un des x_i est nul alors $\varphi(x_1,..,x_n)=0$.

1.2 Formes n-linéaires alternées

Maintenant que nous avons des outils pour travailler avec n vecteurs, il nous faut un outil qui nous "dise" si la famille est libre ou non. Par exemple il pourrait renvoyer 0 quand il est appliqué à une famille liée. C'est le but des formes dites alternées.

Définition 1.4. Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $n \geqslant 2$ un entier. Une forme n-linéaire φ sur E est dite **alternée** si et seulement si $\varphi(x_1,..,x_n)=0_{\mathbb{K}}$ pour tout $(x_1,..,x_n)$ de E^n tel que au moins deux vecteurs sont égaux.

Proposition 1.5

Dans un $\mathbb{K}$-ev E, si φ est une forme n-linéaire alternée alors pour tout $(x_1,..,x_n)$ de E^n :

1. Si $(x_1,..,x_n)$ est liée alors $\varphi(x_1,..,x_n)=0_{\mathbb{K}}$;
2. On ne change pas la valeur de $\varphi(x_1,..,x_n)$ en ajoutant à l'un des vecteurs une CL des autres.
3. $\varphi(x_1,..,x_i,x_{i+1},..,x_n)=-\varphi(x_1,..,x_{i+1},x_i,..,x_n)$.

Exemple : Plaçons dans dans $\mathbb{K}^2$ alors l'application φ définie sur $\mathbb{K}^2\times\mathbb{K}^2$ pour tous $x=(x_1,x_2)$ et $y=(y_1,y_2)$ de $\mathbb{K}^2$ par $\varphi(x,y)=x_1y_2-x_2y_1$ est une forme 2-linéaire alternée.

Remarque 1.6 (*Permutations et forme alternée (HP)*)

Plus généralement une **permutation** σ entre n entiers est une bijection entre ces entiers. L'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même se note S_n. On appelle **signature** d'une permutation, notée $\varepsilon(\sigma)$, l'entier $(-1)^{k_\sigma}$ où k_σ représente le nombre de couples (i,j) avec $i<j$ pour lesquels nous avons $\sigma(i)>\sigma(j)$. Avec ce vocabulaire nous pouvons démontrer une généralisation du point 3 : si σ est une permutation de $[\![1,n]\!]$ alors

$$\varphi(x_{\sigma(1)},..,x_{\sigma(n)})=\varepsilon(\sigma)\varphi(x_1,..,x_n).$$

1.3 Déterminant et base en dimension finie

Chaque application issue d'une forme n-linéaire est une forme linéaire. Nous avons vu qu'une application linéaire en dimension finie est parfaitement déterminée par sa valeur sur une base.

Théorème 1.7

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geqslant 2$ et $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$ une base de E. Il existe une unique forme n-linéaire alternée qui prend la valeur $1_{\mathbb{K}}$ sur $(e_1, .., e_n)$.
Cette forme n-linéaire alternée est appelée **déterminant dans la base** $\mathcal{B}$ et se note $\det_{\mathcal{B}}$.

Exemple : La dimension 2. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension 2 et fixons $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E. Alors en écrivant tous les vecteurs de E sur la base $\mathcal{B}$ - $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ - il vient que

$$\det_{\mathcal{B}}(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Remarque 1.8 (*Une formule exacte*)

Au détour de la preuve du théorème ci-dessus nous avons déniché une formule exacte pour le déterminant. La connaître par coeur n'a pas de grand intérêt en général mais savoir qu'elle existe peut être utile de temps en temps. Si E est un $\mathbb{K}$-ev et que $\mathcal{B}$ est une base de E alors si nous prenons n vecteurs x_1,..,x_n de E qui s'écrivent $x_j = (x_{1j}, .., x_{nj})$ sur la base $\mathbf{B}$ il vient

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, .., x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} x_{\sigma(2)2} \cdots x_{\sigma(n)n}.$$

Théorème 1.9

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geqslant 2$, l'ensemble des formes n-linéaires alternées est un $\mathbb{K}$-ev de dimension 1. Plus précisément si $\mathcal{B}$ est une base de E alors pour toute forme n-linéaire alternée φ :

$$\varphi = \varphi(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}.$$

Cette application correspond bien à nos attentes grâce au théorème suivant.

Théorème 1.10 (*Caractérisation des bases*)

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geqslant 2$ et $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$ une base de E. Pour toute famille de E de n vecteurs $(x_1, .., x_n)$ nous avons

$$(x_1, .., x_n) \text{ est une base de } E \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(x_1, .., x_n) \neq 0.$$

2 Diverses notions de déterminant

2.1 Déterminant d'une famille de n vecteurs en dimension n

Définition 2.1. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geqslant 2$ et $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$ une base de E. Pour toute famille de E de n vecteurs $(x_1, .., x_n)$, le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(x_1, ..x_n)$ est appelé **déterminant dans la base** $\mathcal{B}$ de la famille $(x_1, .., x_n)$.

Exemple : [Déterminant et changement de bases] Si l'on prend E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et que l'on considère $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E alors pour toute famille $(x_1, .., x_n)$ de E^n il vient

$$\det_{\mathcal{B}'}(x_1, .., x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(x_1, ..x_n).$$

2.2 Déterminant d'un endomorphisme en dimension finie

Comme toujours avec les endomorphismes, il est important que des propriétés les définissant soient indépendantes des bases considérées.

Théorème 2.2

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geqslant 2$ et u un endomorphisme de E. Il existe un unique scalaire λ_u de $\mathbb{K}$ tel que pour toute base $\mathcal{B}$ de E et tout n-uplet $(x_1, .., x_n) \in E^n$,

$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), .., u(x_n)) = \lambda_u \det_{\mathcal{B}}(x_1, .., x_n).$$

Le scalaire λ_u est noté $\det(u)$ et s'appelle le **déterminant de** u.
Remarquons que

$$\forall \mathcal{B} \text{ base de } E,\ \det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})).$$

Exemple : Considérons un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geqslant 2$.

1) Homothéties. Si u est une homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\det(u) = \lambda^n$.

2. Projections et Symétries Soient $F \neq \{0_E\}$ et G des sous-espaces supplémentaires de E et notons p (resp. s) la projection (resp. symétrie) sur F parallèlement à G. Alors nous avons $\det(p) = 0$ et $\det(s) = (-1)^{\dim(G)}$.

Proposition 2.3

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geqslant 2$.
- $\det(Id_E) = 1$.
- $\forall u \in L(E),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$.
- $\forall (u, v) \in L(E)^2,\ \det(v \circ u) = \det(v) \times \det(u)$.
- u dans $L(E)$ est bijective ssi $\det(u) \neq 0$ et dans ce cas $\det(u^{-1}) = [\det(u)]^{-1}$.

2.3 Déterminant d'une matrice carrée

Comme nous l'avons déjà rencontré, une matrice peut être vue comme la matrice d'une famille de vecteurs (écrits sous forme de colonne) ou la matrice d'un application linéaire. Comme nous venons de voir que le déterminant est bien défini pour n vecteurs en dimension n, ou les endomorphismes en dimension n, nous pouvons étendre la notion de déterminant aux matrices carrées.

Définition 2.4. Soit M une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$. Nous appelons **déterminant de la matrice** M le scalaire noté $\det(M)$ qui est défini par

$$\det(M) = \det_{\mathcal{E}}(C_1, .., C_n)$$

où $\mathcal{E}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et C_i sont les vecteurs colonnes de M.
Si $M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ alors nous utilisons la notation suivante :

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Exemple : Si deux colonnes d'une matrice carrée M sont identiques alors $\det(M) = 0_{\mathbb{K}}$.

Bien entendu toutes ces notions de déterminants coïncident.

Proposition 2.5

Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $u \in L(E)$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors si M représente u dans une base de E il vient $\det(M) = \det(u)$.

Remarque 2.6 (*Le retour de la formule exacte*)

Remarquons que si une matrice M représente un endomorphisme f dans une base quelconque alors $\det(M) = \det(f)$. Comme précédemment nous avons une formule exacte, la connaître n'est pas important mais savoir qu'elle existe oui. Si $M = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ alors

$$\det(M) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}.$$

Proposition 2.7

Soient $n \geqslant 2$, $\lambda \in \mathbb{K}$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $\det(I_n) = 1$.
2. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
3. $\det(BA) = \det(B) \times \det(A)$.
4. A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$.

Une force avec les matrices c'est nous pouvons également regarder les lignes plutôt que les colonnes.

Proposition 2.8

Soit M un matrice carrée d'ordre $n \geqslant 2$: $\det({}^tM) = \det(M)$.
Ainsi si nous notons $(L_1, .., L_n)$ les lignes de M il vient que $\det(M) = \det_{\mathcal{E}}(L_1, .., L_n)$ où $\mathcal{E}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

3 Comment calculer un déterminant de matrice

3.1 Calcul général : développer suivant une ligne ou une colonne

Grâce à la formule explicite du déterminant d'une matrice carrée d'ordre n en fonction de ses coefficients nous pouvons trouver un algorithme itératif incluant des déterminants de sous-matrices carrées d'ordre $n-1$.

Définition 3.1. Soit $M = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, on note $M_{i,j}$ la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue à partir de M en supprimant la i^{me} ligne et la j^{me} colonne. Visuellement :

$$M_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Le scalaire $A_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(M_{i,j})$ est appellé **cofacteur de** $a_{i,j}$.

Théorème 3.2

Soit $M = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$ et notons $A_{i,j}$ le cofacteur de $a_{i,j}$. Alors on peut développer le déterminant de M suivant

1. Sa j^{me} colonne :
$$\det(M) = a_{1,j}A_{1,j} + a_{2,j}A_{2,j} + \cdots + a_{n,j}A_{n,j};$$
2. Sa i^{me} ligne :
$$\det(M) = a_{i,1}A_{i,1} + a_{i,2}A_{i,2} + \cdots + a_{in}A_{i,n}.$$

Remarque 3.3 (*Algorithme de calcul*)

Le théorème précédent offre un algorithme de calcul long mais simple : on développe le déterminant $n\times n$ suivant une ligne ou une colonne que l'on choisit (celle où il y a le plus de 0 comme ça nous aurons moins de calcul à effectuer) et nous nous retrouvons avec une somme de déterminant $(n-1)\times(n-1)$. Nous pouvons alors itérer ce processus jusqu'à obtenir un déterminant 2×2.

Exercice : Déterminant 2×2. Montrer que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Déterminant 3×3. Calculer $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$.

Il se trouve que la matrice remplie des cofacteurs a de bonnes propriétés.

Définition 3.4. Soit $M = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$ et notons $A_{i,j}$ le cofacteur de $a_{i,j}$. La matrice carrée d'ordre n notée $\mathrm{Com}(M)$ définie par $\mathrm{Com}(M) = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est appelée **comatrice de** M.

Proposition 3.5

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Nous avons l'égalité

$$M^t\mathrm{Com}(M) =^t \mathrm{Com}(M)M = \det(M)I_n.$$

Ainsi si M est inversible : $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}{}^t\mathrm{Com}(M)$.

Ce résultat n'est pas vraiment exploitable en général car il est très coûteux en calcul d'écrire une comatrice. Mais cela est utile pour $n = 2$.

Application : Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

3.2 Calcul direct : matrices triangulaires

Grâce au développement du déterminant suivant ses lignes ou ses colonnes il est très facile de calculer le déterminant des matrices triangulaires.

Proposition 3.6

Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Remarque 3.7 (*Triangulaires par blocs (HP)*)

Le résultat ci-dessus se généralise aux matrices triangulaires pas blocs ! En effet, si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ alors

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})} & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D).$$

Attention si l'on a pas une matrice nulle en bas à gauche (ou en haut à droite) alors ce résultat n'est pas vrai. En général pour des matrices par blocs

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C).$$

3.3 Mettre des 0 : opération sur les lignes et les colonnes

Comme le déterminant est très facile à calculer dans le cas de matrices triangulaires supérieures (ou inférieures), une méthode classique pour calculer des déterminants revient à se servir des propriétés du déterminant pour "modifier" la matrice de départ pour la rendre triangulaire ou au moins lui mettre le plus de $0_{\mathbb{K}}$ possibles parmi ses coefficients. Pour se faire, et d'après les propriétés du déterminant, pour calculer $\det(M)$ nous pouvons

a) Échanger deux colonnes ou deux lignes, en multipliant le déterminant résultant par (-1) ;

b) Multiplier une ligne ou une colonne par un scalaire $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, en multipliant le déterminant résultant par λ^{-1} ;

c) Ajouter à une colonne une CL des autres colonnes : $C_i \to C_i + \sum\limits_{J \neq i} \lambda_j C_j$;

d) Ajouter à une ligne une CL des autres lignes : $L_i \to L_i + \sum\limits_{J \neq i} \lambda_j L_j$.

Le calcul d'un déterminant revient alors à "jouer" avec les règles ci-dessus pour mettre le plus de $0_{\mathbb{K}}$ possibles puis développer le déterminant résultant par rapport à une ligne ou une colonne (le mieux étant d'obtenir au final un déterminant résultant triangulaire mais ce n'est pas toujours aisé).

Exemple : Déterminant de Vandermonde d'ordre 3. Soient a, b et c des réels,

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a).$$