Proba3 - Corrigé TD 3

Exercice 1

Soit $p \in]0,1[$, et X une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=x)$	$(1-p)^4$	$4p(1-p)^3$	$6p^2(1-p)^2$	$4p^3(1-p)$	p^4

1. Quelle loi classique reconnaît-on ?

Solution: C'est la loi Binomiale de paramètre $n=4, p$: $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

2. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = 4 - X$?

Solution: Y suit la loi donnée par ce tableau :

y	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(Y=y)$	p^4	$4(1-p)p^3$	$6p^2(1-p)^2$	$4p(1-p)^3$	$(1-p)^4$

C'est la loi Binomiale de paramètre $n=4, 1-p$.

3. Calculer $\mathbb{P}(X \geq 2)$ et $\mathbb{P}(X \leq 1)$.

Solution: On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 2) &= \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3) + \mathbb{P}(X=4) = p^2(6(1-p)^2 + 4p(1-p) + p^2) \\ &= p^2(3p^2 - 8p + 6)\end{aligned}$$

De même, on a

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) = (1-p)^3((1-p) + 4p) = (1-p)^3(1-3p)$$

On peut vérifier qu'on a bien $\mathbb{P}(X \geq 2) + \mathbb{P}(X \leq 1) = 1$.

Exercice 2

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de jours dans la semaine où un incident technique affecte le réseau informatique de l'université Paris Descartes. Sa loi est donnée par le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbb{P}(X=x)$	0.1	0.05	0.2	0.15	0.2	?	0.1	0.05

1. Compléter le tableau en calculant $\mathbb{P}(X = 5)$.

Solution: On utilise le fait que la somme des probabilités doit être égal à 1. On trouve $\mathbb{P}(X = 5) = 0.15$.

2. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = \min(X, 5)$.

Solution: On a $0 \leq Y \leq 5$ par définition de Y.

Ainsi, pour $i \in \{0, \dots, 4\}, \mathbb{P}(Y = i) = \mathbb{P}(X = i)$ et $\mathbb{P}(Y = 5) = \mathbb{P}(X = 5) + \mathbb{P}(X = 6) + \mathbb{P}(X = 7) = 0.3$

3. Déterminer la probabilité qu'il y ait 2 jours sans incident.

Solution: C'est $\mathbb{P}(X = 5) = 0.15$.

Exercice 3

On remplit une matrice 2×2 avec des 0 ou des 1. Chaque entrée est indépendante et vaut 1 avec probabilité $p \in [0, 1]$. On note X le déterminant de cette matrice et Y sa trace.

1. Donner la loi de X et de Y.

Solution: On écrit

$$M = \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} \\ M_{2,1} & M_{2,2} \end{pmatrix}$$

On a alors $X = \det(M) = M_{1,1}M_{2,2} - M_{1,2}M_{2,1}$ et $Y = \operatorname{tr}(M) = M_{1,1} + M_{2,2}$.

Comme $M_{i,j} \in \{0, 1\}$, on a $M_{1,1}M_{2,2} \in \{0, 1\}$ et $M_{1,2}M_{2,1} \in \{0, 1\}$ et donc $X \in \{-1, 0, 1\}$.

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 1) &= \mathbb{P}((M_{1,1}M_{2,2} = 1) \cap (M_{2,1}M_{1,2} = 0) \\
&= \mathbb{P}((M_{1,1} = 1) \cap (M_{2,2} = 1)) \times (\mathbb{P}((M_{1,2} = 0) \cap (M_{2,1} = 0)) + \mathbb{P}((M_{1,2} = 0) \cap (M_{2,1} = 1)) + \mathbb{P}((M_{1,2} = 1) \cap \\
&= p^2 \times ((1 - p)^2 + 2p(1 - p)) = p^2(1 - p^2)
\end{aligned}$$

par indépendance.

De même, $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}((M_{1,1}M_{2,2} = 0) \cap (M_{2,1}M_{1,2} = 1) = (1 - p)^2 + 2p(1 - p) \times p^2 = p^2(1 - p^2)$.

Et on a $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = -1) = 1 - 2p^2(1 - p^2)$.

Donc X a pour loi

x	-1	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	$p^2(1 - p^2)$	$1 - 2p^2(1 - p^2)$	$p^2(1 - p^2)$

De même pour Y, on a $Y \in \{0, 1, 2\}$ et on trouve comme loi

y	0	1	2
$\mathbb{P}(Y = y)$	$(1 - p)^2$	$2p(1 - p)$	p^2

2. Calculer la probabilité que 0 soit une valeur propre de la matrice.

> **Solution:** C'est précisément la probabilité que M ne soit pas inversible, soit $X = \det(M) = 0$, ce qui donne $1 - 2p^2(1-p)^2$ par la question précédente.

Exercice 4

On joue n fois à pile ou face (avec une pièce équilibrée). On représente l'expérience par $\Omega = \{0,1\}^n$ (1 pour pile, 0 pour face). On note, pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, S_k la variable aléatoire égale au nombre de pile lors des k premiers coups. Dans ce jeu, on gagne 1 quand on fait pile et on perd 1 quand on fait face. On note G_k la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) après les k premiers coups.

1. Déterminer la loi de S_k.

> **Solution:** S_k est la somme de k variable de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2}$, elle suit donc une loi Binomiale de paramètre $k, \frac{1}{2}$. On a donc, pour tout $i \in \{0, \ldots, k\}, \mathbb{P}(S_k = i) = \binom{k}{i} (\frac{1}{2})^i (1-\frac{1}{2})^{k-i} = \binom{k}{i} (\frac{1}{2})^k$

2. Montrer que $G_k = 2S_k - k$

> **Solution:** On note A_k le nombre de face au lancer k. On a, par défintion, $S_k + A_k = k$ et $G_k = S_k - A_k$
> Donc $G_k = 2S_k - (S_k + A_k) = 2S_k - k$.

3. Montrer que la loi de G_k est $\mathbb{P}(G_k = h) = \begin{cases} \binom{k}{\frac{h+k}{2}} 2^{-k} & \text{si } |h| \leq k \text{ et } k \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

> **Solution:** On a
> $$\mathbb{P}(G_k = h) = \mathbb{P}(2S_k - k = h) = \mathbb{P}(S_k = \frac{k+h}{2}) = \begin{cases} \binom{k}{\frac{h+k}{2}} 2^{-k} & \text{si } |h| \leq k \text{ et } k+h \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
> d'après la question 1. (erreur d'enoncé).

Exercice 5

On lance deux dés. Soit X le résultat du premier dé, Y le résultat du second. On note $S = X + Y$ et $M = \max(X, Y)$.

1. Quelle est la loi de X ? Calculer sa fonction de répartition.

Solution: X suit une loi uniforme sur $\{1, \dots, 6\}$ (comme Y d'ailleurs). On a pour tout $1 \le t \le 6$,

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \le t) = \mathbb{P}(X = 1) + \ldots + \mathbb{P}(X = E(t)) = \frac{E(t)}{6}$$

et $F_X(t) = 1$ si $t > 6$ et $F_X(t) = 0$ si $t < 0$, d'où

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{E(t)}{6} & \text{si } 0 \le t \le 6 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

C'est une fonction constante par morceaux (cf le dessin de l'exercice 7).

2. Déterminer la loi de S.

Solution: On a $S = X + Y$, donc $S \in \{2, \dots, 12\}$. Soit $n \le 12$.
On a

$$\mathbb{P}(S = n) = \mathbb{P}(X+Y = n) = \mathbb{P}(X = n-Y) = \sum_{y=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = n-Y | Y = y)\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{y=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = n-y)\mathbb{P}(Y = y)$$

En utilisant la formule de disjonction de cas. C'est une méthode classique et générale pour calculer la loi d'une somme de va. Comme X et Y suivent une loi uniforme, on a $\forall y \in \{0, \dots, n\}, \mathbb{P}(X = n - y)\mathbb{P}(Y = y) = \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{si } y \le 6 \text{ et } n - y \le 6 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{si } n - 6 \le y \le 6 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ et donc

$$\mathbb{P}(S = n) = \frac{1}{36} \sum_{y=1}^{n-1} 1_{n-6 \le y \le 6}$$

Si $n \le 7$, alors on a $\sum_{y=1}^{n-1} 1_{n-6 \le y \le 6} = \sum_{y=1}^{n-1} 1_{1 \le y \le n-1} = n-1$. Si $n > 7$, alors on a $\sum_{y=1}^{n-1} 1_{n-6 \le y \le 6} = \sum_{y=n-6}^{6} 1_{n-6 \le y \le 6} = 6 - (n-6) + 1 = 12 - (n-1)$ (on compte les y qui ne donnent pas 0). Et donc on a

$$\mathbb{P}(S = n) = \begin{cases} \frac{n-1}{36} & \text{si } n \in \{1, \dots, 7\} \\ \frac{12-(n-1)}{36} & \text{si } n \in \{8, \dots, 12\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui donne sous forme de tableau

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(S = n)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

On peut vérifier que $\sum_n \mathbb{P}(S = n) = 1$ pour être (presque) sûr de ne pas avoir fait d'erreur.

3. Vérifier que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes. En déduire la fonction de répartition de M , puis sa loi.

Solution: X et Y sont indépendant car les deux dés sont lancés indépendement (en général, quand on pose cette question, on demande de vérifier l'égalité $\mathbb{P}(X=x)\cap(Y=y)) = \mathbb{P}(X=x)\cap\mathbb{P}(Y=y)$, mais ici on peut pas vraiment calculer ça sans le supposer, donc c'est une débile...).

On a, pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F_M(t) &= \mathbb{P}(M \le t) = \mathbb{P}(\max(X,Y) \le t) = \mathbb{P}((X \le t) \cap (Y \le t)) \\ &= \mathbb{P}(X \le t) \times \mathbb{P}(Y \le t) && \text{par indépendence} \\ &= F_X(t) \times F_Y(t) \end{aligned}$$

C'est un résultat général sur les va indépendentes : le max de 2 va indépendente a pour fonction de répartition le produit des fonctions de répartition !

On sait que $M \in \{1, \ldots, 6\}$. Donc on a, pour $n \le 6$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M=n) &= \mathbb{P}(M \le n) - \mathbb{P}(M \le n-1) = \mathbb{P}(X \le n) \times \mathbb{P}(Y \le n) - \mathbb{P}(X \le n-1) \times \mathbb{P}(Y \le n-1) \\ &= (\frac{n}{6})^2 - (\frac{n-1}{6})^2 = \frac{2n-1}{36} \end{aligned}$$

Encore une fois, on peut vérifier que $\sum_n \mathbb{P}(M=n) = 1$ pour ?orriger d'éventuelles erreurs !

Exercice 6

On lance trois fois de suite un dé non pipé.

1. Quelle est l'espace d'observations Ω et la probabilité associés à cette expérience ?

Solution: $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^3$ et la probabilité est uniforme.

2. Soit X le nombre de valeurs distinctes obtenues (par exemple $X((1,2,6)) = 3$ et $X((4,4,2)) = 2$). Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

Solution: On a $X \in \{1,2,3\}$.

Calculons $\mathbb{P}(X=3)$. On veut les 3 dés distincts, on a donc 6 possibilité pour le premier, 5 pour le deuxième, et 4 pour le troisième. Ce qui donne

$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{6 \times 5 \times 4}{6^3} = \frac{5}{9}$$

Maintenant $\mathbb{P}(X=1)$. On veut les trois dés identiques. On a donc 6 possibilités pour le premier dé, qui détermine alors le résultat des autres. Donc

$$\mathbb{P}(X=1) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$$

Et enfin on a $\mathbb{P}(X=2) = 1 - \mathbb{P}(X=1) - \mathbb{P}(X=3) = 1 - \frac{5}{9} - \frac{1}{36} = \frac{36-20-1}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

D'où la loi de X :

x	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{9}$

Encore une fois, on peut essayer de calculer directement $\mathbb{P}(X = 2)$ pour vérifier la justesse de notre raisonnement. Pour avoir 2 résultats différents, on choisit 2 dés parmis les 3 qui vont avoir la même valeur ($\binom{3}{2}$ possibilités), puis ensuite on a 6 possibilités pour ces 2 là et 5 pour le dernier dés, soit

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{3 \times 6 \times 5}{6^3} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Ouf !

Pour calculer l'espérance, on utilise la formule

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times \mathbb{P}(X = 1) + 2 \times \mathbb{P}(X = 2) + 3 \times \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{36} + \frac{2 \times 15}{36} + \frac{3 \times 20}{36} = \frac{91}{36}$$

Exercice 7

On considère une variable aléatoire X dont la fonction de répartition F_X est représentée ci-dessous

1. Quelles sont les valeurs possibles pour X ?

Solution: On voit sur le graph -1, 1 et 3.

2. Déterminer la loi de X.

Solution: On voit sur le graph : $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X \leq -1) - \mathbb{P}(X < -1) = p - 0 = p$. De même, on a $\mathbb{P}(X = 1) = q - p$ et $\mathbb{P}(X = 3) = 1 - q$.

D'où la loi de X :

x	-1	1	3
$\mathbb{P}(X = x)$	p	$q - p$	$1 - q$

3. Donner $\mathbb{P}(X < 1), \mathbb{P}(X \in]0.5, 3.2])$ et $\mathbb{P}(X > 3)$.

Solution: On a $\mathbb{P}(X < 1) = \mathbb{P}(X = -1) = p$, $\mathbb{P}(X \in]0.5, 3.2]) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 3) = q - p + 1 - q = 1 - p$ et $\mathbb{P}(X > 3) = 0$.

4. Calculer l?espérance de X.

Solution: On utilise la définition

$$\mathbb{E}(X) = (-1) \times p + 1 \times (q - p) + 3 \times (1 - q) = 3 - 2q - 2p$$

Exercice 8

On lance une fois un dé non pipé.

1. On suppose qu?on reçoit 15 euros si on obtient 1, rien si on obtient 2,3 ou 4, et 6 euros si on obtient 5 ou 6. Soit G la variable aléatoire égale au gain de ce jeu. Quelle est la loi de G ? Que vaut le gain moyen ?

Solution: On a $G \in \{0, 6, 15\}$. D'après l'énoncé, on a

g	0	6	15
$\mathbb{P}(G = g)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Et le gain moyen est l'espérance de G. On a $\mathbb{E}(G) = 0 \times \frac{1}{2} + 6 \times \frac{1}{3} + 15 \times \frac{1}{6} = \frac{9}{2}$.

2. On suppose maintenant qu'on gagne 27 euros pour un 1 et rien sinon. Préférez vous jouez au jeu précédent ou à celui-ci ? Pourquoi ?

Solution: De même, on a $\mathbb{P}(G = 0) = \frac{5}{6}$ et $\mathbb{P}(G = 27) = \frac{1}{6}$ et $\mathbb{E}(G) = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$. On trouve le même gain moyen donc mahtématiquement parlant peu importe. Personnellement, je trouve que c'est plus fun de jouer quitte ou double, du coup je préfère le deuxième, mais ça n'engage que moi.

Exercice 9

On lance une fois un dé non pipé. Soit X la variable aléatoire égale au résultat du dé. On pose $Y = 2X - 1$ et $Z = X^2$.

1. Quelle est la loi de Y ? Son espérance ?

Solution: On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(2X - 1 = k) &= \mathbb{P}(X = \frac{k+1}{2}) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } \frac{k+1}{2} \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } k \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

On a $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} k = \frac{1}{6} \times \frac{7 \times 6}{2} = \frac{7}{2}$. En utilisant la linéarité de $\mathbb{E}$, on obtient

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(2X - 1) = 2\mathbb{E}(X) - 1 = 6$$

2. Mêmes questions pour Z.

Solution: On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=k) &= \mathbb{P}(X^2=k) = \mathbb{P}(X=\sqrt{k}) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } \sqrt{k} \in \{1,2,3,4,5,6\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } k \in \{1,4,9,16,25,36\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\end{aligned}$$

Attention, on ne peut pas dire que $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X)^2$! On peut sortir la multiplication de l'espérance seulement pour des variables indépendantes, et X n'est pas indépendant avec lui-même. Il faut utiliser la formule :

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{1}{6} \times \frac{6\times(6+1)(2\times 6+1)}{6} = \frac{7\times 13}{6}$$

.

Exercice 10

1. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(X=n) = c\frac{2^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer la valeur de c puis l'espérance de X.

Solution: On doit avoir $\sum_n \mathbb{P}(X=n) = 1$, ce qui donne

$$c = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}\right)^{-1} = e^{-2}$$

(pour rappel, on a $e^x = \sum_n \frac{x^n}{n!}$)
Et on a

$$\mathbb{E}(X) = c\sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{2^n}{n!} = c\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(n-1)!} = 2c \times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!} = 2e^{-2} \times e^2 = 2$$

2. Mêmes questions en supposant cette fois que $\mathbb{P}(X=n) = c\frac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution: De même, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}*} \mathbb{P}(X=n) = 1$, ce qui donne

$$c = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{-1} = \frac{6}{\pi^2}$$

(pour rappel, on a $\sum_n \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$)
Et on a

$$\mathbb{E}(X) = c\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{1}{n^2} = c\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Exercice 11

On considère un sac contenant deux boules rouges et quatre boules noires, indiscernables au toucher.

1. On tire successivement une boule, sans remise, jusqu'à obtenir une boule rouge, et on note X son rang d'apparition. Déterminer la loi de ce rang.

Solution: Pour obtenir une boule rouge seulement au rang k, il faut tirer que des boules noires aux rang $1, \dots, k-1$, puis une boule rouge au rang k. Comme le tirage est sans remise, on a $X \leq 5$. On a donc , pour $1 \leq k \leq 5$

$$P(X = k) = \frac{4}{6} \times \cdots \times \frac{4-k+1}{6-k+1} \times \frac{2}{6-k}$$

ce qui donne en tableau :

X	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(G = g)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

On vérifie qu'on a bien $\frac{1}{3} + \frac{4}{15} + \frac{1}{5} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} = 1$

2. On tire successivement une boule, avec remise, jusqu'à obtenir une boule rouge, et on note X son rang d'apparition. Déterminer la loi de ce rang.

Solution: Même raisonnement, cette fois le nombre de boule ne décroit pas et X peut prendre des valeurs arbitrairement grandes. On a alors, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = k) = (\frac{2}{3})^{k-1} \times \frac{1}{3}$$

On reconnait la loi géométrique.

Exercice supplémentaire

1. On lance 3 dés. A l'issue du premier jet, on reprend les dés qui n'ont pas fait 1. On procède alors à un second jet de ces dés et ainsi de suite jusqu'à obtenir 3 fois 1. Soit X le nombre de jets nécessaire. Calculer $\mathbb{P}(X < x)$ en introduisant les variables aléatoires X_i "nombre de coups nécessaire pour que le dé i donne un 1". En déduire la loi de probabilité $\mathbb{P}(X = x)$ de X et son espérance.

Solution:

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, calculons $\mathbb{P}(X_i = k)$.

Pour que le dé i donne un un au lancer k sans en avoir donné avant, il faut faire $k-1$ fois autre chose que un (5 chances sur 6 à chaque fois) et une fois un au dernier lancer (une chance sur 6).

Cela donne $\mathbb{P}(X_i = k) = (\frac{5}{6})^{k-1} \times \frac{1}{6}$. C'est la loi géométrique, qui apparaît souvent dans ce genre de situation.

On a donc pour $n \in \mathbb{N}$

$$F_{X_i}(n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = k) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n} (\frac{5}{6})^{k-1} = \frac{1}{6} \frac{1 - (\frac{5}{6})^n}{1 - \frac{5}{6}} = 1 - (\frac{5}{6})^n$$

(On aurait pu montrer ce résultat directement en disant que $\mathbb{P}(X \leq n) = 1 - \mathbb{P}(X > n) = 1 - (1 - \frac{1}{6})^n$)
On a $X = \max(X_1, X_2, X_3)$. Comme vu à l'exo 5, on peut exprimer la fonction de répartition du

max en fonction des fonctions de répartition des variables (on va le redémontrer). Par indépendance des dé, on a, pour $x \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq x) &= \mathbb{P}(\max(X_1, X_2, X_3) \leq x) = \mathbb{P}((X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x) \cap (X_3 \leq x) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq x) \times \mathbb{P}(X_2 \leq x) \times \mathbb{P}(X_3 \leq x) \\ &= (F_{X_1}(x))^3 = (1 - (\frac{5}{6})^x)^3\end{aligned}$$

Et donc on a $\mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(X \leq x - 1) = (1 - (\frac{5}{6})^{x-1})^3$ et donc

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X < x) = (1 - (\frac{5}{6})^x)^3 - (1 - (\frac{5}{6})^{x-1})^3$$

On peut maintenant calculer l'espérence de X. On a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=1}^{+\infty} x \left(\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^x\right)^3 - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}\right)^3 \right)$$

Il faut faire attention avec les sommes : la série $\sum_x \mathbb{P}(X = x)$ converge, mais pas $\sum_x (1 - (\frac{5}{6})^x)^3$ (le terme général tend vers 1). On ne peut pas décomposer en 2. Pour cela, on calcul les sommes partielles et on passe à la limite. On calcule donc d'abord, pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}A_N &= \sum_{x=1}^{N} x \left(\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^x\right)^3 - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}\right)^3 \right) = \sum_{x=1}^{N} x \left(\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^x\right)^3 \right) - \sum_{x=1}^{N} x \left(\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}\right)^3 \right) \\ &= \sum_{x=1}^{N} x \left(\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^x\right)^3 \right) - \sum_{x=0}^{N-1} (x+1) \left(\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^x\right)^3 \right) \\ &= N \left(\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^N\right)^3 \right) + \sum_{x=1}^{N-1} x \left(\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^x\right)^3 \right) - \sum_{x=0}^{N-1} x \left(\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^x\right)^3 \right) - \sum_{x=0}^{N-1} \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^x\right)^3 \\ &= N \left(\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^N\right)^3 \right) - \sum_{x=0}^{N-1} \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^x\right)^3\end{aligned}$$

Calculons donc, pour $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{x=0}^{N-1} \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^x\right)^3$. On a $\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^x\right)^3 = 1 - 3\left(\frac{5}{6}\right)^x + 3\left(\frac{5}{6}\right)^{2x} - \left(\frac{5}{6}\right)^{3x}$. D'où

$$\begin{aligned}\sum_{x=0}^{N-1} \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^x\right)^3 &= \sum_{x=0}^{N-1} 1 - 3\left(\frac{5}{6}\right)^x + 3\left(\frac{5}{6}\right)^{2x} - \left(\frac{5}{6}\right)^{3x} \\ &= N - 3\sum_{x=0}^{N-1} \left(\frac{5}{6}\right)^x + 3\sum_{x=0}^{N-1} \left(\left(\frac{5}{6}\right)^2\right)^x - \sum_{x=1}^{N-1} \left(\left(\frac{5}{6}\right)^3\right)^x \\ &= N - 3 \times \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^N}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)} + 3 \times \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2N}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} - \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{3N}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3} \\ &= N - 18\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^N\right) + 3 \times \frac{36}{9}\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2N}\right) - \frac{6 \times 36}{91}\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{3N}\right) \\ &= N + \left(-18 + 12 - \frac{216}{91}\right) + \circ(1) = N - \frac{762}{91} + \circ(1)\end{aligned}$$

En outre, on a $N\left(\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^N\right)^3\right) = N\left(1-3\times\left(\frac{5}{6}\right)^N + \circ\left(\left(\frac{5}{6}\right)^N\right)\right) = N+\circ(1)$. Et donc on a

$$A_N = N+\circ(1) - N + \frac{762}{91} + \circ(1) = \frac{762}{91} + \circ(1)$$

Et donc, en passant à la limite en N, on obtient

$$\mathbb{E}(X) = \frac{762}{91} \approx 8,4$$

Il faut donc en moyenne 8 lancers pour obtenir 3 un !

Exercice 12

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, où X suit loi géométrique de paramètre p et Y une loi géométrique de paramètre q. Soit M une constante entière.

1. Calculer la loi de $U = \min(X, M)$.

Solution: On a $1 \leq U \leq M$. Pour $k < M$, on a

$$\mathbb{P}(U = k) = \mathbb{P}(\min(X, M) = k) = \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

et pour $k = M$,

$$\mathbb{P}(U = M) = \mathbb{P}(X \geq M) = \sum_{k=M}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = p(1-p)^{M-1}\sum_{i=0}^{+\infty}(1-p)^i = p(1-p)^{M-1}\times\frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^{M-1}$$

Remarque : On aurait pu aussi calculer $\mathbb{P}(U = M)$ comme $1 - \mathbb{P}(U < M)$, ce qui permet de vérifier notre résultat. On a

$$\mathbb{P}(U = M) = 1 - \sum_{k=1}^{M-1} p(1-p)^{k-1} = 1 - p\times\frac{1-(1-p)^{M-1}}{1-(1-p)} = (1-p)^{M-1}$$

2. Déterminer la fonction de répartition de $V = \min(X, Y)$. En déduire sa loi.

Solution: On sait que X et Y sont indépendants et prennent des valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Donc V prend des valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et on a, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V \geq k) &= \mathbb{P}(\min(X, Y) \geq k) = \mathbb{P}((X \geq k) \cap (Y \geq k)) \\ &= \mathbb{P}(X \geq k) \times \mathbb{P}(Y \geq k) \qquad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendants}\end{aligned}$$

et on a $\mathbb{P}(X \geq k) = 1 - \sum_{i=1}^{k} p(1-p)^{k-1} = (1-p)^{k-1}$ par le calcul de la question précédente. Donc

$$\mathbb{P}(V \geq k) = (1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1}$$

Et on a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V=k) &= \mathbb{P}(V \geq k) - \mathbb{P}(V \geq k+1) \\
&= (1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1} - (1-p)^{k}(1-q)^{k} = (1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1}(1-(1-p)(1-q)) \\
&= \left[(1-p)(1-q)\right]^{k-1} \times (1-(1-p)(1-q))
\end{aligned}$$

V suit donc une loi géométrique de paramètre $1-(1-p)(1-q)$.

Exercice 13

1. Soit X une variable aléatoire ayant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Montrer que pour tout $n, k > 0$ $\mathbb{P}(X = n+k | X > n) = \mathbb{P}(X = k)$.

Solution: On a, pour $n, k > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = n+k | X > n) &= \frac{\mathbb{P}((X = n+k) \cap (X > n))}{\mathbb{P}(X > n)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X = n+k)}{\mathbb{P}(X \geq n+1)} = \frac{p(1-p)^{n+k-1}}{(1-p)^{n+1-1}} \\
&= p(1-p)^{k-1} = \mathbb{P}(X = k)
\end{aligned}$$

en réutilisant le calcul de l'exercice 12, 1)