Algèbre 3
TD 8
Réduction des endomorphismes

Licence 2 MAE 2020-2021

Université Paris Descartes

Marc Briant

Dans tout ce TD, $(\mathbb{K},+,.)$ désigne un corps commutatif.

Des réductions pures et simples

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, répondre aux questions :

a) Déterminer χ_A, le polynôme caractéristique de la matrice A.

b) La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{C}$? Si oui, donner une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel, formée de vecteurs propres de A et la matrice relativement à celle-ci.

$$1)\quad A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2)\quad A=\begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$3)\quad A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \qquad 4)\quad A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Dans les cas suivants calculer $\chi_{M(a)}$ et déterminer les réels a pour lesquels $M(a)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

$$1)\quad M(a)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & -a \\ 1 & 1 & (2-a) \end{pmatrix} \qquad 2)\quad M(a)=\begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 *: Construisons des contre-exemples*

1. Donner un exemple de matrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui soit diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.
2. Donner un exemple de matrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonalisable ni sur $\mathbb{R}$ ni sur $\mathbb{C}$.

Exercice 4 *: Du côté des endomorphismes*

Dans chacun des cas suivants, E est un $\mathbb{R}$-ev avec $\mathcal{B}$ sa base canonique et $f \in L(E)$. Déterminer si f est diagonalisable et si elle l'est déterminer une base $\mathcal{B}'$ de vecteurs propres de f ainsi que $M_{\mathcal{B}'}(f)$.

1. Soient $E=\mathbb{R}^3$, $a\in\mathbb{R}$ et
$$f(e_1)=(a-1)e_2+(a^2-1)e_3 \quad f(e_2)=(1-a)e_2 \quad f(e_3)=e_1+e_2+(2-a^2)e_3.$$
Peut-être devrons-nous discuter suivant les valeurs de a...
2. Soient $n\geqslant 1$, $E=\mathbb{R}_{2n}[X]$, $a\in\mathbb{R}$ et $f(P)=(X-1)P'-(2n-a)P$. *Peut-être devrons-nous discuter suivant les valeurs de a...*

De l'utilité de la réduction d'endomorphismes

Exercice 5 *: Matrices semblables*

Dans chacun des cas suivants calculer le rang, la trace, le déterminant et le polynôme caractéristique des matrices A et B. Ensuite déterminer si elles sont semblables.

1. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ où a est un réel.

Exercice 6 *: Calcul de puissances par diagonalisation*

Calculer A^n pour tout entier naturel n pour les matrices A suivantes.

$$1)\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2)\quad A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3)\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 4)\quad A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$