Algèbre 3
TD 4
Quand la dimension est finie

Licence 2 MAE 2020-2021

Université Paris Descartes

Marc Briant

Dans tout ce TD, $(\mathbb{K},+,.)$ désigne un corps commutatif.

Tout sur la dimension et la supplémentarité

Exercice 1

Dans les cas suivants, montrer que E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et donner sa dimension.

1) $E = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \quad x+2y+3z+4t=0\right\}$.
2) $E = \mathrm{Vect}(\{(1,2,1,2,1),(2,1,2,1,2),(1,0,1,1,0),(0,1,0,0,1)\}$ dans $\mathbb{R}^5$.
3) $E = \left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \quad \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ f(x) = (ax^2+bx+c)\cos x\right\}$
4) $E = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n\right\}$, $p \geqslant 1$ étant un entier fixé.

Exercice 2

Nous nous plaçons dans $\mathbb{R}^3$, trouver une base puis un supplémentaire des sous-ev suivants

1) $F = \mathrm{Vect}(\{(1,1,0),(2,1,1)\})$.
2) $F = \mathrm{Vect}(\{(1,0,0),(0,1,1),(1,1,1)\}$.
3) $F = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\right\}$.
4) $F = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \quad x_1 - \sqrt{3}x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \quad \text{et} \quad x_2 - x_3 + x_4 = 0\right\}$.

Exercice 3

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et F et G deux sous-ev de E.

1) **[*]** Supposons que $\dim(F) = \dim(G)$. Montrer alors que F et G on un supplémentaire commun. *Une récurrence descendante sur $\dim(F)$ est une bonne idée...*
2) Supposons que F et G soit supplémentaires dans E et on appelle $(e_1,..,e_p)$ une base de F. Fixons $a \in G$. Montrer que $\mathrm{Vect}(\{e_1+a,..,e_p+a\})$ est un supplémentaire de G.

Applications linéaires et dimension finie

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes

1) $f(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.
2) $f(x,y,z,t) = (2x+y+z, x+y+t, x+z-t)$ de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$.
3) $f \in L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ définie par $f(0,0,1) = (1,0)$, $f(1,0,1) = (1,1)$ et $f(1,1,1) = (0,1)$. Nous commencerons par justifier que f est bien définie.
4) $f \in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$ définie par $f(1,2) = (1,2,0)$, $f(2,1) = (1,0,2)$. Nous commencerons par justifier que f est bien définie.

Exercice 5 : *Du rang, rien que du rang*

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et soient $f \in L(E,F)$ et $g \in L(F,G)$. Montrer que

1. $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min\{\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f)\}$.
2. Si f est surjective alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$.
3. Si g est injective alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

Exercice 6 : *Et encore que du rang !*

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et u et v deux endomorphismes de E. Démontrer les assertions suivantes

1) Si $u+v$ est bijectif et $v \circ u = 0$ alors $\dim(E) = \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.
2) Si $u^3 = 0$ alors $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(u^2) \leqslant \dim(E)$.
3) $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u^2) \Leftrightarrow E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.
4) Si $E = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$ et $E = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)$ alors ce sont des sommes directes.

Exercice 7 : *Autour de la nilpotence*

Prenons E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et $u \in L(E)$ tel que u soit nilpotent d'ordre $p \geqslant 1$ et $u \neq 0_{L(E)}$.

1) Montrer que $p \leqslant n$. *Nous pourrons réfléchir à ce que veut dire que u^{p-1} est non nul. Après, ce que nous aimons dans les ev de dimension finie ce sont les bases...*
2) Si $p = 2$ montrer que $\mathrm{Id}_E - u$ est un automorphisme de E et donner $(\mathrm{Id}_E - u)^{-1}$. Généraliser au cas $p \leqslant n$ en regardant $\mathrm{Id}_E + u + u^2 + .. + u^{p-1}$.

Exercice 8 : *Parlons formes linéaires*

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et φ et ψ deux formes linéaires non nulles sur E. Démontrer les propositions suivantes.

1) $\exists e \in E, \quad \varphi(e)\psi(e) \neq 0_{\mathbb{K}}$.
2) $\forall e \in E \backslash \mathrm{Ker}(\varphi), \quad E = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Vect}(e)$.

Exercice 9

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension 2, e un vecteur non nul de E et $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(e) \neq 0_{\mathbb{K}}$. Nous définissons

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x + \varphi(x)e \end{array}.$$

1) Montrer que $f \in L(E)$ puis que l'ensemble des invariants de f est un sous-ev de dimension 1.
2) Montrer que $f \in GL(E) \Leftarrow \varphi(e) \neq -1_{\mathbb{K}}$.

Un problème complet pour s'entraîner

Exercice 10

Considèrons un $\mathbb{K}$-ev E de dimension 3 et appelons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Pour a et b deux réels nous définissons $f \in L(E)$ par

$$f_{a,b}(e_1) = e_1 + (a-1)e_2, \quad f_{a,b}(e_2) = (b-1)e_2, \quad f_{a,b}(e_3) = ae_1 + be_3.$$

a) Pour $x = (x_1, x_2, x_3)$ dans $\mathcal{B}$, donner les coordonnées de $f_{a,b}(x)$ dans $\mathcal{B}$.
b) Trouver tous les b tels que $f_{2,b} \in GL(E)$.
c) Expliciter $\mathrm{Ker}(f_{2,1})$ et $\mathrm{Im}(f_{2,1})$. Ces sous-ev sont-ils supplémentaires ?
d) Existe-t-il un couple (a, b) pour lequel $f_{a,b}$ est un projecteur. Si oui, caractériser ce projecteur.
e) Soit $F = \mathrm{Vect}(\{e_1, e_2\})$.
   (i) Donner une équation cartésienne de F dans $\mathcal{B}$.
   (ii) Montrer que $f_{0,0}(F) = F$.
   (iii) Montrer que $s : F \longrightarrow F$ définie par $\forall x \in F,\ s(x) = f_{0,0}(x)$ est une symétrie de F que l'on caractérisera.