Algèbre 3
TD 5
Matrices

Licence 2 MAE 2020-2021

Université Paris Descartes

Marc Briant

Dans tout ce TD, $(\mathbb{K}, +, .)$ désigne un corps commutatif.

Applications linéaires, matrices et changement de base

Exercice 1 : *Écrire des applications linéaires sous forme de matrices*

Dans chacun des cas suivants écrire la matrice de l'application linéaire f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

1) $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (x+y, y-2x+z)$ dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
2) $\forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3,\ f(x_1,x_2,x_3) = (x_2+x_3, x_3+x_1, x_1+x_2)$ dans $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ f(M) = AM$ dans $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ f(M) = MA$ dans $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
5) Soit $a \in \mathbb{C}^*$, $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = z + a\overline{z}$ dans $\mathcal{B} = \mathcal{B}' = (1, i)$ base du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$.

Exercice 2

Nous nous plaçons dans $E = \mathbb{R}^3$ pour lequel nous considérons une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et un endomorphisme f. Dans chacun des cas suivants nous donnons $M_{\mathcal{B}}(f)$ et une nouvelle base $\mathcal{B}'$. Écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ puis $M_{\mathcal{B}'}(f)$.

1) $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B}' = ((1,0,-1), (0,1,1), (1,0,1))$.
2) $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B}' = ((1,0,1), (-1,1,0), (1,1,1))$.
3) $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ définis par $e_1' = e_1 + e_2 + e_3$, $e_2' = e_2$ et $e_3' = e_3$. Les nombres a, b et c sont réels.
4) $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \beta^2 + \alpha^2\cos\theta & \alpha\sin\theta & \alpha\beta(1-\cos\theta) \\ -\alpha\sin\theta & \cos\theta & \beta\sin\theta \\ \alpha\beta(1-\cos\theta) & -\beta\sin\theta & \alpha^2 + \beta^2\cos\theta \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ définis par $e_1' = \beta e_1 + \alpha e_3$, $e_2' = e_2$ et $e_3' = -\alpha e_1 + \beta e_3$. Les nombres α et β sont des complexes tels que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ tandis que θ est un réel.

Exercice 3 : *Matrices simples de projecteurs et symétries*

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $u \in L(E)$ non nul.

1) Supposons que u est un projecteur, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$ de E et $r \in [\![0, n]\!]$ tels que
$$\forall i \in [\![1, r]\!],\ u(e_i) = 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![r+1, n]\!],\ u(e_i) = e_i.$$
Donner la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
2) Supposons que u est une symétrie, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$ de E et $r \in [\![0, n]\!]$ tels que
$$\forall i \in [\![1, r]\!],\ u(e_i) = -e_i \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![r+1, n]\!],\ u(e_i) = e_i.$$
Donner la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

Du calcul matriciel bête et méchant

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants nous définissons une matrice $A \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{K})$. Calculer son rang puis en appelant f l'application linéaire représentée par A dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ déterminer des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad 2) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 : *Calculer des puissances grâce à la nilpotence*

Dans chacun des cas suivants, calculer B^n et en déduire une expression pour A^n.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$ 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 6 : *La finesse du pivot de Gauss...*

Dans chacun des cas suivants calculer A^{-1}.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 7 : *Problèmes de commutation*

1) Trouver toutes les matrices qui commutent avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où $\lambda_i \in \mathbb{K}$ sont deux à deux distincts.
2) Trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Des études plus abstraites

Exercice 8

Dans chacun des cas suivants montrer que F est un sous-ev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en expliciter une base et sa dimension.

1) $n = 2$ et $F \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ M = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} & \frac{a-b}{2} \\ \frac{a-b}{2} & \frac{a+b}{2} \end{pmatrix} \right\}$.
2) $n = 3$ et $F \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \right\}$.

Exercice 9

Dans chacun des cas suivants calculer le rang des matrices A et B ainsi que leur trace. Déterminer ensuite si elles sont, ou non, équivalentes puis si elles sont, ou non, semblables

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.
3) $A = \begin{pmatrix} u^2 & uv & uw \\ uv & v^2 & vw \\ uw & vw & w^2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où u, v et w sont trois complexes non nuls tels que $u^2 + v^2 + w^2 = 1$.
4) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(t) & \sinh(t) \\ 0 & \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$. On discutera suivant les valeurs du réel t.

Exercice 10 : *Concluons avec des matrices sur les matrices...*

Nous fixons $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que (A, I_n) soit libre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Nous définissons

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM - MA \end{array}.$$

a) Montrer que $\Phi \in L(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ et calculer $\text{tr}(\Phi(M))$ pour tout M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
b) Déterminer la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
c) Montrer que $\dim\text{Ker}(\Phi) \geqslant 2$ et en déduire $\text{rg}(\Phi)$.