Université Paris Descartes **Analyse 3**
1^{er} semestre 2019-2020

EXAMEN

Lundi 13 janvier 2020 - Durée : 2h

Tout document, calculatrice, téléphone portable et autre appareil électronique est interdit. L'énoncé comporte 4 exercices indépendants.

Une part substantielle de la note portera sur la rédaction. Une juxtaposition d'équations sans liens logiques ni quantificateurs appropriés ne se verra pas attribuer une note élevée.

On attend que vous citiez précisément les théorèmes utilisés. En l'absence de la totalité des hypothèses requises, votre résultat sera considéré comme faux.

Exercice 1 (Question de cours, $\approx$ 3pt) : Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et x_0, ℓ, ℓ' trois réels. Démontrer que si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$ et $g(y) \xrightarrow[y \to \ell]{} \ell'$, alors $g(f(x)) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell'$.

Exercice 2 ($\approx$ 5pt) : *Particulièrement dans cet exercice, tout calcul formel sans justification rigoureuse ne sera pas pris en compte.* Le but de cet exercice est de montrer, de deux manières différentes, que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2\arctan(|x|). \tag{1}$$

1. Justifier que les expressions intervenant dans l'égalité précédente ont bien un sens et qu'on peut, sans perte de généralité, supposer $x \geq 0$.
2. Première démonstration de (1) :
   (a) Pour $x \geq 0$, posons $y = 2\arctan(x)$. Exprimer $1 - x^2$ et $1 + x^2$ en fonction de $\cos\left(\frac{y}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{y}{2}\right)$.
   (b) En déduire une expression simple de $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ en fonction de y.
   (c) Conclure.
3. Deuxième démonstration de (1) : en supposant $x > 0$, dériver (en justifiant vos calculs) la fonction $x \mapsto \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) - 2\arctan(x)$. Conclure.

Correction :

1. La fonction arccos est définie sur $[-1, 1]$ et $\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \leq \frac{1+x^2}{1+x^2} = 1$, par inégalité triangulaire. De plus, arctan est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ainsi, les expressions intervenant dans l'égalité précédente ont bien un sens. De plus, les deux termes de l'égalité sont des expressions paires en x. On peut donc, sans perte de généralité, supposer $x \geq 0$.
2. (a) Pour $x \geq 0$, posons $y = 2\arctan(x)$. On a alors $\arctan(x) = \frac{y}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi $\tan(\arctan(x)) = \tan\left(\frac{y}{2}\right)$. Or, arctan réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$ de bijection réciproque tan. Donc $x = \tan\left(\frac{y}{2}\right)$. Mais alors $1 - x^2 = 1 - \tan^2\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{y}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{y}{2}\right)}$ et $1 + x^2 = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{y}{2}\right)}$.
   (b) Mais alors $\frac{1-x^2}{1+x^2} = \cos^2\left(\frac{y}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{y}{2}\right) = \cos(2\frac{y}{2}) = \cos(y)$, par formule de l'angle moitié.
   (c) On a $y \in [0, \pi[$. Or la fonction cos réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$ de bijection réciproque arccos. Donc $y = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.
3. La fonction arccos est dérivable sur $]-1, 1[$. Or $\frac{1-x^2}{1+x^2} \in [-1, 1]$ et $\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| = 1$ si et seulement si $|1 - x^2| = 1 + x^2$. Deux cas : si $1 - x^2 \geq 0$, alors $1 - x^2 = 1 + x^2$ ce qui revient à dire que $x = 0$. Ou alors $1 - x^2 \leq 0$ auquel cas $x^2 - 1 = 1 + x^2$, impossible. Donc pour $x > 0$, $\frac{1-x^2}{1+x^2} \in]-1, 1[$. De plus la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, pour $f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) - 2\arctan(x)$, on a pour $x > 0$,

$$f'(x) = -\frac{\frac{-2x}{1+x^2} - \frac{2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} - \frac{2}{1+x^2} = -\frac{\frac{-4x}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}} - \frac{2}{1+x^2},$$
$$= -\frac{\frac{-4x}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} - \frac{2}{1+x^2} = 0,$$

car $x > 0$ *(Rq : un minimum de détails est attendu pour ce calcul. Une réponse directe $f'(x) = 0$ ne sera pas considérée).* Ainsi, f est de dérivée nulle sur l'intervalle $]0, +\infty[$, donc constante sur cet intervalle : il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = k$ pour tout $x > 0$. Or f est continue sur $\mathbb{R}$ donc continue en 0. En particulier f admet une limite à droite en 0 qui vaut $f(0) = 0$. Donc $k = 0$.

Exercice 3 ($\approx$ 4pt) : Soit $a < b$ deux réels et f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b) = 0$. On suppose de plus que sa dérivée f' est strictement décroissante sur $]a, b[$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Montrer que f est strictement croissante sur $[a, c]$ et strictement décroissante sur $[c, b]$ (*Indication : pour $x < y$, on pourra utiliser l'égalité des accroissements finis sur le segment* $[x, y]$). En déduire que f admet un maximum global en c.
3. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$.

Correction :

1. C'est le théorème de Rolle : la fonction f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$. Il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Soit $x < y \in [a, c]$. Alors f est continue sur $[x, y]$ dérivable sur $]x, y[$. Il existe donc $d \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(d)(y - x)$. Or f' est strictement décroissante donc comme $a < d < c$, on a $f'(d) > f'(c) = 0$. Donc pour $y - x > 0$, on a $f(y) > f(x)$. Donc f est strictement croissante sur $[a, c]$. Elle est strictement décroissante sur $[c, b]$ par le même raisonnement (car dans ce cas, la stricte décroissance de f' sur $]a, b[$ donne $f'(d) < 0$ pour tout $d \in]c, b[$). Donc f admet un maximum global en c.
3. Pour tout $x \in [a, c]$, $f(x) \geq f(a) = 0$ et pour tout $x \in [c, b]$ $f(x) \geq f(b) = 0$.

Exercice 4 ($\approx$ 9pt) : Les hypothèses de cet exercice sont les suivantes : $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue qui admet une limite finie a quand $x \to \infty$. Le but de cet exercice est de montrer que f est uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

1. Montrer la propriété suivante : si pour toutes suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ de $[0, +\infty[$ vérifiant $|x_n - y_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, on a $|f(x_n) - f(y_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors f est uniformément continue sur $[0, +\infty[$ (*Indication : on pourra procéder par contraposée*).

Dans toute la suite de l'exercice, $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ sont deux suites de $[0, +\infty[$ telles que $|x_n - y_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2. Montrer que, sous les hypothèses de l'énoncé, la fonction f est bornée sur $[0, +\infty[$.

3. En déduire que la suite $(z_n)_{n\geq 1}$ définie par $z_n = |f(x_n) - f(y_n)|$ est bornée.

Dans ce qui suit, ℓ est une valeur d'adhérence de la suite $(z_n)_{n\geq 1}$ et ϕ une extraction pour laquelle $z_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. On distingue deux cas :

4. On suppose dans cette question que la suite $(x_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ est bornée.
   (a) Montrer alors que $(y_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ est aussi bornée.
   (b) Montrer qu'il existe une seconde extraction ψ telle que $(x_{\phi(\psi(n))})_{n\geq 1}$ est convergente.
   (c) Montrer alors que $(y_{\phi(\psi(n))})_{n\geq 1}$ est convergente, de même limite.
   (d) En déduire que $\ell = 0$.
5. On suppose dans cette question que la suite $(x_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ n'est pas bornée.
   (a) Montrer qu'il existe une extraction ρ telle que $x_{\phi(\rho(n))} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.
   (b) Montrer que de même $y_{\phi(\rho(n))} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.
   (c) Conclure que $\ell = 0$.
6. Déduire des questions précédentes que $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ puis conclure.

Correction :

1. On procède par contraposée : si f n'est pas uniformément continue sur $[0, +\infty[$, alors il existe $\varepsilon > 0$, pour tout $\eta > 0$, il existe $x, y \geq 0$ tels que $|x - y| < \eta$ et $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Ceci est en particulier vrai pour $\eta = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$. Il existe $x_n, y_n \geq 0$ tels que $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Cette dernière quantité ne tend pas vers 0.
2. La fonction f admet une limite finie quand $x \to \infty$, elle est donc bornée au voisinage de $+\infty$: il existe $A > 0$ et $M > 0$ tels que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x > A$. Par ailleurs, la fonction f est continue sur le segment $[0, A]$, donc bornée, par théorème de la borne atteinte. Donc la fonction f est bornée sur $[0, +\infty[$.
3. Si $M > 0$ est un majorant de f, on a par inégalité triangulaire, pour tout $n \geq 1$, $|z_n| = |f(x_n) - f(y_n)| \leq 2M$.
4. (a) La suite $|x_n - y_n|$ tend vers 0 donc la suite $\left|x_{\phi(n)} - y_{\phi(n)}\right|$ aussi (toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite). Elle est donc bornée. Mais alors $\left|y_{\phi(n)}\right| \leq \left|x_{\phi(n)} - y_{\phi(n)}\right| + \left|x_{\phi(n)}\right|$ est aussi bornée.
   (b) Par théorème de Bolzano-Weierstrass, comme $(x_{\phi(n)})$ est bornée, il existe une seconde extraction ψ telle que $(x_{\phi(\psi(n))})_{n\geq 1}$ est convergente, vers une limite m.
   (c) Mais alors $\left|y_{\phi(\psi(n))} - m\right| \leq \left|x_{\phi(\psi(n))} - y_{\phi(\psi(n))}\right| + \left|x_{\phi(\psi(n))} - m\right|$ tend aussi vers 0 pour $n \to \infty$.
   (d) Mais alors par continuité de f, $f(x_{\phi(\psi(n))})$ converge vers $f(m)$ (et idem pour $f(y_{\phi(\psi(n))})$). Donc $z_{\phi(\psi(n))}$ tend vers 0, mais aussi vers ℓ (toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite). Par unicité de la limite, $\ell = 0$.
5. (a) Question faite et refaite en TD et partiel : $M = 1$ n'est pas un majorant : il existe donc $n = \rho(1)$ tel que $x_{\phi(\rho(1))} \geq 1$. Ensuite $M = 2$ n'est pas un majorant de $(x_{\phi(n)})_{n\geq\phi(1)+1}$ (car sinon la suite initiale $(x_{\phi(n)})$ serait bornée). Il existe donc $\phi(2) > \phi(1)$ tel que $x_{\phi(\rho(2))} \geq 2$. Par une récurrence immédiate, on construit ρ tel que pour tout $n \geq 1$, $x_{\phi(\rho(n))} \geq n$. Le théorème des gendarmes permet de conclure.

(b) Alors $y_{\phi(\rho(n))} = y_{\phi(\rho(n))} - x_{\phi(\rho(n))} + x_{\phi(\rho(n))} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ (le premier terme tend vers 0, le second vers $+\infty$).

(c) Comme $x_{\phi(\rho(n))} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, $f(x_{\phi(\rho(n))}) \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. De même, $f(y_{\phi(\rho(n))}) \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Donc $z_{\phi(\rho(n))} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et donc $\ell = 0$.

6. La suite (z_n) est bornée et n'a qu'une seule valeur d'adhérence, qui est $\ell = 0$. Donc $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Par caractérisation de la première question, f est uniformément continue.

Fin de l'épreuve.