Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique
45, rue des Saints-Pères 75270 Paris cedex 06

Licence de Mathématiques et Informatique 2020-2021

Analyse 3

TD3

1 Exercices d'application

Exercice 1. Trouver un équivalent simple aux suites (u_n) suivantes et donner leur limite :

1. $u_n = (n + 3\ln n)\mathrm{e}^{-(n+1)}$

Solution : Le raisonnement informel est le suivant : $3\ln n$ est négligeable devant n, donc on peut l'oublier pour l'équivalent. Cependant, se méfier du principe "on garde à chaque fois les termes les plus grands dans chaque expression". En particulier, ce principe ne s'applique pas à l'exponentielle, il n'est pas question de remplacer $n+1$ par n dedans (encore une fois, se méfier des équivalents dans les exponentielles) ! En cas de doute, on revient à la définition en faisant le rapport et en montrant qu'il tend vers 1. Ici, on propose donc $u_n \sim n\mathrm{e}^{-(n+1)}$ ce qu'on justifie en faisant $\frac{u_n}{n\mathrm{e}^{-(n+1)}} = 1 + 3\frac{\ln n}{n}$ qui par croissance comparée tend vers 1.

2. $u_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1}$

Solution : On a $u_n = \frac{\ln(n^2(1+1/n^2))}{n+1} = \frac{2\ln n + \ln(1+1/n^2)}{n+1}$. Le second terme du numérateur tend vers 0, négligeable devant le premier terme qui tend vers $+\infty$. On propose donc $\frac{2\ln n}{n}$ comme équivalent : $\frac{u_n n}{2\ln n} = \frac{n(2\ln n + \ln(1+1/n^2))}{2(n+1)\ln n} \to 1$ pour $n \to \infty$.

3. $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}$

Solution : On factorise par le plus grand terme de chaque côté : $u_n = \frac{n\sqrt{1+1/n+1/n^2}}{n^{2/3}\sqrt[3]{1-1/n+1/n^2}} = n^{1/3}\frac{\sqrt{1+1/n+1/n^2}}{\sqrt[3]{1-1/n+1/n^2}}$. La dernière fraction tend vers 1 donc un équivalent est $u_n \sim n^{1/3}$.

4. $u_n = \sin\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

Solution : On remarque que $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ tend vers 0 donc on peut appliquer un DL de sin en 0 (rappel : utilisez autant que possible des DL, plutôt que des équivalents. Un équivalent est le résultat final d'un exercice, ou un outil pour déterminer une limite, mais je vous déconseille de les manipuler à tort et à travers dans vos copies, vous prenez le risque de faire des erreurs. Rappel, un équivalent est strictement équivalent à une égalité avec o : $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$. Je répète : privilégier la seconde écriture plutôt que la première dans les calculs). Ici un DL à l'ordre 1 suffit : $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + o(\frac{1}{\sqrt{n+1}})$ donc $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$.

5. $u_n = \ln\left(\sin(\frac{1}{n})\right)$

Solution : C'est typiquement le genre de question où l'erreur attend au tournant si on manipule des équivalents sans faire attention. Encore une fois, on écrit des DL : par DL de $\sin(u)$ pour $u \to 0$, il vient, $\sin(1/n) = 1/n + o(1/n) = 1/n(1 + o(1))$. Donc $u_n = \ln(1/n(1+o(1))) = \ln(1/n) + \ln(1+o(1)) = -\ln n + o(1)$ (car $\ln(1+o(1)) = o(1)$). Mais alors $\frac{u_n}{-\ln n} = 1 + \frac{o(1)}{-\ln(n)}$ qui tend vers 1. Donc $u_n \sim -\ln n$.

6. $u_n = 1 - \cos\frac{1}{n}$

Solution : La réponse A NE PAS FAIRE : $\cos(1/n)$ tend vers 1 donc $\cos(1/n) \sim 1$ et donc $u_n \sim 1 - 1 = 0$. Le début de cette phrase est correct, mais la dernière assertion contient deux énormes fautes : vous n'avez pas le droit de sommer des équivalents et dire qu'une suite est équivalente à 0 c'est dire qu'elle est la suite nulle (au moins à partir d'un certain rang), ce qui n'est pas le cas ici !
Une réponse correcte : on utilise un développement limité ! Comme $1/n$ tend vers 0, il vient $\cos(1/n) = 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Donc $u_n = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et donc $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$.

Exercice 2.

Soit $\alpha > 0$. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = (n^\alpha + 1)^{1/\alpha} - n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que : $u_n = \dfrac{n^{1-\alpha}}{\alpha} + o(n^{1-\alpha})$.

Solution : La réponse A NE PAS FAIRE : $(n^\alpha+1) \sim n^\alpha$ (c'est vrai) donc $(n^\alpha+1)^{1/\alpha} \sim n$ (c'est vrai) donc $u_n \sim n - n = 0$ (c'est grossièrement FAUX !) : vous n'avez pas le droit de sommer des équivalents, et vous ne pouvez pas dire d'une suite qui n'est pas la suite nulle qu'elle est équivalente à 0.
Une réponse correcte : on factorise par le plus grand terme et on utilise un développement limité : $u_n = n\left((1 + n^{-\alpha})^{1/\alpha} - 1\right)$. Or $(1+u)^{1/\alpha} = 1 + \frac{u}{\alpha} + o(u)$ pour $u \to 0$. Par conséquent, $u_n = n\left(1 + \frac{1}{\alpha n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) - 1\right) = \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha} + o(n^{1-\alpha})$.

2. Déterminer la nature de la suite (u_n) selon les valeurs du paramètre α.

Solution : Trois cas sont possibles : $\alpha < 1$ auquel cas $u_n \to \infty$, $\alpha = 1$ auquel cas $u_n \sim 1$ (en fait $u_n = 1$) et donc $u_n \to 1$, et $\alpha > 1$ auquel cas $u_n \to 0$.

Exercice 3.

Déterminer la limite des suites (u_n) suivantes :

1. $u_n = n\sqrt{\ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2+1}\right)}$

Solution : On écrit des DL : on a $\ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right) = \frac{1}{n^2+1} + o\left(\frac{1}{n^2+1}\right) = \frac{1}{n^2+1}(1+o(1))$ et donc $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\sqrt{1+o(1)}$. La première fraction tend vers 1, la seconde aussi. Donc $u_n \to 1$.

2. $u_n = \left(1+\sin\dfrac{1}{n}\right)^n$

Solution : La réponse A NE PAS FAIRE : $1+\sin\frac{1}{n} \sim 1$ (c'est vrai) et donc $\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^n \sim 1^n = 1$ et donc $u_n \to 1$ (c'est une HORREUR !). Les équivalents ne passent pas aux puissances qui dépendent de n. De manière générale, 1^∞ est une forme indéterminée.
La méthode ici : on écrit tout sous forme d'exponentielle et on utilise des développements limités. $u_n = \exp\left(n\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$. Or, $\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. De plus, $\ln(1+u) = u + o(u)$ pour $u \to 0$ et donc par composition de développements limités, $\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Donc $u_n = \exp\left(n\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(1+o(1)) \to e$.

3. $u_n = \dfrac{n^{\sqrt{n+1}}}{(n+1)^{\sqrt{n}}}$.

Solution : On voit souvent dans les copies un raisonnement de ce genre : $\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}$ (c'est vrai), $(n+1) \sim n$ (c'est vrai), donc $n^{\sqrt{n+1}} \sim n^{\sqrt{n}}$ (ce qui pour cet exercice est... vrai mais ne résulte en aucune façon d'un théorème de cours, coup de chance n°1), et $(n+1)^{\sqrt{n}} \sim n^{\sqrt{n}}$ (ce qui ici est... vrai mais ne résulte en aucune façon d'un théorème de cours, coup de chance n°2). Donc $u_n \sim 1$ et donc $u_n \to 1$ (ce qui est la bonne réponse, voir ci-dessous, mais une accumulation de coups de chance n'a jamais constitué une démonstration).
Insistons un peu : il est faux en général de dire que $u_n \sim v_n$ alors $u_n^{\alpha_n} \sim v_n^{\alpha_n}$. Contre-exemple : $n+1 \sim n$ mais $(n+1)^n$ n'est pas équivalent à n^n.
Prouvons donc ici que $n^{\sqrt{n+1}} \sim n^{\sqrt{n}}$: on a $\frac{n^{\sqrt{n+1}}}{n^{\sqrt{n}}} = n^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = n^{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}$ et en passant aux exponentielles, $\frac{n^{\sqrt{n+1}}}{n^{\sqrt{n}}} = \exp\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\right)$ quantité qui tend vers 1.
Prouvons ensuite que $(n+1)^{\sqrt{n}} \sim n^{\sqrt{n}}$: ainsi, $\frac{(n+1)^{\sqrt{n}}}{n^{\sqrt{n}}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} = \exp\left(\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$ quantité qui tend vers 1. On conclut donc que $u_n \sim 1$.

Exercice 4. On s'intéresse dans cet exercice à la suite récurrente donnée par $u_0 > 0$, et pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\arctan(u_n)$.

On rappelle que pour tout $u \geq 0$, $\arctan(u) \leq u$ et le développement limité suivant, valable pour $u \to 0$: $\arctan(u) = u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + o(u^5)$.

1. Donner le signe de (u_n) et étudier sa monotonie.

Solution : Comme $arctan(u) > 0$ si $u > 0$, alors si $u_n > 0$ alors $u_{n+1} > 0$. Comme $u_0 > 0$, on a par récurrence que $u_n > 0$ pour tout $n \geq 0$. De plus, $\arctan(u) \leq u$ pour $u \geq 0$, donc $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n < u_n$ et donc la suite est décroissante.

2. Montrer que (u_n) est convergente, de limite 0.

Solution : (u_n) est décroissante positive, donc elle converge, vers $l \geq 0$. Par continuité de arctan, en passant à la limite dans $u_{n+1} = \frac{1}{2}\arctan(u_n)$, il vient $l = \frac{1}{2}\arctan(l)$ et donc $l = 0$ (pour voir ce dernier point, on constate que $l = 0$ est solution et que c'est la seule : par stricte concavité de arctan sur $[0, +\infty)$, $\arctan(l)$ est toujours strictement (en dehors de 0) en-dessous de sa tangente en 0 qui est $y = l$, donc a fortiori strictement en-dessous de $y = 2l$).

3. On pose $v_n = 2^n u_n$ pour $n \geq 0$. Donner un équivalent pour $n \to \infty$ de $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$, exprimé uniquement en fonction de u_n.

Solution : Calculons : $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln\left(\frac{2^{n+1}\frac{1}{2}\arctan(u_n)}{2^n u_n}\right) = \ln\left(\frac{\arctan(u_n)}{u_n}\right)$. En utilisant le développement limité fourni dans l'énoncé, et en se rappelant que $\ln(1+v) = v + o(v)$ pour $v \to 0$, il vient $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2)\right) = -\frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2)$. Donc $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \sim_{n\to\infty} -\frac{u_n^2}{3}$.

4. Montrer que $|u_n| \leq \frac{u_0}{2^n}$ pour $n \geq 0$ et en déduire que la série de terme général $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ converge.

Solution : Le fait que $|u_n| \leq \frac{u_0}{2^n}$ pour $n \geq 0$ découle du fait que $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$ et d'une récurrence immédiate (ce qui est, au passage, une autre manière de prouver que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$). Ainsi, $0 \leq \frac{u_n^2}{3} \leq \frac{u_0^2}{3\times 2^{2n}}$ qui est le terme général d'une série convergente. Par théorème de comparaison des séries de termes général de signe constant, on en déduit que la série de terme général $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ converge.

5. En déduire que la suite (v_n) est convergente, de limite ℓ strictement positive.

Solution : Or $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$. Donc $\sum_{k=0}^{M} \ln\left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right) = \ln(v_{M+1}) - \ln(v_0)$ (somme télescopique). Dire que la série converge, c'est donc dire que $\ln(v_M)$ converge pour $M \to \infty$. Par continuité de exp, la suite (v_n) est convergente, de limite ℓ strictement positive.

6. En déduire un équivalent (exprimé en fonction de ℓ) de u_n pour $n \to \infty$.

Solution : Ainsi, $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell > 0$ et donc $u_n \sim \frac{\ell}{2^n}$ pour $n \to \infty$.

Exercice 5.

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites strictement positives. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$

1. Montrer que si $l \neq 1$ alors $\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln v_n$.

Solution : Comme $v_n \to l \neq 1$, on a, à partir un certain rang, $\ln(v_n) \neq 0$. De plus, on a pour tout n, $\frac{ln(u_n)}{\ln(v_n)} = \frac{\ln(v_n + o(v_n))}{\ln(v_n)} = \frac{\ln(v_n) + \ln(1+o(1))}{\ln(v_n)} = 1 + \frac{\ln(1+o(1))}{\ln(v_n)}$. Or, nous sommes dans un cas où soit $\ln(v_n) \to \ln(l) \neq 0$ ou $\ln(v_n) \to \infty$, ce qui donne dans tous les cas que $\frac{ln(u_n)}{\ln(v_n)} \to 1$.

2. Que se passe t-il si $l = 1$?

Solution : Le résultat devient faux : prendre $u_n = 1$ et $v_n = 1 + 1/n$.

Exercice 6.

Le but de cet exercice est de montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} k! \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$$

1. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{n!} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{n!}$$

Solution : Evident, il suffit d'isoler $k = n$ dans la somme.

2. Nous allons ainsi montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{n!} = 0$.

2.1. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{n!} = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k!}{n!}$$

Solution : Isoler $k = n - 1$ dans la somme.

2.2. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leqslant \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)}$$

Solution : $k \leq n - 2$.

2.3. En déduire que :

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{n!} \leqslant \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)}$$

2.4. Conclure

Exercice 7.

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites. Montrer que si $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ et si $v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)$ alors $u_n = 0$ à partir d'un certain rang.

Solution : Il suffit d'écrire les définitions : il existe ε_n et η_n deux suites qui tendent vers 0 telles que, à partir d'un certain rang, $u_n = \varepsilon_n v_n$ et $v_n = \eta_n u_n$. Combinant les deux, il vient, $u_n = \varepsilon_n \eta_n u_n$ et donc $u_n(1 - \varepsilon_n \eta_n) = 0$. Or $1 - \varepsilon_n \eta_n$ tend vers 1 et est donc non nul à partir d'un certain rang. C'est donc u_n qui est nul.

Exercice 8.

1. Soit (u_n) une suite croissante. On suppose que (u_n) admet une sous-suite majorée. Que pouvez-vous dire de (u_n) ?

Solution : La suite est alors convergente. En effet,notons $(u_{\phi(n)})$ la suite extraite de (u_n). On prouve que (u_n) est convergente en montrant qu'elle est majorée. La suite $(u_{\phi(n)})$ est majorée par un certain $M > 0$. Mais alors, par propriété d'une extraction, on a pour tout $n \leq \phi(n)$ et comme la suite u est croissante, on a $u_n \leq u_{\phi(n)} \leq M$.

2. Soit (u_n) une suite croissante. On suppose que (u_n) admet une sous-suite convergente. Que pouvez-vous dire de (u_n) ?

Solution : La suite est convergente : pour les suites croissantes, être majorée ou convergente est la même chose.

3. Soit (u_n) une suite réelle non majorée. Montrer qu'il existe une suite extraite de (u_n) tendant vers $+\infty$.

Solution : Pour $A = 1$, A n'est pas un majorant de u. Il existe donc n_1 tel que $u_{n_1} > 1$. Considérons maintenant la suite $(u_k)_{k \geq n_1+1}$: cette suite n'est pas majorée, car sinon u le serait. Pour cette suite $A = 2$ n'est pas un majorant et donc il existe donc $n_2 > n_1$ tel que $u_{n_2} > 2$. Et ainsi de suite : on prouve par une récurrence immédiate qu'il existe une suite n_k strictement croissante telle que $u_{n_k} > k$ pour tout k. On conclut par le théorème des gendarmes.

Exercice 9.

Donner un exemple de suite (u_n) divergente, telle que $\forall k \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$ la suite (u_{kn}) converge.

Solution simple : La suite $\mathbf{1}_{n \text{ premier}}$.

Exercice 10.

On souhaite montrer que la suite (u_n) donnée par $u_n = \sin(n)$ est divergente. Posons $v_n = \cos(n)$.

1. Exprimer u_{n+1} puis v_{n+1} en fonction de u_n et v_n.

Solution : Pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sin(n+1) = u_n \cos(1) + v_n \sin(1)$ et $v_{n+1} = v_n \cos(1) - u_n \sin(1)$.

2. Supposons que (u_n) convergente vers s. En déduire que (v_n) converge vers c.

Solution : Si (u_n) est convergente vers s, alors $u_n \to s$ et $u_{n+1} \to l$ et en utilisant la première égalité et le fait que $\sin(1) \neq 0$, on déduit que (v_n) est alors convergente. Notons c sa limite.

3. Conclure.

Solution détaillée : Si les deux suites convergent, on a alors, en passant à la limite dans les égalités précédentes, $s = s\cos(1) + c\sin(1)$ et $c = c\cos(1) - s\sin(1)$. Résolvant le système précédent, il vient $(s, c) = (0, 0)$. De plus, comme $u_n^2 + v_n^2 = 1$, il vient $s^2 + c^2 = 1$. Absurde.

Exercice 11.

1. Montrer que toute suite extraite d'une suite de Cauchy est aussi une suite de Cauchy.

Solution : Soit φ une extraction quelconque. Rappelons qu'on a $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \geq 0$. Comme (u_n) est de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $p, q \geq n_0$, $|u_p - u_q| < \varepsilon$. Mais alors, pour ces mêmes p et q, on a $\varphi(p) \geq p \geq n_0$ et $\varphi(q) \geq q \geq n_0$, et donc on a $|u_{\varphi(p)} - u_{\varphi(q)}| < \varepsilon$. Donc la sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ est de Cauchy.

2. Montrer que si (u_n) est une suite de Cauchy, on peut trouver une sous-suite $(u_{n_k})_{k\geq 1}$ de (u_n) telle que

$$\forall p \geq 1,\ \forall q \geq p,\ |u_{n_p} - u_{n_q}| \leq \frac{1}{2^p}$$

Solution : Appliquons la définition d'une suite de Cauchy pour différentes valeurs de $\varepsilon > 0$. Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe $n_1 \geq 0$ tel que pour tout $q \geq n_1$, $|u_q - u_{n_1}| < \frac{1}{2}$.
Supposons par récurrence avoir construit $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ tel que pour tout $p = 1, \ldots, k$, pour tout $j \geq n_p$, $|u_j - u_{n_p}| < \frac{1}{2^p}$. Considérons la suite $(u_j)_{j \geq n_k+1}$. Cette suite est de Cauchy (c'est une sous-suite de u). Pour $\varepsilon = \frac{1}{2^{k+1}}$, il existe $n_{k+1} > n_k$ tel que pour tout $j \geq n_{k+1}$, $|u_j - u_{n_{k+1}}| < \frac{1}{2^{k+1}}$. Ce qui donne la propriété par récurrence. Mais alors, pour tout $p \geq 0$, pour tout $j \geq n_p$, $|u_j - u_{n_p}| < \frac{1}{2^p}$. Or par construction, pour tout $q \geq p$, $n_q > n_p$ et donc faire $j = n_q$ donne le résultat souhaité.

Exercice 12.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, l'équation $x - \ln x = n$ admet une unique solution $u_n \in [1, +\infty[$.

Solution : La fonction $x \mapsto x - \ln x$ est strictement croissante, qui vaut 1 en $x = 1$ et tend vers $+\infty$. C'est donc une application immédiate du théorème de la bijection.

2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Solution : On a $u_n = n + \ln(u_n) \geq n$. On conclut par le théorème des gendarmes.

3. Montrer que :

$$u_n = n + \ln n + \frac{\ln n}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

Solution simple : Notons qu'il suffit de montrer la suite $v_n = \frac{u_n}{n}$ tend vers 1 pour avoir le résultat (on en déduit alors que $\frac{\ln(u_n)}{n} = o(1)$ et on intuite la formule demandée de proche en proche via la formule de récurrence. Notons que v_n vérifie $v_n = 1 + \frac{\ln(v_n)}{n} + \frac{\ln(n)}{n}$. Ainsi, toute valeur d'adhérence de (v_n) est unique égale à 1. Il suffit alors de prouver que (v_n) est bornée : pour cela, posons $f(x) = x - \ln(x)$ et remarquons que par définition $v_n = \frac{f^{-1}(n)}{n}$. Or, $\frac{\ln(2x)}{x}$ tend vers 0 pour $x \to \infty$ (croissance comparée). En particulier, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x > A$, $\frac{\ln(2x)}{x} \leq 1$ ce qui implique que $x \leq 2x - \ln(2x)$ et donc $\frac{f^{-1}(x)}{x} \leq 2$. Ainsi, pour $n > A$, $0 \leq v_n \leq 2$ et on a le résultat.

Exercice 13. Dans tout cet exercice, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie la relation suivante :

$$\exists \alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[,\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| \leq \alpha\,|f(x) - x| + \alpha\,|f(y) - y|\,.$$

Le but de cet exercice est de montrer que f admet un unique point fixe, c'est-à-dire un unique réel l vérifiant $f(l) = l$.

1. Montrer que si ce point fixe existe, il est unique.

Solution : Prenons deux points fixes l_1 et l_2 et montrons que $l_1 = l_2$. En appliquant la propriété à $x = l_1$ et $y = l_2$, il vient $|f(l_1) - f(l_2)| \leq \alpha |f(l_1) - l_1| + \alpha |f(l_2) - l_2|$. Or $f(l_i) = l_i$ pour $i = 1, 2$, donc $|l_1 - l_2| = 0$ et donc $l_1 = l_2$.

2. Dans toute la suite de l'exercice, on considère la suite récurrente définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

2.1. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq k |u_n - u_{n-1}|,$$

où $k = \frac{\alpha}{1-\alpha}$.

Solution : Appliquons la propriété à $x = u_n$ et $y = u_{n-1}$: il vient $|f(u_n) - f(u_{n-1})| \leq \alpha |f(u_n) - u_n| + \alpha |f(u_{n-1}) - u_{n-1}|$ et donc $|u_{n+1} - u_n| \leq \alpha |u_{n+1} - u_n| + \alpha |u_n - u_{n-1}|$. Ainsi $(1 - \alpha) |u_{n+1} - u_n| \leq \alpha |u_n - u_{n-1}|$ et donc $|u_{n+1} - u_n| \leq k |u_n - u_{n-1}|$ puisque $1 - \alpha > 0$.

2.2. En déduire que $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$ puis que, pour tout $q \geq p \geq 1$, $|u_q - u_p| \leq \frac{k^p - k^q}{1-k} |u_1 - u_0|$.

Solution : La première inégalité se déduit de la question précédente par une récurrence évidente. Par ailleurs, pour tout $q \geq p \geq 1$, par inégalité triangulaire,

$$|u_q - u_p| \leq \sum_{j=p}^{q-1} |u_{j+1} - u_j| \leq \sum_{j=p}^{q-1} k^j |u_1 - u_0| = \frac{k^p - k^q}{1 - k} |u_1 - u_0|.$$

2.3. En déduire que (u_n) est convergente. On note l sa limite.

Solution : Notons que $k = \frac{\alpha}{1-\alpha} < 1$ car $\alpha < \frac{1}{2}$. L'inégalité précédente implique $|u_q - u_p| \leq \frac{k^p}{1-k} |u_1 - u_0|$. Comme $k^p \to 0$ quand $p \to \infty$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $p \geq n_0$, $k^p < (1 - k)\frac{\varepsilon}{|u_1 - u_0| + 1}$. Donc pour ce n_0, pour tout $q \geq p \geq n_0$, $|u_p - u_q| < \varepsilon$. Ainsi (u_n) est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc convergente, de limite l.

2.4. Montrer que pour tout $n \geq 0$

$$|f(l) - u_{n+1}| \leq \alpha |f(l) - l| + \alpha |u_{n+1} - u_n|.$$

Solution : Appliquons la propriété à $x = l$ et $y = u_n$: il vient $|f(l) - f(u_n)| \leq \alpha |f(l) - l| + \alpha |f(u_n) - u_n|$ et donc $|f(l) - u_{n+1}| \leq \alpha |f(l) - l| + \alpha |u_{n+1} - u_n|$.

2.5. En déduire que $f(l) = l$.

Solution : Toutes quantités étant convergentes dans cette inégalité, il vient, pour $n \to \infty$, $|f(l) - l| \leq \alpha |f(l) - l|$ et donc $f(l) = l$ car $\alpha < 1$.

2 Exercices de synthèse

Exercice 14. Soit u_n l'unique racine positive de l'équation $x^n + x - 1 = 0$.

Étudier la suite (u_n).

Solution : La suite (u_n) est bien définie par continuité et stricte croissance de la fonction $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$ sur $[0, +\infty[$ (sachant que $f_n(0) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$). Notons que $f_n(1) = 1 > 0$ donc pour tout $n \geq 1$, $u_n \in]0, 1[$, par stricte croissance de f_n. De là, (u_n) est bornée donc admet des valeurs d'adhérence, par théorème de Bolzano-Weierstrass. Soit $l \in [0, 1]$ une telle valeur d'adhérence. Supposons par l'absurde que $l \in [0, 1[$. Il existe donc une extraction $\phi(n)$ telle que $(u_{\phi(n)})$ converge vers l. Mais alors pour $\varepsilon = \frac{1-l}{2} > 0$, il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_{\phi(n)} \leq l + \varepsilon < 1$. Par croissance de l'application $x \mapsto x^{\phi(n)}$, il vient $0 \leq u_{\phi(n)}^{\phi(n)} \leq (l + \varepsilon)^{\phi(n)}$. Ce dernier terme tend vers 0 pour $n \to \infty$. Donc $(u_{\phi(n)})^{\phi(n)}$ tend vers 0. En passant à la limite dans l'égalité $u_{\phi(n)}^{\phi(n)} = 1 - u_{\phi(n)}$, il vient $0 = 1 - l$ donc $l = 1$ absurde. Donc $l = 1$. Ainsi (u_n) est une suite bornée qui admet une unique valeur d'adhérence, qui est 1. Donc (u_n) converge vers 1.

Exercice 15. Soit la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n e^{-u_n},\ n \geq 0$..

1. Déterminer le signe de u_n pour tout $n \geq 0$.

   Solution : On prouve que $u_n > 0$ pour tout $n \geq 0$ par récurrence : c'est vrai pour $n = 0$ par hypothèse. Supposons que $u_n > 0$ pour un certain n, alors $u_{n+1} = u_n e^{-u_n} > 0$. D'où la propriété par récurrence.

2. Etudier la monotonie de la suite (u_n).

   Solution : Pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n = u_n \left(e^{-u_n} - 1\right) \leq 0$, car $u_n \geq 0$. Donc la suite (u_n) est décroissante.

3. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0 pour $n \to \infty$.

   Solution : Ainsi, (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge, de limite $\ell \geq 0$. Par continuité de $x \mapsto xe^{-x}$, cette limite vérifie nécessairement $\ell = \ell e^{-\ell}$, i.e. $\ell(1 - e^{-\ell}) = 0$. Dans les deux cas, $\ell = 0$. Donc la suite (u_n) tend vers 0 quand $n \to \infty$.

4. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ fixé. Donner un équivalent de la suite $v_n = u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ pour $n \to \infty$.

   Solution : Calculons : $v_n = u_n^\beta e^{-\beta u_n} - u_n^\beta = u_n^\beta \left(e^{-\beta u_n} - 1\right)$. Comme $u_n \to 0$, en utilisant un développement limité de $u \mapsto e^{-u}$ en $u = 0$, il vient, pour $n \to \infty$, $e^{-\beta u_n} = 1 - \beta u_n + o(u_n)$ et donc $v_n = u_n^\beta \left(-\beta u_n + o(u_n)\right) = -\beta u_n^{\beta+1} + o(u_n^{\beta+1})$ et donc (possible car $u_n \neq 0$ pour tout n), $v_n \sim_{n\to\infty} -\beta u_n^{\beta+1}$.

5. Déterminer β de telle sorte que $(v_n)_{n\geq 0}$ admette une limite finie non nulle pour $n \to \infty$.

   Solution : On prend $\beta = -1$: le calcul précédent montre que $v_n \sim_{\to\infty} 1$ et donc $\lim_{n\to\infty} v_n = 1$.

6. En déduire un équivalent de la suite (u_n). On rappelle pour cette question la propriété de Cesaro : si une suite (v_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors sa moyenne de Cesaro $\frac{v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}}{n}$ aussi.

Solution : La suite $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ est donc convergente de limite 1. Sa moyenne de Cesaro converge donc aussi vers 1 et on a donc $\frac{v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}}{n} \to 1$. Or cette dernière quantité est égale à $\frac{1}{nu_n} - \frac{1}{nu_0}$. Par conséquent, $u_n \sim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$.

Exercice 16.

Soit $x \in]0, +\infty[$, un réel strictement positif. Soit $(r_n)_{n\geq 1}$ une suite de rationnels positifs qui converge vers x. On écrit $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec $p_n \in \mathbb{N}, q_n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si l'une des suites parmi $(p_n)_{n\geq 1}$ et $(q_n)_{n\geq 1}$ est bornée, alors l'autre l'est aussi.

Solution : Si $(q_n)_{n\geq 1}$ est bornée alors $p_n = r_n q_n$ est le produit d'une suite convergente (donc bornée) et d'une suite bornée et est donc bornée. La réciproque est vraie en écrivant $q_n = \frac{1}{r_n} p_n$ avec $\frac{1}{r_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{x}$ convergente donc bornée.

2. On suppose dans cette sous-partie que l'une des suites $(p_n)_{n\geq 1}$ ou $(q_n)_{n\geq 1}$ est bornée.

2.1. Montrer que dans ce cas, la suite $((p_n, q_n))_{n\geq 1}$ prend ses valeurs dans un ensemble fini.

Solution : D'après la question précédente, les deux suites (p_n) et (q_n) sont bornées. Or ce sont des suites d'entiers positifs. Donc il existe deux entiers M et $N \geq 1$ tels que $((p_n, q_n))_{n\geq 1}$ vit dans $\mathcal{C} := \{1, \ldots, M\} \times \{1, \ldots, N\}$ qui est un ensemble fini.

2.2. En déduire qu'il existe une sous-suite de $((p_n, q_n))_{n\geq 1}$ qui est constante.

Solution : Si une suite vit dans un ensemble fini $\mathcal{C}$, il existe au moins un élément de cet ensemble (notons-le (p, q)) qui est visité une infinité de fois (principe des tiroirs). Notant $\varphi(1) < \varphi(2) < \ldots < \varphi(n) < \ldots$ les instants de visite de cet élément, on en déduit qu'il existe une sous-suite de $((p_n, q_n))_{n\geq 1}$ qui est constante, égale à (p, q).

2.3. Conclure que $x \in \mathbb{Q}$.

Solution : Si une suite converge, toutes ses sous-suites convergent aussi, vers la même limite. En prenant la sous-suite de la question précédente, on en déduit que $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

3. Un résultat auxiliaire : soit (a_n) une suite réelle. On souhaite montrer dans cette question le résultat suivant : si pour toute sous-suite $(a_{\varphi(n)})$, on peut extraire une sous-sous-suite $(a_{\varphi(\psi(n))})_{n\geq 1}$ qui tend vers 0, alors la suite (a_n) tend vers 0. On raisonne par l'absurde : la suite (a_n) ne tend pas vers 0.

3.1. Montrer alors qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une extraction φ tels que pour tout $n \geq 1$, $\left|a_{\varphi(n)}\right| > \varepsilon$.

Solution : Ecrivons le contraire du fait que (a_n) tend vers 0 : il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n_0 \geq 1$, il existe $n \geq n_0$ tel que $|a_n - 0| \geq \varepsilon$. On construit alors l'extraction de proche en proche, par récurrence. Pour $n_0 = 1$, il existe $n = \varphi(1)$ tel que $\left|a_{\varphi(1)}\right| \geq \varepsilon$. Mais alors, pour $n_0 = \varphi(1) + 1$, il existe $n = \varphi(2) > \varphi(1)$ tel que $\left|a_{\varphi(1)}\right| \geq \varepsilon$ et ainsi de suite par récurrence. La suite d'indices $(\varphi(n))$ est par construction strictement croissante et vérifie la propriété demandée.

3.2. Conclure à une contradiction.

Solution : Ceci est contradictoire car l'hypothèse prétend qu'il est possible d'extraire une sous suite de $(a_{\varphi(n)})$ qui tend vers 0 ce qui est par construction impossible car $\left|a_{\varphi(n)}\right| \geq \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$.

4. On suppose dans cette sous-partie que $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

4.1. Que pouvez-vous déduire des questions précédentes à propos des suites (p_n) et (q_n) ?

Solution : Par contraposée des questions précédentes, les suites (p_n) et (q_n) ne sont pas bornées (et même mieux : aucune des sous-suites de (p_n) et (q_n) ne sont bornées).

4.2. Montrer que si une suite est non majorée, alors il existe une sous-suite qui tend vers $+\infty$.

Solution : Si une suite (u_n) n'est pas majorée : alors 1 n'est pas un majorant : il existe $n = \varphi(1)$ tel que $u_{\varphi(1)} \geq 1$. Mais alors la suite $(u_n)_{n\geq\varphi(1)+1}$ n'est pas majorée. Il existe donc $n = \varphi(2) > \varphi(1)$ tel que $u_{\varphi(2)} \geq 2$ et ainsi de suite par récurrence : il existe une extraction φ telle que $u_{\varphi(n)} \geq n$ pour tout $n \geq 1$ et donc $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, par théorème des gendarmes.

4.3. Déduire des questions précédentes, que dans ce cas, on a $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et $q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Indication : on pourra s'intéresser à la suite $a_n = \frac{1}{p_n}$.

Solution : Pour toute sous-suite $(p_{\varphi(n)})$, cette suite n'est pas majorée. Donc il existe une sous-sous-suite $(p_{\varphi(\psi(n))})$ qui tend vers $+\infty$. On peut exactement appliquer la question précédente à la suite $a_n = \frac{1}{p_n}$: cette suite tend vers 0 quand $n \to \infty$. Donc $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et donc $q_n = r_n p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ car $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x > 0$.