Algèbre 3
Chapitre 2
Les Applications Linéaires entre Espaces Vectoriels

Licence 2 MAE 2020-2021

Université de Paris - Paris Descartes

Marc Briant

(Fortement inspiré des cours de MM. G. Roussel et R. Lounès)

Table des matières

1 Concepts généraux **1**
- 1.1 Le $\mathbb{K}$-ev des applications linéaires 1
- 1.2 Noyau et Image 2

2 Des endomorphismes importants **2**
- 2.1 Compositions à droite ou à gauche 2
- 2.2 Homothéties 2
- 2.3 Projecteurs 2
- 2.4 Symétries 3

Avant-propos : Les applications, les fonctions, ont des rôles très importants en analyse et en mathématiques en général. Maintenant que nous avons un cadre abstrait pour les ev, la question qui se pose est de savoir comment se comportent les applications entre $\mathbb{K}$-ev. Bien entendu, cela reste trop vaste à étudier mais qui dit ev dit combinaisons linéaires et l'on peut s'interroger sur les applications entre $\mathbb{K}$-ev qui seraient compatibles avec ces combinaisons linéaires.

Dans tout ce cours, $(\mathbb{K},+,.)$ **désigne un corps commutatif.**

1 Concepts généraux

1.1 Le $\mathbb{K}$-ev des applications linéaires

Définition 1.1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f : E \longrightarrow F$. On dit que f est une **application linéaire** si elle satisfait
(i) $\forall (x,y) \in E^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$;
(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ f(\alpha x) = \alpha f(x)$.
L'ensemble des applications linéaire de E dans F est noté $L(E,F)$.

Remarque 1.2

Nous faisons remarquer dans les points (i) et (ii) que les lois "+" ou "." ne sont pas les mêmes à gauche et à droite de l'égalité ! À gauche ce sont les lois sur E et à droite les lois sur F mais c'est implicite et nous ne chargeons pas inutilement les notations.

Proposition 1.3

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f : E \longrightarrow F$. Alors f est linéaire si et seulement si

$$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, \forall (x,y) \in E, \quad f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x)+\beta f(y).$$

Exemple : L'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $u(x,y,z) = (z,x)$ est une application linéaire.

Parmi ces applications nous en distinguons certaines.

Définition 1.4. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre $\mathbb{K}$-ev. Nous dirons que f est
- **Un isomorphisme** si f est bijective.
- **Un endomorphisme** si $F = E$, c'est-à-dire si f va de E dans E. L'ensemble des endomorphisme de E est noté $L(E,E) = L(E)$.
- **Un automorphisme** si f est un endomorphispme bijectif. L'ensemble des automorphismes de E est noté $GL(E)$.
- **Une forme linéaire** si $F = \mathbb{K}$, c'est-à-dire que f va de E dans le corps de base $\mathbb{K}$ (vu comme $\mathbb{K}$-ev). L'ensemble des formes linéaires sur E s'appelle **l'espace dual de** E et se note $L(E,\mathbb{K}) = E^*$.

Exemple : 1) Endomorphisme identité. Si E est un $\mathbb{K}$-ev nous appelons **Identité de** E, notée Id_E, l'endomorphisme défini par $\mathrm{Id}_E(x) = x$. C'est même un automorphisme.
2) Application nulle. Pour E et F deux $\mathbb{K}$-ev nous appelons application nulle, notée $0_{L(E,F)}$ l'application linéaire définie par $0_{L(E,F)}(x) = 0_F$.
3) La dérivation $f \mapsto f'$ est une application linéaire de $C^1(]a,b[)$ dans $C^0(]a,b[)$.
4) $f \mapsto \int_a^b f(t)dt$ est une forme linéaire de $C^0([a,b])$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.5

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre $\mathbb{K}$-ev. Alors elle satisfait
1. $f(0_E) = 0_F$ et pour tout $x \in E$, $f(-x) = -f(x)$.
2. $\forall (\lambda_1,..,\lambda_N) \in \mathbb{K}^N,\ \forall (x_1,..,x_N) \in E^N$,

$$f\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^N \lambda_i f(x_i).$$

Nous pouvons également composer des applications.

Proposition 1.6

Soient E, F et G des $\mathbb{K}$-ev et $u \in L(E,F)$ et $v \in L(F,G)$.
1. $v \circ u \in L(E,G)$.
2. Si u est un isomorphisme de E sur F alors u^{-1} est un isomorphisme de F sur E.

Et finalement, comme une application linéaire est compatible avec les lois des ev elle préserve le caractère de sous-ev.

Proposition 1.7

Soient E et F des $\mathbb{K}$-ev et $u \in L(E,F)$.
1. Si E_1 est un sous-ev de E alors l'image directe $u(E_1)$ est un sous-ev de F.
2. Si F_1 est un sous-ev de F alors l'image réciproque $u^{-1}(F_1)$ est un sous-ev de E.

Remarque 1.8

Nous rappelons à tout hasard que l'écriture $f^{-1}(F_1)$ ne signifie pas que f est un isomorphisme. Pour des ensembles et par définition

$$f^{-1}(F_1) = \{x_E \in E \mid f(x_E) \in F_1\}.$$

Théorème 1.9 (*Le $\mathbb{K}$-ev des applications linéaires*)

Soient E et F des $\mathbb{K}$-ev. Alors $(L(E,F),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-ev de neutre $0_{L(E,F)}$.

1.2 Noyau et Image

Si f est une application linéaire alors étudier son injectivité se ramène à étudier ses zéros puisque

$$(f(x) = f(y)) \Leftrightarrow f(x-y) = 0_F.$$

Définition 1.10. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-ev. On appelle

- **Noyau :** $\mathrm{Ker}\,(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$.
- **Image :** $\mathrm{Im}\,(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\}$.

Proposition 1.11

Si $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-ev alors $\mathrm{Ker}\,(f)$ est un sous-ev de E et $\mathrm{Im}\,(f)$ est un sous-ev de F.

Exemple : 1) Noyau et Invariants : Si $f \in L(E)$ alors $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}_E)$ sont les éléments de E tels que $f(x) = x$.

2) Noyau et Inverses : Si $f \in L(E)$ alors $\mathrm{Ker}\,(f + \mathrm{Id}_E)$ sont les éléments de E tels que $f(x) = -x$.

Grâce au noyau et à l'image nous avons des caractérisations claires de l'injectivité et de la surjectivité.

Proposition 1.12

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-ev.

1. f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0_E\}$.
2. f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\,(f) = F$.

2 Des endomorphismes importants

Bien entendu, il existe des endomorphismes plus remarquables que les triviaux identité et nul.

2.1 Compositions à droite ou à gauche

Proposition 2.1

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev.

1. Pour tout v de $L(F,G)$, l'application $u \mapsto v \circ u$ est linéaire de $L(E,F)$ dans $L(E,G)$.
2. Pour tout u de $L(E,F)$, l'application $v \mapsto v \circ u$ est linéaire de $L(F,G)$ dans $L(E,G)$.

Nous en profitons pour énoncer le binôme de Newton pour la composition.

Théorème 2.2

Soient f et g deux endormorphismes d'un $\mathbb{K}$-ev E tels que f et g **commutent**. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} f^k g^{(n-k)}$$

où nous avons utilisé la notation

$$u^n = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ fois}}.$$

Remarque 2.3 (*Un peu de culture hors programme*)

Nous avons vu que $(L(E),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-ev et il se trouve que $(L(E),+,\circ)$ est quant à lui un **anneau** - la loi $\circ$ ne donnant pas d'inverse à chaque élément, juste aux isomorphismes. De plus comme la multiplication scalaire est distributive par rapport à la composition on dit que $(L(E),+,.,\circ)$ est un $\mathbb{K}$**-algèbre**.
ATTENTION : la composition n'est pas commutative et elle n'est pas non plus intègre ! Comme nous le verrons il existe u et v non nuls dans $L(E)$ tels que $u \circ v = 0_{L(E)}$.

Comme nous n'avons pas intégrité de la composition nous pouvons définir la nilpotence.

Définition 2.4. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de $u \in L(E)$. Nous disons que u est **nilpotente** s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$u^{p-1} \neq 0_{L(E)} \quad \text{et} \quad u^p = 0_{L(E)}.$$

p est appelé **indice de nilpotence de** u.

2.2 Homothéties

Définition 2.5. Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle **homothétie** de E de rapport λ l'application

$$\forall x \in E, \quad h_\lambda(x) = \lambda x.$$

Proposition 2.6

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Alors

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, h_λ est un endomorphisme de E et c'est un automorphisme si et seulement si $\lambda \neq 0_E$.
2. $\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2, \quad h_{\lambda_1} \circ h_{\lambda_2} = h_{\lambda_1 \lambda_2}$.

2.3 Projecteurs

Nous avons vu que souvent nous pouvons décrire un $\mathbb{K}$-ev E grâce à des sous-ev "plus petits" lorsqu'ils sont en somme direct. Si l'on prend l'exemple

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\vec{i} \oplus \mathbb{R}\vec{j} \oplus \mathbb{R}\vec{k}$$

alors tout point de l'espace $x = x_i + x_j + x_k$ peut être connu uniquement en connaissant x_i, x_j et x_k. Pour trouver ces coordonnées nous projetons sur l'axe qui nous intéresse mais comment le faire dans un ev général ? Ce sont les endomorphismes projecteurs qui jouent un rôle important en algèbre puisqu'ils font le lien entre E et ses "briques élémentaires".

Définition 2.7. Soient F et G deux sous-ev supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-ev E : $E = F \oplus G$. Cela implique que

$$\forall x \in E, \exists!(x_F, x_G) \in F \times G, \quad x = x_F + x_G.$$

L'application définit par

$$p_{F,G} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_F \end{array}$$

est appelée **projection sur** F **parallèlement à** G.

Exemple : 1) Si $F = E$ et $G = \{0_E\}$ alors $p_{F,G} = \mathrm{Id}_E$ et $p_{G,F} = 0_{L(E)}$.

2) Dans $\mathbb{R}^3$ si $F = \mathbb{R}(1,0,0)$ et $G = \mathbb{R}(0,1,0) \oplus \mathbb{R}(0,0,1)$ alors $p_{F,G}(x_1,x_2,x_3) = (x_1,0,0)$.

Proposition 2.8

Soient F et G deux sous-ev supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-ev E. Alors les points suivants sont vérifiés :

1. $p_{F,G} \in L(E)$;
2. $p_{F,G} \circ p_{F,G} = p_{F,G}$;
3. $\text{Ker}\,(p_{F,G}) = G$ et $\text{Im}\,(p_{F,G}) = F$;
4. $p_{F,G} + p_{G,F} = \text{Id}_E$
5. $p_{F,G} \circ p_{G,F} = p_{G,F} \circ p_{F,G} = 0_{L(E)}$.

Définition 2.9. Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Pour $p \in L(E)$ on dit que p est un projecteur si et seulement si il existe deux sous-ev supplémentaires F et G tels que $p = p_{F,G}$.

En réalité le fait que $p_{F,G} \circ p_{F,G} = p_{F,G}$ est caractéristique des projecteurs.

Théorème 2.10

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $p \in L(E)$ tel que $p \circ p = p$ (on appelle cela être **idempotent**). Alors nous avons

$$E = \text{Im}\,(p) \oplus \text{Ker}\,(p)$$

et p est la projection sur $\text{Im}\,(p)$ parallèlement à $\text{Ker}\,(p)$.

Remarque 2.11 (*Invariants et Image*)

Insistons sur le fait que quand p est un projecteur alors son image est exactement l'ensemble des ses invariants :

$$(x \in \text{Im}\,(p)) \Leftrightarrow (p(x) = x)\,.$$

Corollaire 2.12

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Pour $p \in L(E)$, p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.

2.4 Symétries

Définition 2.13. Soient F et G deux sous-ev supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-ev E : $E = F \oplus G$. Cela implique que

$$\forall x \in E, \exists!(x_F, x_G) \in F \times G, \quad x = x_F + x_G.$$

L'application définit par

$$s_{F,G} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_F - x_G \end{array}$$

est appelée **symétrie par rapport à F parallèlement à G**. Notons que

$$s_{F,G} = 2p_{F,G} - \text{Id}_E.$$

Remarque 2.14

Nos donnons ci-dessous des résultats sur les symétries. Cependant, comme une symétrie est définie par une projection, un problème sur les symétries se ramène aisément à un problème sur les projecteurs...

Proposition 2.15

Soient F et G deux sous-ev supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-ev E. Alors les points suivants sont vérifiés :

1. $s_{F,G} \in L(E)$;
2. $s_{F,G} \circ s_{F,G} = \text{Id}_E$;
3. $F = \text{Ker}\,(s_{F,G} - \text{Id}_E)$ et $G = \text{Im}\,(s_{F,G} + \text{Id}_E)$;
4. $s_{F,G} + s_{G,F} = 0_{L(E)}$
5. $s_{F,G} \circ s_{G,F} = s_{G,F} \circ s_{F,G} = -\text{Id}_E$.

Définition 2.16. Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Pour $s \in L(E)$ on dit que s est une symétrie si et seulement si il existe deux sous-ev supplémentaires F et G tels que $s = s_{F,G}$.

En réalité le fait que $s_{F,G} \circ s_{F,G} = \text{Id}_E$ est caractéristique des symétries.

Théorème 2.17

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $s \in L(E)$ tel que $s \circ s = \text{Id}_E$ (on appelle cela être **involutif**). Alors nous avons

$$E = \text{Ker}\,(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}\,(s + \text{Id}_E)$$

et s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}\,(s - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}\,(s + \text{Id}_E)$.

Corollaire 2.18

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Pour $s \in L(E)$, s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \text{Id}_E$.