Chapitre 3 : Variables aléatoires sur un espace de probabilité discret (Partie II)

Nathaël Gozlan

4 novembre

Plan

Cadre

Dans toute cette partie, on considère un espace de probabilité

$$(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$$

où Ω est un ensemble **fini ou dénombrable**.

But : Donner un sens à la notion de "valeur moyenne" pour une variable aléatoire

$$X : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Exemple : si X représente un gain à un jeu de hasard, on cherche à définir la notion de "gain moyen".

Définition

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire à valeurs réelles.

Définition (Espérance - cas fini)

Si $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_N\}$ est un ensemble fini, l'espérance de X est le nombre noté $\mathbb{E}[X]$ défini par

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=0}^{N} X(\omega_i)\mathbb{P}(\{\omega_i\}).$$

Définition (Espérance - cas dénombrable)

Si $\Omega = \{\omega_i ; i \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble dénombrable, on dit que X est *intégrable* si

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |X(\omega_i)|\mathbb{P}(\{\omega_i\}) < +\infty.$$

L'espérance de X est le nombre noté $\mathbb{E}[X]$ défini par

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=0}^{+\infty} X(\omega_i)\mathbb{P}(\{\omega_i\}).$$

Exercice 1

Calculer le score moyen lors d'un lancer d'un dé équilibré.

Exercice 2

Un tricheur s'est fabriqué un dé tombant toujours sur 6.
Quel est le score moyen quand on joue avec un tel dé ?

Espérance et probabilité

La notion de fonction caractéristique va nous permettre de relier espérance $\mathbb{E}$ et probabilité $\mathbb{P}$.

Définition

Soit $A \subset \Omega$; la fonction caractéristique de A est la fonction notée $\mathbf{1}_A$ définie par

$$\mathbf{1}_A(\omega) = 1 \text{ si } \omega \in A \qquad \text{et} \qquad \mathbf{1}_A(\omega) = 0 \text{ si } \omega \notin A.$$

Exercice 3

- Montrer que si A, B sont disjoints, alors $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$.
- Montrer que si $A, B \subset \Omega$, $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.
- Montrer que si $A, B \subset \Omega$, $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

Espérance et probabilité

Proposition

Soit $A \subset \Omega$; la variable aléatoire $\mathbf{1}_A$ est intégrable et

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A] = \mathbb{P}(A).$$

Démonstration.

On fait la preuve dans le cas dénombrable, le cas fini est analogue.

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A] = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{1}_A(\omega_i)\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \sum_{i:\omega_i \in A} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \mathbb{P}(A).$$

$\square$

Plan

Linéarité

Proposition (Linéarité de l'espérance)

Si X, Y sont deux variables aléatoires intégrables, alors $\lambda X + \mu Y$ est également intégrable et

$$\mathbb{E}[\lambda X + \mu Y] = \lambda \mathbb{E}[X] + \mu \mathbb{E}[Y].$$

Démonstration.

Clair par linéarité de la somme de séries convergentes. $\square$

Formule de transfert

Théorème (Formules de transfert)

Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles intégrable. On note $E = \{X(\omega); \omega \in \Omega\} \subset \mathbb{R}$ dont on énumère les éléments : $E = \{x_k : k \in K\}$, avec K une partie finie ou infinie de $\mathbb{N}$.

- On a alors la formule

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in K} x_k \mathbb{P}_X(\{x_k\}).$$

- Plus généralement, si $f : E \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que $f(X)$ soit intégrable, alors

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{k \in K} f(x_k) \mathbb{P}_X(\{x_k\}).$$

Le nom de ces formules vient du fait qu'elles permettent d'exprimer l'espérance d'une variable aléatoire en faisant intervenir l'espace d'arrivée $(E, \mathbb{P}_X)$ au lieu de l'espace de départ $(\Omega, \mathbb{P})$.

Sommation par paquet

Pour démontrer ce résultat, nous aurons besoin du lemme de sommation par paquets pour les séries absolument convergentes.

Lemme (Sommation par paquets)

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à termes positifs ou nuls telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n < +\infty$.

1. Si $I \subset \mathbb{N}$ est un ensemble non-vide, alors en notant $I = \{i_0 < i_1 < i_2 < \ldots\}$, la série $\sum_{j\geq 0} u_{i_j}$ est convergente.
   On notera sa somme $\sum_{i\in I} u_i$. Par convention $\sum_{i\in\emptyset} u_i = 0$.
2. Pour toute famille $(I^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ d'ensembles deux à deux disjoints tels que $\cup_{k\in\mathbb{N}} I^{(k)} = \mathbb{N}$ on a
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n\in I^{(k)}} u_n\right).$$

Preuve de la formule de transfert

Démonstration.

Posons $A_k = \{X = x_k\}$, $k \in K$. Les ensembles A_k forment une partition de Ω.

Notons $I^{(k)} = \{n \in \mathbb{N} : \omega_n \in A_k\}$, $k \in K$. Ces ensembles $I^{(k)}$ forment une partition de $\mathbb{N}$.

Posons $u_n = f(X(\omega_n))\mathbb{P}(\{\omega_n\})$, $n \in \mathbb{N}$. Comme $f(X)$ est intégrable, la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente. On a donc, d'après le lemme de sommation par paquet,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X)] &= \sum_{n=0}^{+\infty} f(X(\omega_n))\mathbb{P}(\{\omega_n\}) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \\
&= \sum_{k\in K} \sum_{n \in I^{(k)}} u_i \\
&= \sum_{k\in K} \left(\sum_{n\in I^{(k)}} f(X(\omega_n))\mathbb{P}(\{\omega_n\}) \right) \\
&= \sum_{k\in K} \left(f(x_k) \sum_{n:\omega_n \in A_k} \mathbb{P}(\{\omega_n\}) \right) \\
&= \sum_{k\in K} f(x_k)\mathbb{P}(A_k).
\end{aligned}$$

Exercice 4

On lance deux fois de suite un dé équilibré sans trucage et on note S la somme des scores réalisés. Calculer de deux manières différentes l'espérance de S.

Propriétés de comparaison

Proposition (Propriétés de comparaison)

1. Soient X, Y deux variables aléatoires telles que $|X| \leq |Y|$. Si Y est intégrable, alors X est intégrable. En particulier, si $|X| \leq M$ où M est une constante positive, alors X est intégrable.
2. Si X, Y sont deux variables aléatoires intégrables telles que $X \leq Y$, alors $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$.
3. Si X, Y sont deux variables aléatoires intégrables telles que $X \leq Y$ alors $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ si et seulement si $\mathbb{P}(X = Y) = 1$. On dit dans ce cas que $X = Y$ *presque sûrement*.

Démonstration.

Posons $u_i = X(\omega_i)\mathbb{P}(\{\omega_i\})$ et $v_i = Y(\omega_i)\mathbb{P}(\{\omega_i\})$.
1. Y intégrable signifie que la série de terme général $|v_i|$ converge. Comme $0 \leq |u_i| \leq |v_i|$, on conclut par le théorème de comparaison pour les séries convergentes que $\sum_i |u_i|$ est convergente et donc que X est intégrable.
2. On a $u_i \leq v_i$ et les séries $\sum_i u_i$ et $\sum_i v_i$ convergent. Donc $\sum_{i=0}^{+\infty} u_i \leq \sum_{i=0}^{+\infty} v_i$ et donc $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$.
3. Posons $w_i = v_i - u_i$. Si $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$, alors $\sum_{i=0}^{+\infty} w_i = 0$. Comme les termes w_i sont positifs ou nuls, cela entraîne que $w_i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Donc pour tout i, $X(\omega_i) = Y(\omega_i)$ ou $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = 0$. Autrement dit $X(\omega_i) \neq Y(\omega_i) \Rightarrow \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = 0$. On en déduit que $\mathbb{P}(X \neq Y) = 0$ et donc $\mathbb{P}(X = Y) = 1$. $\square$

Plan

Moments d'une variable aléatoire

Définition

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire à valeurs réelles. Si la variable aléatoire $|X|^p$ est intégrable, la quantité $\mathbb{E}[X^p]$ est bien définie et s'appelle le moment d'ordre p de X.
On dit que X admet un moment d'ordre p fini.

On pose par convention $\mathbb{E}[X^0] = 1$ (moment d'ordre 0).
Exemple : Une variable aléatoire bornée possède des moments de tous ordres.

Proposition

1. Si $p \leq q$ et si X admet un moment d'ordre q fini, alors X admet un moment d'ordre p fini.
2. Si X, Y sont deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre p fini, alors $\lambda X + \mu Y$ admet également un moment d'ordre p fini.

Démonstration.

1. On remarque que $t^p \leq 1 + t^q$, pour tout $t \geq 0$. Par conséquent, $|X|^p \leq 1 + |X|^q$ et donc par comparaison, si $|X|^q$ est intégrable, il en va de même pour $|X|^p$.

□

Exercice 5

Montrer le point 2.

Variance et écart type

Définition (Variance et écart type)

Si X admet un moment d'ordre 2 fini, alors X est intégrable et la quantité

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

est bien définie et s'appelle *variance* de X. Le nombre σ_X défini par

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

est appelé *écart type* de X. On a par ailleurs la formule

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Exercice 6

Démontrer la formule

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 .$$

Covariance

Définition (Covariance)

Soient X, Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2 fini, alors la variable aléatoire $(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])$ est intégrable. La quantité

$$\mathrm{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

s'appelle la covariance de X et Y.

Démonstration.

La variable $(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])$ est intégrable car

$$|(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])| \leq \frac{1}{2}(X - \mathbb{E}[X])^2 + \frac{1}{2}(Y - \mathbb{E}[Y])^2$$

et l'intégrabilité en découle par comparaison. $\square$

Covariance

Proposition

Soient X, Y, Z des variables aléatoires ayant un moment d'ordre 2 fini.

1. $\mathrm{Var}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \mathrm{Var}(X)$.
2. $\mathrm{Var}(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 \mathrm{Var}(X) + \beta^2 \mathrm{Var}(Y) + 2\alpha\beta \mathrm{Cov}(X, Y)$.
3. $\mathrm{Cov}(\alpha X + \beta Y, Z) = \alpha \mathrm{Cov}(X, Z) + \beta \mathrm{Cov}(Y, Z)$.

Démonstration.

Démontrons le point 3., les deux autres en découlent :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\alpha X + \beta Y, Z) &= \mathbb{E}\left[\left((\alpha X + \beta Y) - \mathbb{E}[\alpha X + \beta Y]\right)(Z - \mathbb{E}[Z])\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\alpha(X - \mathbb{E}[X])(Z - \mathbb{E}[Z]) + \beta(Y - \mathbb{E}[Y])(Z - \mathbb{E}[Z])\right] \\
&= \alpha \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])(Z - \mathbb{E}[Z])\right] + \beta \mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}[Y])(Z - \mathbb{E}[Z])\right] \\
&= \alpha \mathrm{Cov}(X, Z) + \beta \mathrm{Cov}(Y, Z)
\end{aligned}$$

$\square$

Exercice 7

Démontrer les points 1 et 2 de la proposition précédente.

Inégalité de Markov

Proposition (Inégalité de Markov)

Soit X une variable aléatoire intégrable, alors

$$\mathbb{P}(|X| > t) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{t}, \qquad \forall t > 0.$$

Plus généralement, si X possède un moment d'ordre $p \geq 1$ fini, alors

$$\mathbb{P}(|X| > t) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|^p]}{t^p}, \qquad \forall t > 0.$$

Démonstration.

Remarquons que

$$|X|^p \geq t^p \mathbf{1}_{\{|X| \geq t\}}.$$

Donc en prenant l'espérance, on trouve

$$\mathbb{E}[|X|^p] \geq t^p \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{|X| \geq t\}}] = t^p \mathbb{P}(|X| \geq t).$$

$\square$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Corollaire (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Si X admet un moment d'ordre 2 fini, alors

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > t) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{t^2}, \qquad \forall t > 0.$$

Démonstration.

Il suffit d'appliquer le résultat précédent avec $p = 2$ à $Y = X - \mathbb{E}[X]$. $\square$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Si X, Y admettent un moment d'ordre 2, alors XY admet un moment d'ordre 1 et

$$|\mathbb{E}[XY]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}\sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}$$

Corollaire

Si X, Y admettent un moment d'ordre 2, alors

$$\mathrm{Cov}(X, Y) \leq \sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}$$

Démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Donc en posant $a = \sqrt{t}x$ et $b = y/\sqrt{t}$, avec $x, y \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, on trouve que

$$xy \leq t\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2t}.$$

On en déduit que

$$|X(\omega)Y(\omega)| \leq t\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{2t}.$$

En particulier, XY est intégrable. De plus,

$$\mathbb{E}[XY] \leq t\frac{\mathbb{E}[X^2]}{2} + \frac{\mathbb{E}[Y^2]}{2t}, \qquad \forall t > 0.$$

En prenant $t = \sqrt{\frac{\mathbb{E}[Y^2]}{\mathbb{E}[X^2]}}$, on obtient le résultat. □

Plan

Loi de Dirac

Définition

On dit que X suit une loi de Dirac en $a \in \mathbb{R}$ si $\mathbb{P}(X = a) = 1$.
Dans ce cas, on $\mathbb{E}[X^p] = a^p$, pour tout $p \geq 1$.

Plan

Loi de Bernoulli

Définition

On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ si

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \qquad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

On note $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Proposition

Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $\mathbb{E}[X] = p$ et $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$.

Démonstration.

Pour tout $k \geq 1$, on a

$$\mathbb{E}[X^k] = 1^k \mathbb{P}(X = 1) + 0^k \mathbb{P}(X = 0) = p.$$

Donc $\mathbb{E}[X] = p$ et

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

$\square$

Plan

Loi binomiale

Définition

On dit que X suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$ si

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad \forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

On note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Proposition

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $\mathbb{E}[X] = np$ et $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.

Preuve

Posons

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-p)^{n-k}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On a donc

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1} (1-p)^{n-k} \qquad \text{et} \qquad f''(x) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^{k-2} (1-p)^{n-k}$$

Mais, par la formule de binôme, on a aussi

$$f(x) = (1-p+x)^n$$

et donc

$$f'(x) = n(1-p+x)^{n-1} \qquad \text{et} \qquad f''(x) = n(n-1)(1-p+x)^{n-2}.$$

En prenant $x = p$, on trouve

$$f'(p) = n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^{k-1} (1-p)^{n-k}$$

et donc

$$np = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^{k} (1-p)^{n-k} = \mathbb{E}[X].$$

Preuve (suite)

De même

$$f''(p)p^2 = n(n-1)p^2 = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X].$$

On en tire,

$$\mathbb{E}[X^2] = n(n-1)p^2 + np$$

puis

$$\mathrm{Var}(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = n(p-p^2).$$

Plan

Loi géométrique

Définition

On dit que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ si

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p, \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

On note $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Proposition

Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $\mathbb{E}[X] = 1/p$ et $\mathrm{Var}(X) = (1-p)/p^2$.

Plan

Loi de Poisson

Définition

On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Proposition

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\mathbb{E}[X] = \lambda$ et $\mathrm{Var}(X) = \lambda$.

Preuve

Par définition

$$\mathbb{E}[X] = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Mais, si $k \geq 1$,

$$\frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!}.$$

Donc

$$\mathbb{E}[X] = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda.$$

Exercice

Utiliser la même méthode pour calculer $\mathbb{E}[X^2]$ et $\mathrm{Var}(X)$.