Université Paris Descartes **Analyse 3**

1$^{\text{er}}$ semestre 2018-2019

Examen Session 2

Lundi 17 juin 2019 - Durée : 2h

Tout document, calculatrice, téléphone portable et autre appareil électronique est interdit. L'énoncé comporte 5 exercices indépendants.

Une part substantielle de la note portera sur la rédaction. Une juxtaposition d'équations sans liens logiques ni quantificateurs appropriés ne se verra pas attribuer une note élevée.

On attend que vous citiez précisément les théorèmes utilisés. En l'absence de la totalité des hypothèses requises, votre résultat sera considéré comme faux.

Exercice 1 (Question de cours) :

1. Enoncer le théorème de dérivation de la réciproque concernant une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. *Vous donnerez bien sûr toutes les hypothèses sur f requises.*
2. Démontrer ce résultat.

Exercice 2 : Etudier le comportement quand $n \to \infty$ des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{4n^2+1}}$, $n \geq 1$,
2. $v_n = n^{(n^2)} - (n^n)^2$, $n \geq 1$.

Correction : On a $u_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{4n^2+1}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{4n^2+1}}$. Le premier terme tend vers $\frac{1}{2}$, le second vers 0. Donc $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$. Pour la seconde question : on a $v_n = \exp(n^2\ln(n)) - \exp(2n\ln(n)) = \exp(n^2\ln(n))\,(1-\exp(n\ln(n)\,(2-n)))$. Or, $n\ln(n)\,(2-n) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ et donc par conséquent, $(1-\exp(n\ln(n)\,(2-n))) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 > 0$. Or $\exp(n^2\ln(n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et donc $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Exercice 3 : Soit la suite récurrente définie par

$$u_1 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}},\ n \geq 1.$$

1. Montrer que la suite v donnée par $v_n = u_n^2$, $n \geq 1$ est convergente et donner sa limite.
2. Est-il vrai que si $(u_n^2)_{n\geq 1}$ est convergente, alors $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente ? Si oui, vous donnerez une preuve, si non, un contre-exemple.
3. Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\geq 1}$.
4. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} < u_n + \frac{1}{2^{n+1}}$.
5. En déduire que pour tout $q \geq p \geq 1$, $|u_q - u_p| \leq \frac{1}{2^p}$.
6. Conclure quant à la convergence de $(u_n)_{n\geq 1}$ et donner sa limite.

Correction : La suite v vérifie $v_1 = 1$ et $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2^n}$. Par conséquent, pour tout $k \geq 1$, $v_{k+1} - v_k = \frac{1}{2^k}$ et donc en sommant cette égalité, il vient $v_{n+1} - v_1 = \sum_{k=1}^n (v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$ et donc $v_{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n}$, quantité qui converge vers 2 quand $n \to \infty$. Il est faux de dire que $(u_n^2)_n$ implique $(u_n)_n$ convergente : un contre-exemple en est $u_n = (-1)^n$. Pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}} \geq \sqrt{u_n^2} = |u_n|$, par croissance de la fonction racine. Or, par une récurrence immédiate, on montre que $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ et donc $u_{n+1} \geq u_n$. Donc la suite est croissante. Ensuite, l'inégalité (pour $x \geq 1$), $\sqrt{x^2 + \frac{1}{2^n}} < x + \frac{1}{2^n}$ est successivement équivalente à $x^2 + \frac{1}{2^n} < x^2 + \frac{2x}{2^n} + \frac{1}{4^n}$, puis à $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} < x$. Or ici, comme u est croissante, $u_n \geq 1$, donc $u_n \geq 1 > \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$. Donc $u_{n+1} < u_n + \frac{1}{2^{n+1}}$. Comme la suite est croissante, c'est exactement dire que $|u_{n+1} - u_n| < \frac{1}{2^{n+1}}$. Ensuite, par inégalité triangulaire, pour tout $q \geq p \geq 1$, on a $|u_q - u_p| \leq \sum_{k=p}^{q-1} |u_{k+1} - u_k| \leq \sum_{k=p}^{q-1} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{\frac{1}{2^{p+1}} - \frac{1}{2^{q+1}}}{1-\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2^p}$. Mais alors comme $\frac{1}{2^p} \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$, alors la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy, donc convergente, vers une limite ℓ. Or $v_n = u_n^2$. Toutes quantités étant convergentes dans l'expression précédente, il vient à la limite : $2 = \ell^2$ et donc comme $\ell \geq 0$ (limite d'une suite positive), $\ell = \sqrt{2}$. Conclusion, $(u_n)_n$ converge vers $\sqrt{2}$ quand $n \to \infty$.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $a < b$ deux réels. On suppose que $f'(a)f'(b) < 0$ (i.e. $f'(a)$ et $f'(b)$ sont de signes contraires). Le but de cet exercice est de montrer la propriété suivante (dite de Darboux) :

$$\text{Il existe } c \in]a,b[\text{ tel que } f'(c) = 0.$$

On suppose sans perte de généralité que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$.

1. Rappeler ce que veut dire le fait qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis prouver la propriété de Darboux dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$. *On pourra appliquer un théorème du cours à la fonction f'.*

Dorénavant, on ne suppose plus que f est de classe $\mathcal{C}^1$ mais seulement que f est dérivable.

2. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \min\{f(x),\ x \in [a,b]\}$. Vous justifierez en particulier que ce minimum existe.
3. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [a,b]$, si $|x-a| < \eta$ alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0$.
4. Déduire de la question précédente que $c \neq a$.
5. Prouver de même que $c \neq b$ et donc que $c \in]a,b[$. *Vous pouvez pour cette question vous contenter de donner les grandes lignes de la démonstration, sans redonner tous les détails.*
6. Conclure que $f'(c) = 0$.

Correction : Une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable, de dérivée continue. Ainsi, si f est de classe $\mathcal{C}^1$, $g = f'$ est continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[a,b]$. Or $g(a) < 0$ et $g(b) > 0$, donc par théorème des valeurs intermédiaires appliqué à g, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g(c) = 0$, ce qui est précisément le résultat demandé.

On suppose maintenant f seulement dérivable. Premièrement, f est dérivable, donc continue sur le segment $[a,b]$. Par théorème des bornes atteintes, le minimum de f est atteint en un point $c \in [a,b]$. Montrons que $c \neq a$: écrivons la définition de $f'(a)$: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [a,b]$, si $|x-a| < \eta$ alors $\left|f'(a) - \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| < \varepsilon$. En particulier, on a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \varepsilon + f'(a)$. Choisissons $\varepsilon = -\frac{f'(a)}{2} > 0$ (car $f'(a) < 0$). Mais alors, pour le η choisi, on a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f'(a)}{2} < 0$. Mais alors, comme $x - a > 0$, c'est dire que $f(x) - f(a) < 0$ et donc $f(x) < f(a)$. Supposer donc que $c = a$ est absurde, puisque cela contredirait le fait f atteint son minimum en c. Donc $c \neq a$. De même, $c \neq b$: en effet, comme $f'(b) > 0$, il existe un voisinage de b sur lequel on a $\frac{f(x)-f(b)}{x-b} > 0$ et comme $x - b < 0$, cela implique que $f(x) < f(b)$, donc supposer que $c = b$ est aussi absurde. Ainsi, $c \in]a,b[$. Or c est un minimum de f dérivable, donc c'est en particulier un point critique : $f'(c) = 0$.

Exercice 5 : Soit l'équation différentielle suivante :

$$t^2y'(t) - (1+t^2)y(t) = 0. \tag{1}$$

1. Résoudre cette équation sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$. *On fera uniquement la preuve dans le cas* $]0, +\infty[$ *et on se contentera de donner le résultat pour* $]-\infty, 0[$.
2. Existe-t-il des solutions de (1) définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ? Si oui, lesquelles ? Vous expliquerez précisément votre raisonnement.

Correction : Il s'agit d'une équation linéaire du première ordre homogène. Sur $]0, +\infty[$, cette équation est sous forme résoluble et s'écrit $y'(t) - (\frac{1}{t^2} + 1)y(t) = 0$. Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^2} + 1$ est donnée par $t \mapsto -\frac{1}{t} + t$. Par théorème du cours, toute solution de cette équation est de la forme $t \mapsto ce^{t-\frac{1}{t}}$, où c est une constante quelconque. Cherchons maintenant les solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. On procède par Analyse/Synthèse : soit y une solution définie sur $\mathbb{R}$. Alors nécessairement, il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que pour tout $t > 0$, $y(t) = c_1 e^{t-\frac{1}{t}}$ et pour tout $t < 0$, $y(t) = c_2 e^{t-\frac{1}{t}}$. Etudions la continuité en 0. On a $\lim_{t\to 0, t>0} e^{t-\frac{1}{t}} = 0$ et $\lim_{t\to 0, t<0} e^{t-\frac{1}{t}} = +\infty$. Ceci impose donc que $c_2 = 0$ et la fonction y est alors continue sur $\mathbb{R}$. Etudions sa dérivabilité en 0 : on a $\frac{y(t)-y(0)}{t} = \frac{y(t)}{t}$ qui vaut 0 si $t < 0$ et tend vers 0 pour $t \to 0, t > 0$ (par croissance comparée). Donc y ainsi définie est donc bien dérivable 0 et donc sur $\mathbb{R}$ tout entier. Synthèse : les seules solutions de (1) sont donc de la forme $y(t) = 0$ si $t < 0$ et $y(t) = ce^{t-\frac{1}{t}}$ si $t > 0$.

Fin de l'épreuve.