Université Paris Descartes **Analyse 3**
1er semestre 2019-2020

PARTIEL

Lundi 25 novembre 2019 - Durée : 1h30

Tout document, calculatrice, téléphone portable et autre appareil électronique est interdit. L'énoncé comporte 3 pages et 4 exercices indépendants.

Une part substantielle de la note portera sur la rédaction. Une juxtaposition d'équations sans liens logiques ni quantificateurs appropriés ne se verra pas attribuer une note élevée.

On attend que vous citiez précisément les théorèmes utilisés. En l'absence de la totalité des hypothèses requises, votre résultat sera considéré comme faux.

Le barème mentionné est purement indicatif et susceptible de modifications.

Exercice 1 (Question de cours, $\approx$ *3pt*) : Démontrer que si une suite est convergente, sa limite est unique.

Exercice 2 ($\approx$ *6pt*) : On s'intéresse dans cet exercice à la suite récurrente donnée par

$$u_0 > 0, \text{ et pour } n \geq 0,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\arctan(u_n).$$

On rappelle que pour tout $u \geq 0$, $\arctan(u) \leq u$ et le développement limité suivant, valable pour $u \to 0$:

$$\arctan(u) = u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + o(u^5).$$

1. Donner le signe de (u_n) et étudier sa monotonie.
2. Montrer que (u_n) est convergente, de limite 0.

On pose $v_n = 2^n u_n$ pour $n \geq 0$.

3. Donner un équivalent pour $n \to \infty$ de $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$, exprimé uniquement en fonction de u_n.
4. Montrer que $|u_n| \leq \frac{u_0}{2^n}$ pour $n \geq 0$ et en déduire que la série de terme général $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ converge.
5. En déduire que la suite (v_n) est convergente, de limite ℓ strictement positive.
6. En déduire un équivalent (exprimé en fonction de ℓ) de u_n pour $n \to \infty$.

Correction :

1. Comme $\arctan(u) > 0$ si $u > 0$, alors si $u_n > 0$ alors $u_{n+1} > 0$. Comme $u_0 > 0$, on a par récurrence que $u_n > 0$ pour tout $n \geq 0$. De plus, $\arctan(u) \leq u$ pour $u \geq 0$, donc $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n < u_n$ et donc la suite est décroissante.
2. (u_n) est décroissante positive, donc elle converge, vers $l \geq 0$. Par continuité de arctan, en passant à la limite dans $u_{n+1} = \frac{1}{2}\arctan(u_n)$, il vient $l = \frac{1}{2}\arctan(l)$ et donc $l = 0$.
3. Calculons : $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln\left(\frac{2^{n+1}\frac{1}{2}\arctan(u_n)}{2^n u_n}\right) = \ln\left(\frac{\arctan(u_n)}{u_n}\right)$. En utilisant le développement limité fourni dans l'énoncé, et en se rappelant que $\ln(1+v) = v + o(v)$ pour $v \to 0$, il vient

   $$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2)\right) = -\frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2).$$

   Donc

   $$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \sim_{n\to\infty} -\frac{u_n^2}{3}.$$

4. Le fait que $|u_n| \leq \frac{u_0}{2^n}$ pour $n \geq 0$ découle du fait que $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$ et d'une récurrence immédiate (ce qui est, au passage, une autre manière de prouver que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$). Ainsi, $0 \leq \frac{u_n^2}{3} \leq \frac{u_0^2}{3\times 2^{2n}}$ qui est le terme général d'une série convergente. Par théorème de comparaison des séries de termes général de signe constant, on en déduit que la série de terme général $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ converge.

5. Or $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$. Donc $\sum_{k=0}^{M} \ln\left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right) = \ln(v_{M+1}) - \ln(v_0)$ (somme télescopique). Dire que la série converge, c'est donc dire que $\ln(v_M)$ converge pour $M \to \infty$. Par continuité de exp, la suite (v_n) est convergente, de limite ℓ strictement positive.
6. Ainsi, $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell > 0$ et donc $u_n \sim \frac{\ell}{2^n}$ pour $n \to \infty$.

Exercice 3 ($\approx 5pt$) : Dans cet exercice, A est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$ (i.e. il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $|x| \leq M$). On pose

$$B = \{|x-y|\,,\ x, y \in A\}\ . \tag{1}$$

Ainsi, B est l'ensemble de toutes les distances entre deux points quelconques de A.

1. Montrer que $\sup(B)$ existe. On appelle ce réel *diamètre de* A et on notera $\mathrm{Diam}(A) = \sup(B)$.
2. Justifier que $\inf(A)$ et $\sup(A)$ existent puis montrer que $\mathrm{Diam(A)} \leq \sup(A) - \inf(A)$.
3. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x, y \in A$ tels que $\sup(A) - \inf(A) - \varepsilon < x - y$.
4. En déduire que $\mathrm{Diam}(A) = \sup(A) - \inf(A)$.

Correction :

1. $\sup(B)$ existe car B est non vide (A est non vide : il existe $x \in A$ et donc $0 = |x-x| \in B$) et majorée (en effet, on a $|x-y| \leq |x| + |y| \leq 2M$ pour tout $x, y \in A$).
2. $\inf(A)$ et $\sup(A)$ existent car A est non vide et bornée. De plus pour tout $x \in A$, $x \leq \sup A$ et pour tout $y \in A$, $y \geq \inf A$ et donc $x - y \leq \sup A - \inf A$. En échangeant les roles de x et de y, il vient $y - x \leq \sup A - \inf A$ et donc $|x-y| \leq \sup A - \inf A$. Comme ceci est vrai pour tout $x, y \in A$ on a $\mathrm{Diam(A)} \leq \sup(A) - \inf(A)$.
3. On utilise la caractérisation par les ε de la borne supérieure et de la borne inférieure : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $\sup A - \frac{\varepsilon}{2} < x$. De même, il existe $y \in A$ tel que $y < \inf A + \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, $x - y > \sup A - \inf A - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2}$ et donc $\sup(A) - \inf(A) - \varepsilon < x - y$.
4. Mais alors $\sup(A) - \inf(A) - \varepsilon < x - y \leq |x-y| \leq \mathrm{Diam}(A)$. Par conséquent, comme $\sup(A) - \inf(A) - \varepsilon \leq \mathrm{Diam}(A)$ et comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\sup(A) - \inf(A) \leq \mathrm{Diam}(A)$. D'où l'égalité $\mathrm{Diam}(A) = \sup(A) - \inf(A)$.

Exercice 4 ($\approx 8pt$) : Soit $x \in]0, +\infty[$, un réel strictement positif. Soit $(r_n)_{n\geq 1}$ une suite de rationnels positifs qui converge vers x. On écrit $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec $p_n \in \mathbb{N}, q_n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si l'une des suites parmi $(p_n)_{n\geq 1}$ et $(q_n)_{n\geq 1}$ est bornée, alors l'autre l'est aussi.
2. On suppose dans cette question que l'une des suites $(p_n)_{n\geq 1}$ ou $(q_n)_{n\geq 1}$ est bornée.
   (a) Montrer que dans ce cas, la suite $((p_n, q_n))_{n\geq 1}$ prend ses valeurs dans un ensemble fini.
   (b) En déduire qu'il existe une sous-suite de $((p_n, q_n))_{n\geq 1}$ qui est constante.
   (c) Conclure que $x \in \mathbb{Q}$.

3. Un résultat auxiliaire : soit (a_n) une suite réelle. On souhaite montrer dans cette question le résultat suivant : si pour toute sous-suite $(a_{\varphi(n)})$, on peut extraire une sous-sous-suite $(a_{\varphi(\psi(n))})_{n\geq 1}$ qui tend vers 0, alors la suite (a_n) tend vers 0. On raisonne par l'absurde : la suite (a_n) ne tend pas vers 0.
   (a) Montrer alors qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une extraction φ tels que pour tout $n \geq 1$, $\left|a_{\varphi(n)}\right| > \varepsilon$.
   (b) Conclure à une contradiction.
4. On suppose dans cette question que $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   (a) Que pouvez-vous déduire des questions 1. et 2. à propos des suites (p_n) et (q_n) ?
   (b) Montrer que si une suite est non majorée, alors il existe une sous-suite qui tend vers $+\infty$.
   (c) Déduire des questions précédentes, que dans ce cas, on a $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et $q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. *Indication : on pourra s'intéresser à la suite* $a_n = \frac{1}{p_n}$.

Correction :

1. Si $(q_n)_{n\geq 1}$ est bornée alors $p_n = r_n q_n$ est le produit d'une suite convergente (donc bornée) et d'une suite bornée et est donc bornée. La réciproque est vraie en écrivant $q_n = \frac{1}{r_n} p_n$ avec $\frac{1}{r_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{x}$ convergente donc bornée.
2. (a) D'après la question précédente, les deux suites (p_n) et (q_n) sont bornées. Or ce sont des suites d'entiers positifs. Donc il existe deux entiers M et $N \geq 1$ tels que $((p_n, q_n))_{n\geq 1}$ vit dans $\mathcal{C} := \{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, N\}$ qui est un ensemble fini.
   (b) Si une suite vit dans un ensemble fini $\mathcal{C}$, il existe au moins un élément de cet ensemble (notons-le (p, q)) qui est visité une infinité de fois. Notant $\varphi(1) < \varphi(2) < \ldots < \varphi(n) < \ldots$ les instants de visite de cet élément, on en déduit qu'il existe une sous-suite de $((p_n, q_n))_{n\geq 1}$ qui est constante, égale à (p, q).
   (c) Si une suite converge, toutes ses sous-suites convergent aussi, vers la même limite. En prenant la sous-suite de la question précédente, on en déduit que $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.
3. (a) Ecrivons le contraire du fait que (a_n) tend vers 0 : il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n_0 \geq 1$, il existe $n \geq n_0$ tel que $|a_n - 0| \geq \varepsilon$. On construit alors l'extraction de proche en proche, par récurrence. Pour $n_0 = 1$, il existe $n = \varphi(1)$ tel que $\left|a_{\varphi(1)}\right| \geq \varepsilon$. Mais alors, pour $n_0 = \varphi(1) + 1$, il existe $n = \varphi(2) > \varphi(1)$ tel que $\left|a_{\varphi(1)}\right| \geq \varepsilon$ et ainsi de suite par récurrence. La suite d'indices $(\varphi(n))$ est par construction strictement croissante et vérifie la propriété demandée.
   (b) Ceci est contradictoire car l'hypothèse prétend qu'il est possible d'extraire une sous suite de $(a_{\varphi(n)})$ qui tend vers 0 ce qui est par construction impossible car $\left|a_{\varphi(n)}\right| \geq \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$.
4. (a) Par contraposée des questions 1. et 2. les suites (p_n) et (q_n) ne sont pas bornées (et même mieux : aucune des sous-suites de (p_n) et (q_n) ne sont bornées).
   (b) C'est un classique, fait en TD : si une suite (u_n) n'est pas majorée : alors 1 n'est pas un majorant : il existe $n = \varphi(1)$ tel que $u_{\varphi(1)} \geq 1$. Mais alors la suite

$(u_n)_{n\geq\varphi(1)+1}$ n'est pas majorée. Il existe donc $n = \varphi(2) > \varphi(1)$ tel que $u_{\varphi(2)} \geq 2$ et ainsi de suite par récurrence : il existe une extraction φ telle que $u_{\varphi(n)} \geq n$ pour tout $n \geq 1$ et donc $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, par théorème des gendarmes.

(c) Pour toute sous-suite $(p_{\varphi(n)})$, cette suite n'est pas majorée. Donc il existe une sous-sous-suite $(p_{\varphi(\psi(n))})$ qui tend vers $+\infty$. On peut exactement appliquer la question 3. à la suite $a_n = \frac{1}{p_n}$: cette suite tend vers 0 quand $n \to \infty$. Donc $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et donc $q_n = r_n p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ car $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x > 0$.

Fin de l'épreuve.