Proba3 - Corrigé TD 5

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire dont la densité de probabilité est donnée par : $f_X(x) = \begin{cases} cx & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ c(1-x) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Que vaut c ? Représenter sur un graphique la fonction f_X.

Solution: On sait que l'on a $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1$, d'où

$$1 = \int_0^{1/2} cxdx + \int_{1/2}^1 c(1-x)dx = c\frac{1}{2}((\frac{1}{2})^2 - 0^2) + c\frac{1}{2}(-(1-1)^2 + (1-\frac{1}{2})^2) = \frac{c}{4}$$

Donc $c = 4$.

Le graph de f_X est une petite pointe autour de l'abscisse $\frac{1}{2}$, montant jusqu'à la valeur 2.

2. Calculer $\mathbb{P}(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{4})$ et $\mathbb{P}(\frac{3}{4} \leq X \leq \frac{5}{4})$.

Solution: On a

$$\mathbb{P}(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{4}) = \int_{1/2}^{3/4} f_X(x)dx = \int_{1/2}^{3/4} 4(1-x)dx = 2(-(1-\frac{3}{4})^2 + (1-\frac{1}{2})^2) = \frac{3}{8}$$

et

$$\mathbb{P}(\frac{3}{4} \leq X \leq \frac{5}{4}) = \int_{3/4}^{5/4} f_X(x)dx = \int_{3/4}^{1} f_X(x)dx = \int_{3/4}^{1} 4(1-x)dx = 2(-(1-1)^2 + (1-\frac{3}{4})^2) = \frac{1}{8}$$

3. Calculer et représenter la fonction de répartition de X.

Solution: Soit $x \in \mathbb{R}$, si $x < 0$, alors $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = 0$.

Supposons $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. On a alors

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_0^x 4tdt = 2x^2$$

Supposons$\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, on a alors

$$\begin{aligned}
F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt &= \int_{-\infty}^{0} f_X(t)dt + \int_{0}^{1/2} f_X(t)dt + \int_{1/2}^{x} f_X(t)dt \\
&= \int_{0}^{1/2} 4tdt + \int_{1/2}^{x} 4(1-t)dt = \frac{1}{2} + 2[-(1-t)^2]_{1/2}^{x} = \frac{1}{2} + 2[\frac{1}{4} - (1-x)^2] = 1 - 2(1-x)^2
\end{aligned}$$

Enfin, si $x > 1$, $F_X(x) = 1$. Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - 2(1-x)^2 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Exercice 2

Soit c un réel. Soit X une variable de densité f définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{c}{x^2} 1_{[5,+\infty[}$.

1. Calculer c.

Solution: On a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1 = \int_{5}^{+\infty} \frac{c}{x^2}dx = c[-\frac{1}{x}]_5^{+\infty} = \frac{c}{5}$$

Donc $c = 5$.

2. Calculer la fonction de répartition de X.

Solution: On a, pour tout $x \leq 5, F_X(x) = 0$ et pour $x > 5$,

$$F_X(x) = \int_5^x \frac{5}{t^2}dt = 5[-\frac{1}{t}]_5^x = 5(\frac{1}{5} - \frac{1}{x}) = 1 - \frac{5}{x}$$

3. On pose $Y = \frac{1}{X}$. Quelle est la loi de Y ? On donnera la fonction de répartition de Y et sa densité.

Solution: On sait que $X \in]5, +\infty[$, donc $Y \in]0, \frac{1}{5}[$. Soit $y \in]0, \frac{1}{5}[$, on a

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\frac{1}{X} \leq y) = \mathbb{P}(X \geq \frac{1}{y}) \\
&= \int_{1/y}^{+\infty} \frac{5}{t^2}dt
\end{aligned}$$

On fait le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, $dt = -\frac{1}{u^2}du$, on trouve

$$F_Y(y) = \int_y^0 -\frac{5u^2}{u^2}du = \int_0^y 5du = 5y$$

Donc

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ 5y & \text{si } 0 \leq y \leq \frac{1}{5} \\ 1 & \text{si } y > \frac{1}{5} \end{cases}$$

et Y a pour densité $f_Y(y) = 5 1_{]0,\frac{1}{5}[}$

4. Calculer l?espérance $\mathbb{E}[\sqrt{X}]$.

Solution: On a

$$\mathbb{E}[\sqrt{X}] = \int_5^{+\infty} \sqrt{x} \times \frac{5}{x^2} dx = \int_5^{+\infty} 5x^{-3/2} dx = 5[\frac{-2}{\sqrt{x}}]_5^{+\infty} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

Exercice 3

Soit X une densité de probabilités définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.

Solution: On a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_0^{+\infty} x \exp(-\frac{x^2}{2})dx = [-\exp(-\frac{x^2}{2}]_{+\infty}^{0} = 1$$

De plus, $f \geq 0$ et f continue par morceaux, donc f est une densité de proba.

2. Montrer que $Y = X^2$ est une variable aléatoire à densité, dont on précisera la loi.

Solution: On a, pour $y \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X^2 \leq y) = \mathbb{P}(X \leq \sqrt{y}) && \text{(car X est positive)} \\ &= \int_0^{\sqrt{y}} x \exp(-\frac{x^2}{2})dx \\ &= \int_0^{y} \sqrt{t} \exp(-\frac{t}{2})(\frac{1}{2\sqrt{t}})dt && \text{(Changement de variable } \sqrt{t} = x, dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt) \\ &= \int_0^{y} \frac{1}{2} \exp(-\frac{t}{2})dt \end{aligned}$$

Donc Y a pour densité $f_Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\exp(-\frac{t}{2}) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On reconnait une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire à densité $f(t) = \lambda e^{-2|t|}, t \in \mathbb{R}$, où λ est un réel.

1. Quelle est la valeur de λ ?

Solution: On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(t)dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda e^{-2|t|}dt = \lambda(\int_{-\infty}^{0} e^{2t}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-2t}dt) \\ &= \lambda([\frac{1}{2}e^{2t}]_{-\infty}^{0} + [-\frac{1}{2}e^{-2t}]_0^{+\infty}) \\ &= \lambda(\frac{1}{2} - 0 + 0 + \frac{1}{2}) = \lambda\end{aligned}$$

Donc $\lambda = 1$.

2. Déterminer la loi de X^2 (on en donnera une densité).

Solution: On a, pour $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X^2 \leq x) &= \mathbb{P}(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) \\ &= \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \exp(-2|t|)dt \\ &= 2\int_0^{\sqrt{x}} \exp(-2t)dt && \text{(Par parité)} \\ &= 2\int_0^{x} \exp(-2\sqrt{u})\frac{1}{2\sqrt{u}}du && \text{(Changement de variable } \sqrt{u} = t, dt = \frac{1}{2\sqrt{u}}du)\end{aligned}$$

X^2 suit donc une loi de densité $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}\exp(-2\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Remarque : Pour avoir l'expression de la densité, on aurait pu finir le calcul de la fonction de répartition sans le changement de variable et ensuite dériver :

$$\mathbb{P}(X^2 \leq x) = [-e^{-2t}]_0^{\sqrt{x}} = 1 - \exp(-2\sqrt{x})$$

et donc $f_X(x) = 2\frac{1}{2\sqrt{x}}\exp(-2\sqrt{x})$ pour $x \geq 0$.

Exercice 5

Calcul de lois.

1. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[a; b]$ avec $0 < a < b$. Calculer la loi de la variable $Y = X^2$, et son espérance.

Solution: Même raisonnement que les exos précédents. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}(X \leq \sqrt{y}) && \text{(car } X \geq 0\text{)}\\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } \sqrt{y} \leq a \\ 1 & \text{si } \sqrt{y} \geq b \\ \int_a^{\sqrt{y}} \frac{1}{b-a} dt & \text{sinon} \end{cases}\\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq a^2 \\ 1 & \text{si } y \geq b^2 \\ \int_{a^2}^{y} \frac{1}{b-a} \frac{1}{2\sqrt{u}} du & \text{sinon} \end{cases} && \text{(changement de varialbe } u = t^2\text{)}
\end{aligned}$$

Donc Y a pour densité $f_Y(u) = \frac{1}{2(b-a)} \frac{1}{\sqrt{u}} 1_{[a^2,b^2]}$ (Pensez à vérifier que vous avez bien $\int_{\mathbb{R}} f_Y(u)du = 1$). On a donc

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{a^2}^{b^2} \frac{1}{2(b-a)} \frac{u}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{2(b-a)} [\frac{2}{3} u^{3/2}]_{a^2}^{b^2} = \frac{1}{3(b-a)} [b^3 - a^3] = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

2. Soit X une variable de loi uniforme sur $[0, 1]$ et λ un réel strictement positif. Quelle est la loi de la variable $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X)$? Calculer l?espérance $\mathbb{E}[Y]$.

Solution: De même,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}(-\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X) \leq y) = \mathbb{P}(1 - X \geq \exp(-\lambda y))\\
&= \mathbb{P}(X \leq 1 - \exp(-\lambda y))\\
&= \begin{cases} \int_0^{1-\exp(-\lambda y)} dt & \text{si } 0 \leq 1 - \exp(-\lambda y) \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\\
&= \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda y) & \text{si } 0 \leq y \leq +\infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc Y a pour densité $f_Y(y) = F'_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}$, c'est une loi exponentielle de paramètre λ.

Exercice 6

1. Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Calculer $\mathbb{P}(T > t+s|T > s)$ pour tout $s, t > 0$. Interpréter.

Solution: On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T > t + s|T > s) &= \frac{\mathbb{P}((T > t + s) \cap (T > s))}{\mathbb{P}(T > s)} = \frac{\mathbb{P}(T > t + s)}{\mathbb{P}(T > s)}\\
&= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(T > t)
\end{aligned}$$

Comme pour la loi géométrique, la loi exponentielle n'a pas de "mémoire". Si l'on sait que notre variable est plus grande qu'un seuil, alors la probabilité qu'elle vaille t de plus est la même que si l'on ne savait rien du tout. Cela en fait une loi de choix pour modéliser l'apparition d'un événement (comme la désintégration d'un atome radioactif).

2. On pose $X = [T]$ (partie entière de T). Quelle est la loi de X ?

Solution: On a une loi discrète. Soit $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(k \leq T < k+1) = \int_k^{k+1} \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_k^{k+1} = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} = (e^{-\lambda})^k (1 - e^{-\lambda})$$

On retrouve une loi géomértique (à 1 près) de paramètre $1 - e^{-\lambda}$. La loi géométrique est donc une discrétisation de la loi exponentielle.

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire de densité $f : x \to \frac{x}{\sigma^2} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}) 1_{x \geq 0}$, où σ désigne un réel strictement positif.

1. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 1)$.

Solution: On a $X \geq 0$, donc

$$\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 1) = \int_0^1 \frac{x}{\sigma^2} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}) dx = [-\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})]_0^1 = 1 - e^{-1/2\sigma^2}$$

2. Calculer l?espérance et la variance de X.

Solution: On doit faire une intégration par partie :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_0^{+\infty} x \times \frac{x}{\sigma^2} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}) dx = [-x \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 1 \times (-\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \frac{\sigma}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sigma}{2} \sqrt{2\pi} = \sqrt{\frac{\sigma^2 \pi}{2}} \end{aligned}$$

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$ est à connaître et s'appelle l'intégrale de Gauss. Voilà l'idée (non rigoureuse) derrière d'une façon de la montrer (en admettant le changement de variable polaire que vous verrez plus tard)

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{t^2}{2}) dt \right)^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{y^2}{2}) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{x^2 + y^2}{2}) dx dy \end{aligned}$$

Changement de variable polaire : $x \to r\cos(\theta), y \to r\sin(\theta)$, *(donc* $x^2+y^2=r^2$*) et* $dxdy = rdrd\theta$

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{t^2}{2})dt\right)^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{x^2+y^2}{2})dxdy\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty}\exp(-\frac{r^2}{2})rdrd\theta\\ &= 2\pi\int_0^{+\infty} r\exp(-\frac{r^2}{2})dr = 2\pi\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \int_0^{+\infty} x^2\times\frac{x}{\sigma^2}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})dx = [-x^2\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2x\times(-\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}))dx\\ &= 2\int_0^{+\infty} x\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})dx = 2[-\sigma^2\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})]_0^{+\infty} = 2\sigma^2\end{aligned}$$

DOnc

$$Var[X] = 2\sigma^2 - \frac{\sigma^2\pi}{2} = \sigma^2(2-\frac{\pi}{2})$$

3. Calculer la loi des variables $U = X^2$ et $V = X^2 - 2$.

Solution: Même raisonnement que les exos précédents. On a $\mathbb{P}(U \le u) = 0$ pour $u < 0$ et pour $u \ge 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U\le u) &= \mathbb{P}(X \le \sqrt{u})\\ &= \int_0^{\sqrt{u}}\frac{x}{\sigma^2}\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})dx\\ &= \int_0^t \frac{\sqrt{t}}{\sigma^2}\exp(-\frac{t}{2\sigma^2})\frac{1}{2\sqrt{t}}dt \qquad \text{(changement de variable } x=\sqrt{t}, dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\text{)}\\ &= \int_0^t \frac{1}{2\sigma^2}\exp(-\frac{t}{2\sigma^2})dt\end{aligned}$$

Donc U a pour densité $f_U(t) = \frac{1}{2\sigma^2}\exp(-\frac{t}{2\sigma^2})1_{[0,+\infty[}$, c'est une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2\sigma^2}$.
On a, de même, pour $v \ge -2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V\le v) = \mathbb{P}(U \le 2+v) &= \int_0^{2+v}\frac{1}{2\sigma^2}\exp(-\frac{t}{2\sigma^2})dt = \int_0^x \frac{1}{2\sigma^2}\exp(-\frac{t}{2\sigma^2})\\ &= \int_0^v \frac{1}{2\sigma^2}\exp(-\frac{x\times\frac{2+v}{v}}{2\sigma^2})\frac{2+v}{v}dx\\ &= \int_0^v \frac{2+v}{2v\sigma^2}\exp(-x\frac{2+v}{2v\sigma^2})dx\end{aligned}$$

Donc V suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{2+v}{2v\sigma^2}$

Exercice 8

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition $F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ et soit $Y = \frac{e^X+1}{e^X-1}$

1. Calculer la loi de Y.

Solution: Dans cet exercice, il faut bien étudier les fonctions de changements de variable avant de commencer !

X a pour fonction de répartition $F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ et F dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$F'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

Donc X a pour densité $f_X(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

On a $Y = \frac{e^X+1}{e^X-1}$. La fonction $f : x \to \frac{e^x+1}{e^x-1}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ est décroissante sur $\mathbb{R}^*$, et définie une bijection de $]-\infty, 0[$ dans $]-\infty, -1[$ et de $]0, +\infty[$ dans $]1, +\infty[$ avec pour $y \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $f^{-1}(y) = \ln(\frac{1+y}{y-1})$ et $(f^{-1})'(y) = \frac{-2}{y^2-1}$.

Donc, pour $y \leq -1$, on a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}(f(X) \leq y) = \mathbb{P}(X \leq \ln(\frac{1+y}{y-1})) \\
&= \int_{-\infty}^{\ln(\frac{1+y}{y-1})} \frac{-e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx
\end{aligned}$$

On pose $x = f^{-1}(t) = \ln(\frac{1+t}{1-t})$, on a $dx = \frac{-2}{t^2-1} dt$ et $e^{-x} = \frac{t-1}{1+t}$ donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq y) &= \int_y^{-\infty} \frac{\frac{t-1}{1+t}}{(1+\frac{t-1}{1+t})^2} \times \frac{-2}{(t-1)(t+1)} dt \\
&= \int_{-\infty}^{y} \frac{-2}{(t+1+t-1)^2} dt = \int_{-\infty}^{y} \frac{2}{4t^2} dt = \frac{1}{2}[-\frac{1}{t}]_{-\infty}^{y} \\
&= -\frac{1}{2y}
\end{aligned}$$

De même, pour $y \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}(Y \leq -1) + \mathbb{P}(1 \leq Y \leq y) \\
&= \frac{1}{2} + \mathbb{P}(+\infty \geq X \geq f^{-1}(y)) \\
&= \frac{1}{2} + \int_{\ln(\frac{1+y}{y-1})}^{+\infty} \frac{-e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx \\
&= \frac{1}{2} + \int_1^y \frac{1}{2t^2} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-\frac{1}{y} + 1) \\
&= 1 - \frac{1}{2y}
\end{aligned}$$

Donc Y a pour fonction de répartition

$$F_Y(y) = \begin{cases} -\frac{1}{2y} & \text{si } y \leq -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } y \in]-1, 1] \\ 1 - \frac{1}{2y} & \text{sinon} \end{cases}$$

et pour densité

$$f_Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2t^2} & \text{si } t \leq -1 \\ 0 & \text{si } t \in]-1, 1] \\ \frac{1}{2t^2} & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

Exercice 9

Un matériel comprend n composants dont les durées de vie (temps écoulé avant une panne) X_i sont supposées indépendantes et de lois $(E_{\lambda_i})_{1\leq i\leq n}$ exponentielles de paramètres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Le matériel tombe en panne dès que l?un de ses composants est en panne. On note Y la durée de vie de ce matériel.

1. Calculer la fonction de répartition de Y.

Solution: On a $Y = \min(X_1, \dots, X_n)$ et donc $Y \geq 0$ et pour $y \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \geq y) &= \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) \geq y) = \mathbb{P}((X_1 \geq y) \cap \dots \cap (X_n \geq y)) \\ &= e^{-\lambda_1 y} \times \dots \times e^{-\lambda_n y} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) y} \end{aligned}$$

Donc $F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \exp(-\sum_{i=1}^n \lambda_i y) & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

2. Quelle est la loi de Y, son espérance et sa variance ?

Solution: Y suit une loi exponentielle de paramètre $\sum_{i=1}^n \lambda_i$. On a donc $\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$ et $Var[Y] = \frac{1}{(\sum_{i=1}^n \lambda_i)^2}$.

Note sur les convergences de variables aléatoires

Comme vous avez vu en cours d'Analyse, la notion de limite est, au fond, toujours la même et se résume ainsi :

Pour toute distance à la limite, il existe un voisinage à partir du quel, tout élement du voisinage est proche de la limite à la distance près.

Pour parler de limites dans un espace quelqueconque, il faut donc être capable de 2 choses :

1. Calculer la distance entre les différents élément de l'ensemble
2. Etre capable d'établir la notion de "voisinage"

Dans $\mathbb{R}$, il n'y a pas trop de problème, il suffit de prendre comme distance la valeur absolue, et comme voisinage un interval petit autour de la limite.

Mais comment faire pour les variables aléatoires ???

Il n'y a malheureusement pas de *bonne* façon de faire ! C'est pour cela qu'il existe différentes notions de convergence des variables aléatoire (ce qui complique pas mal la théorie, mais y'a pas le choix, c'est comme ça). Vous avez déjà vu cela avec les fonctions, avec la convergence simple, uniforme, normale, etc... (n'oublions pas qu'une variable aléatoire est une fonction !) De toutes les façons de définir la convergence, 3 se démarquent en proba :

1. La convergence presque sûr : C'est la plus forte des 3, c'est la convergence au sens propre des fonctions, en considérant une variable aléatoire comme une fonction de Ω. Plus précisement $X_n \to_{p.s.} X \Leftrightarrow \mathbb{P}(X_n \to X) = 1 \Leftrightarrow \forall \omega \in \Omega, X_n(\omega) \to X(\omega)$.
2. La convergence en proba : elle consiste à dire que X est proche de Y si la probabilité que X proche de Y est grande. Plus précisemment, $X_n \to_{\text{proba}} X \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \mathbb{P}(|X_n - X| \leq \epsilon) \to 1$.
3. La convergence en loi : Convergence la plus faible, elle consiste à dire que X est proche de Y si la densité de X est proche de la densité de Y. Plus précisement, $X_n \to_{\text{loi}} X \Leftrightarrow F_{X_n} \to_{\text{CV simple}} F_X$

Il y a plein de choses à dire sur ces convergences. Par exemple, on a

$$\text{Convergence presque sûr} \implies \text{Convergence en proba} \implies \text{Convergence en loi}$$

Il y a plein d'autre résultats, etc... Les 3 notions sont incontournables car certains théorèmes ne sont valables qu'à condition d'avoir l'une ou l'autre des ces convergences ou ne garantissent que l'une ou l'autre vérifiée. Parmi les grands théorèmes de proba, il en est 2 très célèbres et incontournables : La loi des grands nombres et le théorème central limite. Ils s'énoncent comme suit :

Loi des grands nombres : Si (X_n) est une suite de v.a. indépendantes et de même loi admettant une espérance μ, alors leur moyenne $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ tend presque sûrement (et donc dans les autres convergence) vers μ.

C'est un résultat très intuitif, qui justifie essentiellement l'utilisations des probabilités dans la prise de décision !! On peut donc faire une sorte de DL de v.a.

$$\bar{X}_n = \mathbb{E}[X] + \circ(1)$$

Théorème central limite : Soient (X_n) une suite de variable aléatoire de même loi indépendantes, d'espérence μ et variance σ^2. Alors on a $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \to_{loi} Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Ce théorème est très pratique et très étonnant. Il dit qu'en prenant n'importe quelle suite de variable aléatoire (suivant a priori n'importe quelle loi !) et bien la différence à l'espérance se comporte comme une loi Gaussienne ! Cela nous donne le DL à l'ordre 1 de toute variable aléatoire ! (à prendre avec des pincettes, c'est pour l'intuition) :

$$\bar{X} = \mathbb{E}[X] + \frac{1}{\sqrt{n}}\mathcal{N}(0, \sigma^2) + \circ_{loi}(\frac{1}{\sqrt{n}})$$