Analyse 3

Licence Mathématiques et Informatique 2^{e} année

1er semestre 2019-2020

Eric Luçon - eric.lucon@parisdescartes.fr

12 décembre 2019

Le contenu du cours peut différer par certains points du contenu de ce polycopié. Les examens se feront uniquement sur la base de ce qui aura été vu en cours. Certains passages de ce polycopié, marqué du symbole ♠, sont réservés à une seconde lecture.

Table des matières

0.1 Liste des questions de cours exigibles pour l'examen (version 2019-2020)

Les théorèmes et définitions suivants sont exigibles en tant que questions de cours au partiel et à l'examen. S'il s'agit de propositions ou théorèmes, on attend de vous d'en connaître **l'énoncé précis (notamment hypothèses et conclusions)** ainsi que d'en **connaître leur démonstration**.

1. Caractérisation de la borne supérieure d'un ensemble par les ε (Théorème 1.24),
2. Si une suite (u_n) est convergente, alors sa limite est unique (Proposition 2.23),
3. Toute suite convergente est bornée (Proposition 2.24),
4. Si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ et (v_n) converge vers l', alors le produit $(u_n v_n)$ converge vers ll' (Proposition 2.32, item 2.),
5. Théorème des gendarmes (Proposition 2.38),
6. Théorème de convergence des suites monotones (Proposition 2.42) (*on l'énoncera dans le cas croissant*).
7. Définition de suites adjacentes (Définition 2.46) et Théorème de convergence des suites adjacentes (Proposition 2.47),
8. Soit (u_n) une suite réelle. Si (u_n) est convergente, alors toute suite extraite de (u_n) est convergente, de même limite (Proposition 2.71).
9. Théorème sur la limite d'une fonction composée $g \circ f$ en $x = x_0$ dans le cas où $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$ et $g(y) \xrightarrow[y \to l]{} l'$ (Proposition 3.22) (*on n'exige la démonstration que dans le cas où x_0, l et l' sont des réels*).
10. Si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$ avec $l > 0$, alors il existe un voisinage de x_0 sur lequel $f(x) \geqslant \frac{l}{2} > 0$ (item 2. de la Proposition 3.23) (*on n'exige la démonstration que dans le cas où x_0, l sont des réels*).
11. Théorème de Heine et sa démonstration (Théorème 3.59)
12. Théorème de dérivation de la réciproque et sa démonstration (Proposition 4.9)
13. Théorème de Rolle et sa démonstration (Proposition 4.12)
14. Egalité des accroissements finis et sa démonstration (Théorème 4.14)
15. Théorème fondamental de l'analyse et sa démonstration (Théorème 4.22)

0.2 Table des lettres grecques

L'alphabet grec, utilisé de façon constante dans ce polycopié (et dans toute la suite de vos études !), est rappelé ci-dessous.

Lettre	**Minuscule**	**Majuscule**
alpha	α	A
beta	β	B
gamma	γ	Γ
delta	δ	Δ
epsilon	ε	E
zeta	ζ	Z
eta	η	H
theta	θ	Θ
iota	ι	I
kappa	κ	K
lambda	λ	Λ
mu	μ	M
nu	ν	N
xi	ξ	Ξ
omicron	o	O
pi	π	Π
rho	ρ	P
sigma	σ	Σ
tau	τ	T
upsilon	υ	Y
phi	φ	Φ
khi (ou chi)	χ	X
psi	ψ	Ψ
omega	ω	Ω

TABLE 1 – Table des lettres grecques

0.3 Remarques préliminaires sur l'usage des quantificateurs logiques

Le but de ce cours est d'introduire et de manipuler les notions élémentaires de l'analyse. Beaucoup de notions vues ici (réels, suites de réels, convergence d'une suite, continuité d'une fonction, comparaison asymptotique, etc.) ont souvent déjà été abordées au lycée ou en première année de Licence. Simplement, ces notions ont pour la plupart été introduites de façon informelle ou non rigoureuse. Par exemple : comment définissez-vous qu'une suite (u_n) a pour limite l quand $n \to \infty$? Comment définissez-vous qu'une fonction f est continue sur un intervalle [1] ?

Ainsi, la nouveauté de ce cours sera de formaliser et de démontrer proprement les résultats, à l'aide notamment de quantificateurs logiques, tels que "il existe" ($\exists$), "pour tout" ($\forall$), l'implication ($\Rightarrow$), l'équivalence ($\Leftrightarrow$), etc, dont nous rappelons brièvement l'usage dans cette remarque introductive.

De l'usage des quantificateurs $\forall$ et $\exists$

Il est important de comprendre qu'un même énoncé mathématique peut s'écrire de plusieurs manières, toutes équivalentes. Prenons un exemple : si $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de réels, l'énoncé

La suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est bornée,

peut soit s'écrire sous forme littérale :

$$\text{Il existe } M \in]0, +\infty[\text{ tel que pour tout } n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M, \qquad (A)$$

soit à l'aide des quantificateurs $\exists$ et $\forall$:

$$\exists M \in]0, +\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M. \qquad (B)$$

☹ **Attention!**
Les symboles $\exists$ et $\forall$ ont un sens mathématique précis et ne sont pas de simples abréviations qu'il serait possible d'utiliser à tort et à travers dans vos copies. En particulier, tout mélange obscur entre les formulations (A) et (B) est à proscrire : soit on écrit tout de manière littérale, soit on écrit tout avec $\exists$ et $\forall$, mais on ne mélange pas les formulations.

☹ **Attention!**
Dans (B), on écrit " $\exists M \in]0, +\infty[,\ \ldots$", mais jamais "$\exists M, \ldots$" tout seul : il faut préciser l'ensemble auquel appartient M (ici l'intervalle $]0, +\infty[$). Notons qu'on aurait

1. on conviendra que toute définition à base de "on trace le graphe de f sans lever le crayon" est à bannir désormais !

très bien pu écrire aussi

$$\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M.$$

Le symbole d'implication $\Rightarrow$

La même remarque s'applique à l'utilisation du symbole d'implication $\Rightarrow$: ce symbole a un sens mathématique précis, ce n'est pas une abréviation qu'il serait possible d'utiliser à tort et à travers. On écrit par exemple

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\exists k \in \mathbb{N},\ n = 4k) \Rightarrow (\exists l \in \mathbb{N},\ n = 2l)$$

ou bien sous forme littérale

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n est divisible par 4, alors n est divisible par 2,

mais

☹ **Attention!**
On n'écrira jamais le symbole $\Rightarrow$ tout seul au milieu d'une copie ! Un conseil : une bonne pratique est finalement de ne pas utiliser le symbole $\Rightarrow$. En effet, il est toujours possible de remplacer la phrase "$A \Rightarrow B$" par l'expression littérale "si A alors B". Ces deux phrases ont le même sens et en utilisant la seconde plutôt que la première, vous éviterez le mésusage du symbole $\Rightarrow$.

Le symbole d'équivalence

L'équivalence de A et B se définit de la façon suivante : on dit que A est équivalent B (et on écrit $A \Leftrightarrow B$) si par définition,

$$(A \Rightarrow B) \text{ et } (B \Rightarrow A).$$

L'équivalence exprime le fait que A et B sont simultanément vrais et simultanément faux.

☹ **Attention!**
La définition de l'équivalence fournit une méthode de démonstration : montrer une équivalence, c'est montrer successivement les deux implications. Ne pas oublier l'une d'entre elles !

A propos de l'ordre des quantificateurs

L'ordre dans lequel sont écrits *il existe* et *pour tout* dans (A) est important. Dans l'énoncé (A), le réel $M > 0$ est universel : le même M est valable pour n'importe quel élément u_n de la suite :

Dans l'énoncé (A), M **ne dépend pas de** n.

A l'inverse, analysons l'énoncé initial où on a inversé les deux quantificateurs :

$$\text{Pour tout } n \geqslant 0, \text{ il existe } M > 0 \text{ tel que } |u_n| \leqslant M, \tag{C}$$

ou de façon équivalente à l'aide des quantificateurs :

$$\forall n \geqslant 0,\ \exists M > 0,\ |u_n| \leqslant M. \tag{D}$$

Ici, suivant le sens de la lecture, on introduit d'abord $n \geqslant 0$, puis ensuite $M > 0$: autrement dit,

Dans l'énoncé (C), M **dépend ici a priori du choix de** n (pour $n = 1$, il existe un $M_1 > 0$, pour $n = 2$ il existe un $M_2 > 0$ a priori différent de M_1, etc.).

Pour bien faire il faudrait plutôt écrire l'énoncé (équivalent à (C))

$$\text{Pour tout } n \geqslant 0, \text{ il existe } M_n > 0 \text{ tel que } |u_n| \leqslant M_n, \tag{C'}$$

On comprend alors que l'énoncé (C) est très différent de l'énoncé (A) : en effet, l'énoncé (C) est toujours vrai, quelle que soit la suite considérée (puisque pour tout $n \geqslant 0$, il suffit par exemple de prendre $M_n = |u_n| \dots$), alors que l'énoncé (A) n'est pas tout le temps vrai : (A) est par exemple faux pour $u_n = n$, qui n'est pas une suite bornée.

☹ **Attention!**

On ne peut pas inverser impunément les quantificateurs "pour tout" et "il existe" dans un énoncé mathématique !

Remarque 0.1: On a cependant le résultat suivant : si X est un ensemble, x, y deux éléments de X et $P(x, y)$ une propriété (valant Vrai ou Faux) dépendant de x et de y, alors

$$[\exists y \in X, \forall x \in X,\ P(x, y)] \Rightarrow [\forall x \in X,\ \exists y \in X,\ P(x, y)]$$

En effet, si il existe un $y \in X$ universel tel que $P(x, y)$ est vérifiée quel que soit $x \in X$, alors ce même y convient pour tout x en particulier. C'est l'implication inverse qui est fausse en toute généralité.

Remarque 0.2: Par contre, il est toujours possible d'inverser deux $\forall$ (ou deux $\exists$) entre eux : les énoncés suivants sont équivalents

$$\forall x \in X, \forall y \in Y,\ P(x, y),$$
$$\forall y \in Y, \forall x \in X,\ P(x, y).$$

Prendre le contraire d'un énoncé mathématique

Comment prendre le contraire d'un énoncé mathématique ?

Prendre le contraire d'un énoncé comportant des ∀ et ∃

La règle est la suivante : si X est un ensemble, x un élément de X et $P(x)$ une propriété (valant Vrai ou Faux) dépendant de x,

$$\begin{aligned}\text{non}\,(\forall x \in X, P(x)) &= \exists x \in X,\ \text{non}P(x),\\ \text{non}\,(\exists x \in X, P(x)) &= \forall x \in X,\ \text{non}P(x).\end{aligned}$$

Autrement dit, il s'agit de remplacer chaque $\exists$ par un $\forall$ et chaque $\forall$ par un $\exists$, et de remplacer P par son contraire non P.

Par exemple, le contraire de l'énoncé (A) (i.e. *La suite* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *n'est pas bornée*) est

$$\text{Pour tout } M > 0, \text{ il existe } n \geqslant 0 \text{ tel que } |u_n| > M, \tag{E}$$

ou de façon équivalente à l'aide des quantificateurs :

$$\forall M > 0,\ \exists n \geqslant 0,\ |u_n| > M. \tag{F}$$

Ainsi, dire qu'une suite n'est pas bornée, c'est dire qu'on peut toujours trouver un élément de la suite aussi grand soit-il.

Prendre le contraire d'une implication

La règle est la suivante :

Le contraire de "$A \Rightarrow B$" est "A et (non B)".

Autrement dit, établir le contraire de "si A alors B" revient à écrire un contre-exemple, de sorte que A est vrai, mais que B est faux.

☹ **Attention!**

Il ne faut confondre le **contraire** de "$A \Rightarrow B$" (qui est donc "A et (non B)") avec la **contraposée** de "$A \Rightarrow B$", qui est par définition

"non $B \Rightarrow$ non A".

En effet, la contraposée "non $B \Rightarrow$ non A" est exactement équivalente à "$A \Rightarrow B$".

Un exemple : si A = "il pleut" et B = "je prends mon parapluie" :

— $A \Rightarrow B$: s'il pleut, alors je prends mon parapluie.

— La contraposée de $A \Rightarrow B$ (strictement équivalente à l'énoncé initial) : "si je ne prends pas mon parapluie, alors il ne pleut pas".

— Le contraire de $A \Rightarrow B$: "il pleut, mais je ne prends pas mon parapluie".

Exercice 0.3: Exprimer (uniquement à l'aide A, B, non, et, ou) le contraire de

$$A \Leftrightarrow B$$

Chapitre 1

Propriétés usuelles de l'ensemble des réels

1.1 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ et notion d'intervalle

On admet dans ce chapitre la définition des nombres réels, celles des opérations usuelles (addition et multiplication) et celle de l'ordre usuel sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels : ainsi, on rappelle que $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leqslant$ qui vérifie

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant x,$ (réflexivité)
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leqslant y$ et $y \leqslant x \Rightarrow x = y$ (antisymétrie)
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \leqslant y$ et $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$ (transitivité).

Définition 1.1: *Soit I un sous ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \in I$, $y \in I$ et $x \leqslant z \leqslant y$ alors $z \in I$.* Autrement dit, à partir du moment où un intervalle contient deux réels, il contient par définition tout élément entre ces deux réels.

Exemple 1.2: 1. L'ensemble vide $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

2. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$,

$$[a, b] := \{z \in \mathbb{R},\ a \leqslant z \leqslant b\}, \tag{1.1.1}$$

$$[a, b[:= \{z \in \mathbb{R},\ a \leqslant z < b\}, \tag{1.1.2}$$

$$]a, b] := \{z \in \mathbb{R},\ a < z \leqslant b\}, \tag{1.1.3}$$

$$]a, b[:= \{z \in \mathbb{R},\ a < z < b\}, \tag{1.1.4}$$

sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

3. pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$]-\infty, a] := \{z \in \mathbb{R},\ z \leqslant a\}, \tag{1.1.5}$$

$$]-\infty, a[:= \{z \in \mathbb{R},\ z < a\}, \tag{1.1.6}$$

$$[a, +\infty[:= \{z \in \mathbb{R},\ a \leqslant z\}, \tag{1.1.7}$$

$$]a, +\infty[:= \{z \in \mathbb{R},\ a < z\}, \tag{1.1.8}$$

sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Contre-exemple 1.3: *L'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$: $0 \in \mathbb{N}$, $1 \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant 1$, mais $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.*

Nous avons listé (Exemple 1.2) 10 sortes d'intervalles. Une question naturelle est alors de savoir s'il en existe d'autres. La réponse à cette question que nous verrons à la fin du paragraphe est que ce sont les seuls.

1.2 Notions de majorant et de maximum

Définition 1.4: *Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et $M, m \in \mathbb{R}$.*

1. *On dit que M est un majorant de A si pour tout $a \in A$, $a \leqslant M$ (autrement dit M est plus grand que tout élément de A).*
2. *De même, on dit que m est un minorant de A si pour tout $a \in A$, $m \leqslant a$ (i.e. m est plus petit que tout élément de A).*
3. *On dit que A est majoré (resp. minoré) si A admet un majorant (resp. minorant). On dit enfin que A est borné si A admet un majorant et un minorant.*

Remarque 1.5: Autrement dit, A est majoré si et seulement si

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall a \in A, a \leqslant M.$$

A est minoré si et seulement si

$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall a \in A, a \geqslant m.$$

A est borné si et seulement si

$$\exists m, M \in \mathbb{R},\ \forall a \in A, m \leqslant a \leqslant M.$$

Remarque 1.6: Notons que la traduction mathématique de "A n'est pas majoré" est

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists a \in A,\ a > M.$$

Définition 1.7: *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $m, M \in \mathbb{R}$.*

1. *On dit M est le maximum de A (ou plus grand élément de A) et on notera $M = \max A$ si*
   - *$M \in A$ et*
   - *M est un majorant de A.*
2. *On dit m est le minimum de A (ou plus petit élément de A) et on notera $m = \min A$ si*
   - *$m \in A$ et*
   - *m est un minorant de A.*

Proposition 1.8: *S'il existe, le maximum de A est nécessairement unique.*

Démonstration. Soit A sous-ensemble de $\mathbb{R}$ admettant $M_1 \in \mathbb{R}$ et $M_2 \in \mathbb{R}$ comme maxima. Montrons que $M_1 = M_2$: pour cela il suffit de montrer que $M_1 \leqslant M_2$ et $M_2 \leqslant M_1$. M_2 est un maximum pour A. Donc pour tout $a \in A$, on a $a \leqslant M_2$. C'est en particulier vrai pour M_1 (qui est par définition un élément de A). Donc $M_1 \leqslant M_2$. Par symétrie $M_2 \leqslant M_1$ et donc on a l'égalité. Donc (s'il existe) le maximum de A est nécessairement unique. □

Remarque 1.9: La Proposition 1.8 justifie l'utilisation de l'article "le maximum" au lieu de "un maximum".

Exemple 1.10:

1. $A =]-\infty, 5]$ est majoré par 5 (et par tout réel plus grand que 5), mais n'admet pas de minorant. A admet 5 comme maximum.
2. $B =]-\infty, 5[$ est majoré par 5 (et par tout réel plus grand que 5), mais n'admet pas de maximum.
3. $C =]-5, -3[\cup]-2, +\infty[$ est minoré par -5 (et par tout réel plus petit que -5), mais n'admet pas de majorant. C n'admet pas de minimum, ni de maximum.
4. $D =]5, 2017[$ admet un majorant (2018 par exemple) et un minorant (0 par exemple). D est donc borné. Par contre D n'admet ni maximum ni minimum.

Remarque 1.11: L'énoncé ci-dessus "B n'admet pas de maximum" mériterait une démonstration : supposons par l'absurde que B admette un maximum, appelé M. Alors, par hypothèse, $M \in B$, donc $M < 5$. On peut alors trouver un réel strictement entre M et 5, par exemple la moyenne de M et 5 : $M < \frac{M+5}{2} < 5$. Mais alors $\frac{M+5}{2} \in B$, par définition de B mais $\frac{M+5}{2} > M$, ce qui contredit la définition de M comme majorant de B. Absurde.

On le voit à travers les exemples ci-dessus : tout ensemble n'admet pas forcément de majorant, de minorant, de maximum ou de minimum. Par contre,

Proposition 1.12: *Tout ensemble fini non vide admet un maximum et un minimum.*

Démonstration. Prouvons la propriété par récurrence sur le cardinal $n \geqslant 1$ de l'ensemble en question. Si $n = 1$, l'ensemble $A = \{a_1\}$ est un singleton et a_1 est un minimum et maximum évident de A. Supposons maintenant la propriété vraie pour tout ensemble fini de cardinal n et considérons $A = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\}$ un ensemble fini non vide de cardinal $n+1$. Soit $B = \{a_1, \dots, a_n\}$ de cardinal n. Par hypothèse de récurrence, B admet un minimum m et un maximum M. Deux cas sont alors possibles : soit $a_{n+1} \geqslant M$ et alors $a_{n+1} \in A$ est plus grand que M et donc que tout élément de B, donc a_{n+1} est le maximum de A. Soit $a_{n+1} < M$, auquel cas M est le maximum de A. On procède de même pour le minimum. D'où la propriété par récurrence. □

On déduit de cette propriété la notion de valeur absolue :

Définition 1.13: *Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit*

$$|x| := \max\{x, -x\}, \tag{1.2.1}$$

$$x^+ := \max\{x, 0\}, \tag{1.2.2}$$

$$x^- := \max\{-x, 0\}, \tag{1.2.3}$$

appelées respectivement, la valeur absolue, la partie positive et la partie négative de x.

Proposition 1.14: *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = x^+ + x^-$, $x = x^+ - x^-$. De plus, $x^+ = \frac{|x|+x}{2}$ et $x^- = \frac{|x|-x}{2}$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il suffit de distinguer deux cas : $x \geqslant -x$ ou $x < -x$. Nous faisons la preuve dans le premier cas et laissons le second au lecteur. Supposons donc $x \geqslant -x$. Dans ce cas, additionnant x de chaque côté de l'inégalité, on obtient $2x \geqslant 0$ et donc $x \geqslant 0$. Donc dans ce cas, $|x| = x$, $x^+ = x$ et $x^- = 0$. Les égalités souhaitées sont alors évidentes. $\square$

Proposition 1.15: *Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors*

1. $|-x| = |x|$, $(-x)^+ = x^-$, $(-x)^- = x^+$.
2. $|x| \leqslant |y| \Leftrightarrow -|y| \leqslant x \leqslant |y|$.
3. *Inégalité triangulaire :* $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.
4. *Inégalité triangulaire inverse :* $||x| - |y|| \leqslant |x-y|$.

Démonstration. L'ensemble $\{x, -x\}$ est invariant par l'opération $x \mapsto -x$, donc $|-x| = |x|$. Les deux égalités suivantes se prouvent sur le même principe. Supposons maintenant $|x| \leqslant |y|$. Alors $\max\{x, -x\} \leqslant |y|$ et donc $x \leqslant |y|$ et $-x \leqslant |y|$ et donc $-|y| \leqslant x \leqslant |y|$. Réciproquement, si $-|y| \leqslant x \leqslant |y|$, alors $|y| \geqslant x$ et $|y| \geqslant -x$ et donc $|y| \geqslant \max\{x, -x\} = |x|$.

Passons maintenant à la preuve de l'inégalité triangulaire : cette inégalité équivaut à montrer que $|x| + |y| \geqslant x + y$ et $|x| + |y| \geqslant -(x+y)$. Or, $|x| \geqslant x$ et $|y| \geqslant y$ donc $|x| + |y| \geqslant x + y$. De même $|x| \geqslant -x$ et $|y| \geqslant -y$ donc $|x| + |y| \geqslant -x - y$ et donc l'inégalité triangulaire est vraie.

En ce qui concerne l'inégalité triangulaire inverse, appliquant l'inégalité triangulaire une première fois à $y - x$ et x, il vient

$$|y| = |(y-x) + x| \leqslant |y-x| + |x|.$$

Donc, $|y| - |x| \leqslant |y-x|$. Inversant le role de x et y, on a aussi, $|x| - |y| \leqslant |y-x|$ et on obtient le résultat. $\square$

Proposition 1.16: *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Alors A est borné si et seulement si*

$$\exists b > 0,\ \forall a \in A,\ -b \leqslant a \leqslant b. \tag{1.2.4}$$

Démonstration. Supposons A borné : il existe donc m et M réels tels que pour tout $a \in A$, $a \leqslant M$ et $m \leqslant a$. Posons $b = \max\{|M|, |m|\}$. Alors $a \leqslant M \leqslant |M| \leqslant b$ et $a \geqslant m \geqslant -|m| \geqslant -b$. Réciproquement, si b est tel que pour tout $a \in A$, $-b \leqslant a \leqslant b$ alors b est un majorant et $-b$ est un minorant, donc A est borné. $\square$

1.3 Notion de borne supérieure

Définition 1.17: *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On note*

$$\mathcal{M}(A) := \{M \in \mathbb{R},\ \forall a \in A,\ a \leqslant M\}$$

l'ensemble des majorants de A.

Exemple 1.18: Revenons aux exemples considérés dans l'Exemple 1.2 :

1. $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(B) = [5, +\infty[$
2. $\mathcal{M}(C) = \emptyset$
3. $\mathcal{M}(D) = [2017, +\infty[$.

On le voit donc, $\mathcal{M}(A)$ peut-être vide, si A n'est pas majorée.

Définition 1.19: *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Dans le cas où l'ensemble $\mathcal{M}(A)$ admet un minimum, on appelle ce minimum, borne supérieure de A, et on le note $\sup A$. Ainsi, si elle existe, la borne supérieure de A est le plus petit des majorants de A.*

Attention!
Une remarque importante : une borne supérieure n'existe pas forcément. **Il faudra toujours veiller à justifier l'existence de la borne supérieure avant même de l'évoquer.**

Exemple 1.20: En revenant aux exemples précédents, on a

1. A, B et D admettent des bornes supérieures, $\sup A = \sup B = 5$ et $\sup D = 2017$.
2. C n'admet pas de borne supérieure.

Une propriété importante à propos de l'ensemble des nombres réels est la suivante

Théorème 1.21 (Propriété de la borne supérieure): *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*

Démonstration. On admet ce "théorème". En fait, ce résultat est intrinsèquement lié à la construction de l'ensemble des nombres réels. Il est en effet possible de *construire* (à partir de l'ensemble des rationnels) l'ensemble des nombres réels de telle sorte que la propriété de la borne supérieure soit automatiquement vérifiée. Cette construction dépasse le cadre de ce cours. Nous nous contenterons de voir cette propriété comme un axiome sur l'ensemble des nombres réels. □

Attention!
Ce sera le seul résultat admis de ce cours. J'attire l'attention du lecteur sur le fait que tous les résultats de ce cours découlent de cet axiome relatif à la construction de $\mathbb{R}$.

Remarque 1.22: Cette propriété est fausse sur l'ensemble des rationnels : le sous-ensemble A suivant de $\mathbb{Q}$ est majoré, mais n'admet pas de borne supérieure **dans** $\mathbb{Q}$:

$$A = \left\{ q \in \mathbb{Q}, q < \sqrt{2} \right\}.$$

En effet, si c'était le cas, notons $q^* \in \mathbb{Q}$ cette borne supérieure. Posons $q_n = 10^{-n} \left\lfloor 10^n \sqrt{2} \right\rfloor$ la suite d'approximations décimales de $\sqrt{2}$ par défaut. On a par construction $q_n \to \sqrt{2}$ et $q_n \in A$ pour tout $n \geqslant 1$. Or, par définition de q^*, on a $q_n \leqslant q^*$ pour tout $n \geqslant 1$. Par passage à la limite dans cette inégalité (toutes quantités convergentes, cf. Proposition 2.37 ci après), on a à la limite $\sqrt{2} \leqslant q^*$. Montrons qu'on a en fait l'égalité $q^* = \sqrt{2}$: en effet, si ce n'était pas le cas, on aurait $\sqrt{2} < q^*$ et par caractérisation de la borne supérieure, il existerait un $q \in A$ tel que $\sqrt{2} < q \leqslant q^*$. Mais ceci contredit la définition de A. Donc $\sqrt{2} = q^*$. Or tout ceci est absurde, car $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Par contre, bien sûr, A admet une borne supérieure **dans** $\mathbb{R}$ qui est $\sqrt{2}$.

Proposition 1.23: *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Si A admet un maximum, alors A admet une borne supérieure et* $\max A = \sup A$.

Démonstration. Soit A sous-ensemble de $\mathbb{R}$ admettant un maximum M. Alors A est majoré, donc par Propriété de la borne supérieure, A admet une borne supérieure, notée S. Montrons que $M = S$. Par définition, S est un majorant de A, donc pour tout $a \in A$, $a \leqslant S$. Comme $M \in A$, on a en particulier $M \leqslant S$. Inversement, M est aussi un majorant de A et S est par définition le plus petit d'entre eux. Donc $S \leqslant M$. Donc $S = M$. □

Théorème 1.24 (Caractérisation de la borne supérieure): *Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}$ admettant une borne supérieure. Alors S est la borne supérieure de A si et seulement si les deux assertions suivantes sont vérifiées :*

1. *S est un majorant de A : pour tout $a \in A$, $a \leqslant S$,*
2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que $S - \varepsilon < a_\varepsilon \leqslant S$.*

Démonstration. Posons $S = \sup A$. Alors S est un majorant de A par hypothèse. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, $S - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A (puisque par définition $S = \sup A$ est le plus petit d'entre eux). Donc (Remarque 1.6) il existe un élément de A qui est strictement plus grand que $S - \varepsilon$: il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que $S - \varepsilon < a_\varepsilon \leqslant S$.

Réciproquement, soit S réel vérifiant les deux assertions du théorème. Montrons que $S = \sup A$. S est un majorant de A donc $\sup A \leqslant S$ (car $\sup A$ est le plus petit des majorants). Montrons que $S \leqslant \sup A$. Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $a_\varepsilon \in A$ tel que $S - \varepsilon \leqslant a_\varepsilon$. Comme $\sup A$ est un majorant de A, $a_\varepsilon \leqslant \sup A$ et donc $S - \varepsilon \leqslant \sup A$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a $S \leqslant \sup A$. Donc $S = \sup A$. □

Théorème 1.25 (Caractérisation de la borne supérieure par les suites): *Soit A un sous-ensemble admettant une borne supérieure. Alors S est la borne supérieure de A si et seulement si les deux assertions suivantes sont vérifiées*

1. *S est un majorant de A*
2. *il existe une suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de A qui converge vers S.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que ce theorème est équivalent au Théorème 1.24. Supposons que S est tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que $S - \varepsilon < a_\varepsilon \leqslant S$. Ceci est vrai en particulier pour pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, pour $n \geqslant 1$: pour tout $n \geqslant 1$, il existe $a_n \in A$ tel que $S - \frac{1}{n} \leqslant a_n \leqslant S$. Anticipant sur un résultat du paragraphe suivant (mais on vérifiera qu'il n'y a pas de cercle vicieux dans la démonstration), par théorème des gendarmes, il vient que la suite (a_n) est convergente, de limite S.

Supposons réciproquement qu'il existe une suite (a_n) qui converge vers S. Soit $\varepsilon > 0$. Comme (a_n) converge vers S, il existe n suffisamment grand pour lequel $S - \varepsilon < a_n \leqslant S + \varepsilon$. Or $a_n \leqslant S$ est toujours vraie vu que S est un majorant par hypothèse. □

1.4 Notion de borne inférieure

La notion de borne inférieure est symétrique de celle de la borne supérieure :

Définition 1.26: *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On note*

$$\mathcal{I}(A) = \{m \in \mathbb{R},\ \forall a \in A, a \geqslant m\},$$

l'ensemble des minorants de A (possiblement vide). Dans le cas où $\mathcal{I}(A)$ admet un maximum, on appelle ce maximum, borne inférieure de A et on le note $\inf A$. *Ainsi, si elle existe, la borne inférieure de A est le plus grand des minorants de A.*

Exemple 1.27: Revenant aux exemples du paragraphe précédent, on a

1. C et D admettent des bornes inférieures, $\inf C = -5$ et $\inf D = 5$.
2. A et B n'admettent pas de borne inférieure.

De la même façon que pour le Théorème 1.24, il existe une caractérisation semblable pour la borne inférieure :

Théorème 1.28: *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ admettant une borne inférieure et $I \in \mathbb{R}$. Alors* $I = \inf A$ *si et seulement si les deux assertions suivantes sont vérifiées :*

1. *I est un minorant de A,*
2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que $I \leqslant a_\varepsilon < I + \varepsilon$.*

Démonstration. Démonstration très semblable à celle de la borne supérieure, laissée à titre d'exercice. □

De même, l'équivalent du Théorème 1.25 est donné par

Théorème 1.29 (Caractérisation de la borne inférieure par les suites): *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ admettant une borne inférieure et $I \in \mathbb{R}$. Alors I est la borne inférieure de A si et seulement si les deux assertions suivantes sont vérifiées*

1. *I est un minorant de A*
2. *il existe une suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de A qui converge vers I.*

Démonstration. Exercice. □

Théorème 1.30 (Propriété de la borne inférieure): *Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.*

Démonstration. Cette propriété n'est plus un axiome, elle peut se déduire de la propriété de la borne supérieure. Soit A une partie minorée de $\mathbb{R}$. Définissons l'ensemble

$$B = \{-a,\ a \in A\}. \tag{1.4.1}$$

Ainsi, B est le symétrique de A par rapport à l'origine (on le note souvent $B = -A$). Comme A est minoré, l'ensemble B est majoré. Par propriété de la borne supérieure, B admet une borne supérieure, notée S. Notons $I = -S$. Montrons que I est la borne inférieure de A. Nous utilisons la caractérisation donnée par les Théorèmes 1.24 et 1.28. S

est un majorant de B, donc pour tout $a \in A$, $-a \leqslant S$ et donc $a \geqslant -S = I$. Ainsi, I est un minorant de A.

Par ailleurs, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $b_\varepsilon \in B$, tel que $S - \varepsilon < b_\varepsilon \leqslant S$ donc $-S + \varepsilon > -b_\varepsilon \geqslant -S$. Or par construction de B, $a_\varepsilon = -b_\varepsilon \in A$ et on a $I + \varepsilon > a_\varepsilon \geqslant I$. Donc I est la borne inférieure de A. □

1.5 Classification des intervalles de $\mathbb{R}$

Théorème 1.31: *Tout intervalle de $\mathbb{R}$ entre dans l'une des 10 catégories suivantes :*

1. $I = \emptyset$
2. *I est ni majoré, ni minoré : $I = \mathbb{R}$,*
3. *I est majoré mais non minoré :*
   (a) *si I a un maximum : $I =]-\infty, a]$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$,*
   (b) *si I n'a pas de maximum : $I =]-\infty, a[$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$,*
4. *I est minoré mais non majoré :*
   (a) *si I a un minimum : $I = [a, +\infty[$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$,*
   (b) *si I n'a pas de minimum : $I =]a, +\infty[$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$,*
5. *I est borné,*
   (a) *si I a un minimum et un maximum : $I = [a, b]$ pour $a < b \in \mathbb{R}$,*
   (b) *si I a un minimum et pas de maximum : $I = [a, b[$ pour $a < b \in \mathbb{R}$,*
   (c) *si I a un maximum et pas de minimum : $I =]a, b]$ pour $a < b \in \mathbb{R}$,*
   (d) *si I n'a ni minimum ni maximum : $I =]a, b[$ pour $a < b \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Nous n'allons pas tout prouver. Soit I un intervalle. Prouvons tout d'abord que si I est non vide et ni majoré, ni minoré, on a alors

$$I = \mathbb{R}.$$

En effet, évidemment $I \subseteq \mathbb{R}$, montrons donc l'inclusion réciproque : soit $x \in \mathbb{R}$, montrons que $x \in I$. Comme I est non majoré, il existe $b > x$ tel que $b \in I$. De même, I n'est pas minoré, donc il existe $a < x$ tel que $a \in I$. Mais alors comme $a \in I$, $b \in I$, $a < x < b$ et comme I est un intervalle, $x \in I$, ce qu'il fallait prouver. Donc finalement $I = \mathbb{R}$.

Tous les autres cas (autres que $I = \emptyset$) concernent les cas où I est majoré ou minoré. A titre d'exemple[1], traitons le cas où I est minoré sans minimum et non majoré. I est minoré, donc admet une borne inférieure, notée t. Montrons que dans ce cas $I =]t, +\infty[$. Soit $u \in I$. Comme t est un minorant de I, $t \leqslant u$. Or, $u = t$ est impossible sans quoi I aurait un minimum. Donc $u > t$. Nous venons donc de prouver que $I \subset]t, +\infty[$.

Montrons l'inclusion réciproque : soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > t$. Posons $\varepsilon = x - t > 0$. Par propriété caractéristique de la borne inférieure, il existe $a \in I$ tel que $t \leqslant a < t + \varepsilon = x$. De plus I n'est pas majoré, donc il existe $b \in I$ tel que $b > x$.

Résumons : nous venons de trouver deux éléments a et b de I tels que $a < x < b$. Comme I est un intervalle, $x \in I$. Conclusion, $]t, +\infty[\subset I$ et on a donc l'égalité.

Les autres cas se traitent de façon semblable. □

1. Faites les autres cas à titre d'exercice !

Chapitre 2

Suites réelles et complexes, convergence ; applications aux séries

2.1 Premières définitions

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ sera égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1.1 Définitions

Définition 2.1: *On appelle suite toute application u de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$:*

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{K} \tag{2.1.1}$$
$$n \mapsto u(n) \tag{2.1.2}$$

On note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dit que u est une suite réelle. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on dit que u est une suite complexe.

Définition 2.2: *Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite. On note*

$$u(\mathbb{N}) := \{u(n),\ n \in \mathbb{N}\}$$

l'image de $\mathbb{N}$ par u, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par u.

Remarque 2.3:

1. Plutôt que de noter $u(n)$, il est d'usage d'utiliser la notation u_n.
2. Il s'agit de faire la distinction entre plusieurs objets distincts :
   — La suite u (encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou bien $(u_n)_{n \geqslant 0}$) qui est une fonction,
   — L'élément de la suite u_n (pour n fixé) qui est un élément de $\mathbb{K}$.
   — $u(\mathbb{N})$ qui est un sous-ensemble de $\mathbb{K}$, l'ensemble des valeurs prises par u.
3. Parfois, la suite n'est définie que sur un sous-ensemble strict de $\mathbb{N}$: par exemple, la suite donnée par $u_n = \frac{1}{n}$ n'est définie que pour $n \geqslant 1$; la suite v donnée par $v_n = \ln(n - 2017)$ n'a de sens que pour $n \geqslant 2018$.

Définition 2.4: *Soit u une suite à valeurs complexes. Dans ce cas, pour tout $n \geqslant 0$, u_n s'écrit de manière unique sous la forme*

$$u_n = x_n + iy_n,\ x_n \in \mathbb{R},\ y_n \in \mathbb{R}.$$

On note $\Re(u)$ (resp. $\Im(u)$) la suite "partie réelle de u" (resp. "partie imaginaire de u") donnée par $\Re(u)_n = x_n = \Re(u_n)$ (resp. $\Im(u)_n = y_n = \Im(u_n)$). Ainsi, $\Re(u)$ et $\Im(u)$ sont des suites à valeurs réelles.

Définition 2.5: *Soient deux suites u et v éléments de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit la suite $u + v$ par $(u + v)_n := u_n + v_n$, $n \geqslant 0$ et la suite λu par $(\lambda u)_n = \lambda u_n$, $n \geqslant 0$.*

Ainsi muni des deux opérations ci-dessus, l'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ hérite de la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, issue de la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{K}$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que les axiomes d'espace vectoriel sont effectivement vérifiés pour $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

2.1.2 Suites majorées, minorées, monotones

Dans ce paragraphe, toutes les suites sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.6: *Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que :*

1. *u est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant M$.*
2. *u est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geqslant 0$, $m \leqslant u_n$.*
3. *u est bornée si u est majorée et minorée.*

Remarque 2.7: On notera que ces définitions sont en fait équivalentes au fait que l'ensemble image $u(\mathbb{N})$ est majoré (resp. minoré, borné) au sens de la Remarque 1.5.

Proposition 2.8: *Soit u une suite réelle. u est bornée si et seulement si il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \geqslant 0$, $|u_n| \leqslant M$.*

Démonstration. Cette proposition est la conséquence directe de la remarque précédente et de la Proposition 1.16. □

Proposition 2.9: *Soient u et v deux suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$:*

1. *Si u et v sont majorées (resp. minorées), alors la suite $u + v$ est majorée (resp. minorée).*
2. *Si $\lambda \geqslant 0$ et si u est majorée (resp. minorée) alors la suite λu est majorée (resp. minorée).*
3. *Si $\lambda \leqslant 0$ et si u est majorée (resp. minorée) alors la suite λu est minorée (resp. majorée).*
4. *Si u et v sont bornées, alors $u + v$, λu et uv (définie par $(uv)_n = u_n v_n$ pour $n \geqslant 0$) sont des suites bornées.*

Démonstration.

1. Supposons u et v majorées. Alors, il existe $M \in \mathbb{R}$ et $M' \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant M$ et $v_n \leqslant M'$. Mais alors, $u_n + v_n \leqslant M + M'$, donc $u + v$ est majorée. Une preuve similaire traite le cas de suites minorées.
2. Soit u majorée et $\lambda \geqslant 0$. Alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$. Mais alors, comme $\lambda \geqslant 0$, $\lambda u_n \leqslant \lambda M$ et donc λu est majorée. Une preuve similaire traite le cas de suites minorées.
3. Idem que précédemment, laissé à titre d'exercice.

4. Le cas de $u+v$ et de λu est une conséquence des items précédents. Considérons u et v bornées : alors, il existe des réels M et M' tels que pour tout $n \geqslant 0$, $|u_n| \leqslant M$ et $|v_n| \leqslant M'$. Mais alors, $|u_n v_n| = |u_n|\,|v_n| \leqslant MM'$. Donc la suite uv est bornée.

□

Attention!
La somme d'une suite majorée et d'une suite minorée peut très bien n'être ni majorée, ni minorée : pour $n \geqslant 0$, $u_n = n$ définit une suite minorée (par 0) et $v_n = -2n$ si n est pair et $v_n = 0$ si n est impair, définit une suite majorée par 0. Par contre $(u+v)_n$ vaut $-n$ si n est impair et n si n est pair. Ainsi $u+v$ n'est ni majorée, ni minorée.

Définition 2.10: *Soit u une suite réelle. On dit que*

1. *u est croissante si pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant u_{n+1}$,*
2. *u est strictement croissante si pour tout $n \geqslant 0$, $u_n < u_{n+1}$,*
3. *u est décroissante si pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant u_{n+1}$,*
4. *u est strictement décroissante si pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > u_{n+1}$,*

On dit que u est (strictement) monotone si u est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

Remarque 2.11: Il existe bien sûr des suites qui ne sont ni croissantes ni décroissantes, par exemple u définie par $u_n = \cos(n)$.

Proposition 2.12: *Soit u une suite réelle et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $\lambda \geqslant 0$: si u est croissante (resp. décroissante) alors λu est croissante (resp. décroissante).*
2. *Si $\lambda \leqslant 0$: si u est croissante (resp. décroissante) alors λu est décroissante (resp. croissante).*

Démonstration. Evident : il suffit de constater que la multiplication par $\lambda \geqslant 0$ conserve le sens d'une inégalité alors que le sens est inversé si $\lambda \leqslant 0$. □

Proposition 2.13: *La somme de deux suites croissantes (resp. décroissantes) est une suite croissante (resp. décroissante). De plus, l'une d'entre elles est strictement croissante (resp. strictement décroissante) alors la somme est strictement croissante (resp. strictement décroissante).*

Démonstration. On traite le cas de u et v croissantes : ainsi, pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ et $v_n \leqslant v_{n+1}$. Donc, sommant terme à terme, il vient $u_n + v_n \leqslant u_{n+1} + v_{n+1}$ et donc $u+v$ est croissante. Si de plus u est strictement croissante, alors pour tout $n \geqslant 0$, $u_n < u_{n+1}$ et donc $u_n + v_n < u_{n+1} + v_n \leqslant u_{n+1} + v_{n+1}$. Donc $u+v$ est strictement croissante. □

Attention!
La somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante n'a en général aucune propriété particulière : u définie par $u_n = 2n + \cos(n)$ pour $n \geqslant 0$ est une suite croissante : en effet, $u_{n+1} - u_n = 2n + 2 + \cos(n+1) - 2n - \cos(n) = 2 + \cos(n+1) - \cos(n) \geqslant 0$ (car $|\cos(n)| \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 0$). Ensuite v définie par $v_n = -2n$ est décroissante. Mais $u_n + v_n = \cos(n)$ définit une suite ni croissante, ni décroissante.

2.1.3 Notion de propriété "vraie à partir d'un certain rang"

Souvent, une propriété ne sera pas vérifiée pour tout $n \geqslant 0$ mais seulement à partir d'un n suffisamment grand. Plus précisément,

Définition 2.14: *Si P est une propriété sur l'ensemble des suites (par exemple "être une suite croissante" ou bien "être une suite constante"), on dira qu'une suite u vérifie la propriété P* à partir d'un certain rang *(en abrégé a.p.c.r.) s'il existe un entier $r \geqslant 0$ tel que la suite restreinte $(u_n)_{n \geqslant r}$ vérifie la propriété P.*

Exemple 2.15:
1. On dira qu'une suite réelle est croissante à partir d'un certain rang s'il existe $r \geqslant 0$, tel que pour tout $n \geqslant r$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
2. On dit que u est non nulle à partir d'un certain rang, s'il existe $r \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant r$, $u_n \neq 0$.

Une notion sera particulièrement utile pour la suite :

Définition 2.16: *Soit u une suite réelle. On dit que la suite u est stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang, i.e. s'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $r \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant r$, $u_n = a$.*

Proposition 2.17: *Les Propositions 2.12 et 2.13 restent vraies pour les notions de croissance à partir d'un certain rang.*

Démonstration. Nous ne prouvons pas tout : prouvons par exemple que si u et v sont croissantes à partir d'un certain rang, alors $u + v$ est croissante à partir d'un certain rang. En effet, il existe $r_1 \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant r_1$, $u_n \leqslant u_{n+1}$. De même, il existe $r_2 \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant r_2$, $v_n \leqslant v_{n+1}$. Posons $r = \max(r_1, r_2)$. Alors pour $n \geqslant r$, on a $u_n \leqslant u_{n+1}$ et $v_n \leqslant v_{n+1}$ et donc $u_n + v_n \leqslant u_{n+1} + v_{n+1}$. Donc $u + v$ est croissante à partir d'un certain rang. □

2.2 Suites convergentes et divergentes

2.2.1 Notion de suite convergente

On définit rigoureusement dans ce paragraphe la notion intuitive, vue depuis le lycée, de convergence d'une suite réelle. Intuitivement, dire que la suite donnée par $u_n = \frac{1}{n}$ tend vers 0 pour $n \to \infty$, c'est dire que u prend des valeurs arbitrairement proches de 0, quitte à considérer un rang n suffisamment grand. De manière générale,

Définition 2.18: *Soit u une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$.*

1. *On dit que la suite u converge vers l si la propriété suivante est vérifiée :*
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \geqslant 1, \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - l| < \varepsilon. \tag{2.2.1}$$
Dans ce cas, on notera $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$, ou bien $\lim_{n\to\infty} u_n = l$.
2. *On dit u est convergente s'il existe un réel l tel que u converge vers l.*

Explicitons cette définition importante :

1. Notons déjà que
$$|u_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow u_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$$
où $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ est un intervalle centré autour de l de longueur 2ε.
2. Dans (2.2.1), $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, il faut surtout comprendre $\varepsilon > 0$ comme un réel arbitrairement petit.
3. Ainsi, dire que u converge vers l c'est dire que tout intervalle I centré autour de l de longueur arbitrairement petite, on est capable de trouver un rang n_0 suffisamment grand tel que l'intervalle I contient toutes les valeurs de la suite à partir de ce rang n_0 (voir Figure 2.1).

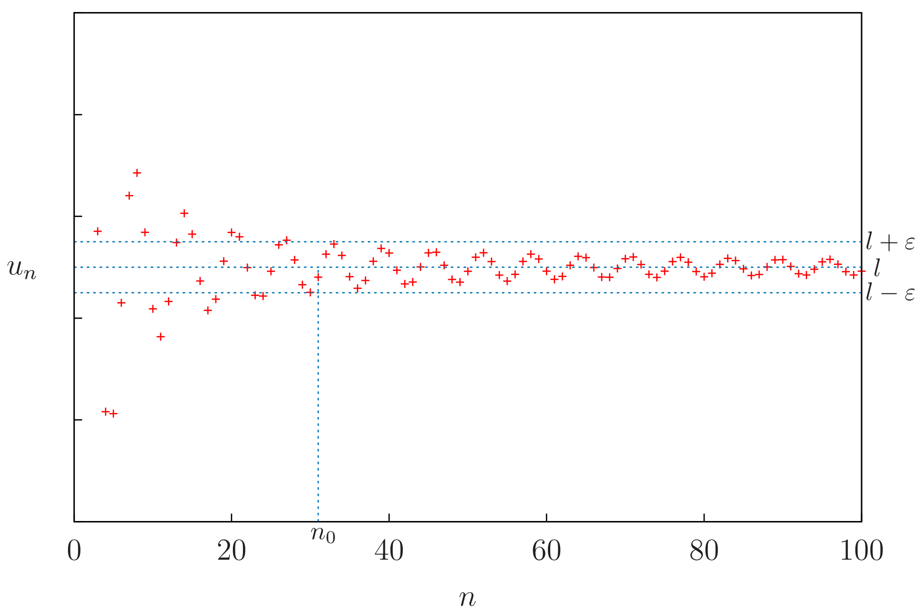


FIGURE 2.1 – La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers l : pour tout intervalle $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ de longueur arbitraire, il existe un rang n_0 (qui dépend de ε) à partir duquel toutes les valeurs de la suite se trouvent dans cet intervalle.

Attention!

Une remarque très importante : il existe des suites qui ne sont pas convergentes. Ainsi, avant même de parler de la limite d'une suite u, il s'agira de **justifier au préalable que la limite de u existe**.

Ainsi, dans tout exercice sur la convergence d'une suite u, on attend de vous de respecter dans votre rédaction les deux étapes suivantes :

1. **Justifier la convergence de la suite** u, en utilisant les théorèmes que nous verrons dans ce chapitre. Noter qu'il n'est pas question d'écrire à ce moment sur votre copie des expressions comme $\lim_{n\to\infty} u_n$, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{}$, etc., vu qu'on ne sait pas encore que la suite u converge !
2. **Ensuite** (et seulement ensuite), on **calcule** éventuellement cette limite.

Nous sommes finalement plus intéressés dans ce cours dans la première étape de ce raisonnement que dans la seconde. La majorité de la notation du partiel et de l'examen portera sur la première étape.

Attention!

Dans (2.2.1), le rang n_0 dépend de $\varepsilon > 0$. Deux choix différents de ε donneront des indices n_0 a priori différents. Par exemple, pour $\varepsilon = \frac{1}{10}$, il existe $n_1 \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $|u_n - l| < \frac{1}{10}$. Si maintenant, on considère $\varepsilon = \frac{1}{100}$, il existe un $n_2 \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant n_2$, $|u_n - l| < \frac{1}{100}$. Mais, a priori $n_1 \neq n_2$!

Attention!

1. Il est absolument nécessaire de considérer dans (2.2.1) uniquement les ε strictement positifs (et pas $\varepsilon \geqslant 0$!).
2. La définition (2.2.1) est équivalente à la même phrase avec une inégalité large [a] :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \geqslant 1, \forall n \geqslant n_1,\ |u_n - l| \leqslant \varepsilon. \tag{2.2.2}$$

   En effet, si (2.2.1) est vraie alors (2.2.2) est trivialement vraie pour le même $n_1 = n_0$. Réciproquement, si (2.2.2) est vérifiée, alors pour tout $\varepsilon > 0$, on peut appliquer (2.2.2) pour $\frac{\varepsilon}{2}$. Dans ce cas, il existe $n_1 \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $|u_n - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, et nous obtenons donc une inégalité stricte.
3. La notion de convergence ne dépend pas du tout des premières valeurs de la suite : si une suite est convergente, il est possible de changer arbitrairement la valeur d'un nombre arbitraire de premiers termes de la suite sans changer la convergence de la suite, ni la valeur de la limite. Ainsi, pour tout entier $k \geqslant 1$, la définition (2.2.1) est équivalente à la phrase suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \geqslant k, \forall n \geqslant n_1,\ |u_n - l| < \varepsilon. \tag{2.2.3}$$

   En effet, supposons que (2.2.1) est vraie. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - l| < \varepsilon$. Si n_0 est plus grand que k, $n_1 = n_0$ convient et (2.2.3) est vérifiée. Si $n_0 < k$, comme la propriété est vraie pour tout $n \geqslant n_0$, elle est en particulier vraie à partir de $n_1 = k$ et donc (2.2.3) est aussi vraie. Réciproquement, si (2.2.3) est vraie, (2.2.1) est trivialement vérifiée.

---

a. Le n_0 dans (2.2.1) est une lettre muette. Il est donc de bonne discipline d'utiliser une autre lettre n_1 pour (2.2.2).

Un premier exemple de suites convergentes est donnée par les suites stationnaires :

Proposition 2.19: *Soit u une suite réelle. Si u est stationnaire, alors u est convergente. Plus précisément, si $a \in \mathbb{R}$ est tel que $u_n = a$ à partir d'un certain rang, la limite de u est donnée par a.*

Démonstration. La suite u étant stationnaire, il existe $a \in \mathbb{R}$ et $n_0 \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = a$. Mais alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $|u_n - a| = 0 < \varepsilon$. Donc u est convergente, de limite a. □

Remarque 2.20: Remarquons que dans la démonstration précédente, le $n_0 \geqslant 1$ ne dépend pas de $\varepsilon > 0$. C'est bien sûr exceptionnel : de façon générale, dans (2.2.1), le $n_0 \geqslant 1$ dépend a priori du $\varepsilon > 0$ donné.

Proposition 2.21: *La suite u définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$ est convergente, de limite $l = 0$.*

Démonstration. Appliquons la définition : soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Considérons l'entier $n_0 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$. Pour tout $n \geqslant n_0$, on a $n \geqslant n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Ainsi, $|u_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Nous venons donc de prouver que u est convergente, de limite 0. □

Exercice 2.22 (Suite géométrique): Soit $r \in]-1, 1[$. Montrer que la suite de terme général $(r^n)_{n \geqslant 0}$ est convergente, de limite 0.

2.2.2 Premières propriétés des suites convergentes

La limite d'une suite convergente est nécessairement unique :

Proposition 2.23: *Soit u une suite réelle et l, l' deux réels. Si u est convergente, de limite l et l' alors $l = l'$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Comme u converge vers l, il existe $n_1 \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $|u_n - l| < \varepsilon$. De même, il existe $n_2 \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant n_2$, $|u_n - l'| < \varepsilon$. En particulier, pour $n_3 = \max(n_1, n_2)$, on a, par inégalité triangulaire

$$0 \leqslant \left|l - l'\right| \leqslant |u_{n_3} - l| + \left|u_{n_3} - l'\right| < 2\varepsilon.$$

Ainsi $0 \leqslant |l - l'| \leqslant 2\varepsilon$, et ce, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Ainsi, nécessairement $|l - l'| = 0$ et donc $l = l'$. □

Proposition 2.24: *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration. Soit u une suite convergente (de limite $l \in \mathbb{R}$). Pour $\varepsilon = 1$, il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - l| < 1$. En particulier, pour $n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant |u_n - l| + |l| < 1 + |l|$. Mais alors pour tout $n \geqslant 0$, $|u_n| \leqslant M := \max\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{n_0-1}|, 1 + |l|\}$. Donc u est bornée. □

Attention!
La réciproque de cette propriété est fausse : la suite u définie par $u_n = (-1)^n$ est bornée (par 1) mais n'est pas convergente.

Remarque 2.25: On remarque ici un principe souvent utilisé dans ce genre de démonstration : la propriété de convergence permet de contrôler un nombre infini de termes (i.e. les u_n pour $n \geqslant n_0$). Il reste alors à contrôler les termes restants $(u_0, u_1, \ldots, u_{n_0-1})$, mais ils sont en nombre fini ! Il suffit alors de les borner trivialement par leur valeur absolue.

2.2.3 Notion de suite divergente

Définition 2.26: *On dit qu'une suite est divergente si elle n'est pas convergente. Ainsi, prenant le contraire de l'énoncé de la Définition 2.18, une suite est divergente si la propriété suivante est vérifiée :*

pour tout $l \in \mathbb{R}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n_0 \geqslant 1$, il existe $n \geqslant n_0$ tel que $|u_n - l| \geqslant \varepsilon$.

Voici un exemple de suite divergente :

Exercice 2.27: Montrer que la suite u définie par $u_n = (-1)^n$ pour $n \geqslant 0$ est divergente.

Démonstration. Soit $l \in \mathbb{R}$. Distinguons deux cas :

1. $l \in \{-1, 1\}$: dans ce cas, on peut supposer sans perte de généralité que $l = 1$. Posons $\varepsilon = 1$. Pour tout $n_0 \geqslant 1$, un entier n parmi n_0 ou $n_0 + 1$ est tel que $u_n = -1$. Pour un tel $n \geqslant n_0$, $|u_n - l| = |-1 - 1| = 2 \geqslant 1$.
2. $l \notin \{-1, +1\}$: sans perte de généralité on peut supposer que $l \geqslant 0$. Posons $\varepsilon = |l - 1| > 0$; ainsi définie ε est la distance entre l et 1 et comme $l \geqslant 0$ cette distance est plus petite que la distance $|l + 1|$ entre l et -1. Mais alors, pour tout $n_0 \geqslant 1$, un entier n parmi $\{n_0, n_0 + 1\}$ est tel que $u_n = -1$. Mais alors, $|u_n - l| = |l + 1| \geqslant \varepsilon$.

Donc u est divergente. □

Parmi les suites divergentes, on distingue celles qui ont une limite infinie :

Définition 2.28: *Soit u une suite réelle.*

1. *On dit que la suite u tend vers $+\infty$ si*
$$\forall A > 0, \exists n_0 \geqslant 0, \forall n \geqslant n_0, u_n > A \tag{2.2.4}$$
On notera alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.
2. *On dit que la suite u tend vers $-\infty$ si*
$$\forall A < 0, \exists n_0 \geqslant 0, \forall n \geqslant n_0, u_n < A \tag{2.2.5}$$
On notera alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$.

Exercice 2.29 (Suite géométrique - continued): Soit $r > 1$. Montrer que la suite de terme général $(r^n)_{n \geqslant 0}$ tend vers $+\infty$.

Proposition 2.30: *Toute suite réelle u qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) est divergente au sens de la Définition 2.26.*

Démonstration. Nous traitons ici seulement le cas d'une suite u telle que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et laissons le second cas $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ à titre d'exercice. Il s'agit de montrer qu'une telle suite ne peut pas admettre de limite $l \in \mathbb{R}$. Par l'absurde, supposons le contraire : (u_n) converge vers un certain $l \in \mathbb{R}$. Mais alors (u_n) est bornée, par un certain M : pour tout $n \geqslant 0$, $|u_n| \leqslant M$. Mais alors comme $u_n \to \infty$, pour $A = M$, il existe alors $n_A \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_A$, $u_n > A$. C'est absurde. Ainsi, u est divergente. □

Remarque 2.31: On distingue usuellement deux types de suites divergentes :

1. les suites qui ont une limite infinie ($+\infty$ ou $-\infty$) : on les appelle *suites divergentes de première espèce*,
2. les suites qui n'ont pas de limite (finie ou infinie) : on les appelle *suites divergentes de seconde espèce*. La suite définie par $u_n = (-1)^n$ en est un exemple.

2.2.4 Opérations sur les limites

Proposition 2.32 (Opérations sur les suites convergentes): *Soient u et v deux suites réelles convergentes de limites respectives $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}$.*

1. *La somme $u + v$ est convergente, de limite $l + l'$.*
2. *La suite produit $uv = (u_n v_n)_{n \geqslant 0}$ est convergente de limite ll'.*
3. *Si de plus $l' \neq 0$, alors*
   (a) *v est non nulle à partir d'un certain rang,*
   (b) *la suite inverse de terme général $\frac{1}{v_n}$ est bien définie à partir d'un certain rang et est convergente, de limite $\frac{1}{l'}$,*
   (c) *la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ est bien définie à partir d'un certain rang et est convergente, de limite $\frac{l}{l'}$.*

Démonstration. Soient u et v convergentes de limites respectives l et l'.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Comme u converge vers l, il existe $n_1 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $|u_n - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (il s'agit de la propriété de convergence (2.2.1) appliquée à $\frac{\varepsilon}{2}$). De même, il existe $n_2 \geqslant 0$, tel que pour tout $n \geqslant n_2$, $|v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$.
   Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Pour tout $n \geqslant n_0$, par inégalité triangulaire,
   $$\left|u_n + v_n - (l + l')\right| \leqslant |u_n - l| + \left|v_n - l'\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
   Nous venons donc de prouver que $u + v$ est convergente, de limite $l + l'$.
2. Comme la suite v est convergente, elle est en particulier bornée par un certain $M > 0$ (Proposition 2.24). Soit $\varepsilon > 0$. Comme u converge vers l, il existe $n_1 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $|u_n - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}$ (il s'agit de la propriété de convergence (2.2.1) appliquée

à $\frac{\varepsilon}{2M}$). De même, il existe $n_2 \geqslant 0$, tel que pour tout $n \geqslant n_2$, $|v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2(|l|+1)}$ (il s'agit de la propriété de convergence (2.2.1) pour la suite v appliquée à $\frac{\varepsilon}{2(|l|+1)}$).
Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned}\left|u_n v_n - ll'\right| &= \left|(u_n - l)v_n + l(v_n - l')\right|, \\ &\leqslant |v_n|\,|u_n - l| + |l|\left|v_n - l'\right| < M\frac{\varepsilon}{2M} + |l|\,\frac{\varepsilon}{2(|l|+1)} \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Ainsi nous venons de montrer que la suite $(u_n v_n)_{n \geqslant 0}$ est convergente, de limite ll'.

3. (a) Supposons $l' \neq 0$. Quitte à remplacer v par $-v$ (et donc l' par $-l'$), on peut supposer que $l' > 0$. Appliquons la propriété de convergence pour v avec $\varepsilon = \frac{l'}{2} > 0$: il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|v_n - l'| < \frac{l}{2}$. En particulier, $v_n - l' > -\frac{l'}{2}$, i.e. $v_n > \frac{l'}{2} > 0$, dès que $n \geqslant n_0$. Donc v est non nulle à partir d'un certain rang.

   (b) D'après l'item précédent, (on suppose encore que $l' > 0$), à partir d'un certain rang $n_0 \geqslant 0$, $v_n > \frac{l'}{2} > 0$ et donc $0 < \frac{1}{v_n} < \frac{2}{l'}$. Ainsi, pour $n \geqslant n_0$,

$$\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{l'}\right| = \frac{1}{|v_n l'|}\left|l' - v_n\right| \leqslant \frac{2}{(l')^2}\left|l' - v_n\right|.$$

   Pour tout $\varepsilon > 0$ (appliquant la propriété de convergence pour $\frac{\varepsilon(l')^2}{2}$), il existe $n_1 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $|v_n - l'| < \frac{\varepsilon(l')^2}{2}$, et donc, pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$,

$$\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{l'}\right| < \frac{2}{(l')^2}\frac{\varepsilon(l')^2}{2} = \varepsilon.$$

   Nous venons donc de montrer que la suite de terme général $\frac{1}{v_n}$ est convergente, de limite $\frac{1}{l'}$.

   (c) C'est la conséquence immédiate des résultats précédents. □

Proposition 2.33 (Produit d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers 0): *Soit u et v deux suites réelles. Si u est bornée et v est convergente de limite 0, alors la suite de terme général $(u_n v_n)_{n \geqslant 0}$ est convergente, de limite 0.*

Démonstration. Supposons que u est bornée par $M > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence de la suite v vers 0, il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|v_n| = |v_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$. Mais alors $|u_n v_n - 0| = |u_n|\,|v_n| \leqslant M\,|v_n| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$. Ainsi, nous venons de montrer que la suite de terme général $u_n v_n$ est convergente, de limite nulle. □

Exemple 2.34: La suite de terme général $w_n = \frac{(-1)^n \cos(n)^3 - \arctan(n)}{\sqrt{n}}$ est convergente de limite 0 car w_n est le produit de

— $u_n = (-1)^n \cos(n)^3 - \arctan(n)$ qui définit une suite bornée (par $1 + \frac{\pi}{2}$), et de
— $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ qui est une suite qui tend vers 0.

Contrairement à l'ensemble des suites convergentes, l'ensemble des suites divergentes a de mauvaises propriétés :

☹ **Attention!**
La somme de deux suites divergentes n'est pas nécessairement divergente : posons pour $n \geqslant 0$, $u_n = (-1)^n$ et $v_n = -u_n$. Ce sont toutes les deux des suites divergentes, mais la somme $u_n + v_n = 0$ est une suite trivialement convergente.

De même, le produit de deux suites divergentes n'est pas nécessairement divergente : posons pour $n \geqslant 0$, $u_n = (-1)^n$ et $v_n = u_n$. Ce sont toutes les deux des suites divergentes, mais la somme $u_n v_n = 1$ est une suite trivialement convergente.

A propos de produits/quotients, on a le résultat suivant :

Proposition 2.35 (Opérations sur les suites divergentes): *Soient u et v deux suites réelles, $l \in \mathbb{R}$.*

1. *Si u converge vers $l > 0$ (resp. $l < 0$) et v tend vers $+\infty$, alors le produit uv tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$),*
2. *Règle des signes : si $\eta_1, \eta_2 \in \{-1, +1\}$ sont deux signes quelconques, si u tend vers $(\eta_1)\infty$ et v tend vers $(\eta_2)\infty$, alors uv tend vers $(\eta_1\eta_2)\infty$.*
3. *Si u converge vers l et si v tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$), alors la suite des quotients $\frac{u}{v} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bien définie à partir d'un certain rang et est une suite convergente, de limite 0.*
4. *Soient u et v deux suites réelles. Si u est minorée et si v tend vers $+\infty$, alors $u + v$ tend vers $+\infty$. En particulier, si u est convergente et si v tend vers $+\infty$, alors $u + v$ tend vers $+\infty$.*

Démonstration. Soient u et v deux suites réelles.

1. Supposons que u converge vers $l > 0$ et v tend vers $+\infty$. Comme u converge vers $l > 0$ alors u est strictement positive à partir d'un certain rang : plus précisément, il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant \frac{l}{2} > 0$ (Proposition 2.32). Comme v tend vers $+\infty$, pour tout $A > 0$, il existe $n_1 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $v_n > \frac{2A}{l}$. Par conséquent, pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, (toutes les quantités étant positives) on a $u_n v_n \geqslant \frac{l}{2}\frac{2A}{l} = A$. Nous venons donc de montrer que uv tend vers $+\infty$. On laisse la preuve pour $l < 0$ à titre d'exercice.
2. On ne prouve pas tout ; regardons par exemple le cas où u tend vers $+\infty$ et v tend vers $-\infty$. Il s'agit de montrer que uv tend vers $-\infty$. Notons tout d'abord que sous cette hypothèse, par application du fait que v tend vers $-\infty$, il existe $n_1 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $v_n < -1 < 0$.
   Ensuite, pour tout $A > 0$, il existe $n_2 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_3$, $u_n > A$. Mais alors pour tout $n \geqslant \max(n_1, n_2)$, $u_n v_n < -A$ (car $v_n < -1$). Nous venons donc de montrer que la suite uv tend vers $-\infty$.
3. Supposons par exemple que v tend vers $+\infty$ (autre cas : exercice). Le fait que la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ est bien définie à partir d'un certain rang vient du fait que v tend vers $+\infty$ et est donc strictement positive à partir d'un certain rang. La suite u est convergente, donc bornée. Il suffit donc (Proposition 2.24) de montrer que la suite de terme général $\frac{1}{v_n}$ tend vers 0. Soit $\varepsilon > 0$. Comme v tend vers $+\infty$, il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n > \frac{1}{\varepsilon}$, ce qui implique que $\frac{1}{v_n} < \varepsilon$, ce qui prouve le résultat.

4. La suite u est minorée : il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant m$. Soit $A > 0$ arbitraire. Comme v tend vers $+\infty$, il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n > A - m$. Mais alors $u_n + v_n > A - m + m = A$. Donc $u + v$ tend vers $+\infty$. □

Remarque 2.36: 1. En ce qui concerne le cas $l = 0$ pour l'item 1. du résultat précédent, on ne peut rien conclure : $0 \times \infty$ est une forme indéterminée. Ainsi, pour $u_n = \frac{1}{n}$, u est une suite convergente qui tend vers 0 et :
   - pour $v_n = \sqrt{n}$ (qui définit une suite divergente), alors $u_n v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
   - pour $w_n = n$ (qui définit une suite divergente), alors $u_n w_n = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1$.
   - pour $z_n = n^2$ (qui définit une suite divergente), alors $u_n z_n = n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

2. Les cas "$\frac{0}{0}$" et "$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$" sont aussi des formes indéterminées : on laisse au lecteur construire des exemples simples où toutes limites sont possibles pour ces deux situations (on pourra utiliser par exemple les suites v, w, z ci-dessus, ainsi que leurs inverses).

Les tableaux ci-dessous résument les règles de calcul de limites concernant les suites somme et produit :

$u_n \xrightarrow{n\to\infty}$ \ $v_n \xrightarrow{n\to\infty}$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$l \in \mathbb{R}$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Forme Indéterminée
$-\infty$	$-\infty$	Forme Indéterminée	$-\infty$

FIGURE 2.2 – Limite de la suite de terme général $u_n + v_n$ selon la nature des suites u et v.

$u_n \xrightarrow{n\to\infty}$ \ $v_n \xrightarrow{n\to\infty}$	$l' < 0$	$l' = 0$	$l' > 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	ll'	0	ll'	$-\infty$	$+\infty$
$l = 0$	0	0	0	Forme Indéterminée	Forme Indéterminée
$l > 0$	ll'	0	ll'	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forme Indéterminée	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	Forme Indéterminée	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

FIGURE 2.3 – Limite de la suite de terme général $u_n v_n$ selon la nature des suites u et v.

2.2.5 Limites et inégalités ; théorème des gendarmes

Le premier résultat de ce paragraphe est que le passage à la limite entre suites convergentes conserve le sens des inégalités, mais transforme les inégalités strictes en inégalités larges :

Proposition 2.37: *Soient u et v deux suites réelles. On suppose les hypothèses suivantes :*

1. *u est convergente, de limite $l \in \mathbb{R}$,*

2. *v est convergente, de limite $l' \in \mathbb{R}$,*
3. *et pour tout $n \geqslant 0$ (ou au moins à partir d'un certain rang), on a $u_n \leqslant v_n$ (resp. $u_n < v_n$).*

Alors, dans ce cas, on peut passer à la limite dans l'inégalité : on a $l \leqslant l'$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_1 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $|u_n - l| < \varepsilon$. En particulier, pour $n \geqslant n_1$, on a $l - \varepsilon < u_n$. De même, il existe $n_2 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_2$, $|v_n - l'| < \varepsilon$ et en particulier, $v_n < l + \varepsilon$. Donc pour $n \geqslant \max(n_1, n_2)$, on a $l - \varepsilon < u_n < v_n < l' + \varepsilon$. En particulier, $l < l' + 2\varepsilon$. Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il vient $l \leqslant l'$. □

☹ **Attention!**

Il est absolument crucial de ne pas oublier les deux premières hypothèses de la Proposition 2.37 ! **On ne peut passer à la limite dans une inégalité uniquement si on s'est assuré au préalable que les deux suites convergent.**

☹ **Attention!**

L'inégalité stricte $u_n < v_n$ n'est pas nécessairement conservée à la limite : si $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1$, on a $u_n < v_n$ pour tout $n \geqslant 1$ mais il y a égalité des limites ($= 1$).

Proposition 2.38 (Théorème des gendarmes): *Soient u, v, w trois suites réelles. On suppose les hypothèses suivantes :*

1. *La suite u est convergente de limite $l \in \mathbb{R}$,*
2. *La suite w est convergente de limite $l' \in \mathbb{R}$,*
3. *On a l'égalité des limites $l = l'$,*
4. *Pour tout $n \geqslant 0$ (ou au moins à partir d'un certain rang), on a l'inégalité $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.*

Alors, les assertions suivantes sont vraies :

1. *La suite v est convergente,*
2. *Sa limite est la même que celle de u et w : $\lim_{n\to\infty} v_n = l$.*

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_1 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $|u_n - l| < \varepsilon$. En particulier, on a $l - \varepsilon < u_n$. De même, il existe $n_2 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_2$, $|w_n - l'| < \varepsilon$ et donc en particulier $w_n < l' + \varepsilon$. En utilisant l'inégalité de l'énoncé et le fait que $l = l'$, on a donc pour $n \geqslant \max(n_1, n_2)$,

$$l - \varepsilon < u_n \leqslant v_n \leqslant w_n < l + \varepsilon.$$

C'est exactement dire que v est convergente, de limite l. □

Exemple 2.39: Soit $u_n = \frac{n+(-1)^n}{3n+2}$. Alors $\frac{n-1}{3n+2} \leqslant u_n \leqslant \frac{n+1}{3n+2}$. Or $\frac{n-1}{3n+2}$ définit une suite convergente de limite $\frac{1}{3}$. De plus $\frac{n+1}{3n+2}$ définit une suite convergente de même limite $\frac{1}{3}$. Donc par théorème des gendarmes, la suite u est convergente, de limite $\frac{1}{3}$.

Proposition 2.40 (Théorème des gendarmes bis): *Soient u et v deux suites réelles. On suppose que les deux assertions suivantes sont vraies :*

1. *Pour tout $n \geqslant 0$ (ou au moins à partir d'un certain rang), $u_n \leqslant v_n$,*
2. *u tend vers $+\infty$.*

Alors v tend vers $+\infty$.

Démonstration. Soit $A > 0$, il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n > A$. Mais alors $v_n \geqslant u_n > A$ et donc v tend vers $+\infty$. □

Exemple 2.41: Soit $u_n = \frac{n^2+\sin(n)+3}{4n+1} + \cos(n)$. On a pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant \frac{n^2+2}{4n+1} - 1 := v_n$ avec $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Ainsi $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

2.2.6 Le cas des suites monotones ; suites adjacentes

On s'intéresse ici au cas des suites monotones. Le résultat fondamental de ce paragraphe est le suivant :

Proposition 2.42: *Soit u une suite réelle. On suppose que u est croissante. Alors, deux cas sont possibles :*

— *soit u est majorée, auquel cas u est convergente. Dans ce cas, si on note l la limite de u, on a $u_n \leqslant l$ pour tout $n \geqslant 0$.*

— *soit u n'est pas majorée, auquel cas u tend vers $+\infty$.*

Démonstration. Soit u suite croissante. On suppose que u est majorée. C'est exactement dire que $u(\mathbb{N}) = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$ (et bien sûr non vide). Par Propriété de la borne supérieure, $u(\mathbb{N})$ admet une borne supérieure, notée S. Nous allons montrer que u est convergente, de limite S. Par propriété caractéristique de la borne supérieure (Théorème 1.21), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geqslant 0$, tel que $S - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant S$. Mais alors, pour $n \geqslant n_0$, comme u est croissante, il vient $S - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant S$ (la dernière inégalité vient du fait que S est un majorant de $u(\mathbb{N})$). Nous venons de prouver que u est convergente, de limite S. De plus, pour tout $n \geqslant 0$ et $p \geqslant 0$, la croissance de la suite et une récurrence immédiate montre que $u_n \leqslant u_{n+p}$. Passant à la limite pour $p \to \infty$ (ce qui est possible car u_n ne dépend pas de p et $(u_{n+p})_{p \geqslant 0}$ est une suite convergente, de même limite que u), on obtient $u_n \leqslant l$.

Traitons maintenant le cas où u n'est pas majorée : pour tout $A > 0$, A n'étant pas un majorant de $u(\mathbb{N})$, il existe donc $n_0 \geqslant 0$ tel que $A < u_{n_0}$. Comme u est croissante, on a alors pour tout $n \geqslant n_0$, $A < u_{n_0} \leqslant u_n$. Ceci étant vrai pour tout $A > 0$, on vient de montrer que u tend vers $+\infty$. □

Exemple 2.43: La suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est convergente. En effet, la suite u est croissante (c'est une somme de termes positifs). De plus,

$$u_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2 + 1 - \frac{1}{n} \leqslant 3.$$

Ainsi u est majorée. Par le résultat précédent, u est convergente. On note e sa limite. Le nombre $e \approx 2,718$ est le nombre d'Euler, qui est tel que $\exp(a) = e^a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Le résultat précédent a un symétrique naturel à propos des suites décroissantes :

Proposition 2.44: *Soit u une suite réelle décroissante. Deux cas sont alors possibles :*

— *soit u est minorée, auquel cas u est convergente. Dans ce cas, si on note l la limite de u, on a $u_n \geqslant l$ pour tout $n \geqslant 0$.*

— *soit u n'est pas minorée, auquel cas u tend vers $-\infty$.*

Démonstration. Il suffit de poser $v_n = -u_n$ et d'appliquer le résultat précédent à la suite croissante v. □

Remarque 2.45: Une caractéristique majeure des deux résultats précédents est de montrer l'existence d'une limite pour une suite (croissante ou décroissante) *sans même connaitre la limite a priori* !

Une application des résultats précédents sur les suites monotones concerne la notion de suites adjacentes :

Définition 2.46: *Soient u et v deux suites réelles. On dira que les suites u et v sont* adjacentes *si les assertions suivantes sont vraies :*

1. *u est croissante*
2. *v est décroissante*
3. *la différence $(v_n - u_n)$ tend vers 0 quand $n \to \infty$.*

Proposition 2.47: *Soient u et v deux suites réelles. Si u et v sont adjacentes, alors les deux suites sont convergentes, de même limite $l \in \mathbb{R}$. De plus, on a pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant l \leqslant v_n$.*

Démonstration. Soient u et v deux suites adjacentes. Prouvons d'abord que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant v_n$: en effet, la suite de terme général $v_n - u_n$ est décroissante (comme somme de deux suites décroissantes v et $-u$) et convergente vers 0 par hypothèse. Elle est donc minorée par sa limite : $v_n - u_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 0$ et donc $v_n \geqslant u_n$. Par conséquent, par croissance de u et décroissance de v, on a pour tout $n \geqslant 0$, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. Donc u est croissante, majorée par v_0 donc convergente, de limite $l \in \mathbb{R}$. De plus v est décroissante, minorée par u_0, donc convergente de limite $l' \in \mathbb{R}$. Reste à montrer que $l = l'$: comme u et v convergent, la suite de terme général $(v_n - u_n)$ converge aussi vers $l' - l$. Or par hypothèse, cette limite vaut 0. Donc $l = l'$. Enfin, comme u est croissante, elle est majorée par sa limite : $u_n \leqslant l$ pour tout $n \geqslant 0$. De même, v décroissante implique $l \leqslant v_n$ pour tout $n \geqslant 0$. □

Exercice 2.48 (Moyenne arithmético-géométrique): Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$ et soit les suites u et v telles que $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$. Montrer que u et v sont adjacentes de limite commune $L(a, b)$ telle que $\sqrt{ab} \leqslant L(a, b) \leqslant \frac{a+b}{2}$.

2.3 Comparaison asymptotique de suites ; notations de Landau

La motivation de ce paragraphe est de fournir des outils/notations permettant de comparer deux suites quand $n \to \infty$.

Définition 2.49: *Soient u et v deux suites réelles.*

1. *On dit que u_n est négligeable devant v_n pour $n \to \infty$ (et on note $u_n =_{n\to\infty} o(v_n)$) s'il existe une suite $(\eta_n)_{n\geqslant 0}$ qui tend vers 0 pour $n \to \infty$ telle que $u_n = \eta_n v_n$, à partir d'un certain rang.*
2. *On dit que u_n est équivalente à v_n pour $n \to \infty$ (et on note $u_n \sim_{n\to\infty} v_n$) s'il existe une suite $(\eta_n)_{n\geqslant 0}$ qui tend vers 1 pour $n \to \infty$ telle que $u_n = \eta_n v_n$, à partir d'un certain rang.*

Remarque 2.50: Il est possible de réécrire la notion de convergence d'une suite à l'aide de ces notations : on a ainsi

$$u_n =_{n\to\infty} o(1) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

et

$$u_n \sim_{n\to\infty} l \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = l, \quad \text{si } l \neq 0.$$

Attention!
L'équivalence précédente est grossièrement fausse pour $l = 0$: une suite équivalente à 0 est une suite stationnaire (égale à 0 à partir d'un certain rang). Par exemple, $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, mais $\frac{1}{n}$ n'est pas équivalente à 0 !

Proposition 2.51 (Définition équivalente dans le cas où $v_n \neq 0$ a.p.c.r.): *Soient u et v deux suites réelles telle que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. Alors*

1. *$u_n =_{n\to\infty} o(v_n)$ pour $n \to \infty$ si et seulement si la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ (définie a.p.c.r.) tend vers 0 pour $n \to \infty$.*
2. *$u_n \sim_{n\to\infty} v_n$ pour $n \to \infty$ si et seulement si la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ (définie a.p.c.r.) tend vers 1 pour $n \to \infty$.*

Démonstration. C'est évident, par division par $v_n \neq 0$ dans la définition précédente. □

Remarque 2.52: La Définition 2.49 a été écrite dans le cas général où v peut s'annuler. Cependant, c'est bien la Proposition 2.51 qu'il faut retenir dans les cas pratiques. Le principe est le suivant : pour étudier la proximité asymptotique des suites u et v, plutôt que d'étudier la différence $v_n - u_n$ (et de la comparer à la valeur 0), on regarde ici le rapport $\eta_n := \frac{u_n}{v_n}$ (et on le compare à la valeur 1).

Attention!
Le fait que $u_n \sim v_n$ (c'est-à-dire que le rapport $\frac{u_n}{v_n}$ tend vers 1) n'implique pas a priori que la différence $u_n - v_n$ tend vers 0 ! Contre-exemple : $n \sim n+1$ mais $(n+1) - n = 1 \not\to 0$. La seule chose qu'on puisse dire en toute généralité est que la différence $v_n - u_n$ est négligeable devant l'un ou l'autre des termes.

Proposition 2.53: *On a l'équivalence*

$$u_n \sim_{n\to\infty} v_n \Leftrightarrow u_n - v_n =_{n\to\infty} o(v_n).$$

Démonstration. Procédons par équivalence

$$\begin{aligned} u_n \sim_{n\to\infty} v_n &\Leftrightarrow \exists(\theta_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \exists n_0 \geqslant 0, \forall n \geqslant n_0, u_n = \theta_n v_n \text{ et } \theta_n \to_{n\to\infty} 1, \\ &\Leftrightarrow \exists(\theta_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \exists n_0 \geqslant 0, \forall n \geqslant n_0, u_n - v_n = (\theta_n - 1)v_n \text{ et } \theta_n \to_{n\to\infty} 1, \\ &\Leftrightarrow \exists(\eta_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \exists n_0 \geqslant 0, \forall n \geqslant n_0, u_n - v_n = \eta_n v_n \text{ et } \eta_n \to_{n\to\infty} 0, \end{aligned}$$

(prendre $\eta_n = \theta_n - 1$ dans la dernière équivalence). ☐

Attention!
Pour une suite donnée, il n'y a pas unicité d'un équivalent : $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim_{n\to\infty} 1$ mais aussi $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{2n^2}$. En fait, tout développement de Taylor de la fonction cos à un ordre arbitraire fournit un équivalent de $\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ quand $n \to \infty$. Plus l'ordre du développement sera élevé, plus la précision de l'équivalent fourni sera grande.

Remarque 2.54 (Relation de domination): On peut définir une troisième relation entre deux suites $(u_n)_{n\,\geqslant\,1}$ et $(v_n)_{n\,\geqslant\,1}$: on dit que u_n est **dominée** par v_n pour $n \to \infty$ (et on note $u_n =_{n\to\infty} O(v_n)$) s'il existe une suite $(\eta_n)_{n\,\geqslant\,0}$ **bornée** telle que $u_n = \eta_n v_n$, à partir d'un certain rang. Dans le cas où (v_n) ne s'annule pas, $u_n =_{n\to\infty} O(v_n)$ pour $n \to \infty$ si et seulement si la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ est bornée.

2.3.1 Règles de calculs

Proposition 2.55 (Règles de calculs avec les "o"): *Soient u, v, w trois suites réelles.*

1. *Transitivité des "o" :* $u_n =_{n\to\infty} o(v_n),\ v_n =_{n\to\infty} o(w_n) \Rightarrow u_n =_{n\to\infty} o(w_n)$,
2. *Stabilité des "o" par addition :* $u_n =_{n\to\infty} o(v_n),\ w_n =_{n\to\infty} o(v_n) \Rightarrow u_n + w_n =_{n\to\infty} o(v_n)$,
3. *Stabilité des "o" par produit :* $u_n =_{n\to\infty} o(v_n), \Rightarrow u_n w_n =_{n\to\infty} o(v_n w_n)$.

Démonstration. Laissé à titre d'exercice, il suffit d'écrire les définitions. On utilisera en particulier le fait qu'une suite qui tend vers 0 est bornée et que le produit de deux suites qui tendent vers 0 tend vers 0. ☐

Proposition 2.56 (Règles de calculs avec les "∼"): *Soient u, v, w, t quatre suites réelles.*

1. *Réflexivité :* $u_n \sim_{n\to\infty} u_n$,
2. *Symétrie :* $u_n \sim_{n\to\infty} v_n \Rightarrow v_n \sim_{n\to\infty} u_n$,
3. *Transitivité :* $u_n \sim_{n\to\infty} v_n,\ v_n \sim_{n\to\infty} w_n \Rightarrow u_n \sim_{n\to\infty} w_n$,
4. *Passage à l'inverse :* $u_n \sim_{n\to\infty} v_n,\ u_n, v_n \neq 0$ *a.p.c.r.* $\Rightarrow \frac{1}{u_n} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{v_n}$,
5. *Passage à la puissance :* $u_n \sim_{n\to\infty} v_n,\ u_n \Rightarrow u_n^\alpha \sim_{n\to\infty} v_n^\alpha$, *si* $\alpha \in \mathbb{R}$ *est fixé*
6. *Produit terme à terme :* $u_n \sim_{n\to\infty} v_n,\ w_n \sim_{n\to\infty} t_n \Rightarrow u_n w_n \sim_{n\to\infty} v_n t_n$,

Démonstration. Laissé à titre d'exercice. On rappelle notamment le résultat suivant : si $\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ alors η_n est non nul a.p.c.r. et $\frac{1}{\eta_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. □

Attention!
On ne peut pas additionner deux équivalents : pour $u_n = n^2 + n$ et $v_n = -n^2$, on a

$$u_n \sim_{n\to\infty} n^2, \quad \text{et } v_n \sim_{n\to\infty} -n^2$$

mais

$$u_n + v_n = n \not\sim n^2 - n^2 = 0.$$

Proposition 2.57: *Négligeabilités classiques : soit $a > 0$ et $r > 1$. Alors :*

1. $r^n = o(n!)$,
2. $n^a = o(r^n)$,
3. $\ln(n) = o(n^a)$

De plus, les puissances se rangent de manière croissante :

$$n^\alpha =_{n\to\infty} o(n^\beta), \quad \textit{si } \alpha < \beta.$$

Equivalences classiques : soient u une suite qui tend vers 0 et $\alpha \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Alors,

$$\ln(1+u_n) \sim_{n\to\infty} u_n,\ e^{u_n} - 1 \sim_{n\to\infty} u_n,\ (1+u_n)^\alpha - 1 \sim_{n\to\infty} \alpha u_n,$$

$$\sin(u_n) \sim_{n\to\infty} u_n,\ \cos(u_n) \sim_{n\to\infty} 1 - \frac{u_n^2}{2}.$$

Démonstration. On ne prouve ici que la première partie, la seconde sur les équivalents se déduit des développements limités usuels vus en L1.

1. Ecrivons $\frac{r^n}{n!} = \prod_{k=1}^n \frac{r}{k}$. La suite $\left(\frac{r}{k}\right)_{k\geqslant 1}$ tend vers 0 : il existe donc $k_0 \geqslant 1$ tel que pour tout $k \geqslant k_0$, $\frac{r}{k} \leqslant \frac{1}{2}$. Donc pour $n \geqslant k_0$,

$$0 \leqslant \frac{r^n}{n!} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{k_0} \frac{r}{k}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k_0}.$$

Or, la suite $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k_0}\right)_{n\geqslant k_0}$ tend vers 0 (Exercice 2.22), d'où le résultat par théorème des gendarmes.

2. Posons $r = 1 + h$, avec $h > 0$ et écrivons la formule du binôme de Newton :
$$r^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k.$$
Ainsi, pour tout $k = 1, \ldots, n$, $r^n \geqslant \binom{n}{k} h^k$. Fixons $k = \lfloor a \rfloor + 1$. Pour tout $n > 2k$, on a $n - l \geqslant n - k + 1 > \frac{n}{2}$ pour tout $l = 0, \ldots, k-1$, donc on peut minorer le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ comme suit
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} > \left(\frac{n}{2}\right)^k \frac{1}{k!}.$$
Ainsi, pour tout $n > 2k$,
$$0 \leqslant \frac{n^a}{r^n} < \left(\frac{2^k k!}{h^k}\right) \left(\frac{1}{n}\right)^{k-a}$$
ce qui tend vers 0 quand $n \to \infty$, car $k > a$. On conclut par le théorème des gendarmes.
3. Pour tout $n > 0$, posons $k_n = \lfloor \ln(n) \rfloor$ et $\alpha_n = \ln(n) - k_n$. La suite $(k_n)_{n>0}$ est une suite d'entiers qui tend vers $+\infty$, car $k_n > \ln(n) - 1$. Les réels α_n sont compris entre 0 et 1. Ecrivons
$$\frac{\ln(n)}{n^a} = \frac{k_n + \alpha_n}{e^{a(k_n + \alpha_n)}} \leqslant \frac{k_n}{(e^a)^{k_n}} + \frac{1}{(e^a)^{k_n}}.$$
Le premier terme tend vers 0 (car nous venons de voir que la suite $\left(\frac{n}{r^n}\right)_{n \geqslant 0}$ tend vers 0 quand $r > 1$). De même, le second terme tend aussi vers 0. D'où le résultat par théorème des gendarmes.

□

Exemple 2.58: Il est important d'avoir en tête l'échelle des infiniment petits (où on note $u_n \ll v_n$ à la place de $u_n = o(v_n)$) :
$$\frac{1}{n!} \ll \frac{1}{10^n} \ll \frac{1}{2^n} \ll \frac{1}{n^2} \ll \frac{1}{n} \ll \frac{1}{\sqrt{n}} \ll \frac{1}{\ln(n)} \ll \frac{1}{\ln(\ln(n))} \ll 1, \tag{2.3.1}$$
et celle des infiniment grands :
$$1 \ll \ln(\ln(n)) \ll \ln(n) \ll \sqrt{n} \ll n \ll n^2 \ll 2^n \ll 10^n \ll n!. \tag{2.3.2}$$

Exemple 2.59: Déterminons un équivalent de $u_n = (n^4+1)^{\frac{1}{4}} - n$: on écrit $u_n = n(1 + \frac{1}{n^4})^{\frac{1}{4}} - n$. En utilisant $\left(1 + \frac{1}{n^4}\right)^{\frac{1}{4}} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^4}$, on obtient
$$u_n = n\left(1 + \frac{1}{4n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) - n = \frac{1}{4n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^3}.$$

Exemple 2.60: Déterminons un équivalent de $u_n = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$: on a
$$u_n = n\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = n \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

Or, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$, et donc,

$$u_n = n\exp\left(-n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = ne^{-1}e^{o(1)}.$$

Or, $e^{o(1)}$ est une suite qui tend vers 1 pour $n\to\infty$ et donc $u_n \sim_{n\to\infty} \frac{n}{e}$.

Attention!
On fera très attention avec la manipulation des équivalents avec la fonction exponentielle : on a en effet

$$e^{u_n} \sim e^{v_n} \Leftrightarrow \frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} \to 1 \Leftrightarrow e^{u_n-v_n} \to 1 \Leftrightarrow u_n - v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

En particulier, ce n'est pas parce que $u_n \sim v_n$ qu'on a $e^{u_n} \sim e^{v_n}$! Par exemple $u_n = n+1$ est équivalent à $v_n = n$ mais e^n n'est pas équivalent à e^{n+1}.

2.3.2 Détermination de limites

Proposition 2.61 (Equivalence et limites): *Soient u et v deux suites réelles et $l \in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$. On suppose que $u_n \sim_{n\to\infty} v_n$. On a alors l'équivalence*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} v_n = l$$

Démonstration. Il suffit de prouver une implication, vu que les deux suites jouent des rôles symétriques. Supposons par exemple que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l \in \mathbb{R}$ (on laisse les autres cas à titre d'exercice). Comme $u_n \sim_{n\to\infty} v_n$, il existe une suite η_n qui tend vers 1 pour $n\to\infty$ telle que $u_n = \eta_n v_n$. Ainsi, $v_n = \frac{1}{\eta_n}u_n$, produit d'une suite qui tend vers 1 et d'une autre qui tend vers l. Donc v est convergente, de limite l. □

Exemple 2.62: En ce qui concerne les Exemples 2.59 et 2.60, on a $(n^4+1)^{\frac{1}{4}} - n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $\frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Exemple 2.63: Déterminons la limite de $u_n = n^2((n+1)^{1/n} - n^{1/n})$: on a

$$(n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{n}}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right) = e^{\frac{1}{n}\ln(n)}\left(\exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)-1\right).$$

En utilisant $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$, on obtient

$$(n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(n)}\left(\exp\left(\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1\right).$$

De plus, en utilisant $e^{v_n}-1 \sim_{n\to\infty} v_n$, pour une suite $v_n = \frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ qui tend vers 0 quand $n\to\infty$, on a

$$(n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(n)}\left(\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Il reste à remarquer que $e^{\frac{1}{n}\ln(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ pour obtenir

$$u_n = n^2 e^{\frac{1}{n}\ln(n)} \left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim_{n\to\infty} 1.$$

En particulier, la suite u est convergente, de limite 1.

2.4 Notion de suite extraite ; valeur d'adhérence

2.4.1 Définitions et premiers exemples

Intuitivement, la notion de suite extraite d'une suite u consiste à sélectionner des termes de la suite initiale et ce, en choisissant les indices sélectionnés de façon croissante.

Définition 2.64: *On appelle* extraction *toute fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui est strictement croissante.*

Exemple 2.65: Les fonctions suivantes sont des extractions : $\varphi(n) = n$, $\varphi(n) = 2n$, $\varphi(n) = 2n+1$, $\varphi(n) = n^2$, $\varphi(n) = p_n$ (où p_n est le $n$ième entier premier), etc.

Définition 2.66: *Soit u une suite réelle. On appelle suite extraite de u (ou encore appelée* sous-suite de u*), toute suite de terme général du type $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n \geqslant 0}$, où φ est une extraction.*

Exemple 2.67: Soit (u_n) une suite réelle. Alors les suites suivantes sont des sous-suites de (u_n) :

1. $u_0, u_2, u_4, u_6, \dots, u_{2n}, \dots$ est la suite extraite (u_{2n}) correspondant à l'extraction $\varphi(n) = 2n$ (on prend un terme sur deux, ceux d'indices pairs),
2. $u_1, u_3, u_5, u_7, \dots, u_{2n+1}, \dots$ est la suite extraite (u_{2n+1})correspondant à l'extraction $\varphi(n) = 2n+1$ (on prend un terme sur deux, ceux d'indices impairs),
3. $u_0, u_1, u_4, u_9, u_{16}, \dots, u_{n^2}, \dots$ est la suite extraite (u_{n^2})correspondant à l'extraction $\varphi(n) = n^2$ (on ne considère que les termes dont les indices sont des carrés parfaits),
4. $u_2, u_3, u_5, u_7, u_{11}, u_{13}, u_{17}, \dots, u_{p_n}, \dots$ est la suite extraite (u_{p_n})correspondant à l'extraction $\varphi(n) = p_n$ (on ne considère que les termes dont les indices sont des nombres premiers),
5. etc. (n'importe quelle fonction $n \mapsto \varphi(n)$ strictement croissante fournit une sous-suite).

Proposition 2.68: *Soit φ une extraction. Alors pour tout $n \geqslant 0$, $\varphi(n) \geqslant n$.*

Démonstration. Se prouve aisément par récurrence. □

Proposition 2.69: *Si φ et ψ sont deux extractions, alors la composée $\varphi \circ \psi$ est encore une extraction.*

Démonstration. La composée de deux fonctions strictement croissantes est strictement croissante. □

Remarque 2.70: Que se passe-t-il quand on extrait une sous-suite d'une sous-suite ? Par définition, une sous-suite de u est du type $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n \geqslant 0}$. Posons $v_n = u_{\varphi(n)}$ et extrayons de nouveau une sous-suite de v : une telle sous-suite s'écrit donc $\left(v_{\psi(n)}\right)_{n \geqslant 0}$ pour une seconde extraction ψ. Ainsi, une sous-suite d'une sous-suite de u s'écrit donc $\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)_{n \geqslant 0} = \left(u_{\varphi\circ\psi(n)}\right)_{n \geqslant 0}$.

En conclusion : prendre une première sous-suite (via l'extraction φ) puis une sous-suite de la sous-suite (via l'extraction ψ) revient à utiliser l'extraction $\varphi \circ \psi$ (**Attention à l'ordre !**).

Proposition 2.71: *Soit u une suite réelle convergente. Alors toute suite extraite de u est aussi convergente, de même limite.*

Démonstration. Soit u une suite réelle convergente (vers $l \in \mathbb{R}$) et φ une extraction. Considérons la suite extraite v définie par $v_n = u_{\varphi(n)}$ pour $n \geqslant 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - l| < \varepsilon$. Or, pour tout $n \geqslant n_0$, $\varphi(n) \geqslant n \geqslant n_0$. Donc en particulier, $\left|u_{\varphi(n)} - l\right| = |v_n - l| < \varepsilon$. Donc v converge vers l. □

Un corollaire de ce résultat est le résultat très utile suivant :

Proposition 2.72: *Soit u une suite réelle qui admet deux extractions distinctes convergeant vers des limites différentes. Alors u n'est pas convergente.*

Démonstration. Une telle suite ne saurait être convergente, puisque sinon, toute suite extraite convergerait vers la même limite. □

Exemple 2.73: Ce résultat est extrêmement utile pour montrer qu'une suite ne converge pas. Par exemple, revenons à l'exemple $u_n = (-1)^n$. La suite extraite $u_{2n} = (-1)^{2n}$ est constante, égale à 1 donc converge vers 1. La suite extraite $u_{2n+1} = (-1)^{2n+1}$ est constante, égale à -1 donc converge vers -1. Donc u ne converge pas.

Définition 2.74: *Soit u une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$. On dit que l est une valeur d'adhérence de u si l est la limite d'une sous-suite de u.*

Exemple 2.75:
1. Si u est une suite convergente, alors sa seule valeur d'adhérence est sa limite (c'est la Proposition 2.71 reformulée !).
2. Les valeurs d'adhérences de $u_n = (-1)^n$ sont $+1$ et -1,
3. La suite définie par $u_n = n(-1)^n$ n'a aucune valeur d'adhérence.
4. La suite donnée par $u_n = n(1 + (-1)^n)$ a une unique valeur d'adhérence, mais ne converge pas.
5. La suite définie par $u_{3n} = n \sin\left(\frac{1}{3n}\right)$, $u_{3n-1} = \frac{1}{3n-1}$, $u_{3n-2} = 3n - 2$ a pour valeur d'adhérences $\frac{1}{3}$ et 0.

2.4.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Revenons à l'exemple de la suite $((-1)^n)_{n \geqslant 0}$: cette suite est un exemple de suite bornée qui n'est pas convergente (voir Exemple 2.73). Par contre, cette suite admet au moins une sous-suite qui converge, par exemple la suite extraite $(u_{2n})_{n \geqslant 1}$, ou bien encore la sous-suite (u_{2n+1}) (mais en fait plien d'autres !). Ce résultat est en fait général, vrai pour toute suite bornée : il s'agit du théorème suivant, qui est un des théorèmes fondamentaux de l'analyse :

Théorème 2.76 (Bolzano-Weierstrass): *Toute suite réelle bornée admet une sous-suite qui converge.*

Démonstration. Soit u une suite bornée. Il existe donc $a < b$ deux réels tels que pour tout $n \geqslant 0$, $a \leqslant u_n \leqslant b$. On va construire une suite de sous-intervalles $I_n = [a_n, b_n]$ de $[a, b]$, $n \geqslant 0$, qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $(I_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante pour l'inclusion (ce sont des segments emboités),
2. la longueur de I_n est égale à $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$,
3. chaque I_n contient des valeurs u_m de la suite u pour une infinité de m.

On construit cette suite par récurrence. Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et $I_0 = [a, b]$. Le principe est de procéder par dichotomie : coupons l'intervalle $[a, b]$ en deux en considérant les sous-intervalles $[a, \frac{a+b}{2}]$ et $[\frac{a+b}{2}, b]$. Parmi ces deux intervalles (de longueur $\frac{b-a}{2}$), il en existe au moins qui contient des valeurs u_m pour une infinité d'indices m (sinon, les deux intervalles, et donc la réunion $[a, b]$, ne contiendrait des u_m pour un nombre fini d'indices m, ce qui est absurde). S'il s'agit de $[a, \frac{a+b}{2}]$, on définit $a_1 = a$ et $b_1 = \frac{a+b}{2}$ et si c'est l'autre, on pose $a_1 = \frac{a+b}{2}$ et $b_1 = b$ et on définit $I_1 = [a_1, b_1]$.

On itère ensuite le processus : supposons avoir construit $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ tels que $a \leqslant a_j \leqslant a_{j+1} \leqslant b_{j+1} \leqslant b_j \leqslant b$, $(b_j - a_j) = \frac{b-a}{2^j}$ et pour tout $i = 0, \ldots, n$ l'intervalle $[a_j, b_j]$ est tel que $u_m \in [a_j, b_j]$ pour une infinité d'indices m. On découpe alors l'intervalle en deux : $[a_n, b_n] = \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right] \cup \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]$. L'un au moins d'entre eux contient des u_m pour une infinité d'indices m. On note alors $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$ cet intervalle. Par construction, on a $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$ et $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$.

Nous avons construit deux suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$ et $(b_n)_{n \geqslant 0}$ dont l'une est croissante, l'autre décroissante, telle que $0 \leqslant b_n - a_n \leqslant \frac{b-a}{2^n}$. Par théorème des gendarmes, $b_n - a_n \to 0$ quand $n \to \infty$. Les deux suites sont donc adjacentes. Elles convergent donc toutes deux vers le même $l \in \mathbb{R}$ (Proposition 2.47).

Construisons maintenant une extraction de u qui converge vers l : posons $\varphi(0) = 0$, puis pour tout $n \geqslant 0$, posons $\varphi(n+1)$ le plus petit entier m strictement plus grand que $\varphi(n)$ tel que $u_m \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$ (c'est possible, puisqu'il existe une infinité de m pour lesquels u_m est dans cet intervalle). Par construction, on a $a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$ et donc par théorème des gendarmes, la sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \geqslant 0}$ converge vers l. □

Nous avons vu qu'une suite convergente est bornée et que la réciproque est fausse en toute généralité. Le résultat suivant donne une réciproque sous hypothèse supplémentaire d'unicité d'une valeur d'adhérence.

Proposition 2.77: *Soit u une suite réelle. Si u est bornée et a une unique valeur d'adhérence, alors u est convergente.*

Démonstration. Prouvons-le par l'absurde : u n'est pas convergente. Soit $l \in \mathbb{R}$ l'unique valeur d'adhérence de u. Par hypothèse u ne converge pas vers l donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n_0 \geqslant 0$, il existe $n \geqslant n_0$ tel que $|u_n - l| \geqslant \varepsilon$. En particulier, il existe une extraction de u telle que $\left|u_{\varphi(n)} - l\right| \geqslant \varepsilon$. Cette extraction étant bornée, on peut en extraire une sous-suite qui converge (Bolzano-Weierstrass). Sa limite est en particulier une valeur d'adhérence de u donc nécessairement l. Absurde car pour une telle suite $\left|u_{\varphi(n)} - l\right| \geqslant \varepsilon$. Donc u est convergente. □

2.4.3 Principe d'extraction simultanée et extraction diagonale (♠)

Le cadre de ce paragraphe est le suivant : soient **deux** suites **bornées** $(x_n)_{n \geqslant 1}$ et $(y_n)_{n \geqslant 1}$. Comme $(x_n)_{n \geqslant 1}$ est bornée, par théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extraction φ telle que $(x_{\varphi(n)})_{n \geqslant 1}$ est convergente. De même, $(y_n)_{n \geqslant 1}$ est bornée, donc il existe une extraction ψ telle que $(y_{\psi(n)})_{n \geqslant 1}$ est convergente. Le problème que l'on soulève ici est le suivant :

☹ **Attention!**
Il n'y a absolument aucune raison que l'extraction φ qui fait converger la suite $(x_{\varphi(n)})_{n \geqslant 1}$ soit la même que l'extraction ψ qui fait converger la suite $(y_{\psi(n)})_{n \geqslant 1}$!

Un contre-exemple est le suivant : soit $x_n = 1$ si n est multiple de 3 et $x_n = 0$ sinon et $y_n = 1$ si n est multiple de 2 et $y_n = 0$ sinon. Alors la sous-suite $(x_{3n})_{n \geqslant 1}$ est constante égale à 1 donc convergente. Par ailleurs, pour tout p entier, selon que $n = 2p$, $y_{3n} = y_{6p} = 1$ ou si $n = 2p+1$, $y_{3n} = y_{6p+3} = 0$. Donc (y_{3n}) n'est pas convergente. Une extraction ψ qui fait converger $(y_\psi(n))_{n \geqslant 1}$ est (par exemple) $\psi(n) = 2n$.

Or, dans de nombreuses situations, il est nécessaire de faire en sorte d'avoir une extraction ρ qui **simultanément** fait en sorte que les deux suites $(x_{\rho(n)})_{n \geqslant 1}$ et $(y_{\rho(n)})_{n \geqslant 1}$ soient toutes les deux convergentes. Insistons un peu : on aimerait être capable de sélectionner un ensemble croissants d'indices $\{\rho(n), n \geqslant 1\}$ (**commun aux deux suites**) de telle sorte que **simultanément** les suites $(x_{\rho(n)})_{n \geqslant 1}$ et $(y_{\rho(n)})_{n \geqslant 1}$ convergent. Ceci est en fait possible :

Proposition 2.78 (Principe d'extraction simultanée): *Soient deux suites $(x_n)_{n \geqslant 1}$ et $(y_n)_{n \geqslant 1}$ bornées. Alors il est possible de construire une extraction ρ de telle sorte que* ***simultanément****, les sous-suites $(x_{\rho(n)})_{n \geqslant 1}$ et $(y_{\rho(n)})_{n \geqslant 1}$ convergent.*

☹ **Attention!**
Même si c'est la même extraction qui convient pour x et y, les limites des deux sous-suites $(x_{\rho(n)})_{n \geqslant 1}$ et $(y_{\rho(n)})_{n \geqslant 1}$ sont, bien sûr, a priori différentes !

Proof of Proposition 2.78. Le principe de la preuve repose sur un va-et-vient entre les suites x et y (voir la Figure 2.4, page 50).

Etape 1 (Figure 2.4, (b)) : commençons par considérer la suite x. Comme la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ est bornée, par théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extraction φ telle que la suite $(x_{\varphi(n)}))_{n \geqslant 1}$ converge.

Etape 2 (Figure 2.4, (c)) : on sélectionne les termes de la suite y **selon les mêmes indices** $\varphi(n)$: on ne considère plus que la sous-suite $(y_{\varphi(n)})_{n \geqslant 1}$. Soyons bien clair ici : il n'y a aucune raison pour que la sous-suite $(y_{\varphi(n)})_{n \geqslant 1}$ converge !

Etape 3 (Figure 2.4, (d)) : par contre, la suite $(y_{\varphi(n)})_{n \geqslant 1}$ est bornée (c'est une suite extraire de la suite y qui est bornée). Par une seconde application du Théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une seconde extraction ψ telle que la suite $(y_{\varphi(\psi(n))})_{n \geqslant 1}$ converge.

Etape 4 (Figure 2.4, (e)) : la dernière étape est alors de revenir à la suite x. Si maintenant on considère la sous-suite $(x_{\varphi(\psi(n))})_{n \geqslant 1}$, c'est une suite extraite de la suite $(x_{\varphi(n)})_{n \geqslant 1}$. Or cette suite converge, d'après la première étape. Donc elle converge aussi (Proposition 2.71).

Conclusion : si on pose $\rho = \varphi \circ \psi$, c'est une extraction construite de telle sorte que $(x_{\rho(n)})_{n \geqslant 1}$ et $(y_{\rho(n)})_{n \geqslant 1}$ convergent simultanément.

□

La même procédure fonctionne pour un nombre fini de suites :

Proposition 2.79 (Extraction simultanée - bis): *Soit $k \geqslant 1$ fixé et soit $(x_n^{(1)})_{n \geqslant 1}$, $(x_n^{(2)})_{n \geqslant 1}, \ldots, (x_n^{(k)})_{n \geqslant 1}$, k suites telle que chacune d'entre elle est bornée. Alors, il existe une extraction ρ, commune aux k suites, telle que pour tout $i = 1, \ldots, k$, $(x_{\rho(n)}^{(k)})$ est convergente.*

Proof of Proposition 2.79. La preuve est seulement esquissée, les détails sont laissés à titre d'exercice. La première suite est bornée, donc il existe φ_1 telle que $(x_{\varphi_1(n)}^{(1)})_{n \geqslant 1}$ converge. On applique arbitrairement la même extraction aux autres suites et on considère la seconde suite $(x_{\varphi_1(n)}^{(2)})_{n \geqslant 1}$. Cette suite est bornée, donc il existe une extraction φ_2 telle que $(x_{\varphi_1(\varphi_2(n))}^{(2)})_{n \geqslant 1}$ converge. On applique l'extraction $\varphi_1 \circ \varphi_2$ aux autres suites, etc. Ainsi, l'extraction qui convient pour toutes les suites est $\rho = \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_k$. □

La question qui maintenant se pose naturellement est :

Si on a une infinité dénombrable de suites[1] bornées, existe-t-il une extraction φ commune à toutes ces suites et qui les fasse converger simultanément ?

La réponse à cette question est étonnament oui :

Proposition 2.80 (Principe d'extraction diagonale): *Soit une famille dénombrable de suites $(x^{(k)})_{k \geqslant 1}$ indexée par $k \geqslant 1$ (au sens où pour chaque $k \geqslant 1$, $x^{(k)} = (x_n^{(k)})_{n \geqslant 1}$ est une suite de réels), existe-t-il une extraction φ commune à toutes les suites $x^{(k)}$, $k \geqslant 1$ telle que pour tout $k \geqslant 1$, $(x_{\varphi(n)}^{(k)})_{n \geqslant 1}$ converge.*

Proof of Proposition 2.80. D'après la proposition précédente, il existe une suite d'extraction $(\varphi_i)_{i \geqslant 1}$ telle que pour tout $k \geqslant 1$ fixé, $\rho_k := \varphi_1 \circ \ldots \varphi_k$ est une extraction telle que, pour tout $i \leqslant k$, les suites $(x_n^{(i)})_{n \geqslant 1}$ sont convergentes.

On définit alors

$$\rho(n) = \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_n(n) = \rho_n(n). \tag{2.4.1}$$

Alors :

1. Une suite de suites !

1. ρ est une extraction : en effet, pour tout $n \geqslant 1$, $\rho(n+1) = \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_n(\varphi_{n+1}(n+1)) = \rho_n(\varphi_{n+1}(n+1))$. Or $\varphi_{n+1}(n+1) \geqslant n+1$ (Proposition 2.68) et ρ_n est strictement croissante donc $\rho(n+1) \geqslant \rho_n(n+1) > \rho_n(n) = \rho(n)$. Donc ρ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ donc une extraction.
2. Pour tout $k \geqslant 1$ fixé, la sous-suite $(x^{(k)}_{\rho(n)})_{n \geqslant 1}$ est, au moins à partir du rang k, une suite extraite de $(x^{(k)}_{\rho_k(n)})_{n \geqslant 1}$: en effet, pour $n \geqslant k$, $x^{(k)}_{\rho(n)} = x^{(k)}_{\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_k \circ \varphi_{k+1} \circ \ldots \circ \varphi_n(n)} = x^{(k)}_{\rho_k(\varphi_{k+1} \circ \ldots \circ \varphi_n(n))}$. Or, la suite $(x^{(k)}_{\rho_k(n)})_{n \geqslant 1}$ converge, donc $(x^{(k)}_{\rho(n)})_{n \geqslant 1}$ aussi. □

Remarque 2.81: La dénomination *extraction diagonale* vient du fait que si on écrit sous forme de matrice infinie les $(\rho_i(j))$ pour $i, j \geqslant 1$, la définition (2.4.1) consiste à prendre la diagonale de cette matrice.

2.5 Suites de Cauchy ; complétude de $\mathbb{R}$

La dernière notion abordée dans ce chapitre est celle de suite de Cauchy :

Définition 2.82: *Soit u une suite réelle. On dit que u est de Cauchy si*

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que pour tout $p, q \geqslant n_0$, $|u_p - u_q| < \varepsilon$,

ou de manière équivalente

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, tout $p \geqslant 0$, $|u_n - u_{n+p}| < \varepsilon$,

Intuitivement, la notion de suite de Cauchy dit la chose suivante : u est de Cauchy si les termes de la suite deviennent arbitrairement proches les uns des autres, quitte à attendre suffisamment longtemps. Un exemple de suite de Cauchy est fourni par les suites convergentes :

Proposition 2.83: *Soit u une suite réelle. Si u est convergente, alors u est de Cauchy.*

Démonstration. Si u est une suite réelle qui converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. Mais alors pour tout $p, q \geqslant n_0$, $|u_p - u_q| \leqslant |u_p - l| + |u_q - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Nous venons donc de montrer que u est de Cauchy. □

Il s'avère que dans le cas de suites réelles, la réciproque est vraie. C'est l'objet du théorème important suivant :

Théorème 2.84: *Soit u une suite réelle. Si u est de Cauchy, alors u est convergente.*

Remarque 2.85: Ce résultat est intéressant dans la mesure où il permet de montrer qu'une suite réelle converge, sans même avoir la moindre idée de sa limite !

Remarque 2.86: Les espaces métriques où les suites de Cauchy sont convergentes sont appelés *espaces complets*. Le résultat précédent dit donc que $\mathbb{R}$ est complet. La notion d'espace complet sera étudiée en détail l'an prochain en L3.

Il faut noter qu'il y a des espaces qui ne sont pas complets : par exemple l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ n'est pas complet : la suite u définie par $u_n = 10^{-n} \left\lfloor 10^n \sqrt{2} \right\rfloor$ (i.e. la suite des approximations décimales par défaut de $\sqrt{2}$) est convergente dans $\mathbb{R}$ (vers $\sqrt{2}$). Elle est donc de Cauchy en tant que suite de $\mathbb{R}$, mais aussi en tant que suite de $\mathbb{Q}$. Mais elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ puisque $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Pour prouver le Théorème 2.84, nous avons besoin de deux résultats intermédiaires :

Proposition 2.87: *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration. Soit u une suite de Cauchy. Pour $\varepsilon = 1$, il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que pour tout $p, q \geqslant n_0$, $|u_p - u_q| < 1$. En particulier, pour tout $p \geqslant n_0$, $|u_p - u_{n_0}| < 1$ et donc $|u_p| \leqslant |u_p - u_{n_0}| + |u_{n_0}| < 1 + |u_{n_0}|$. Par conséquent, u est bornée par $M := \max\{|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{n_0-1}|, 1 + |u_{n_0}|\}$. □

Proposition 2.88: *Toute suite de Cauchy qui admet une sous-suite qui converge est en fait convergente.*

Démonstration. Soit u une suite réelle dont on suppose quelle est de Cauchy et qu'elle admet une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \geqslant 0}$ qui converge vers $l \in \mathbb{R}$. Montrons que toute la suite u converge vers l. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_1 \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $\left|u_{\varphi(n)} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. De plus, il existe $n_2 \geqslant 0$ tel que pour tout $p, q \geqslant n_2$, $|u_p - u_q| < \frac{\varepsilon}{2}$. Mais alors pour tout $n \geqslant n_0 = \max(n_1, n_2)$,

$$|u_n - l| \leqslant \left|u_n - u_{\varphi(n)}\right| + \left|u_{\varphi(n)} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Noter ici que nous avons utilisé le fait que $p = n \geqslant n_2$ et que $q = \varphi(n) \geqslant n \geqslant n_2$ d'après la Proposition 2.68. Nous venons donc de prouver que u est convergente, de limite l. □

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le Théorème 2.84 :

Démonstration du Théorème 2.84. Soit u une suite réelle de Cauchy. Par la Proposition 2.87 elle est donc bornée. Par Théorème de Bolzano-Weierstrass (Théorème 2.76), elle admet une sous-suite convergente. Par la Proposition 2.88, toute la suite est elle-même convergente. □

2.6 Synthèse : comment montrer qu'une suite converge (ou ne converge pas) ?

Résumons les outils que nous avons à notre disposition pour l'étude de la convergence d'une suite :

2.6.1 Comment montrer qu'une suite réelle u est convergente ?

Parmi les outils que nous avons vus dans ce chapitre, nous pouvons mentionner les méthodes suivantes :

1. si on a une idée préalable de la limite potentielle l de u, revenir à la Définition 2.18 et prouver à la main que la suite converge vers l,
2. par utilisation des opérations usuelles sur les limites (cf. § 2.2.4),

3. par encadrement, en utilisant le Théorème des gendarmes (Proposition 2.38),
4. si la suite est croissante (resp. décroissante), en montrant qu'elle est majorée (resp. minorée) (cf. Proposition 2.42 et Proposition 2.44),
5. en construisant une autre suite adjacente à u (cf. Proposition 2.47)
6. par calcul, en utilisant des développements limités de fonctions usuelles (cf. § 2.3),
7. en montrant que u est bornée, avec une unique valeur d'adhérence (cf. Proposition 2.77)
8. en montrant que u est de Cauchy (cf. Théorème 2.84).

Remarque 2.89: On notera que les items 4, 5, 7, 8 ne nécessitent pas de connaissance préalable de la limite : on prouve l'existence d'une limite sans la connaître !

2.6.2 Comment prouver qu'une suite n'est pas convergente ?

Parmi les méthodes possibles, nous avons à notre disposition :

1. en prenant la négation de la définition,
2. par encadrement (minoration par une suite qui tend vers $+\infty$ ou majoration par une suite qui tend vers $-\infty$) (cf. Proposition 2.40),
3. si u est croissante (resp. décroissante), en montrant qu'elle n'est pas majorée (resp. minorée), (cf. Proposition 2.42 et Proposition 2.44),
4. en exhibant deux sous-suites de u qui convergent vers des limites distinctes (cf. Proposition 2.72).

2.7 Applications aux séries

On rappelle la définition suivante :

Définition 2.90: *Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle. On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ donnée par*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n,\ n \geqslant 0. \tag{2.7.1}$$

On dit que la série est convergente si la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et note $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ sa limite dans ce cas.

Remarque 2.91: L'idée de ce paragraphe n'est pas de refaire le cours de L1 que vous avez eu sur les séries. Il s'agit plutôt de revisiter ces résultats à la lumière de la notion de convergence vue rigoureusement dans ce chapitre. De manière générale, le principe est

Etudier la convergence d'une série, c'est étudier la convergence de la suite de sa somme partielle $(S_n)_{n\geqslant 0}$. En particulier, tous les outils vus dans ce chapitre concernant l'étude des suites sont bienvenus pour l'étude des séries.

Rappelons quelques résultats cruciaux :

1. Si la série de terme général u_n converge, alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Mais la réciproque est grossièrement fausse ! Contre-exemple : $u_n = \frac{1}{n}$ mais la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge.
2. Si la série est à terme général positif ($u_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 0$), alors deux cas sont possibles : soit la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée auquel cas la série converge, soit elle n'est pas bornée auquel cas $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. C'est une implication immédiate de la Proposition 2.24, puisque $u_n \geqslant 0$ pour tout n implique que la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

   Application : si $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'événements. Alors la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ a toujours un sens dans $[0, +\infty[\cup \{+\infty\}$.
3. Séries géométriques : la série de terme général $(r^n)_{n\geqslant 0}$ est convergente si et seulement si $|r| < 1$, auquel cas la somme vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.
4. Séries de Riemann : la série de terme général $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geqslant 1}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
5. Séries de Bertrand : la série de terme général $\left(\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}\right)_{n\geqslant 1}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Dans le cas des séries à termes positifs, on a le résultat de comparaison suivant :

Proposition 2.92: *Soient u et v telles que $u_n \geqslant 0$ et $v_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang et $u_n \sim_{n\to\infty} v_n$. Alors la série de terme général u_n est convergente si et seulement la série de terme général v_n est convergente.*

Dans le cas où la série n'est pas de terme général de signe constant, la bonne notion est celle de convergence absolue :

Définition 2.93: *Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite réelle. On dit que la série de terme général u_n est absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ converge.*

Proposition 2.94: *Si la série de terme général u_n converge absolument, alors elle est convergente.*

Démonstration. Il suffit de montrer que la suite $(S_n)_{n \geqslant 0}$ est de Cauchy : soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite définie par $\tilde{S}_n = |u_0| + |u_1| + \ldots + |u_n|$ est convergente, elle est de Cauchy (Proposition 2.83). Ainsi, il existe $n \geqslant 1$ tel que pour tout $q \geqslant p \geqslant n$, on a $\sum_{k=p+1}^{q} |u_k| = \left|\tilde{S}_q - \tilde{S}_p\right| < \varepsilon$. Mais alors,

$$|S_q - S_p| = \left|\sum_{k=p+1}^{q} u_k\right| \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} |u_k| < \varepsilon.$$

Ainsi, la suite $(S_n)_{n \geqslant 0}$ est de Cauchy donc convergente, d'après le Théorème 2.84. □

De ce résultat et de la Proposition 2.24, on déduit les résultats de domination usuels :

Proposition 2.95: *Soient u et v deux suites. On suppose*

1. *à partir d'un certain rang, $|u_n| \leqslant |v_n|$, (resp. $u_n = O(v_n)$, resp. $u_n = o(v_n)$)*
2. *la série de terme général v_n est absolument convergente.*

Alors la série de terme général u_n est absolument convergente.

De cela on déduit les critères usuels de convergence :

Proposition 2.96: *Soit u une suite réelle. Si l'un des critères suivants est vérifié*

1. *Critère de Cauchy : si $(|u_n|)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} r < 1$, ou*
2. *Critère de D'Alembert : s'il existe $r < 1$ tel qu'à partir d'un certain rang, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant r$,*

alors la série de terme général u_n est absolument convergente.

Il existe des séries convergentes mais qui ne convergent pas absolument. Un exemple en est la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$. En ce sens, un résultat à connaître est le Lemme d'Abel :

Proposition 2.97 (Lemme d'Abel): *Soient $(a_n)_{n \geqslant 0}$ et $(b_n)_{n \geqslant 0}$ deux suites telles que :*

1. *$(a_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de termes positifs, décroissante, qui tend vers 0 pour $n \to \infty$,*
2. *les sommes partielles de $(b_n)_{n \geqslant 0}$ sont bornées : il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \geqslant 1$,*

$$|b_0 + b_1 + \ldots + b_n| \leqslant M$$

alors la série de terme général $a_n b_n$ converge.

Remarque 2.98: Dans le cas particulier des séries alternées $b_n = (-1)^n$, on a même une estimée de la vitesse de convergence : pour toute suite a vérifiant les hypothèses précédentes, si on note $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$, on a $|r_n| \leqslant a_{n+1}$.

Le dernier point que nous voulons aborder dans ce paragraphe est la notion de produit de Cauchy :

Proposition 2.99: *Soient $(a_n)_{n \geqslant 0}$ et $(b_n)_{n \geqslant 0}$ deux suites qui sont les termes généraux de deux séries absolument convergentes. Alors la série de terme général*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{l+l'=n} a_l b_{l'},\ n \geqslant 0 \tag{2.7.2}$$

est absolument convergente et on a l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

Démonstration. On note $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k$ et $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k$ les sommes partielles respectives des trois séries. Posons $A = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ et $B = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$. On a

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{i+j \,\leqslant\, n} a_i b_j = \sum_{i+j \,\leqslant\, n} a_i (B_j - B_{j-1}) = \sum_{i+j=n} a_i B_j = \sum_{i=0}^{n} a_i B_{n-i}.$$

Posons $\varepsilon > 0$. Il existe $n_1 \geqslant 1$ tel que pour tout $j \geqslant n_1$, $|B_j - B| < \varepsilon$. De plus $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc il existe $n_2 \geqslant 1$ tel que pour tout $i \geqslant n_2$, $|a_i| < \varepsilon/n_1$. Donc, en notant M un majorant commun de A et de tout les $|B_j - B|$, pour $n \geqslant n_1 + n_2$,

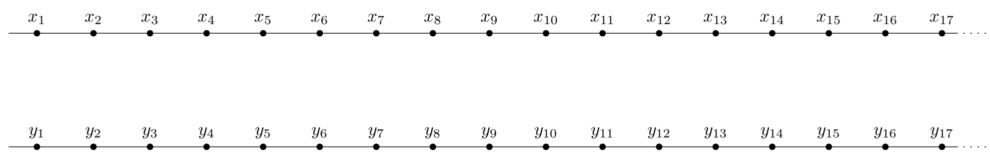
$$|C_n - A_n B| = \left|\sum_{i=0}^{n} a_i (B_{n-i} - B)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-n_1} |a_i|\,\varepsilon + \sum_{i=n-n_1} |a_i|\,M \leqslant 2M\varepsilon.$$

Ainsi $C_n - A_n B \to 0$ et donc $C_n \to AB$. □

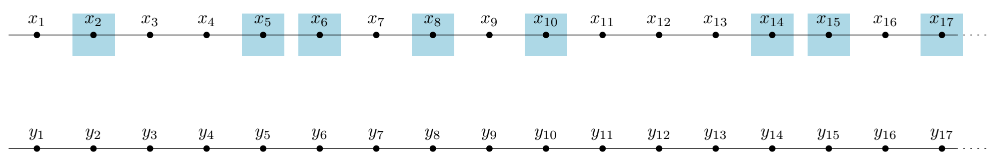
Remarque 2.100: La forme spécifique de c_n en (2.7.2) n'est pas due au hasard : si on écrit le produit informel de $(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots)$ par $(b_0 + b_1 + b_2 + \ldots)$, on obtient, en rangeant les termes par paquets où la somme des indices de a et de b est constante :

$$(a_0+a_1+a_2+\ldots)(b_0+b_1+b_2+\ldots) = a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)+\ldots. \tag{2.7.3}$$

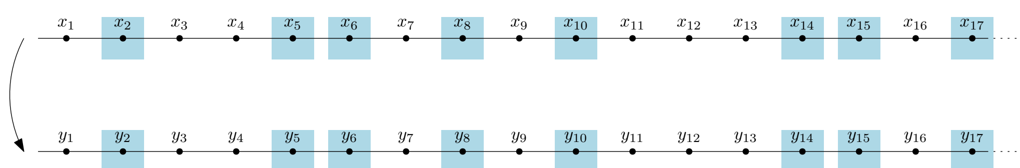
On retrouve ainsi les c_n un par un.



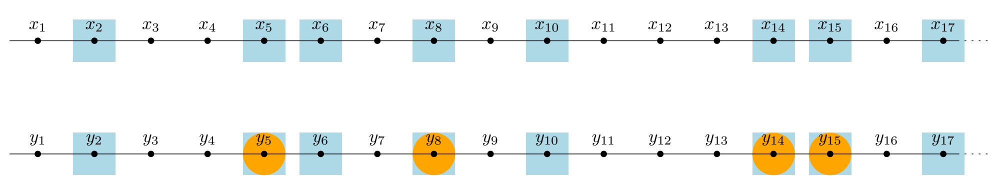
(a) On se donne deux suites x et y bornées.



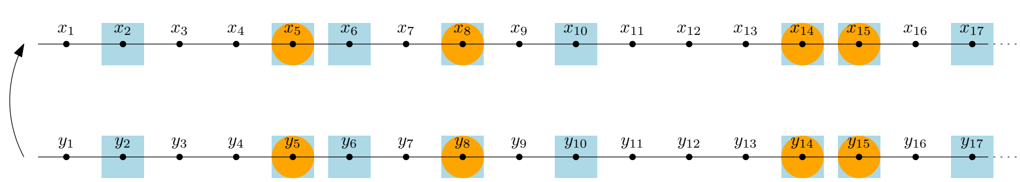
(b) La suite x est bornée, on peut en extraire une sous-suite qui converge ($(x_{\varphi(n)})_{n \geqslant 1}$: les carrés bleus sur la figure).



(c) On sélectionne les termes de la suite y selon les mêmes indices que la suite x, i.e. la suite $(y_{\varphi(n)})_{n \geqslant 1}$. Cette sous-suite de y n'a aucune raison de converger...



(d) ... par contre, cette sous-suite de y est bornée, donc on peut en extraire de nouveau une sous-suite qui converge (disques oranges). Cette sous-suite s'écrit $(y_{\varphi(\psi(n))})_{n \geqslant 1}$.



(e) On revient à la suite x en ne sélectionnant plus que les disques oranges pour x, i.e. la sous-suite $(x_{\varphi(\psi(n))})_{n \geqslant 1}$. Cette suite est une sous-suite de la suite des carrés bleus pour x qui converge, donc elle converge aussi.

FIGURE 2.4 – Principe d'extraction simultanée : une extraction qui fait converger simultanément les suites x et y est celle correspondant à la superposition carrés bleus/disques oranges.

Chapitre 3

Fonctions de la variable réelle, continuité

Dans ce chapitre, on s'intéresse au comportement d'une fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$, où D_f, ensemble de définition de f, est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On définira en particulier rigoureusement les notions de limite et de continuité vues au lycée.

3.1 Limites d'une fonction réelle de la variable réelle

3.1.1 Notion de voisinage et d'adhérence, propriété locale

Définition 3.1 (Voisinage d'un point): *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.*

1. *On dit que A est voisinage de x s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A$. Autrement dit, un voisinage de x contient non seulement x mais aussi un petit intervalle autour de x.*
2. *On dit que A est un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) si A contient un intervalle du type $]M, +\infty[$ (resp. $]-\infty, M[$) pour un certain $M \in \mathbb{R}$.*

Exemple 3.2: — Tout intervalle ouvert $]a, b[$ est voisinage de tous ses points. En effet, pour tout $x \in]a, b[$, prenons $\varepsilon = \min\left(\frac{b-x}{2}, \frac{x-a}{2}\right) > 0$. Mais alors $x - \varepsilon \geqslant x - \frac{x-a}{2} = \frac{x+a}{2} > a$ car $x > a$. De même, $x + \varepsilon \leqslant x + \frac{b-x}{2} = \frac{x+b}{2} < b$ car $x < b$. Ainsi $]a, b[$ contient $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ et donc $]a, b[$ est un voisinage de x.

— Par contre, l'intervalle $]a, b]$ fermé en b n'est pas un voisinage de b car aucun intervalle de type $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$ n'est contenu dans $]a, b]$ (ça dépasse à droite !).

Définition 3.3 (Adhérence d'un ensemble): *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On dit que x est adhérent à A si pour tout $\varepsilon > 0$, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$. Autrement dit, x est adhérent à A si tout voisinage arbitrairement petit de x intersecte A.*

On note $\bar{A}$ l'ensemble des éléments adhérents à A et on l'appelle l'adhérence de A.

Exemple 3.4: — Tout élément a de A est adhérent à A (puisque $a \in A \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ pour tout $\varepsilon > 0$: $A \subset \bar{A}$.

— Si A admet une borne supérieure (ou inférieure) alors $S = \sup(A) \in \bar{A}$. En effet, par caractérisation de la borne supérieure, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a_\varepsilon \in A$ tel que $S - \varepsilon < a_\varepsilon \leqslant S$. Ainsi $a_\varepsilon \in A \cap]S-\varepsilon, S+\varepsilon[$ et donc cette intersection est non vide.

☹ **Attention!**
On a bien $A \subset \bar{A}$ mais la réciproque est fausse en général : 1 appartient à l'adhérence de $]0,1[$ (c'est sa borne supérieure) mais $1 \notin]0,1[$.

Définition 3.5: *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que D est dense dans $\mathbb{R}$ si $\bar{D} = \mathbb{R}$.*

Remarque 3.6: Cette définition signifie la chose suivante : dire que D est dense dans $\mathbb{R}$ signifie que n'importe quel voisinage de x contient au moins un élément de D. Intuitivement, cela signifie qu'on trouve des éléments de D "partout", dans n'importe quel intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur arbitrairement petite.

Un résultat important est le suivant :

Théorème 3.7: *L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il s'agit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ contient au moins un rationnel. On va faire mieux : on montre l'existence d'un rationnel dans $]x-\varepsilon, x]$. Soit $n \geqslant 1$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (par exemple $n = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ convient) et posons $k = \lfloor nx \rfloor$. Alors par définition $nx - 1 < k \leqslant nx$ et donc $x - \varepsilon < x - \frac{1}{n} < \frac{k}{n} \leqslant x$. Or $\frac{k}{n}$ est un rationnel, ce qui prouve le résultat. □

On aura besoin dans la suite de la notion d'une propriété vraie "localement autour d'un point x_0" :

Définition 3.8: *Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et $P(x)$ une propriété (valant Vrai ou Faux) dépendant de $x \in \mathbb{R}$. On dira que la propriété $P(x)$ est vraie au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 tel que $P(y)$ est vraie pour tout $y \in V$.*

Exemple 3.9: Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie sur un voisinage de x_0. On dira que

— f est localement bornée autour de x_0 s'il existe $\eta > 0$ et $M > 0$ tel que $|f(y)| \leqslant M$ pour tout $y \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$.

— f est localement non nulle (resp. positive, resp. strictement positive) autour de x_0 s'il existe $\eta > 0$ tel que $f(y) \neq 0$ (resp. $f(y) \geqslant 0$, resp. $f(y) > 0$) pour tout $y \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$.

3.1.2 Notion de limite et premières propriétés

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction d'ensemble de définition D_f non vide. On souhaite définir proprement la notion de limite de f en un point x_0 de D_f. Notons une différence avec la notion de limite concernant les suites vue au Chapitre 2 : prendre la limite d'une suite u_n consiste évidemment à ne considérer que la limite pour $n \to \infty$. Dans ce cas, la limite peut exister et être finie ($l \in \mathbb{R}$), infinie ($+\infty$ ou $-\infty$, suites divergentes du premier ordre) ou bien ne pas exister (suites divergentes du second ordre).

Dans le cas d'une fonction, la situation est plus diverse. Regardons sur des exemples quelques cas génériques qu'il est possible de considérer : soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

1. Une première situation est celle où on étudie la limite de $f(x)$ quand $x \to x_0 \in \bar{D}_f$: cela concerne par exemple le cas où $D_f =]a, b[$, (avec $x_0 \in \bar{D}_f = [a, b]$), ou bien $D_f =]a, +\infty[$ avec $x_0 \in \bar{D}_f = [a, +\infty[$ (resp. $D_f =]-\infty, a[$ avec $x_0 \in \bar{D}_f =]-\infty, a]$).
   (a) Dans ce cas, il se peut que f admette une limite finie $l \in \mathbb{R}$ en x_0.

   Exemple 3.10: La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ admet comme limite 9 en $x_0 = 3$.

   Exemple 3.11: La fonction $f :]0, +\infty[$ définie par $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admet pour limite 0 en $x_0 = 0$.

   (b) Il se peut aussi que f admette une limite infinie ($+\infty$ ou $-\infty$) en x_0. Evidemment, cette notion n'a de sens que pour $x_0 \in \bar{D}_f \setminus D_f$ (i.e. pour $x_0 = a$ ou $x_0 = b$ si $D_f =]a, b[$ ou bien $x_0 = a$ si $D_f =]a, +\infty[$ ou $D_f =]-\infty, a[$).

   Exemple 3.12: La fonction $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ tend vers $+\infty$ en $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

   (c) Il se peut enfin que f n'admette pas de limite en x_0 :

   Exemple 3.13: La fonction $f :]0, +\infty[$ définie par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en $x_0 = 0$.

2. Un autre cas générique concerne l'étude d'une éventuelle limite de f en $+\infty$ (resp. $-\infty$). Evidemment, cela nécessite que D_f soit un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).
   (a) Cette limite peut exister et être finie :

   Exemple 3.14: La fonction définie par $f(x) = \exp(-x)$ admet pour limite 0 quand $x \to +\infty$.

   (b) Cette limite peut être infinie :

   Exemple 3.15: La fonction définie par $f(x) = x^2$ tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$.

   (c) Cette limite peut ne pas exister :

   Exemple 3.16: La fonction définie par $f(x) = \sin(x)$ n'admet pas de limite quand $x \to +\infty$.

La définition qui suit explicite la notion de limite dans les différents cas génériques évoqués ci-dessus :

Définition 3.17 (Notion de limite pour $x \to x_0 \in \bar{D}_f$): *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction de domaine de définition D_f non vide et soit $x_0 \in \bar{D}_f$.*

1. ***le cas d'une limite finie en un point de $\bar{D}_f$:*** *soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite l quand x tend vers x_0 si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \ \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f, \ |f(x) - l| < \varepsilon. \tag{3.1.1}$$

2. ***le cas d'une limite infinie en un point de $\bar{D}_f \setminus D_f$:*** *soit $x_0 \in \bar{D}_f \setminus D_f$.*
   (a) *On dit que f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers x_0 si*

$$\forall A > 0, \ \exists \eta > 0, \ \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f, \ f(x) > A. \tag{3.1.2}$$

   (b) *On dit que f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers x_0 si*

$$\forall A > 0, \ \exists \eta > 0, \ \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f, \ f(x) < -A. \tag{3.1.3}$$

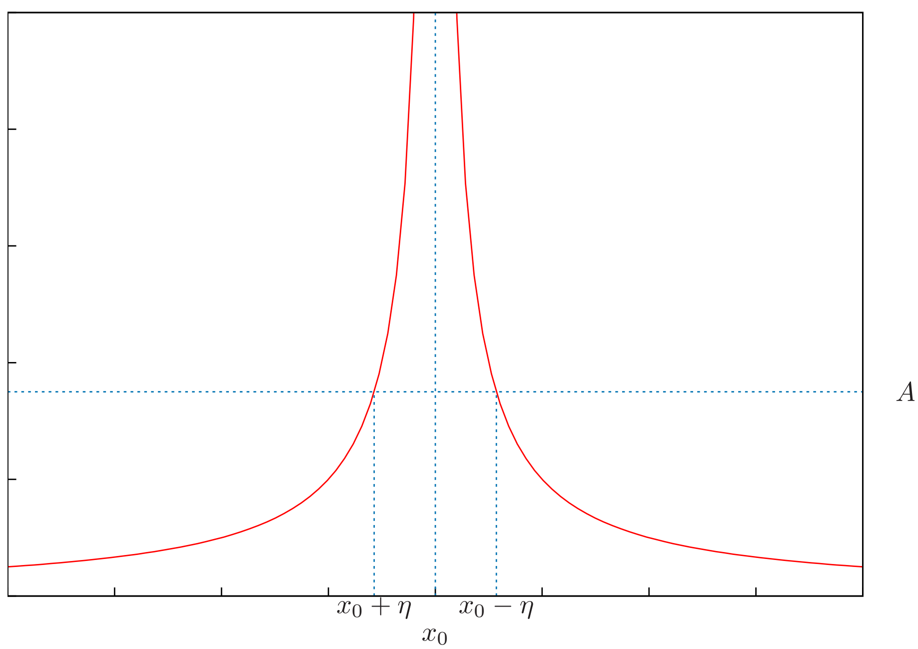


FIGURE 3.1 – Ici, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ et $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$: pour tout $A > 0$, il existe un petit intervalle $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ (dont la taille dépend de ε et de x_0) sur lequel $f(x) > A$.

Définition 3.18 (Notion de limite pour $x \to \pm\infty$): *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction de domaine de définition D_f non vide.*

1. ***le cas d'une limite finie quand $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$:***
   (a) *le cas $x \to +\infty$: on suppose que D_f est un voisinage de $+\infty$. On dit que f a pour limite l quand x tend vers $+\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists B > 0, \ \forall x \in]B, +\infty[\cap D_f, \ |f(x) - l| < \varepsilon. \tag{3.1.4}$$

(b) *le cas $x \to -\infty$: on suppose que D_f est un voisinage de $-\infty$. On dit que f a pour limite l quand x tend vers $-\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in]-\infty, -B[\cap D_f,\ |f(x) - l| < \varepsilon. \tag{3.1.5}$$

2. ***le cas d'une limite infinie quand** $x \to +\infty$ **:** on suppose que D_f est un voisinage de $+\infty$.*

   (a) *On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si*

   $$\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in]B, +\infty[\cap D_f,\ f(x) > A \tag{3.1.6}$$

   (b) *On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si*

   $$\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in]B, +\infty[\cap D_f,\ f(x) < -A \tag{3.1.7}$$

3. ***le cas d'une limite infinie quand** $x \to -\infty$ **:** on suppose que D_f est un voisinage de $-\infty$.*

   (a) *On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si*

   $$\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in]-\infty, -B[\cap D_f,\ f(x) > A \tag{3.1.8}$$

   (b) *On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si*

   $$\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ \forall x \in]-\infty, -B[\cap D_f,\ f(x) < -A. \tag{3.1.9}$$

Remarque 3.19: Les Définitions 3.17 et 3.18 quantifient précisément la notion intuitive selon laquelle $f(x)$ est proche de $f(x_0)$ quand x est proche de x_0. Des exemples de convergence sont illustrés en Figures 3.1, 3.2 et 3.3.

Remarque 3.20: La liste précédente est longue mais on attire l'attention du lecteur sur le fait que des briques élémentaires se répètent parmi les différentes définitions, selon qu'on considère les cas $x \to x_0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ d'une part et une limite finie ou infinie d'autre part.

Exemple 3.21: Reprenons certains exemples évoqués au début de ce paragraphe :

— Exemple 3.10 : soit $\varepsilon > 0$. Soit $\eta = \min\left(\frac{\varepsilon}{8}, 1\right)$ et $x \in]3-\eta, 3+\eta[$. Alors $|x-3| < \eta$ et $|x| \leqslant |x-3| + 3 \leqslant \eta + 3 \leqslant 4$. On a $\left|x^2 - 9\right| = |x-3|\,|x+3| \leqslant \eta(|x|+3) \leqslant \frac{\varepsilon}{8} 7 < \varepsilon$. Donc la limite de x^2 pour $x \to 3$ existe et vaut 9.

— Exemple 3.14 : soit $\varepsilon > 0$. Distinguons deux cas : si $\varepsilon \geqslant 1$, on pose dans ce cas $A = 1 > 0$ (par exemple). Alors pour tout $x > 1$, $x > 0$ et donc $|\exp(-x) - 0| = \exp(-x) < 1 \leqslant \varepsilon$. Si maintenant $\varepsilon < 1$, on pose $A = -\ln(\varepsilon) > 0$. Alors, pour $x > A$ on a $|\exp(-x) - 0| = \exp(-x) < \varepsilon$. Ainsi $\exp(-x)$ tend vers 0 quand $x \to \infty$.

  Remarquons en particulier que le premier cas ($\varepsilon \geqslant 1$) est un cas (nécessaire à traiter mais) inintéressant : si ε est grand, la proximité (à ε près) de $\exp(-x)$ à 0 est triviale. La définition de la convergence vers une limite est significative uniquement dans le cas où ε est arbitrairement petit.

— Exemple 3.15 : soit $A > 0$ arbitraire. Posons $B = \sqrt{A}$. Alors pour tout $x > B$, $x^2 > B^2 = A$. Donc x^2 tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

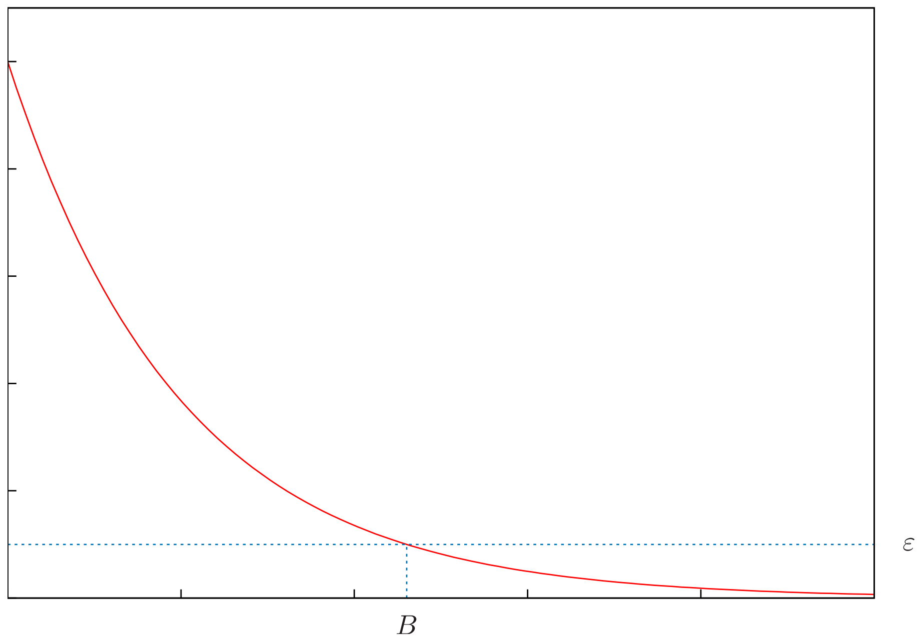


FIGURE 3.2 – Ici, $D_f = [M, +\infty[$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $B > 0$ (qui dépend de ε) tel que pour $x > B$, on a $0 \leqslant f(x) < \varepsilon$.

Proposition 3.22 (Composées de limites): *Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g telles que $f(D_f) \subset D_g$. Soient $x_0 \in \bar{D}_f$, $l, l' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Si les assertions suivantes sont vérifiées :*

1. $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l$,
2. $g(y) \xrightarrow[y\to l]{} l'$,

alors

$$g(f(x)) \xrightarrow[x\to x_0]{} l'. \tag{3.1.10}$$

Démonstration. Faisons la preuve dans le cas où l, l', x_0 sont des réels, les autres cas sont laissés à titre d'exercice. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $g(y) \xrightarrow[y\to l]{} l'$, on a

$$\exists \eta_1 > 0,\ \forall y \in]l - \eta_1, l + \eta_1[\cap D_g,\ \left|g(y) - l'\right| < \varepsilon. \tag{3.1.11}$$

Appliquons maintenant la définition de la convergence $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l$ pour la donnée de ce $\eta_1 > 0$: il existe $\eta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta_2, x_0 + \eta_2[\cap D_f$, on a $|f(x) - l| < \eta_1$. Ainsi, pour de tels x, $f(x) \in]l - \eta_1, l + \eta_1[\cap D_g$ (car $f(D_f) \subset D_g$) et donc en appliquant (3.1.11) pour $y = f(x)$, on obtient que $|g(f(x)) - l'| < \varepsilon$. Ne lisant que les parties grisées de la démonstration, on voit qu'on a prouvé que $g(f(x)) \xrightarrow[x\to x_0]{} l'$. □

Proposition 3.23 (Limite et propriétés locales): *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \bar{D}_f$ (ou $x_0 \in \bar{D}_f \cup \{+\infty, -\infty\}$ si D_f contient un voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$).*

1. *Si f admet une limite finie en x_0, elle est localement bornée au voisinage de x_0 : si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$, avec $l \in \mathbb{R}$, alors il existe $M > 0$ et un voisinage de x_0 tels que pour tout x dans ce voisinage, $|f(x)| \leqslant M$.*
2. *Si de plus, cette limite $l \in \mathbb{R}$ est strictement positive (resp. strictement négative), alors il existe un voisinage de x_0, tel que pour tout x dans ce voisinage, $f(x) \geqslant \frac{l}{2} > 0$ (resp. $f(x) \leqslant \frac{l}{2} < 0$). En particulier, si $l \neq 0$, alors f ne s'annule pas sur un voisinage de x_0.*

Démonstration. Cette preuve est très similaire à la Proposition 2.32, (item 3.) vue dans le cas des suites.

1. On ne traite ici que le cas x_0 réel et on laisse le cas $x_0 \in \{+\infty, -\infty\}$ à titre d'exercice. Si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$, avec $l \in \mathbb{R}$, alors pour $\varepsilon = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $|f(x) - l| < 1$. Mais alors, $|f(x)| \leqslant |f(x) - l| + |l| \leqslant 1 + |l|$. Donc $M = 1 + |l|$ et le voisinage de x_0 $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ conviennent.
2. On suppose par exemple $l > 0$ et on traite (pour changer un peu) le cas où $x_0 = +\infty$. Les autres cas sont laissés à titre d'exercice. Posons $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0$. Comme $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x > A$, $|f(x) - l| < \frac{l}{2}$. Ceci est équivalent à $-\frac{l}{2} < f(x) - l < \frac{l}{2}$, ce qui implique en particulier $0 < \frac{l}{2} < f(x)$. □

Définition 3.24 (Notion de limite à droite et de limite à gauche en un point): *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \bar{D}_f$.*

1. *On dit que f a pour limite à gauche $l \in \mathbb{R}$, si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \eta, x_0[\cap D_f,\ |f(x) - l| < \varepsilon. \tag{3.1.12}$$

2. *On dit que f a pour limite à droite $l' \in \mathbb{R}$, si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0, x_0 + \eta[\cap D_f,\ \left|f(x) - l'\right| < \varepsilon. \tag{3.1.13}$$

Dans le cas où ces limites existent, on les notera respectivement $f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$.

☹ **Attention!**

$f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$ sont des abus de notations : ce sont bien des limites, pas la valeur de la fonction f prise en $x_0^\pm$: x_0^- et x_0^+ n'ont pas de sens en soi en tant que réels !

Remarque 3.25: On peut aussi définir des limites infinies à droite et à gauche, bien sûr.

Exemple 3.26:
— La fonction $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *partie entière* (aussi souvent notée $E(\cdot)$) admet une limite à gauche en 1 qui vaut 0 et une limite à droite en 1 qui vaut 1.
— La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ admet une limite à gauche en 0 qui vaut $-\infty$ et une limite à droite en 0 qui vaut $+\infty$.

3.1.3 Caractérisation séquentielle de la limite et conséquences

Proposition 3.27 (Caractérisation séquentielle de la limite): *Soit f une fonction définie sur D_f non vide, $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, et $x_0 \in \bar{D}_f$ (ou $x_0 \in \bar{D}_f \cup \{+\infty, -\infty\}$ dans le cas où D_f est un voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$). Alors on a l'équivalence suivante :*

La fonction f admet pour limite l quand x tend vers x_0 si et seulement si pour toute suite réelle $(u_n)_{n \geqslant 0}$ qui tend vers x_0 pour $n \to \infty$, la suite $(f(u_n))_{n \geqslant 0}$ tend vers l.

Démonstration. On traite uniquement le cas où x_0 est un réel et la limite l est finie. On laisse les autres cas (analogues) à titre d'exercice.

Traitons d'abord l'implication directe : supposons que f admette l pour limite quand $x \to x_0$. Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite quelconque qui tend vers x_0 pour $n \to \infty$. Montrons que la suite $(f(u_n))_{n \geqslant 0}$ est convergente, de limite l. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$,

$$\exists \eta > 0,\ \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[,\ |f(x) - l| < \varepsilon. \tag{3.1.14}$$

Pour ce $\eta > 0$, comme $(u_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers x_0,

$$\exists n_0 \geqslant 0,\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[. \tag{3.1.15}$$

Mettant bout-à-bout (3.1.14) et (3.1.15), nous obtenons que pour $n \geqslant n_0$, $|f(u_n) - l| < \varepsilon$. En ne relisant que ce qui a été grisé, nous venons de montrer que $(f(u_n))_{n \geqslant 0}$ est convergente, de limite l.

Prouvons maintenant la réciproque. Pour cela, nous prouvons la contraposée : il s'agit de montrer[1] que si f ne tend pas vers l quand x tend x_0, alors il existe une suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ qui tend vers x_0 mais telle que $(f(u_n))_{n \geqslant 0}$ ne tend pas vers l.

Comme f ne tend pas vers l quand x tend vers x_0, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ tel que $|f(x) - l| \geqslant \varepsilon$. C'est en particulier vrai pour tout $\eta_n = \frac{1}{n}$, avec $n \geqslant 1$ entier quelconque. Pour tout $n \geqslant 1$, il existe donc un $x_n \in]x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}[$ tel que $|f(x_n) - l| > \varepsilon$. Mais alors la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers x_0 pour $n \to \infty$ (par application du théorème des gendarmes à l'encadrement $x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}$). De plus, le fait que pour tout $n \geqslant 1$, on a $|f(x_n) - l| > \varepsilon$ fait que $(f(x_n))_{n \geqslant 1}$ ne converge pas vers l. □

Remarque 3.28: La Proposition 3.27 est particulièrement utile car elle permet de prouver l'existence de limites sans se ramener à des ε et des η ; on peut utiliser toute la machinerie sur les suites vue dans le Chapitre 2.

Par ailleurs, ce résultat est particulièrement utile pour prouver qu'une fonction f n'admet pas de limite en $x \to x_0$: il suffit pour cela d'exhiber deux suites $(u_n)_{n \geqslant 0}$ et $(v_n)_{n \geqslant 0}$ qui convergent vers x_0 pour $n \to \infty$ mais telles que les suites images $(f(u_n))_{n \geqslant 0}$ et $(f(v_n))_{n \geqslant 0}$ convergent vers des limites différentes.

Revenons à l'Exemple 3.13 : posons pour $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{1}{\pi n}$ et $v_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$. Les suites u et v ainsi définies tendent vers 0 pour $n \to \infty$. Par contre, $\sin\left(\frac{1}{u_n}\right) = \sin(n\pi) = 0$ pour

1. Rappel : si A est l'affirmation "la fonction f admet pour limite l quand x tend vers x_0" et B est l'affirmation "pour toute suite réelle $(u_n)_{n \geqslant 0}$ qui tend vers x_0 pour $n \to \infty$, la suite $(f(u_n))_{n \geqslant 0}$ tend vers l", il s'agit ici de montrer $B \Rightarrow A$. Or cette affirmation est exactement équivalente à sa contraposée : non $A \Rightarrow$ non B.

tout $n \geqslant 1$ alors que $\sin\left(\frac{1}{v_n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$ pour $n \geqslant 1$. Ainsi $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0. Le même argument fonctionne pour l'Exemple 3.16 (prendre $w_n = \pi n$ et $z_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$).

La Proposition 3.27 permet aussi de transposer sans preuve supplémentaire des résultats connus du Chapitre 2 à propos des suites en des résultats similaires sur les fonctions.

Dans ce qui suit, f, g et h sont des fonctions réelles de la variable réelle, $l, l' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Bien sûr, on supposera implicitement si nécessaire que les ensembles de définitions de ces fonctions sont d'intersection non vide et que les limites s'entendent selon le domaine de définition commun. Dans ce contexte, les résultats suivants sont vrais :

1. si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l$ pour $l \in \mathbb{R}$, alors l est unique (voir Proposition 2.23),
2. si f est bornée au voisinage de x_0 et si $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$, alors $f(x)g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ (voir Proposition 2.33). Cette propriété prouve en particulier la convergence de l'exemple 3.11.
3. si f est minorée au voisinage de x_0 et si $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$, alors $f(x)+g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$ (voir Proposition 2.35),
4. les opérations sur les limites de fonctions sont identiques à celles sur les suites (limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient). En particulier, les règles de calcul énoncées en Figures 2.2 et 2.3 dans le contexte des suites restent valables dans le contexte des fonctions (par ex : si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l \in \mathbb{R}$ et $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l' \in \mathbb{R}$ alors $f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l + l' \in \mathbb{R}$).
5. passage à la limite dans une inégalité : si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l \in \mathbb{R}$ et $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l' \in \mathbb{R}$ et si pour tout x sur un voisinage de x_0 on a $f(x) \leqslant g(x)$, alors $l \leqslant l'$ (voir Proposition 2.37).
6. Théorème des gendarmes : si pour tout x dans un voisinage de x_0, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l \in \mathbb{R}$ et $h(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l' \in \mathbb{R}$ avec $l = l'$, alors $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l \in \mathbb{R}$ (voir Proposition 2.38).
7. Théorème des gendarmes bis : si pour tout x dans un voisinage de x_0, $f(x) \leqslant g(x)$ et si $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$, alors $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$ (voir Proposition 2.40).

Remarque 3.29: Noter bien sûr qu'on pourrait prouver chacune des propriétés précédentes directement à partir de la Definition 3.17 sans passer par la Proposition 3.27. Faites-le à titre d'exercice !

3.1.4 Limites et monotonie

Le résultat suivant est l'exact équivalent de la Proposition 2.42.

Proposition 3.30: *Soit $a < b \in [-\infty, +\infty]$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Alors $f(a^+)$ et $f(b^-)$ existent et sont tels que*

$$f(a^+) = \begin{cases} \inf\{f(x),\ x \in]a, b[\} & \textit{si } f \textit{ est minorée,} \\ -\infty & \textit{sinon} \end{cases} \tag{3.1.16}$$

et

$$f(b^-) = \begin{cases} \sup\{f(x),\ x \in]a,b[\} & \textit{si } f \textit{ est majorée,} \\ +\infty & \textit{sinon} \end{cases} \tag{3.1.17}$$

De plus, pour tout $x_0 \in]a,b[$, $f(x_0^-)$ *et* $f(x_0^+)$ *existent et pour tout* $a < y_0 < x_0 < z_0 < b$, *on a l'inégalité*

$$f(y_0^+) \leqslant f(x_0^-) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0^+) \leqslant f(z_0^-). \tag{3.1.18}$$

Démonstration. Supposons tout d'abord f minorée. Alors $\{f(x), x \in]a,b[\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ qui est minorée, donc admet une borne inférieure, notée I. Montrons alors que $f(a^+)$ existe et vaut I. Par propriété caractéristique de la borne inférieure, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a < x_\varepsilon < b$ tel que $I \leqslant f(x_\varepsilon) < I + \varepsilon$. Par croissance de f sur $]a,b[$, pour tout $x \in]a, x_\varepsilon[$, on a $I \leqslant f(x) \leqslant f(x_\varepsilon) < I + \varepsilon$. Ainsi, $f(x) \in]I, I+\varepsilon[$ pour tout $x \in]a, x_\varepsilon[$. C'est dire que $f(x)$ a une limite à droite en a, qui est I.

Supposons maintenant que f n'est pas minorée : c'est dire par définition que pour tout $A > 0$, il existe $x_A \in]a,b[$ tel que $f(x_A) < -A$. Mais alors par croissance de f, pour tout $x \in]a, x_A[$, $f(x) \leqslant f(x_A) < -A$. C'est précisément dire que la limite à droite de f en a vaut $-\infty$.

On procède de même en b (exercice). Le reste de l'énoncé s'en déduit en considérant la restriction de f à $]a, x_0[$ et $]x_0, b[$ pour tout $x_0 \in]a,b[$. □

3.2 Notations de Landau, négligeabilité, équivalence

3.2.1 Définitions et résultats

Définition 3.31: *Soient* f *et* g *deux fonctions définies respectivement sur* D_f *et* D_g *et* $x_0 \in \bar{D}_f \cap \bar{D}_g$ *(*x_0 *éventuellement infini).*

1. *On dit que* f *est négligeable devant* g *au voisinage de* x_0 *s'il existe un voisinage* V *de* x_0 *et une fonction* $\eta : V \cap D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$ *de limite nulle en* x_0 *telle que* $f(x) = \eta(x)g(x)$ *pour tout* $x \in V \cap D_f \cap D_g$. *On note alors*

$$f(x) =_{x \to x_0} o(g(x)). \tag{3.2.1}$$

2. *On dit que* f *est équivalent à* g *au voisinage de* x_0 *s'il existe un voisinage* V *de* x_0 *et une fonction* $\theta : V \cap D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$ *de limite* 1 *en* x_0 *telle que* $f(x) = \theta(x)g(x)$ *pour tout* $x \in V \cap D_f \cap D_g$. *On note alors*

$$f(x) \sim_{x \to x_0} g(x). \tag{3.2.2}$$

Remarque 3.32: Lorsque g ne s'annule pas dans un voisinage de x_0, on a

$$f(x) =_{x \to x_0} o(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \quad \text{et } f(x) \sim_{x \to x_0} g(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \tag{3.2.3}$$

En particulier,

$$f(x) =_{x \to x_0} o(1) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = 0, \quad \text{et } f(x) \sim_{x \to x_0} l \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = l, \text{ si } l \neq 0. \tag{3.2.4}$$

On dispose du critère séquentiel suivant

Proposition 3.33: *Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g et $x_0 \in \bar{D}_f \cap \bar{D}_g$ (x_0 éventuellement infini). On a l'équivalence*

$$f(x) =_{x\to x_0} o(g(x)) \Leftrightarrow \text{ pour toute suite } (u_n) \text{ qui tend vers } x_0,\ f(u_n) =_{n\to\infty} o(g(u_n))$$

ainsi que

$$f(x) \sim_{x\to x_0} g(x) \Leftrightarrow \text{ pour toute suite } (u_n) \text{ qui tend vers } x_0,\ f(u_n) \sim_{n\to\infty} g(u_n).$$

De cette caractérisation séquentielle se déduisent les propriétés similaires de manipulation des équivalents vus pour les suites.

Exemple 3.34: Négligeabilités et équivalences classiques : pour tout $0 < \alpha < \beta$ et $a > 0$

$$\ln(x) =_{x\to\infty} o(x^\alpha),\ x^\alpha =_{x\to\infty} o(x^\beta), \text{ et } x^\alpha =_{x\to\infty} o\left(e^{\beta x}\right), \tag{3.2.5}$$

$$\ln(x) =_{x\to 0} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right),\ x^\beta =_{x\to 0} o(x^\alpha), \tag{3.2.6}$$

ainsi que, pour $\alpha > 0$

$$\ln(1+x) \sim_{x\to 0} x,\ e^x - 1 \sim_{x\to 0} x,\ (1+x)^\alpha \sim_{x\to 0} 1+\alpha x,\ \sin(x) \sim_{x\to 0} x, \text{ et } 1-\cos(x) \sim_{x\to 0} \frac{x^2}{2}. \tag{3.2.7}$$

3.2.2 Complément : preuve des négligeabilités classiques

Le but de ce paragraphe est de donner la preuve des résultats évoqués en (3.2.5) et (3.2.6) :

Pour tout $\alpha > 0$, $\ln(x) = o(x^\alpha)$, pour $x \to \infty$: Posons $g(x) = \frac{\ln(x)}{x^\alpha}$, pour $x > 1$. Soit $\beta > 0$ tel que $\alpha\beta > 1$. On a alors $\left|g(x^\beta)\right| = g(x^\beta) = \frac{\ln(x^\beta)}{x^{\beta\alpha}} = \beta\frac{\ln(x)}{x^{\beta\alpha}} = \beta\frac{\int_1^x \frac{1}{u}\mathrm{d}u}{x^{\beta\alpha}}$. Par décroissance de la fonction inverse sur $]1, +\infty[$, on obtient la majoration grossière suivante : $\left|g(x^\beta)\right| \leqslant \beta\frac{x}{x^{\beta\alpha}}$. Or cette dernière quantité tend vers 0 quand $x \to \infty$ (car $\alpha\beta > 1$) et on conclut que $g(x^\beta) \to 0$ quand $x \to \infty$. Mais alors par composition de $x \mapsto x^{\frac{1}{\beta}}$ et de $y \mapsto g(y^\beta)$, on obtient que $g(x) \to 0$, quand $x \to \infty$. □

Pour tout $\alpha > 0$, $\ln(x) = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$, pour $x \to 0$, $x > 0$: il suffit d'appliquer le résultat précédent avec $y = \frac{1}{x}$: quand $x \to 0$, $x > 0$, $y = \frac{1}{x} \to \infty$ et par l'item précédent, on a $\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha} \xrightarrow[x\to 0, x>0]{} 0$. Or cette dernière quantité est égale à $-x^\alpha \ln(x) \xrightarrow[x\to 0, x>0]{} 0$. □

Pour tout $0 < \alpha < \beta$, $x^\alpha =_{x\to\infty} o(x^\beta)$, pour $x \to \infty$: c'est évident, car $\beta - \alpha > 0$. □

Pour tout $\alpha > 0, \beta > 0$, $x^\alpha = o\left(e^{\beta x}\right)$, pour $x \to \infty$: on considère $x > 0$. Posons $h(x) = \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}}$. La fonction $x \mapsto e^{\beta x}$ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$, de bijection réciproque $y = e^{\beta x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\beta}\ln(y)$. Ainsi, on a $h(x) = \frac{(\ln(y))^\alpha}{\beta^\alpha y}$. Or, si $x \to \infty$, on a $y \to \infty$ aussi (car $\beta > 0$). En utilisant le premier item, on obtient que $h(x) \to 0$ quand $x \to \infty$. □

3.3 Continuité

3.3.1 Continuité en un point

Définition 3.35: *Soit f fonction définie sur D_f et $x_0 \in D_f$. On dit que f est continue en x_0 si f a une limite en x_0. Dans le cas contraire, on dira que f est discontinue au point x_0.*

Proposition 3.36: *Si f est continue en x_0, la limite en question ne peut pas être infinie et vaut nécessairement $f(x_0)$.*

Démonstration. Montrons que cette limite ne peut pas être infinie : supposons le contraire. Alors pour tout $A = |f(x_0)| + 1 > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $f(x) > |f(x_0)| + 1$. Cela doit être en particulier vrai pour $x = x_0$, ce qui est absurde car $f(x_0) \leqslant |f(x_0)|$.

Il reste à montrer que la limite en question l est nécessairement égale à $f(x_0)$: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $|f(x) - l| < \varepsilon$. Ceci est en particulier vrai pour $x = x_0$: $|f(x_0) - l| < \varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il vient $l = f(x_0)$. □

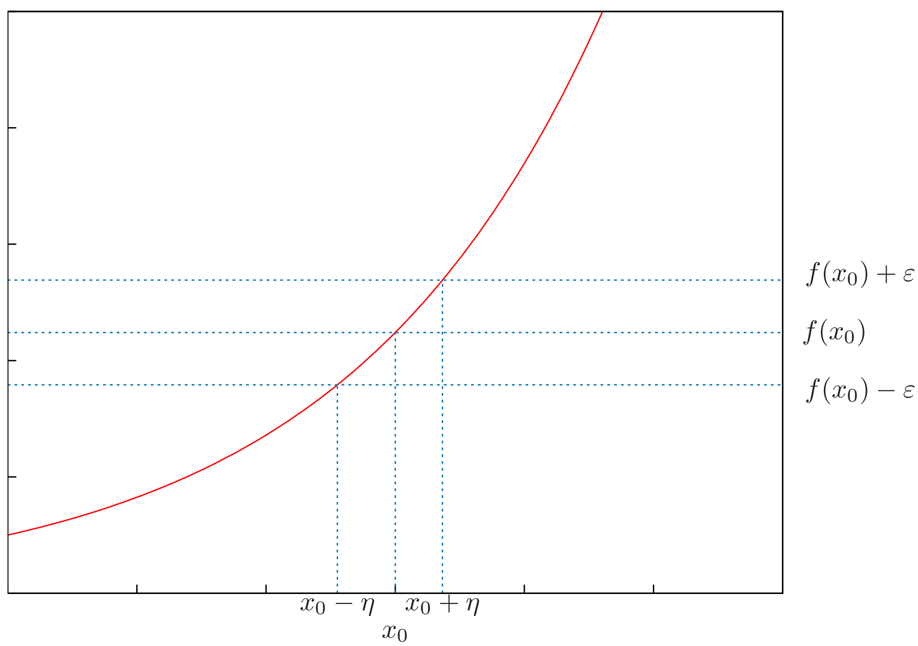


FIGURE 3.3 – La fonction f est continue en x_0 : pour tout intervalle $]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$ de longueur arbitraire autour de $f(x_0)$, il existe un petit intervalle $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ (dont la taille dépend de ε et de x_0) sur lequel f prend toutes ses valeurs dans $]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$.

On donne ici deux critères de continuité, qui se déduisent immédiatement de ce qui précède :

Proposition 3.37 (Critère séquentiel): *Soit f définie sur D_f et $x_0 \in D_f$. Alors f est continue en x_0 si et seulement si pour tout suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ qui tend vers x_0, $(f(u_n))_{n \geqslant 0}$ converge vers $f(x_0)$.*

Proposition 3.38 (Continuité et limites à droite et à gauche): *Soit f définie sur D_f et $x_0 \in D_f$. Alors f est continue en x_0 si et seulement si $f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$ existent, sont finies et égales à $f(x_0)$.*

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 3.39 (Prolongement par continuité): *Soient $a < c < b$ trois réels. Si f est une fonction définie sur $]a,b[\setminus\{c\}$ telle que $f(c^-)$ et $f(c^+)$ existent, sont finies et égales $f(c^-) = f(c^+)$, alors la fonction $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \neq c$ et $\tilde{f}(c) = f(c^-) = f(c^+)$ est une fonction continue en c. On dit alors que f est prolongeable par continuité en c.*

Remarque 3.40: Par un léger abus de notation, il est alors coutumier d'identifier f avec son prolongement $\tilde{f}$.

Exemple 3.41: La fonction $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est prolongeable par continuité en 0, en définissant $f(0) = 0$. C'est la conséquence de l'Exemple 3.11.

Remarque 3.42: Il existe plusieurs sortes de discontinuités en un point x_0 :

— le cas où $f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$ existent, sont finies, mais ne sont pas égales à $f(x_0)$. On pensera à la fonction définie par $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $f(0) = 2017$.

— discontinuités de première espèce : $f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$ existent, sont finies, mais sont différentes : c'est le cas de la fonction partie entière en 1 par exemple.

— discontinuité de seconde espèce : $f(x_0^-)$ ou $f(x_0^+)$ n'existent pas. C'est le cas de la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ par exemple, qui n'a ni limite à droite ni limite à gauche en 0.

Définition 3.43: *On dira enfin que f est continue sur D_f si elle est continue en chacun des points de D_f.*

Remarque 3.44: On rappelle sans démonstration les résultats usuels : les somme, produit, quotient, composée de fonctions continues sont continues. De même, les fonctions classiques sont continues sur leur ensemble de définition (polynômes, logarithmes, exponentielles, fonctions trigonométriques et hyperboliques, réciproques de ces fonctions, etc.).

3.3.2 Continuité sur un intervalle, Théorème des Valeurs Intermédiaires

Théorème 3.45 (Théorème des Valeurs Intermédiaires - Version 1): *L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle : soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I. Alors l'image de I par f, $f(I) = \{f(x), x \in I\}$ est un intervalle.*

Théorème 3.46 (Théorème des Valeurs Intermédiaires - Version 2): *Soit $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout $u \in [f(a), f(b)]$ (ou $[f(b), f(a)]$), il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = u$.*

Démonstration. Soient $f(x) < f(y)$ $(x, y \in I)$ deux éléments de $f(I)$. Soit $u \in]f(x), f(y)[$, montrons que $u \in f(I)$. Autrement dit, montrons qu'il existe $c \in I$ tel que $f(c) = u$. Supposons par exemple que $x < y$. Considérons l'ensemble suivant (voir Figure 3.4) :

$$A := \{t \in [x,y], f(t) \leqslant u\}. \tag{3.3.1}$$

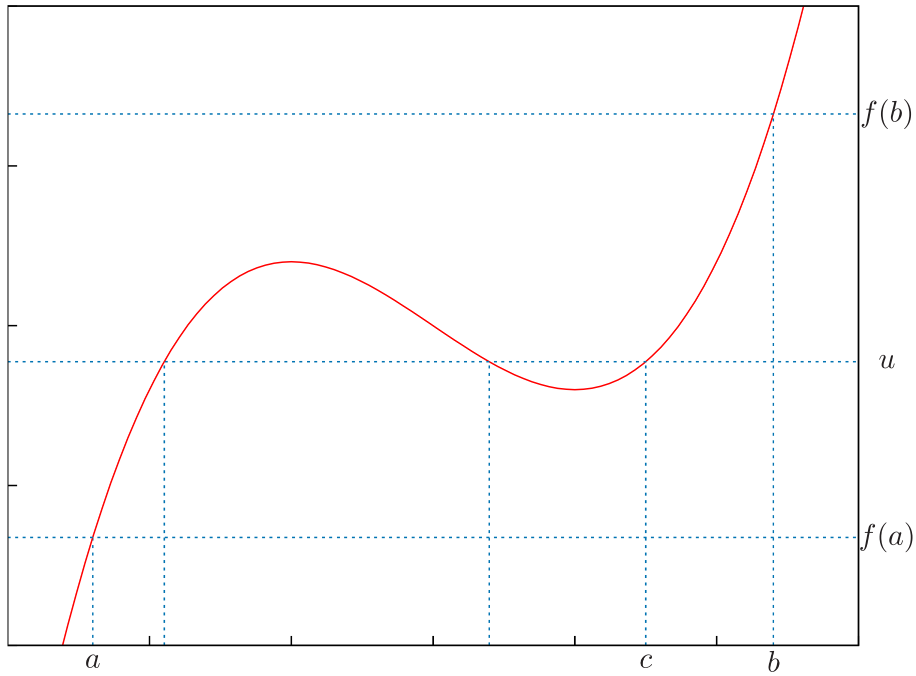


FIGURE 3.4 – Pour un $u \in]f(a), f(b)[$ donné, il peut exister plusieurs $c \in]a, b[$ tels que $f(c) = u$. Parmi eux, le c que l'on cherche dans la démonstration des Théorèmes 3.45 et 3.46 est celui le plus à droite possible.

L'ensemble A est non vide car $f(x) \leqslant u$ et donc $x \in A$. De plus A est borné car c'est un sous-ensemble de $[x, y]$. Par propriété de la borne supérieure, A admet une borne supérieure, notée c.

Je prétends que $f(c) = u$. En effet, par caractérisation de la borne supérieure par les suites (Théorème 1.25), il existe une suite $(t_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments de A qui converge vers c. Par définition de A, $f(t_n) \leqslant u$ pour tout $n \geqslant 0$. Comme f est continue, $f(t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(c)$ et donc par passage à la limite dans l'inégalité précédente, il vient $f(c) \leqslant u$.

Par ailleurs, $c < y$ (car sinon $c = y$ et donc $f(y) = f(c) \leqslant u$ ce qui est faux).

Ensuite, c est un majorant de A. Donc [2], pour tout $t \in]c, y[$, $f(t) > u$. C'est en particulier vrai pour la suite $t'_n = c + \frac{1}{n}$ qui converge vers c par valeurs supérieures : on a $f(c + \frac{1}{n}) > u$. Par passage à la limite pour $n \to \infty$ (possible car f est continue), il vient $f(c) \geqslant u$. Donc $f(c) = u$. $\square$

Exemple 3.47: Application : tout polynôme de degré impair P a au moins une racine réelle. En effet, $x \mapsto P(x)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$ (si son coefficient dominant est positif) ou tend vers $-\infty$ en $+\infty$ et vers $+\infty$ en $-\infty$ (si son coefficient dominant est négatif). Dans tous les cas, P prend des valeurs strictement positives et des valeurs strictement négatives. P étant continu, P s'annule nécessairement en au moins un point, par théorème des valeurs intermédiaires.

2. car sinon $f(t) \leqslant u$ et donc on aurait un $t \in A$, avec $t > c$, ce qui contredirait le fait que c est un majorant de A.

Une conséquence importante du Théorème des Valeurs Intermédiaires est le résultat suivant sur les homéomorphismes croissants :

Théorème 3.48 (Théorème de la bijection): *Soit I un intervalle non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On a alors l'équivalence suivante :*

$$f \text{ est injective sur } I \Leftrightarrow f \text{ est strictement monotone.} \tag{3.3.2}$$

Si tel est le cas, alors la fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est aussi continue. On dit f est un homéomorphisme de I sur $f(I)$.

Démonstration. Si f est strictement monotone, alors f est injective : en effet, pour tout $x, y \in I$, si $x \neq y$, on peut sans perte de généralité supposer que $x < y$. Mais alors $f(x) < f(y)$ si f est strictement croissante ou bien $f(x) > f(y)$ si f est strictement décroissante. Dans tous les cas, $f(x) \neq f(y)$ et f est donc bien injective. Notons que nous n'avons pas utilisé la continuité de f pour cette implication.

Réciproquement, montrons que toute fonction f continue injective est strictement monotone. Prouvons la contraposée : Soit f continue qui est non strictement monotone et prouvons que f n'est pas injective. Si f n'est pas strictement monotone, deux cas sont possibles : soit il existe $x < y < z$ tels que $f(x) < f(y)$ et $f(y) > f(z)$, soit il existe $x < y < z$ tels que $f(x) > f(y)$ et $f(y) < f(z)$. Nous traitons le premier cas et laissons le second cas similaire à titre d'exercice.

Considérons un $u \in \mathbb{R}$ tel que $u \in]\max(f(x), f(z)), f(y)[$ (par exemple le milieu de ce segment). Alors $f(x) < u < f(y)$ et donc par théorème des valeurs intermédiaires (possible car f est continue), il existe $c_1 \in]x, y[$, tel que $f(c_1) = u$. De même, $f(z) < u < f(y)$ et donc il existe $c_2 \in]y, z[$ tel que $f(c_2) = u$. Donc $f(c_1) = f(c_2)$ mais $c_1 < c_2$ donc f n'est pas injective.

Cela prouve l'équivalence demandée. Si maintenant f est injective sur I, elle est bijective de I sur son image $f(I)$, de bijection réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$. Il reste maintenant à montrer que la réciproque f^{-1} est continue sur I. f^{-1} (au même titre que f) est strictement monotone. On peut supposer pour fixer les idées que f et f^{-1} sont strictement croissantes. Si f^{-1} n'était pas continue, il existerait un $x_0 \in I$ pour lequel ou bien $f^{-1}(x_0^-) < f^{-1}(x_0)$ ou bien $f^{-1}(x_0) < f^{-1}(x_0^+)$. Si par exemple $f^{-1}(x_0^-) < f^{-1}(x_0)$, choisissons $u \in]f^{-1}(x_0^-), f^{-1}(x_0)[$. Mais alors pour tout $y < x_0$, $y < \frac{y+x_0}{2} < x_0$ et donc $f^{-1}(y) < f^{-1}\left(\frac{y+x_0}{2}\right) \leqslant f^{-1}(x_0^-)$ et donc $f^{-1}(y) < f^{-1}(x_0^-) < u$. De même, pour tout $y \geqslant x_0$, on a $f^{-1}(y) \geqslant f^{-1}(x_0) > u$.

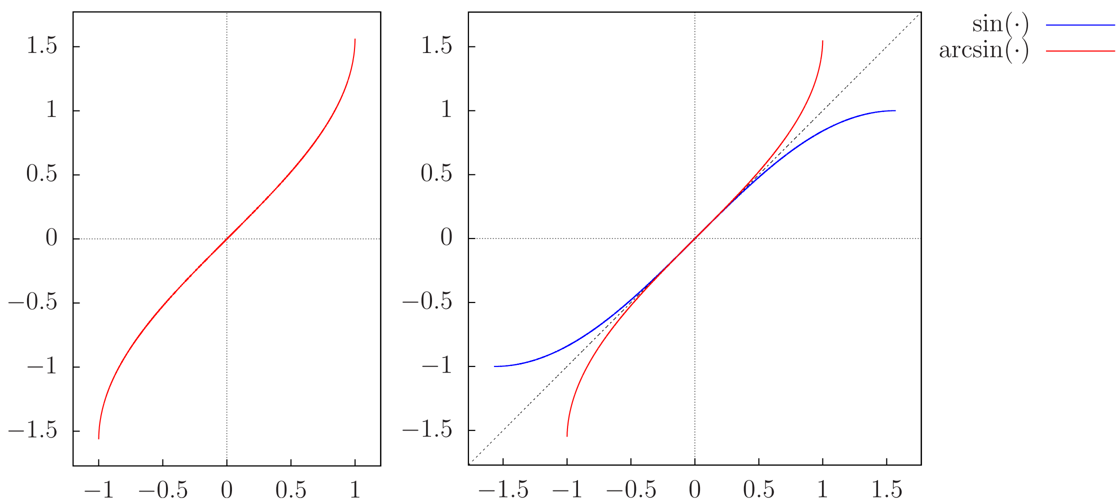
Conclusion : u n'est l'image par f^{-1} d'aucun $y \in I$, ce qui est absurde car $u = f^{-1}(f(u))$. $\square$

Remarque 3.49: Le graphe de f^{-1} se déduit de celui de f par la symétrie d'axe la première bissectrice $y = x$.

Exemple 3.50:
— La fonction sin est un homéomorphisme strictement croissant de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$. Sa bijection réciproque est notée $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (Voir Figure 3.5).
— La fonction cos est un homéomorphisme strictement décroissant de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Sa bijection réciproque est notée $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ (Voir Figure 3.6).

— La fonction tan est un homéomorphisme strictement croissant de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est notée $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (Voir Figure 3.7).

Attention!
Une erreur grossière (malheureusement) souvent vue dans les copies : certes, $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, mais la fonction arctan n'est surtout pas égale à $\frac{\arcsin}{\arccos}$!



(a) Fonction arcsin

(b) Le graphe de la fonction arcsin se déduit de celui de la restriction de la fonction sin sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par la symétrie d'axe $y = x$.

FIGURE 3.5 – Fonctions sin et arcsin.

EXERCICE 3.51: A la lecture des graphes de arcsin et arccos en Figures 3.5 et 3.6, formuler une conjecture sur la somme $\arcsin(x) + \arccos(x)$. La démontrer.

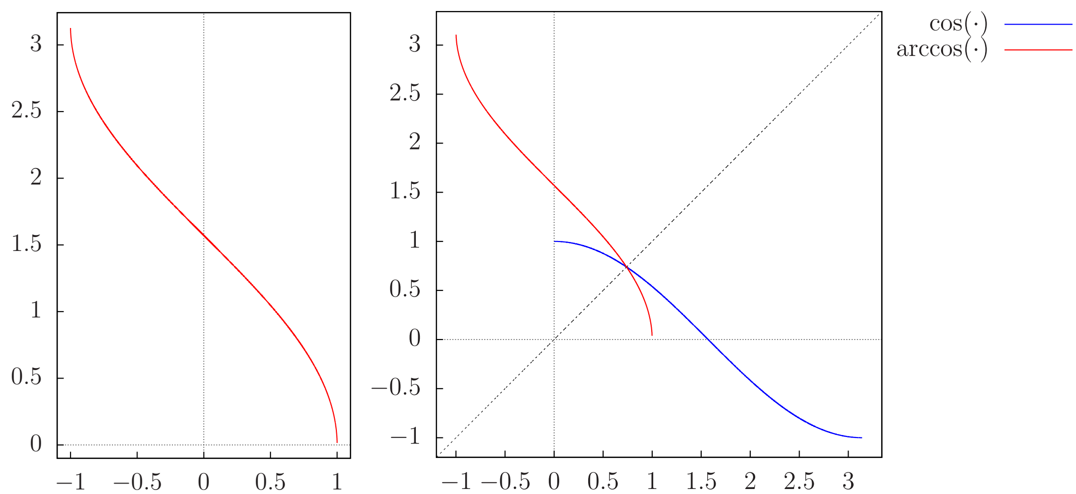
3.3.3 Continuité sur un segment

Un autre résultat fondamental est le suivant :

Théorème 3.52 (Version 1): *Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes : il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in [a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ avec c et c' tels que $f(c) = m$ et $f(c') = M$.*

Théorème 3.53 (Version 2): *L'image d'un segment $[a, b]$ $(a < b)$ par une fonction continue f est un segment.*

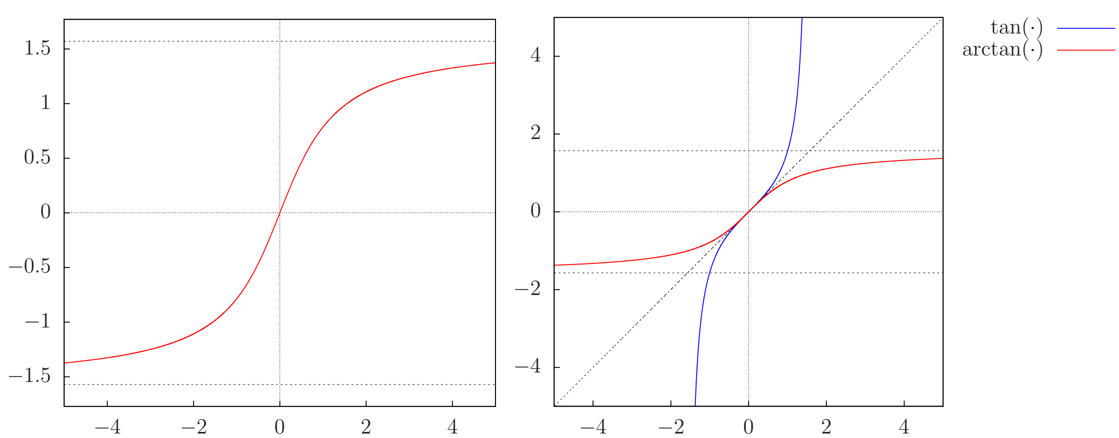
Démonstration. Montrons que f est majorée et minorée sur $[a, b]$. Si f n'était pas majorée, n'importe quel $n \geqslant 1$ ne serait pas un majorant : il existerait donc un $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) \geqslant n$. En particulier, par théorème des gendarmes (Proposition 2.38), on a



(a) Fonction arccos

(b) Le graphe de la fonction arccos se déduit de celui de la restriction de la fonction cos sur $[0, \pi]$ par la symétrie d'axe $y = x$.

FIGURE 3.6 – Fonctions cos et arccos.



(a) Fonction arctan

(b) Le graphe de la fonction arctan se déduit de celui de la restriction de la fonction tan sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par la symétrie d'axe $y = x$.

FIGURE 3.7 – Fonctions tan et arctan.

$f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Mais alors, $(x_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite bornée (incluse dans $[a, b]$). Par Théorème de Bolzano-Weierstrass (Théorème 2.76), il existe donc une sous-suite $(x_{\phi(n)})_{n \geqslant 1}$ de $(x_n)_{n \geqslant 1}$ qui est convergente. La fonction f étant continue, $\big(f(x_{\phi(n)})\big)_{n \geqslant 1}$ serait aussi convergente. Ceci est contradictoire avec le fait que $f(x_n) \to +\infty$. Donc f est majorée, et par un argument similaire, f est aussi minorée.

Par propriété de la borne supérieure et inférieure, $M = \sup\{f(x), x \in [a, b]\}$ et $m = \inf\{f(x), x \in [a, b]\}$ existent donc et on a en particulier $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

De plus par caractérisation de la borne supérieure par les suites, il existe une suite $(y_n)_{n \geqslant 0}$ dans $[a, b]$ telle que $(f(y_n))_{n \geqslant 0}$ converge vers M. Or $(y_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite bornée, donc on peut en extraire une sous-suite qui converge, par théorème de Bolzano-Weierstrass. Soit $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n \geqslant 0}$ cette sous-suite. Elle converge vers un certain $c \in [a, b]$. Par continuité de f, $\left(f(y_{\varphi(n)})\right)_{n \geqslant 0}$ converge donc vers $f(c)$. De plus on sait déjà que toute la suite $(f(y_n))_{n \geqslant 0}$ converge vers M. C'est donc aussi le cas de sa sous-suite $\left(f(y_{\varphi(n)})\right)_{n \geqslant 0}$ (Proposition 2.71). Par unicité de la limite $M = f(c)$. On prouve la même chose pour m ce qui achève la preuve du théorème. □

Attention!
Le Théorème 3.52 n'est plus vrai sur un intervalle qui n'est pas un segment : la fonction tan n'est pas bornée sur l'intervalle ouvert $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

3.4 Continuité uniforme

Motivons le paragraphe qui vient : si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, écrivons le fait que f est continue en tout point $x_1 \in I$: cela correspond à écrire que, pour tout $x_1 \in I$, la limite de $f(x)$ quand $x \to x_1$ est $f(x_1)$, c'est-à-dire :

$$\forall x_1 \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_1 > 0,\ \forall x \in]x_1 - \eta_1, x_1 + \eta_1[,\ |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon. \tag{3.4.1}$$

Nous avons noté ici η_1 pour insister sur le fait que le $\eta > 0$ qui convient dans (3.4.1) dépend a priori du point $x_1 \in I$ que l'on considère.

Le point sur lequel nous voulons insister dans ce paragraphe est le suivant : si maintenant on considère un point x_2 différent de x_1 et qu'on étudie la continuité de f en ce point, il n'y a aucune raison a priori que le η_1 qui convient pour x_1 soit le même que le η_2 qui convient pour x_2.

Prenons un exemple pour illustrer ce phénomène : soit la fonction dont le graphe est tracé en Figure 3.8. Essayons de quantifier la continuité de f aux points x_1 et x_2. Considérons pour cela deux intervalles centrés autour de $f(x_1)$ et $f(x_2)$ de longueur identique (2ε) et quantifions pour chaque point x_1 et x_2 le $\eta_i > 0$ maximal pour lequel la relation (3.4.1) est vérifiée.

Sur un voisinage de x_1, la fonction f est plus ou moins constante. Ainsi, la contrainte $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$ est vérifiée pour x dans un intervalle $]x_1 - \eta_1, x_1 + \eta_1[$ relativement grand. A l'inverse, la fonction a une pente importante au voisinage de x_2 : la contrainte $|f(x) - f(x_2)| < \varepsilon$ est vérifiée sur un intervalle $]x_2 - \eta_2, x_2 + \eta_2[$ visiblement plus petit.

Autrement dit, le $\eta_1 > 0$ qui convenait pour la relation (3.4.1) au point x_1 ne convient manifestement plus pour (3.4.1) au point x_2.

3.4.1 Définitions

La classe de fonctions que nous allons définir sont précisément celles pour lesquelles le $\eta > 0$ dans (3.4.1) ne dépend pas du point x_1 où on étudie la continuité de la fonction : le η est universel.

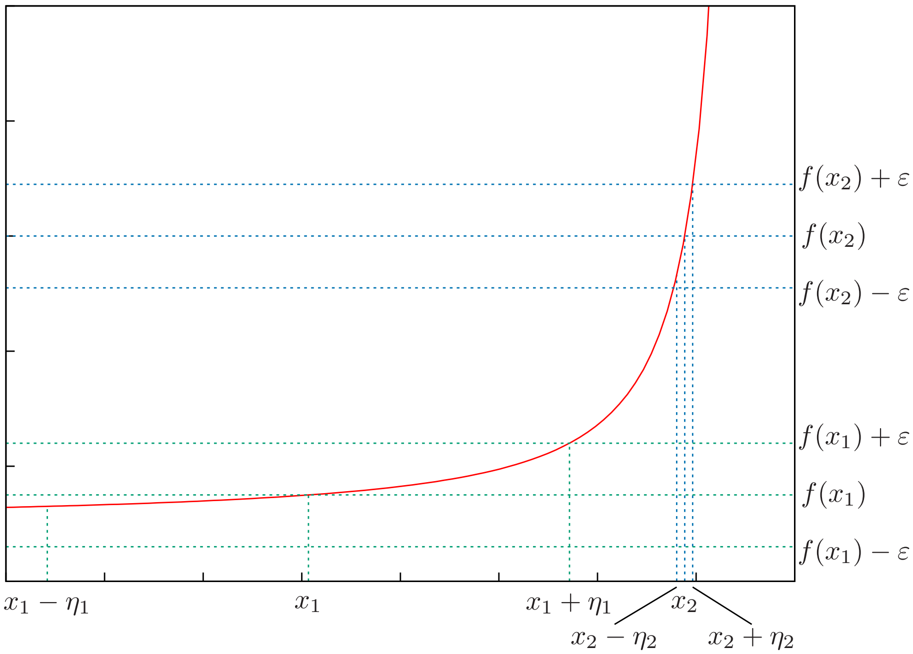


FIGURE 3.8 – La fonction f est continue aux points x_1 et x_2 mais le paramètre $\eta > 0$ dans (3.4.1) dépend a priori du point où on étudie la continuité.

Définition 3.54: *Soit f fonction définie sur D_f non vide. On dit que f est uniformément continue sur D_f si l'affirmation suivante est vérifiée :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x_0 \in D_f, \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap D_f, \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{3.4.2}$$

ou de manière équivalente (x et x_0 jouant alors des rôles symétriques)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in D_f, |x - y| < \eta, \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{3.4.3}$$

Insistons un peu : la relation (3.4.2) est très similaire à (3.4.1), à la différence notable que les quantificateurs $\forall x_1 \in I$ et $\exists \eta > 0$ ont été échangés. Dans (3.4.1), le $\eta > 0$ dépend du point x_1 considéré, alors que dans (3.4.2), on exige l'existence d'un $\eta > 0$ qui soit universel par rapport au point x_0 où on étudie la continuité.

Exemple 3.55: La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[1, +\infty[$: soit $\varepsilon > 0$. Posons $\eta = 2\varepsilon$. Alors pour tout $x, y \geqslant 1$ tels que $|x - y| < \eta$, on a

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leqslant \frac{|x - y|}{2} < \varepsilon,$$

car $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geqslant \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$.

Proposition 3.56: *Toute fonction uniformément continue est continue.*

Démonstration. C'est évident de par la Définition 3.17. Si un $\eta > 0$ universel convient pour tout x_0, ce même η convient en tout point x_0 en particulier. $\square$

La question naturelle est de savoir si la réciproque de la Proposition 3.56 est vraie. A la lumière du paragraphe motivant cette partie, on se dit que (par exemple) une fonction dont la pente augmente de plus en plus quand x augmente aura peu de chance d'être uniformément continue :

Proposition 3.57: *La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Ecrivons le contraire de (3.4.3) pour la fonction $x \mapsto x^2$: je prétends que

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x, y \in \mathbb{R},\ |x-y| < \eta \text{ et } \left|x^2 - y^2\right| \geqslant \varepsilon. \tag{3.4.4}$$

En effet, posons $\varepsilon = 1$ et fixons $\eta > 0$ quelconque. Alors, pour $x = \frac{1}{\eta}$ et $y = x + \eta/2$ on a

$$\left|x^2 - y^2\right| = |x+y|\,|x-y| = \frac{\eta}{2}(x+y) \geqslant \frac{\eta}{2} 2x = 1.$$

Donc $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. □

Exercice 3.58: Montrer que pour toute fonction f uniformément continue sur $\mathbb{R}$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant a + b\,|x|\,. \tag{3.4.5}$$

Ce résultat conforte l'idée suggérée en début de paragraphe selon laquelle une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$ est une fonction *qui ne croît pas trop vite en* $+\infty$. Mais ceci n'est pas une condition suffisante : il existe des fonctions vérifiant (3.4.5) (en particulier des fonctions bornées) qui ne sont pas uniformément continues, par exemple la fonction $t \mapsto \sin(t^2)$.

3.4.2 Fonctions continues sur un segment, Théorème de Heine

Par contre, on a le résultat (important) suivant :

Théorème 3.59 (Théorème de Heine): *Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment : soient $a \leqslant b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est uniformément continue sur $[a,b]$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde : il existe une fonction f continue sur $[a,b]$ qui n'y est pas uniformément continue : il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x, y \in [a,b]$ tels que $|x-y| < \eta$ et $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$. C'est en particulier vrai pour $\eta = \frac{1}{n}$, pour tout $n \geqslant 1$: il existe donc deux suites $(x_n)_{n \geqslant 1}$ et $(y_n)_{n \geqslant 1}$ telles que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$.

Comme $(x_n)_{n \geqslant 1}$ est incluse dans $[a,b]$, elle est bornée. Par théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \geqslant 1}$ qui converge vers un certain $l \in [a,b]$. Je prétends que la suite extraite $(y_{\varphi(n)})_{n \geqslant 1}$ (avec la même extraction que pour x) converge aussi vers l. En effet, comme $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, alors $\left|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\right| < \frac{1}{\varphi(n)} \leqslant \frac{1}{n}$, car $n \leqslant \varphi(n)$. Donc $\left|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et donc $y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} l$.

De plus, comme f est continue, les suites $\left(f(x_{\varphi(n)})\right)_{n \geqslant 1}$ et $\left(f(y_{\varphi(n)})\right)_{n \geqslant 1}$ sont convergentes, de même limite $f(l)$. Cela contredit le fait que $\left|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\right| \geqslant \varepsilon$. Absurde. □

Remarque 3.60: Ce qui fait marcher la preuve du Théorème de Heine est qu'il existe une extraction φ qui **simultanément** fait converger la suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ **et** la suite extraite $(y_{\varphi(n)})_n$. Le miracle ici est que l'extraction φ qui fait converger la suite x via le Théorème de Bolzano-Weierstrass convient aussi (sans manipulation supplémentaire) pour la suite y : ceci est exceptionnel (voir ce qu'on a dit au § 2.4.3) ! Ce qui fait fonctionner la preuve ici c'est qu'on a en plus l'inégalité $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$.

Une autre façon de faire serait de procéder par extraction simultanée (voir § 2.4.3) : comme les deux suites x et y sont bornées, il existe une extraction commune ρ telle que $(x_{\rho(n)})_n$ converge vers l et $(y_{\rho(n)})_n$ converge vers l'. Mais alors le fait que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ implique que $l = l'$ et on conclut de la même manière.

Remarque 3.61: Par ce théorème, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, 1]$ (car continue sur $[0, 1]$). Comme elle est uniformément continue sur $[1, +\infty[$, elle est en fait uniformément continue sur $[0, +\infty[$ tout entier.

3.4.3 Fonctions lipschitziennes, Théorème de point fixe

Définition 3.62: *Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$. On dit que f est lipschitzienne de rapport λ si*

$$\forall x, y \in D_f,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \lambda |x - y| . \tag{3.4.6}$$

Exemple 3.63: La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est lipschitzienne de rapport $\frac{1}{2}$ sur $[1, +\infty[$: pour tout $x, y \geqslant 1$, $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leqslant \frac{1}{2} |x - y|$. Par contre, elle n'est pas lipschitzienne sur $[0, 1]$: si tel était le cas, il existerait un $\lambda > 0$ tel que pour tout $x, y \in [0, 1]$, $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \lambda |x - y|$, et donc en particulier pour $y = 0$. Donc on aurait $\sqrt{x} \leqslant \lambda x$ et donc $0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \lambda$, ce qui est absurde car $\frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$.

Théorème 3.64: *Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.*

Démonstration. Soit f une fonction lipschitzienne de rapport $\lambda > 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, posons $\eta = \frac{\varepsilon}{\lambda} > 0$. Alors pour tout $x, y \in D_f$ tels que $|x - y| < \eta$, on a $|f(x) - f(y)| \leqslant \lambda |x - y| < \lambda \frac{\varepsilon}{\lambda} = \varepsilon$. □

☹ **Attention!**
Il existe des fonctions uniformément continues qui ne sont pas lipschitziennes (cf. $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$).

Théorème 3.65 (Théorème du point fixe): *Soit I un intervalle fermé et $f : I \to I$ une application lipschitzienne de rapport $\lambda \in]0, 1[$ (on dit que f est λ-contractante). Alors, f admet un unique point fixe, i.e. il existe un unique $l \in I$ tel que $f(l) = l$.*

Démonstration. Montrons l'unicité d'un tel point fixe : si $l_1, l_2 \in I$ sont deux points fixes, alors $|l_2 - l_1| = |f(l_2) - f(l_1)| \leqslant \lambda |l_2 - l_1|$. Ainsi $|l_2 - l_1| (1 - \lambda) \leqslant 0$. Or $(1 - \lambda) > 0$ donc $|l_2 - l_1| = 0$, i.e. $l_1 = l_2$. Il y a donc unicité du point fixe (sous réserve d'existence).

Montrons l'existence d'un point fixe : posons la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_0 \in I$ (quelconque fixé) et $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors on a pour $n \geqslant 1$,

$$|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})| \leqslant \lambda |u_n - u_{n-1}|. \tag{3.4.7}$$

En itérant cette inégalité [3], il vient

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant \lambda^n |u_1 - u_0|. \tag{3.4.8}$$

Ainsi, comme $\lambda \in]0,1[$, par théorème de domination (comparaison à la série géométrique de raison $\lambda \in]0,1[$), la série de terme général $(u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente, donc convergente (cf. Proposition 2.94). Par ailleurs, on a

$$\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} - u_0. \tag{3.4.9}$$

Le fait que la série de terme général $(u_{n+1} - u_n)$ est convergente veut exactement dire que le terme de gauche de (3.4.9) admet une limite finie pour $n \to \infty$. Donc le terme de droite de (3.4.9) admet aussi une limite finie quand $n \to \infty$ et donc la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers un certain $l \in I$ (car I fermé). Donc en particulier $f(u_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(l)$, car f est continue. En passant à la limite dans l'égalité $f(u_n) = u_{n+1}$ (toutes quantités convergentes), il vient $f(l) = l$. □

3. Il est possible par exemple de prouver ceci par récurrence (mais pour une éventuelle question de cours, rédiger cette récurrence n'est pas nécessaire) : l'inégalité (3.4.8) est évidente pour $n = 0$. Supposons maintenant cette inégalité vraie pour un certain $n \geqslant 0$. Alors, en utilisant (3.4.7), il vient $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leqslant \lambda |u_{n+1} - u_n|$ et donc par hypothèse de récurrence $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leqslant \lambda^{n+1} |u_1 - u_0|$, ce qui prouve (3.4.8) au rang $n + 1$.

Chapitre 4

Dérivabilité, formules de Taylor

Le but de ce chapitre est de revenir sur la notion de dérivabilité et les théorèmes usuels (théorème de Rolle, inégalité des accroissements finis, formules de Taylor) qui s'y rapportent.

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ ayant au moins deux points.

4.1 Définitions et rappels de propriétés

On se contente ici de rappels succincts sur la notion de dérivabilité ainsi que les règles et propriétés usuelles :

4.1.1 Dérivabilité en un point

Définition 4.1: *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite pour $x \to a$. Dans ce cas, on note $f'(a)$ cette limite.*

Définition 4.2: *Si f est dérivable en tout point a de I, on appelle $a \mapsto f'(a)$ la fonction dérivée de f.*

On rappelle sans démonstration les résultats suivants :

1. toute fonction dérivable en a est continue en a. La réciproque est fausse.
2. on définit de façon analogue les notions de dérivées à droite et à gauche au point a, et une fonction est dérivable en a si et seulement f est dérivable à gauche et à droite en a de dérivées égales.
3. si f est dérivable en a, alors on a le développement limité pour $x \to a$, $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + o(x-a)$. Réciproquement si f admet un développement limité de la forme $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + o(x-a)$ alors f est dérivable en a et $\alpha_0 = f(a)$ et $\alpha_1 = f'(a)$.
4. si I contient un voisinage de a, et si f a un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$. La réciproque est fausse : contre-exemple : $x \mapsto x^3$ en $x = 0$.

4.1.2 Dérivabilité sur un intervalle, fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geqslant 1$

Définition 4.3: *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Si $x \mapsto f'(x)$ (encore notée $f^{(1)}$) est continue sur I, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.*

Plus généralement, on pose $f^{(0)} = f$ et on suppose que pour un $k \geqslant 1$, $f^{(k-1)}$ est bien définie sur I. Si $f^{(k-1)}$ est dérivable en un point a de I, le nombre dérivée $\left(f^{(k-1)}\right)'(a)$ est noté $f^{(k)}(a)$ et dite la dérivée k-ième de f en a. Si de plus $f^{(k-1)}$ est dérivable en tout point a de I, on dira que f est k fois dérivable sur I. Et si enfin $x \mapsto f^{(k)}(x)$ est continue, on dira que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

On dira enfin que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I pour tout $k \geqslant 1$.

Définition 4.4: *On note $\mathcal{D}(I)$, (resp. $\mathcal{C}^k(I)$, $\mathcal{C}^\infty(I)$) l'ensemble des fonctions dérivables sur I (resp. de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I).*

Remarque 4.5: On a les inclusions

$$\mathcal{C}^\infty(I) \subset \ldots \subset \mathcal{C}^k(I) \subset \ldots \subset \mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{D}(I) \subset \mathcal{C}(I). \tag{4.1.1}$$

Exemple 4.6: Les fonctions usuelles (polynomiales, trigonométriques, exponentielles, logarithmiques, hyperboliques) sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur intervalle de définition.

Attention!

Toute fonction dérivable en a est continue en a, mais bien sûr la réciproque est fausse ! Contre-exemple : la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

Vous verrez plus tard qu'il existe des fonctions (et même une infinité de telles fonctions [a]) qui sont continues sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais dérivables en aucun point de $\mathbb{R}$! Des exemples célèbres en sont la fonction de Weierstrass [b] ou le mouvement Brownien [c].

a. `https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_continue_nulle_part_dérivable`
b. `https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_de_Weierstrass`
c. `https://en.wikipedia.org/wiki/Wiener_process`

Attention!

Les inclusions de la Remarque 4.5 sont strictes : il existe par exemple des fonctions dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ mais qui ne sont pas dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, autrement dit des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ mais dont la dérivée n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, posons

$$f : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{si } x \neq 0, \quad \text{et } 0 \text{ si } x = 0. \tag{4.1.2}$$

Ainsi,

— f est continue sur $\mathbb{R}$: elle est continue sur $\mathbb{R}^*$ par propriété des fonctions usuelles et $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = f(0)$ car c'est la limite de $x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et de $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ qui est bornée au voisinage de 0.

— f est dérivable sur $\mathbb{R}$: f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par propriété des fonctions usuelles de dérivée $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. De plus f est dérivable en 0 : le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers 0 quand $x \to 0$. Ainsi $f'(0)$ existe et vaut 0.

— La fonction f' n'est pas continue en 0 : c'est même pire que cela : elle n'a pas de limite pour $x \to 0, x \neq 0$. En effet, pour $x \neq 0$, $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Le premier terme de la somme précédente tend vers 0 quand $x \to 0$, mais le second n'a pas de limite pour $x \to 0$.

Exercice 4.7: Pour $k \geqslant 1$, trouver une fonction k fois dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée $k$ième n'est pas continue en 0.

4.1.3 Dérivation et somme, produit et composition

On rappelle sans démonstration que les somme, produit, quotient (sous réserve de dénominateur non nul), composée de fonctions dérivables sont dérivables. Plus précisément, pour toutes fonctions f et g, n fois dérivables sur leur ensemble de définition, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

— la fonction $\lambda f + g$ est n fois dérivable, et on a $(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}$ (la dérivation est linéaire),

— le produit fg est n fois dérivable et on a

$$\text{Formule de Leibniz :} \qquad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \tag{4.1.3}$$

La formule de Leibniz se prouve aisément par récurrence en utilisant que $(fg)' = f'g + fg'$ et l'identité bien connue $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Remarque 4.8 (largement hors-programme, ♠♠): Il existe aussi une formule pour la dérivée $n$ième d'une fonction composée, connue sous le nom de Formule de Faà di Bruno : pour toutes fonctions f et g n fois dérivables telle que $g \circ f$ a un sens, alors $g \circ f$ est n fois dérivable et on a

$$(g \circ f)^{(n)}(x) = \sum \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_n!} g^{(k)}(f(x)) \left(\frac{f^{(1)}(t)}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{f^{(2)}(t)}{2!}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{f^{(n)}(t)}{n!}\right)^{k_n}, \tag{4.1.4}$$

où $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ et la sommation porte sur tous les entiers $k_1, k_2, \ldots, k_n$ tels que $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots + nk_n = n$.

4.1.4 Dérivation d'une fonction réciproque

Le résultat suivant concerne un résultat de dérivation d'une fonction réciproque. C'est la continuité naturelle du Théorème 3.48 :

Proposition 4.9 (Dérivation de la réciproque): *Soit I un intervalle réel et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et strictement monotone sur I. Pour tout point a de I tel que $f'(a) \neq 0$, la bijection réciproque f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et on a*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}. \tag{4.1.5}$$

En particulier, si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}. \tag{4.1.6}$$

Démonstration. D'après le Théorème 3.48, on sait que $g = f^{-1}$ est continue en b (et même, par injectivité de g, quand $y \to b$ avec $y \neq b$, alors $g(y) \to g(b)$ avec $g(y) \neq g(b) = a$). Par hypothèse, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a, x\neq a]{} f'(a)$. Par composition des limites, $\frac{f(g(y))-f(a)}{g(y)-a} \xrightarrow[y\to b, y\neq b]{} f'(a)$. C'est exactement dire que $\frac{y-b}{g(y)-g(b)} \xrightarrow[y\to b, y\neq b]{} f'(a)$. Comme $f'(a) \neq 0$, l'inverse du quotient précédent converge aussi : $\frac{g(y)-g(b)}{y-b} \xrightarrow[y\to b, y\neq b]{} \frac{1}{f'(a)}$. □

Exemple 4.10: Cet exemple est la suite de l'Exemple 3.50 : les fonctions arcsin et arccos sont dérivables sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$ de dérivées respectives :

$$\forall x \in]-1,1[, \ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{et} \ \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{4.1.7}$$

Remarque 4.11:

— dans le cas où $f'(a) = 0$, la même démonstration dit que $\left|\frac{g(y)-g(b)}{y-b}\right| \xrightarrow[y\to b, y\neq b]{} +\infty$: le graphe de f^{-1} admet une tangente verticale en ces points. C'est par exemple le cas des fonctions arcsin et arccos en -1 et 1 (voir Figures 3.5 et 3.6).

— une façon de retrouver heuristiquement la formule (4.1.6) (mais pas de la prouver [1] !) est d'appliquer la formule de dérivée d'une fonction composée : on a $g(f(x)) = x$, donc par dérivation, $g'(f(x))f'(x) = 1$ et donc $g'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

4.2 Théorèmes de Rolle, théorèmes des accroissements finis

Proposition 4.12 (Théorème de Rolle): *Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que*

1. *f est continue sur $[a, b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a, b[$*
3. *$f(a) = f(b)$,*

alors il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Si f est constante, alors $f'(c) = 0$ pour tout $c \in]a, b[$. Supposons f non constante. Alors f est continue sur $[a, b]$ donc est bornée et atteint ses bornes : il existe $m < M$ tels que pour tout $x \in [a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, et il existe $c \in [a, b]$ et $d \in [a, b]$ tels que $f(c) = M$ et $f(d) = m$. Comme $m < M$, on a soit $f(a) \neq m$, soit $f(a) \neq M$.

1. Supposons pour commencer que $f(a) \neq M$. Mais alors $f(b) = f(a) \neq M$ et donc $c \in]a, b[$. Un tel c est l'endroit où f atteint son maximum, donc est en particulier un maximum local. Donc $f'(c) = 0$.
2. Dans le cas où $f(a) = f(b) \neq m$, alors d est différent de a et b et donc $d \in]a, b[$. De plus f admet son minimum en d donc c'est un minimum local donc $f'(d) = 0$.

1. On ne peut dériver la fonction $g = f^{-1}$ si on ne sait pas au préalable que g est dérivable.

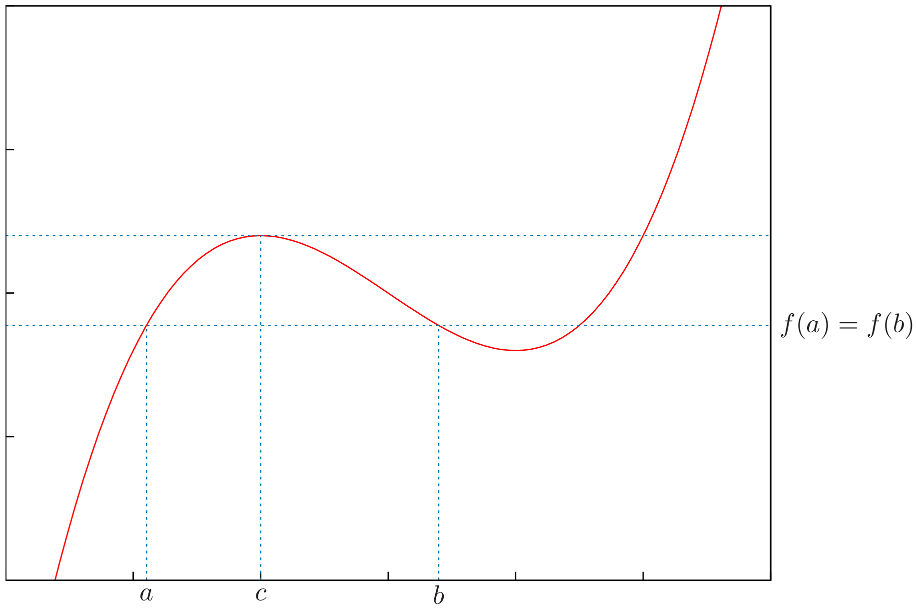


FIGURE 4.1 – Théorème de Rolle : il est bien sûr possible d'avoir plusieurs c tels que $f'(c) = 0$ entre a et b.

□

Corollaire 4.13: *Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vérifiant*

1. *f continue sur $[a, b]$,*
2. *f dérivable en tout point de $]a, b[$,*

alors entre deux zéros distincts de f il existe au moins un zéro de f'.

Démonstration. C'est une application évidente du Théorème de Rolle. □

Théorème 4.14 (Théorème des accroissements finis): *Soient $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que f vérifie :*

1. *f continue sur $[a, b]$,*
2. *f dérivable sur $]a, b[$*

alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Démonstration. Soit f une telle fonction. Soit λ un réel fixé et soit la fonction $\varphi_\lambda : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_\lambda(x) = f(b) - f(x) - \lambda(b - x)$. On va montrer qu'il est possible de choisir λ tel qu'il est possible d'appliquer le Théorème de Rolle à φ_λ.

1. φ_λ est continue sur $[a, b]$,
2. φ_λ est dérivable sur $]a, b[$.
3. on a $\varphi_\lambda(b) = 0$.

Il suffit donc de choisir λ de sorte que $\varphi_\lambda(a) = 0$ et d'appliquer le Théorème de Rolle. C'est en effet possible pour $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Pour un tel λ, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'_\lambda(c) = 0$. Or, pour tout $x \in]a, b[$, $\varphi'_\lambda(x) = -f'(x) + \lambda$ et donc $\lambda = f'(c)$. □

Corollaire 4.15 (Théorème des accroissements finis - Version 2): *Soient $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que*

1. *f est continue sur $[a, b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a, b[$*

alors pour tout $x \in [a, b]$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in [a, b]$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $f(x + h) = f(x) + hf'(x + \theta h)$.

Théorème 4.16 (Inégalité des accroissements finis - Version 1): *Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que*

1. *f continue sur $[a, b]$,*
2. *f dérivable sur $]a, b[$*

S'il existe des réels m et M tels que pour tout $x \in]a, b[$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors $m \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant M$.

Démonstration. Par Théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Le résultat vient du fait que $m \leqslant f'(c) \leqslant M$. □

Théorème 4.17 (Inégalité des accroissements finis - Version 2): *Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que*

1. *f continue sur $[a, b]$,*
2. *f dérivable sur $]a, b[$.*

S'il existe $k > 0$ tel que pour tout $x \in]a, b[$, $|f'(x)| \leqslant k$, alors $|f(b) - f(a)| \leqslant k\,|b - a|$.

Proposition 4.18: *Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I. Alors f est constante sur I si et seulement si pour tout x dans l'intérieur de I, $f'(x) = 0$.*

Démonstration. L'implication directe est évidente et l'autre vient de l'application de l'inégalité des accroissements finis. □

4.3 Formules de Taylor

4.3.1 Fonctions régulières et polynômes de Taylor

L'idée des formules de Taylor est la suivante : étant donnée une fonction f définie sur un intervalle I et a un point intérieur à I, on souhaite approcher f au voisinage de a par une fonction plus simple [2]. La classe de fonctions choisie ici est celle des fonctions polynomiales. Cette notion est très naturelle si on pense à la notion de dérivée : nous avons vu que si

2. La notion de fonction plus simple est arbitraire : dans ce chapitre, l'idée est d'approcher une fonction f par des polynômes, qu'on estime plus faciles à manipuler que la fonction elle-même. Cette idée d'approcher une fonction f par une fonction plus simple est un principe très général qu'on retrouve à de multiples reprises en analyse selon le contexte et l'utilisation qu'on en fait. Par exemple, la construction de l'intégrale de Riemann repose sur le fait qu'on peut approcher une fonction continue par des fonctions constantes par morceaux (voir votre cours de L1). Autre exemple : le principe des séries de Fourier (que vous verrez plus tard) est d'approcher une fonction f 2π-périodique par les fonctions élémentaires $x \mapsto \cos(nx)$ et $x \mapsto \sin(nx)$.

f est dérivable au point x_0, alors nous avons le développement limité suivant, valable au voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \text{ pour } x \to x_0. \tag{4.3.1}$$

Ainsi, nous venons d'approcher f par le polynôme de degré 1 $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, modulo un terme d'erreur. L'idée générale des formules de Taylor est de poursuivre cette approximation : peut-on approcher f par un polynôme de degré 2, 3, etc. et peut-on quantifier l'erreur commise dans cette approximation ? La réponse est positive, pour peu que f soit suffisamment régulière au voisinage de x_0.

Définition 4.19: *Soit $n \geqslant 1$, une fonction f définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit x_0 un point intérieur à I. On suppose que f est n-fois dérivable en x_0. On définit le polynôme de Taylor de degré $n \geqslant 0$ de la fonction f au point x_0, comme la fonction*

$$x \mapsto P_n^{f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{4.3.2}$$

Exemple 4.20: Ainsi, les premiers polynômes de Taylor d'une fonction f (suffisamment dérivable au point x_0) sont :

$$\begin{aligned}
&P_0^{f,x_0}(x) = f(x_0) \text{ (polynôme constant, de degré 0)},\\
&P_1^{f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \text{ (fonction affine)},\\
&P_2^{f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \text{ (polynôme du second degré)},\\
&P_3^{f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3.
\end{aligned}$$

Exercice 4.21: Calculer l'expression explicite des premiers polynômes de Taylor au point $x_0 = 1$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1-x}{(1+x)^2+1} + \frac{1}{2}$ donnée en Figure 4.2.

☹ **Attention!**
L'approximation d'une fonction f par son polynôme de Taylor d'ordre n en x_0 n'a d'intérêt qu'au voisinage de x_0, c'est-à-dire sur un petit intervalle $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, pour $\varepsilon > 0$: à titre d'illustration, on se convaincra à la lecture de la Figure 4.2 que l'approximation de $f(x)$ par son polynôme de Taylor de degré 3 en $x_0 = 1$, i.e. $P_3^{f,1}(x)$ est sans doute très mauvaise pour $x' = 4$. Si on souhaite une bonne approximation de f au point $x' = 4$, il conviendra de considérer la famille des polynômes de Taylor $\left(P_n^{f,4}(x)\right)_n$ au lieu de $\left(P_n^{f,1}(x)\right)_n$.

4.3.2 Formules de Taylor

Le point de départ de ce paragraphe est le résultat fondamental suivant, souvent appelé *Théorème fondamental de l'analyse* :

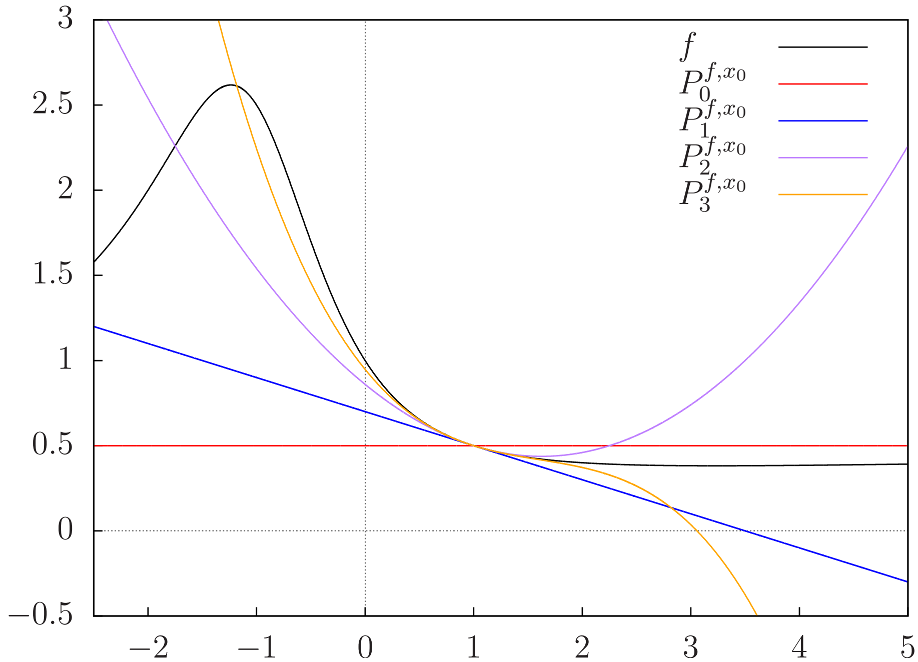


FIGURE 4.2 – Les 4 premiers polynômes de Taylor P_n^{f,x_0} $(n = 0, \dots, 3)$ correspondant à la fonction $f : x \mapsto \frac{1-x}{(1+x)^2+1} + \frac{1}{2}$ au point $x_0 = 1$.

Théorème 4.22 (Théorème fondamental de l'analyse): *Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Posons*

$$F : x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Alors F est dérivable sur $[a, b]$ et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Démonstration. Soit $c \in [a, b]$. f est continue en c : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in]c - \eta, c + \eta[\cap [a, b]$, on a $|f(t) - f(c)| < \varepsilon$. Mais alors, pour tout $x \in]c - \eta, c + \eta[\cap [a, b]$, (on considère pour simplifier le cas $x \geqslant c$, l'autre cas $x \leqslant c$ se traitant de la même façon)

$$\begin{aligned} |F(x) - F(c) - (x - c)f(c)| &= \left| \int_c^x f(t)\mathrm{d}t - (x - c)f(c) \right|, \\ &= \left| \int_c^x (f(t) - f(c))\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_c^x |f(t) - f(c)|\, \mathrm{d}t \leqslant \varepsilon(x - c). \end{aligned}$$

Ainsi, pour $x \in]c - \eta, c + \eta[\cap [a, b]$, $x \neq c$

$$\left| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Ceci est exactement dire que F est dérivable en c, de dérivée $F'(c) = f(c)$. $\square$

Corollaire 4.23: *Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors*

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Conséquence évidente du théorème précédent, car f' est continue sur $[a,b]$. □

Les formules de Taylor donnent une expression de l'erreur commise quand on remplace la fonction f par son polynôme de Taylor d'ordre n. La première formule de Taylor est la formule de Taylor avec reste intégral :

Théorème 4.24 (Formule de Taylor avec reste intégral): *Soit I un intervalle, $n \geqslant 1$, $f : I \to \mathbb{R}$ et x_0 un point intérieur à I. On suppose f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Alors on a, pour $x \in I$,*

$$f(x)=P_n^{f,x_0}(x)+\int_{x_0}^x \frac{(x-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(u)\mathrm{d}u. \tag{4.3.3}$$

Remarque 4.25: Par le changement de variables $t=\frac{u-x_0}{x-x_0}$, la formule de Taylor avec reste intégral peut aussi s'écrire sous la forme

$$f(x)=P_n^{f,x_0}(x)+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}((1-t)x_0+tx)\mathrm{d}t. \tag{4.3.4}$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur n. Pour $n=0$, cela résume à écrire, pour f de classe $\mathcal{C}^1$,

$$f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^x f'(u)\mathrm{d}u,$$

ce qui est exactement le Corollaire 4.23. Supposons la propriété vraie au rang n. Soit maintenant f de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur I. Alors en particulier, f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, et donc par hypothèse de récurrence

$$f(x)=P_n^{f,x_0}(x)+\int_{x_0}^x \frac{(x-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(u)\mathrm{d}u.$$

Intégrons par parties le reste :

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^x \frac{(x-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(u)\mathrm{d}u &= \left[-\frac{(x-u)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(u)\right]_{u=x_0}^x - \int_{x_0}^x -\frac{(x-u)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(u)\mathrm{d}u,\\ &= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)+\int_{x_0}^x \frac{(x-u)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(u)\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}f(x)&=P_n^{f,x_0}(x)+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)+\int_{x_0}^x \frac{(x-u)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(u)\mathrm{d}u,\\ &=P_{n+1}^{f,x_0}(x)+\int_{x_0}^x \frac{(x-u)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+2)}(u)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

D'où la propriété par récurrence. □

Théorème 4.26 (Formule de Taylor-Lagrange): *Soit $I = [a, b]$ un intervalle, x_0 un point dans l'intérieur de I et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et dont la dérivée $(n+1)$-ième existe sur $]a, b[$. Alors pour tout $x_0, x \in I$, il existe $c \in]x_0, x[$ tel que*

$$f(x) = P_n^{f,x_0}(x) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \tag{4.3.5}$$

Démonstration. Le cas $n = 0$ correspond à l'égalité des accroissements finis. Pour $n \geqslant 1$, on considère la fonction

$$\Theta_n(t) = f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k - \lambda \frac{(x - t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On choisit λ tel que $\Theta_n(x_0) = 0$. Comme $\Theta_n(x) = 0$ et que Θ_n vérifie les hypothèses du théorème de Rolle, il existe $c \in]x_0, x[$ tel que $\Theta_n'(c) = 0$. Or

$$\begin{aligned}
\Theta_n'(t) &= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x - t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x - t)^{k-1} + \lambda \frac{(x - t)^n}{n!}, \\
&= -f'(t) - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x - t)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x - t)^{k-1} + \lambda \frac{(x - t)^n}{n!}, \\
&= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n + \lambda \frac{(x - t)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Et donc comme $\Theta_n'(c) = 0$, il vient $\lambda = f^{n+1}(c)$. D'où le résultat. □

Théorème 4.27 (Formule de Taylor-Young): *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point intérieur à I et $f : I \to \mathbb{R}$ dont on suppose qu'elle admet une dérivée d'ordre n au point x_0. Alors, pour $x \in I$*

$$f(x) = P_n^{f,x_0}(x) + (x - x_0)^n \epsilon(x), \tag{4.3.6}$$

avec $\epsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$.

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur n. Posons H_n l'affirmation : pour toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$, n-fois dérivable au point x_0, on a :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{(x - x_0)^n} \left(f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \right) = 0. \tag{4.3.7}$$

H_1 est vraie, c'est la définition de la dérivabilité. Supposons donc H_n vraie et considérons $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable $(n+1)$ fois en x_0. La fonction dérivée f' est donc n fois dérivable en x_0. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, on a

$$\left| f'(t) - f'(x_0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(t - x_0)^k \right| \leqslant \varepsilon \left| t - x_0 \right|^n. \tag{4.3.8}$$

On définit sur $I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ les fonctions dérivables h et g par

$$h(t) = f(t) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(t - x_0)^k$$

et
$$g(t) = \frac{\varepsilon}{n+1} |t - x_0|^n (t - x_0)$$
Le fait que H_n est vraie implique que
$$\forall t \in I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, \ \left|h'(t)\right| \leqslant g'(t).$$
En utilisant l'égalité des accroissements finis généralisées (voir Exercice 4.28 ci-dessous), il vient $|h(x) - h(x_0)| \leqslant g(x) - g(x_0)$ et donc
$$\forall x \in I \cap]x_0 - \eta, x_0 + \eta[, \ \frac{1}{|x - x_0|^{n+1}} \left| f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{n+1} \leqslant \varepsilon.$$
D'où le résultat. □

Exercice 4.28 (Egalité des accroissements finis généralisée): Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Chapitre 5

Equations différentielles

5.1 Définitions et problématique

5.1.1 Des exemples venus de la physique

Dans de nombreux domaines (physique, biologie, chimie, économie, etc.) on étudie des quantités qui dépendent d'un paramètre t (position d'une particule, intensité électrique dans un circuit, concentration d'un composant dans une solution, taille d'une population, cours du baril de pétrole, etc.). Même si cela n'a aucune raison d'être forcément le cas, le paramètre t en question est souvent un temps, et nous garderons cette intuition dans la suite.

Cette quantité, notée $x(t)$ (ou $I(t)$, $f(t)$, etc) sera généralement un vecteur dans $\mathbb{R}^d$, pour $d \geqslant 1$, ou plus simplement un réel si $d = 1$. Ce que l'on cherche à connaitre est donc **une fonction du temps** : $t \mapsto x(t)$.

Les lois de la physique (ou les modèles proposés par les biologistes, économistes) font qu'il est souvent possible d'écrire une relation entre la fonction $t \mapsto x(t)$ et ses dérivées successives $t \mapsto (x'(t), x''(t), \dots)$ [1], qui représentent les variations infinitésimales de la quantité $x(t)$ en fonction du temps t.

Quelques exemples :

1. Charge d'un condensateur de capacité C à travers une résistance R, sous un générateur de tension E. Si $q(t)$ est la charge du condensateur, alors q vérifie
$$E = \frac{q(t)}{C} + Rq'(t). \tag{5.1.1}$$
2. Charge d'un condensateur de capacité C à travers une résistance R et une bobine de conductance L, sous un générateur de tension E. Si $q(t)$ est la charge du condensateur, alors q vérifie
$$E = \frac{q}{C} + Rq'(t) + Lq''(t). \tag{5.1.2}$$
3. Oscillations d'un pendule : si $\theta(t)$ est l'angle formé avec la verticale par un pendule de masse m, de longueur l, le principe fondamental de la dynamique dit que $\theta(t)$ vérifie
$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\sin(\theta(t)) = 0. \tag{5.1.3}$$

1. sous réserve que l'on sache que cette fonction soit suffisamment régulière, bien sûr.

4. Petites oscillations d'un ressort : si $x(t)$ est la position d'une masse m reliée à un mur via d'un ressort de raideur k glissant horizontalement sans frottements, alors $x(t)$ vérifie
$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0. \tag{5.1.4}$$

5.1.2 Notion d'équation différentielle

Le cadre de ce chapitre est le suivant : soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $I =]a, b[$, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Insistons sur le fait que cette définition autorise des intervalles non bornés.

Définition 5.1: *Soit $d \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$ et $F : I \times \underbrace{\mathbb{R}^d \times \ldots \times \mathbb{R}^d}_{n+1 \text{ fois}} \to \mathbb{R}^d$ une fonction. L'équation*
$$F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0 \tag{5.1.5}$$
est appelée équation différentielle d'ordre n d'inconnue y.

Résoudre (5.1.5)*, c'est trouver une fonction f n fois dérivable sur I telle que pour tout $t \in I$,*
$$F(t, f(t), f'(t), \ldots, f^{(n)}(t)) = 0.$$

Exemple 5.2: L'équation différentielle (5.1.1) est d'ordre 1, alors que les équations (5.1.2), (5.1.3) et (5.1.4) sont d'ordre 2.

Le cadre correct d'étude d'équations différentielles correspond au cas où on est capable d'exprimer la dérivée la plus élevée $y^{(n)}$ en fonction de ses dérivées d'ordre plus faible :

Définition 5.3: *On dit qu'une équation différentielle est* sous forme résolue sur l'intervalle *I si elle peut s'écrire sous la forme*
$$y^{(n)}(t) = G(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)), \ t \in I. \tag{5.1.6}$$

☹ **Attention!**

Toutes les équations citées plus haut sont sous forme résolue. Par contre, l'équation
$$ty'(t) = y(t)^2 \tag{5.1.7}$$
ne peut pas être mise sous forme résolue sur $\mathbb{R}$ car exprimer $y'(t)$ en fonction du reste nécessite de pouvoir diviser par t, ce qui n'est pas possible sur $\mathbb{R}$ tout entier (il y a un problème en 0 !).

Il n'est pas possible de restreindre l'étude de (5.1.7) à $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, car cet ensemble n'est pas un intervalle. Il faut donc faire **deux études séparées** de (5.1.7) sur les intervalles $I_1 =]-\infty, 0[$ puis sur $I_2 =]0, +\infty[$. Sur chacun de ces deux intervalles, il est alors possible d'écrire (5.1.7) sous forme résolue en écrivant
$$y'(t) = \frac{1}{t}y(t)^2.$$

Toute la question est alors de savoir s'il est possible de trouver des solutions de (5.1.7) définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. Il s'agit du problème de **raccordement de solutions**.

5.1.3 Condition initiale et problème de Cauchy

Si on ne spécifie rien de plus à l'équation (5.1.6), il est souvent possible de trouver une **infinité** de solutions à l'équation. Prenons un exemple simple : l'équation

$$y'(t) = 0 \tag{5.1.8}$$

admet une infinité de solutions, qui sont bien sûr les fonctions constantes : pour tout $C \in \mathbb{R}$, la fonction telle que $y(t) = C$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ est solution de (5.1.8).

Si on souhaite obtenir une unique solution, on impose usuellement une condition supplémentaire, sous la forme d'une **condition initiale**. Dans l'exemple de (5.1.8), cette condition s'exprime sous la forme

$$y(t_0) = \alpha, \tag{5.1.9}$$

pour t_0 un instant et α une constante donnés à l'avance. Dans ce cas, il existe une **unique fonction** vérifiant à la fois (5.1.8) et (5.1.9), qui est bien sûr la fonction constante $y(t) = \alpha$.

Compliquons maintenant un peu l'exemple précédent, en considérant maintenant l'équation **d'ordre** 2 suivante :

$$y''(t) = 0. \tag{5.1.10}$$

Dans ce cas, toute solution de (5.1.10) est de la forme

$$y(t) = At + B$$

où A et B sont des constantes réelles quelconques. Il y a donc autant de solutions à (5.1.10) qu'il y a de choix de A et de B, c'est-à-dire une infinité.

Si on souhaite avoir une unique solution, il faut de même spécifier une condition initiale, similaire à (5.1.9) : on se donne a priori un instant t_0 et une valeur α et on exige que

$$y(t_0) = \alpha. \tag{5.1.11}$$

Mais contrairement au premier exemple (5.1.8), cette condition ne suffit pas à assurer l'unicité de la solution. Elle ne donne qu'une relation entre A et B :

$$At_0 + B = \alpha.$$

Pour obtenir l'unicité, il est nécessaire d'imposer une seconde condition initiale, que nous faisons le choix de porter sur la valeur de la dérivée de y **au même instant** t_0 :

$$y'(t_0) = \beta. \tag{5.1.12}$$

Dans ce cas, cette dernière condition impose $A = \beta$ et donc $B = \alpha - \beta t_0$: nous obtenons une unique solution. Ces deux exemples nous conduisent à la définition suivante :

Définition 5.4: *Soit $n \geqslant 1$. On appelle* ***problème de Cauchy*** *la donnée de*

1. *Une équation différentielle d'ordre* n *sur un intervalle* I *:*

$$y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)),\ t \in I \tag{5.1.13}$$

2. *Une condition initiale : pour* $t_0 \in I$ *et* $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$*,* n *constantes fixées*

$$y(t_0) = z_0, y'(t_0) = z_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}. \tag{5.1.14}$$

Si f *est une fonction sur* I*, on dira que* f *est* ***solution du problème de Cauchy*** *associé à* (5.1.13) *et* (5.1.14) *si*

1. f *est* n*-fois dérivable sur l'intervalle* I*,*
2. *Pour tout* $t \in I$*,* $f^{(n)}(t) = F(t, f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t))$*,*
3. $f(t_0) = z_0, f'(t_0) = z_1, \dots, f^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}$*.*

Proposition 5.5 Comment se ramener au cas $n = 1$: *Soit le problème de Cauchy dans* $\mathbb{R}^d$ *d'ordre* n

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) &= F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)),\ t \in I, \\ y(t_0) &= z_0, y'(t_0) = z_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}. \end{aligned}$$

Alors, y *est solution de ce problème de Cauchy si et seulement si le vecteur* $v(t) := (v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)) := (y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ *est solution du problème de Cauchy dans* $\left(\mathbb{R}^d\right)^n$ *d'ordre* 1 *suivant :*

$$v'(t) = \begin{pmatrix} v_2(t) \\ v_3(t) \\ \vdots \\ F(t, v_1(t), \dots, v_n(t)) \end{pmatrix},$$

avec

$$v(t_0) = (z_0, \dots, z_{n-1}).$$

Démonstration. y est solution de la première équation différentielle si et seulement si $v'(t) = (y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = (y'(t), y''(t), \dots, F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)))$ si et seulement si $v'(t) = (v_2(t), v_3(t), \dots, F(t, v_1(t), \dots, v_n(t))$. L'équivalence de la condition initiale est claire. □

Autrement dit, cette proposition dit qu'un problème de Cauchy d'ordre n peut se ramener à un problème de Cauchy d'ordre 1, quitte à augmenter la dimension de l'espace dans lequel vit la solution. Cependant, ceci n'a qu'un intérêt théorique : le système d'ordre 1 a la même difficulté de résolution que le système d'ordre n.

5.1.4 Problématiques

Les questions posées dans ce chapitre sont : à un problème de Cauchy donné,

1. Existe-t-il au moins une solution $t \mapsto f(t)$? Sur quel intervalle ?
2. Si oui, cette solution est-elle unique ?

3. Que peut-on dire sur l'ensemble de définition de la solution ? Se peut-il que cet ensemble ne soit pas $\mathbb{R}$ tout entier ?
4. Peut-on calculer explicitement cette solution (à l'aide des fonctions usuelles) ?

Nous nous contenterons dans ce chapitre de considérer des exemples pour lesquels il est possible de répondre par l'affirmative à chacune de ces questions.

5.2 Equations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2

Ici $d = 1$ et $I =]\alpha, \beta[$ avec $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant \infty$.

Définition 5.6: *1. Si a, b et c sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, l'équation*

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t), \tag{5.2.1}$$

est appelée équation linéaire d'ordre 1.

2. Si a, b, c et d sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, l'équation

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = d(t), \tag{5.2.2}$$

est appelée équation linéaire d'ordre 2.

3. Dans les deux cas, si le second membre est nul ($c = 0$ dans le premier cas ou $d = 0$ dans le second), c'est-à-dire

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0,$$
$$\textit{ou } a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0,$$

on dit que l'équation est homogène.

Proposition 5.7: *L'ensemble des solutions $\mathcal{H}_0$ de l'équation homogène $a(t)y'(t)+b(t)y(t) = 0$ (resp. $a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0$) est un espace vectoriel.*

Démonstration. Faisons la preuve dans le cas d'ordre 1 et laissons le cas d'ordre 2 à titre d'exercice. Il suffit de montrer que $\mathcal{H}_0$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Il suffit pour cela de montrer que si $f \in \mathcal{H}_0$ et $g \in \mathcal{H}_0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + \lambda g \in \mathcal{H}_0$. On a donc $a(t)f'(t) + b(t)f(t) = 0$ et $a(t)g'(t) + b(t)g(t) = 0$. Additionnant la première identité avec la seconde multipliée par λ, le résultat vient. □

Proposition 5.8: *Supposons que f_0 soit **une** solution particulière de l'équation $a(t)y'(t)+ b(t)y(t) = c(t)$. Alors pour **toute** solution f de $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$, $g = f - f_0$ est solution de l'équation homogène $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$.*

Réciproquement, si g est une solution de l'équation homogène, alors $f = g + f_0$ est solution de l'équation $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$.

Le même énoncé est vrai dans le cas du second ordre.

Démonstration. Il suffit d'écrire le fait que $a(t)f_0'(t) + b(t)f_0(t) = c(t)$ et que $a(t)f'(t) + b(t)f(t) = c(t)$, puis de soustraire ces deux équations pour obtenir que $a(t)(f - f_0)'(t) + b(t)(f - f_0)(t) = 0$. La réciproque se prouve de la même façon. □

Pour résoudre entièrement l'équation avec second membre, il (faut et) il suffit de :

— Trouver **toutes les solutions** de l'équation homogène,

— Trouver **une solution particulière** de l'équation avec second membre.

5.2.1 Equation du premier ordre

Le cas homogène :

Selon le principe précédent, il s'agit de trouver **toutes** les solutions sur I de l'équation

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0.$$

Proposition 5.9: *Si la fonction a ne s'annule pas sur I, l'ensemble des solutions de l'équation $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$ est*

$$\mathcal{H}_0 = \{t \mapsto \lambda \exp(-A(t)), \lambda \in \mathbb{R}\},$$

*où $t \mapsto A(t)$ est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$ sur I. Ainsi, $\mathcal{H}_0$ **est un espace vectoriel de dimension** 1.*

Démonstration. Soit f une fonction dérivable sur I. Alors f est solution de l'équation homogène si et seulement si $f'(t) + \frac{b(t)}{a(t)} f(t) = 0$, ce qui équivaut à $e^{A(t)}(f'(t) + \frac{b(t)}{a(t)} f(t)) = 0$. Or, $e^{A(t)}(f'(t) + \frac{b(t)}{a(t)} f(t))$ est égal à $e^{A(t)}(f'(t) + A' f(t))$, par définition de A. On reconnait donc là la dérivée du produit $e^{A(t)} f(t)$. Ainsi, f est solution de l'équation homogène si et seulement si $\frac{d}{dt}\left(e^{A(t)} f(t)\right) = 0$ ce qui équivaut au fait qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in I$, $f(t)e^{A(t)} = \lambda$. Cette dernière égalité s'écrivant de façon équivalente comme $f(t) = \lambda e^{-A(t)}$, le résultat s'en déduit. □

Exemple 5.10: Dans le cas du circuit RC, toute solution de l'équation (5.1.1) avec $E = 0$ s'écrit $q(t) = \lambda e^{-\frac{t}{RC}}$, où λ est une constante réelle quelconque.

Equation avec second-membre :

Il s'agit maintenant de trouver **une** solution particulière f_0 de l'équation avec second-membre $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$. Le message est ici

Tous les moyens sont bons pour trouver f_0 !

Méthode 1 : le flair ! Penser selon les cas à des fonctions constantes, des fonctions usuelles, (exp, cos, sin, des polynômes, etc.), ou des combinaisons linéaires des fonctions précédentes.

Exemple 5.11: Selon ce principe, trouvons une solution particulière à chacune des équations suivantes :

1. $y' + 2y = 3$,
2. $y' \sin(t) - y(t) \cos(t) = 1$,
3. $y' + 2y = \cos(t)$.

Méthode 2 : Méthode de variation de la constante.

Dans le cas où a ne s'annule pas sur I, l'idée de cette méthode est de chercher une solution particulière f_0 sous la forme

$$f_0(t) = \lambda(t)e^{-A(t)},$$

où A est une primitive de $t \mapsto \frac{b(t)}{a(t)}$. Alors

$$\begin{aligned} a(t)f_0'(t) + b(t)f_0(t) &= \left(\lambda'(t)e^{-A(t)} - \lambda(t)A'(t)e^{-A(t)}\right)a(t) + b(t)\lambda(t)e^{-A(t)}, \\ &= \lambda'(t)e^{-A(t)}a(t) + e^{-A(t)}\lambda(t)\left(-A'(t)a(t) + b(t)\right). \end{aligned}$$

Or, par définition de A, $-A'(t)a(t) + b(t) = 0$. Donc f_0 est une solution particulière de $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$ si et seulement si $\lambda'(t)e^{-A(t)}a(t) = c(t)$, ce qui équivaut à $\lambda'(t) = \frac{c(t)}{a(t)}e^{A(t)}$ ce qui équivaut à prendre λ une primitive de $t \mapsto \frac{c(t)}{a(t)}e^{A(t)}$.

La conclusion de ce calcul est que f_0 donnée par $f_0(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$ où $t \mapsto \lambda(t)$ est une primitive de $t \mapsto \frac{c(t)}{a(t)}e^{A(t)}$ est une solution particulière de l'équation avec second membre.

Remarque 5.12: Cette méthode à l'avantage de fonctionner tout le temps, mais a l'inconvénient d'être calculatoire par rapport à la première méthode. Il faut donc toujours privilégier la première méthode avant de se lancer dans les calculs.

Exercice 5.13: Appliquer la méthode de variation de la constante aux trois exemples donnés pour la méthode 1.

Résumons ce paragraphe dans le théorème suivant :

Théorème 5.14: *Si la fonction a ne s'annule pas sur I, alors l'ensemble des solutions de l'équation*

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

est

$$\{t \mapsto f_0(t) + \lambda e^{-A(t)}, \lambda \in \mathbb{R}\},$$

avec f_0 une solution particulière de l'équation et A une primitive de $\frac{b}{a}$ sur I.

Démonstration. Ce résultat est le résumé de la Proposition 5.8 et de la Proposition 5.9. □

Résolution avec condition initiale

Proposition 5.15: *Si a ne s'annule pas sur I et si $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, il existe une unique solution au problème de Cauchy donné par $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$ et $y(t_0) = y_0$.*

Démonstration. D'après le Théorème 5.14, toute solution de l'équation est de la forme $t \mapsto f_0(t) + \lambda e^{-A(t)}$, où λ est une constante réelle. Une telle fonction vérifie la condition initiale si et seulement si $f_0(t_0) + \lambda e^{-A(t_0)} = y_0$ si et seulement si $\lambda = e^{A(t_0)}(y_0 - f_0(t_0))$. Il existe donc une unique solution au problème de Cauchy et cette solution correspond au choix de $\lambda = e^{A(t_0)}(y_0 - f_0(t_0))$. □

Exercice 5.16: Donner l'ensemble des solutions de l'équation (5.1.1).

Le cas où a s'annule sur I : problème de raccordement de solutions.

Dans ce cas, l'équation $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$ ne peut pas se mettre sous forme résolue. Nous allons traiter deux exemples pour constater que la situation est beaucoup moins simple que dans le cas où a ne s'annule pas.

Exemple 5.17:
$$ty'(t) - 2y(t) = t^3. \tag{5.2.3}$$

Dans ce cas l'équation (5.2.3) ne peut pas être mise sous forme résolue sur $\mathbb{R}$ tout entier. On restreint l'étude à l'intervalle $I_1 =]0, +\infty[$ d'une part et à $I_2 =] - \infty, 0[$ d'autre part.

— Résolution sur I_1 : on trouve (exercice) que toute solution sur I_1 s'écrit comme
$$y(t) = \lambda t^2 + t^3,\ t > 0,$$
où λ est une constante réelle.

— Résolution sur I_2 : on trouve de même que toute solution sur I_2 s'écrit comme
$$y(t) = \mu t^2 + t^3,\ t < 0,$$
où μ est une constante réelle.

La question est maintenant de savoir s'il existe ou non des solutions à (5.2.3) qui soient définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. Pour déterminer ces solutions éventuelles, on procède par Analyse-Synthèse :

— **Analyse :** soit y une solution de (5.2.3) définies sur $\mathbb{R}$ tout entier. En particulier, sa restriction à I_1 (resp. I_2) est aussi solution sur I_1 (resp. I_2). L'étude précédente dit donc qu'il existe des constantes réelles λ et μ telles que
$$y(t) = \lambda t^2 + t^3,\ t > 0,$$
$$y(t) = \mu t^2 + t^3,\ t < 0.$$

Attention!
Rien ne dit a priori que les constantes λ et μ soient égales !

Il reste donc à déterminer la valeur de $y(0)$: on utilise pour cela le fait que si y est solution de (5.2.3), elle est nécessairement dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue en 0, en particulier. Donc nécessairement, $\exists \lim_{t\to 0, t>0} y(t) = \exists \lim_{t\to 0, t<0} y(t)$, ce qui impose $y(0) = 0$.

— **Synthèse :** soit y la fonction définie par
$$y(t) = \lambda t^2 + t^3,\ t > 0,$$
$$y(t) = \mu t^2 + t^3,\ t < 0.$$
$$y(0) = 0.$$

Déterminons les valeurs de λ et μ telles que y soit solution de (5.2.3). Une telle fonction est continue sur $\mathbb{R}$ par construction, dérivable sur $]0, +\infty[$ et sur $] - \infty, 0[$.

Vérifions que y est dérivable en 0 : en effet, on vérifie trivialement ici que le taux d'accroissement $(y(t)-y(0))/t$ admet la même limite à droite et à gauche qui est 0 (quels que soient λ et μ). Ainsi, y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et y vérifie bien (5.2.3) sur $]0,+\infty[$, $]-\infty,0[$ et en $t=0$, donc y vérifie l'équation.

— **Conclusion :** toute solution de (5.2.3) définie sur $\mathbb{R}$ tout entier est du type

$$\begin{aligned}&y(t)=\lambda t^2+t^3,\ t>0,\\&y(t)=\mu t^2+t^3,\ t<0.\\&y(0)=0.\end{aligned}$$

où λ et μ sont des constantes réelles fixées.

Remarque 5.18: Contrairement au cas résolu, le fait de fixer une condition initiale du type $y(t_0)=\alpha$ ne garantit pas l'unicité d'une solution (ni même l'existence ! En effet, le lecteur méditera sur l'opportunité de fixer la condition initiale $y(0)=2015$ dans cet exemple).

Exemple 5.19:

$$t^2y'(t)-y(t)=0. \tag{5.2.4}$$

On procède de même par Analyse-Synthèse :

— **Analyse :** toute solution y de (5.2.4) définie sur $\mathbb{R}$ tout entier vérifie nécessairement

$$\begin{aligned}&y(t)=\lambda e^{-1/t},\ t>0,\\&y(t)=\mu e^{-1/t},\ t<0,\end{aligned}$$

où λ et μ sont des constantes réelles. Une telle fonction doit nécessairement continue en 0. Or, $\lim_{t\to 0,t<0} e^{-1/t}=+\infty$. Donc nécessairement

$$\mu=0.$$

Remarque 5.20: Notons ici la différence avec l'exemple précédent : autant la continuité en 0 était gratuite dans l'exemple précédent (et ne nécessitait pas d'imposer une valeur particulière aux constantes λ et μ), ici au contraire, la continuité en 0 impose une valeur particulière pour μ.

Par ailleurs, $\exists \lim_{t\to 0,t>0} e^{-1/t}=0$, donc toute valeur de λ convient et dans ce cas, on a nécessairement $y(0)=0$.

— **Synthèse :** soit la fonction définie par $y(t)=\lambda e^{-1/t}$ pour $t>0$ et $y(t)=0$ pour tout $t\leqslant 0$. Une telle fonction est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est clairement dérivable sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$. Montrons la dérivabilité de y en 0 : pour $t>0$, $(y(t)-y(0))/t=\lambda e^{-1/t}/t$. Cette quantité tend vers 0 pour $t\to 0, t>0$ donc y est dérivable à droite en 0 de dérivée nulle. La dérivabilité à gauche (de dérivée nulle) est évidente. Donc y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et y vérifie clairement l'équation (5.2.4).

— **Conclusion :** toute solution de (5.2.4) définie sur $\mathbb{R}$ tout entier est de la forme $y(t)=\lambda e^{-1/t}$ pour $t>0$ et $y(t)=0$ pour $t\leqslant 0$, où λ est une constante réelle.

Remarque 5.21: Ici, nous avons une famille de solutions à un paramètre λ contrairement à l'exemple précédent où on obtenait une famille à deux paramètres λ et μ. Ici, donner une condition initiale du type $y(t_0) = \alpha$ (pour $t_0 > 0$) détermine la constante λ. Par contre, il est impossible d'exiger une condition initiale $y(0) = \alpha$ pour $\alpha \neq 0$.

Exemple 5.22:

$$(1-t)y'(t) - y(t) = t. \tag{5.2.5}$$

Par analyse-synthèse, toute solution sur $\mathbb{R}$ est nécessairement du type

$$y(t) = \frac{\lambda + t^2}{2(1-t)},\ t > 1,$$
$$y(t) = \frac{\mu + t^2}{2(1-t)},\ t < 1,$$

où λ et μ sont deux constantes réelles. Nécessairement y ainsi définie doit avoir une limite en 1, donc nécessairement $\lambda = \mu = -1$, ce qui donne

$$y(t) = -\frac{1}{2}(1+t), t \in \mathbb{R}.$$

On vérifie que cette fonction est bien solution.

Remarque 5.23: Ici la situation est encore plus contraignante : imposer la continuité en 1 impose à la fois la valeur de λ et μ. Il existe une unique solution à (5.2.5) définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

La conclusion de ces trois exemples est qu'il n'existe pas de théorie générale permettant de donner le nombre de solutions d'équations qui ne sont pas mises sous forme résolue : de telles équations sont intrinsèquement mal posées.

5.2.2 Equations linéaires du second ordre à coefficients constants.

On s'intéresse à (5.2.2) dans le cas où les coefficients a, b, et c sont des constantes a priori complexes (il n'existe pas de théorie générale dans le cas où les coefficients dépendent de t), c'est-à-dire

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t), \tag{5.2.6}$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$. Notons que $d(t)$ est, elle, une fonction dépendant de t.

Comme dans le cas d'ordre 1, pour résoudre (5.2.6), il faut et il suffit de résoudre l'équation homogène ($d \equiv 0$) puis de trouver **une** solution particulière de l'équation avec second membre.

Le cas homogène

Résolvons

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0. \tag{5.2.7}$$

Définition 5.24: *On appelle* équation caractéristique *associée à* (5.2.7) *l'équation du second degré en la variable complexe $r \in \mathbb{C}$*

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{5.2.8}$$

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant :

Théorème 5.25: — *Le cas complexe :*

1. *Si* (5.2.8) *a deux racines complexes distinctes r_1 et r_2, l'ensemble des solutions complexes de* (5.2.7) *est*
$$\mathcal{H}_0 = \{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}.$$
2. *Si* (5.2.8) *a une racine double $r_0 \in \mathbb{C}$, l'ensemble des solutions complexes de* (5.2.7) *est*
$$\mathcal{H}_0 = \{t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{r_0 t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}.$$

— *Le cas réel :*

1. *Si* (5.2.8) *a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, l'ensemble des solutions complexes de* (5.2.7) *est*
$$\mathcal{H}_0 = \{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$
2. *Si* (5.2.8) *a une racine réelle double r_0, l'ensemble des solutions complexes de* (5.2.7) *est*
$$\mathcal{H}_0 = \{t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{r_0 t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$
3. *Si* (5.2.8) *n'a pas de racine réelle, elle possède deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$, auquel cas l'ensemble des solutions complexes de* (5.2.7) *est*
$$\mathcal{H}_0 = \{t \mapsto \lambda e^{\alpha t}\cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t}\sin(\beta t),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

***Ainsi,* $\mathcal{H}_0$ *est un espace vectoriel de dimension* 2.**

Démonstration du Théorème 5.25. Pour tout $r \in \mathbb{C}$, posons φ_r la fonction définie par
$$\varphi_r(t) = e^{rt},\ t \in \mathbb{R}.$$
La fonction φ_r est solution de (5.2.7) si et seulement si
$$\begin{aligned} &a\varphi_r''(t) + b\varphi_r'(t) + c\varphi_r(t) = 0,\ t \in \mathbb{R},\\ \Leftrightarrow &e^{rt}\left(ar^2 + br + c\right) = 0, t \in \mathbb{R}\\ \Leftrightarrow &ar^2 + br + c = 0.\end{aligned}$$

1. Cas où (5.2.8) a deux racines distinctes r_1 et r_2 (réelles ou complexes). D'après ce qui précède, par linéarité, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda\varphi_{r_1} + \mu\varphi_{r_2}$ est solution de (5.2.7).
Il reste à montrer que ce sont les seules solutions : soit f une solution de (5.2.7). Posons $g : t \mapsto e^{-r_1 t}f(t)$. Alors $f(t) = e^{r_1 t}g(t)$. Comme f est solution de (5.2.7), il vient successivement, pour tout $t \in \mathbb{R}$ (en réordonnant selon les dérivées successives de g)
$$0 = af''(t) + bf'(t) + cf(t), \tag{5.2.9}$$
$$0 = g(t)\left(ar_1^2 + br_1 + c\right) + g'(t)\left(2r_1 a + b\right) + ag''(t). \tag{5.2.10}$$

Or par définition de r_1, $ar_1^2+br_1+c=0$ et $2r_1a+b=2r_1a-a(r_1+r_2)=a(r_1-r_2)$ donc en posant $y(t)=g'(t)$, on trouve que $y'(t)+(r_1-r_2)y(t)=0$. On trouve donc $y(t)=g'(t)=\lambda e^{(r_2-r_1)t}$, où $\lambda\in\mathbb{C}$. Intégrant une fois, il vient : $g(t)=\frac{\lambda}{r_2-r_1}e^{(r_2-r_1)t}+\mu$, $t\in\mathbb{R}$. Par définition de g, on obtient donc que $f(t)=e^{r_1t}g(t)=\frac{\lambda}{r_2-r_1}e^{r_2t}+\mu e^{r_1t}$, ce qui est bien le résultat demandé.

2. Cas d'une racine double $r_0\in\mathbb{C}$: ce cas correspond au même calcul (5.2.10) que précédemment où $r_1=r_2=r_0$. Mais dans le cas d'une racine double, $2r_0a+b=0$, ce qui donne simplement $g''(t)=0$. Intégrant deux fois, il vient : $g(t)=\lambda t+\mu$, pour certaines constantes λ et μ. Sachant que $f(t)=e^{r_0t}g(t)$, le résultat s'en déduit.
3. Cas réel sans racine : dans ce cas, l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $\alpha\pm i\beta$. Ainsi, toute solution f réelle de (5.2.7) (mais vue comme une fonction complexe) s'écrit comme

$$f(t)=\lambda e^{(\alpha+i\beta)t}+\mu e^{(\alpha-i\beta)t},$$

où λ et μ sont des constantes **complexes**. Mais f est réelle, donc égale à sa partie réelle. Ecrivant $\lambda=a_1+ib_1$ et $\mu=a_2+ib_2$ (avec les a_i et b_i des réels), en prenant la partie réelle de l'identité précédente, il vient :

$$f(t)=Re(f(t))=e^{\alpha t}\left(a_1\cos(\beta t)-b_1\sin(\beta t)+a_2\cos(\alpha t)+b_2\sin(\beta t)\right),$$

ce qui est bien du type souhaité. Réciproquement, toute fonction de ce type est solution. □

Exemple 5.26: Le cas de l'oscillateur harmonique :

$$x''(t)+\omega_0^2x(t)=0.$$

Dans ce cas, l'équation caractéristique s'écrit $r^2+\omega_0^2=0$ qui admet deux racines complexes conjuguées $\pm i\omega_0$. Par conséquent, toute solution de cette équation est du type $x(t)=\lambda\cos(\omega_0t)+\mu\sin(\omega_0t)$, où λ et μ sont des constantes réelles.

Trouver une solution particulière de l'équation complète

On cherche une solution particulière de (5.2.6). Pour cela, plusieurs méthodes :

Méthode 1 : le flair ! Avant de se lancer dans les calculs, penser à des fonctions évidentes (constantes, polynômes, etc.).

Méthode 2 : On se restreint ici au cas où le second membre d à une forme particulière du type

$$d(t)=e^{mt}P(t),t\in\mathbb{R},$$

où P est un polynôme et m un nombre **complexe**. L'idée est alors de chercher une solution particulière de la même forme que le second membre, c'est-à-dire

$$f(t)=e^{mt}Q(t),$$

où Q est un autre polynôme à déterminer. Bien sûr, il est nécessaire de choisir le degré de Q au moins égal à celui de P. Cependant, il s'avère que selon les cas, choisir $\deg(Q) = \deg(P)$ ne sera pas suffisant. Il faudra parfois choisir Q de telle sorte que $\deg(Q) = \deg(P) + 1$ ou même $\deg(Q) = \deg(P) + 2$. C'est le but du résultat suivant que de préciser comment choisir le degré du polynôme Q :

Proposition 5.27: *Dans le cas où $d(t) = e^{mt}P(t)$ avec $m \in \mathbb{C}$ et P un polynôme de degré p. Alors il est possible de chercher une solution particulière f de* (5.2.6) *sous la forme*

$$f(t) = e^{mt}Q(t)$$

où Q est un polynôme de degré q ***supérieur ou égal à*** *p. Plus précisément,*

1. *Si m n'est pas racine de l'équation caractéristique* (5.2.8)*, il est possible de choisir $q = p$,*
2. *Si m est racine simple de l'équation caractéristique* (5.2.8)*, il est nécessaire de choisir $q = p + 1$,*
3. *Si m est racine double de l'équation caractéristique* (5.2.8)*, il est nécessaire de choisir $q = p + 2$.*

Proof of Proposition 5.27. Soit $f(t) = e^{mt}Q(t)$ où Q est un polynôme. Alors, en injectant f dans le memfre de gauche de (5.2.6), il vient

$$af''(t) + bf'(t) + cf(t) = e^{mt}\left((am^2 + bm + c)Q(t) + (2am + b)Q'(t) + aQ''(t)\right).$$

1. Si m n'est pas racine de l'équation caractéristique (5.2.8), alors $am^2 + bm + c \neq 0$, auquel cas le polynôme calculé ci-dessus est de degré $q = \deg(Q)$. Il est donc nécessaire et suffisant de prendre $q = p$.
2. Si m est racine simple de l'équation caractéristique (5.2.8), alors $am^2+bm+c = 0$ mais $2am+b \neq 0$, auquel cas le polynôme calculé ci-dessus est de degré $q-1 = \deg(Q)-1$. Il est donc nécessaire et suffisant de prendre Q de telle sorte que $q-1 = p$, c'est-à-dire $q = p + 1$.
3. Si m est racine double de l'équation caractéristique (5.2.8), alors $am^2+bm+c = 0$ et $2am+b = 0$, auquel cas le polynôme calculé ci-dessus est de degré $q-2 = \deg(Q)-2$. Il est donc nécessaire et suffisant de prendre Q de telle sorte que $q-2 = p$, c'est-à-dire $q = p + 2$.

□

☹ **Attention!**
Ce résultat ne donne pas le polynôme Q, il ne donne que son degré. Pour déterminer Q il faut ensuite injecter $f(t) = e^{mt}Q(t)$ dans (5.2.6) et identifier les coefficients de Q en fonction de ceux de P.

Un principe fondamental qui aide à simplifier la recherche d'une solution particulière de (5.2.6) est le **Principe de superposition** :

Proposition 5.28 Principe de superposition: *Si f_1 est une solution particulière de*

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d_1(t),$$

et si f_2 est une solution particulière de

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d_2(t),$$

alors $g = f_1 + f_2$ est une solution particulière de

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d_1(t) + d_2(t).$$

Démonstration. Evident : il suffit de sommer les deux premières équations et d'utiliser la linéarité de l'équation. □

Cas particuliers importants : le principe de superposition et la Proposition 5.27 s'appliquent en particulier dans les cas suivants :

— le cas où
$$d(t) = \cos(t)P(t) \text{ ou } d(t) = \sin(t)P(t),$$
où P est un polynôme : en effet, on se ramène via le principe de superposition et via les formules d'Euler $\cos(t) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$ et $\sin(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$ au cas où le second membre est du type $e^{mt}P(t)$ avec $m = \pm i$.

— le cas où
$$d(t) = \cosh(t)P(t) \text{ ou } d(t) = \sinh(t)P(t),$$
où P est un polynôme : en effet, on se ramène via le principe de superposition et via les formules $\cosh(t) = \frac{e^{t}+e^{-t}}{2}$ et $\sinh(t) = \frac{e^{t}-e^{-t}}{2}$ au cas où le second membre est du type $e^{mt}P(t)$ avec $m = \pm 1$.

Résolution avec condition initiale

Proposition 5.29: *Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et y_0 et $z_0 \in \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. Il existe une unique solution au Problème de Cauchy constitué de* (5.2.6) *muni des conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = z_0$.*

Démonstration. En effet, on a démontré dans les paragraphes précédents que toute solution de (5.2.6) s'écrit sous la forme

$$f(t) = f_0(t) + \lambda u(t) + \mu v(t),$$

où f_0 est une solution particulière et (u, v) est une base de $\mathcal{H}_0$, l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène. Les constantes λ et μ sont alors déterminées par les conditions initiales : (λ, μ) est solution du système linéaire de deux équations à deux inconnues $\lambda u(t_0) + \mu v(t_0) = y_0 - f_0(t_0)$ et $\lambda u'(t_0) + \mu v'(t_0) = z_0 - f_0'(t_0)$. Le déterminant de ce système est $D = u(t_0)v'(t_0) - u'(t_0)v(t_0)$ qui est non nul (on peut le vérifier à la main dans les trois cas pour (u, v) donnés par le Theorem 5.25). Il existe donc un unique couple (λ, μ) à ce système et donc une unique solution au Problème de Cauchy. □

5.3 Equations à variables séparables, équations de Bernoulli et de Riccati

Nous traitons dans cette dernière partie le cas d'équations différentielles qu'il est encore possible de résoudre explicitement.

Attention!
Remarque importante : les équations qui suivent **ne sont plus linéaires** ! Autrement dit, la somme de deux solutions n'est plus solution a priori. En particulier, tout ce qu'on a introduit pour les équations linéaires (variation de la constante, principe de superposition) **ne fonctionne plus** !

Pour les équations non linéaires, leur résolution de façon explicite est très difficile, sinon impossible. Il existe cependant de rares cas où cela est encore possible.

5.3.1 Equations à variables séparables

Il s'agit d'équations du type

$$y'(t) = f(t)g(y(t)), \ t \in I. \tag{5.3.1}$$

ou de façon condensée

$$y' = f(t)g(y).$$

Le principe de résolution est le suivant : **si** $g(y)$ **ne s'annule pas sur** I, toute solution de $y' = f(t)g(y)$ (si elle existe !!) vérifie

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t),$$

ou de manière condensée

$$\frac{y'}{g(y)} = f(t).$$

La terminologie "variables séparables" vient de là : on a "séparé" les variables y et t. On reconnait alors la primitive d'une fonction composée : notons G une primitive de $\frac{1}{g}$ et F une primitive de f, il vient

$$G(y(t)) = F(t) + C,$$

où C est une constante. L'équation précédente est une équation implicite en y. Pour peu que G soit inversible, il est alors possible d'écrire

$$y(t) = G^{-1}(F(t) + C),$$

sous réserve que toutes les quantités aient un sens.

Il reste alors à vérifier qu'une telle fonction est effectivement solution de l'équation intiale (5.3.1).

Remarque 5.30: On le voit ici, le principe de résolution présenté ci-dessus ne s'embarrasse pas de soucis de rigueur. Il conviendra dans les exemples de montrer qu'il est possible, au cas par cas, d'effectuer un tel programme de résolution.

Exemple 5.31: Résolvons l'équation

$$y' = -\frac{t}{y},\ t \in \mathbb{R}. \tag{5.3.2}$$

Remarque 5.32: On cherche y solution de (5.3.2) qui ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.

Procédons par Analyse/Synthèse :

— **Analyse :** si une solution y existe alors, $yy' = -t$. Donc il existe une constante C telle que $\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}t^2 + C$, c'est-à-dire

$$y^2 + t^2 = 2C = \tilde{C}. \tag{5.3.3}$$

Notons que nécessairement $\tilde{C} \geqslant 0$.

Fixons la constante $\tilde{C} \geqslant 0$. L'identité (5.3.3) n'a pas de sens pour $|t| \geqslant \sqrt{\tilde{C}}$ (car $y^2 \geqslant 0$ et y ne doit pas s'annuler). Si la solution y existe, elle est donc définie uniquement sur l'intervalle $I =]-\sqrt{\tilde{C}}, \sqrt{\tilde{C}}[$ auquel cas

$$y(t) = s(t)\sqrt{\tilde{C} - t^2},$$

où $s(t)$ prend les valeurs $+1$ ou -1.

Déterminons $s(t)$. Supposons que $y(0) = y_0 > 0$. Dans ce cas, $y_0 = \sqrt{\tilde{C}}$, ie $\tilde{C} = y_0^2$. On va montrer que dans ce cas y est toujours positive (c'est-à-dire $s(t)$ vaut toujours $+1$). En effet, supposons le contraire : il existe $t_1 > 0$ tel que $y(t_1) < 0$. Mais y est continue sur $[0, t_1]$, donc par théorème des valeurs intermédiaires, y s'annule en au moins un point de $]0, t_1[$, ce qui contredit l'hypothèse sur y. Absurde. Donc $s(t) = +1$ pour tout $t \in I$ et $y(t) = \sqrt{\tilde{C} - t^2}$.

De même, si $y(0) < 0$, alors y est toujours strictement négative et on a $y(t) = -\sqrt{y_0^2 - t^2}$.

— **Synthèse :** on vérifie que de telles fonctions sont effectivement solutions.

— **Conclusion :** les seules solutions qui ne s'annulent jamais sont celles citées plus haut.

Remarque 5.33: Une remarque importante : cet exemple est le premier que nous voyons où, même si l'équation est déjà sous forme résolue, les solutions ne sont pas définies sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais **sur un sous-intervalle strict de** $\mathbb{R}$. De plus, l'intervalle de définition des solutions **dépend de la condition initiale imposée**. C'est un phénomène général : en toute généralité, l'intervalle de définition fait partie de l'inconnue.

5.3.2 Equations de Bernoulli

Soit I un intervalle, a et b deux fonctions sur I et $m \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Une équation est dite de Bernoulli est de la forme

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)y(t)^m, t \in I. \tag{5.3.4}$$

Remarque 5.34: 1. Dans le cas où $m = 0$ ou $m = 1$, on retombe sur une équation d'ordre 1.

2. La présence de du terme y^m fait que cette équation n'est plus linéaire : la somme de deux solutions n'est plus solution a priori.

On cherche à trouver toutes les solutions de (5.3.4) **qui ne s'annulent pas sur** I. La méthode de résolution repose sur un changement de variables : si y est une solution de (5.3.4) sur I, posons

$$u(t) = \frac{1}{y^{m-1}(t)},\ t \in I.$$

Alors, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{1-m}{y(t)^m} y'(t), \\ &= (1-m)\left(-a(t)\frac{y(t)}{y(t)^m} + b(t)\right), \\ &= (1-m)\left(-a(t)u(t) + b(t)\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, u est solution d'une **équation linéaire d'ordre** 1 **:**

$$u'(t) = (m-1)a(t)u(t) + (1-m)b(t),\ t \in I.$$

D'après précédemment, il est donc possible de calculer u explicitement. Notons qu'il faut nécessairement se restreindre aux instants $t \in I$ tels que $u(t)$ ne s'annule pas. Alors, nécessairement $y^{m-1}(t) = \frac{1}{u(t)}$ et on en déduit $y(t)$ en inversant la fonction $y \mapsto y^{m-1}$ (on prendra garde à se restreindre éventuellement aux $t \in I$ pour lesquels cette dernière inversion est possible).

Reste ensuite à vérifier que la fonction y ainsi trouvée est effectivement solution de l'équation (5.3.4) initiale.

Exemple 5.35: Soit $I =]0, +\infty[$. Cherchons les solutions strictement positives définies sur I de

$$y'(t) - \frac{2y(t)}{t} = -t^2 y^2(t).$$

Soit y une solution (si elle existe). Posons alors $u(t) = \frac{1}{y(t)}$ qui est donc solution de

$$u'(t) + \frac{2}{t}u(t) = t^2,\ t \in I,$$

ce qui se résout facilement en

$$u(t) = \frac{t^3}{5} + \frac{C}{t^2}, t \in I,$$

pour C une constante réelle. Or $u(t) > 0$ si et seulement si $t > 0$ et $t > -(5C)^{1/5}$.

Il y a donc deux cas :

- Soit $C \geqslant 0$ auquel cas u (et donc y) est définie sur $]0, +\infty[$ tout entier.
- Soit $C < 0$ auquel u (et donc y) est définie sur $]-(5C)^{1/5}, +\infty[$ qui est un intervalle strictement inclus dans $]0, +\infty[$.

Sur cet intervalle, y est alors donnée par $y(t) = \frac{t^2}{t^5/5 + C}$. Il faut alors vérifier qu'une telle fonction vérifie bien l'équation de départ, ce qui est immédiat.

Remarque 5.36: Si on avait voulu résoudre l'équation initiale sur $]-\infty, 0[$, la condition d'existence devient $t < -(5C)^{1/5}$.

5.3.3 Equations de Riccati

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et q_0 q_1, q_2 trois fonctions sur I. On appelle *équation de Riccati* toute équation du type

$$y'(t) = q_0(t) + q_1(t)y(t) + q_2(t)y^2(t). \tag{5.3.5}$$

Remarque 5.37: Dans le cas où $q_0 \equiv 0$, on retombe sur une équation de Bernoulli avec $m = 2$.

Il est possible de résoudre (5.3.5) **dans le cas où on connait déjà une solution particulière f_0 de** (5.3.5).

Remarque 5.38: Comment trouver une telle solution particulière f_0 ? Il n'y a pas de méthode générale, il faut se débrouiller au cas par cas !

Soit y une solution de (5.3.5). Posons $v = y - f_0 \Leftrightarrow y = v + f_0$. Substituant y dans (5.3.5), il vient

$$f_0' + v' = q_0 + q_1(f_0 + v) + q_2(f_0^2 + 2f_0 v + v^2).$$

Utilisant le fait que f_0 est solution particulière de (5.3.5), il vient que v est solution de

$$v' = q_1 v + 2f_0 q_2 v + q_2 v^2,$$

qui est une équation de Bernoulli. On est donc ramené au cas précédent.

Annexe A

Devoirs maison

Université Paris Descartes **Analyse 3**
1er semestre 2017-2018

D.M. 1
A rendre pour le jeudi 5 octobre 2017

Exercice 1: Soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

1. En utilisant une intégrale, montrer que pour tout $n > 0$, $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$,
2. En déduire que $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$.
3. Déterminer la limite de H_n.
4. Montrer que u définie par $u_n = H_n - \ln(n)$ est décroissante et positive.
5. Conclure qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$ pour $n \to \infty$.

Problème 2 (A propos des moyennes de Cesàro [1]): On appelle suite des moyennes de Cesàro associée à une suite réelle (u_n) la suite (σ_n) définie par :

$$\sigma_n = \frac{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}{n+1},\ n \geqslant 0.$$

L'objectif du problème est d'étudier la convergence de (σ_n) en fonction de propriétés portées par la suite (u_n).

Partie I - Cas d'une suite monotone et convergente : On suppose dans cette partie que (u_n) est une suite croissante de limite $l \in \mathbb{R}$.

1. (a) Montrer que la suite (σ_n) est croissante.
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $\sigma_n \leqslant l$.
   (c) Que peut-on en déduire ?
2. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $\sigma_{2n+1} \geqslant \frac{1}{2}\sigma_n + \frac{1}{2}u_{n+1}$.
   (b) En déduire que (σ_n) converge vers l.
3. Que dire de la suite des moyennes de Cesàro d'une suite décroissante de limite $l \in \mathbb{R}$?

Partie II - Cas d'une suite convergente : Soit (u_n) une suite réelle convergente de limite $l \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.

1. (a) Justifier l'existence de $n_0 \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$.
   (b) Etablir que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a

$$|\sigma_n - l| \leqslant \frac{|u_0 - l| + \ldots + |u_{n_0-1} - l|}{n+1} + \frac{|u_{n_0} - l| + \ldots + |u_n - l|}{n+1}$$

1. Ernesto Cesàro, 1859-1906, mathématicien italien

(c) Montrer qu'il existe $n_1 \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$,

$$\frac{|u_0 - l| + \ldots + |u_{n_0-1} - l|}{n+1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(d) Conclure que (σ_n) converge vers l.

2. On suppose ici que la suite (σ_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$. On se propose d'étudier une réciproque du résultat précédent.

   (a) Montrer que la suite (u_n) n'est généralement pas convergente. On pourra exhiber un contre-exemple.

   (b) Montrer que la suite (u_n) n'est pas nécessairement bornée. On pourra considérer la suite (u_n) définie par $u_n = p$ si $n = p^3$ et $u_n = 0$ sinon.

   (c) On suppose en outre que la suite (u_n) est monotone ; on pourra considérer, par exemple, qu'elle est croissante. Montrer alors par l'absurde que la suite (u_n) est majorée par l. Conclure que dans ce cas, (u_n) converge vers l.

Partie III - Cas des suites périodiques : Soit $T \in \mathbb{N}$ et (u_n) une suite réelle T-périodique i.e. telle que

$$\forall n \geqslant 0, u_{n+T} = u_n$$

On introduit sa suite des moyennes de Cesàro (σ_n) définie comme en introduction. On pose aussi

$$s = \frac{u_0 + u_1 + \ldots + u_{T-1}}{T}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s = \frac{u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+T-1}}{T}$.
2. On considère la suite (v_n) de terme général :

$$v_n = (n+1)\sigma_n - (n+1)s.$$

   (a) Montrer que (v_n) est T-périodique.

   (b) En déduire que (v_n) est bornée.

   (c) Etablir que (σ_n) converge et préciser sa limite.

Université Paris Descartes **Analyse 3**
1er semestre 2017-2018

D.M. 2

A rendre pour le jeudi 26 octobre 2017

Exercice 1: Soit $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Pour $n \geqslant 0$, on définit $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que la suite (u_n) est strictement positive et converge vers 0.
2. Déterminer un réel α tel que la suite de terme général $v_n = u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ a une limite finie non nulle.
3. En considérant la moyenne de Cesàro de (v_n), $\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k$, déterminer un équivalent de (u_n) quand $n \to \infty$.

Problème 2 (A propos des intégrales de Wallis et de la formule de Stirling):

Partie I : On pose pour tout $n \geqslant 0$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n \mathrm{d}t, \quad \text{et } J_n = \int_0^{\pi/2} \cos(t)^n \mathrm{d}t. \tag{1}$$

1. (a) Calculer I_0, I_1 et I_2.
   (b) Montrer que (I_n) est décroissante et strictement positive.
   (c) Par un changement de variables propice, montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $I_n = J_n$.
2. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
   (b) En encadrant $\frac{I_{n+1}}{I_n}$, montrer que $I_{n+1} \sim_{n\to\infty} I_n$.
   (c) Montrer que la suite de terme général $(n+1)I_n I_{n+1}$ est constante.
   (d) En déduire un équivalent simple de I_n quand $n \to \infty$.
3. (a) Pour $p \geqslant 0$, donner une expression explicite I_{2p} et I_{2p+1} à l'aide de nombres factoriels.
   (b) En observant que $\frac{(2p+1)I_{2p+1}}{2pI_{2p}} \xrightarrow[p\to\infty]{} 1$, montrer que

$$\pi = \lim_{p\to\infty} \frac{2^{4p}(p!)^4}{p((2p)!)^2}. \tag{2}$$

Partie II : On considère la suite (u_n) définie par

$$\forall n \geqslant 0,\ u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}. \tag{3}$$

1. Montrer que la série de terme général $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est convergente.
2. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel $k > 0$, puis que

$$n! \sim_{n\to\infty} k\sqrt{n} n^n e^{-n}. \tag{4}$$

3. Calculer la constante k en fonction de la formule de Wallis (2).

Université Paris Descartes **Analyse 3**
1^{er} semestre 2018-2019

D.M. 1

A rendre pour le jeudi 8 novembre 2018

Exercice 1 (Partiel 2017): Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\frac{1+x}{2}\right).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé et soit (u_n) la suite définie par $u_0 = x$ et par $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2}$, pour $n \geqslant 0$.

1. Quelle propriété simple est vérifiée par la suite $(f(u_n))$?
2. On étudie maintenant la suite (u_n). On suppose pour commencer que $x \geqslant 1$.
   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 1$.
   (b) Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel que l'on déterminera.
3. Dans le cas où $x < 1$, justifier de façon semblable la convergence de la suite (u_n). On se contentera dans cette question de donner les principaux arguments de la démonstration sans refaire de preuve détaillée.
4. Déduire des questions précédentes que f est une fonction constante.

Exercice 2 (Partiel 2017): Dans cet exercice, les questions 2., 3. et 4. sont indépendantes. Soit f une fonction de $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$. On se pose la question de savoir si f admet un point fixe sur $[0,1]$, c'est-à-dire un réel $l \in [0,1]$ tel que $f(l) = l$.

1. Soit
$$A = \{x \in [0,1],\ x \leqslant f(x)\}. \tag{1}$$
   Montrer que A admet une borne supérieure, notée l.
2. On suppose dans cette question que f est croissante.
   (a) Montrer que $f(l)$ est un majorant de A. En déduire que $l \leqslant f(l)$.
   (b) Montrer que $f(l) \in A$.
   (c) Conclure que $f(l) = l$.
   (d) Le point fixe de f est-il nécessairement unique ?
3. On suppose dans cette question que f est décroissante.
   (a) Montrer que, s'il existe, le point fixe de f est unique.
   (b) Est-il vrai que f admet toujours un point fixe dans ce cas ?

4. On suppose dans cette question que f est continue sur $[0,1]$. On souhaite montrer que f a au moins un point fixe sur $[0,1]$. Soit A l'ensemble défini en (1) et l sa borne supérieure.
   (a) Montrer que $l \leqslant f(l)$ (on pourra utiliser, en justifiant son existence, une suite (t_n) d'éléments de A qui converge vers l). Que pouvez-vous conclure si $l = 1$?
   (b) On suppose maintenant $l < 1$. Montrer que pour tout $x \in]l, 1[$, $f(x) < x$.
   (c) En déduire que $f(l) \leqslant l$. Conclure.

Problème 3 (A propos des intégrales de Wallis et de la formule de Stirling):

Partie I : On pose pour tout $n \geqslant 0$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n \mathrm{d}t, \quad \text{et } J_n = \int_0^{\pi/2} \cos(t)^n \mathrm{d}t. \tag{2}$$

1. (a) Calculer I_0, I_1 et I_2.
   (b) Montrer que (I_n) est décroissante et strictement positive.
   (c) Par un changement de variables propice, montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $I_n = J_n$.
2. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
   (b) En encadrant $\frac{I_{n+1}}{I_n}$, montrer que $I_{n+1} \sim_{n\to\infty} I_n$.
   (c) Montrer que la suite de terme général $(n+1)I_n I_{n+1}$ est constante.
   (d) En déduire un équivalent simple de I_n quand $n \to \infty$.
3. (a) Pour $p \geqslant 0$, donner une expression explicite I_{2p} et I_{2p+1} à l'aide de nombres factoriels.
   (b) En observant que $\frac{(2p+1)I_{2p+1}}{2pI_{2p}} \xrightarrow[p\to\infty]{} 1$, montrer que

$$\pi = \lim_{p\to\infty} \frac{2^{4p}(p!)^4}{p((2p)!)^2}. \tag{3}$$

Partie II : On considère la suite (u_n) définie par

$$\forall n \geqslant 0, \; u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}. \tag{4}$$

1. Montrer que la série de terme général $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est convergente.
2. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel $k > 0$, puis que

$$n! \sim_{n\to\infty} k\sqrt{n} n^n e^{-n}. \tag{5}$$

3. A l'aide de (3) et de (5), calculer la constante k et en déduire la formule de Stirling :

$$n! \sim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}. \tag{6}$$

Correction du DM1 - 2018-2019:

Exercice 1 (Partiel 2017):

1. Pour tout $n \geqslant 0$, on a $f(u_n) = f\left(\frac{1+u_n}{2}\right) = f(u_{n+1})$, par définition de la suite (u_n). Donc la suite $(f(u_n))$ est constante, égale à $f(u_0) = f(x)$.
2. (a) On prouve cette propriété par récurrence : on a $u_0 = x \geqslant 1$. Supposons la propriété vraie au rang n. Alors $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2} \geqslant \frac{1+1}{2} = 1$ et donc $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 0$, par récurrence.

   (b) Montrons que la suite (u_n) est décroissante. Pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1+u_n}{2} - u_n = \frac{1-u_n}{2} \leqslant 0$, d'après la question précédente. Donc (u_n) est décroissante. Ainsi la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1, elle converge donc vers $l \geqslant 1$. Par continuité de l'application $x \mapsto \frac{1+x}{2}$, il vient par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2}$, $l = \frac{1+l}{2}$ et donc $l = 1$. Ainsi (u_n) converge vers 1.
3. Dans ce cas, on prouve de façon semblable que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant 1$ et que la suite (u_n) est croissante. Etant croissante et majorée, elle converge vers $l' \leqslant 1$ vérifiant $l' = \frac{1+l'}{2}$, i.e. $l' = 1$.
4. On a pour tout $n \geqslant 0$, $f(u_n) = f(x)$ et $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, donc par passage à la limite dans l'égalité précédente (possible car f est continue), il vient $f(1) = f(x)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction f est constante.

Exercice 2 (Partiel 2017):

1. A est une partie non vide (car f est à valeurs dans $[0,1]$, donc en particulier $0 \leqslant f(0)$ et donc $0 \in A$) et majorée par 1. Donc A admet une borne supérieure $\sup A = l$.
2. (a) En particulier, l est un majorant de A et donc pour tout $x \in A$, $x \leqslant l$. Par croissance de f, on a $f(x) \leqslant f(l)$ et par définition de A, on a, pour $x \in A$, $x \leqslant f(x) \leqslant f(l)$. Donc $f(l)$ est un majorant de A. l étant le plus petit des majorants de A, on a $l \leqslant f(l)$.

   (b) On a $l \leqslant f(l)$ et donc en appliquant de nouveau la croissance de f, on obtient $f(l) \leqslant f(f(l))$, ce qui est exactement dire que $f(l) \in A$.

   (c) Comme l est un majorant de A et $f(l) \in A$, on a $f(l) \leqslant l$ et donc $f(l) = l$.

   (d) Non. $f(x) = x$ est croissante sur $[0,1]$ et admet une infinité de points fixes.
3. (a) Soit $l_1 \leqslant l_2$ deux points fixes de f dans $[0,1]$. Comme $l_1 \leqslant l_2$, on a $f(l_1) \geqslant f(l_2)$, par décroissance de f. Comme ce sont deux points fixes, $l_1 \geqslant l_2$ et donc $l_1 = l_2$.

   (b) Le résultat est faux dans ce cas. Contre-exemple : $f : [0,1] \to [0,1]$ définie par $f(x) = 1$ pour $x \in [0,1[$ et $f(1) = 0$ est une fonction décroissante qui n'admet pas de point fixe.
4. (a) L'existence de la suite (t_n) vient de la caractérisation séquentielle de la borne supérieure. Comme pour tout $n \geqslant 0$, $t_n \in A$ donc $t_n \leqslant f(t_n)$, il vient $l \leqslant f(l)$ par continuité de f. Si maintenant $l = 1$, on a $1 \leqslant f(1) \leqslant 1$ et donc 1 est un point fixe de f.

   (b) Si ce n'était pas le cas, il existerait un $x \in]l, 1[$ tel que $x \leqslant f(x)$, ce qui contredit le fait que l est un majorant de A.

(c) C'est en particulier vrai pour $x_n = l + \frac{1}{n}$, pour n suffisamment grand. Cette suite converge vers l par valeurs supérieures et en passant à la limite dans l'inégalité $f(x_n) < x_n$ (par continuité de f), il vient $f(l) \leqslant l$ et donc $f(l) = l$.

Problème 3:

Partie I :

1. (a) On a $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$ et $I_2 = \frac{\pi}{4}$.

   (b) La stricte positivité de l'intégrale vient du fait que la fonction $t \mapsto \sin(t)$ est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, continue, et non identiquement nulle. La décroissance vient du fait que $0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$ et donc $\sin(t)^{n+1} \leqslant \sin(t)^n$ pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

   (c) Pour tout $n \geqslant 0$, $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin(\frac{\pi}{2} - u)^n \mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \cos(u)^n \mathrm{d}u = J_n$, par le changement de variables $u = \frac{\pi}{2} - t$.

2. (a) Pour $n \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin(t)^{n+2} \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^{n+1} \sin(t) \mathrm{d}t, \\ &= \left[-\cos(t)\sin(t)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\sin(t)^n \cos(t)^2 \mathrm{d}t, \quad \text{(IPP)} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\sin(t)^n \left(1 - \sin(t)^2\right) \mathrm{d}t = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}. \end{aligned}$$

   Donc $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

   (b) Comme $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$, on a $\frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$. D'autre part, $\frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2} \frac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \geqslant \frac{n+1}{n+2}$. Comme $\frac{n+1}{n+2} \to 1$, le résultat vient, par théorème des gendarmes. Ainsi, $I_{n+1} \sim_{n\to\infty} I_n$.

   (c) Pour tout $n \geqslant 0$, $(n+1)I_n I_{n+1} = (n+2)I_{n+2} I_{n+1} = (n+2)I_{n+1} I_{n+2}$ et donc cette suite est constante, égale à $I_0 I_1 = \frac{\pi}{2}$.

   (d) D'une part, nous avons $(n+1)I_n I_{n+1} \sim n I_n^2$ et d'autre part, $(n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$. Donc $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, pour $n \to \infty$.

3. (a) Pour $p \geqslant 0$, on a $I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{(2p-1)(2p-3)}{2p(2p-2)} I_{2p-4}$ et par une récurrence immédiate

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\ldots 1}{2p(2p-2)\ldots 2} I_0$$

   et donc $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p+1}(p!)^2}\pi$. De même, $I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

   (b) On a $\frac{(2p+1)I_{2p+1}}{2pI_{2p}} \sim_{p\to\infty} \frac{2p}{2p} \frac{I_{2p}}{I_{2p}} = 1$. Or $\frac{(2p+1)I_{2p+1}}{2pI_{2p}} = \frac{2^{4p}(p!)^4}{\pi p((2p)!)^2}$ et donc on obtient le résultat demandé.

Partie II :

1. Montrons que la série de terme général $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est convergente : on a pour $n \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
v_n &= \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1}e^{-n-1}\sqrt{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}\right),\\
&= \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{\sqrt{n+1}}{e\sqrt{n}}\right) = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),\\
&= n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right),\\
&= \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{12n^2}.
\end{aligned}$$

   Par critère de Riemann, la série de terme général v_n est convergente.
2. Par conséquent, $\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1}(\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \ln(u_n) - \ln(u_1)$ est une suite convergente. Par continuité de la fonction exponentielle, on en déduit que la suite (u_n) converge vers un réel $l > 0$. Posant $k = \frac{1}{l} > 0$ on a donc l'équivalence souhaitée.
3. On a $(2p)! \sim_{p\to\infty} k\sqrt{2p}(2p)^{2p}e^{-2p}$ et donc $((2p)!)^2 \sim_{p\to\infty} k^2 2^{4p+1}p^{4p+1}e^{-4p}$. De même, $(p!)^4 \sim_{p\to\infty} k^4 p^{4p+2}e^{-4p}$. Ainsi,

$$\frac{2^{4p}(p!)^4}{p((2p)!)^2} \sim \frac{2^{4p}k^4p^{4p+2}e^{-4p}}{k^2 2^{4p+1}p^{4p+2}e^{-4p}} = \frac{k^2}{2}.$$

   Par conséquent $\frac{k^2}{2} = \pi$ et donc $k = \sqrt{2\pi}$. Par conséquent, nous venons de prouver la formule de Stirling (6).

Université Paris Descartes **Analyse 3**
1^{er} semestre 2019-2020

D.M. 1

A rendre pour le jeudi 28 novembre 2019

Nous avons vu dans un td le résultat suivant :

Les suites $(\cos(n))_{n \geqslant 1}$ *et* $(\sin(n))_{n \geqslant 1}$ *sont divergentes.*

Le but de ce devoir est de préciser et de généraliser ce résultat.

Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

On rappelle qu'un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, $(G, +)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, contenant 0 tel que $g_1 + g_2 \in G$ pour tout $g_1, g_2 \in G$ (stabilité pour la somme) et pour tout $g \in G$, $-g \in G$ (stabilité pour l'opposé). Le but de ce paragraphe est de prouver le résultat suivant :

Théorème 1: *Tout sous-groupe additif G de $\mathbb{R}$ est :*

— *soit dense dans $\mathbb{R}$,*

— *soit de la forme $G = \alpha\mathbb{Z}$ pour un $\alpha \geqslant 0$.*

1. Donner un exemple de sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ qui est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$ différent de $\{0\}$.

2. Montrer que G admet au moins un élément $x > 0$.

On note alors $G^+ = G \cap (0, +\infty)$.

3. Justifier l'existence de $\alpha = \inf G^+$. Montrer que $\alpha \geqslant 0$.

On distingue alors deux cas :

4. Soit $\alpha > 0$. Le but de cette question est alors de montrer que $G = \alpha\mathbb{Z}$.
   (a) Montrer qu'il existe $b \in G$ tel que $\alpha \leqslant b < 2\alpha$. Montrer nécessairement que $b = \alpha$: pour cela raisonner par l'absurde ($\alpha < b$) et montrer qu'il existe $c \in G$ tel que $\alpha \leqslant c < b < 2\alpha$. En déduire que $0 < b - c < \alpha$ puis conclure. Déduire de cette question que $\alpha \in G$.
   (b) En déduire que $\alpha\mathbb{Z} \subset G$.
   (c) On montre l'inclusion réciproque : $G \subset \alpha\mathbb{Z}$. Soit $g \in G$ et $n = \left\lfloor \frac{g}{\alpha} \right\rfloor$. Montrer que $0 \leqslant g - n\alpha < \alpha$. En déduire que $g = n\alpha$. Conclure.
5. Soit $\alpha = 0$. Il s'agit de montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$. On fixe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.
   (a) Montrer qu'il existe $g \in G^+$ tel que $0 < g < y - x$.
   (b) On pose $n = \left\lfloor \frac{x}{g} \right\rfloor + 1$. Montrer que $x < ng < y$.
   (c) Conclure.

Application à la suite $(\cos(n\theta))_{n \geqslant 1}$

Dans toute la suite du problème, on fixe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{\pi}{\theta}$ est irrationnel. *On dit que θ n'est pas commensurable avec π. Par exemple, $\theta = 1$ convient, car vous savez que π est irrationnel (mais l'avez-vous seulement prouvé ?).*

Un sous-groupe dense

Théorème 2: *Soit G le sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ engendré par θ et 2π, i.e.*

$$G = \{p\theta + 2q\pi,\ p, q \in \mathbb{Z}\}\,. \tag{1}$$

6. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Valeurs d'adhérence de $(\cos(n\theta))_{n \geqslant 1}$

Nous voulons prouver le résultat suivant :

Théorème 3: *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{\pi}{\theta}$ est irrationnel. Soit $\mathcal{A}_c$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n\theta))_{n \geqslant 1}$. Alors $\mathcal{A}_c = [-1, 1]$.*

7. Montrer que $\mathcal{A}_c \subset [-1, 1]$.

On montre l'inclusion réciproque : soit $y \in [-1, 1]$ et $x \in [0, 2\pi]$ tel que $\cos(x) = y$. Nous allons montrer l'affirmation suivante

$$\text{Pour tout } \varepsilon > 0 \text{ et tout } N \geqslant 1, \text{ il existe } n > N \text{ tel que } |y - \cos(n\theta)| < \varepsilon. \tag{2}$$

8. Montrer que si l'affirmation (2) est vraie, alors y est limite d'une sous-suite de $(\cos(n\theta))_{n \geqslant 1}$ et donc une valeur d'adhérence de cette suite.

On cherche donc à montrer (2). Soit $\varepsilon > 0$ et $N \geqslant 1$ et $A = \{g = p\theta + 2q\pi,\ |x - g| < \varepsilon\}$.

9. Montrer que A est infini et borné. En déduire qu'il est toujours possible de choisir $g = p_g\theta + 2q_g\pi \in A$ de telle sorte que $|p_g| > N$. *On pourra raisonner par l'absurde et supposer qu'il n'y a qu'un nombre fini possible de valeurs pour p_g, $g \in A$.*
10. Soit $g \in A$ avec $|p_g| > N$. Montrer que $\cos(g) = \cos(|p_g|\,\theta)$. Montrer de plus que $|\cos(g) - y| < \varepsilon$ (*penser à l'inégalité des accroissements finis*).
11. Conclure.

Valeurs d'adhérence de $(\sin(n\theta))_{n \geqslant 1}$

L'argument précédent ne fonctionne pas tout-à-fait pour la fonction sin car la preuve précédente utilise à un moment donné (question : quand cela ?) que la fonction cos est paire. Il faut adapter un peu la preuve pour obtenir les valeurs d'adhérence de $(\sin(n\theta))_{n \geqslant 1}$. Pour cela, on a besoin de

Théorème 4: *Soit $G' = \{p\theta + 2q\pi,\ p \geqslant 1,\ q \in \mathbb{Z}\}$. Alors G' est dense dans $\mathbb{R}^+$.*

12. Montrer qu'il suffit de prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in G^+$ tel que $0 < g < \varepsilon$.

13. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une infinité de $p\theta + 2q\pi$, $p, q \in \mathbb{Z}$ dans $]0, \varepsilon[$.
14. Conclure si l'un d'entre eux a un coefficient $p > 0$.
15. Dans l'autre cas, tous les $p\theta + 2q\pi$ dans $]0, \varepsilon[$ sont tels que $p < 0$. Soit l'un d'entre eux $x = p\theta + 2q\pi$ avec $p < 0$. Montrer qu'il existe une infinité de $y = r\theta + 2s\pi$ (tous tels que $r < 0$) dans $]0, x[$. Montrer ensuite qu'il existe au moins un d'entre eux tels que $r < p < 0$. Considérer alors $x - y$ et conclure que $0 < x - y < \varepsilon$.

On en vient alors au résultat suivant

Théorème 5: *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{\pi}{\theta}$ est irrationnel. Soit $\mathcal{A}_s$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\sin(n\theta))_{n \geqslant 1}$. Alors $\mathcal{A}_s = [-1, 1]$.*

16. Adapter la preuve précédente en utilisant le Théorème 4 pour prouver le Théorème 5.

Correction du DM1 - 2019-2020:

1. Un exemple de sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ qui est dense dans $\mathbb{R}$ est $\mathbb{Q}$.
2. G est non nul donc admet au moins un élément $x \neq 0$. Mais alors $x \in G$ et $-x \in G$ et donc $|x| > 0 \in G$, ce qui donne le résultat.
3. G^+ est un ensemble non vide de $\mathbb{R}$, d'après la question précédente et minoré par 0. Donc par axiome de la borne inférieure, α existe. Comme 0 est un minorant de G^+, $\alpha \geqslant 0$.
4. Soit $\alpha > 0$. Le but de cette question est alors de montrer que $G = \alpha\mathbb{Z}$.
   (a) Par caractérisation de la borne inférieure par les ε, (et dans ce cas pour $\varepsilon = \alpha > 0$), il existe $b \in G$ tel que $\alpha \leqslant b < 2\alpha$. Si on suppose par l'absurde que $\alpha < b$, alors par une seconde application de la caractérisation de la borne inférieure (cette fois-ci pour $\varepsilon = b - \alpha$), il existe $c \in G$ tel que $\alpha \leqslant c < b < 2\alpha$. En particulier, $0 < b - c < \alpha$. Mais alors $c - b \in G$ car G est un groupe et $c - b > 0$ donc $c - b \in G^+$. Mais alors $c - b < \alpha$ contredit la définition de α. Absurde. Donc $\alpha = b \in G$.
   (b) Si $\alpha \in G$, tout multiple de α est dans G car G est un groupe. Donc $\alpha\mathbb{Z} \subset G$.
   (c) On montre l'inclusion réciproque : $G \subset \alpha\mathbb{Z}$. Soit $g \in G$ et $n = \left\lfloor \frac{g}{\alpha} \right\rfloor$. Par définition de la partie entière, il vient $n \leqslant \frac{g}{\alpha} < n+1$ et donc $n\alpha \leqslant g < (n+1)\alpha$ (car $\alpha > 0$) et ainsi $0 \leqslant g - n\alpha < \alpha$. Mais alors par définition de α, $g - n\alpha = 0$ (sinon cela contredirait la définition de α, car $g - n\alpha \in G^+$). D'où l'égalité $G = \alpha\mathbb{Z}$.
5. Soit $\alpha = 0$. Il s'agit de montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$. On fixe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.
   (a) C'est encore la caractérisation de la borne inférieure pour $\varepsilon = y - x$: il existe $g \in G^+$ tel que $0 < g < y - x$.
   (b) Par définition de la partie entière, on a $n \leqslant \frac{x}{g} + 1 < n+1$ et donc, comme $g > 0$, $ng \leqslant x + g < (n+1)g$. Donc $x < ng < x + g < y$.
   (c) On vient donc de montrer que $ng \in G \cap]x, y[$, et ce, pour tout $x < y$. Donc G est dense dans $\mathbb{R}$.
6. D'après le Théorème 1, il s'agit de montrer que G n'est pas du type $G = \alpha\mathbb{Z}$. Supposons le contraire : si on avait $G = \alpha\mathbb{Z}$ pour un certain α, alors comme $\theta \in G$, alors il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \alpha m$. De même, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $2\pi = \alpha n$. Donc $\alpha = \frac{2\pi}{n} = \frac{\theta}{m}$, donc $\frac{\pi}{\theta} = \frac{n}{2m} \in \mathbb{Q}$. Absurde. Donc G est dense dans $\mathbb{R}$.
7. $\mathcal{A}_c \subset [-1, 1]$: en effet, pour toute sous-suite convergente $(\cos(\varphi(n))_n$, on a $-1 \leqslant \cos(\varphi(n)) \leqslant 1$ et donc par passage à la limite, on a le résultat.
8. Si l'affirmation (2) est vraie, alors pour $N = 1$ et $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe $\varphi(1) > 1$ tel que $|y - \cos(\varphi(1)\theta)| < \frac{1}{2}$. Ensuite, pour $N = \varphi(1)$ et $\varepsilon = \frac{1}{4}$, il existe $n = \varphi(2) > \varphi(1)$ tel que $|y - \cos(\varphi(2)\theta)| < \varepsilon$ et ainsi de suite : par une récurrence évidente, on construit une extraction φ telle que pour tout $n \geqslant 0$, $|y - \cos(\varphi(n)\theta)| < \frac{1}{2^n}$. Par théorème des gendarmes, cette sous-suite converge vers y.

9. A est infini car G est dense dans $\mathbb{R}$ et borné car inclus dans $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$. On suppose qu'il n'y a qu'un nombre fini possible de valeurs pour p_g, $g \in A$. Cela signifie donc qu'il y a un nombre infini de valeurs de q_g, pour $g \in A$, car sinon, A ne saurait être infini. Or ceci contredit clairement le fait que A est borné. Donc, il est toujours possible de choisir $g = p_g\theta + 2q_g\pi \in A$ de telle sorte que $|p_g| > N$.
10. Soit $g \in A$ avec $|p_g| > N$. Alors $\cos(g) = \cos(p_g\theta + 2q_g\pi) = \cos(|p_g|\,\theta)$, car la fonction cos est paire et 2π-périodique. De plus, par inégalité des accroissements finis, $|\cos(g) - y| = |\cos(g) - \cos(x)| \leqslant |x - g| < \varepsilon$.
11. Donc $[-1, 1] \subset \mathcal{A}_c$ et on a le résultat.
12. Il suffit de prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in G^+$ tel que $0 < g < \varepsilon$, puisque, par translation, il existe un élément ng de G dans n'importe quel intervalle de longueur ε.
13. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une infinité de $p\theta + 2q\pi$, $p, q \in \mathbb{Z}$ dans $]0, \varepsilon[$, par densité de G.
14. Si l'un d'entre eux a un coefficient $p > 0$, c'est terminé, il existe un élément de G' dans $]0, \varepsilon[$.
15. Dans l'autre cas, tous les $p\theta + 2q\pi$ dans $]0, \varepsilon[$ sont tels que $p < 0$. Soit l'un d'entre eux $x = p\theta + 2q\pi$ avec $p < 0$. Encore par densité de G, il existe une infinité de $y = r\theta + 2s\pi$ (tous tels que $r < 0$) dans $]0, x[$. Il existe au moins un d'entre eux tels que $r < p < 0$ (car sinon, on aurait un nombre fini de possibilité pour r, ce qui contredit le caractère borné de tels y). Mais alors $x - y = (p - r)\theta + 2(p - s)\pi$ est tel que $p - r > 0$ et on a $0 < x - y < x < \varepsilon$.
16. La preuve du Théorème 5 est la même que précédemment, en utilisant maintenant que $p > 0$ et que sin est 1-lipschitzienne.