Université de Paris
UFR de Mathématiques et Informatique
45 rue des Saints-Pères 75006 Paris

Analyse 3 - Contrôle no. 3

Durée : 45 minutes – Les documents ne sont pas autorisés

NOM : .... PRENOM : ....

NUMERO ETUDIANT : ....

Quelques applications directes du cours. Répondre par "VRAI" ou "FAUX", sans justification, aux affirmations suivantes.
Une réponse juste vaut 0.5 *point, une fausse vaut* $-0,25$ *point et une absence de réponse vaut* 0 *point.*
Dans tout ce qui suit, (u_n), (v_n), (w_n) *sont des suites réelles et* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction réelle et* $\ell \in \mathbb{R}$. *La notation* a.p.c.r *signifie* à partir d'un certain rang.

(1) Il existe une suite convergente qui admet une sous-suite divergente : FAUX : si une suite converge, chacune de ses sous suites convergent vers la même limite.

(2) Soient deux suites adjacentes (a_n) et (b_n). Alors ces deux suites sont bornées : VRAI : elles sont toutes les deux convergentes, donc bornées.

(3) Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante a.p.c.r : FAUX : prendre par exemple $u_n = 0$ si n pair et $u_n = \frac{1}{n}$ si n impair.

(4) Si la suite (u_n) converge vers l, alors la suite (u_{n^2}) converge vers l : VRAI : si une suite converge, chacune de ses sous suites convergent vers la même limite.

(5) On a $n^2 \ln(n) = o\left(n^2 \ln(n^2)\right)$ pour $n \to \infty$: FAUX : le rapport des deux tend vers $\frac{1}{2}$

(6) Si $u_n \sim v_n$ alors $u_{2n} \sim v_{2n}$, pour $n \to \infty$: VRAI : si $w_n := \frac{u_n}{v_n}$ tend vers 1 alors sa sous-suite $(w_{2n}$ aussi.

(7) Si les suites extraites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) sont croissantes, alors (u_n) est croissante : FAUX : contre-exemple $u_n = (-1)^n$.

(8) On peut extraire de la suite $\left(e^{\frac{in\pi}{4}}\right)$ une sous-suite constante : VRAI : prendre par exemple la sous-suite (u_{8n}).

(9) Il existe des suites de Cauchy sans valeur d'adhérence : cette question était, je l'admets, ambigüe : dans mon esprit (comme énoncé dans l'introduction) les suites considérées sont réelles, et dans ce cas, l'affirmation est fausse : toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ converge. Sans cette précision de suite réelle, l'affirmation est vraie : prendre $u_n = \frac{\lfloor 10^n \sqrt{2} \rfloor}{10^n}$, qui n'admet pas de valeur d'adhérence dans $\mathbb{Q}$. **question neutralisée**.

(10) La phrase $\forall A > 0,\ \exists \eta > 0, \forall x \in]\ell - \eta, \ell + \eta[, f(x) > A$ exprime le fait que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$: FAUX (relire son cours).

Exercice 1. Déterminer la limite, si elle existe, pour $x \to +\infty$ de la fonction $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ suivante :

$$f(x) = \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}.$$

Vous détaillerez votre calcul.

On a $f(x) = \exp\left(x^2 \ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)$. Pour $x \to \infty$, on a $\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Ainsi, par sommation, il vient $\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Or comme $\ln(1+u) = u + o(u)$ pour $u \to 0$, il vient $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et donc $x^2 \ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{24} + o(1) \to \frac{1}{24}$. Par continuité de exp il vient $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} e^{\frac{1}{24}}$.

Commentaire détaillé : j'ai eu des questions à la fin du CC qui toutes tournaient autour de la question

Comment sait-on jusqu'où aller dans les DLs pour ce genre de question ?

Voici quelques commentaires et méthode pour ce genre de questions :

(1) Premier principe : *quand on écrit des DLs, il vaut toujours mieux écrire trop de termes que pas assez.* Dans le premier cas, on va certes faire des calculs inutiles, mais au moins on n'oubliera pas de termes.

(2) Second principe : *vérifier qu'on a bien affaire à une forme indéterminée et identifier les DLs nécessaires à la résolution du problème.* Ici, dans notre cas, $\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$ et $x^2 \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty$, donc on a bien affaire à une forme indéterminée du type $1^{+\infty}$. On écrit sous forme d'exponentielle,

$$f(x) = \exp\left(x^2 \ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)$$

ce qui correspond à la forme indéterminée $0 \times \infty$. Ce qui est à l'intérieur du logarithme tend vers 1, donc nous allons avoir besoin des DLs de

— $\ln(1+u)$ pour $u \to 0$
— $\cos(u)$ pour $u \to 0$
— $\sin(u)$ pour $u \to 0$

(3) Le meilleur moyen de ne pas oublier de termes est de commencer par écrire au brouillon sans a priori sur la longueur des différents DLs nécessaires à la résolution de notre problème : pour $u \to 0$ et $x \to \infty$ respectivement

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} + \dots, \tag{1}$$

$$\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{4!x^2} - \frac{1}{6!x^3} + \dots, \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2\times 3!x^3} + \frac{1}{2\times 5!x^5} + \dots. \tag{3}$$

Ici, nous écrivons au brouillon les choses de manière informelle, sans écrire les termes d'erreurs, en se convainquant qu'il est possible de continuer ces DLs autant que les calculs l'exigent.

(4) Le premier calcul requis ici est d'écrire le DL de $\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Un principe absolument primordial ici :

Quand on écrit un DL, on regroupe les termes du même ordre, en les ordonnant du plus grand au plus petit.

Il s'agit ici de regrouper les termes constants (les plus gros), puis les termes en $\frac{1}{x}$, puis ceux en $\frac{1}{x^2}$, etc. Dans le cas de notre exercice, c'est facile puisqu'il s'agit d'une somme. L'identité (2) donne des contributions à tous les ordres alors que l'identité (3) ne donne que des termes d'ordre impair. En sommant (là encore en ne se préoccupant pas pour l'instant des termes d'erreur), on constate que le terme d'ordre 0 est 1, puis celui d'ordre 1 (en $1/x$) est nul, puis le terme d'ordre 2 est $\frac{1}{4!x^2}$, etc.

Ainsi, nous obtenons

$$\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{4!x^2} - \left(\frac{1}{6!} + \frac{1}{2\times 3!}\right)\frac{1}{x^3} + \frac{1}{8!x^4} + \dots \tag{4}$$

Ici, encore une fois, nous n'avons tout écrit sans a priori sur la longueur du DL. Peut-être que ce DL est déjà trop long, peut-être pas. Quoi qu'il arrive pour la suite, il faut que vous soyez convaincus que vous êtes capables de continuer ce développement autant que nécessaire.

(5) Une pause dans le raisonnement : à propos de l'écriture rigoureuse des $\dots$:

— imaginons par exemple que la suite de l'exercice nous impose d'écrire le DL (4) à l'ordre 4 comme nous venons de le faire :

$$\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=1+\frac{1}{4!x^2}-\left(\frac{1}{6!}+\frac{1}{2\times 3!}\right)\frac{1}{x^3}+\frac{1}{8!x^4}+\dots \tag{5}$$

Que doit-on alors rigoureusement écrire à la place des $\dots$? Il faut juste se rendre compte que ce qui est contenu dans les $\dots$ sont des termes qui sont plus petits que $1/x^4$ (des termes en $1/x^5$, puis en $1/x^6$, etc.). L'écriture rigoureuse de (5) est donc

$$\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=1+\frac{1}{4!x^2}-\left(\frac{1}{6!}+\frac{1}{2\times 3!}\right)\frac{1}{x^3}+\frac{1}{8!x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right) \tag{6}$$

— Imaginons maintenant que la suite de l'exercice ne demande juste qu'un DL à l'ordre 2 (ie. que le DL à l'ordre 4 écrit en (5) est trop déjà long) : il s'agit donc juste de garder les termes jusqu'à l'ordre 2 dans (5) et d'oublier les autres. Mais les autres sont des termes en $1/x^3$, puis en $1/x^4$ etc, tous négligeables devant $1/x^2$. Donc on écrit

$$\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=1+\frac{1}{4!x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right). \tag{7}$$

(6) Quoi qu'il en soit, nous venons d'écrire $\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sous la forme $1+u$ avec

$$u=\frac{1}{4!x^2}-\left(\frac{1}{6!}+\frac{1}{2\times 3!}\right)\frac{1}{x^3}+\frac{1}{8!x^4}+\dots\xrightarrow[x\to\infty]{}0. \tag{8}$$

Il s'agit maintenant d'appliquer ln à ceci. De façon informelle (et encore une fois, je pars sans a priori sur la longueur du DL nécessaire), on a, en utilisant (1) et (8)

$$\begin{aligned}\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)&=\left(\frac{1}{4!x^2}-\left(\frac{1}{6!}+\frac{1}{2\times 3!}\right)\frac{1}{x^3}+\frac{1}{8!x^4}+\dots\right)\\&-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4!x^2}-\left(\frac{1}{6!}+\frac{1}{2\times 3!}\right)\frac{1}{x^3}+\frac{1}{8!x^4}+\dots\right)^2\\&+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4!x^2}-\left(\frac{1}{6!}+\frac{1}{2\times 3!}\right)\frac{1}{x^3}+\frac{1}{8!x^4}+\dots\right)^3\\&-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4!x^2}-\left(\frac{1}{6!}+\frac{1}{2\times 3!}\right)\frac{1}{x^3}+\frac{1}{8!x^4}+\dots\right)^4\\&+\dots\end{aligned} \tag{9}$$

Evidemment, il ne faut pas laisser cette expression telle quelle, il faut simplifier. Ce calcul semble horrible, mais il faut se rendre compte qu'il est parfaitement inutile de faire tous les calculs dans leur totalité. On se rappelle le principe déjà évoqué :

Quand on écrit un DL, on regroupe les termes du même ordre, en les ordonnant du plus grand au plus petit.

La question est donc : quel est le terme le plus gros dans (9) ? c'est celui en $\frac{1}{x^2}$. Quelles sont toutes les manières possibles de fabriquer des termes en $\frac{1}{x^2}$ dans (9) ? Il n'y en a qu'une seule, c'est le premier terme de la première ligne $\frac{1}{4!x^2}$, tous les autres termes sont soit plus petits, soit issus de multiplication de $\frac{1}{x^2}$ avec d'autres termes, donc aussi plus petits. Le terme suivant est celui en $1/x^3$ égal à $-\left(\frac{1}{6!}+\frac{1}{2\times 3!}\right)\frac{1}{x^3}$ pour la même raison.

Quel est le terme en $1/x^4$? en oubliant encore une fois les termes plus petits, il n'y a que deux façons de fabriquer un terme en $1/x^4$: le $\frac{1}{8!x^4}$ de la première ligne, et (imaginant qu'on développe le carré de la deuxième ligne, obtenant donc des carrés et des doubles produits) le terme $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4!x^2}\right)^2$. Tous les autres termes de ce calcul sont plus petits que $1/x^2$. Et ainsi de suite (exercice : calculez le terme d'ordre $1/x^5$).

Le développement de $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ est donc :

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{4!x^2} - \left(\frac{1}{6!}+\frac{1}{2\times 3!}\right)\frac{1}{x^3} + \left(\frac{1}{8!}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(4!)^2}\right)\right)\frac{1}{x^4} + \ldots \tag{10}$$

(7) On approche de la conclusion de l'exercice : on multiplie par x^2 :

$$x^2\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{4!} - \left(\frac{1}{6!}+\frac{1}{2\times 3!}\right)\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{8!}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(4!)^2}\right)\right)\frac{1}{x^2} + \ldots \tag{11}$$

Ici nous avons levé la forme indéterminée : la quantité précédente tend vers $\frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$. Et c'est à ce moment qu'on se rend compte de la longueur requise pour nos DLs. Pour cela, on remonte les calculs :

(a) Nous avons besoin d'un DL à l'ordre 0 pour (11) (on veut juste la limite !) :

$$x^2\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{4!} + o(1)$$

(b) donc nous avons besoin du DL à l'ordre 2 pour (10) :

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{4!x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

(c) ceci demande uniquement (7)

(d) et donc pour (2) et (3), nous avons besoin de (ça et pas plus que de ça)

$$\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{4!x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
$$\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

(8) Un conseil : à la lumière de ce que je viens d'écrire, relire le corrigé ci-dessus (évidemment avec l'habitude, on voit tout de suite quel DL il faut immédiatement écrire, sans passer par tous ces détails au brouillon).

Exercice 2. Dans tout cet exercice, (u_n) est une suite réelle **qui n'admet aucune valeur d'adhérence**. *Dans cet exercice, il est possible d'admettre le résultat d'une question pour s'en servir dans la suite.*

(1) Rappeler la définition d'une valeur d'adhérence ℓ d'une suite (u_n). $\ell \in \mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence de (u_n) s'il existe une sous-suite de u qui converge vers ℓ.

(2) On suppose dans cette question que (u_n) est **minorée**, et on souhaite montrer dans ce cas que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. On raisonne par l'absurde : on suppose que la suite (u_n) ne tend pas vers $+\infty$.

(a) Traduire avec des quantificateurs la phrase "la suite (u_n) ne tend pas vers $+\infty$".

$$\exists A \geqslant 0,\ \forall n_0 \geqslant 0,\ \exists n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant A. \tag{12}$$

(b) Montrer qu'il existe $A > 0$ et des indices $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ tels que pour tout $k \geqslant 1$, $u_{n_k} \leqslant A$. *On pourra procéder par récurrence sur k.*

On applique (12) pour $n_0 = 1$: il existe $n_1 \geqslant 1$ tel que $u_{n_1} \leqslant A$. On applique ensuite (12) pour $n_0 = n_1 + 1$: existe $n_2 \geqslant n_1 + 1 > n_1$ tel que $u_{n_2} \leqslant A$ et ainsi de suite par récurrence. Plus précisément, supposons avoir construit $n_1 < \ldots < n_k$ répondant à la question. Alors appliquons (12) pour $n_0 = n_k + 1$: il existe $n_{k+1} \geqslant n_k + 1 > n_k$ tel que $u_{n_{k+1}} \leqslant A$. D'où la propriété par récurrence.

(c) En déduire qu'il existe une suite extraite de (u_n), qu'on notera (v_n), qui est bornée.

En posant $\varphi(k) = n_k$ et $v_n := u_{\varphi(n)}$, la suite v est majorée d'après la question précédente. Mais elle est aussi minorée, puisque u l'est par hypothèse et que v est une sous-suite de u.

(d) En appliquant un théorème vu en cours à (v_n), montrer l'existence d'une valeur d'adhérence pour la suite (u_n) et conclure. La suite v est bornée, donc par théorème de Bolzano-Weierstrass, v admet une sous suite qui converge. Cette sous-suite est aussi une sous-suite de u, qui converge donc vers une valeur d'adhérence de u. Absurde. Donc $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

(3) On suppose dans cette question que (u_n) est **majorée**. Montrer que dans ce cas, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$. *NB : on pourra appliquer le résultat de la question (2) à une suite bien choisie. En particulier, l'encadré suivant suffit amplement pour répondre à cette question, toute démonstration qui déborderait de cet encadré est (sans doute) une perte de temps.* Posons $w_n = -u_n$. La suite w est minorée, car u est majorée. Donc (question précédente), w tend vers $+\infty$ et donc $u \to -\infty$.

(4) Dans le cas où la suite (u_n) n'est ni majorée ni minorée (et toujours sans valeur d'adhérence), est-il toujours vrai que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$? Non, ce n'est plus vrai : contre-exemple : $u_n = (-1)^n n$.