Université Paris Descartes **Analyse 3**
1$^{\text{er}}$ semestre 2017-2018

EXAMEN - SESSION 2

Vendredi 15 juin 2018 - Durée : 2h

Tout document, calculatrice, téléphone portable et autre appareil électronique est interdit. L'énoncé comporte 5 exercices indépendants.

Une part substantielle de la note portera sur la rédaction. Une juxtaposition d'équations sans liens logiques ni quantificateurs appropriés ne se verra pas attribuer une note élevée.

On attend que vous citiez précisément les théorèmes utilisés. En l'absence de la totalité des hypothèses requises, votre résultat sera considéré comme faux.

Exercice 1 (Question de cours) :

1. Donner l'énoncé du Théorème fondamental de l'analyse.
2. Démontrer ce théorème.

Exercice 2 : Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ deux suites réelles. Pour tout $n \geq 1$, on pose $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$. On suppose dans tout l'exercice que

— $\forall n \geq 1, v_n > 0$,

— $\lim_{n\to\infty} V_n = +\infty$.

1. Le but de cette question est de montrer que si
$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \in \mathbb{R},$$
alors
$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = l.$$
   (a) Montrer que pour tout $N_1 \geq 1$, tout $n > N_1$,
$$\left|\frac{U_n}{V_n} - l\right| \leq \left|\frac{U_{N_1} - lV_{N_1}}{V_n}\right| + \frac{\sum_{k=N_1+1}^{n} \left|\frac{u_k}{v_k} - l\right| v_k}{V_n}.$$
   (b) Ecrire avec des quantificateurs appropriés la convergence de $\frac{u_n}{v_n}$ vers l.
   (c) Ecrire avec des quantificateurs appropriés le fait que $V_n \to_{n\to\infty} +\infty$.
   (d) Conclure.
2. Application : montrer l'existence et donner la valeur de la limite
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}},$$
pour $k \in \mathbb{N}$ fixé. *On posera bien sûr $u_n = n^k$ et $v_n = n^{k+1} - (n-1)^{k+1}$ pour $n \geq 1$ et on détaillera proprement le calcul de la limite de $\frac{u_n}{v_n}$.*

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ qui s'annule en au moins $n+1$ points distincts de I.

1. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule en au moins un point de I.
2. Soit α un réel. Montrer que la dérivée $(n-1)$ième de $f' + \alpha f$ s'annule au moins une fois sur I. *On pourra s'intéresser à la fonction $g : x \mapsto f(x)e^{\alpha x}$.*

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

1. Montrer que f admet un minimum global.
2. Ce minimum est-il ou non unique ? Si oui, vous donnerez une démonstration, si non, vous donnerez un contre-exemple.

3. Le résultat de la question 1. est-il toujours vrai si on ne suppose plus que f est continue ? Si oui, vous donnerez une démonstration, si non, vous donnerez un contre-exemple.

Exercice 5 : Soit l'équation différentielle suivante :

$$ty'(t) - y(t) = -t^2 \ln(|t|). \tag{1}$$

1. Résoudre cette équation sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. *Vous détaillerez votre réponse pour* $]0, +\infty[$ *et vous pourrez vous contenter de donner la réponse pour* $]-\infty, 0[$.
2. Existe t-il des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur $\mathbb{R}$ et qui sont solutions de (1) sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$? Si oui, lesquelles ? Vous justifierez précisément votre réponse.

Fin de l'épreuve.