**Université Paris Descartes** **Analyse 3**
**1$^{\text{er}}$ semestre 2019-2020**

# Partiel

Lundi 25 novembre 2019 - Durée : 1h30

---

*Tout document, calculatrice, téléphone portable et autre appareil électronique est interdit. L'énoncé comporte 3 pages et 4 exercices indépendants.*

*Une part substantielle de la note portera sur la rédaction. Une juxtaposition d'équations sans liens logiques ni quantificateurs appropriés ne se verra pas attribuer une note élevée.*

*On attend que vous citiez précisément les théorèmes utilisés. En l'absence de la totalité des hypothèses requises, votre résultat sera considéré comme faux.*

*Le barème mentionné est purement indicatif et susceptible de modifications.*

**Exercice 1 (Question de cours, $\approx$ *3pt*) :** Démontrer que si une suite est convergente, sa limite est unique.

**Exercice 2 ($\approx$ *6pt*) :** On s'intéresse dans cet exercice à la suite récurrente donnée par

$$u_0 > 0, \text{ et pour } n \geq 0,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\arctan(u_n).$$

*On rappelle que pour tout $u \geq 0$, $\arctan(u) \leq u$ et le développement limité suivant, valable pour $u \to 0$ :*

$$\arctan(u) = u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + o(u^5).$$

1. Donner le signe de $(u_n)$ et étudier sa monotonie.
2. Montrer que $(u_n)$ est convergente, de limite 0.

On pose $v_n = 2^n u_n$ pour $n \geq 0$.

3. Donner un équivalent pour $n \to \infty$ de $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$, exprimé uniquement en fonction de $u_n$.
4. Montrer que $|u_n| \leq \frac{u_0}{2^n}$ pour $n \geq 0$ et en déduire que la série de terme général $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ converge.
5. En déduire que la suite $(v_n)$ est convergente, de limite $\ell$ strictement positive.
6. En déduire un équivalent (exprimé en fonction de $\ell$) de $u_n$ pour $n \to \infty$.

**Exercice 3 ($\approx$ *5pt*) :** Dans cet exercice, $A$ est une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$ (i.e. il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $|x| \leq M$). On pose

$$B = \{|x-y|\,,\ x, y \in A\}\ . \tag{1}$$

Ainsi, $B$ est l'ensemble de toutes les distances entre deux points quelconques de $A$.

1. Montrer que $\sup(B)$ existe. On appelle ce réel *diamètre de $A$* et on notera $\mathrm{Diam}(A) = \sup(B)$.
2. Justifier que $\inf(A)$ et $\sup(A)$ existent puis montrer que $\mathrm{Diam(A)} \leq \sup(A) - \inf(A)$.
3. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x, y \in A$ tels que $\sup(A) - \inf(A) - \varepsilon < x - y$.
4. En déduire que $\mathrm{Diam}(A) = \sup(A) - \inf(A)$.

**Exercice 4 ($\approx$ *8pt*) :** Soit $x \in ]0, +\infty[$, un réel strictement positif. Soit $(r_n)_{n\geq 1}$ une suite de rationnels positifs qui converge vers $x$. On écrit $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec $p_n \in \mathbb{N}, q_n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si l'une des suites parmi $(p_n)_{n\geq 1}$ et $(q_n)_{n\geq 1}$ est bornée, alors l'autre l'est aussi.
2. On suppose dans cette question que l'une des suites $(p_n)_{n\geq 1}$ ou $(q_n)_{n\geq 1}$ est bornée.
   (a) Montrer que dans ce cas, la suite $((p_n, q_n))_{n\geq 1}$ prend ses valeurs dans un ensemble fini.
   (b) En déduire qu'il existe une sous-suite de $((p_n, q_n))_{n\geq 1}$ qui est constante.
   (c) Conclure que $x \in \mathbb{Q}$.

3. Un résultat auxiliaire : soit $(a_n)$ une suite réelle. On souhaite montrer dans cette question le résultat suivant : si pour toute sous-suite $(a_{\varphi(n)})$, on peut extraire une sous-sous-suite $(a_{\varphi(\psi(n))})_{n\geq 1}$ qui tend vers 0, alors la suite $(a_n)$ tend vers 0. On raisonne par l'absurde : la suite $(a_n)$ ne tend pas vers 0.
   (a) Montrer alors qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une extraction $\varphi$ tels que pour tout $n \geq 1$, $\left|a_{\varphi(n)}\right| > \varepsilon$.
   (b) Conclure à une contradiction.
4. On suppose dans cette question que $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   (a) Que pouvez-vous déduire des questions 1. et 2. à propos des suites $(p_n)$ et $(q_n)$ ?
   (b) Montrer que si une suite est non majorée, alors il existe une sous-suite qui tend vers $+\infty$.
   (c) Déduire des questions précédentes, que dans ce cas, on a $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et $q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. *Indication : on pourra s'intéresser à la suite* $a_n = \frac{1}{p_n}$.

**Fin de l'épreuve.**