Proba3 - Corrigé TD 2

Exercice 1

1. Étant donnés 3 événements A, B, C, montrer la formule suivante (en supposant que $\mathbb{P}(A\cap B\cap C)>0)$) :
$$\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(C|A\cap B)$$

Solution: On utilise la formule de proba conditionnelle, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cap B\cap C)&=\mathbb{P}(C\cap(A\cap B))=\mathbb{P}(C|A\cap B)\times\mathbb{P}(A\cap B)\\&=\mathbb{P}(C|A\cap B)\times\mathbb{P}(B|A)\times\mathbb{P}(A)\\&=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(C|A\cap B)\end{aligned}$$

2. On tire trois cartes au hasard et sans remise dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité de tirer trois piques ?

Solution: On appelle A l'évenement on tire trois piques.

On a $|\Omega|=32\times 31\times 30$ (32 possibilités pour la première cartes, 31 pour la deuxième car on est sans remise et ainsi de suite).

Pour choisir un élément de A, on a 8 possibilités pour la première cartes, puis 7 pour la deuxième, et 6 pour la troisième carte. On a donc $|A|=8\times 7\times 6$.
D'où $\mathbb{P}(A)=\frac{8\times7\times6}{32\times31\times30}$.

3. Quelle est la probabilité pour que la première carte soit un pique sachant que les deux dernières le sont ?

Solution: En appelant P_i l'événement la carte i est un pique, on veut calculer $\mathbb{P}(P_1|P_2\cap P_3)$.

En utilisant la formule des probas conditionnelles, on a

$$\mathbb{P}(P_1|P_2\cap P_3)=\frac{\mathbb{P}(P_1\cap P_2\cap P_3)}{\mathbb{P}(P_2\cap P_3)}=\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(P_2\cap P_3)}$$

En outre, on a $\mathbb{P}(P_2\cap P_3)=\mathbb{P}(P_2\cap P_3|P_1)\times\mathbb{P}(P_1)+\mathbb{P}(P_2\cap P_3|\neg P_1)\times\mathbb{P}(\neg P_1)=\frac{7\times6}{31\times30}\times\frac{8}{32}+\frac{8\times7}{31\times30}\times\frac{3\times8}{32}$.
D'où
$$\mathbb{P}(P_1|P_2\cap P_3)=\frac{\frac{8\times7\times6}{32\times31\times30}}{\frac{7\times6}{31\times30}\times\frac{1}{4}+\frac{8\times7}{31\times30}\times\frac{3}{4}}=\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}$$

On a donc $\mathbb{P}(P_1|P_2\cap P_3)<\mathbb{P}(P_1)$

Exercice 2

Un étudiant possède 4 cravates C_1, C_2, C_3, C_4. Il en change chaque jour, en en choisissant une au hasard parmi les 3 cravates non portées la veille. Le premier jour, il porte la cravate C_1.

1. Calculer la probabilité pour qu'au jour n, l'étudiant n'ait jamais reporté la cravate C_1.

> **Solution:** Pour $i \in \{1,2,3,4\}$ et $n \geq 1$, on nomme C_i^n l'événement, il porte la cravate i au jour n.
>
> La probabilité à calculer correspond à $\mathbb{P}((\neg C_1^n) \cap (\neg C_1^{n-1}) \cap \cdots \cap (\neg C_1^2))$. On l'appelle p_n.
>
> On a, par la formule des probabilités conditionnelles, pour $n > 2$
>
> $$\begin{aligned} p_n &= \mathbb{P}(\neg C_1^n | (\neg C_1^{n-1}) \cap \cdots \cap (\neg C_1^2)) \times \mathbb{P}((\neg C_1^{n-1}) \cap \cdots \cap (\neg C_1^2)) \\ &= \mathbb{P}(\neg C_1^n | (\neg C_1^{n-1})) \times p_{n-1} \end{aligned}$$
>
> car C_1^n ne dépend que de C_1^{n-1}. Et d'après l'énoncé, si la cravate 1 n'est pas portée un jour, il y a 2 chance sur 3 de ne pas la porter au jour suivant, donc $\mathbb{P}(\neg C_1^n | \neg C_1^{n-1}) = \frac{2}{3}$.
>
> Donc $p_n = \frac{2}{3} p_{n-1}$ pour tout $n > 2$.
>
> Enfin, comme la cravate 1 est portée au jour 1, on a $p_2 = 1$ car on ne porte pas deux fois de suite la même cravate.
>
> Donc $p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$.

2. Calculer la probabilité pour qu'au jour n, l'étudiant n'ait jamais porté la cravate C_4.

> **Solution:** C'est le même principe. Si on appelle cette probabilité q_n, par le même raisonnement, on trouve $q_n = \frac{2}{3} q_{n-1}$ et on a cette fois $q_1 = 1$.
>
> Donc $q_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

Exercice 3

1. Une urne contient deux boules, une blanche et une noire. Après chaque tirage, on remet dans l?urne la boule tirée ainsi qu?une autre de même couleur. Quelle est la probabilité de tirer successivement 4 boules noires ?

> **Solution:** On appelle A_i l'événement la boule i est noire. On a donc, en appliquant successivement la formule des proba conditionnelles :
>
> $$\begin{aligned} PP(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= \mathbb{P}(A_4 | A_2 \cap A_3 \cap A_1) \times \mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_1) \\ &= \cdots \\ &= \mathbb{P}(A_4 | A_2 \cap A_3 \cap A_1) \times \mathbb{P}(A_3 | A_2 \cap A_1) \times \mathbb{P}(A_2 | A_1) \times \mathbb{P}(A_1) \end{aligned}$$
>
> En utilisant les informations de l'enoncé, on a $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2}$ (il n'y a d'abord que 2 boules, une blanche, une noire), $\mathbb{P}(A_2 | A_1) = \frac{2}{3}$ (on a rajouté une boule noire), $\mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{3}{4}$ (on a encore rajouté une boule noire) et $\mathbb{P}(A_4 | A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{4}{5}$ (idem) et donc
>
> $$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

Exercice 4

J?ai 8 clefs qui se ressemblent toutes ; une seule ouvre mon appartement. En revenant chez moi j?essaie au hasard les clefs une par une. Calculer, dans chacun des cas suivants, la probabilité que j?ouvre ma porte en trois essais au plus :

1. Je suis stupide, et je choisis au hasard une des 8 clefs à chaque essai.

Solution: Cela correspond à un tirage avec remise. On nomme A_i l'événement la clef i est la bonne clef, et on cherche $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$.

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - \mathbb{P}((\neg A_1) \cap (\neg A_2) \cap (\neg A_3)) = 1 - (\frac{7}{8})^3 \approx 33\%$$

2. Je le suis un peu moins, et je mets de côté les mauvaises clefs au fur et à mesure.

Solution:

On a un tirage sans remise.

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - \mathbb{P}((\neg A_1) \cap (\neg A_2) \cap (\neg A_3)) = 1 - \frac{7}{8} \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{6} \approx 38\%$$

Ca vaut pas forcément le coup de s'embêter... (mais si on essaye plus de clef, ça deveint plus intéressant).

Exercice 5

1. Un document a été perdu. La probabilité pour qu?il se trouve dans un meuble est p, $(0 < p < 1)$. Ce meuble comporte sept tiroirs. On explore six tiroirs sans trouver le document. Quelle est la probabilité de le trouver dans le septième ?

Solution: On note A_i l'événement la clef est dans le tiroir i, et M l'événement le document est dans le meuble.

FAUX je suis allé trop vite dans l'application de la formule de disjonction de cas. Elle doit se faire conditionnellement à $\neg(A_1 \cup \cdots \cup A_6)$. On pourrait aboutir comme cela mais ça n'est pas pratique On veut $p = \mathbb{P}(A_7 | \neg(A_1 \cup \cdots \cup A_6))$. On utilise la formule de disjonction de cas. On a donc

$$p = \mathbb{P}(A_7 | (\neg(A_1 \cup \cdots \cup A_6) \cap M)) \times \mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(A_7 | -(\neg(A_1 \cup \cdots \cup A_6)) \cap \neg M) \times \mathbb{P}(\neg M)$$

Si le document n'est pas dans le meuble, la probabilité qu'il soit dans le 7eme tiroir est 0, et 1 sinon. D'où $p = 1 \times p + 0 \times (1 - p) = p$.

Bonne solution :

On a $p = \mathbb{P}(A_7 | \neg(A_1 \cup \cdots \cup A_6)) = \frac{\mathbb{P}(A_7 \cap \neg(A_1 \cup \cdots \cup A_6))}{\mathbb{P}(\neg(A_1 \cup \cdots \cup A_6))}$

Or $\mathbb{P}(\neg(A_1 \cup \cdots \cup A_6)) = \mathbb{P}(\bar{M} \cup A_7) = \mathbb{P}(\bar{M}) + \mathbb{P}(A_7)$ (si le document n'est pas dans les 6 premiers tiroirs, alors il est forcement soit dans le 7eme soit ailleurs que dans le meuble, et les deux événements sont disjoints) et $\mathbb{P}(A_7 \cap \neg(A_1 \cup \cdots \cup A_6)) = \mathbb{P}(A_7)$ (être dans le 7eme tiroir correspond exactement à être dans le 7eme et pas dans les 6 premiers) et $\mathbb{P}(A_7) = \mathbb{P}(A_7|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(A_7|\bar{M})\mathbb{P}(\bar{M}) = \frac{p}{7}$ (on utilise cette fois correctement la formule des probabilités totales).

Donc $p = \frac{\mathbb{P}(A_7)}{\mathbb{P}(\bar{M} + \mathbb{P}(A_7)} = \frac{\frac{p}{7}}{1-p+\frac{p}{7}} = \frac{p}{7-6p}$.

Contrairement à ce que l'on pourrait intuiter, on trouve une probabilité plus faible que p et plus grande que $\frac{p}{7}$.

Exercice 6

Deux urnes A et B contiennent respectivement deux boules blanches plus une noire, et une blanche plus cinq noires. On tire au hasard une boule dans l?urne A, que l?on place dans B. On tire alors au hasard une boule dans B :

1. Quelle probabilité a-t-elle d?être blanche ?

Solution: On appelle N_A l'evenement la boule tirée en A est noire et N_B la boule tirée en B est noire. On utilise la formule de disjonction de cas. On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\neg N_B) &= \mathbb{P}(\neg N_B|\neg N_A) \times \mathbb{P}(\neg N_A) + \mathbb{P}(\neg N_B|N_A) \times \mathbb{P}(N_A) \\ &= \frac{2}{7} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{7} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{4}{21} + \frac{1}{21} = \frac{5}{21}\end{aligned}$$

2. Si elle s'avère être blanche, quelle est la probabilité que la boule transférée ait été aussi blanche ?

Solution: On utilise la formule de Bayes. On veut $\mathbb{P}(\neg N_A|\neg N_B)$. On a donc

$$\mathbb{P}(\neg N_A|\neg N_B) = \frac{\mathbb{P}(\neg N_A \cap (\neg N_B))}{\mathbb{P}(\neg N_B)} = \frac{\mathbb{P}(\neg N_B|\neg N_A) \times \mathbb{P}(\neg N_A)}{\mathbb{P}(\neg N_B)}$$

Par l'énoncé, on a $\mathbb{P}(\neg N_B|(\neg N_A)) = \frac{2}{7}$ et $\mathbb{P}(\neg N_A) = \frac{2}{3}$.

D'où $\mathbb{P}(\neg N_A|\neg N_B) = \frac{\frac{4}{21}}{\frac{5}{21}} = \frac{4}{5}$

Exercice 7

On suppose qu?un test du cancer a une fiabilité de 95%, sur les malades comme sur les bien portant. On sait que 0, 4% de la population souffre de ce cancer.

1. Quelle est la probabilité que le test donne un résultat positif ?

Solution: Pour un individu donné, on appelle M l'événement "cet individu est malade" et P l'événement "le test est positif. Un test fiable à 95% sur les malades et sains signifient que $\mathbb{P}(P|M) = 0.95$ et $\mathbb{P}(\bar{P}|\bar{M}) = 0.95$.

On veut $\mathbb{P}(P)$. En utilisant la formule de disjonction de cas, on a

$$\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(P|M) \times \mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(P|\bar{M}) \times \mathbb{P}(\bar{M})$$

On a, d'après l'énoncé, $\mathbb{P}(M) = 0.004$, $\mathbb{P}(\bar{M}) = 1 - \mathbb{P}(M) = 9,996$, et $\mathbb{P}(P|\bar{M}) = 1 - \mathbb{P}(\bar{P}|\bar{M}) = 0.05$.

On a donc $\mathbb{P}(P) = 0.95 \times 0.004 + 0.05 \times 0,9996 = 0.0536 >> 0,004!$. Il y a bien plus de chance d'être positif que d'être malade !!

2. Quelle est la probabilité qu'une personne soit malade, sachant que le test l'indique ?

Solution: On veut $\mathbb{P}(M|P)$. On utilise la formule de Bayes. On a

$$\mathbb{P}(M|P) = \frac{\mathbb{P}(P|M) \times \mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(P)} = \frac{0.95 \times 0.004}{0.0536} \approx 0.07$$

Il y a seulement 7% de chance d'être malade quand on est positif !!! Moralité : Il faut se méfier des statistiques.

Exercice 8

1. Une population est formée de 40% d?hommes et de 60% de femmes. On sait que le pourcentage de fumeurs parmi les hommes est de 50%, et parmi les femmes de 30%. On choisit un individu au hasard dans cette population. Quelle est la probabilité qu?il soit fumeur ? Quelle est la probabilité qu?il soit un homme sachant qu?il est fumeur ?

Solution: Cet exercice se résout de la même manière que le précédent.

On appelle F l'événement "cette personne fume", et H l'événement "cette personne est un homme".

On a donc

$$\begin{aligned} PP(F) &= \mathbb{P}(F \cap H) + \mathbb{P}(F \cap \bar{H}) = \mathbb{P}(F|H)\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(F|\bar{H})\mathbb{P}(\bar{H}) \\ &= 0.5 \times 0.4 + 0.3 \times 0.6 = 0.20 + 0.18 = 0.38 \end{aligned}$$

Il y a donc 38% de chance qu'il fume.

De même, on a par la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(H|F) = \frac{\mathbb{P}(F|H) \times \mathbb{P}(H)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{0.5 \times 0.4}{0.38} \approx 0.52$$

Il a dans le cas où il fume, environ 52% de chance d'être un homme.

Exercice 9

1. On jette deux dés de façon indépendante et équiprobable. Soient respectivement A, B et C les événements « le chiffre du 1 er dé est impair », « le chiffre du 2 ème dé est pair » et « les chiffres des 2 dés ont même parité ». Montrer que A et C, A et B, B et C sont indépendants, mais que A, B, C ne sont pas mutuellement indépendants.

Solution: On calcule les probabilités et on vérifient les définitions. On note (i, j) le résultat du jet avec i le résultat du premier dé et j du deuxième.

On a

$$A = \{(1,j), j \in \{1,..,6\}\} \cup \{(3,j), j \in \{1,..,6\}\} \cup \{(5,j), j \in \{1,..,6\}\}$$

,

$$B = \{(i,2), i \in \{1,..,6\}\} \cup \{(i,4), i \in \{1,..,6\}\} \cup \{(i,6), i \in \{1,..,6\}\}$$

et

$$C = \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\} \cup \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),6,6)\}$$

.

On a donc $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{36} = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$.
De même, on peut expliciter $A \cap B$, $A \cap C$ et $B \cap C$ et on trouve $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$,$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4}$. On a donc

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cap \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \cap \mathbb{P}(C), \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A \cap C)$$

Donc A et B, A et C et B et C sont indépendants.

Par contre, on a $A \cap B \cap C = \emptyset$, et donc $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0 \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C)$. Donc A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 10

Montrer que si un événement A est indépendant de lui-même, alors P(A) vaut 0 ou 1, et A est indépendant de tout événement.

Solution: On a alors $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(A)$ et donc

$$\mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A)) = 0$$

Donc, $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.

Soit $B \subset \Omega$ un événement, Si $\mathbb{P}(A) = 0$, on a alors $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) = 0$ car $A \cap B \subset A$ et donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 0 = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Si $\mathbb{P}(A) = 1$, alors comme $A \subset A \cup B$, on a $\mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A) = 1$ et donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 + \mathbb{P}(B) - 1 = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A)$.

Donc A et B sont indépendants dans les deux cas.

Exercice 11

On considère deux urnes U_1 et U_2. On suppose que U_1 (respectivement U_2) contient n_1 boules noires et 5 boules blanches (resp. n_2 boules noires et 15 boules blanches). On choisit de façon équiprobable une des deux urnes puis on y effectue deux tirages successifs d'une boule avec remise. Soit N_1 (resp. N_2) l'événement « on a obtenu une boule noire au premier (resp. au second) tirage ».

1. Quelle est la probabilité de N_1 ? Quelle est la probabilité de N_2 ?

Solution: On note E_1 l'événement "on tire dans l'urne 1". On a donc

$$\mathbb{P}(N_1) = \mathbb{P}(N_1|E_1) \times \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(N_1|\bar{E_1}) \times \mathbb{P}(\bar{E_1}) = \frac{n_1}{n_1+5} \times \frac{1}{2} + \frac{n_2}{n_2+15} \times \frac{1}{2}$$

De même, on a

$$\mathbb{P}(N_2) = \mathbb{P}(N_2|E_1) \times \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(N_2|\bar{E_1}) \times \mathbb{P}(\bar{E_1}) = \frac{n_1}{n_1+5} \times \frac{1}{2} + \frac{n_2}{n_2+15} \times \frac{1}{2}$$

Ce n'est pas étonnant de trouver la même chose, les deux tirages sont interchangeables (le premier n'influe pas sur le deuxième et inversement). En revanche, ils ne sont pas forcement indépendants comme on va le voir dans la question suivante : le résultat de l'un des deux donne des informations sur l'autre !

2. Les événements N_1 et N_2 sont-ils indépendants ? (on discutera suivant les valeurs de n_1 et n_2)

Solution: On a de même

$$\mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(N_1 \cap N_2|E_1) \times \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(N_1 \cap N_2|\bar{E_1}) \times \mathbb{P}(\bar{E_1}) = (\frac{n_1}{n_1+5})^2 \times \frac{1}{2} + (\frac{n_2}{n_2+15})^2 \times \frac{1}{2}$$

On sait que N_1 et N_2 sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(N_1 \cap N_2) = \mathbb{P}(N_1) \times \mathbb{P}(N_2)$, donc si et seulement si

$$\begin{aligned}
&(\frac{n_1}{n_1+5})^2 \times \frac{1}{2} + (\frac{n_2}{n_2+15})^2 \times \frac{1}{2} = (\frac{n_1}{n_1+5} \times \frac{1}{2} + \frac{n_2}{n_2+15} \times \frac{1}{2})^2 \\
\Leftrightarrow &(\frac{n_1}{n_1+5})^2 \times \frac{1}{2} + (\frac{n_2}{n_2+15})^2 \times \frac{1}{2} = (\frac{n_1}{n_1+5})^2 \times \frac{1}{4} + (\frac{n_2}{n_2+15}) \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{n_1n_2}{(n_1+5)(n_2+15)} \\
\Leftrightarrow &(\frac{n_1}{n_1+5})^2 \times \frac{1}{4} + (\frac{n_2}{n_2+15})^2 \times \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{n_1n_2}{(n_1+5)(n_2+15)} = 0 \\
\Leftrightarrow &\left(\frac{n_1}{n_1+5} \times \frac{1}{2} - \frac{n_2}{n_2+15} \times \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow &\frac{n_1}{n_1+5} = \frac{n_2}{n_2+15} \\
\Leftrightarrow &n_1n_2 + 15n_1 = n_1n_2 + 5n_2 \\
\Leftrightarrow &n_2 = 3n_1
\end{aligned}$$

Donc N_1 et N_2 sont indépendant si et seulement si $n_2 = 3n_1$, ce qui correspond, comme on peut le voir dans les calculs, à ce que $\frac{n_1}{n_1+5} = \frac{n_2}{n_2+15}$, et donc à ce que tirer dans l'urne 1 ou l'urne 2 soit équivalent. Dans ce cas, tirer ou non une boule noire ne donne aucune information sur l'urne que l'on a choisie et donc sur le deuxième tirage.