Algèbre 3
TD 6
Déterminants

Licence 2 MAE 2020-2021
Université Paris Descartes
Marc Briant

Dans tout ce TD, $(\mathbb{K},+,.)$ **désigne un corps commutatif.**

Exercice 1 : *Premières manipulations*

Pour $x \in \mathbb{R}$ nous définissons les déterminants suivants

$$P = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ -7 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Sans calculer les déterminants montrer que

1) P est une fonction polynôme en x divisible par $x+3$
2) Q est une fonction polynôme en x divisible par $x-1$

Exercice 2 : *Du calcul pur et simple*

Pour $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$, calculer les déterminants suivants

1) $D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$ **2)** $D_2 = \begin{vmatrix} a & a & b \\ a & b & a \\ b & a & a \end{vmatrix}$

3) $D_3 = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$ **4)** $D_4 = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ (a+2)^2 & (a+3)^2 & (a+4)^2 \end{vmatrix}$

Exercice 3 : *Déterminants et matrices par blocs*

Soit $A,\ B,\ C,\ D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Nous définissons les matrices par blocs suivantes

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

1) Calculer le produit $\begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$. En déduire que $\det(N) = \det(A).\det(D)$.

2) **[*]** On suppose que les matrices C et D commutent et que D est inversible. Montrer que $\det(M) = \det(AD - BC)$.

Exercice 4 : *Des calculs plein de récurrence*

Dans chacun des cas suivants les déterminants sont de taille n. Les calculer pour tout entier $n \geqslant 1$.

1) Soit $a \in \mathbb{K}\setminus\{0_{\mathbb{K}}\}$, $D_n = \begin{vmatrix} 2a & a & & 0 \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0 & & a & 2a \end{vmatrix}$.

2) **[*]Vandermonde.** Soient $(a_1,..,a_n) \in \mathbb{K}^n$, $V_n(a_1,..,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$

Exercice 5 : *Motivons l'étude des polynômes et des valeurs propres*

Soient E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n avec $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On définit $f \in L(E)$ par sa matrice relativement à la base $\mathcal{B}$:

$$\textbf{1)}\quad A = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{2)}\quad A = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dans chacun des cas ci-dessus répondre au trois questions ci-dessus.

a) Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{K}$, a-t-on $\det(A - \lambda I_3) = 0$? Nous les noterons λ_i.
b) En étudiant les $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$ déterminer une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $M_{\mathcal{B}'}(f)$ soit diagonale.

Exercice 6 : *Du déterminant caché*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

1. Montrer que s'il existe u et v dans $L(E)$ inversibles tels que $u \circ v + v \circ u = 0$ alors $\dim(E)$ est paire.
2. Soient $u \in GL(E)$ et $v \in L(E)$. Montrer que si $v \circ u \circ v = u$ alors v est aussi inversible.