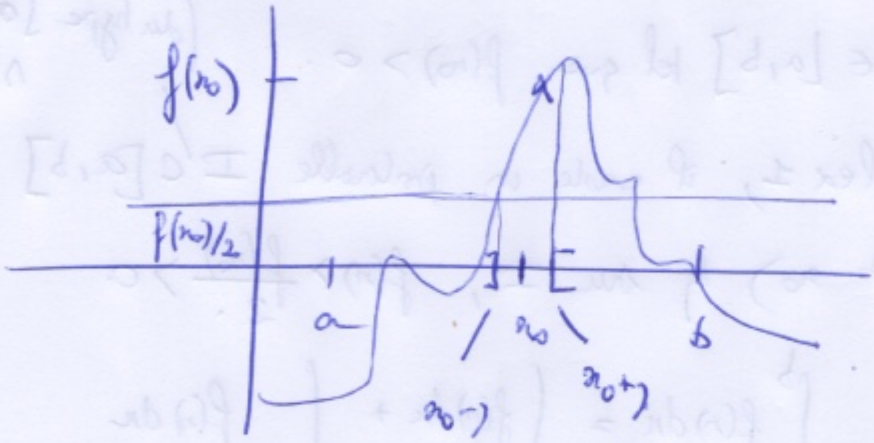
① Analyse 3 TD5

Ex1 : un grand classique !

le dessin correspondant est le suivant



On écrit la continuité de f en x_0 pour le choix de

$\varepsilon = f(x_0)/2 > 0$.

pour cet $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ (et quitte à choisir η suffisamment petit, on peut prendre η tel que
$]x_0-\eta, x_0+\eta[\subset]a,b[$) tel que

pour tout $x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[$ $\quad |f(x) - f(x_0)| < \dfrac{f(x_0)}{2}$

En particulier : $\quad -\dfrac{f(x_0)}{2} \leq f(x) - f(x_0)$

et donc $0 < \dfrac{f(x_0)}{2} \leq f(x)$

②

Ex 2 : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue tq $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \geq 0$.

① par monotonie de l'intégration on a

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b 0\, dx = 0.$$

② soit $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$. (du type $]x_0-\eta, x_0+\eta[\cap [a,b]$).

d'après l'ex 1, il existe un intervalle $I \subset [a,b]$ (contenant x_0) tq sur I, $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0$

mais alors $$\int_a^b f(x)dx = \underbrace{\int_I f(x)dx}_{\geq |I| \frac{f(x_0)}{2} > 0} + \underbrace{\int_{[a,b]\setminus I} f(x)dx}_{\geq 0}$$

$|I|$: longueur de I (non nulle).

③ C'est la contraposée de la question précédente.

③

Ex 3 : Soient f, g continues sur $\mathbb{R}$ tq $f(x) = g(x)$ sur $\mathbb{Q}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et posons $x_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ la suite des approximations décimales de x par défaut.

Alors $x_n \in \mathbb{Q}$ et donc $f(x_n) = g(x_n)$ pour tout $n \geq 0$

De plus, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ donc par continuité de f, g

on a
$$\begin{array}{ccc} f(x_n) & = & g(x_n) \\ \big\downarrow {\scriptstyle n\to\infty} & & \big\downarrow {\scriptstyle n\to\infty} \\ f(x) & & g(x) \end{array}$$

et donc $f(x) = g(x)$ à la limite ☒.

④

Ex 4: $f : [0,1] \to [0,1]$ continue.

On pose $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$.

↳ g est continue (somme de deux fonctions continues).

↳ $g(0) = f(0) \geq 0$

↳ $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$.

Trois possibilités : – soit $f(0) = 0$ auquel cas $x = 0$ répond à la question posée.

– soit $f(1) = 1$ ——— $x = 1$ ——— .

– soit $f(0) > 0$ et $f(1) < 1$ auquel cas $g(0) > 0$ et $g(1) < 0$.

On applique alors le TVI à g : il existe $c \in]0,1[$ tel que $g(c) = 0$ et donc $f(c) = c$ ☒

(5) <u>Ex 5 :</u> Exactement la même demonstration que pour l'ex 4 en regardant la fonction $h : x \mapsto f(x) - g(x)$.

<u>Ex 6</u> : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ une fonction continue.

$I = \mathbb{R}$ est un intervalle, donc (TVI) $J = f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Or $J = f(I) \subset \mathbb{Z}$.

Or, les seuls intervalles J de $\mathbb{R}$ inclus dans $\mathbb{Z}$ sont les singletons (si ce n'était pas le cas, il existerait $k \neq l \in \mathbb{Z}$ tels que $k \in J$, $l \in J$ mais alors tout réel non entier entre k et l serait aussi dans J ce qui contredit le fait que $J \subset \mathbb{Z}$).

Donc $f(I)$ est un singleton : f est constante.

(6) <u>Ex 7:</u> un grand classique aussi.

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues. telles que $\forall x \in [a,b]$
$$f(x) < g(x).$$

On pose $h(x) = g(x) - f(x)$. Alors h est continue sur $[a,b]$ donc (Th de la borne atteinte) h est bornée et atteint ses bornes. En particulier, notons $x_0 \in [a,b]$ tel que
$$h(x_0) = \min_{x \in [a,b]} h(x)$$

en particulier $h(x_0) := \alpha > 0$

et donc pour tout $x \in [a,b]$
$$h(x) \geq h(x_0) = \alpha > 0$$

et donc $g(x) \geq f(x) + \alpha$ $\boxtimes$

⑦ Ex 8 : (toujours faire attention aux ensembles de définition des fonctions considérées)

① $\sin(\arcsin(x))$, $x \in [-1,1]$

la fonction sin réalise une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1,1]$ de bijection réciproque arcsin. Donc la bijection réciproque de $\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ est sin.

donc $\sin(\arcsin(x)) = x$, $x \in [-1,1]$

② $\arcsin(\sin(x))$, $x \in \mathbb{R}$.

* pour la raison invoquée plus haut, si $x \in [-\pi/2, \pi/2]$

$$\arcsin(\sin(x)) = x$$

* si $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$, $y = x - \pi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

mais alors $\sin(y) = \sin(x-\pi) = -\sin(x)$.

ie $\sin(x) = -\sin(y)$

or par imparité de arcsin,

$$\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(-\sin(y))$$
$$= -\arcsin(\sin(y))$$
$$= -y = -x + \pi$$

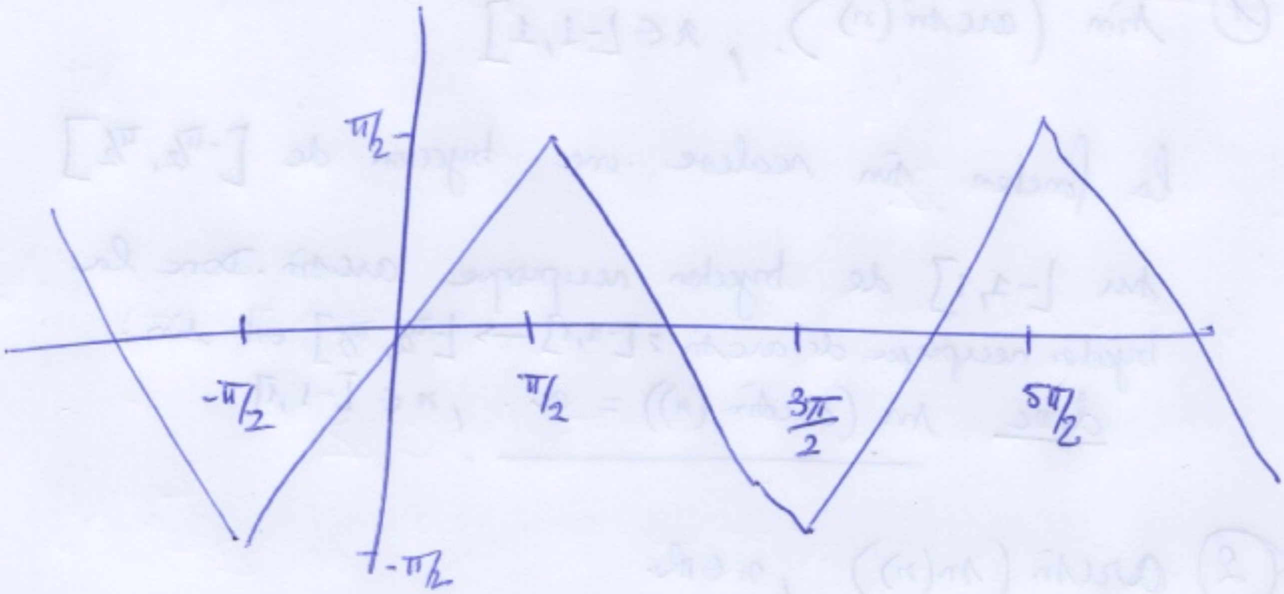
car $y \in [-\pi/2, \pi/2]$

Or la fonction $x \mapsto \arcsin(\sin(x))$ est 2π périodique

donc on se ramène à un des deux intervalles précédents

par 2π périodicité $\longrightarrow$.

(b) Graphe de $x \longmapsto \arcsin(\sin(x))$



plus précisément, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 2k\pi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

$$\left(\text{prendre } k = \left\lfloor \frac{x}{2\pi} - \frac{3}{4} \right\rfloor\right).$$

mais alors :

* soit $x - 2k\pi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ auquel cas.

$$\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(\sin(x-2k\pi)) = x - 2k\pi.$$

* soit $x - 2k\pi \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ auquel cas.

$$\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(\sin(x-2k\pi)) = -(x-2k\pi) + \pi = -x + (2k+1)\pi.$$

□

3) $\sin(\arccos(x))$, $x \in [-1,1]$.

on a $\sin(\arccos(x))^2 + \cos(\arccos(x))^2 = 1$

or $\cos(\arccos(x)) = x$ pour tout $x \in [-1,1]$ (car $\cos$ est la bijection réciproque de $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$).

donc $\boxed{\sin(\arccos(x))^2 = 1 - x^2}$

or $\arccos(x) \in [0,\pi]$ par def, donc son sinus est positif.

donc $\boxed{\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}}$

4) $\sin(\arctan(x))$, $x \in \mathbb{R}$

Notons que si $x = 0$

$A = \sin(\arctan(0))$
$= \sin(0) = 0 = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Donc on peut supposer $x \neq 0$

posons $A = \sin(\arctan(x))$

$B = \cos(\arctan(x))$.

$$\begin{cases} \text{alors } A^2 + B^2 = 1 \\ \text{et } \dfrac{A}{B} = \tan(\arctan(x)) = x \text{ car} \end{cases}$$

tan est la bijection réciproque de $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$.

donc $A^2 = 1 - B^2 = 1 - \dfrac{A^2}{x^2}$ donc $A^2\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 1$

ie $\boxed{A^2 = \dfrac{x^2}{1+x^2}}$

(10) or $\arctan(x) \in]-\pi/2, \pi/2[$

<u>deux cas</u> : * soit $x > 0$ auquel cas $\arctan(x) \in]0, \pi/2[$

et donc $\sin(\arctan(x)) > 0$

auquel cas $A = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

* soit $x < 0$ auquel cas $\arctan(x) \in]-\pi/2, 0[$

et donc $\sin(\arctan(x)) < 0$

auquel cas $A = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

<u>Conclusion</u> : dans tous les cas

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

<u>Rq</u> : on aurait pu se dispenser de tous ces sous-cas

en remarquant que $x \longmapsto \sin(\arctan(x))$ est impaire.

4 Ex 9 :

(1) $\arcsin(x) = \frac{2\pi}{3}$: pas de solution !

($\arcsin$ est à valeurs dans $[-\pi/2, \pi/2]$ ...).

(2) $\arcsin(x) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi/4$ (*)

déjà : $\arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6$ (Rappel : connaître les sin et cos de $\pi/4, \pi/3, \pi/6$ ...)

et donc (*) $\iff \arcsin(x) = \pi/12 \iff \sin(\arcsin(x)) = \sin(\pi/12)$

par application de la fonction arcsin, en ayant vérifié que $y = \arcsin(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$ et $\pi/12 \in [-\pi/2, \pi/2]$

par application de la fonction sin.

$\iff x = \sin(\pi/12)$: on ne s'arrête pas là : on peut le calculer !

posons $\theta = \pi/12$

$$\left.\begin{array}{l} \sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \frac{1}{4} = \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \cos^2(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin^2(\theta)$$

$\cancel{\Rightarrow \cos(\theta) = \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin^2(\theta)\right]^{1/2}}$ ~~(car cos(θ) > 0)~~

donc : $\frac{1}{16} = \sin^2(\theta)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin^2(\theta)\right)$

donc $X = \sin^2(\theta)$ satisfait

$$\frac{1}{16} = X\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + X\right)$$

qu'on résout en $X = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ (seule racine positive)

et donc $\sin^2(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

et donc $\sin(\theta) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}}$ car $\sin(\theta) > 0$.

(3) $\arccos(x) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$

$\iff \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos(x)$

Notons que cette égalité n'a de sens que pour les x tq $\boxed{\pi - \arccos(x) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[}$

$\iff \frac{1}{2} = \tan(\pi - \arccos(x))$

$\iff \frac{1}{2} = -\tan(\arccos(x))$ (par imparité et π périodicité de tan).

$\iff \frac{1}{2} = -\frac{\sin(\arccos(x))}{\cos(\arccos(x))} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$\iff \sqrt{1-x^2} = -\frac{x}{2}$

$\iff \begin{cases} x < 0 \text{ et pour } y = |x| \\ \sqrt{1-y^2} = \frac{y}{2} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x < 0 \text{ et pour } y = |x| \\ 1-y^2 = \frac{y^2}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} x < 0 \text{ et pour } y = |x| \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \iff \boxed{x = \frac{-2}{\sqrt{5}}}$

Ex 10

1 posons $\theta = \arcsin(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$.

alors $\sin(\theta) = \sin(\arcsin(x)) = x$

$\sin(\theta) = \cos(\pi/2 - \theta)$

donc $\cos(\pi/2 - \theta) = x$.

or $\pi/2 - \theta \in [0, \pi]$ et donc

$$\pi/2 - \theta = \arccos(\cos(\pi/2 - \theta)) = \arccos(x)$$

donc $\boxed{\pi/2 = \theta + \arccos(x) = \arcsin(x) + \arccos(x)}$ ☒

2 $x > 0$.

soit $a = \arctan(x) \in]0, \pi/2[$

alors $\tan(a) = x$ (car tan bijection réciproque de arctan : $]0,+\infty[\to]0,\pi/2[$

alors $$\frac{1}{x} = \frac{1}{\tan(a)} = \frac{\cos(a)}{\sin(a)}$$

$$= \frac{\sin(\pi/2 - a)}{\cos(\pi/2 - a)}$$

$$\frac{1}{x} = \tan(\underbrace{\pi/2 - a}_{\in]0,\pi/2[})$$

donc $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan(\tan(\pi/2 - a))$

$= \pi/2 - a$

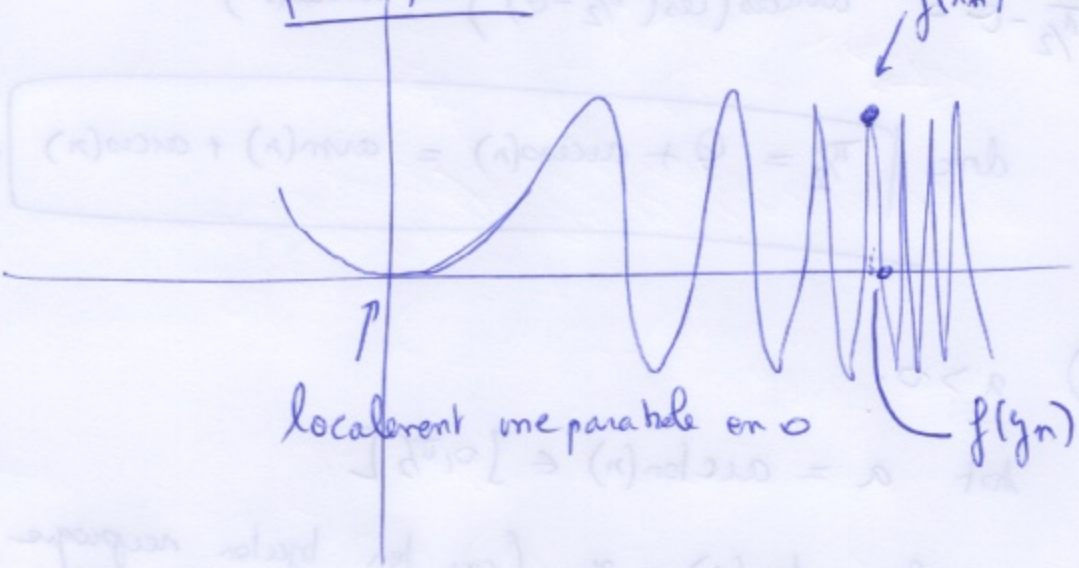
car arctan bijection réciproque de tan : $]0, \pi/2[\to]0, +\infty[$

(14)

et donc $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan(x) = \pi/2$.

(3) si $x < 0$. la fonction $x \longmapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ étant impaire on conclut en appliquant le chgt de var $y = -x$ + question 2.

Ex 11 : graphe de $t \mapsto \sin(t^2)$



il s'agit de mq :

$$(*) \left[\begin{array}{l} \exists \varepsilon > 0 \ \ \forall \eta > 0 \ \ \exists (x,y) \in \mathbb{R} \text{ tq } |x-y| < \eta \text{ et} \\ \qquad |\sin(x^2) - \sin(y^2)| \geq \varepsilon \end{array} \right.$$

pour tout $n \geq 1$ on pose

$$x_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$$

$$y_n = \sqrt{2\pi n}.$$

alors : $|x_n - y_n| = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} - \sqrt{2\pi n}$

$$= \frac{\pi/2}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} + \sqrt{2\pi n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

donc quelque soit $\eta > 0$ il existe $n_0 \geq 0$ tel que

$$|x_{n_0} - y_{n_0}| < \eta.$$

d'autre part $|\sin(x_{n_0}^2) - \sin(y_{n_0}^2)| = |1 - 0| = 1.$

donc (*) est vraie pour $\varepsilon = 1$

Ex 12 : $f(x) = \sqrt{x-1}$ sur $[1, +\infty[$.

NB : il faut modifier l'enoncé pour faire se chevaucher les deux intervalles :

① f est continue sur le segment $[1, 3]$ donc uniformément continue, par th de Heine.

② pour tout $x \geq 2$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

et donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

③ par inégalité des Accroissements finis, (f $\underline{c}$ sur $[2, +\infty[$ $\underline{d}$ sur $]2, +\infty[$)

pour tout $x, y \in [2, +\infty[$

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y| \sup_{z \in [x,y]} |f'(z)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$$

$\boxtimes$

(16) (a) f est uc sur $[1,3]$ et uc sur $[2,+\infty[$ (car lipschitzienne)

donc pour tout $\varepsilon>0$

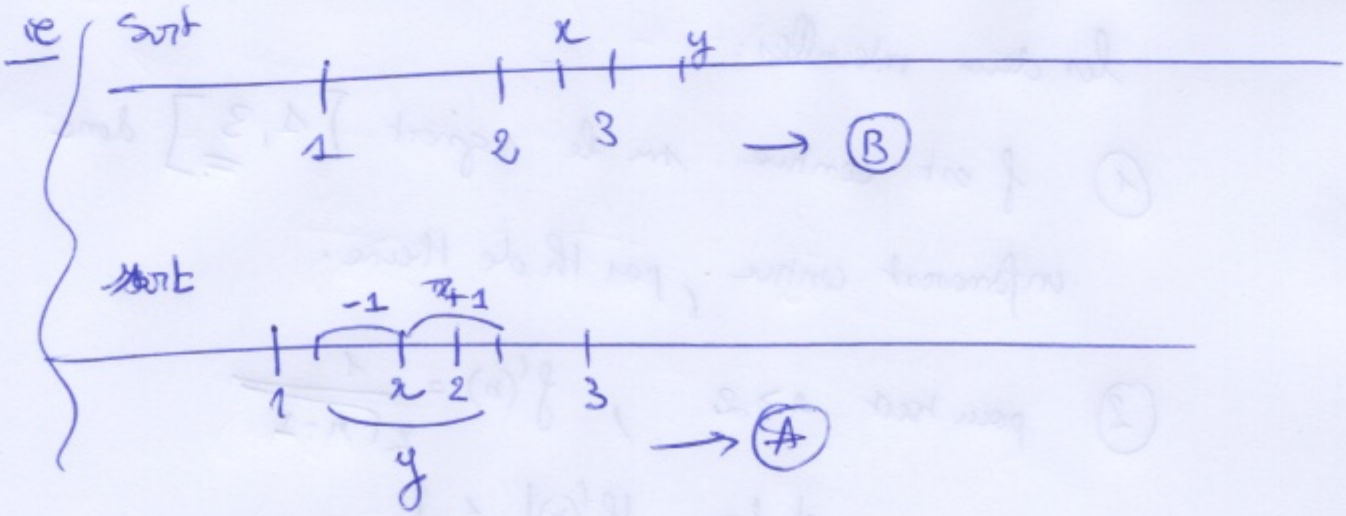
(A) $\Leftrightarrow$ il existe $\eta_1>0$, pour tout $x,y\in[1,3]$, $|x-y|<\eta_1 \Rightarrow$
$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

(B) $\Leftrightarrow$ il existe $\eta_2>0$, pour tout $x,y\geq 2$, $|x-y|<\eta_2 \Rightarrow$
$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

prenons alors $\eta=\min(\eta_1,\eta_2,1)$.

mais alors pour tout $x,y\in\mathbb{R}$ tq $|x-y|<\eta$

alors comme $\eta\leq 1$ forcement soit (A) soit (B) est vrai
(ie $x,y\in[1,3]$ ou $x,y\geq 2$)



et donc on a toujours $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ ∎

<u>Ex 13</u> : f périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

Mq f bornée et uniformément continue.

Soit $T>0$ période de f.

f est continue sur $[0;T]$ donc bornée (Th de la borne atteinte).

par T-périodicité, <u>f est bornée sur $\mathbb{R}$.</u>

* Soit $\varepsilon>0$, f est continue sur $[0;T]$, segment donc g est

uniformément continue (th de Heine).

Donc $\exists \alpha \in]0;T[\quad \forall (x,y) \in [0;T]$

$$|x-y|<\alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

* Soient x, y tq $|x-y|<\alpha$.

* s'il existe k entier tel que $(x,y) \in [kT,(k+1)T]$

alors par T périodicité on a $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.

* sinon, en supposant par exemple $x\leq y$, puisque $\alpha<T$

on a $\exists k \in \mathbb{Z} \quad (k-1)T \leq x \leq kT \leq y \leq (k+1)T$

mais alors $|x-kT| \leq |x-y| < \alpha$

et $|y-kT| \leq |y-x| < \alpha$

donc $|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(kT)| + |f(y)-f(kT)|$

$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ ☒

Ex14 : g est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ donc :

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \eta_1>0 \quad \forall (x',y')\in\mathbb{R}^2 \quad |x'-y'|<\eta_1 \Rightarrow$$

$$|g(x')-g(y')|<\varepsilon.$$

écrivons maintenant l'uniforme continuité de f pour "$\varepsilon=\eta_1$"

il existe $\eta_2>0 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad |x-y|<\eta_2 \Rightarrow$

$$|f(x)-f(y)|<\eta_1$$

et donc $\quad |g(f(x))-g(f(y))|<\varepsilon \quad \boxed{}$

Ex15 : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uniformément continue.

pour $\varepsilon=1$, il existe $\eta>0$ pour tout $x,y\in\mathbb{R}$

$$|x-y|\leq\eta \Rightarrow |f(x)-f(y)|\leq 1$$

mais alors : pour tout ~~x~~ ≥ 0 (même preuve pour $x\leq 0$)

on ~~écrit~~ ~~~~
pose $\quad k=\left\lfloor \frac{x}{\eta}\right\rfloor$

on a alors $\quad x=\eta k+\theta\eta \quad$ avec $\theta\in[0,1)$

mais alors $|f(x)-f(0)|\leq|f(x)-f(\eta k)|+|f(\eta k)-f(0)|$

(19) $|f(x)-f(0)| \leq |f(x)-f(x_k)| + \sum_{j=1}^{k} |f(x_j)-f(x_{j-1})|$

$\leq 1 + k$

$= 1 + \frac{1}{\eta} \times k\eta$

$\cancel{\leq 1 + \eta \times \frac{k}{\eta}}$

$\leq \underbrace{1}_{a} + \underbrace{\frac{1}{\eta}}_{b} x$

$\boxtimes$

<u>Ex 16</u> : $A \neq \emptyset$. $f(x) = d(x,A) = \inf \{|x-y|, y \in A\}$

| <u>Rq</u> : $f(x)$ existe car $\{|x-y|, y\in A\}$ non vide (A non vide)
| et minoré par 0.

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $z \in A$,

$|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$

donc par propriété de $d(x,A) = \inf \{|x-z|, z \in A\}$

$d(x,A) \leq |x-z| \leq |x-y| + |y-z|$

donc $d(x,A) - |x-y|$ est un minorant de $\{|y-z|, z\in A\}$

donc $d(x,A) - |x-y| \leq d(y,A)$

donc $d(x,A) - d(y,A) \leq |x-y|$

et $d(y,A) - d(x,A) \leq |x-y|$ (par symétrie)

$\boxtimes$