Chapitre 3 : Variables aléatoires sur un espace de probabilité discret (Partie I)

Nathaël Gozlan

21 octobre 2020

Ensembles dénombrables

Définition

Un ensemble E est dit *dénombrable* s'il existe une application $\phi : \mathbb{N} \to E$ *bijective*.
Un ensemble E est dit *discret* ou *au plus dénombrable* si E est fini ou dénombrable.

Exemples : Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}^n$ sont dénombrables.

En revanche, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ou $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ne sont pas dénombrables.

Exercice

Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Exercice

M. Hilbert a un hôtel comportant un nombre infini de chambres numérotées $1, 2, 3, \ldots$
L'hôtel est complet, mais voilà qu'arrive un voyageur. Comment libérer une chambre pour lui ?

Probabilités sur un ensemble dénombrable

Dans cette partie, Ω est un ensemble dénombrable.

Il existe donc une application $\phi : \mathbb{N} \to \Omega$ bijective.

On notera plutôt

$$\omega_i = \phi(i), \qquad \forall i \in \mathbb{N}.$$

On écrira

$$\Omega = \{\omega_i : i \in \mathbb{N}\},$$

avec $\omega_i \neq \omega_j$ pour $i \neq j$.

On dit qu'on a *énuméré* les éléments de Ω.

Probabilités sur un espace dénombrable

Comme dans le cas fini, pour définir une mesure de probabilité sur un espace dénombrable, il suffit de définir la probabilité de tous les événements élémentaires $\{\omega\}$ avec $\omega \in \Omega$.

Proposition

Si $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur un ensemble Ω dénombrable muni de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ alors en posant $p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\})$ on a $p_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^{+\infty} p_i = 1$ et pour tout $A \subset \Omega$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \text{ tel que } \omega_i \in A} p_i. \tag{1}$$

Réciproquement, si on se donne une suite $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de nombres positifs telle que $\sum_{i=0}^{+\infty} p_i = 1$, alors la formule (1) définit une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Dans la preuve on utilisera le lemme suivant :

Lemme (Sommation par paquets)

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite à termes positifs ou nuls telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n < +\infty$.

1. Si $I \subset \mathbb{N}$ est un ensemble non-vide, alors en notant $I = \{i_0 < i_1 < i_2 < \ldots\}$, la série $\sum_{j\geq 0} u_{i_j}$ est convergente.
   On notera sa somme $\sum_{i\in I} u_i$. Par convention $\sum_{i\in\emptyset} u_i = 0$.
2. Pour toute famille $(I^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ d'ensembles deux à deux disjoints tels que $\cup_{k\in\mathbb{N}} I^{(k)} = I$ on a

$$\sum_{n\in I} u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n\in I^{(k)}} u_n \right).$$

Démonstration.

Admis. □

Exemples

Définition (Mesure de Poisson sur $\mathbb{N}$)

Soit $\lambda > 0$; la mesure de Poisson de paramètre λ est la mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ définie par

$$p_k := \mathbb{P}(\{k\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On note cette mesure de probabilité $\mathcal{P}(\lambda)$.

Définition (Mesure géométrique sur $\mathbb{N}^*$)

La mesure de probabilité géométrique de paramètre $r \in]0,1[$ sur $\mathbb{N}^*$ est la mesure de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ définie par

$$p_k := \mathbb{P}(\{k\}) = (1-r)^{k-1}r, \qquad \forall k \geq 1.$$

On la note $\mathcal{G}(r)$.

Exercice

Montrer que $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{G}(r)$ définissent bien des mesures de probabilité.

Plan

Définition

Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace de probabilité discret (ie Ω est fini ou dénombrable) et E un ensemble quelconque.

Définition

Une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ à valeurs dans E est une fonction $X : \Omega \to E$.

Attention : une *variable* aléatoire est en fait une *fonction* !

Exemple

Considérons le jeu suivant : on lance un dé équilibré et on perd 1 euro si le résultat est pair et on gagne 1 euro sinon.

Ici, l'information importante est portée par la parité du dé et ce qui nous intéresse est le gain (aléatoire) du joueur.

Dans cet exemple, le gain du joueur est représenté par la variable aléatoire

$$X : \{1,2,3,4,5,6\} \to \{-1,1\}$$

définie par

$$X(\omega) = 1 \text{ si } \omega \in \{2,4,6\} \qquad \text{et} \qquad X(\omega) = -1 \text{ si } \omega \in \{1,3,5\}.$$

Autres exemples de variables aléatoires :

- Somme des scores obtenus en lançant trois dés.
- Nombre de six obtenus après 10 lancers de dés successifs.
- Nombre de boules noires tirées après 5 tirages avec remise dans une urne comportant N_1 boules noires et N_2 boules blanches.
- ...

Notations

Si $A \subset E$, on note $\{X \in A\}$ l'image réciproque de A par X.

Autrement dit

$$\{X \in A\} := X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}.$$

Si on veut calculer la probabilité de l'événement $\{X \in A\}$ on écrira simplement

$$\mathbb{P}(X \in A)$$

plutôt que

$$\mathbb{P}(\{X \in A\}) \text{ ou que } \mathbb{P}(X^{-1}(A)) \text{ ou encore que } \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}).$$

Exemple : Dans le jeu précédent, l'événement 'Le joueur gagne un euro' correspond à l'événement $\{X = 1\}$ et sa probabilité vaut

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{1, 3, 5\}) = 1/2,$$

(ici $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, car on suppose le dé équilibré).

Plan

Loi d'une variable aléatoire

La considération d'une variable aléatoire X change le point de vue sur l'expérience aléatoire, dans la mesure où l'on va principalement s'intéresser aux événements faisant intervenir X.

Proposition (Loi d'une variable aléatoire)

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et à valeurs dans E. La loi de X est la fonction notée $\mathbb{P}_X : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A), \qquad \forall A \subset E.$$

La fonction $\mathbb{P}_X$ est une mesure de probabilité sur E.

La probabilité $\mathbb{P}_X$ est ainsi entièrement dédiée au calcul des événements de la forme $\{X \in A\}$.

Exemple : Si l'on revient sur le jeu mentionné plus haut, $E = \{\pm 1\}$ et

$$\mathbb{P}_X(\{1\}) = \mathbb{P}_X(\{-1\}) = 1/2.$$

Preuve de la proposition

Montrons que $\mathbb{P}_X$ est une mesure de probabilité sur E.
Tout d'abord,

$$\mathbb{P}_X(E) = \mathbb{P}(X \in E) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

Par ailleurs, si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements de E deux à deux disjoints, on a

$$\{X \in \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i\} = \cup_{i\in\mathbb{N}}\{X \in A_i\}.$$

Les événements $B_i := \{X \in A_i\}$ sont deux à deux disjoints et donc, par la propriété d'additivité dénombrable de $\mathbb{P}$,

$$\mathbb{P}(\cup_{i\in\mathbb{N}} B_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X \in A_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}_X(A_i).$$

On conclut que

$$\mathbb{P}_X(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \mathbb{P}(X \in \cup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}_X(A_i).$$

Exercice

On lance deux dés équilibrés et on note X la somme de ces deux dés. Déterminer la loi de X. Quel est le score le plus probable ?

L'espace de probabilité de base est $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2$ muni de la probabilité uniforme.

$$X(\omega) = \omega_1 + \omega_2, \qquad \forall \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega.$$

La variable aléatoire X est à valeurs dans $E = \{2, 3 \ldots, 12\} \subset \mathbb{R}$.
Enumérons toutes les possibilités :

$$\{X=2\} = \{(1,1)\}, \qquad \{X=3\} = \{(1,2);(2,1)\}, \qquad \{X=4\} = \{(1,3);(2,2);(3,1)\}$$

$$\{X=5\} = \{(1,4);(2,3);(3,2);(4,1)\}, \qquad \{X=6\} = \{(1,5);(2,4);(3,3);(2,4);(1,5)\}$$

$$\{X=7\} = \{(1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);(6,1)\}$$

$$, \qquad \{X=8\} = \{(2,6);(3,5);(4,4);(5,3);(6,2)\}, \qquad \{X=9\} = \{(3,6);(4,5);(5,4);(6,3)\},$$

$$\{X=10\} = \{(4,6);(5,5);(6,4)\}, \qquad \{X=11\} = \{(5,6);(6,5)\}, \qquad \{X=12\} = \{(6,6)\}.$$

En notant $p_k := \mathbb{P}_X(\{k\})$, on obtient donc

$$p_2 = \frac{1}{36}, \quad p_3 = \frac{2}{36}, \quad p_4 = \frac{3}{36}, \quad p_5 = \frac{4}{36}, \quad p_6 = \frac{5}{36},$$
$$p_7 = \frac{6}{36}, \quad p_8 = \frac{5}{36}, \quad p_9 = \frac{4}{36}, \quad p_{10} = \frac{3}{36}, \quad p_{11} = \frac{2}{36}, \quad p_{12} = \frac{1}{36}.$$

Retour sur les tirages dans des urnes

Revenons sur les tirages avec ou sans remise considérés dans le chapitre précédent.

On fixe une urne contenant N boules dont N_1 noires et N_2 blanches ($N = N_1 + N_2$).
On effectue n tirages dans l'urne et on définit X comme le nombre de boules noires tirées lors de ces n tirages.

1. Si on fait des tirages *avec remise*, on a vu dans le chapitre précédent que

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad \forall k \in \{0, 1, \ldots, n\},$$

   avec $p = N_1/N$.
   Autrement dit $\mathbb{P}_X = \mathcal{B}(n, p)$.

2. Si on effectue $n \leq N$ tirages *sans remise*, alors

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \qquad \forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

   Cette fois la variable X suit une loi hypergéométrique.

Plan

Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Comme précédemment, on suppose que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace de probabilité discret.

Définition

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. La fonction de répartition de X est la fonction notée F_X définie par

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Propriétés des fonctions de répartition

Proposition

Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles et F_X sa fonction de répartition.

1. Pour tout $a \leq b$, $F_X(b) - F_X(a) = \mathbb{P}(X \in]a, b])$.
2. La fonction F_X est croissante, continue à droite et admet une limite à gauche en tout point $t \in \mathbb{R}$, notée $F_X(t^-)$.
3. $F_X(t) \to 0$ quand $t \to -\infty$ et $F_X(t) \to 1$ quand $t \to +\infty$.
4. En tout point $t \in \mathbb{R}$, $F_X(t^-) = \mathbb{P}(X < t)$. En particulier, $F_X(t) - F_X(t^-) = \mathbb{P}(X = t)$.
5. Si X, Y sont deux variables aléatoires telles que $F_X = F_Y$, alors $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.

Exercice

Déterminer la fonction de répartition de X dans chacun des cas suivants :

- $X : \Omega \to \{0, 1\}$ est le résultat d'un jeu de pile ou face avec une pièce truquée.
- $X : \Omega = \{1, 2, 3 \ldots, 6\} \to \{1, 2, \ldots, 6\}$ est le résultat d'un lancer de dé équilibré.
- X est telle que $\mathbb{P}(X = 1) = 0.2$, $\mathbb{P}(X = 2) = 0.5$, $\mathbb{P}(X = 4) = 0.1$ et $\mathbb{P}(X = 6) = 0.2$. Tracer F_X.

Preuve de la proposition

1.
$$\mathbb{P}(X \in]a,b]) = \mathbb{P}(\{X \leq b\} \setminus \{X \leq a\}) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a).$$

2. En particulier, si $a \leq b$,
$$F_X(b) \geq F_X(a)$$
et donc F_X est bien croissante.

Comme F_X est croissante sur $\mathbb{R}$, elle admet des limites finies à droite et à gauche en tout point.

Montrons que F_X est continue à droite.
Pour cela, d'après la caractérisation séquentielle de la continuité à droite, il suffit de montrer que si t_n est une suite décroissante tendant vers un certain $t \in \mathbb{R}$, alors $F_X(t_n) \to F_X(t)$.
Notons
$$A_n = \{X \leq t_n\}.$$
Ces ensembles A_n sont décroissants $A_{n+1} \subset A_n$ et
$$\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{X \leq t\}.$$

Donc par limite décroissante d'ensembles
$$\mathbb{P}(X \leq t_n) = \mathbb{P}(A_n) \to \mathbb{P}(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mathbb{P}(X \leq t),$$
soit $F_X(t_n) \to F_X(t)$.

3. et 4. : preuve analogue, cf le polycopié (p. 33-34)

Preuve de la proposition (suite)

5. Montrons que si $F_X = F_Y$, alors $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.
Notons

$$\Omega = \{\omega_i : i \in \mathbb{N}\}$$

et

$$E = \{X(\omega_i) : i \in \mathbb{N}\} \cup \{Y(\omega_i) : i \in \mathbb{N}\}.$$

Les variables aléatoires X et Y sont à valeurs dans E. Donc $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$ sont des mesures de probabilité sur E.
Comme E est fini ou dénombrable, $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ si et seulement si $\mathbb{P}_X(\{t\}) = \mathbb{P}_Y(\{t\})$ pour tout $t \in E$.
Or, pour tout $t \in E$, on a d'après le point 4. précédent,

$$\mathbb{P}_X(\{t\}) = \mathbb{P}(X = t) = F_X(t) - F_X(t^-) = F_Y(t) - F_Y(t^-) = \mathbb{P}_Y(\{t\}),$$

ce qui termine la preuve.