Rappels de techniques en analyse.

Licence 2 MAE 2020-2021
Université Paris Descartes
Marc Briant

Table des matières

Avant-propos : Ce chapitre n'est pas du cours à proprement parler puisque rien n'y sera proprement énoncé, démontré ni aucun exemple ne sera donné. Nous y rappelons les grands résultats vus en Analyse 1-2-3 mais surtout nous les présentons à la manière d'un guide permttant d'attaquer les problèmes de manière générale. En analyse il est important de savoir structurer nos connaissances et ce chapitre propose quelques pistes. Attention, nous ne donnons pas de recettes mais nous proposons des réflexions qu'il est bon d'avoir à l'esprit quand on commence un problème en analyse (afin de ne pas partir tête baissée ou, pire encore, de ne pas savoir où aller après avoir lu un énoncé !).

Les résultats sont énoncés ici de manière informelle et il convient donc, en cas d'oubli, de se référer aux cours antérieurs pour des énoncés rigoureux.

1 Que faire avec des suites et des séries numériques ?

1.1 Comment prouver une convergence de suite

Une telle question face à une suite explicite ou non désarçonne et pourtant nous n'avons que 6 façons de prouver qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (et certaines sont assez peu utiles même...).

1. La définition de convergence vers une limite l :
$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant N_\varepsilon,\quad |u_n-l|\leqslant\varepsilon.$$
Utiliser ce critère nécessite de connaître l ! Donc il faut pouvoir établir des développements limités ou des équivalences sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$.
2. Une suite croissante et majorée ou une suite décroissante et minorée converge.
3. S'il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers la même limite telles que pour tout n assez grand, $a_n\leqslant u_n\leqslant b_n$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Ce critère nécessite de construire ou connaître deux autres suites (se poser donc d'abord la question si elles sont évidentes...) !
4. Une suite est de Cauchy
$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon,\ \forall n\geqslant N_\varepsilon,\forall p\in\mathbb{N},\quad |u_n-u_{n+p}|\leqslant\varepsilon$$
si et seulement elle converge.
5. Si la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ est convergente alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. À n'utiliser que si $u_{n+1}-u_n$ est intéressant...
6. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si toute ses suites extraites $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont même limite. *Par exemple, montrer que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge même la même limite implique que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers cette limite.*

1.2 Comment prouver une convergence de série

Maintenant, pour une série $\sum u_n$ il existe quelques nouvelles méthodes que nous classons par ordre de facilité à mettre en œuvre (en général bien sûr !). Attention cependant, la plupart des critères impliquent $|u_n|$ et non u_n (puisque la convergence absolue de la série implique sa convergence) ! !

1. Si $\sum u_n$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ donc commencer par là ! Si le terme général ne tend pas vers 0 la série ne converge pas.
2. La règle de D'Alembert : si elle existe et que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}<1$ alors $\sum u_n$ converge absolument.
3. Majorer $|u_n|\leqslant v_n$ avec $\sum v_n$ converge offre la convergence de $\sum u_n$.
4. Si on trouve une suite positive $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $|u_n|\underset{n\to+\infty}{\sim}v_n$ alors $\sum|u_n|$ et $\sum v_n$ ont même nature. On récupère en plus que
   - Si $\sum v_n$ converge : $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}|u_n|\underset{N\to+\infty}{\sim}\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}v_n$;
   - Si $\sum v_n$ diverge : $\sum\limits_{n=0}^{N}|u_n|\underset{N\to+\infty}{\sim}\sum\limits_{n=0}^{N}v_n$.

   Ce critère est le plus utilisé grâce aux développements limités ! En pratique on va développer $u_n=v_n+w_n+o(w_n)$ avec $\sum v_n$ et $\sum|w_n|$ des séries convergentes que l'on connaît.
5. Une série alternée : $\sum(-1)^nu_n$ avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle décroissante et tendant vers 0, converge. On récupère en plus que le reste est majoré $\left|\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}(-1)^nu_n\right|\leqslant u_{N+1}$.
6. Dans le pire des cas : la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ définie par les sommes partielles $S_N=\sum\limits_{n=0}^{N}u_n$ est une suite numérique qui converge si et seulement si la série converge. Donc on a les 6 critères précédents.

Comme série classique qui converge nous pouvons penser à $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ si $\alpha>1$, $\sum e^{-an^\beta}$ si $a>0$ et $\beta>0$ ou encore $\sum z^n$ si $|z|<1$. Une série classique qui diverge est la série harmonique $\sum\frac{1}{n}$.

1.3 Comment utiliser des bornes

Un point à écrire dans cette partie est la propriété que toute suite réelle ou complexe qui converge est bornée.

Si on nous donne une suite (réelle ou complexe) bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il n'y a pas grand chose d'autre à faire qu'appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass et extraire une sous-suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge.

Sinon, si on nous donne un ensemble A de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ qui est majoré (*resp.* minoré) alors il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers $\sup A$ (*resp.* $\inf A$).

2 Que faire avec des fonctions continues, dérivables ?

2.1 Comment exploiter de la continuité

Si on a juste la continuité en un point. Si on nous donne une fonction f continue en x cela veut dire que

$$\begin{aligned}&\forall\varepsilon>0,\exists\delta_{x,\varepsilon}>0,\ \forall y\in I,\\ &\qquad |x-y|\leqslant\delta_{x,\varepsilon}\Rightarrow|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon.\end{aligned}\tag{1}$$

En d'autres termes $\lim\limits_{y\to x,y\in I} f(y)$ existe et vaut $f(x)$.

Si on ne connait que ça de f on ne peut qu'utiliser le fait que f est continue en x si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

Si on a continuité sur un intervalle. Dans le cas d'un intervalle quelconque I et d'une fonction f continue sur I pour lesquels on ne nous donne pas plus d'informations nous n'avons que deux actions possibles.

1. La définition (1) s'applique en chaque point x de I. Il est primordiale de se rappeler que $\delta_{x,\varepsilon}$ n'est pas le même pour tous les x de I !
2. Le théorème des valeurs intermédiaires. S'il existe a et b dans I avec $f(a)<f(b)$ alors pour tout $f(a)\leqslant C\leqslant f(b)$ il existe c dans I tel que $f(c)=C$.

Si on a continuité sur un segment. Un segment est un intervalle fermé $[a,b]$ et là nous avons deux résultats applicables en plus de ceux pour un intervalle quelconque.

1. Sur un segment une fonction continue est bornée et atteint ses bornes : il existe x_m et x_M dans $[a,b]$ tels que $f(x_m)=\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)$ et $f(x_M)=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$.
2. Le théorème de Heine : sur un segment une fonction continue est uniformément continue. Ca veut dire que le $\delta_{x,\varepsilon}$ de la définition (1) est le même pour tout les x de $[a,b]$, et s'écrit donc δ_ε.

2.2 Comment exploiter de la dérivabilité

Si on a que de la dérivabilité en un point. Si nous savons juste que f est dérivable en un point x alors $\lim\limits_{h\to0,h\neq0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe.

La seule chose que l'on puisse dire est que si f est dérivable en x alors f est continue en x.

Si on a dérivabilité sur un intervalle. Supposons maintenant que l'on nous donne f qui soit dérivable sur un intervalle $]a,b[$. Nous avons alors accès à 3 résultats importants.

1. Si f' est positive (*resp.* négative) sur $]a,b[$ alors f est croissante (*resp.* décroissante) sur $]a,b[$ et si $f'=0$ sur I alors f est constante sur I.
2. Le théorème de Rolle : si f est en plus continue sur le segment $[a,b]$ (notons que nous savons déjà que f est continue sur $]a,b[$ puisque dérivable...) et que $f(a)=f(b)$ alors il existe c dans $]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.
3. Le théorème des accroissements finis : si f est continue sur le segment $[a,b]$ alors il existe c dans $]a,b[$ tel que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Si on a une dérivée bornée sur un intervalle. Si f est continue sur le segment $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que pour tout x de $]a,b[$, $|f'(x)|\leqslant M$ alors l'inégalité des accroissements finis nous donne que pour tout x et y de $[a,b]$: $|f(y)-f(x)|\leqslant M\,|x-y|$. Mais comme c'est direct à partir du théorème des accroissements finis, ne retenir que celui-ci simplifie la tâche...

2.3 Comment utiliser plusieurs dérivées

Supposons que nous ayons une fonction f sur un intervalle I qui soit dérivable n fois. Alors pour tout x et a de I nous pouvons utiliser le développement de Taylor de f :

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(x,a)$$

et on choisit le reste $R_n(x,a)$ qui nous arrange :

1. Taylor-Young : $R_n(x,a)=o(|x-a|^n)$;
2. Taylor-Lagrange avec reste intégral : si f est $n+1$ fois dérivable $R_n(x,a)=\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)\,dt$;
3. Taylor-Lagrange : si f est $n+1$ fois dérivable : il existe y entre a et x tel que $R_n(x,a)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(y)$.

3 Que faire avec des intégrales ?

3.1 Comment montrer qu'une fonction est intégrable (au sens généralisé ou non)

Nous rappelons qu'il existe deux sortes d'intégrales de Riemann : celle pour des fonctions bien définies sur un segment $[a,b]$ et celle, appelée généralisée, pour des fonctions définies uniquement sur un intervalle ouvert $]a,b]$, $[a,b[$ ou $]a,b[$. Mais en réalité l'intégrale généralisée revient à pouvoir intégrer sur n'importe quel segment $[c,d]\subset]a,b[$ et que la limite de $\int_c^d f(t)dt$ quand $c\to a$ et $d\to b$ existe.

De manière générale, si on nous donne une fonction f et qu'on veut intégrer entre a et b on suit le schéma :

1. Si f est continue sur $[a,b]$ alors elle y est intégrable. Si elle est définie et continue sur $]a,b[$ et qu'elle est prolongeable par continuité en a (*resp.* en b) alors elle est intégrable proche de a (*resp.* proche de b).
2. Si on ne peut la prolonger par continuité en a (*resp.* en b) alors il faut comparer $|f(t)|$ à une fonction intégrable proche de a (*resp.* en b) : penser aux développements limités par exemple. La valeur absolue est importante !

3. Si on ne peut pas comparer la fonction alors il faut revenir à la définition de l'intégrale sur $[c, d]$, trouver une primitive F de f et montrer que $F(d)-F(c)$ admet une limite quand $c \to a$ et $d \to b$.

3.2 Comment calculer une intégrale

Calculer une intégrale peut être assez technique si la fonction est complexe. Nous rappelons néanmoins les grands classiques pour tenter de trouver explicitement $\int_a^b f(t)dt$.

1. Si on connaît une primitive F de f alors l'intégrale vaut $F(b) - F(a)$ (ou $\lim\limits_{c\to a, d\to b} F(d) - F(c)$ si elle existe dans le cas de l'intégrale généralisée).
2. L'intégration par parties : si h et g sont C^1 sur $[a, b]$ alors
$$\int_a^b h(t)g'(t)\,dt = [h(t)g(t)]_a^b - \int_a^b h'(t)g(t)\,dt.$$
Il faut donc décomposer f en hg' bien choisis (très utile quand on souhaite diminuer des puissances de t !).
3. Le changement de variable : si f est continue sur $[a, b]$ et ϕ est une bijection de classe C^1 de $[\phi^{-1}(a), \phi^{-1}(b)]$ dans $[a, b]$ alors
$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)\,dt.$$
4. Si f est une fonction rationnelle $\frac{P(t)}{Q(t)}$, où P et Q sont des polynômes, on la décompose en éléments simples.
5. Si f est un fonction rationnelle de fonctions trigonométriques $\frac{P(\cos t, \sin t)}{Q(\cos t, \sin t)}$ alors :
   - si $f(t)dt$ est invariant par $t \to -t$ on change de variable $u = \cos t$;
   - si $f(t)dt$ est invariant par $t \to \pi - t$ on change de variable $u = \sin t$;
   - si $f(t)dt$ est invariant par $t \to \pi + t$ on change de variable $u = \tan t$;
   - si malheureusement cela ne donne rien, la méthode générale est le changement de variable $u = \tan(t/2)$ et on utilise que $\sin t = \frac{2u}{1+u^2}$ et $\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$.

   Dans tous les cas, on décompose ensuite en éléments simples.
6. En dernier recours on peut revenir aux sommes de Riemann si f est intégrable sur $|a, b|$,
$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

4 Que faire face à un énoncé, un problème ?

S'il n'y a malheureusement pas de recette miracle qui résoudrait tous les problèmes rencontrés en mathématique, nous proposons ici quelques pistes pour se lancer dans la résolution d'un exercice ou dans l'approche d'un sujet plus ambitieux.

Le plus important ! ECRIRE EN LANGAGE MATHÉMATIQUE LES HYPOTHÈSES DONNÉES ! Il ne sert très souvent à rien de lire et relire l'énoncé sans rien écrire. On ne sait pas vers où aller ? Ce n'est pas grave : écrivons les hypothèses et ce qu'elles veulent dire. CONSEIL : indexer toujours les constantes par les paramètres dont elles dépendent (*exemple : $N_{x,\varepsilon}$ au lieu de juste N*), ça évite les erreurs !

Faire parler les hypothèses ! Contrairement à la croyance, résoudre un problème mathématique ne se réduit pas à "trouver la bonne astuce". Si ce genre d'exercices existe, ils sont très rares ! Une fois les hypothèses écrites, il suffit de les faire parler. Et ces notes ci-dessus sont ce qu'il faut faire comme gymnastique.
Exemple : l'énoncé parle simplement d'une fonction continue sur $[a, b]$. Je ne sais pas de quoi parle l'exercice mais tout ce que je pourrai utiliser est le théorème des valeurs intermédiaires ou/et le fait que sur un segment une fonction continue est bornée et atteint ses bornes. Il y a fort à parier que la solution viendra de là...

Quelques méthodologies. Si les deux points précédents ne résolvent pas l'exercice c'est qu'il est difficile ! Nous donnons ici quelques arguments mathématiques primordiaux.

- Quand on parle de dérivées, d'intégrales, de continuités : toujours montrer que tout est bien défini avant de commencer ! On parle d'une intégrale ? Montrons qu'elle existe bien.
- Si on doit démontrer quelque chose pour tout entier n : se donner quelques instants pour le prouver directement et si ce n'est pas évident alors on fait une récurrence sans réfléchir !
- Si nous devons montrer qu'il existe un unique élément satisfaisant un certain nombre de propriétés, un seule technique : on suppose qu'il existe et on utilise ses propriétés pour trouver l'élément (cela donne donc l'unicité en cas d'existence) puis on montre que cet élément exhibé est bien solution.
- Lorsque l'on a rien dans l'énoncé qui permette de commencer la résolution, rien à quoi se raccrocher alors il est souvent judicieux de raisonner par l'absurde.