

# 力学 A (PHYS1001A.04): 第五次习题课

Course NOT easy: The Survival Guide 5, Halfway to final success!

Yu Shu & Chihao Shi

School of Physics, USTC

Nov.17, 2025



① 内容回顾与补充拓展

② 作业习题讲解

③ Q&A

## 角动量定理

## 守恒律与对称性

天体运动

流体静力学

流体运动学

粘滯流体

### 3 Q&A

## 粘滯流体

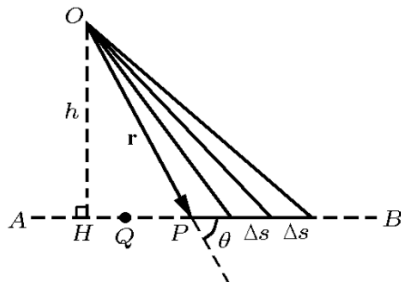
### 3 Q&A

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

角动量是相对于给定的参考点定义的，且参考点在所选的参考系中必须是固定点；参考点不同，角动量不同。一般把参考点取在坐标原点。

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} = \frac{\vec{L}}{2m}$$

对于单质点的孤立体系，我们找到的守恒量是掠面速度矢量  $\vec{S}$

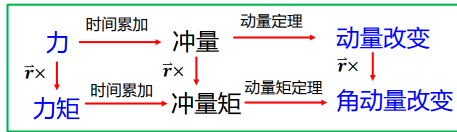


---

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\ \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} &= 0, \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \end{aligned} \quad (1)$$

质点角动量定理：质点对任一固定点的角动量的时间变化率等于合外力对该点的力矩

同样可以定义冲量矩  $\vec{H} = \Delta \vec{L} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt$



## 质点系角动量定理

质点系对给定点的角动量为各质点对该点的角动量矢量和  
两质点之间一对作用力与反作用力相对于同一参考点力矩之和必为零，内力的力矩之和为 0

质点系角动量定理：质点系对给定点（参考点）的角动量的时间变化率等于作用在体系上所有外力对该点力矩矢量

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{M}_{i,\text{ex}} = \vec{M}_{\text{ex}}$$



## 角动量守恒定律

当外力对给定点的总外力矩之和为 0 时，体系的角动量守恒

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{ex}} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$$

---

$$\vec{L} = \vec{L}_c + \vec{L}_s$$

$$\vec{L}_c = \vec{r}_c \times m \vec{v}_c, \quad \vec{L}' = \sum_i m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}_i$$

$$\vec{L}_c = \vec{r}_c \times m\vec{v}_c, \quad \vec{L}' = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

角动量定理和角动量守恒定律只在惯性系中成立。质心系若为非惯性系，则加上惯性力的力矩，角动量定理仍适用。



## 两体问题

质心:  $\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$

约化质量:  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

相对质心的角动量:  $\vec{L}' = \mu \vec{r} \times \vec{v}$

质心系下，质点系对于任意固定点的角动量均相等

$\vec{r}$  和  $\vec{v}$  是两质点间的相对位移和速度, 均与参考点无关

## Laplace-Runge-Lenz 矢量

两个物体以平方反比有心力相互作用运动，则 LRL 矢量是一个守恒量，即不管在轨道的任何位置，计算出来的 LRL 向量都一样

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}, \quad \vec{B} = \vec{v} \times \vec{L} - k\frac{\vec{r}}{r}, \quad \frac{d\vec{B}}{dt} = 0}$$

或者写成:  $\vec{A} = m\vec{B} = \vec{p} \times \vec{L} - mk\frac{\vec{r}}{r}$

万有引力:  $\vec{B} = \vec{v} \times \vec{L} - GMm \frac{\vec{r}}{r}$

## 角动量定理

## 守恒律与对称性

天体运动

流体静力学

流体运动学

粘滯流体

### 3 Q&A

角动量守恒：若体系合外力矩  $\vec{M}_{\text{ex}} = 0$ ，则  $\vec{L}$  为守恒量

- ① 镜面反演 (reflection):  $(x, y, z) \rightarrow (-x, y, z)$
- ② 空间反演 (parity):  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}, \quad (x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$
- ③ 空间平移 (translation):  $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{r}_0$
- ④ 轴转动:  $(x, y) \rightarrow R(x, y)$ ,  $R$  为二维转动矩阵
- ⑤ 点转动:  $\vec{r} \rightarrow R\vec{r}$ ,  $R$  为三维转动矩阵

- ① 时间反演:  $t \rightarrow -t$
- ② 时间平移:  $t \rightarrow t + t_0$



对于不受外力作用的物质系统，假如体系势能在时空变换方面具有对称性，则可以找到相应的守恒律

## 角动量定理

## 守恒律与对称性

# 天体运动

流体静力学

流体运动学

粘滯流体

### 3 Q&A



- ① 角动量守恒
- ② 运动必定在一个平面上（因为角动量守恒或掠面速度守恒）
- ③ 体系机械能守恒（因为保守力可以定义势能）

有效势能:  $V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$

$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r) = E$  与一维运动质点的机械能守恒方程相同

## 轨道定律

轨道方程:  $r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \theta}$

半正交弦:  $p = \frac{L^2}{GMm^2}$ , 偏心率:  $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}$

- ①  $E < 0 \Rightarrow \epsilon < 1$ , 为椭圆轨迹, M 位于其中一个焦点
- ②  $E = 0 \Rightarrow \epsilon = 1$ , 为抛物线, M 位于焦点
- ③  $E > 0 \Rightarrow \epsilon > 1$ , 为双曲线之一, M 位于内焦点

逃逸速度:  $v_p = \sqrt{\frac{2GM}{r_p}}$

# 面积定律 & 周期定律

质点位矢在单位时间内所扫过的面积相等

$$\kappa = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{L}{2m}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

## ① 内容回顾与补充拓展

角动量定理

守恒律与对称性

天体运动

**流体静力学**

流体运动学

粘滞流体

## ② 作业习题讲解

## ③ Q&A

## 流体的性质：

- ① 流动性：静止流体不能承受切向应力，任何切向应力都会使流体元间产生。取消力的作用后，流体元之间并不恢复其原有位置。正是流体的这一基本特性使它能同刚体和弹性体区别开来。
- ② 黏性：运动流体，相邻两层之间会产生对流动的抵抗，称为黏性。
- ③ 压缩性：流体的体积会随温度和压强而变化，称为可压缩性。可压缩程度与流体性质和外界条件相关。

理想流体：无（不考虑）黏性的流体，为理想模型

流体的静止状态：流体各部分之间没有相对运动，或者说流体的形状不发生改变的状态，静止流体内部无切向应力，粘性完全不发生作用，只有法向应力，即压强



## 流体中的作用力：

- ① 不需要接触，作用于全部流体上的力，称为体积力或质量力（重力、磁力、惯性力）
- ② 直接与物体相接触而施加的力，称为表面力（压力、粘性力）
  - ① 表面力 (Surface force) 是指作用在一物体表面 (或是内部截面) 的力。所有物体之间的凝聚力和接触力都视为是表面力。常见的正向力和摩擦力也都是表面力。
  - ② 应力 (stress)：单位面积上的表面力
  - ③ 表面张力：当液体出现自由表面时，液体表面层中的液体分子都受到指向液体内部的拉力，称为表面张力

# 应力

$$\vec{T} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S}$$

法向应力、正应力:  $T_{nn} = \sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_n}{\Delta S}$

切应力:  $T_{n\tau} = \tau = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_\tau}{\Delta S}$

柯西应力张量 (Cauchy stress tensor):

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (3)$$

对于法线方向为  $\vec{n}$  的截面的应力:  $\vec{\sigma}_n = \sigma \cdot \vec{n}$

## htbp

可以证明:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

- $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  三个互相垂直的主轴方向。在主轴坐标系中，应力张量可写成下列对角形式
- $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma'_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{zz} \end{pmatrix}$
- $\sigma'_{xx}, \sigma'_{yy}, \sigma'_{zz}$  称为法向主应力。于是在与主轴方向垂直的面上，只有法应力，切应力等于零

- 对切向形变没有任何抗拒能力，因此在理想流体内部，应力到处与它所在的面垂直
- 流体不能承受拉力，所以法向应力必为压力
- 可以证明：同一点各个不同方向上，法向应力是相等的，即  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$ ， $p$  为理想流体的压力（压强）

**静止流体**：可以是理想的，也可以是黏性的。流体在静止时不能承受切向应力，同样可以得出上述理想流体对应的性质

积分形式的静止流体平衡方程：

$$\oint \vec{T} dS + \int \vec{F}_\rho dV = 0$$

$$\oint \vec{T} dS + \int \vec{F}_\rho dV = 0$$

静止的流体不可能存在切应力，只有正应力。而且流体中通常只有压应力（即应力与法向方向相反），用  $p$  表示：
$$-\oint p d\vec{S} + \int \vec{F}_\rho dV = 0$$

$$-\oint p d\vec{S} + \int \vec{F} \rho dV = 0$$

高斯散度定理:  $\oint p d\vec{S} = \int \nabla f dV$

$$\text{微分形式的流体平衡方程} \quad \nabla p = \rho \vec{F}, \quad \partial_i p = \rho F_i$$

$$\boxed{\nabla p = \rho \vec{F}}, \quad \partial_i p = \rho F_i$$

# 压强

静止流体内的应力，除了与所取截面垂直、且一般表现为压力外，还有一个特征：  
只与位置有关，与截面取向无关

等高点的压强相等

高度差为  $h$  的两点，压强差  $\Delta p = \rho gh$

帕斯卡原理 (Pascal's law): 当液体表面压强增加  $\Delta p_0$  时，液体任一点的压强也增大了  $\Delta p_0$

# 浮力

阿基米德原理：浸在流体中的物体所受到的浮力等于物体所排开流体所受的重力  
浮力的作用点称为浮心，位于与浸入流体那部分物体同体积、同形状的流体的重心上

## ① 内容回顾与补充拓展

角动量定理

守恒律与对称性

天体运动

流体静力学

流体运动学

粘滞流体

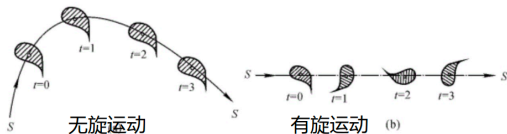
## ② 作业习题讲解

## ③ Q&A

## 一般形式的流体的运动通常是很复杂的。分为三类

### – 以运动形式来分：无旋运动和有旋运动

- 无旋运动的特点是流体微团不绕自身轴转动，通常出现在无粘性流体中
- 有旋运动的特征是流体微团绕自身轴转动，具有角速度，是更常见的实际流动，例如龙卷风、水流过障碍物产生的旋涡等



### – 以时间为标准：定常运动 and 不定常运动

- 定常运动：速度函数及所有有关物理量不依赖时间

### – 以空间为标准：一维运动、二维运动、三维运动

- 一维运动：所有有关物理量只依赖一个曲线坐标





# 拉格朗日法（随体法）

从质点运动学出发，将流体分成许多无穷小的微元，求出它们各自的运动轨迹。实际上是用质点组动力学方法来讨论流体的运动

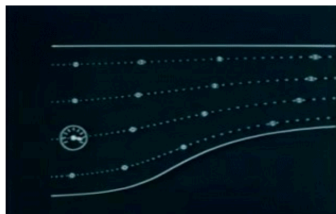
- 用  $t = 0$  时刻每个质点所在的位置  $(x_0, y_0, z_0)$  来标记每个质点。任意时刻  $t$ ，质点  $(x_0, y_0, z_0)$  所在的位置

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

- 固定  $(x_0, y_0, z_0)$  而改变  $t$ ，则得到某一流体质点的运动规律
- 规定而改变  $(x_0, y_0, z_0)$ ，则得到同一时刻不同流体质点的位置分布
- 若能从三个方程中消去  $t$ ，则得到  $(x_0, y_0, z_0)$  的轨迹

- 对时间求导，即可得到初始位置为  $(x_0, y_0, z_0)$  的质元的速度、加速度

$$\begin{cases} u_x = \frac{\partial x}{\partial t} \Big|_{x_0, y_0, z_0} = u_x(x_0, y_0, z_0, t) \\ u_y = \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{x_0, y_0, z_0} = u_y(x_0, y_0, z_0, t) \\ u_z = \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{x_0, y_0, z_0} = u_z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases} \quad \begin{cases} a_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \Big|_{x_0, y_0, z_0} \\ a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_{x_0, y_0, z_0} \\ a_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \Big|_{x_0, y_0, z_0} \end{cases}$$



# 拉格朗日法（随体法）

迹线 (pathline): 流体质点在连续时间内描绘出来的曲线

由于迹线是流体质点运动过程的路径, 在 Lagrange 法中, 就是流体质点的位置函数, 即:

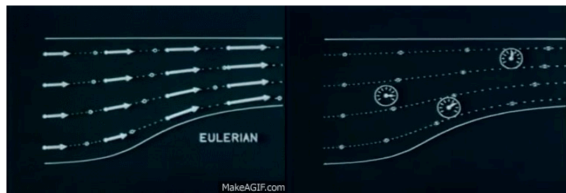
$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases} \quad (4)$$

- 用场的观点研究流体运动

- $$\vec{u} = \vec{u}(x, y, z, t)$$

$$\begin{cases} u_x = u_x(x, y, z, t) \\ u_y = u_y(x, y, z, t) \\ u_z = u_z(x, y, z, t) \end{cases}$$

- 若场内函数不依赖矢径 $\vec{r}$ 则称之为均匀场，反之称之为非均匀场
- 若场内函数不依赖时间则称为定常场，反之称为非定常场



- 速度场的物理含义

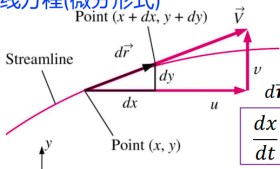
$$\begin{cases} u_x = u_x(x, y, z, t) \\ u_y = u_y(x, y, z, t) \\ u_z = u_z(x, y, z, t) \end{cases}$$

$$u_y = \cdots, u_z = \cdots$$

$t$  时刻位于  $(x, y, z)$  处质元的速度, 经过追溯, 其实是  $t = 0$  时刻某个位于  $(x_0, y_0, z_0)$  处的质元在  $t$  时刻到达  $(x, y, z)$  处时所具有的速度

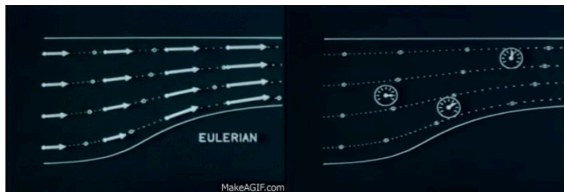
$$d\vec{r} = \vec{u}dt$$

此即迹线方程(微分形式)



$$d\vec{r} = (dx, dy, dz) = \vec{u}dt$$

$$\frac{dx}{dt} = u_x, \frac{dy}{dt} = u_y, \frac{dz}{dt} = u_z$$



思考：

- Euler法速度的描述与Lagrange法速度描述的区别?
- 如何得到加速度场  $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z, t)$ ?

## 欧拉法（当地法）

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f$$

以上三个部分分别为随体导数、局部导数和对流导数

物质导数的物理含义：运动的流体微团的物理量随时间的变化率，等于该物理量由当地时间变化引起的变化率，与流体对流引起的变化率的总和

$$\text{加速度: } \vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$$

对于均匀流场:  $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = 0$

# Euler 法与 Lagrange 法

参数	Lagrange法	Euler法
独立变量	$x_0, y_0, z_0, t$	$x, y, z, t$
因变量	$x, y, z; \vec{u}; p, \rho, T$	$\vec{u}; p, \rho, T$
质点导数	$\frac{\partial}{\partial t} X$	$\frac{\partial}{\partial t} X + (\vec{u} \cdot \nabla) X$

- Euler法中空间点 $(x, y, z)$ 是 $t$ 的独立变量，即与 $t$ 无关；Lagrange法中 $(x, y, z)$ 是 $t$ 的函数
- Euler法定义在空间上，各物理量形成场，故广泛采用场论知识，而Lagrange法主要用于例如波浪理论、台风等方面
- Euler法中加速度是一阶导数，而Lagrange法中加速度是二阶导数，故求解问题时，Euler法比Lagrange法容易
- 二者可以互相转换

质元在  $t$  时刻的位矢

$$\text{Lagrange} \rightarrow \text{Euler} \quad u_x = \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{x_0, y_0, z_0} = u_x(\vec{r}(x_0, y_0, z_0); t) = u_x(\vec{r}(x, y, z, t), t) = u_x(\vec{r}, t)$$

$$\text{Euler} \rightarrow \text{Lagrange} \quad u_x = u_x(x, y, z, t) = \frac{dx}{dt} \rightarrow \text{积分, 并利用初始条件 } t = t_0 \text{ 时 } x = x_0$$

定常流 (stationary fluid): 欧拉法描述的流体,  $\vec{u}$  不随时间变化

- ① 流线 (streamline): 在某一时刻上, 流体速度方向相切的曲线, 每点切线方向与瞬时速度方向一致, 可能随时间变化
- ② 迹线 (pathline): 单个流体质点随时间的运动轨迹, 单个质点的“轨道”, 会随时间变化
- ③ 烟线 (streakline): 由所有在不同时间经过同一点的流体质点组成的曲线, 连续注入染料看到的线, 会随时间变化
- ④ 时间线 (timeline): 由在同一时刻通过某一曲线 (如染料线) 注入的流体质点组成的线, 某时刻释放的一串质点的形变线, 会随时间变化
- ⑤ 流管 (streamtube): 假想的由一束相邻流线形成的一个管道。因流管壁由流线构成, 速度与之平行, 所以不会有流体穿越管壁流进流出





当流体密度恒定时（不可压缩流体）：
$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0$$



## ① 内容回顾与补充拓展

角动量定理

守恒律与对称性

天体运动

流体静力学

流体运动学

粘滞流体

## ② 作业习题讲解

## ③ Q&A

理想流体不论在静止或运动中都不存在切向力，但实际流体当其各部分间发生相对滑动时，就存在阻碍相对滑动的力，此即粘滞力

设想流体中两层的速度不同，则快的一层对慢的一层有拉力作用，而慢的一层对快的一层有阻力的作用。这一对力就叫粘滞力或内摩擦力。流体的这种性质称为粘滞性（Viscosity）

从分子运动的观点来看，气体的粘滞性是由于不同速度的相邻流体层间发生动量交换

液体的粘滞性只有一小部分直接起因于分子的动量传递，而主要起因于流动中分子团的形变

粘滯定律：

$$F = \eta A \frac{\partial u}{\partial y}$$

动力粘度 (Dynamic viscosity):  $\eta$

运动粘度 (Kinematic viscosity):  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$

符合粘滞定律的流体称为牛顿流体，但也存在非牛顿流体，也就是说其剪应力与剪应变呈非线性关系。

理想流体的动力学方程  $-\oint p d\vec{S} + \int \vec{F} \rho dV = \rho \Delta V \vec{a}$

## 粘滞流体的动力学方程

$$-\oint p d\vec{S} + \int \vec{F} \rho dV + \vec{F}_f = \rho \Delta V \vec{a}$$

对粘滞流体，伯努利方程不再成立，粘滞性不能忽略

- 在推导伯努利方程的过程中，如果考虑到粘滞力的作用，则有

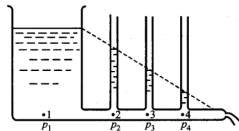
$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \rho g z_1 = p_1 - p_2 - w$$

$w$ 是单位体积的流体在从1位置运动到2位置的过程中克服粘滞力而消耗的机械能

对于粗细均匀的水平细管中的定常流动, 由  $v_1 = v_2$  (连续性方程要求),  $z_1 = z_2$ , 从而有

$$p_1 - p_2 = w$$

粘滞流体在水平均匀管中流动时, 上游压强比下游大



对于流量  $Q$ ,  $Q = \frac{\pi(p_2 - p_1)R^4}{8\eta l}$

雷诺数:  $Re = \frac{\rho v r}{\eta}$ ,  $Re = \frac{\rho v L}{\eta}$ ,  $L$  为特征长度

斯托克斯公式 (Stokes' law):  $F_f = F_{fv} + F_{fp} = 6\pi\eta rv$

① 内容回顾与补充拓展

② 作业习题讲解

③ Q&A



# 作业习题讲解

① 内容回顾与补充拓展

② 作业习题讲解

③ Q&A

Q&A

*Thanks!*