应力张量及理想流体性质的严谨证明

本文旨在对连续介质力学中应力张量的基本性质, 以及理想流体和静止流体的应力状态进行详细的数学证明.

1 应力张量的性质证明

应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 是一个二阶张量, 其分量 σ_{ij} 表示在 i 方向平面上, 沿 j 方向的应力分量.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{1}$$

1.1 证明一: 应力张量是对称张量 ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$)

物理原理: 角动量守恒

我们考察一个无穷小的立方体流体元, 其中心位于坐标原点, 边长分别为 dx, dy, dz. 考虑该流体元绕 z 轴的转动. 作用在 y 方向正负平面 (面积为 $dxdz$) 上的剪切力, 会产生绕 z 轴的力矩.

- 在 $+y/2$ 平面上, 沿 x 方向的剪切应力为 σ_{yx}. 作用力为 $F_x = \sigma_{yx}(dxdz)$. 该力到 z 轴的力臂为 $dy/2$. 产生的力矩为 $\tau_1 = (\sigma_{yx}dxdz)\frac{dy}{2}$.
- 在 $-y/2$ 平面上, 沿 x 方向的剪切应力为 $-\sigma_{yx}$. 作用力为 $-F_x = -\sigma_{yx}(dxdz)$. 该力到 z 轴的力臂为 $-dy/2$. 产生的力矩为 $\tau_2 = (-\sigma_{yx}dxdz)(-\frac{dy}{2}) = (\sigma_{yx}dxdz)\frac{dy}{2}$.

这两个力矩方向相同, 总力矩为 $\tau_{yx} = \sigma_{yx}(dxdzdy) = \sigma_{yx}dV$.

同理, 作用在 x 方向正负平面 (面积为 $dydz$) 上的剪切力 σ_{xy} 会产生一个反方向的力矩, 其大小为 $\tau_{xy} = \sigma_{xy}(dxdydz) = \sigma_{xy}dV$.

因此, 绕 z 轴的净力矩为:

$$\tau_{net,z} = (\sigma_{yx} - \sigma_{xy})dV \tag{2}$$

根据转动定律, $\tau_{net} = I\alpha$, 其中 I 是转动惯量, α 是角加速度. 对于此立方体元, 其绕 z 轴的转动惯量 I_z 正比于 $m(\text{length})^2$. 设流体密度为 ρ, 则 $m = \rho dV = \rho dxdydz$. $I_z \propto (\rho dV)(dx^2 + dy^2)$. 这是一个高阶无穷小量, 大约为 (边长)^5. 于是我们有:

$$(\sigma_{yx} - \sigma_{xy})dV = I_z\alpha \tag{3}$$

将 dV 看作是边长 L 的三次方, 即 L^3, 则 $I_z \propto L^5$.

$$(\sigma_{yx} - \sigma_{xy})L^3 \propto L^5\alpha \tag{4}$$

$$(\sigma_{yx} - \sigma_{xy}) \propto L^2\alpha \tag{5}$$

当微元尺寸趋向于零时 ($L \to 0$), 为了保持角加速度 α 为一个有限值, 等式左边必须为零.

$$\sigma_{yx} - \sigma_{xy} = 0 \implies \sigma_{yx} = \sigma_{xy} \tag{6}$$

同理可证 $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$ 和 $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$. 因此, 应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 是一个对称张量, 即 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

1.2 证明二: 应力张量存在三个相互垂直的主轴

数学原理: 实对称矩阵的谱定理 (Spectral Theorem)

在一个点上, 通过该点的任意一个微小面元, 其法向量为单位向量 $\vec{n}$. 该面元上所受的应力矢量 (也称为面力) $\vec{T}$ 可以通过应力张量计算:

$$\vec{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} \quad (\text{在分量形式下为} T_i = \sum_j \sigma_{ij} n_j) \tag{7}$$

我们寻找一个特殊的方向 $\vec{n}$, 使得作用在该方向平面上的应力矢量 $\vec{T}$ 与该平面的法向量 $\vec{n}$ 共线. 这样的方向被称为**主轴**或**主方向**. 数学上, 这意味着 $\vec{T}$ 正比于 $\vec{n}$:

$$\vec{T} = \sigma \vec{n} \tag{8}$$

其中 σ 是一个标量, 称为**主应力**.

结合上面两个方程, 我们得到:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} = \sigma \vec{n} \tag{9}$$

这是一个典型的**本征值问题** (或称特征值问题). 其中, $\boldsymbol{\sigma}$ 是矩阵 (算子), $\vec{n}$ 是其**本征向量** (特征向量), σ 是对应的**本征值** (特征值).

根据线性代数中的**谱定理**, 任何一个 $n \times n$ 的实对称矩阵 (我们已经证明应力张量是对称的):

1. 拥有 n 个实数特征值. (对于三维空间, 意味着有三个实的主应力 $\sigma'_{xx}, \sigma'_{yy}, \sigma'_{zz}$).
2. 这些特征值对应的特征向量构成一个**正交完备基**. (对于三维空间, 意味着存在三个相互正交的主方向).

因此, 总能找到三个相互垂直的主轴. 如果我们以这三个主轴作为新的坐标系的基矢, 那么在该坐标系 (主轴坐标系) 中, 应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 表现为一个对角矩阵, 对角元就是三个主应力:

$$\boldsymbol{\sigma'} = \begin{pmatrix} \sigma'_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{zz} \end{pmatrix} \tag{10}$$

推论: 在与主轴方向垂直的面上, 只有法向应力, 切向应力为零. 这实际上是主应力定义的直接结果. 主平面就是与主轴垂直的平面. 设其法向量为主方向 $\vec{n}$. 那么根据定义, 该平面上的应力矢量 $\vec{T} = \sigma \vec{n}$, 完全平行于法向量 $\vec{n}$. 因此, 应力矢量没有垂直于法向量的分量, 即切向分量 (剪切应力) 为零.

2 理想流体与静止流体应力性质的证明

2.1 理想流体的定义与推论

定义: 理想流体是一种没有任何粘性, 对剪切形变没有任何抵抗能力的流体.

- **推论 1：应力必与所在面垂直.** 因为流体不能抵抗剪切, 所以在任何一个面上, 应力矢量 $\vec{T}$ 不可能存在切向分量, 否则流体元会发生无限的剪切形变. 因此, $\vec{T}$ 必须始终沿着法线方向 $\vec{n}$.
- **推论 2：法向应力必为压力.** 流体一般不能承受拉伸. 如果法向应力是拉力 (即 $\vec{T}$ 与 $\vec{n}$ 同向), 流体将会被撕裂. 因此, 法向应力必须是压力 (即 $\vec{T}$ 与 $\vec{n}$ 反向).

2.2 证明三：同一点各不同方向上法向应力相等 (帕斯卡定律)

物理原理：牛顿第二定律 (或静力平衡)

我们取流体中任意一点 P, 在该点构造一个无穷小的四面体微元 O-ABC, 如图所示. 三个面 OAB, OAC, OBC 分别垂直于 z, y, x 轴, 其面积记为 dA_z, dA_y, dA_x. 斜面 ABC 的面积为 dA, 其单位法向量为 $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$. 根据几何关系, $dA_x = n_x dA$, $dA_y = n_y dA$, $dA_z = n_z dA$.

设作用在 x, y, z 各正交面上的压力分别为 p_x, p_y, p_z, 作用在斜面上的压力为 p_n. 根据理想流体的推论, 这些力都垂直于各自所在的平面. 作用在四面体上的表面力为:

- x 面: $\vec{F}_x = (p_x dA_x, 0, 0) = (p_x n_x dA, 0, 0)$
- y 面: $\vec{F}_y = (0, p_y dA_y, 0) = (0, p_y n_y dA, 0)$
- z 面: $\vec{F}_z = (0, 0, p_z dA_z) = (0, 0, p_z n_z dA)$
- 斜面: $\vec{F}_n = -p_n dA \cdot \vec{n} = (-p_n n_x dA, -p_n n_y dA, -p_n n_z dA)$

四面体还可能受到体积力 (如重力) $\vec{f}_{body} dV$ 和产生加速度 $\vec{a}$. 根据牛顿第二定律, $\sum \vec{F} = m\vec{a} = \rho dV \vec{a}$.

$$\vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z + \vec{F}_n + \vec{f}_{body} dV = \rho dV \vec{a} \tag{11}$$

四面体的体积 dV 是其边长 L 的三阶无穷小 (L^3), 而面积 dA 是二阶无穷小 (L^2). 当我们让这个四面体缩小到点 P 时 ($L \to 0$), 体积项 (dV) 比面积项 (dA) 快得多地趋于零. 因此, 在极限情况下, 体积力和惯性项可以忽略不计, 只有表面力达到平衡:

$$\vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z + \vec{F}_n = 0 \tag{12}$$

考察上式在 x 方向的分量:

$$p_x n_x dA - p_n n_x dA = 0 \implies (p_x - p_n) n_x dA = 0 \tag{13}$$

由于 n_x 和 dA 不一定为零, 故 $p_x = p_n$. 同理, 考察 y 和 z 方向的分量可得 $p_y = p_n$ 和 $p_z = p_n$.

$$p_x = p_y = p_z = p_n \tag{14}$$

由于斜面的方向 $\vec{n}$ 是任意选取的, 这证明了在流体中的任意一点, 来自任何方向的压力大小都是相等的. 这个压力 p 是一个标量, 称为静压强. 因此, 在理想流体中, 应力张量可以写为:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p \tag{15}$$

并且所有剪切应力分量为零 ($\sigma_{ij} = 0$ for $i \neq j$). 最终, 应力张量形式为:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -p\boldsymbol{I} \tag{16}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 是单位张量.

2.3 静止流体的性质

结论: 静止流体 (无论是理想的还是粘性的) 的应力性质与理想流体完全相同.

证明: 粘性流体 (如牛顿流体) 的剪切应力 τ 正比于流体的速度梯度, 即剪切应变率.

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \tag{17}$$

其中 μ 是粘度. 对于**静止**流体, 流体中各点的速度均为零, 因此速度梯度处处为零.

$$\frac{du}{dy} \equiv 0 \implies \tau = 0 \tag{18}$$

这意味着, 即使流体本身具有粘性, 但只要它处于静止状态, 其内部就不能承受任何剪切应力. 这与理想流体的定义是等效的. 因此, 所有适用于理想流体的应力分析 (如帕斯卡定律) 也同样适用于任何静止的流体.