第一章习题解答

TA：疏宇† 师驰昊*

October $5^{\{\text{th}\}}$, 2025

1 I 简答题

简答题没有标准答案，以下仅提供思路分析.

1 $|\frac{d\vec{v}}{dt}|=0$**与**$\frac{d|\vec{v}|}{dt}=0$**各代表什么样的运动？两者有无区别？**

要理解$|\frac{d\vec{v}}{dt}|=0$与$|\frac{d|\vec{v}|}{dt}|=0$的物理意义及区别，需从矢量微积分和运动学概念出发分析.

对于$|\frac{d\vec{v}}{dt}|=0$，$\frac{d\vec{v}}{dt}$即为加速度矢量$\vec{a}$，故$|\frac{d\vec{v}}{dt}|=|\vec{a}|=0$. 这意味着加速度大小为零，则速度$\vec{v}$既不改变大小，也不改变方向，对应静止或匀速直线运动（速度的大小、方向均恒定）.

对于$|\frac{d|\vec{v}|}{dt}|=0$，$|\vec{v}$是速率，因此$\frac{d|\vec{v}|}{dt}$是速率对时间的变化率. 该式要求速率恒定（不随时间变化）. 速率恒定仅要求速度的大小不变，但速度的方向可以变化. 因此，该式对应所有速率不变的运动.

二者的区别源于对“速度变化”的约束范围不同：

- $|\frac{d\vec{v}}{dt}|=0$要求速度的大小和方向均不变（加速度为零），因此只对应匀速直线运动.
- $|\frac{d|\vec{v}|}{dt}|=0$ 仅要求速率（速度大小）不变，方向可变，因此包含“匀速直线运动”和“匀速圆周运动”等更广的运动类型.

具体举例说明：

- 匀速直线运动：同时满足两者（加速度为零$\rightarrow$ 速度大小、方向均不变）.
- 匀速圆周运动：仅满足$\frac{d|\vec{v}|}{dt}=0$（速率恒定），但不满足$|\frac{d\vec{v}}{dt}|=0$（存在向心加速度，加速度大小不为零）.

综上，$|\frac{d\vec{v}}{dt}|=0$是“匀速直线运动”的充分必要条件；而$|\frac{d|\vec{v}|}{dt}|=0$是“速率不变运动”的充分必要条件，前者是后者的子集（匀速直线运动是速率不变运动的一种特殊情况）.

2 当物体的加速度恒定不变时，它的运动方向可否改变？为什么？

当物体的加速度恒定不变时，它的运动方向可以改变.

加速度是速度的变化率（$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$），反映速度（矢量，包含大小和方向）变化的快慢与方向. 加速度恒定时，其大小和方向均不变，但速度的变化由“加速度与速度的方向关系”决定.

当加速度与初速度不在同一直线上时，物体做曲线运动，运动方向时刻变化. 例如平抛运动：物体初速度水平，加速度为竖直向下的重力加速度（大小、方向均恒定）. 由于加速度与速度存在夹角，速度方向会从“水平”逐渐偏转向“倾斜向下”，运动轨迹为抛物线，方向持续改变.

当加速度与初速度在同一直线上时，物体做匀变速直线运动，运动方向也可能改变（当速度减为零后反向）. 例如竖直上抛运动：物体初速度竖直向上，加速度为竖直向下的重力加速度（恒定）. 上升阶段速度逐渐减小（方向仍向上）；到最高点速度为零后，速度方向变为向下，运动方向从“向上”改为“向下”.

加速度恒定时，只要加速度与速度方向不完全相同且不为零，速度的方向就可能发生变化（曲线运动中方向持续偏转，或直线运动中方向反向）. 因为加速度作为速度变化的“驱动”，会持续改变速度这个矢量的大小或方

†School of Gifted Young, USTC, email:shuyu2023@mail.ustc.edu.cn

*School of Gifted Young, USTC, email:1984019655@qq.com

向，而运动方向是速度矢量的固有属性之一.

3 分析下列说法的正确性：（1）作曲线运动的物体，必有切向加速度；（2）作曲线运动的物体，必有法向加速度；（3）具有加速度的物体，其速率必随时间改.

（1）作曲线运动的物体，必有切向加速度

错误

切向加速度a_τ由速度大小（速率）的变化引起，公式为$a_\tau = \frac{dv}{dt}$（v为瞬时速率）. 若物体做匀速率曲线运动（如匀速圆周运动），速率v不变，则$\frac{dv}{dt} = 0$，此时切向加速度为零. 因此，曲线运动不一定存在切向加速度.

（2）作曲线运动的物体，必有法向加速度

正确

法向加速度a_n由速度方向的变化引起，公式为$a_n = \frac{v^2}{\rho}$（ρ为曲率半径）. 曲线运动中，速度方向时刻改变，因此法向加速度一定存在（即使速率不变，只要轨迹是曲线，$a_n \neq 0$）.

（3）具有加速度的物体，其速率必随时间改变

错误

加速度是速度（矢量，包含大小和方向）的变化率. 若加速度只改变速度的方向而不改变大小（如匀速圆周运动），则物体的速率（速度的大小）保持不变. 因此，存在加速度时，速率不一定随时间改变.

4 篮球运动员跑步投篮时，若瞄准篮投反而投不进，为什么？应如何投才能投准？

跑步时，运动员（和球）具有水平方向的初速度（与跑步方向一致）. 若直接“瞄准篮筐”投篮，相当于只考虑了垂直于篮筐的投篮速度，却忽略了球原有的水平初速度.

投出后，球的运动是“水平初速度+垂直投篮速度+重力加速度”的合成（类似斜抛运动）. 此时：

- 水平方向：球会保持跑步时的水平速度继续向前飞行；
- 垂直方向：球向篮筐运动，但因水平速度的存在，合运动轨迹会偏离原本“瞄准篮筐”的直线方向.

因此，球会因水平初速度“飞过”或“偏出”篮筐，而非准确落入.

要让跑步投篮的球准确入筐，核心是“让球相对于篮筐的运动轨迹准确指向篮筐”，需从以下方面调整：

- 调整出手时机与力度：跑步过程中，需在提前量的位置出手（而非正对篮筐时再投）.例如：向前跑动时，要在距离篮筐“稍前方”的位置投篮，让球的水平初速度与垂直投篮速度合成后，轨迹恰好指向篮筐.同时，出手力度需略小于静止投篮，以抵消水平速度的影响.
- 调整出手角度：跑步时，出手角度需比静止投篮更陡峭（即增加垂直分速度的比例）.这样能削弱水平初速度对轨迹的干扰，让球更快“克服”水平速度，向篮筐方向汇聚.
- 利用“缓冲动作”抵消水平速度：投篮瞬间，通过手腕、手指的“缓冲”动作（如短暂持球再出手），让球与手短暂接触，削弱跑步带来的水平初速度，使球相对静止地脱离手掌，再以接近静止投篮的轨迹飞向篮筐.

跑步投篮的本质是“运动中的相对静止”，需通过出手时机、角度、力度的调整，让球在保持水平初速度的同时，合运动轨迹能准确指向篮筐，而非简单套用静止时的“直线瞄准”逻辑.

注：专业篮球训练中，跑步投篮还会结合步伐、身体平衡等细节，但物理原理的核心是“补偿运动状态下的初速度”，让球的相对运动轨迹准确.

2 II 教材习题

教材习题部分答案与教材给出答案有出入，以本习题解析为准.

TB1.1 甲乙两列火车在同一水平直路上以相等的速率（$30km/h$）相向而行.当它们相隔$60km$的时候，一只鸟以$60km/h$的恒定速度离开甲车头向乙车头飞去，当到达立即返回，如此来回往返不止.试求：

(1) 当两车头相遇时，鸟往返了多少次？

两列火车与鸟均做匀速直线运动，鸟每次从一辆火车飞向另一辆火车再返回时，由于火车在持续靠近，鸟往返一次所需的时间会逐渐缩短，且这一过程会无限重复（类似"无穷级数"的思想，每次间隔时间趋近于0但次数无限）. 因此，当两车头相遇时，鸟往返了无穷多次.

但是，实际上，考虑到火车间距离越来越近，在某一时刻起，鸟的长度已经不能忽略不计，鸟不能视为质点，此后终到某一时刻，鸟无法再完成完整的往返飞行. 故，当两车头相遇时，鸟往返了无穷多次，但实际只往返了有限次.

(2) 鸟共飞行了多少时间及距离？

鸟从飞离甲车到两车相遇的这段时间内始终在飞行，因此鸟飞行的总时间等于两列火车从初始相距60km到相遇所需的时间.

两列火车相向而行，相对速度为两者速度之和：$v_{rel} = 30km/h + 30km/h = 60km/h.$

初始间距$s_0 = 60km$，则两车相遇所需时间即鸟的飞行时间：$t = \frac{s_0}{v_{rel}} = \frac{60km}{60km/h} = 1h.$

鸟的飞行速度$v_{bird} = 60km/h$，飞行距离为速度与时间的乘积：$s_{bird} = v_{bird}t = 60km/h \times 1h = 60km.$

故鸟共飞行了$1h$，飞行距离为$60km.$

TB1.3 一物体做直线运动，它的位置由方程$x = 10t^2 + 6$决定，其中x的单位为m，t的单位为s.试计算：

(1) 在$3.00\ 3.10s$、$3.00\ 3.01s$及$3.000\ 3.001s$间隔时间内的平均速度；

$3.00s\ 3.10s$：

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{(10 \times 3.10^2 + 6)m - (10 \times 3.00^2 + 6)m}{3.10s - 3.00s} = 61.0m/s$$

$3.00s\ 3.01s$：

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{(10 \times 3.01^2 + 6)m - (10 \times 3.00^2 + 6)m}{3.01s - 3.00s} = 60.1m/s$$

$3.00s\ 3.001s$：

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{(10 \times 3.001^2 + 6)m - (10 \times 3.00^2 + 6)m}{3.001s - 3.00s} = 60.01m/s$$

(2) 在$t = 3.00s$时的瞬时速度；

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[10(t+\Delta t)^2 + 6] - [10t^2 + 6]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{10(2t\Delta t + \Delta t^2)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{20t\Delta t + 10\Delta t^2}{\Delta t} = 20t$$
$$= 20 \times 3m/s = 60m/s$$

(3) 用微分方法求它的速度及加速度公式.

$$\begin{cases} v = \dot{x} = \frac{d}{dt}(10t^2 + 6) = 20tm/s \\ a = \ddot{x} = \dot{v} = \frac{d}{dt}(20t) = 20m/s^2 \end{cases}$$

TB1.25 在小山上安一靶子，由炮位所在处观测靶子的仰角为 α，炮与靶子间的水平距离为 L，向目标射击时，炮身的仰角为 β.略去空气阻力，求能射中靶子的子弹的初速度 v_0.

以炮口为坐标原点，水平方向为x轴，竖直方向为y轴.

已知炮位观测靶子的仰角为α，炮与靶的水平距离为L，因此靶子的水平坐标$x = L$，竖直坐标$y = L\tan\alpha$.

炮身仰角为β，子弹初速度v_0可分解为水平和竖直分量，水平分速度$v_{0x} = v_0\cos\beta$，竖直分速度$v_{0y} = v_0\sin\beta$.

子弹的运动分为水平和竖直两个方向. 水平方向为匀速直线运动，$x = v_{0x}t$，代入$x = L$，得$t = \frac{L}{v_0\cos\beta}$. 竖直方向为竖直上抛运动，加速度为$-g$，$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$，代入$y = L\tan\alpha$和$t = \frac{L}{v_0\cos\beta}$，得：

$$L\tan\alpha = v_0\sin\beta\frac{L}{v_0\cos\beta} - \frac{1}{2}g(\frac{L}{v_0\cos\beta})^2$$

简化竖直方向的方程：

$$L\tan\alpha = L\tan\beta - \frac{gL^2}{2v_0^2\cos^2\beta}$$
$$\Rightarrow \tan\alpha = \tan\beta - \frac{gL}{2v_0^2\cos^2\beta}$$
$$\Rightarrow \tan\beta - \tan\alpha = \frac{gL}{2v_0^2\cos^2\beta}$$

利用三角恒等式化简$\tan\beta - \tan\alpha$：

$$\tan\beta - \tan\alpha = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta}{\cos\beta\cos\alpha} = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\beta\cos\alpha}$$

代入上方程：

$$\tan\beta - \tan\alpha = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\beta\cos\alpha} = \frac{gL}{2v_0^2\cos^2\beta}$$

解出v_0^2：

$$v_0^2 = \frac{gL\cos\beta\cos\alpha}{2\cos^2\beta\sin(\beta-\alpha)} = \frac{gL\cos\alpha}{2\cos\beta\sin(\beta-\alpha)}$$

开平方得到初速度v_0：

$$v_0 = \sqrt{\frac{gL\cos\alpha}{2\cos\beta\sin(\beta-\alpha)}}$$

TB1.31 一物体从静止出发沿半径 $R = 3.0\,\mathrm{m}$ 的圆周运动，切向加速度 $a_t = 3.0\,\mathrm{m/s}^2$.试问：

(1) 经过多长时间它的总加速度 $\vec{a}$ 恰与半径成 45° 角？

在圆周运动中，总加速度$\vec{a}$由切向加速度a_τ和法向加速度a_n合成，且两者垂直.

当总加速度$\vec{a}$与半径成$45°$角时，由于法向加速度a_n的方向与半径方向相反（法向加速度指向圆心，半径从圆心指向物体），此时a_τ与a_n的大小关系满足$\tan 45^\circ = \frac{a_\tau}{a_n}$，即$a_\tau = a_n$.

已知切向加速度$a_\tau = 3.0m/s^2$，则法向加速度a_n也应为$3.0m/s^2$. 法向加速度有$a_n = \frac{v^2}{R}$. 物体从静止出发（初速度$v_0 = 0$），由匀加速直线运动规律$v = v_0 + a_\tau t$，则$v = a_\tau t$.

结合以上条件，易得$a_\tau = \frac{(a_\tau t)^2}{R}$，代入数值，得$t = 1.0s$.

(2) 在上述时间内物体所通过的路程 s 等于多少？

物体从静止出发，切向加速度恒定，路程s（标量，表示轨迹长度）满足匀加速直线运动公式：

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}a_\tau t^2$$

代入数值，得$s = 1.5m$.

TB1.33 一杆以匀角速度 ω_0 绕其固定端 O 且垂直于杆的轴转动.在 $t = 0$ 时，位于 O 点的小球从相对于杆静止开始沿杆作加速度为 a_0 的匀加速运动.求小珠在时刻 t 的速度和加速度.

由于小珠是在水平面上运动，采用极坐标系，原点在O点，同时规定径向单位矢量$\hat{r}$和切向单位矢量$\hat{\theta}$.

杆旋转角速度为ω_0,故$\theta(t) = \omega_0 t$.

小珠沿杆运动，即沿径向运动. 由于它从O点出发，初速为零，加速度为a_0（相对于杆），则其相对于杆的径向位置为$r(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2$.

在极坐标中，一个质点的速度公式为：

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

其中，$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = a_0 t$，$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0$.

代入$r(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2$，得：

$$\vec{v} = (a_0 t)\hat{r} + (\frac{1}{2}a_0 t^2)\omega_0\hat{\theta} = a_0 t\hat{r} + \frac{1}{2}a_0\omega_0 t^2\hat{\theta}$$

在极坐标中，加速度有：

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

逐项计算，$r=\frac{1}{2}a_0t$，$\dot{r}=a_0t$，$\ddot{r}=a_0$，$\dot{\theta}=\omega_0$，$\ddot{\theta}=0$.
则径向分量：

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=a_0-(\frac{1}{2}a_0t^2)\omega_0^2$$

切向分量：

$$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=2a_0\omega_0t$$

因此，加速度矢量为：

$$\vec{a}(t)=a_r\hat{r}+a_\theta\hat{\theta}=(a_0-\frac{1}{2}a_0\omega_0^2t^2)\hat{r}+2a_0\omega_0t\hat{\theta}$$

注：切向加速度为$2a_0\omega_0t$，是科里奥利加速度（Coriolis acceleration）的表现.
故，答案为：

$$\begin{cases}\vec{v}(t)=a_0t\hat{r}+\frac{1}{2}a_0\omega_0t^2\hat{\theta}\\ \vec{a}(t)=(a_0-\frac{1}{2}a_0\omega_0^2t^2)\hat{r}+2a_0\omega_0t\hat{\theta}\end{cases}$$

3 III 补充习题

1 设有矢量$\vec{A}=3\vec{\imath}+4\vec{\jmath}-4\vec{k}$，（$\vec{\imath}$，$\vec{\jmath}$，$\vec{k}$分别为$x$，$y$，$z$方向的单位矢量）
(a) 在$x-y$平面内找到一个单位向量$\hat{\vec{B}}$，使其垂直于向量$\vec{A}$；
在$x-y$平面内的向量$\hat{\vec{B}}$满足z分量为零，故$\hat{\vec{B}}=a\vec{\imath}+b\vec{\jmath}+0\vec{k}$.
$\hat{\vec{B}}$为单位向量，模长为1，故：

$$\sqrt{a^2+b^2}=1$$

$\hat{\vec{B}}\perp\vec{A}$，故：

$$\vec{A}\cdot\hat{\vec{B}}=(3\vec{\imath}+4\vec{\jmath}-4\vec{k})\cdot(a\vec{\imath}+b\vec{\jmath}+0\vec{k})=3a+4b=0$$

解得$b=-\frac{3}{4}a$，代入模长方程，得：

$$\begin{cases}a=\frac{4}{5}\\ b=-\frac{3}{5}\end{cases}$$

或：

$$\begin{cases}a=-\frac{4}{5}\\ b=\frac{3}{5}\end{cases}$$

则$\hat{\vec{B}}=-\frac{4}{5}\vec{\imath}+\frac{3}{5}\vec{\jmath}$或$\hat{\vec{B}}=\frac{4}{5}\vec{\imath}-\frac{3}{5}\vec{\jmath}$.
(b) 找到一个单位向量$\hat{\vec{C}}$，使得$\hat{\vec{C}}\perp\vec{A}$，$\hat{\vec{C}}\perp\hat{\vec{B}}$；
方法一：设$\hat{\vec{C}}=a\vec{\imath}+b\vec{\jmath}+c\vec{k}$，由垂直条件和模长条件解得.（具体过程类似上问，略）
方法二：考虑外积的性质，$\vec{A}\times\hat{\vec{B}}$垂直于$\vec{A}$和$\hat{\vec{B}}$，且不为零矢量，因此可取单位化后的外积作为$\hat{\vec{C}}$.
取$\hat{\vec{B}}=\frac{4}{5}\vec{\imath}-\frac{3}{5}\vec{\jmath}$，计算外积：

$$\vec{A}\times\hat{\vec{B}}=\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\ 3&4&-4\\ 4/5&-3/5&0\end{vmatrix}=-\frac{12}{5}\vec{\imath}-\frac{16}{5}\vec{\jmath}-\frac{25}{5}\vec{k}$$

归一化，得：

$$\hat{\vec{C}}=\frac{-\frac{12}{5}\vec{\imath}-\frac{16}{5}\vec{\jmath}-\frac{25}{5}\vec{k}}{\sqrt{\frac{12}{5}^2+\frac{16}{5}^2+\frac{25}{5}^2}}=-\frac{12}{\sqrt{1025}}\vec{\imath}-\frac{16}{\sqrt{1025}}\vec{\jmath}-\frac{25}{\sqrt{1025}}\vec{k}$$

同样地，我们也可以取$\hat{\vec{B}}=-\frac{4}{5}\vec{\imath}+\frac{3}{5}\vec{\jmath}$，计算外积，得到另一个方向的$\hat{\vec{C}}=\frac{12}{\sqrt{1025}}\vec{\imath}+\frac{16}{\sqrt{1025}}\vec{\jmath}+\frac{25}{\sqrt{1025}}\vec{k}$.
(c) 证明$\vec{A}$垂直于$\hat{\vec{B}}$和$\hat{\vec{C}}$所在的平面.

要证明一个向量垂直于一个平面，只需证明它垂直于该平面内的两个不共线向量.
由于$\hat{\vec{B}}\perp\hat{\vec{C}}$，且二者模均不为零，则二者必不共线. 则矢量垂直于二者张成的平面等价于矢量同时垂直于$\hat{\vec{B}}$和$\hat{\vec{C}}$.
$\vec{A}\perp\hat{\vec{B}}$为 (a) 的题设条件，故无需证明.
$\vec{A}\perp\hat{\vec{C}}$也为 (b) 的题设条件，故无需证明. 我们也可以简单验证一下：

$$\vec{A}\cdot\hat{\vec{C}} = (3\vec{\imath}+4\vec{\jmath}-4\vec{k})\cdot(-\frac{12}{\sqrt{1025}}\vec{\imath}-\frac{16}{\sqrt{1025}}\vec{\jmath}-\frac{25}{\sqrt{1025}}\vec{k}) = 0$$

由$\vec{A}\perp\hat{\vec{B}}$且$\vec{A}\perp\hat{\vec{C}}$，可知$\vec{A}$垂直于$\hat{\vec{B}}$和$\hat{\vec{C}}$所在的平面. (Q.E.D.)

2 设$\vec{a}=(1,-2,1)$，$\vec{b}=(1,-1,3)$，$\vec{c}=(2,5,-3)$，求$\vec{a}\times\vec{b}$，$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$，$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$.
首先计算$\vec{a}\times\vec{b}$：

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-5,-2,1)$$

对于$\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}$：

$$\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} = (-5,-2,1)\cdot(2,5,-3) = -10-10-3 = -23$$

对于$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$，我们可以直接计算：

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (1,-2,1)\times\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = (1,-2,1)\times(-12,9,7) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ -12 & 9 & 7 \end{vmatrix} = (-23,-19,-15)$$

很多时候，计算外积需要利用行列式，行列式的计算成本是比较大的，我们可以利用矢量三重积公式简化计算量：

$$\begin{aligned}\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) &= (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \\ &= ((1,-2,1)\cdot(2,5,-3))(1,-1,3)-((1,-2,1)\cdot(1,-1,3))(2,5,-3) \\ &= (-11)(1,-1,3)-(6)(2,5,-3) = (-23,-19,-15)\end{aligned}$$

3 求下列函数的导函数：
(a) $y=8x^3+x+7$；

$$y' = (8x^3)'+x'+(7)' = 24x^2+1$$

(b) $y=(x+1)(x-1)\tan x$；

$$\begin{aligned}y' &= (x+1)'(x-1)\tan x+(x+1)(x-1)'\tan x+(x+1)(x-1)\tan' x \\ &= (x-1)\tan x+(x+1)\tan x+(x+1)(x-1)\frac{1}{\cos^2 x} \\ &= 2x\tan x+\frac{(x+1)(x-1)}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

(c) $y=\frac{9x+x^2}{5x+6}$；

$$\begin{aligned}y' &= \frac{(9x+x^2)'(5x+6)-(9x+x^2)(5x+6)'}{(5x+6)^2} = \frac{(9+2x)(5x+6)-(9x+x^2)5}{(5x+6)^2} \\ &= \frac{5x^2+12x+54}{25x^2+60x+36}\end{aligned}$$

(d) $y=x\cos x+\frac{\sin x}{x}$.

$$
\begin{aligned}
y' = (x\cos x)' + (\frac{\sin x}{x})' &= x'\cos x + x\cos' x + \frac{\sin' x \cdot x - \sin x \cdot x'}{x^2} \\
&= \cos x - x\sin x - \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}
\end{aligned}
$$

4 求不定积分：

(a) $\int(3x^3+\sin x+\frac{5}{x})dx$；

$$\int(3x^3+\sin x+\frac{5}{x})dx = \int 3x^3dx + \int \sin x dx + \int \frac{5}{x}dx = \frac{3}{4}x^4 - \cos x + 5\ln|x| + C$$

(b) $\int\sqrt{a^2-x^2}dx(a>0)$**.**

这是一个标准的三角代换积分. 令$x=a\sin\theta$，$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，则$dx=a\cos\theta d\theta$.

则：

$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta} = \sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)} = \sqrt{a^2\cos^2\theta} = a|\cos\theta|$$

由于$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$范围内$\cos\theta\ge 0$，故：

$$\sqrt{a^2-x^2} = a\cos\theta$$

代入积分：

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx = \int(a\cos\theta)(a\cos\theta d\theta) = a^2\int\cos^2\theta d\theta$$

利用三角恒等式$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$，所以：

$$a^2\int\cos^2\theta d\theta = a^2\int\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2\theta)d\theta = \frac{a^2}{2}(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta)+C$$

注意到$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$，故：

$$\frac{a^2}{2}(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta)+C = \frac{a^2}{2}(\theta+\sin\theta\cos\theta)+C$$

将结果还原到x，$\theta=\arcsin\frac{x}{a}$，得到：

$$
\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{x}{a} \\
\cos\theta &= \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} \\
\sin\theta\cos\theta &= \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}
\end{aligned}
$$

代入，得：

$$\frac{a^2}{2}(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2})+C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$$

最终答案为：

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$$

5 验证函数$y=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$（其中$C_1$，$C_2$为任意函数）是微分方程$y''+\omega^2y=0$的解.

要验证函数 $y=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$（其中 C_1, C_2 是任意常数）是微分方程 $y''+\omega^2y=0$ 的解，需将函数代入微分方程并验证等式成立.

对 $y=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$ 关于 t 求导：

$$y' = \frac{d}{dt}(C_1\cos\omega t) + \frac{d}{dt}(C_2\sin\omega t) = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t$$

对 $y' = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t$ 再次对 t 求导：

$$y'' = \frac{d}{dt}(-C_1\omega\sin\omega t) + \frac{d}{dt}(C_2\omega\cos\omega t) = -C_1\omega\cdot\omega\cos\omega t + C_2\omega\cdot(-\omega\sin\omega t)$$

简化得：

$$y'' = -\omega^2 C_1\cos\omega t - \omega^2 C_2\sin\omega t$$

微分方程为 $y'' + \omega^2 y = 0$，将 y'' 和 y 代入方程：

$$\begin{aligned}
y'' + \omega^2 y &= (-\omega^2 C_1\cos\omega t - \omega^2 C_2\sin\omega t) + \omega^2(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t) \\
&= -\omega^2 C_1\cos\omega t - \omega^2 C_2\sin\omega t + \omega^2 C_1\cos\omega t + \omega^2 C_2\sin\omega t \\
&= 0
\end{aligned}$$

由于 $y'' + \omega^2 y = 0$ 恒成立，因此函数 $y = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$ 是微分方程 $y'' + \omega^2 y = 0$ 的解. (Q.E.D.)

6 为了让电梯在上升、下降过程中平稳运行，将按照如下的加速度从静止启动，
$a(t) = (a_m/2)(1-\cos(2\pi t/T)), 0 \le t \le T$
$a(t) = -(a_m/2)(1+\cos(2\pi t/T)), T \le t \le 2T$
其中a_m是最大的加速度，$2T$是运行一趟（静止-运行-静止）所需的总时间.
(a) 电梯运行的最大速度是多少？
速度是加速度的积分：

$$v(t) = \int_0^t a(\tau)\,d\tau$$

由于加速度在 $[0,T]$ 内为正，电梯加速；在 $[T,2T]$ 内为负，电梯减速. 因此，最大速度出现在 $t=T$ 时刻.
计算：

$$v(T) = \int_0^T a(t)\,dt = \int_0^T \frac{a_m}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right)dt$$

拆分积分：

$$v(T) = \frac{a_m}{2}\int_0^T 1\,dt - \frac{a_m}{2}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)dt$$

计算各项：

$$\int_0^T 1\,dt = T$$

$$\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)dt = \left[\frac{T}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right]_0^T = \frac{T}{2\pi}(\sin(2\pi)-\sin(0)) = 0$$

因此：

$$v(T) = \frac{a_m}{2}\cdot T - 0 = \frac{a_m T}{2}$$

因此最大速度为$v_{\max} = \frac{a_m T}{2}$
(b) 在电梯启动的很短时间内$t \ll T$，写出其速度的近似表达式；
方法一：先精确积分，再泰勒展开.
先精确积分得到速度的表达式：

$$\begin{aligned}
v(t) &= \int_0^t \frac{a_m}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi\tau}{T}\right)\right)d\tau \\
&= \frac{a_m}{2}\left[\int_0^t 1\,d\tau - \int_0^t \cos\left(\frac{2\pi\tau}{T}\right)d\tau\right] \\
&= \frac{a_m}{2}\left[t - \frac{T}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right]
\end{aligned}$$

令 $x = \dfrac{2\pi t}{T}$，当 $t \ll T$ 时，$x \ll 1$. 对 $\sin x$ 做泰勒展开至三阶项：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)$$

代入得：

$$\frac{T}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)=\frac{T}{2\pi}\left(\frac{2\pi t}{T}-\frac{1}{6}\left(\frac{2\pi t}{T}\right)^3+\cdots\right)=t-\frac{2\pi^2t^3}{3T^2}+\mathcal{O}(t^5)$$

代入速度表达式

$$\begin{aligned}v(t)&=\frac{a_m}{2}\left[t-\left(t-\frac{2\pi^2t^3}{3T^2}+\cdots\right)\right]\\&=\frac{a_m}{2}\cdot\frac{2\pi^2t^3}{3T^2}+\mathcal{O}(t^5)\\&=\frac{\pi^2a_m}{3T^2}t^3+\mathcal{O}(t^5)\end{aligned}$$

则在$t\ll T$ 时，速度表达式为：

$$v(t)\approx\frac{\pi^2a_m}{3T^2}t^3$$

方法二：先展开加速度，再积分.

利用 $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\cdots$，得：

$$1-\cos x=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\cdots$$

令 $x=\dfrac{2\pi t}{T}$，则：

$$\begin{aligned}a(t)&=\frac{a_m}{2}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right)\\&=\frac{a_m}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi t}{T}\right)^2+\mathcal{O}(t^4)\right)\\&=\frac{a_m}{2}\cdot\frac{2\pi^2t^2}{T^2}+\mathcal{O}(t^4)\\&=\frac{\pi^2a_m}{T^2}t^2+\mathcal{O}(t^4)\end{aligned}$$

积分求速度，得：

$$\begin{aligned}v(t)&=\int_0^t a(\tau)\,d\tau\\&=\int_0^t\left(\frac{\pi^2a_m}{T^2}\tau^2+\mathcal{O}(\tau^4)\right)d\tau\\&=\frac{\pi^2a_m}{T^2}\cdot\frac{t^3}{3}+\mathcal{O}(t^5)\\&=\frac{\pi^2a_m}{3T^2}t^3+\mathcal{O}(t^5)\end{aligned}$$

则在$t\ll T$ 时，速度表达式为：

$$v(t)\approx\frac{\pi^2a_m}{3T^2}t^3$$

事实上，从物理意义的角度分析，在 $t=0$ 时，$a(0)=\frac{a_m}{2}(1-\cos 0)=0$，即电梯从静止开始平滑启动，无冲击. 加速度在初始时刻的变化率不为零，其主导行为为 $a(t)\propto t^2$（因为 $1-\cos x\sim x^2/2$）. 由于 $v(t)=\int_0^t a(\tau)\,d\tau$，若 $a(\tau)\sim\tau^2$，则 $v(t)\sim t^3$. 因此，速度在启动初期必然与 t^3 成正比，比例系数由 a_m 和 T 决定. 通过上述两种数学方法可严格确定该系数为 $\dfrac{\pi^2a_m}{3T^2}$.

(c) 求电梯运行一趟距离为D所需要的时间.

运行一趟的距离 D 等于速度对时间的积分：

$$D=\int_0^{2T}v(t)\,dt$$

由对称性：前半段 $[0,T]$ 加速，后半段 $[T,2T]$ 减速，且加速度对称，故速度曲线关于 $t=T$ 对称.

因此：

$$D=2\int_0^{T}v(t)\,dt$$

而：

$$v(t) = \int_0^t a(\tau)\, d\tau = \frac{a_m}{2}\left(t - \frac{T}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right)$$

所以：

$$\int_0^T v(t)\, dt = \int_0^T \frac{a_m}{2}\left(t - \frac{T}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right) dt = \frac{a_m}{2}\left[\int_0^T t\, dt - \frac{T}{2\pi}\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt\right]$$

计算：

$$\int_0^T t\, dt = \frac{1}{2}T^2$$

$$\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt = \left[-\frac{T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right]_0^T = -\frac{T}{2\pi}(\cos(2\pi) - \cos(0)) = -\frac{T}{2\pi}(1-1) = 0$$

因此：

$$\int_0^T v(t)\, dt = \frac{a_m}{2}\cdot\frac{1}{2}T^2 = \frac{a_m T^2}{4}$$

于是：

$$D = 2\cdot\frac{a_m T^2}{4} = \frac{a_m T^2}{2}$$

解出 T：

$$T^2 = \frac{2D}{a_m} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2D}{a_m}}$$

但注意：总时间为 $2T$，所以：

$$t_{\text{total}} = 2T = 2\sqrt{\frac{2D}{a_m}} = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{D}{a_m}}$$

7 如图1所示，一个运动员站在一倾角为ϕ的山坡顶上往坡面扔石头，为使得石头扔出最远的距离，应该从水平面以多大的角度向上扔出石头？

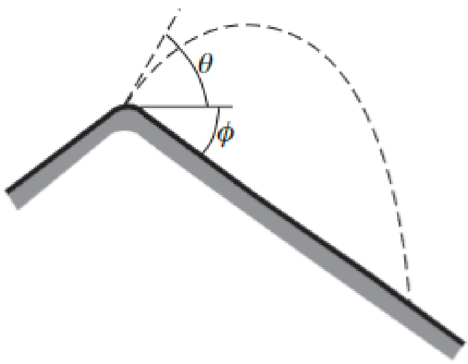

图 1: 图1

设起点为原点 O，水平向右为 x 轴，竖直向上为 y 轴. 山坡向下倾斜，其表面满足$y = -x\tan\phi$.
石块的抛体运动方程为：

$$\begin{cases} x(t) = v_0\cos\theta\cdot t, \\ y(t) = v_0\sin\theta\cdot t - \frac{1}{2}gt^2. \end{cases}$$

落地时满足轨迹与坡面相交，即：

$$v_0\sin\theta\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = -(v_0\cos\theta\cdot t)\tan\phi.$$

两边除以 $t \neq 0$ 得：

$$v_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt = -v_0 \cos\theta \tan\phi,$$

解得飞行时间$t = \frac{2v_0}{g}(\sin\theta + \cos\theta\tan\phi)$.

代入 $x(t)$ 得：

$$x = v_0 \cos\theta \cdot t = \frac{2v_0^2}{g}\cos\theta\left(\sin\theta + \cos\theta\tan\phi\right).$$

整理为：

$$x(\theta) = \frac{2v_0^2}{g}\left(\cos\theta\sin\theta + \cos^2\theta\tan\phi\right).$$

令$f(\theta) = \cos\theta\sin\theta + \cos^2\theta\tan\phi$,对 θ 求导：

$$f'(\theta) = \cos 2\theta - \sin 2\theta \tan\phi.$$

令 $f'(\theta) = 0$，得：

$$\cos 2\theta = \sin 2\theta \tan\phi \quad \Rightarrow \quad \tan 2\theta = \cot\phi.$$

因此：

$$2\theta = \frac{\pi}{2} - \phi \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}.$$

为使石块沿坡面飞行距离最远，应以与水平方向夹角为$\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$（即 $\theta = 45^\circ - \dfrac{\phi}{2}$）抛出.

当 $\phi = 0$（平地），$\theta = 45^\circ$，符合经典结论. 坡度 ϕ 越大，最优抛射角越小，应“低抛”以获得最大坡面射程.

8 以椭圆一个焦点F为原点，沿半长轴方向设置极轴，椭圆的极坐标方程是$r = r_0/(1 + e\cos\theta)$. 设所给椭圆的半长轴为$A$，半短轴为$B$，且$F$位于椭圆中心$O$的右侧，如图2所示，

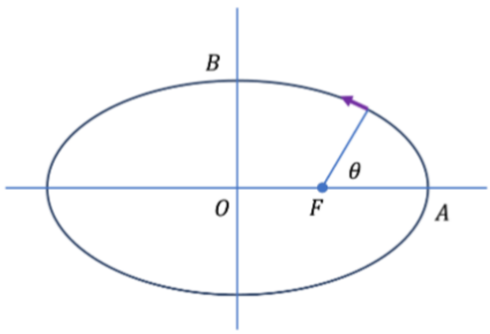

图 2: 图2

(a) 确定参量r_0，e与A，B的关系；

椭圆的基本几何关系：

$$c = \sqrt{A^2 - B^2}, \quad e = \frac{c}{A} = \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A}$$

在极坐标中，当 $\theta = 0$ 时，对应最近点（右顶点）：

$$r_{\min} = A - c = \frac{r_0}{1+e}$$

当 $\theta = \pi$ 时，对应最远点（左顶点）：

$$r_{\max} = A + c = \frac{r_0}{1-e}$$

联立解得：

$$A = \frac{r_0}{1-e^2} \quad \Rightarrow \quad r_0 = A(1-e^2)$$

由于 $e^2 = \dfrac{A^2 - B^2}{A^2}$，所以：

$$1 - e^2 = \frac{B^2}{A^2} \quad \Rightarrow \quad r_0 = A \cdot \frac{B^2}{A^2} = \frac{B^2}{A}$$

故，答案为：

$$e = \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A}$$
$$r_0 = \frac{B^2}{A}$$

(b) 若质点以$\theta = \omega t$方式沿椭圆运动，试导出v_θ，a_θ与质点角位置θ的关系.

已知 $\theta = \omega t$，故 $\dot{\theta} = \omega$，$\ddot{\theta} = 0$.

极坐标下速度与加速度的横向分量为：

$$v_\theta = r\dot{\theta}, \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 2\dot{r}\omega$$

椭圆方程$r(\theta) = \frac{r_0}{1+e\cos\theta}$.

则切向速度有：

$$v_\theta(\theta) = r\omega = \frac{\omega r_0}{1 + e\cos\theta} = \frac{\omega B^2}{A(1 + e\cos\theta)}$$

对于切向加速度，先求 $\dot{r}$：

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r_0 e\sin\theta}{(1 + e\cos\theta)^2} \Rightarrow \dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \omega = \omega \cdot \frac{r_0 e\sin\theta}{(1 + e\cos\theta)^2}$$

因此：

$$a_\theta(\theta) = 2\omega\dot{r} = 2\omega^2 \cdot \frac{r_0 e\sin\theta}{(1 + e\cos\theta)^2} = \frac{2\omega^2 B^2 e\sin\theta}{A(1 + e\cos\theta)^2}$$

则，最终答案为：

$$v_\theta(\theta) = \frac{\omega B^2}{A(1 + e\cos\theta)}$$
$$a_\theta(\theta) = \frac{2\omega^2 B^2 e\sin\theta}{A(1 + e\cos\theta)^2}$$

9 极坐标系下的对数螺旋线可表述为$r = r_0 e^{\alpha\theta}$，试用运动学方法导出曲率半径ρ.

在平面曲线运动中，质点沿轨迹运动时，其加速度可分解为：

- 切向加速度：$a_t = \frac{dv}{dt}$
- 法向加速度：$a_n = \frac{v^2}{\rho}$

其中 ρ 是曲率半径，正是我们要找的.

因此，如果我们能写出质点在该曲线上运动时的速度和加速度，并从中分离出法向加速度，就可以通过公式$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{v^2}{a_n}$求出曲率半径.

设质点在极坐标中运动，位置为 (r, θ)，则可求得速度和加速度表达式.

速度分量：

$$v_r = \dot{r}$$
$$v_\theta = r\dot{\theta}$$
$$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$$

加速度分量：

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$
$$a^2 = a_r^2 + a_\theta^2$$

但更关键的是，法向加速度是垂直于速度方向的，其大小为：

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$$

也可以直接从运动学关系得出：

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

所以关键是计算 v^2 和 a_n.

我们令：

$$r(\theta) = r_0 e^{a\theta}$$

假设质点以某种方式运动，比如我们让 $\theta = \omega t$，即匀角速运动，这样便于计算.但由于我们要求的是**几何性质**（曲率半径），它应与参数化无关，因此我们可以任意选择参数化方式.为了简化，不妨令 $\theta = t$，即时间 t 等于角坐标 θ.

于是：

$$\theta = t \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = 1, \quad \ddot{\theta} = 0$$

那么：

$$r = r_0 e^{at} \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = a r_0 e^{at} = ar \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = a\dot{r} = a^2 r$$

因此，代入速度和加速度分量，得：

$$\begin{aligned}
v_r &= \dot{r} = ar \\
v_\theta &= r\dot{\theta} = r \cdot 1 = r \\
v^2 &= v_r^2 + v_\theta^2 = (ar)^2 + r^2 = r^2(a^2+1) \\
a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = a^2 r - r \cdot 1 = r(a^2-1) \\
a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 + 2(ar)(1) = 2ar
\end{aligned}$$

总加速度大小平方为：

$$a^2 = a_r^2 + a_\theta^2 = [r(a^2-1)]^2 + (2ar)^2 = r^2[(a^2-1)^2 + 4a^2]$$

展开：

$$(a^2-1)^2 + 4a^2 = a^4 - 2a^2 + 1 + 4a^2 = a^4 + 2a^2 + 1 = (a^2+1)^2$$

所以：

$$a^2 = r^2(a^2+1)^2 \quad \Rightarrow \quad a = r(a^2+1)$$

我们知道：

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

先求切向加速度 a_t.它是速度大小的时间导数：

$$v = \sqrt{v^2} = r\sqrt{a^2+1}$$

因为 $r = r_0 e^{at}$，所以 $v = r_0 e^{at}\sqrt{a^2+1}$.

那么：

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\sqrt{a^2+1}\right) = \dot{r}\sqrt{a^2+1} = ar\sqrt{a^2+1}$$

现在我们有：

- $v^2 = r^2(a^2+1)$
- $a_t = ar\sqrt{a^2+1}$

所以：

$$a_n^2 = a^2 - a_t^2 = [r^2(a^2+1)^2] - [a^2 r^2 (a^2+1)] = r^2(a^2+1)^2(1 - a^2/(a^2+1))$$

更简单地直接算：

$$a_n^2 = a^2 - a_t^2 = r^2(a^2+1)^2 - a^2 r^2 (a^2+1) = r^2(a^2+1)\left[(a^2+1) - a^2\right] = r^2(a^2+1)\cdot 1 = r^2(a^2+1)$$

所以：

$$a_n = r\sqrt{a^2+1}$$

由：

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{v^2}{a_n}$$

我们有：

- $v^2 = r^2(a^2+1)$
- $a_n = r\sqrt{a^2+1}$

所以：

$$\rho = \frac{r^2(a^2+1)}{r\sqrt{a^2+1}} = r\sqrt{a^2+1}$$

将 $r = r_0 e^{a\theta}$ 代入，得：

$$\rho = r_0 e^{a\theta}\sqrt{a^2+1}$$

或写作：

$$\rho = r\sqrt{a^2+1}$$

综上所述，使用运动学方法，通过分析质点在对数螺旋线 $r = r_0 e^{a\theta}$ 上的运动，计算其速度、加速度，分离出法向加速度，利用 $a_n = v^2/\rho$，得到曲率半径为：

$$\rho = r\sqrt{a^2+1}$$