Classical Mechanics - 经典力学

— 力学 A, 2025 Fall

Problem Set 1

注意事项:

- 请按照课堂进度完成相应的作业, 切不可积攒到最后!
- 按照课堂进度消化相应的知识点, 阅读 ppt 和教材相应的章节内容, 推导过程和例题务必亲自动手推导: 一定要动手! 一定要动手! 一定要动手!
- 解题一定要规范: 要有必要的逻辑分析过程、必要的交待、书写要严谨规范等.

速度不变　速率不变

1　简答题

1. $|\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}| = 0$ 与 $\frac{\mathrm{d}|\vec{v}|}{\mathrm{d}t} = 0$ 各代表什么样的运动? 两者有无区别? ✓
2. 当物体的加速度恒定不变时, 它的运动方向可否改变? 为什么? ✓ a与v方向无关
3. 分析下列说法的正确性: (1)作曲线运动的物体, 必有切向加速度; ✗ (2)作曲线运动的物体, 必有法向加速度; ✓ (3)具有加速度的物体, 其速率必随时间改. ✗
4. 篮球运动员跑步投篮时, 若瞄准篮投反而投不进, 为什么? 应如何投才能投准? 投前

2　教材习题

杨维纮力学, 1.1, 1.3, 1.25, 1.31, 1.33

3 补充习题

1. 设有矢量 $\vec{A} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$, ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 分别为 x, y, z 方向的单位矢量)

   $\vec{B} = \frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}$

   (a) 在 x−y 平面内找到一个单位向量 $\hat{\vec{B}}$, 使其垂直于向量 $\vec{A}$;

   (b) 找到一个单位向量 $\hat{\vec{C}}$, 使得 $\hat{\vec{C}} \perp \vec{A}, \hat{\vec{C}} \perp \hat{\vec{B}}$;

   $\vec{C} = \frac{6\sqrt{5}}{25}\vec{i} + \frac{8\sqrt{5}}{25}\vec{j} + \frac{\sqrt{5}}{2}\vec{k}$

   (c) 证明 $\vec{A}$ 垂直于 $\hat{\vec{B}}$ 和 $\hat{\vec{C}}$ 所在的平面.

   $\vec{A} \perp \vec{B}$. $\vec{A} \perp \vec{C}$

2. 设 $\vec{a} = (1, -2, 1), \vec{b} = (1, -1, 3), \vec{c} = (2, 5, -3)$, 求:$\vec{a} \times \vec{b}, (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}, \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

3. 求下列函数的导函数:

   $\dot{y} = 24x^2 + 1$

   $\dot{y} = \frac{5x^2 + 12x + 54}{(5x+6)^2}$.

   (a) $y = 8x^3 + x + 7$

   (b) $y = (x + 1)(x - 1) \tan x$

   $\dot{y} = 2x\tan x + \frac{x^2-1}{\cos^2 x}$

   (c) $y = \frac{9x+x^2}{5x+6}$

   (d) $y = x \cos x + \frac{\sin x}{x}$

   $\dot{y} = \cos x - x\sin x + \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

4. 求不定积分:

   (a) $\int (3x^3 + \sin x + \frac{5}{x})\mathrm{d}x$ $\quad \frac{3}{4}x^4 - \cos x + 5\ln x + C$.

   (b) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x (a > 0)$ $\quad \frac{1}{2}\pi a^2$.

5. 验证函数 $y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ (其中 C_1, C_2 是任意常数)是微分方程 $y'' + \omega^2 y = 0$ 的解.

   $\ddot{y} = -C_1 w^2 \cos wt - C_2 w^2 \sin wt = -w^2 (C_1 \cos wt + C_2 \sin wt) = -w^2 y$.

6. 为了让电梯在上升、下降过程中平稳运行, 将按照如下的加速度从静止启动,

$$a(t) = (a_m/2)(1 - \cos(2\pi t/T)), 0 \le t \le T$$
$$a(t) = -(a_m/2)(1 - \cos(2\pi t/T)), T \le t \le 2T$$

   其中 a_m 是最大的加速度, $2T$ 是运行一趟(静止-运行-静止)所需的总时间.

   (a) 电梯运行的最大速度是多少? $V_m = \int_0^T a(t)dt = \frac{1}{2}a_m T$.

   (b) 在电梯启动的很短时间内 $t \ll T$, 写出其速度的近似表达式;

   ?. (c) 求电梯运行一趟距离为 D 所需要的时间. $2T$.

7. 如图1所示, 一个运动员站在一倾角为 ϕ 的山坡顶上往坡面扔石头, 为使得石头扔出最远的距离, 应该从水平面以多大的角度向上扔出石头?

6(b). $V = \int_0^t a(t)dt = \frac{1}{2}a_m t - \frac{a_m T}{4\pi}\sin\frac{2\pi t}{T}$

$= \frac{1}{2}a_m t - \frac{a_m T}{4\pi}\left[\frac{2\pi t}{T} - \frac{1}{6}\left(\frac{2\pi t}{T}\right)^3\right]$

$= \frac{\pi^3 a_m t^3}{3T^2}$

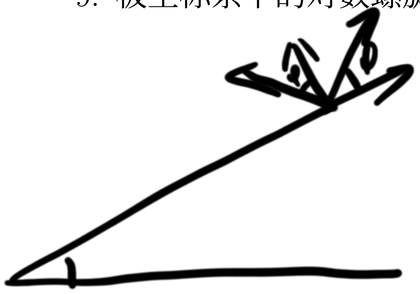
8. 以椭圆一个焦点 F 为原点，沿半长轴方向设置极轴，椭圆的极坐标方程是 $r = r_0/(1+e\cos\theta)$. 设所给椭圆的半长轴为 A, 半短轴为 B, 且 F 位于椭圆中心 O 的右侧, 如图所示2,

   (a) 确定参量 r_0, e 与 A B 的关系;

   (b) 若质点以 $\theta = \omega t$ 方式沿椭圆运动, 试导出 v_θ, a_θ 与质点角位置 θ 的关系.

$\rho = r\sqrt{1+\alpha^2}$

9. 极坐标系下的对数螺旋线可表述为 $r = r_0 e^{\alpha\theta}$, 试用运动学方法导出曲率半径 ρ.



$\dot r\vec e_r + r\dot\theta\vec e_\theta$

$= r_0\alpha e^{\alpha\theta}\vec e_r + r_0\dot\theta e^{\alpha\theta}\vec e_\theta$

$\tan\varphi = \dfrac{\dot\theta}{\alpha}$ $\cos\varphi = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\dot\theta^2}}$

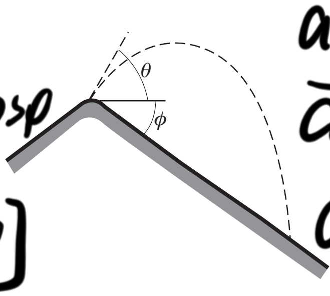
$\sin\varphi = \dfrac{\dot\theta}{\sqrt{\alpha^2+\dot\theta^2}}$

$\vec a = (\ddot r - r\dot\theta^2)\vec e_r + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)\vec e_\theta$

$a_r = r_0\alpha^2 e^{\alpha\theta} - r_0\dot\theta^2 e^{\alpha\theta}$

$\vec a_\theta = 2r_0\alpha\dot\theta e^{\alpha\theta} + r_0\ddot\theta e^{\alpha\theta}$

$a = r_0 e^{\alpha\theta}\left[(2\alpha\dot\theta + \ddot\theta)\cos\varphi - (\alpha^2-\dot\theta^2)\sin\varphi\right]$



$a_\theta\cos\varphi - a_r\sin\varphi$

图 1

$v = r_0 e^{\alpha\theta}\sqrt{\alpha^2+\dot\theta^2}$

$= \dfrac{r_0 e^{\alpha\theta}}{\sqrt{\alpha^2+\dot\theta^2}}\left[2\alpha^2\dot\theta + \alpha\ddot\theta - \alpha^2\dot\theta + \dot\theta^3\right]$

$\dfrac{r_0 e^{\alpha\theta}(\alpha^2+\dot\theta^2)^{\frac{3}{2}}}{\alpha^2\dot\theta + \cancel{\alpha\ddot\theta} + \dot\theta^3}$

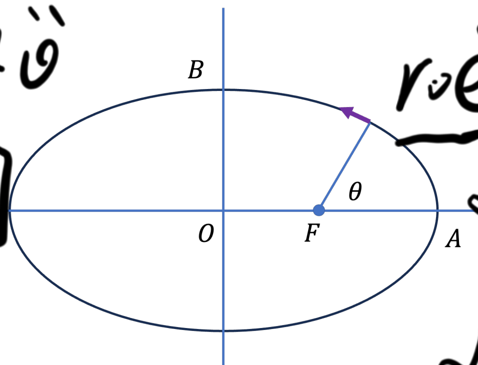


图 2

$\alpha\theta = \ln r - \ln r_0$

$\alpha\dot\theta = \dfrac{\dot r}{r}$

$\alpha\ddot\theta = \dfrac{\ddot r\cdot r - \dot r^2}{r^2} = -\alpha^2$

$\dot\theta = 1$ $\ddot\theta = 0$

$\dfrac{r_0 e^{\alpha\theta}(\alpha^2+1)^{\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}}}{\alpha^2+1}$

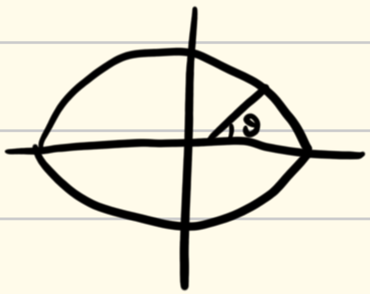
8. (a). $r = \frac{r_0}{1+e\cos\theta}$

$$\begin{cases} A+C = \frac{r_0}{1-e} \\ A-C = \frac{r_0}{1+e} \end{cases}$$

$A = \frac{r_0}{1-e^2}$ $C = \frac{er_0}{1-e^2}$

$B = \frac{r_0}{\sqrt{1-e^2}}$

(b)



$V_0 = r\dot{\theta} = \frac{r_0 w}{1+e\cos\theta}$

$\because a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$

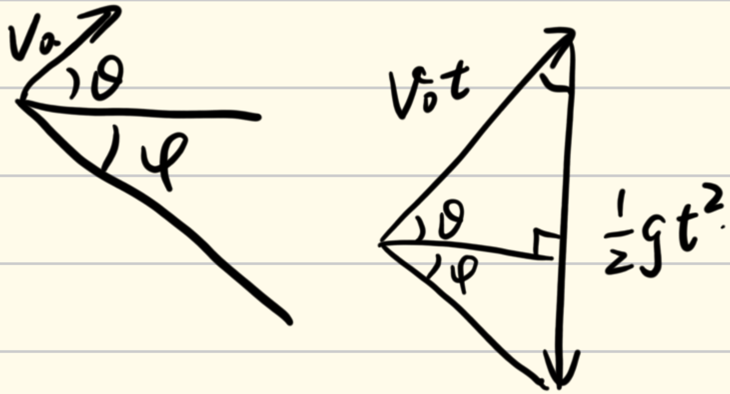
$\ddot{\theta} = 0$

$\therefore a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta}$

$\dot{r} = \frac{er_0 w\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$

$\therefore a_\theta = \frac{2er_0 w^2\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$

7.



解：$\dfrac{\frac{1}{2}gt^2}{\sin(\theta+\varphi)} = \dfrac{V_0 t}{\cos\varphi}$

$$t = \frac{2V_0\sin(\theta+\varphi)}{g\cos\varphi}$$

$$S = V_0 t\cos\varphi = \frac{2V_0^2\sin(\theta+\varphi)}{g}$$

$\therefore$ $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ 时 $S_{max} = \dfrac{2V_0^2}{g}$

2. $\vec{a} = (1, -2, 1)$ $\quad \vec{b} = (1, -1, 3)$ $\quad \vec{c} = (2, 5, -3)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-7, -4, -3)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -14 - 20 + 9 = -25$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (2, 5, -3) \times (-7, -4, -3)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ 2 & 5 & -3 \\ -7 & -4 & -3 \end{vmatrix} = (-3, -15, -43)$$