# 力学 A（PHYS1001A.04）：狭义相对论部分习题课

Course NOT easy: Time is Relative, but your Grade is Absolute.

Yu Shu & Chihao Shi

School of Physics, USTC

Jan.7, 2026

1 内容回顾与补充拓展

- 物理直觉的重塑
- 时空效应与本征量判定
- 洛伦兹变换与运动学
- 相对论动力学基础
- 碰撞、衰变与守恒律
- 高阶拓展：四维时空
- 典型模型与佯谬解析
- 尺缩钟慢解题核心算法

2 作业习题讲解

3 Q&A

## 1. 牛顿-伽利略变换

经典速度合成遵循矢量加法：

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B \implies c' = c \pm v \tag{1}$$

**推论**：若光是波，波速 $c$ 必依赖于“以太”和观测者的运动。

## 2. 麦克斯韦方程组的挑战

麦克斯韦方程组导出的光速：

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \times 10^8 \mathrm{m/s} \tag{2}$$

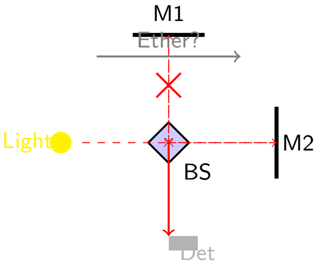
**矛盾**：此公式中**无参考系项**！

问题：$c$ 到底是相对于谁的速度？

## 3. 历史的判决：M-M 实验

迈克尔逊-莫雷实验试图探测地球相对于“以太”的运动（以太风）。

- **预期**：干涉条纹随旋转移动。
- **结果**：零结果 **(Null Result)**。




**结论**：不存在以太风，光速各向同性。

# 狭义相对论的逻辑基石：两大假设

## 1. 相对性原理 (Principle of Relativity)

**内容**：所有物理定律（不仅是力学，包含电磁学）在所有惯性系中形式相同。

- **推论**：没有优越的“绝对静止系”（以太不存在）。
- **意义**：你无法通过任何内部实验（包括测光速）判断自己是静止还是匀速直线运动。

## 2. 光速不变原理 (Constancy of $c$)

**内容**：真空中的光速 $c$ 对任何惯性系观测者都是恒定值。

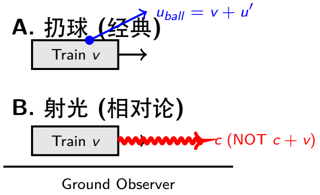
$$c \approx 3 \times 10^8 \mathrm{m/s} \tag{3}$$

**核心**：与光源的运动状态**无关**，与观测者的运动状态**无关**。

## Survival Tip：代价是什么？

如果速度 $c = \Delta x/\Delta t$ 恒定，而不同参考系看到的同一过程 $\Delta x$ 可能不同，那么 **$\Delta t$ (时间) 必须随之改变 **!

$\Longrightarrow$ **绝对时空观崩塌，时空耦合。**




光速 $c$ 是宇宙速度的“硬上限”与“不变量”。

# 同时的相对性

## 思想实验：爱因斯坦的火车

设一列火车以速度 $v$ 向右运动，光源 $S'$ 位于车厢正中央。

- **车上观测者 ($S'$)**：光源在中央，光速恒定 $\Longrightarrow$ 光**同时**到达车头 (A) 和车尾 (B)。

$$t'_A = t'_B$$

- **地面观测者 ($S$)**：车尾 (B) 迎着光运动，车头 (A) 背着光运动。

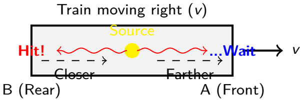
$$\text{路程关系：} d_B < d_A$$

$$\text{结论：} t_B < t_A \text{ (光先到车尾)}$$

## 结论：同时是相对的

**“在 $S'$ 系同时发生的异地事件，在 $S$ 系看不再同时。”**

- 这不是视觉错觉，而是真实的物理测量结果。
- 只有当两个事件在**同一地点**发生时，其同时性才是绝对的。




**地面视角**：车尾主动“撞”向光，车头在“躲”光。

# 同时的相对性

## 1. 坐标差变换公式

考虑在 $S$ 系中**同时**发生的两个事件 ($\Delta t = 0$)，相距 $\Delta x$。代入 Lorentz 变换：

$$\Delta t' = \gamma(\underbrace{\Delta t}_{0} - \frac{v}{c^2}\Delta x) = -\frac{\gamma v}{c^2}\Delta x \qquad (4)$$

## 2. 物理意义解析

**符号法则**：

- 设 $v > 0$ (向右运动)。
- 若 $\Delta x > 0$ (事件 2 在事件 1 的前方)。
- 则 $\Delta t' < 0$ (事件 2 的时间坐标小于事件 1)。

**结论**：空间上靠前的事件，时间上反而更早发生。

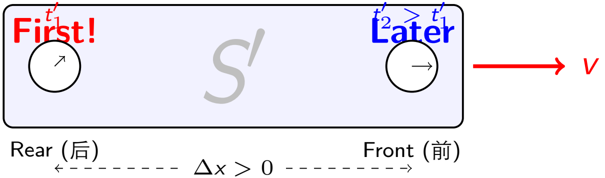
## Survival Tip: “后方先发”判据

在运动参考系中观测，沿运动方向：

- **后方 (Rear)** 的事件 **先发生 (Earlier)**。
- **前方 (Front)** 的事件 **后发生 (Later)**。

口诀：船尾先闪，船头后亮。

Moving Frame ($v \to$)



1 内容回顾与补充拓展
- 物理直觉的重塑
- 时空效应与本征量判定
- 洛伦兹变换与运动学
- 相对论动力学基础
- 碰撞、衰变与守恒律
- 高阶拓展：四维时空
- 典型模型与佯谬解析
- 尺缩钟慢解题核心算法

2 作业习题讲解

3 Q&A

# 时空效应 I：时间延缓

## 1. 光钟推导

考虑高度为 $h$ 的垂直光钟：

- **静止系 (Rest)**：光垂直往复。

$$\Delta t' = 2h/c \equiv \Delta\tau \text{ (固有时)}$$

- **运动系 (Lab)**：光路呈锯齿状，路程变长。

$$\Delta t = 2L/c, \quad L = \sqrt{h^2 + (v\Delta t/2)^2}$$

**勾股定理的胜利**：
由直角三角形关系 $(c\Delta t/2)^2 = h^2 + (v\Delta t/2)^2$：

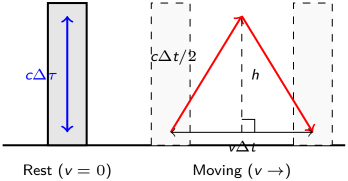
$$\Delta t = \frac{2h/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\Delta\tau \qquad (5)$$

## 结论：动钟变慢

由于直角三角形的斜边总是大于直角边：

$$L > h \implies c\Delta t > c\Delta\tau$$

**物理意义**：运动参考系中的 1 秒，对应实验室参考系的 $\gamma$ 秒 $(\gamma \geq 1)$。



# 效应判别法 I：时间

## 1. 本征时间 (Proper Time) $\Delta\tau$

**定义**：在**同一地点**发生的两个事件的时间间隔。

- **判据**：只需要**一只钟**就能测出的时间。
- 例子：飞船上的人看自己的手表；粒子自身的衰变寿命。

## 2. 测量时间 (Dilated Time) $\Delta t$

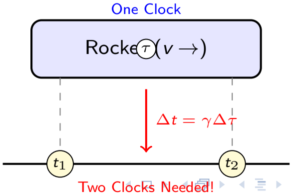
**定义**：在**不同地点**发生的两个事件的时间间隔。

- **判据**：需要**两只**异地同步的钟才能测出（一只在起点，一只在终点）。
- 例子：地面人看飞船飞过头顶和地平线。

## Survival Algorithm：数钟法

拿到题目，不要管谁动谁静，直接数钟：

1. **谁在用一只钟测？** $\rightarrow$ 他测的是 $\Delta\tau$（数值小）。
2. **谁在用两只钟测？** $\rightarrow$ 他测的是 $\Delta t$（数值大）。
3. **公式**：$\Delta t = \gamma\Delta\tau$。



# 时空效应 II：长度收缩

## 1. 物理推导 (利用钟慢效应)

如何测量一根飞过的尺子长度 $L$?

- **实验室系 (Lab)**：设置一个探测器，记录尺子通过的时间 $\Delta t$。

$$L = v\Delta t$$

- **尺子系 (Rest)**：尺子看探测器飞过，记录时间 $\Delta\tau$ (探测器是单钟)。

$$L_0 = v\Delta t'$$

- **关联**：由于 $\Delta t'$ 是两地时间 (Lab 系的 $\Delta t$)，$\Delta t$ 是本征时间 (尺子系的 $\Delta\tau$)... Wait! 反了！

**正确逻辑**：探测器是“单钟”($\Delta\tau$)，尺子上的两端是“双钟”($\Delta t_{dilated}$)。

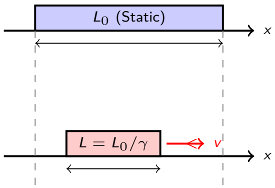
$$L = v\Delta\tau, \quad L_0 = v(\gamma\Delta\tau) \implies L = L_0/\gamma$$

## 结论：动尺变短

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2} \le L_0 \tag{6}$$

**关键限制**：收缩仅发生在**运动方向**上！

- 纵向：$L_{\parallel} = L_0/\gamma$
- 横向：$L_{\perp} = L_0$ (不变)




如果原本是球体，运动起来会变成“扁平的饼”。

# 效应判别法 II：长度

## 1. 原长 (Proper Length) $l_0$

**定义**：物体在**对其静止**的参考系中的长度。

- **判据**：测量者与物体无相对运动。
- 性质：几何真值，数值最大。

## 2. 测量长度 $l$

**定义**：物体在**对其运动**的参考系中的长度。

- **判据**：物体飞过测量者。
- **方法**：必须**同时**测定两端坐标。

## Survival Algorithm：维度分离法

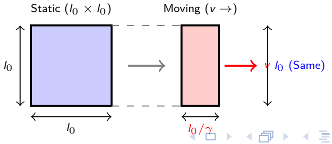
建立坐标系，将长度分解处理：

1. **平行分量 ($x \parallel v$)**：

$$l_{\parallel} = l_{0,\parallel}/\gamma \quad (\text{变短})$$

2. **垂直分量 ($y \perp v$)**：

$$l_{\perp} = l_{0,\perp} \quad (\text{不变!})$$



# 坐标变换的“算法化”流程

设 $S'$ 相对 $S$ 以速度 $v$ 沿 $+x$ 轴运动。

- **去撇 (To $S'$)**：已知地面，求飞船。

$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$t' = \gamma(t - vx/c^2)$$

- **回正 (To $S$)**：已知飞船，求地面。

$$x = \gamma(x' + vt')$$
$$t = \gamma(t' + vx'/c^2)$$

注：$y, z$ 坐标不变。

## 致命陷阱：$v$ 的正负号

如果飞船向**左**（$-x$ 方向）飞，公式里的 $v$ 必须代入**负值**！

- 此时“去撇”变加号 $(x + vt)$，“回正”变减号。

## Decision Matrix：坐标变换四步走

1. **建系 (Define)**：
   - $S$ 系：通常设为地面/实验室。
   - $S'$ 系：通常设为飞船/滑块。
   - 明确 $v$ 的方向。
2. **对点 (Map)**：**绝对不要**直接带入长度 $L$！
   必须将物理事件转化为坐标点：
   - 事件 1：$(x_1, t_1)$
   - 事件 2：$(x_2, t_2)$
3. **转换 (Transform)**：
   - 求 $x', t'$ → 用去撇公式。
   - 求 $x, t$ → 用回正公式。
   - 求间隔 → 直接用 $\Delta$ 形式。
4. **计算 (Calculate)**：小心 $\gamma$ 因子的计算，保留 $c$ 直到最后约掉。

# 速度合成定理

设物体在 $S'$ 系速度为 $\vec{u}'(u'_x, u'_y)$，求在 $S$ 系速度 $\vec{u}$。

- **纵向分量 ($x \parallel v$)**:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \tag{7}$$

- **横向分量 ($y \perp v$)**:

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + \frac{vu'_x}{c^2})} \tag{8}$$

注意：$u_y$ 的分母不仅有修正项，还有 $\gamma$ 因子！

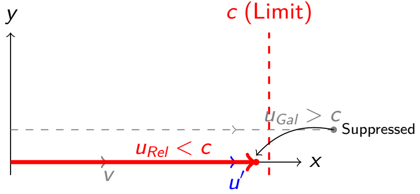
## 逆变换技巧

已知 $u$ 求 $u'$？ $\Longrightarrow$ 只需将 $v$ 换成 $-v$。

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

## Survival Tip: 分式记忆法

- **分子**：经典伽利略变换 $(u'_x + v)$。
- **分母**：相对论修正因子 $(1 + \beta_v \beta_{u'})$。




**极限检查**：若 $u' = c$，则无论 $v$ 多大，$\frac{c+v}{1+vc/c^2} = \frac{c(c+v)}{c+v} = c$。

# 速度变换进阶：角度与光行差

## 1. 角度变换公式

设粒子在 $S'$ 系中速度方向与 $x'$ 轴夹角为 $\theta'$。在 $S$ 系中，利用 $u_y/u_x$：

$$\tan\theta = \frac{u_y}{u_x} = \frac{u'_y\sqrt{1-\beta^2}}{u'_x + v} = \frac{\sin\theta'\sqrt{1-\beta^2}}{\cos\theta' + \beta_{rel}} \tag{9}$$

注：此处 $\beta_{rel} = v/u'$。若为光子，则 $\beta_{rel} = v/c = \beta$。

## 2. 光行差公式 (对于光子 $u' = c$)

更常用的余弦形式：

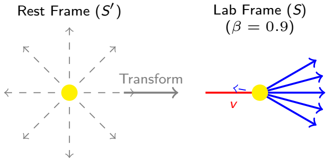
$$\cos\theta = \frac{\cos\theta' + \beta}{1 + \beta\cos\theta'} \tag{10}$$

**极限**：当 $\beta \to 1$ 时，无论 $\theta'$ 是多少（只要不是 $\pi$），$\cos\theta \to 1$，即 $\theta \to 0$。

## Survival Intuition：雨中奔跑

为什么星光会向前聚集？

- **经典类比**：雨垂直下落，你在雨中奔跑，感觉雨是从“前上方”打来的。
- **相对论修正**：不仅方向偏转，光强也会因为多普勒效应增强（变蓝）。




**探照灯效应 (Headlight Effect)**：高速飞船看到的视场会急剧收缩成前方的明亮光锥。

# 相对论多普勒效应

**1. 纵向效应 (Longitudinal)**：当光源与观测者沿连线运动时（$\vec{v} \parallel \vec{r}$）：

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad \text{(接近，蓝移)} \tag{11}$$

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad \text{(远离，红移)} \tag{12}$$

物理来源：经典多普勒 + 时间延缓。

**2. 横向效应 (Transverse)**：当运动方向与视线垂直时（$\theta = 90^\circ$，最近点）：

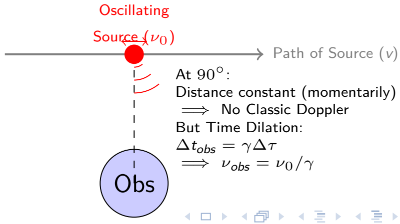
$$\nu = \nu_0 \sqrt{1-\beta^2} = \frac{\nu_0}{\gamma} \quad \text{(红移)} \tag{13}$$

**纯相对论效应**：经典理论预测此时无频移，但相对论中因为“动钟变慢”，光源频率显得低了。

## Survival Comparison：介质去哪了？

经典声波多普勒公式繁琐是因为有“风”（介质）。相对论光波多普勒公式简洁是因为 ** 没有以太 **。

- 只与相对速度 $v$ 有关。
- 完美对称：谁看谁都一样。



# 动力学重构 I：质量与动量

## 1. 质量的相对性

为了保持动量守恒定律在所有惯性系中形式不变，质量必须是速度的函数：

$$m(v) = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{14}$$

- $m_0$：**静质量** (Rest Mass)，内禀属性。
- $m$：**动质量** (Relativistic Mass)，随 $v$ 增大。

## 2. 动量的新定义

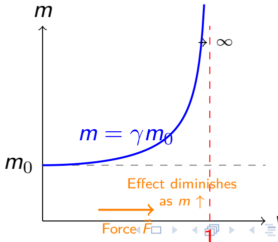
$$\vec{p} = m\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v} \tag{15}$$

**推论**：当 $v \to c$ 时，$\gamma \to \infty$，动量 $p \to \infty$。

## Survival Intuition：为什么超不过 $c$?

**经典直觉**：只要一直推，速度就能一直加。**相对论修正**：推得越快，物体变得越“重”（惯性越大）。

- 当 $v \to c$，惯性 $m \to \infty$。
- 想要继续加速，需要无穷大的力。



# 动力学重构 II：动能

## 1. 动能的严格定义

动能 = 外力对静止物体做的功 = 总能 - 静能。

$$E_k = \int_0^x F dx = E - E_0 = (\gamma - 1) m_0 c^2 \tag{16}$$

**推论**：

- 当 $v = 0, \gamma = 1 \implies E_k = 0$。
- 当 $v \to c, \gamma \to \infty \implies E_k \to \infty$。

## 2. 低速极限 (Low Speed Limit)

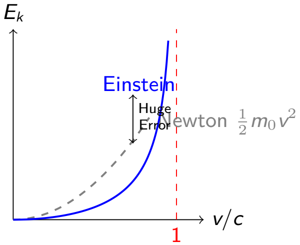
当 $v \ll c$ ($\beta \ll 1$) 时，利用泰勒展开 $\gamma \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2$：

$$E_k \approx (1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1) m_0 c^2$$
$$= \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad (\text{牛顿力学})$$

## Survival Warning: 绝对禁区

**严禁** 使用 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ 或 $E_k = \frac{1}{2}m(v)v^2$！

- 经典公式只在 $v \lesssim 0.1c$ 时近似成立。
- 在高能物理中，动能通常远大于静能 ($E_k \gg m_0 c^2$)，此时 $E \approx E_k \approx pc$。




随着速度接近 $c$，注入的能量不再增加速度，而是增加质量（惯性）。

# 几何化思维：能量-动量三角形

## 1. 勾股定理关系

由 $E = \gamma m_0 c^2$ 和 $p = \gamma m_0 v$，消去 $v$ 可得：

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2 \tag{17}$$

这构成了一个直角三角形：

- **斜边**：总能量 $E$
- **直角边**：动量项 $pc$，静能 $m_0 c^2$

## 2. 角度的物理意义

在这个三角形中，角度直接对应速度：

$$\sin\theta = \frac{pc}{E} = \frac{\gamma m_0 v \cdot c}{\gamma m_0 c^2} = \frac{v}{c} = \beta \tag{18}$$

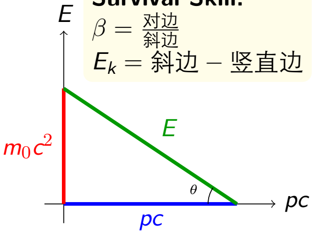
$$\cos\theta = \frac{m_0 c^2}{E} = \frac{1}{\gamma} \tag{19}$$

推论：能量越高，$\theta \to 90^\circ$，速度越接近 $c$。

**Survival Skill:**

$\beta = \frac{\text{对边}}{\text{斜边}}$

$E_k = \text{斜边} - \text{竖直边}$




### 极高能极限 (Ultra-relativistic)

当 $E \gg m_0 c^2$ 时 (如 LHC 质子)：

- 直角边 $m_0 c^2$ 忽略不计。
- 三角形退化为直线 $\Longrightarrow$ $E \approx pc$。
- $\beta \approx 1$ (速度 $v \approx c$)。

# 动力学重构 III：力与加速度

## 1. 牛顿第二定律的修正

在相对论中，力定义为**动量的变化率**，而非质量乘以加速度：

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m_0 \vec{v}) \tag{20}$$

展开后发现 $\vec{F}$ 与 $\vec{a}$ **不一定同向**！

## 2. 纵向与横向质量 (已弃用的概念)

- **纵向 ($F \parallel v$)**：加速极其困难。

$$F = \gamma^3 m_0 a \implies m_L = \gamma^3 m_0$$

- **横向 ($F \perp v$)**：转弯相对容易。

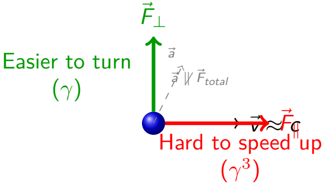
$$F = \gamma m_0 a \implies m_T = \gamma m_0$$

注：由于质量居然随方向变化，现代物理已弃用此说法，统称 $m_0$ 为质量。

## Survival Tip：为什么要用能量法？

因为力学方程太丑了！

- 在 $S$ 系算力，既有 $\gamma$ 又有 $\gamma^3$，积分极其痛苦。
- **最优解**：使用功能原理 $W = \Delta E_k$ 或动量守恒。




这就解释了为什么回旋加速器 (Cyclotron) 无法加速高能电子——因为 $m$ 变了，回旋周期 $T$ 不再恒定。

# 零静质量粒子：光子 (Photons)

## 1. 状态方程

光子 (Photon) 的定义特征是静质量为零：

$$m_0 \equiv 0$$

代入能量-动量关系 $E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$：

$$E = pc \implies p = \frac{E}{c} \tag{21}$$

**速度**：$v = \frac{pc^2}{E} = c$ (恒定光速)。

## 2. 与量子力学的接口

普朗克-爱因斯坦关系 (Planck-Einstein)：

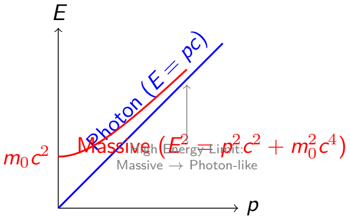
$$E = h\nu = \hbar\omega \tag{22}$$

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} \quad (|\vec{k}| = 2\pi/\lambda) \tag{23}$$

光子虽无质量，但有动量！这是光压的来源。

## Survival Warning：光子的禁区

- **禁区 1**：绝对不要对光子使用 $\gamma$ 或 $m_0\gamma$ 公式（因为 $\gamma \to \infty$）。
- **禁区 2**：光子没有“静止系”。你不能骑在光子上看世界（时间停止，距离为零）。




这就解释了为什么极高能电子（$E \gg m_ec^2$）的行为非常像光子。

1. 内容回顾与补充拓展
   - 物理直觉的重塑
   - 时空效应与本征量判定
   - 洛伦兹变换与运动学
   - 相对论动力学基础
   - 碰撞、衰变与守恒律
   - 高阶拓展：四维时空
   - 典型模型与佯谬解析
   - 尺缩钟慢解题核心算法
2. 作业习题讲解
3. Q&A

# 碰撞与衰变的神器：不变质量法

## 1. 单粒子不变量

我们在几何化思维中已经知道，对于任意粒子：

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4 = \text{Invariant}$$

无论你在哪个参考系算，$E$ 和 $p$ 会变，但“斜边平方减直角边平方”永远等于静能平方。

## 2. 多粒子系统不变量 (Mandelstam $s$)

对于孤立系统（如碰撞前后），定义总能量 $E_{tot}$ 和总动量 $\vec{p}_{tot}$。**不变质量** $M$ 定义为：

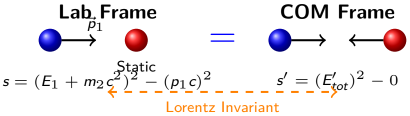
$$M^2c^4 = \left(\sum E_i\right)^2 - \left(\sum \vec{p}_i c\right)^2 \equiv s \qquad (24)$$

**核心性质**：$s_{\text{Lab}} = s_{\text{COM}}$
(实验室系的值 = 质心系的值)

## Survival Algorithm：为什么不用守恒律?

直接列能量/动量守恒方程组通常会引入速度 $v$ 和 $\gamma$，计算极其繁琐。**不变质量法的优势**：

- **绕过速度**：直接处理 $E$ 和 $p$。
- **系间跳跃**：利用 $s$ 不变，瞬间连接实验室系与质心系。




这是高能物理中计算“阈值能量”的唯一指定方法。

# 不变质量法 II：阈值能量计算范式

## 1. 阈值的物理定义

**什么是阈值?** 使核反应 $A+B\to C+D+\ldots$ 能够发生的最小入射能量。

- **动力学条件**：在质心系 **(COM)** 中，反应后的所有产物**相对静止**。
- **物理本质**：动能全部转化为静质量 (能损最大化)。

## 2. 标准解题算法

利用不变量 $s_{\text{Lab}}=s_{\text{COM}}$：

1. 写出实验室系总四维动量平方 $s$。
2. 写出质心系（阈值态）总四维动量平方 $s'$。
3. 令 $s=s'$，解出 $E$。


## Survival Example: $p+p\to p+p+\pi^0$

求入射质子 (静能 $m$) 的最小动能 $E_k$。

**Step 1: Lab 系 (始态)**

入射 $(E,p)$，靶 $(mc^2,0)$。

$$
\begin{aligned}
s &= (E+mc^2)^2-(pc)^2\\
&= E^2+2Emc^2+m^2c^4-p^2c^2\\
&= \underbrace{(E^2-p^2c^2)}_{m^2c^4}+2Emc^2+m^2c^4\\
&= 2mc^2(E+mc^2)
\end{aligned}
$$

**Step 2: COM 系 (末态)**

产物总静能 $M=2m+m_\pi$。所有粒子相对静止 $\implies$ 动量为 0。

$$s'=(Mc^2)^2-0=(2m+m_\pi)^2c^4$$

**Step 3: 求解**

令 $s=s'$，解出 $E$:

$$2mc^2(E+mc^2)=(2m+m_\pi)^2c^4$$

# 康普顿散射

## 1. 物理图像与守恒律

入射光子 $(\lambda, E)$ 撞击静止电子 $(m_e)$，散射后光子变长 $(\lambda', E')$，电子反冲。

- **能量守恒**:

$$h\nu + m_e c^2 = h\nu' + E_e$$

- **动量守恒** (矢量三角形):

$$\vec{p}_\gamma = \vec{p}_\gamma' + \vec{p}_e \implies \vec{p}_e = \vec{p}_\gamma - \vec{p}_\gamma'$$

## 2. 推导核心技巧 (消去 $\phi$)

为了消去电子角度，对动量式平方（余弦定理）:

$$p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos\theta$$

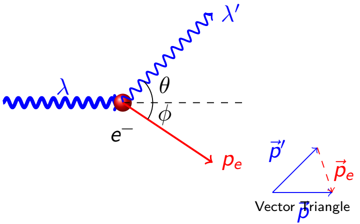
利用 $p_e^2 c^2 = E_e^2 - m_e^2 c^4$，代入能量关系化简可得公式。

## 3. 康普顿公式 (The Formula)

波长的偏移量 $\Delta\lambda$ 仅与散射角 $\theta$ 有关:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta) \tag{25}$$

**康普顿波长**: $\lambda_c = \frac{h}{m_e c} \approx 0.00243\text{nm}$




**极限**: $\theta = 180^\circ$ (背散射) 时，$\Delta\lambda$ 最大 $(2\lambda_c)$，光子损失能量最多。

# 进阶视点 I：闵氏时空与度规

## 1. 时空间隔 (Interval)

洛伦兹变换的本质是保持**时空间隔**不变。定义事件 $P(ct, x, y, z)$：

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) \qquad (26)$$

**度规 (Metric)** $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$。
类似于欧氏几何中的 $r^2$，但空间项带有**负号**。

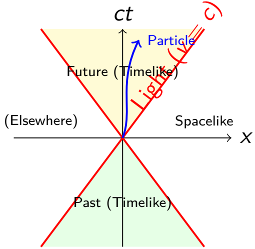
## 2. 因果结构分类

根据 $\Delta s^2$ 的正负，将事件对的关系分为：

- **类时 (Timelike)** $\Delta s^2 > 0$：$v < c$ 可达。存在因果联系。
- **类光 (Lightlike)** $\Delta s^2 = 0$：仅光速可达。
- **类空 (Spacelike)** $\Delta s^2 < 0$：无因果联系，时序可颠倒。

## Survival Tip：光锥之内皆命运

只有位于你“过去光锥”里的事件能影响你；你只能影响“未来光锥”里的事件。
类空区域是“绝对的远方”，无论如何无法触及。




所有有质量粒子的世界线 (Worldline) 必须被“囚禁”在光锥内部 (斜率 $> 1$)。

# 进阶视点 II：四维矢量

## 1. 定义与变换

将时间与空间打包为 $X^\mu = (ct, \vec{r})$。同理定义**四维动量** $P^\mu$：

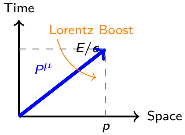
$$P^\mu = (E/c, \vec{p}) = (p^0, p^1, p^2, p^3) \tag{27}$$

遵循洛伦兹变换矩阵：$P'^\mu = \Lambda^\mu_\nu P^\nu$。

## 2. 标量积 (Scalar Product)

定义内积 $A \cdot B = A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B}$。**关键性质**：该内积是**洛伦兹不变量。**

$$P \cdot P = (E/c)^2 - p^2 = \text{const}$$




## Survival Algorithm：模长即质量

四维动量的模长平方就是静质量！

$$P^2 \equiv P \cdot P = m_0^2 c^2 \tag{28}$$

**高阶应用：无需算出速度**

对于碰撞 $A + B \to C + D$，直接利用四维动量守恒：

$$P_A + P_B = P_C + P_D$$

两边平方（利用标量积）：

$$(P_A + P_B)^2 = (P_C + P_D)^2$$

$$P_A^2 + P_B^2 + 2P_A \cdot P_B = \dots$$

$$m_A^2 c^2 + m_B^2 c^2 + 2(E_A E_B / c^2 - \vec{p}_A \cdot \vec{p}_B) = \dots$$

**结论**：这就是计算阈值能量的最快路径。

# 进阶视点 III：闵氏时空图

## 1. 坐标轴的倾斜

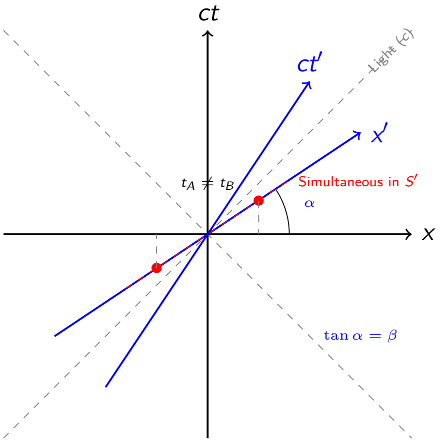
洛伦兹变换可以看作坐标轴的“双曲旋转”。

- **时间轴** $ct'$ $(x' = 0)$：对应方程 $x = \beta ct$。
- **空间轴** $x'$ $(t' = 0)$：对应方程 $ct = \beta x$。

**结论**：动系的两个轴向**光锥**靠拢，夹角变小。

## 2. 同时性的几何解释

在 $S'$ 系同时的事件位于平行于 $x'$ 轴的直线上。
由于 $x'$ 轴是倾斜的，它切出的 $S$ 系时间 $t$ 必然不同。
$\Longrightarrow$ **倾斜导致异地不同时。**




校准双曲线 (Calibration)

# 进阶视点 IV：相对论质心速度

**经典 vs 相对论**

- **经典力学**：
$$\vec{v}_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i}$$
- **相对论**：质量不再守恒，能量扮演“惯性”的角色。
$$\vec{\beta}_{cm} = \frac{\vec{v}_{cm}}{c} = \frac{\sum \vec{p}_i c}{\sum E_i} \tag{29}$$

## 推导思路

在质心系中，总动量为零 ($\sum \vec{p}_i' = 0$)。利用洛伦兹变换 $P'_{tot} = \Lambda P_{tot}$，令空间分量为 0，即可解出该系的相对速度 $\beta$。

## Survival Application：追及碰撞

**题目**：光子 ($E$) 追击电子 ($E_e, p_e$)。求质心系速度。

**直接代公式**：
$$\beta_{cm} = \frac{p_\gamma c + p_e c}{E_\gamma + E_e} = \frac{E + p_e c}{E + E_e}$$

**检验**：若电子静止 ($p_e = 0, E_e = mc^2$)：
$$\beta_{cm} = \frac{E}{E + mc^2}$$

这比先进行复杂的坐标变换要快得多！

1. 内容回顾与补充拓展
   - 物理直觉的重塑
   - 时空效应与本征量判定
   - 洛伦兹变换与运动学
   - 相对论动力学基础
   - 碰撞、衰变与守恒律
   - 高阶拓展：四维时空
   - 典型模型与佯谬解析
   - 尺缩钟慢解题核心算法
2. 作业习题讲解
3. Q&A

# 综合模型 A：车库佯谬

## 题目场景

一根静止长度为 $L_0$ 的梯子，以速度 $v$ $(\gamma = 2)$ 飞向一个静止长度也为 $L_0$ 的车库。

- **前门与后门**：车库有两个门，平时开着。
- **操作**：当梯子完全进入车库时，两扇门**同时**快速关闭再打开。

## 矛盾的焦点

**车库管理员 (Ground)**：
梯子动了 $\Longrightarrow$ 尺缩效应。

$$L_{lad} = L_0/\gamma = 0.5L_0 < L_{gar}$$

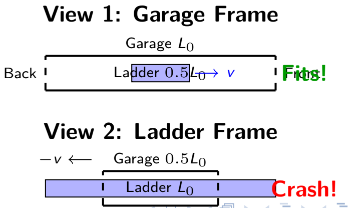
**结论**：梯子变短了，**能装下**！门可以同时关。

## 梯子观测者 (Ladder)

**相对性原理**：
梯子不动，车库在动 $\Longrightarrow$ 车库尺缩。

$$L'_{gar} = L_0/\gamma = 0.5L_0 < L_{lad}$$

**结论**：车库变短了，梯子比车库长一倍，**绝对装不下**！
门怎么可能同时关上而不夹断梯子？



# 综合模型 A：车库佯谬

## 破解钥匙：同时的相对性

“装得下”的定义是：梯子头碰到前门 (Event A) 与梯子尾离开后门 (Event B) **同时发生**。

- 在车库系：$\Delta t = t_A - t_B = 0$ (同时)。
- 在梯子系：$\Delta t' \neq 0$!

## 梯子系的剧本 (Calculated)

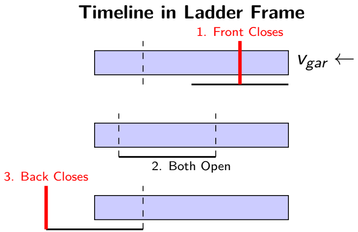
利用变换 $\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x/c^2)$：
设车库系两门距离 $\Delta x = L_0$。

$$\Delta t' = -\gamma \frac{v}{c^2} L_0 < 0$$

**含义**：$t'_A < t'_B$。**即前门先关，后门后关。**

## 真相：时间差救了梯子

在梯子看来，前门先关上，**然后马上打开**，让梯子头出去；
过了很久之后，后门才关上。
$\Longrightarrow$ 梯子从未“同时”被关在里面，但也没有被门夹断。




**结论**：两系对于“物理事实”（梯子没断）是一致的，只是对“同时”的描述不同。

# 综合模型 B：孪生子佯谬

## 场景描述

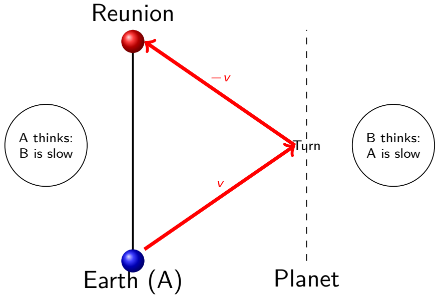
双胞胎兄弟，哥哥 A 留在地球，弟弟 B 乘坐飞船去旅行。

- **去程**：B 以 $v$ 飞往 $\Delta x$ 外的星球。
- **返程**：B 到达后立即反向，以 $-v$ 飞回地球。

## 佯谬逻辑 (The "Paradox")

- **A 的视角**：B 在动，B 的钟变慢。结论：**B 比 A 年轻**。
- **B 的视角**：A 在动（相对向后退），A 的钟变慢。结论：**A 比 B 年轻**。

当 B 回到地球时，两人面对面比年龄，不可能既是“A 老”又是“B 老”。谁错了？




## 错误的根源

相对论只适用于**惯性系**。
A 始终在地球（近似惯性系）。
B 必须减速并掉头，经历了巨大的**加速度**，换了参考系。
$\Longrightarrow$ A 和 B 的地位**不对称**！

# 综合模型 B：孪生子佯谬

## 1. 世界线长度法 (最佳解法)

人经历的苍老程度取决于他手表的读数（固有时 $\tau$）。

$$\tau = \int d\tau = \int \sqrt{1 - v(t)^2/c^2}\,dt$$

- **哥哥 A**：$v = 0$。

$$\tau_A = \int_0^T 1\,dt = T$$

- **弟弟 B**：$v \neq 0$。

$$\tau_B = \int_0^T \sqrt{1-\beta^2}\,dt = T/\gamma$$

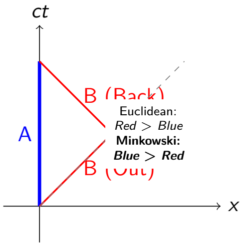
**结论**：$\tau_B < \tau_A$，旅行回来的弟弟**确实更年轻**。

## 2. 闵氏几何三角形不等式

在欧氏几何中，两点之间直线最短。
在闵氏时空中，两点之间**直线最长**（固有时最大）！

$$\tau_{\text{straight}} > \tau_{\text{bent}} \tag{30}$$

A 走的是直线（惯性），B 走的是折线（加速）。




注意：B 在掉头瞬间，从一个惯性系跳到另一个，这里的“跳跃”导致了时间的缺失。

# 核心判定：如何精准锁定“本征量”？

## 1. 判定固有时 (Proper Time) $\Delta\tau$

**算法：数钟法**

- 若某个观测者只用**一只钟**（就在他手腕上）就测出了两个事件的间隔，则他测得的一定是 $\Delta\tau$。
- 固有时 $\Delta\tau$ 是所有观测者中测得时间间隔**最小的**。
- 公式：$\Delta t_{others} = \gamma\Delta\tau$

## 2. 判定原长 (Proper Length) $L_0$

**算法：相对静止法**

- 若测量者与被测物体**相对静止**，则他测得的是 $L_0$。
- 原长 $L_0$ 是所有观测者中测得长度**最大的**。

## 解题陷阱：千万不要交叉混用

- **错误做法**：先算尺缩再算钟慢，逻辑极易打架。
- **正确姿势**：
  1. 选定一个参考系。
  2. 只对这个系下的物理量套用效应。
  3. **终极大法**：如果分不清谁缩谁慢，直接列**洛伦兹变换**坐标方程。

**解题口诀**
一只钟测 $\Delta\tau$，静止系里量 $L_0$
运动系看时间长，运动系量长度短

# 万能算法：洛伦兹坐标变换“三步走”

1. **第一步：定事件点 (Events)**
   将题目描述转化为两个具体的时空点：
   事件 A：$(x_A, t_A)$；事件 B：$(x_B, t_B)$。
2. **第二步：定相对速度 ($v$)**
   确定 $S'$ 系相对于 $S$ 系的速度。
   **注意**：向左运动 $v<0$，向右运动 $v>0$。
3. **第三步：套差分公式 ($\Delta$)**
   考试中求“间隔”的情况远多于求“单点坐标”：

$$[box = \boxed{\ }]align*\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \qquad \Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x) \tag{31}$$

## 算法演示：同时的相对性

地面 $S$ 同时闪光 ($\Delta t = 0$)，间隔 $L$。飞船 $S'$ 测得时间间隔？

**带入算法：**

- $\Delta t = 0,\ \Delta x = L$
- $\Delta t' = \gamma(0 - \frac{vL}{c^2}) = -\frac{\gamma vL}{c^2}$

**结果分析：**

$\Delta t' < 0$ 说明在 $S'$ 系中，$x$ 较大的事件（前方）先发生。这就是“后方先发”判据的数学推导。

**技巧**：计算中尽量保留 $c$ 和 $\beta$，直到最后一步。

# 作业习题讲解

# Q&A

*Thanks!*