力学
(Classical Mechanics)
数学基础

徐来林(lailinxu@ustc.edu.cn)
中国科技大学近代物理系
2023年11月

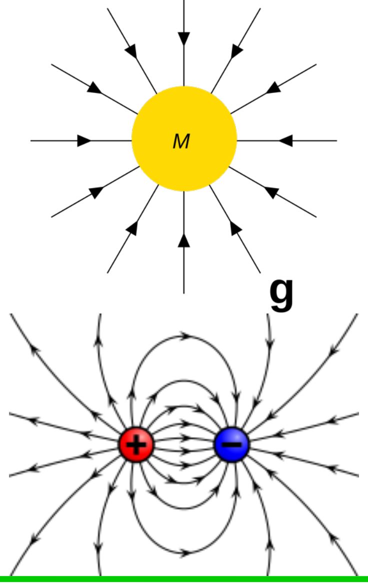
Outline

- 1. 矢量场论初步
- 2. 常系数线性微分方程

1 矢量场论初步

场的概念

- 场（Field）是用空间位置函数来表征的。在物理学中，经常要研究某种物理量在空间的分布和变化规律
- 对于标量，空间每一点都对应着该物理量的一个确定数值，则称此空间为标量场
  - 如电势场、温度场等
- 如果物理量是矢量，空间每一点都存在着它的大小和方向，则称此空间为矢量场
  - 如电场、速度场等
- 若场中各点处的物理量不随时间变化，称为稳定场，否则，称为不稳定场

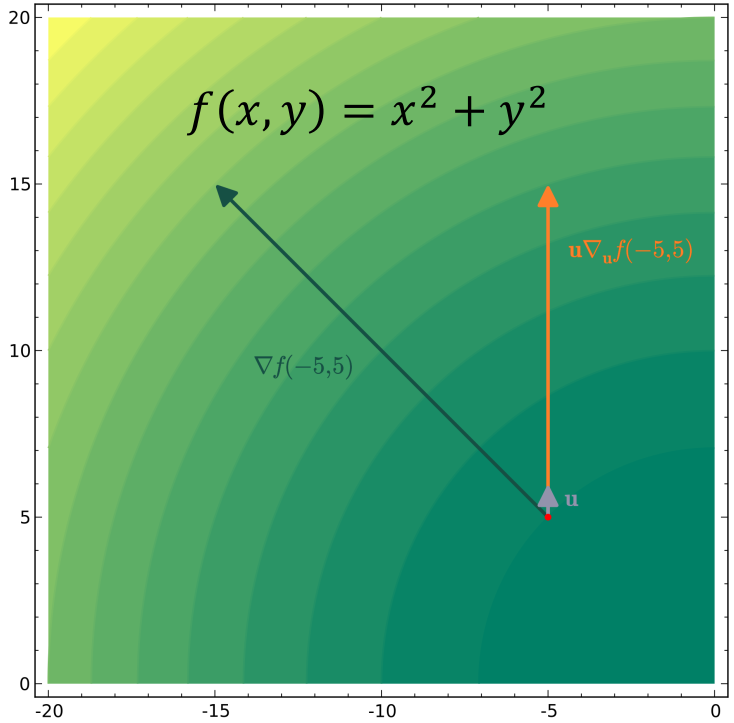


$$V(r) = -\frac{GMm}{r} \qquad \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\nabla V(r) = -\frac{GMm}{r^2}\vec{\boldsymbol{e}}_r$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} \qquad \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\nabla V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{\boldsymbol{e}}_r$$

标量场的梯度

- 方向导数（Directional derivative）：一个标量场在某点沿着某个给定向量方向上的方向导数，描述了该点附近标量场沿着该向量方向变动时的瞬时变化率



$$f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad \vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$\nabla_{\vec{v}} f(\vec{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{v}) - f(\vec{x})}{h}$$

- 由于从一点出发，有无穷多个方向，即标量场在一点处的方向导数有无穷多个，其中，若过该点沿某一确定方向取得在该点的最大方向导数，则其为梯度（gradient）

标量场的梯度

- 梯度 ∇f or $\text{grad}\ f$

$$\nabla f(\vec{\boldsymbol{x}}) = \max_{\vec{\boldsymbol{v}}} \nabla_{\vec{\boldsymbol{v}}} f(\vec{\boldsymbol{x}})$$

- 标量场的梯度是矢量

直角坐标系 $\boxed{\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)}$ $\boxed{\nabla f(\vec{\boldsymbol{x}}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)}$

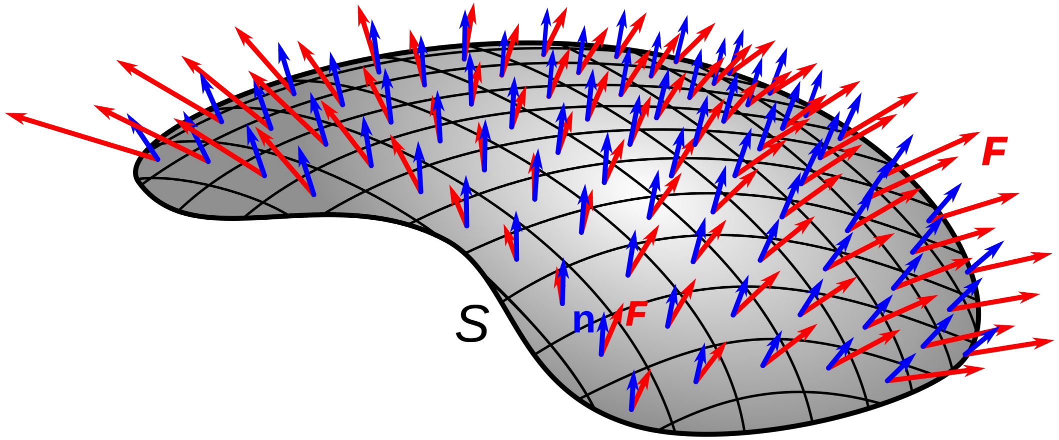
- 沿某一方向的方向导数就是梯度在该方向上的投影

$$\nabla_{\vec{\boldsymbol{v}}} f(\vec{\boldsymbol{x}}) = \nabla f(\vec{\boldsymbol{x}}) \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$$

矢量场的散度

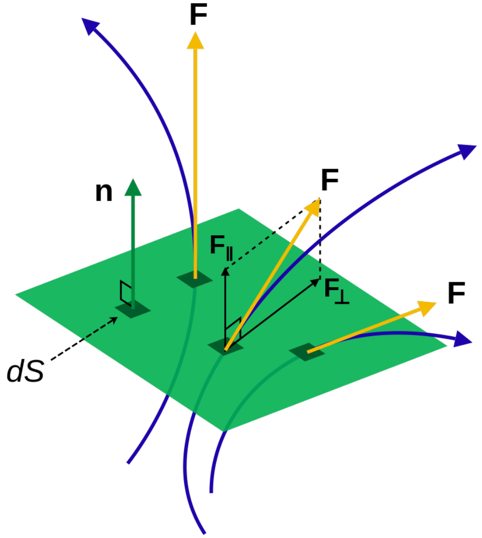
- 散度（divergence）描述向量场的发散程度
- 定义向量场的散度，首先要引入通量（flux）的概念。给定一个三维空间中的向量场$\vec{A}$以及一个简单有向曲面Σ，则向量场$\vec{A}$通过曲面Σ的通量就是曲面每一点上的场向量在曲面法向方向上的分量的积分:

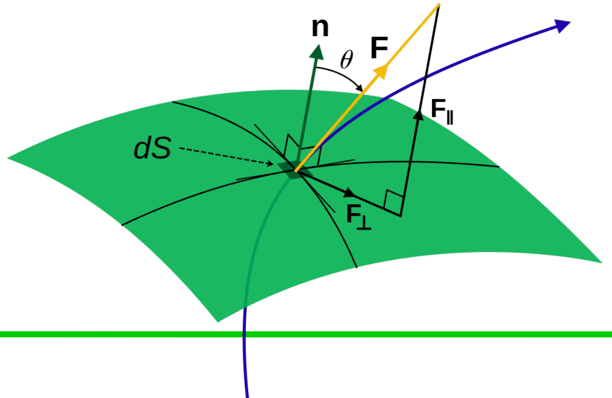
$$\boxed{\Phi_{\vec{A}}(\Sigma) = \iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} \vec{A} \cdot \vec{n} dS}$$



闭合曲面

$$\Phi_{\vec{A}}(\Sigma) = \oint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$



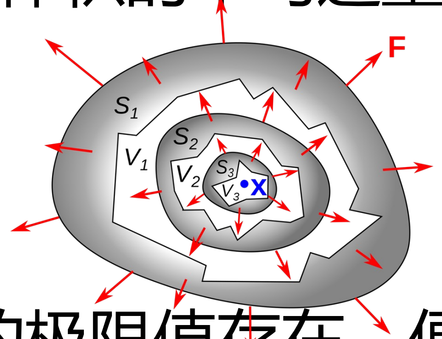


如果曲面是封闭的，例如球面，那么通常约定法向量是从里朝外的，所以这时候的通量是描述曲面上的场向量朝外的程度

矢量场的散度

- 平均通量：设封闭曲面Σ所包围的体积为ΔV，则矢量场$\vec{\boldsymbol{A}}$在V中单位体积的平均通量，或者平均发散量

$$\frac{\oint_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}}}{\Delta V}$$



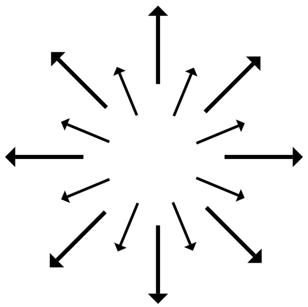
- 当闭合曲面Σ及其所包围的体积向其内某点收缩时，若平均发散量的极限值存在，便记作

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \lim_{\Delta V \to \boldsymbol{0}} \frac{\oint_{\Sigma} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot d\vec{\boldsymbol{S}}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to \boldsymbol{0}} \frac{\Delta \Phi}{\Delta V} = \frac{d\Phi}{dV}}$$

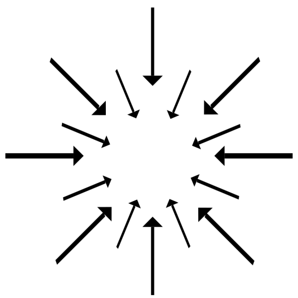
称为矢量场在该点的散度➔散度是通量的体密度

直角坐标系 $$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

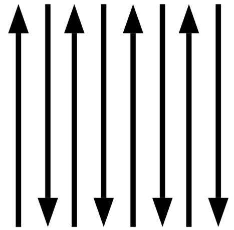
- 散度的重要性在于表征空间各点矢量场发散的强弱程度
  - 当$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} > \boldsymbol{0}$，表示该点有散发通量的正源
  - 当$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} < \boldsymbol{0}$，表示该点有吸收通量的负源
  - 当$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{0}$，表示该点为无源场



$\partial/\partial x(\mathbf{V}_x) > 0$
$\partial/\partial y(\mathbf{V}_y) > 0$
$\nabla \bullet (\mathbf{V}) > 0$



$\partial/\partial x(\mathbf{V}_x) < 0$
$\partial/\partial y(\mathbf{V}_y) < 0$
$\nabla \bullet (\mathbf{V}) < 0$



$\partial/\partial x(\mathbf{V}_x) = 0$
$\partial/\partial y(\mathbf{V}_y) = 0$
$\nabla \bullet (\mathbf{V}) = 0$

高斯散度定理

- 高斯散度定理(Gauss’ s Theorem)，又称为高斯通量理论、散度定理：向量场穿过曲面的通量，等于散度在曲面围起来的体积上的积分

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{d\Phi}{dV} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\oint \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{A}\, dV}$$

把一个闭合曲面的面积分转为对该曲面所包围体积的体积分，反之亦然

  - 高斯公式在物理和工程中是一个很重要的结果，特别是静电学和流体力学
  - 推论： 对于标量函数

$$\boxed{\oint f\, d\vec{S} = \iiint_V \nabla f\, dV}$$

矢量场的旋度

- 定义向量场的旋度，首先要引入环量（circulation，或称为旋涡量）的概念：给定一个三维空间中的向量场$\vec{\boldsymbol{A}}$及一个简单闭合有向曲线Γ，$\vec{\boldsymbol{A}}$沿着曲线Γ的环量就是闭合曲线积分

$$\boxed{\mathrm{Circ}_{\vec{\boldsymbol{A}}}(\Gamma) = \oint_{\Gamma} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}}}$$

- 旋度（Curl）： 设想将闭合曲线缩小到其内某一点附近，那么以闭合曲线Γ为界的面积ΔS逐渐缩小， 环量也将逐渐减小，一般说来，这两者的比值有一极限值，记作

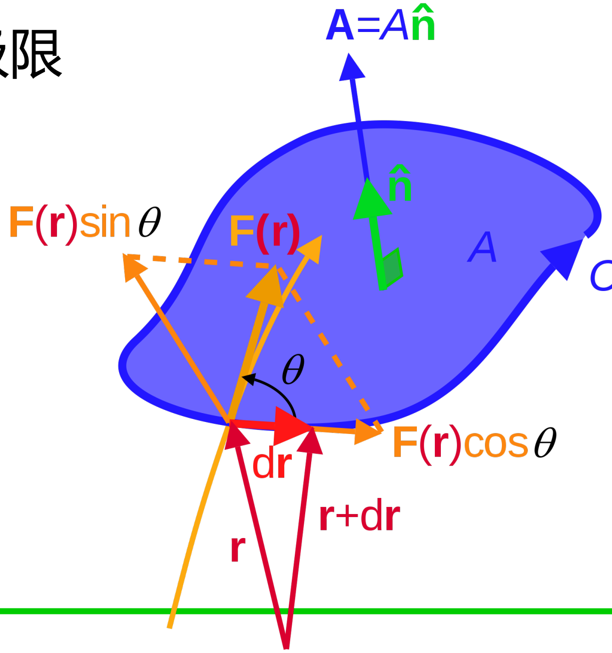
$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_{\Gamma} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}}}{\Delta S}$$

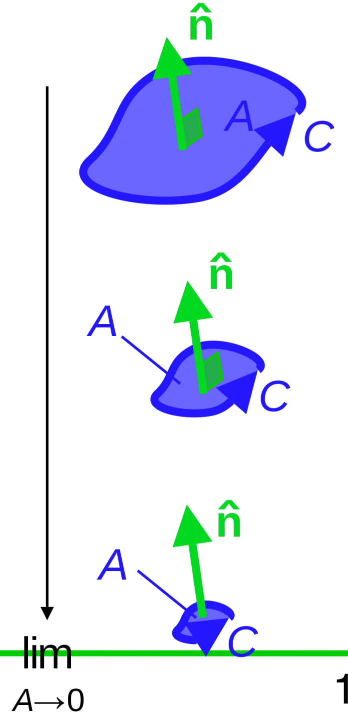
即单位面积平均环流的极限

- 它与闭合曲线的形状无关，但与面元ΔS的取向有关
- 定义旋度

$$\boxed{\mathrm{Curl}(\vec{\boldsymbol{A}}) \cdot \vec{n} = \lim_{\Delta S_n \to 0} \frac{\oint_{\Gamma} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}}}{\Delta S_n}}$$

向量场的旋度是一个向量，它在一个方向上的投影的大小表示了在这个方向上的环量面密度的大小



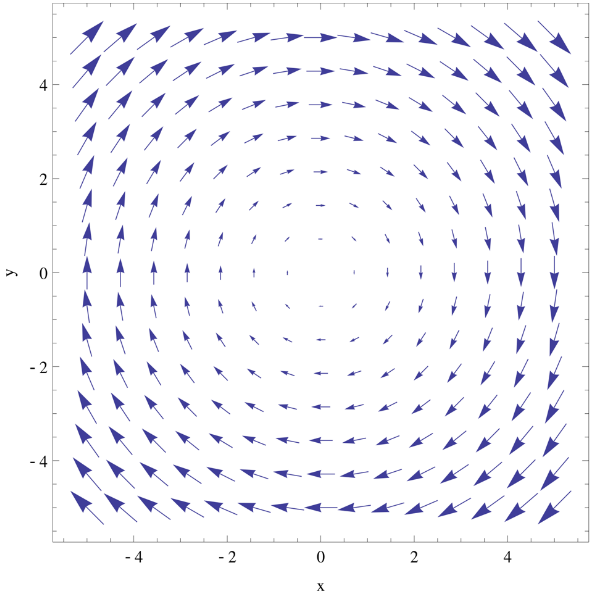


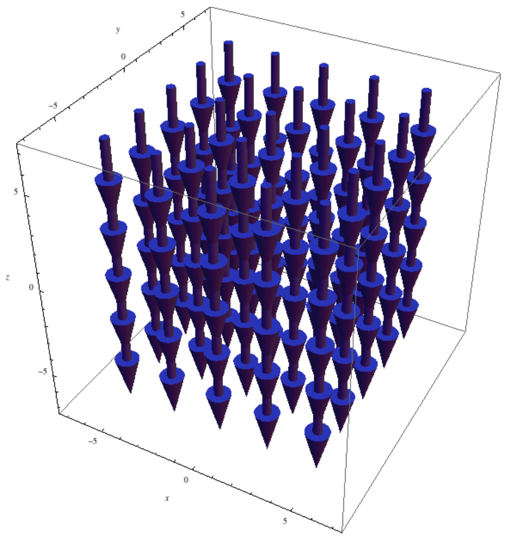
斯托克斯定理

- 旋度

直角坐标系

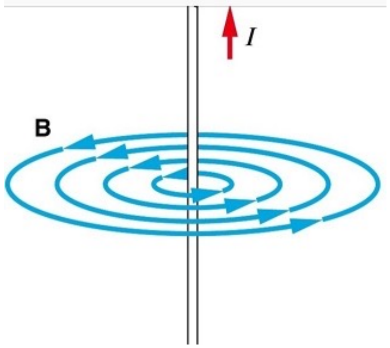
$$\mathrm{Curl}(\vec{\boldsymbol{A}}) = \nabla\times\vec{\boldsymbol{A}} = \boxed{\begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{i}} & \vec{\boldsymbol{j}} & \vec{\boldsymbol{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}}$$





- 斯托克斯定理（Stokes' theorem）

$$\mathrm{Curl}(\vec{\boldsymbol{A}})\cdot\vec{n} = \lim_{\Delta S_n\to 0}\frac{\oint_{\Gamma}\vec{\boldsymbol{A}}\cdot d\vec{\boldsymbol{l}}}{\Delta S_n} \Rightarrow \boxed{\iint_{\vec{S}}\mathrm{Curl}(\vec{\boldsymbol{A}})\cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = \oint_{\Gamma}\vec{\boldsymbol{A}}\cdot d\vec{\boldsymbol{l}}}$$



$$\iint_{\vec{S}}(\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}})\cdot d\vec{\boldsymbol{S}} = \oint_{\Gamma}\vec{\boldsymbol{A}}\cdot d\vec{\boldsymbol{l}}$$

把对任意闭合曲线边界的线积分转换为该闭合曲线为界的任意曲面的面积分

2 常系数线性微分方程

线性微分方程

- 定义D为微分算子：$D = \frac{d}{dx}$
  - 可以证明是一个线性变换

- 可加性：$D[f(x) + g(x)] = D[f(x)] + D[g(x)]$
- 齐次性：$D[af(x)] = aD[f(x)]$，a为常数

- D的多项式组合也是线性变换
  - $\mathcal{L} = a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \cdots + a_n D^n$，$n$阶
  - 若$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$为常数，则为常系数线性微分方程
  - 若 $a_i = a_i(x)$，则为变系数线性微分方程
- 常系数线性微分方程
  - $\mathcal{L}(y) = f(x)$
    - 若$f(x) = 0$，则为常系数齐次线性微分方程， $\mathcal{L}(y) = 0$
    - 若$f(x) \neq 0$，则为常系数非齐次线性微分方程

举例:
一阶线性微分方程： $y' + p(x)y = f(x)$
二阶常系数齐次微分方程： $y'' + py' + qy = 0$ (p, q为常数)

解的存在和唯一性定理

- 若$a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x), f(x)$在$x_0$附近连续，且$a_n(x) \neq 0$，那么对任意给定的初始条件:
  - $y(x_0) = b_0, y'(x_0) = b_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1}$
  - $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$为实数
- 方程存在唯一的解$y = y(x)$

函数的线性无关性

- 线性相关：对于一组函数，$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$,
  - 如果存在一组不全为0的常数，$c_1, c_2, \ldots, c_n$，使得等式
$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0$$
  - 在$[a, b]$区间上成立，则称这组函数$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$在$[a, b]$上线性相关
- 否则，称他们线性无关(线性独立)

特征方程

- 对于n阶常系数齐次线性微分方程

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

- 其特征方程为

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

- 在复数域，它有n个根，称为对应微分方程的特征根。记做$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$，每个特征根对应于一个特解， 这些特解线性无关

特征根	特解
λ_j为互异实根	$y_i = e^{\lambda_j x}, j = 1, \cdots, n$
$\lambda = \alpha + i\beta$ 为单根 则$\lambda = \alpha - i\beta$也是	$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$
λ是r重实根	$y_1(x) = e^{\lambda x}, y_2(x) = xe^{\lambda x},$ $\cdots, y_r = x^{r-1}e^{\lambda x}$
若$\lambda = \alpha + i\beta$ 是r重复根 则$\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$也是	$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x), y_2 = xe^{\alpha x}\cos(\beta x),$ $\cdots, y_r = x^{r-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ $y_{r+1}(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x), y_{r+2} = xe^{\alpha x}\sin(\beta x),$ $\cdots, y_{2r} = x^{r-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

解的结构

- 如果齐次方程有n个线性无关的特解， $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$，那么它的通解是：

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

  - $c_1, c_2, \dots, c_n$是任意常数
- 非齐次线性微分方程的通解是它的一个特解与对应齐次方程的通解之和
  - $y(x) = y^*(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$

特解的形式

$f(x)$的形式	条件	特解的形式
$P_n(x)$	“0”不是特征根 “0”是单特征根 “0”是重特征根	$Q_n(x)$ $xQ_n(x)$ $x^2Q_n(x)$
$a\mathrm{e}^{\alpha x}$	α 不是特征根 α 是单特征根 α 是重特征根	$A\mathrm{e}^{\alpha x}$ $Ax\mathrm{e}^{\alpha x}$ $Ax^2\mathrm{e}^{\alpha x}$
$a\cos\beta x+b\sin\beta x$	$\pm\mathrm{i}\beta$ 不是特征根 $\pm\mathrm{i}\beta$ 是特征根	$A\cos\beta x+B\sin\beta x$ $x(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$
$P_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$	α 不是特征根 α 是单特征根 α 是重特征根	$Q_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ $xQ_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ $x^2Q_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$
$P_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}(a\cos\beta x+b\sin\beta x)$ $(\beta\neq 0)$	$\alpha\pm\mathrm{i}\beta$ 不是特征根 $\alpha\pm\mathrm{i}\beta$ 是特征根	$\mathrm{e}^{\alpha x}[Q_n(x)\cos\beta x+R_n(x)\sin\beta x]$ $x\mathrm{e}^{\alpha x}[Q_n(x)\cos\beta x+R_n(x)\sin\beta x]$

其中$Q_n(x),R_n(x)$为n次多项式，系数待定

二阶常系数微分方程

- $y'' + py' + qy = 0$ (p, q为常数)
  - 特征方程： $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$，然后分三种情况讨论方程的通解
  - 若$\lambda_1 \neq \lambda_2$且都是实数，
    - $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
  - 若 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$是重根，
    - $y = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}$
  - 若$\lambda = \alpha \pm i\beta$是一对复根
    - $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$

举例

[例题] 求方程的通解$y'' + \omega_0^2 y = 0$

[解] 先求出齐次方程的通解。齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

它的两个复解为 $\lambda_1 = i\omega_0$，$\lambda_2 = -i\omega_0$
所以齐次方程的通解为

$$y = c_1 \cos \omega_0 x + c_2 \sin \omega_0 x$$

举例

［例题］ 求方程的通解$y'' - y' - 2y = 2e^{-x}$

［解］ 先求出齐次方程的通解。齐次方程的特征方程为$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$
它的两个解为 $\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = 2$， 所以齐次方程的通解为

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

再找出非齐次方程的一个特解
假设特解为

$$y_p = Axe^{-x}$$

代入方程，得到

$$-3Ae^{-x} = 2e^{-x} \Rightarrow A = -\frac{2}{3}$$

所以方程的通解为

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - \frac{2}{3} x e^{-x}$$