《力学 A》中的数学基础

助教 师驰昊

2025/9/27

1 行列式

“行列式” 除了在矢量叉乘的时候用得到, 还有什么地方能用? 行列式最初就是用来求解线性方程组的. 矢量叉乘中的 “行列式” 只是借用了这个形式, 并不是真正的行列式.

下面以三阶行列式为例讲解其最基本的用法, 对 n 阶行列式也适用. 对于下述线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = m \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = n \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = p \end{cases} \tag{1}$$

定义系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{2}$$

则对于一般情况, 方程组 (1) 的唯一解为

$$\begin{cases} x = \begin{vmatrix} m & a_{12} & a_{13} \\ n & a_{22} & a_{23} \\ p & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} / D \\ y = \begin{vmatrix} a_{11} & m & a_{13} \\ a_{21} & n & a_{23} \\ a_{31} & p & a_{33} \end{vmatrix} / D \\ z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & m \\ a_{21} & a_{22} & n \\ a_{31} & a_{32} & p \end{vmatrix} / D \end{cases} \tag{3}$$

特别地, 若 $m = n = p = 0$, 该方程组被称为线性齐次方程组, 其有非零解的充分必要条件为系数行列式 $D = 0$, 且方程组 (1) 为无穷多组解.

2 矢量

2.1 混合积

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} \tag{4}$$

2.2 三重矢量积

计算方式: “先中间, 后外边”

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} \tag{5}$$

3 导数与展开

3.1 常见导数

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad (e^x)' = e^x \tag{6}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{7}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{8}$$

3.2 反函数求导

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \tag{9}$$

e.g. $y = \arcsin x (x = \sin y)$

$$(\arcsin x)' = 1/(\sin y)' = 1/\cos y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{10}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{11}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \tag{12}$$

3.3 复合函数求导

if $y = y(u), u = u(x)$, then

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{13}$$

e.g. $y = x^x$, 记 $y = e^{x \ln x}, u(x) = x \ln x$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = e^u \cdot (1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1) \tag{14}$$

3.4 偏导数

多变量函数中对某个变量求偏导数式, 其余变量均视为常数.
e.g. $r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}, \theta(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{15}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{16}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot(-\frac{y}{x^2})=-\frac{y}{x^2+y^2} \tag{17}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2} \tag{18}$$

3.5 矢量的导数

需要注意极坐标以及自然坐标系下的矢量对时间 t 求导时, 不能漏了基矢对时间的导数.
e.g. 极坐标下

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e_r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e_\theta} \tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e_\theta}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e_r} \tag{20}$$

3.6 微分

主要是积分中的换元操作需要使用. e.g. $y=f(x)$

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x \tag{21}$$

3.7 常用 Taylor 展开

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{1}{2!}n(n-1)x^2+\cdots \quad (x\to 0) \tag{22}$$

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots \quad (x\to 0) \tag{23}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots \quad (x\to 0) \tag{24}$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots \quad (x\to 0) \tag{25}$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots \quad (x\to 0) \tag{26}$$

4 积分

4.1 基本内容

不定积分别忘了加常数 C, 对应物理中的初始条件/边界条件.

补充内容: 双曲正余弦函数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{27}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{28}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{29}$$

$$(\cosh x)' = \sinh x \quad (\sinh x)' = \cosh x \tag{30}$$

$$\operatorname{ar}\sinh x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \tag{31}$$

$$\operatorname{ar}\cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \tag{32}$$

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C \quad \int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \tag{33}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C \quad \int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C \tag{34}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C \tag{35}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C \tag{36}$$

建议大家把熟练掌握上述常见的易混淆的积分, 积分表里还有很多, 有时间可以去推导一些. 用到的方法主要就是两类换元法.

4.2 第一类换元法: 凑微分

e.g.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1} + C \tag{37}$$

4.3 第二类换元法

e.g.

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \tag{38}$$

令 $x = \sin t, t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$(注意, 第二类换元一定要注意新变量的取值范围), 则原积分化为

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t + 1}{2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \tag{39}$$

4.4 分部积分

$$\int u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\mathrm{d}u(x) \tag{40}$$

e.g.

$$\int \ln(x)\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int x\mathrm{d}\ln(x) = x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x = x(\ln(x) - 1) + C \tag{41}$$

对于定积分, 同样也有

$$\int_{x_!}^{x_2} u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x)|_{x_!}^{x_2} - \int_{x_!}^{x_2} v(x)\mathrm{d}u(x) \tag{42}$$