力学 A（PHYS1001A.04）：第三次习题课

Course NOT easy: The Survival Guide 1+2

Yu Shu & Chihao Shi

School of Physics, USTC

Nov.3, 2025

惯性系：物体满足牛顿第一定律，即在不受力的情况下，速度的大小与方向不变.
同时，在此参考系下，牛顿第二定律有形式 $\vec{F} = m\vec{a}$.
非惯性系：相对于惯性系作变速运动的参考系

平动加速参考系

平移惯性力：$\vec{f}_i = -m\vec{a}_0$
表现力：$\vec{F}_{eff} = \vec{F} + \vec{f}_i$
平动加速参考系下的牛顿第二定律：$\vec{F}_{eff} = m\vec{a}'$

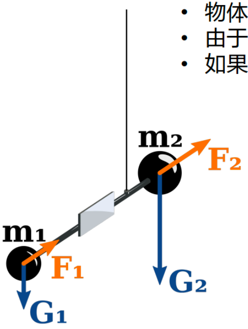
"虚拟力" & "真实力"

1. 不能指出是哪个物体作用；
2. 没有反作用力；
3. 所有质点都受力，而且惯性力与质点的位置无关，各处均匀。其指向一律与"牵连"加速度（坐标系 K' 的加速度）相反，且正比于质量（和重力类似）；
4. 原则上讲，只要选择惯性系，就可以消除惯性力，而真实力一般不能这样来消除。

补充拓展：等效原理

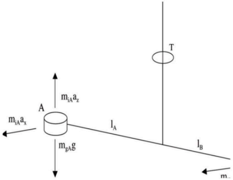
弱等效原理（Weak equivalence principle）：$m_i = m_g$，m_g 为引力质量，m_i 为惯性质量
爱因斯坦表述（Einstein equivalence principle）：引力场与惯性力场等效
强等效原理（Strong equivalence principle）：在时空区域的一点内的引力场可用相应的局域惯性参考系去描述，而狭义相对论在其局域惯性参考系中完全成立
例：狭义相对论下 $T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$，引入引力场后，广义相对论下
$T^{\mu\nu}_{;\nu} = T^{\mu\nu}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} T^{\rho\nu} + \Gamma^{\nu}_{\rho\nu} T^{\rho\mu} = 0$

补充拓展：厄缶实验（Eötvös experiment）



- 物体A和B系在一根棒的两端，并用细丝将棒水平地悬挂起来，构成一个扭秤
- 由于地球绕太阳公转， 在地球这一非惯性系中，A、B要受到惯性力的作用
- 如果引力质量与惯性质量不成正比， 扭秤就要受一个合力矩作用

Even tiny changes in the rotation of the rod would cause the light beam to be deflected, which would in turn cause a noticeable change when magnified by the telescope



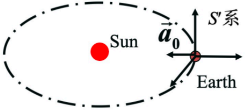
只有当 $\dfrac{m_{GB}}{m_{IB}} = \dfrac{m_{GA}}{m_{IA}}$ 扭矩为0

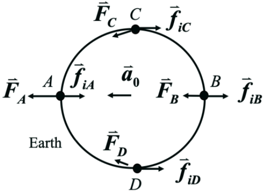
请自行推导

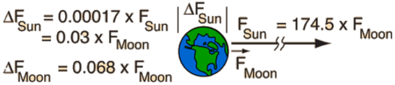
补充拓展：潮汐

潮汐现象主要来自于引力的空间不均匀性

- 设地球没有自转，公转是圆轨道。 地球成为随球心平动的非惯性系

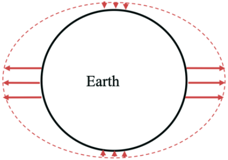


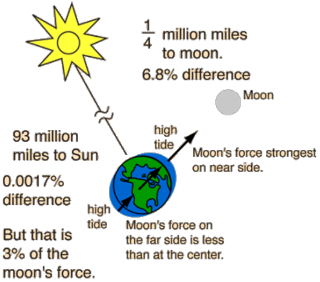




虽然在地球处太阳的引力远大于月亮的引力，但由于潮汐现象主要来自于引力的空间不均匀性

由于月亮离地球要比太阳近得多，故月亮比太阳的引力不均匀性大得多，月亮对潮汐的作用比太阳更大





转动惯性系

K' 系相对于 K 系有转动，则有：

1. K' 中的位矢：$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0$
2. 单位矢量关系：$\dot{\vec{i}}' = \vec{\omega} \times \vec{i}'$，$\dot{\vec{j}}' = \vec{\omega} \times \vec{j}'$，$\dot{\vec{k}}' = \vec{\omega} \times \vec{k}'$
3. 速度变换：$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}'$，其中，$\vec{v}'$ 为 K' 系中的速度向量，有 $\vec{v}' = \dot{r}_x \vec{i}' + \dot{r}_y \vec{j}' + \dot{r}_z \vec{k}' \neq \frac{d\vec{r}'}{dt}$
4. 加速度变换：$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$

加速度变换包括以下变换项：

1. 平动惯性力：$-m\vec{a}_0$
2. 惯性离心力：$-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{v}')$
3. 科里奥利力：$-2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$
4. 切向惯性力：$-m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'$

惯性离心力

一个相对于转动系 K' 静止的物体，在惯性系 K 看来，它必定绕转轴作圆周运动，其上受向心力 $\vec{F} = m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{v})$。在转动系中此物静止不动，必须认为物体不仅受真实力 $\vec{F}$ 作用，而且还受虚拟力 $\vec{F}_c$ 作用，$\vec{F}_c$ 正好与 $\vec{F}$ 相抵消。

惯性离心力垂直于转轴，并指向离开转轴的方向。

惯性离心力与物体质量成正比。离心力与物体所在位置有关，与物体在转动系中运动与否无关。

视重：地球是一个转动参考系，表观重力为惯性离心力与引力的合力，且与纬度有关。

科里奥利力

如果物体在转动系　中运动，则产生新的惯性力，即科里奥利力 $\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$。用右手螺旋法则，将右手伸出，用四个指头指向质点相对 $\vec{K}'$ 系的速度方向，再将四指绕向角速度方向，拇指所指方向为科里奥利力方向。
与相对速度成正比，故只有当物体相对转动参考系运动时才能出现。
与转动角速度的一次方成正比，而离心力与角速度的二次方成正比，故当参考系的转动角速度较小时，科里奥利力比离心力更重要。
力的方向总是与相对速度垂直，不会改变相对速度的大小。

科里奥利力

地球是一个转动参考系，科里奥利力在地球上的表现：

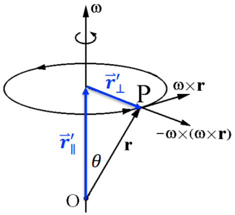
1. 地面上北半球河流冲刷右岸，火车对右轨的偏压较大。在南半球则对左岸和左轨作用大。
2. 地球上自由落体偏东。

傅科摆（Foucault pendulum）摆平面转动角速度：$\Omega = -\omega \sin\lambda$。

- 求解非惯性问题的一般思路
  - 1. 选定惯性系K和非惯性系K'，并选用合适的坐标架
  - 2. 在K'系分析物体的运动
    - 忘掉K'系原点O'和坐标轴的转动
    - 写出$\vec{r}', \vec{v}', \vec{a}'$
  - 3. 分析K'系下的动力学
    - 真实力 $\sum \vec{F}_i$
    - 虚拟力
      - 在K系看来，O'有平动加速度吗？
        - » $\vec{f}_i = -m\vec{a}_0$
      - 在K系看来，K'系坐标轴有转动吗？
        - » 离心力：$\vec{F}_c = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$，垂直转轴向外
        - » 科氏力：$\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$，与$\vec{v}'$垂直
    - 遵循惯性系下的“四部曲”

常用技巧：
1. 将角速度矢量$\vec{\omega}$在系K'分解
2. 将$\vec{r}'$分解为与$\vec{\omega}$平行$(\vec{r}'_{\parallel})$和与$\vec{\omega}$垂直的分量$(\vec{r}'_{\perp})$

$$\vec{F}_c = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = -m\omega^2\vec{r}'_{\perp}$$
$$F_c = -m\omega^2 r'_{\perp} = -m\omega^2 r' \sin\theta$$



本部分可见第一次习题课讲义 P40-P47

多体问题难以求解 $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$。
力是必须的吗?
守恒律是牛顿三定律的推论，是求解系统运动特征的有力工具。
守恒律的应用范围比牛顿三定律更广泛。
诺特定理（Noether's theorem）：每个连续对称性都有着相应的守恒定律。

1 内容回顾与补充拓展

- 非惯性系
- 相对性原理和绝对时空观
- 守恒律
- 动量定理
- 动能定理
- 势能
- 两体问题
- 碰撞

2 作业习题讲解

3 Q&A

质点动量定理

动量： $p = mv$

质点运动方程： $m\frac{d^2x}{dt^2} = F$

质点动量定理微分形式： $\vec{F}dt = d\vec{p}$

质点动量定理积分形式： $\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2}d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$

冲量： $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt$

冲量定理： $\vec{I} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$

力对质点的冲量等于质点动量的增加

质点系动量定理

质点系（质点组）：由相互作用的若干个质点组成的系
内力：系统内各质点间的相互作用力
外力：系统以外的其它物体对系统内任意一质点的作用力
质点系动量定理：$\vec{F}_{ex} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

原惯性系有 $\vec{F}$ 的作用

对于惯性系，$\vec{F}dt = \vec{F}'dt'$，则 $\vec{F}'dt' = d\vec{p}'$

对于非惯性系，则要考虑惯性力的冲量：$\vec{I}_{ext} + \vec{I}_{inert} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$

加速平动参考系：$d\vec{p}' = (\vec{F} - m\vec{a}_0)dt$

加速转动参考系：$d\vec{p}' = (\vec{F} - m\vec{a}_0 - 2m\vec{\omega} \times \vec{r}' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}')dt$

只有外力对体系的总动量变化有贡献。内力对体系的总动量变化没有贡献，但内力对动量在体系内部的分配是有作用的

动量定理是矢量式，应用时可用沿坐标轴的分量式求解

动量定理与牛顿定律的关系:

1. 对一个质点，牛顿定律表示的是力的瞬时效应，而动量定理表示的是力对时间的积累效果;
2. 牛顿第二定律只适于质点，不能直接用于质点系；动量定理既适于质点又适于质点系;
3. 牛顿第三定律不适用的地方，动量定理也不适用;
4. 牛顿定律和动量定理都只适用于惯性系，要在非惯性系中应用动量定理，必须考虑惯性力的冲量。

$$\vec{F}_{ex} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{1}$$

注意:

1. 只适用于惯性系;
2. 动量守恒是矢量式，它有三个分量，各分量可以分别守恒;
3. 在某些过程（如爆炸、碰撞）中, 体系虽受外力，但外力有限（外力　内力），过程时间很短，外力冲量很小；而其间内力很大，体系内每一部分的动量变化主要来自内力的冲量，外力的冲量可忽略不计，体系动量近似守恒，故可以利用动量守恒定律研究体系内部各部分间的动量再分配问题。

质心运动定理

$$\vec{F}_{ex} = \frac{d\vec{p}}{dt} = M_c\ddot{\vec{r}}_C = M_C\vec{a}_C \tag{2}$$

对于单个质点，动量定理与牛二是等效的，但不适用于质点系（因为每个质点的加速度不同）

但对质点系而言，确实存在一个特殊点（质心），可以应用牛顿第二定律

质心

分立质点系：$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$

连续体：$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}$

巴普斯定理：

1. 在一平面上取任一闭合区域，其面积为 S，使它沿垂直于该区域的平面运动形成一个体积为 V 的立体，那么这个立体图形的体积就等于质心所经路程 r 乘以区域面积。表达式为 V=S · r。
2. 如果令某一长为 L 的曲线段，其长度为 L，使它沿着垂直于它所在平面的方向扫过一个面积 S，那么这个面积的大小就等于线段质心移动的距离 r 乘以线段的长度。表达式为 S=L · r。
3. 注意：是质心，而不是重心，因为除非重力场是均匀的，否则同一物质（系统）的质心与重心通常不在同一假想点上。

质心系

原点取在质心上的平动参考系（坐标架不转动）

质心系是“零动量系”，满足 $\sum_i m_i\vec{v}_i = 0$

若 $\vec{F}_{ex} = 0$，，质心系为惯性系，否则为非惯性系（须考虑惯性力）

质心系中，惯性力总功为 0，因此不论质心系是否为惯性系，都不需要考虑惯性力做功

惯性力相对于质心总力矩为 0

变质量物体的运动

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}+(\vec{v}-\vec{u})\frac{dm}{dt}=\vec{F} \tag{3}$$

- 变质量体系：并非相对论情况，而是指在运动过程中不断与外界交换质量的物体的运动
  - 它的质量不是常数，而随时间变化，这种变化是由于外界不断有新的质量进入体系，或是体系内部不断有质量输送到外界
  - 体系中所有质点运动情况相同，因而仍可用一个质点来描写体系的运动
- 我们是研究一个质量随时间变化的质点的运动
  - 例如喷射高速气流的火箭、过饱和蒸汽不断凝聚于水滴上的雨滴等

对于单个质点：$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}$

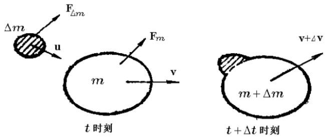
$$\vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{dm}{dt}\vec{v}$$

对于可以用质点描述的变质量体系，是否只需要保留$\frac{dm}{dt}\vec{v}$项就行了？

变质量物体的运动

- 变质量体系运动方程
  - 可分解为一系列元过程，在元过程中，体系动量定理适用
    - t 时刻，主体质量为m，速度为$\vec{v}$；即将进入主体的质量部分为Δm，速度为$\vec{u}$；
    - $t+\Delta t$时刻，主体质量变为$m+\Delta m$，速度变为$\vec{v}+\Delta\vec{v}$
    - 系统受到的合外力为$\vec{F}$，冲量为$\vec{F}\Delta t$
  - 由体系的动量定理
    - $(m+\Delta m)(\vec{v}+\Delta\vec{v})-(m\vec{v}+\Delta m\vec{u})=\vec{F}\Delta t$
    - $m\Delta\vec{v}+\Delta m(\vec{v}-\vec{u})+\Delta m\Delta\vec{v}=\vec{F}\Delta t$
    - $m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}+\frac{\Delta m}{\Delta t}(\vec{v}-\vec{u})+\frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta\vec{v}=\vec{F}$
    - 令$\Delta t\to 0,\Delta\vec{v}\to 0$，取极限：

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}}{\mathrm{d}t}+(\vec{v}-\vec{u})\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\vec{F}}$$



- 当$\vec{v}=\vec{u}$时，$m\frac{d\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}$，方程形式上与牛顿第二定律一样，但注意$m$是变量
- 当$\vec{u}=0$时，$m\frac{d\vec{v}}{\mathrm{d}t}+\vec{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}$
- 注意理解速度$\vec{u}$的含义。此式虽然是在$\frac{dm}{dt}>0$情况下导出的，但当$\frac{dm}{dt}<0$时，结论依然正确，火箭就是这种情况的例子，但需要注意此时$\vec{u}$为附体脱离主体后的速度

功：$W=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$，标量，可正可负
功是相对量：位移是相对量；同一力在不同参考系中的功不一样
功率：$P=\frac{dW}{dt}$，标量，可正可负
动能：$E=\frac{1}{2}mv^2$，标量，可正可负

质点系动能定理

作用于质点系的所有外力所作之功与所有内力所作之功的总和，等于质点系动能的增量

$$\begin{cases} W_{ext} & = \sum_{i=1}^{n} W_{i,ext} \\ W_{int} & = \sum_{i=1}^{n} W_{i,int} = \sum_{i,j=1,i<j}^{n} \int_{\vec{r}_{ij0}}^{\vec{r}_{ij}} \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} \\ E_k & = \sum_{i=1}^{n} E_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m v_i^2 \\ \Delta E & = W_{ext} - W_{int} \end{cases} \tag{4}$$

动能、做功与参考系选取有关。
动能定理只适用于惯性系。非惯性系中引入惯性力作功，它与真实力作功之和也等于质点在非惯性系中动能的增量。
内力的总冲量虽然为零，但内力的总功一般不为零。
摩擦力做功，当摩擦力为体系外力时，对体系可能做正功，也可能做负功, 也可能不做功；动摩擦力总是消耗体系的机械能，是一种耗散力；而静摩擦力不同，它不消耗体系的机械。
质点系动量定理是矢量式，而质点系动能定理是标量式。
质点系动量定理与质点系动能定理是相互独立的。
内力的作用不改变体系的总动量，但一般要改变体系的总动能。

质心系中的动能

- 在惯性系K中，质点系的动能为所有质点的动能之和
  - $E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2$
- 在质心系中，设质心的速度为$\vec{v}_c$，质点相对质心系的速度为$\vec{v}_i'$
  - 则 $\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_i'$
  - $E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_c + \vec{v}_i')^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_c^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i'^2 + \sum_i m_i \vec{v}_c \cdot \vec{v}_i'$
    - $\sum_i m_i = m$ (质心的质量)， $\sum_i m_i \vec{v}_c \cdot \vec{v}_i' = \vec{v}_c \cdot \sum_i m_i \vec{v}_i'$
    - 质心系是“零动量系”，满足 $\sum_i m_i \vec{v}_i' = 0$

$$\boxed{E_k = \underbrace{\frac{1}{2} m \vec{v}_c^2}_{\text{质心动能}} + \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i'^2}_{\text{质点系相对质心动能}}}$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} m \vec{v}_c^2 + E_{kc}, \qquad E_{kc} \equiv \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i'^2}$$

柯尼希定理对于解决两体问题有很大帮助

柯尼希定理（König's theorem）：体系动能等于质心动能和体系相对质心系的动能之和

不论质心系是惯性系还是非惯性系，此定理都成立

1 内容回顾与补充拓展
- 非惯性系
- 相对性原理和绝对时空观
- 守恒律
- 动量定理
- 动能定理
- 势能
- 两体问题
- 碰撞

2 作业习题讲解

3 Q&A

有心力

- **有心力**（central force）：力的作用线总是经过一个固定的点 O, 且力的大小只与质点与O的距离有关。称点O为“力心”
  - 不妨将坐标原点取在力心, 则有心力可以写成 $\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = F(r)\vec{\boldsymbol{e}}_r$的形式
    - 万有引力：$\vec{\boldsymbol{F}} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{\boldsymbol{e}}_r$
    - 一维弹簧：$\vec{\boldsymbol{F}} = -kx\vec{\boldsymbol{e}}_x$
    - 库仑力：$\vec{\boldsymbol{F}} = -k\frac{Qq}{r^2}\vec{\boldsymbol{e}}_r$
- 有心力做功：$W = \int_{\vec{\boldsymbol{r}}_A}^{\vec{\boldsymbol{r}}_B} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \int_{\vec{\boldsymbol{r}}_A}^{\vec{\boldsymbol{r}}_B} F(r)\vec{\boldsymbol{e}}_r \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$
  - $d\vec{\boldsymbol{r}} = d(r\vec{\boldsymbol{e}}_r) = rd\vec{\boldsymbol{e}}_r + \vec{\boldsymbol{e}}_r dr$，注意到$\vec{\boldsymbol{e}}_r \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_r = 1 \Rightarrow \vec{\boldsymbol{e}}_r \cdot d\vec{\boldsymbol{e}}_r = 0$，因而 $\vec{\boldsymbol{e}}_r \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = dr$
  - $W = \int_{\vec{\boldsymbol{r}}_A}^{\vec{\boldsymbol{r}}_B} F(r)\vec{\boldsymbol{e}}_r \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \int_{r_A}^{r_B} F(r)dr$
  - 做功只与 $F(r)$ 在 r_A 于 r_B 之间的积分有关，与质点具体运动的路径无关

保守力

- 有心力做功与路径无关 $W=\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot d\vec{\boldsymbol{r}}=\int_{r_A}^{r_B}F(r)dr \Leftrightarrow$ 沿任意闭合路径做功为 0： $\oint\vec{\boldsymbol{F}}\cdot d\vec{\boldsymbol{r}}=0$
- 称沿任何闭合路径做功为 0 的力是“保守力” （conservative force）
  - 所有的有心力都是保守力 （充分，但必要吗？）
  - 对于一维运动，凡是位置单值函数的力都是保守力，如弹性力
  - 对于一维以上的运动，大小和方向都与位置无关的力，如重力 $f=mg$，均匀电场力是保守力
- 保守力判定（三个等价条件）
  - 1. $\vec{\boldsymbol{F}}$的旋度为0： $\nabla\times\vec{\boldsymbol{F}}=\boldsymbol{0}$
  - 2. 沿闭合路径做功为0： $\oint\vec{\boldsymbol{F}}\cdot d\vec{\boldsymbol{r}}=0$
  - 3. 作用力是某个位势的梯度： $\vec{\boldsymbol{F}}=-\nabla\Phi$

哈密尔顿算子$\nabla\equiv\frac{\partial}{\partial x}\vec{\boldsymbol{i}}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{\boldsymbol{j}}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{\boldsymbol{k}}$

梯度（gradient）$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{\boldsymbol{i}}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{\boldsymbol{j}}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{\boldsymbol{k}}$

散度（divergence）$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}$

旋度（curl） $\nabla\times\vec{\boldsymbol{v}}$

势能

- 对于保守力场，可以定义一个标量函数$V(r)$，称为势能（Potential Energy，或势函数、位能），使保守力作的功为：$W_{AB}=V(r_A)-V(r_B)$
  - 即势能的减少等于保守力的功
- 取r_O为参考点，$V(r_O)=V_0$，则对任意一点 $V(r)=V_0-\int_{r_O}^{r}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$
  - 势能的增加等于保守力的负功
  - 取∞为势能零点，则 $\boxed{V(r)=-\int_{\infty}^{r}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot d\vec{\boldsymbol{r}}}$ $\boxed{\vec{\boldsymbol{F}}=-\nabla V(r)=-\frac{\partial V}{\partial x}\vec{\boldsymbol{i}}-\frac{\partial V}{\partial y}\vec{\boldsymbol{j}}-\frac{\partial V}{\partial z}\vec{\boldsymbol{k}}}$

- 势能是相对性的， 势能零点可根据问题的需要任意选择（有意义的是势能差，而非势能本身）
- 势能差有绝对意义，与参考零点选取无关，且在所有参考系中都是相同的
- 势能是属于系统的。势能既然与质点系各质点间相互作用的保守力相联系，所以势能是属于保守力相互作用着的整个系统，是一种相互作用能，不为单个物体所具有
- 势函数描述力的优势：可以更直观地判定平衡位置和平衡稳定性；更便于建立满足相对论和量子力学的物理理论

常见的势能

1. 重力势能：以地面为势能零点，$V(z) = \int_0^z mg \cdot dz = mgz$
2. 引力势能：质量各为 M，m 的两质点的引力势能，取 M 为原点，无穷远处为势能零点，$V(r) = \int_\infty^r G\frac{Mm}{r^2} = -G\frac{Mn}{r}$
3. 弹性势能：以弹簧原长处的势能为零，$V(x) = \int_0^x kx \cdot dx = \frac{kx^2}{2}$
4. 双原子分子势能（Morse 势）：$V(r) = D_e(e^{-2a(r-r_0)} - 2e^{-a(r-r_0)})$

势能曲线

- 当坐标系和势能零点一经确定，势能仅是坐标的函数$V(r)$或$V(x,y,z)$
  - 当考察原子核中各核子之间、分子中各原子之间的相互作用时，力和速度等概念不用了，而能量概念继续存在
  - 因此在讨论量子理论时我们可以看到势能曲线，而很少看到微观粒子间的作用力曲线，因为一般采用能量而不是采用力来分析问题
- 势能曲线的用途
  - 由势能曲线求保守力： $\vec{F} = -\nabla V(r)$
  - 求平衡位置及判断平衡的稳定性
    - 平衡位置：就是物体所受作用力为零的位置。平衡位置位于势能曲线的极值处
    - 平衡的稳定性：取决于偏离平衡位置时，物体所受力方向
      - 稳定平衡， 力始终指向平衡位置;
      - 不稳定平衡， 离开平衡位置，力背离平衡位置方向
      - 随遇平衡

势能曲线

- **平衡位置与稳定性**

为简单记，考虑一维情况， $V = V(x)$

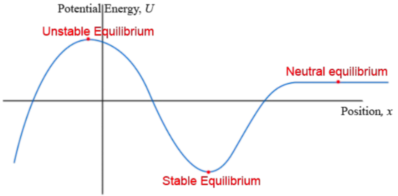
在平衡位置 x_0附近做泰勒展开

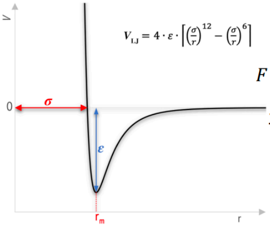
$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots$$
$$= V(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots$$
$$\approx V(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2$$

$$F = -V'(x) = -V''(x_0)(x - x_0) = -V''(x_0)\Delta x$$

$F = -k\Delta x$ $\quad \boxed{k = V''(x_0)}$

$V''(x_0) > 0$：稳定平衡
$V''(x_0) < 0$：不稳定平衡
$V''(x_0) = 0$：随遇平衡





双原子分子的Lennard-Jones势能

$$F = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{4\varepsilon}{\sigma}\left(12\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{13} - 6\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{7}\right)$$

平衡位置 $r_{min} = 2^{\frac{1}{6}}\sigma$

平衡性质：

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{24\varepsilon}{\sigma^2}\left(26\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{14} - 7\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{8}\right)$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right|_{r=r_{min}} > 0$$

功能原理和机械能守恒定律

- 根据质点系的动能定理$W_{ext.}+W_{int.}=E_k-E_{k0}$ (外力做功=体系动能**增加**)
- 一般地，可以将内力所作的功分为保守力做功和非保守力做功两部分
  - $W_{int.}=W_{ci.}+W_{nci.}$
    - 其中，保守内力做功 $W_{ci.}=V_{p0}-V_p$ (保守内力做功=体系势能**减少**)
  - $W_{ext.}+W_{int.}=W_{ext.}+V_{p0}-V_p+W_{nci.}=E_k-E_{k0}$
  - $W_{ext.}+W_{nci.}=(E_k+V_p)-(E_{k0}+V_{p0})$
- 定义体系的机械能（Mechanical energy）： $\boxed{E\equiv E_k+V_p}$

$$\Rightarrow \boxed{W_{ext.}+W_{nci.}=E-E_0}$$

  - 功能原理：质点系机械能的增量，等于外力与非保守内力对质点系做功之和

功能原理和机械能守恒定律

- 重要特例：$W_{ext.}=0$，例如
  - 孤立体系，体系不受外力作用
  - 外力的作用点没有位移。如弹簧振子的固定端对弹簧所施的外力
  - 各外力与其相应作用点的位移互相垂直。如固定支承物的支承力
- 此时，体系的机械能的变化仅由非保守力做的功确定，因而有
  - 若$W_{nci.}>0$，体系机械能增加；（如炸弹爆炸）
  - 若$W_{nci.}<0$，体系机械能减少；（如摩擦力，称为耗散力）
  - 若$W_{nci.}=0$，体系机械能守恒

几点说明：

❖ 功能原理和机械能守恒定律只在惯性系中成立；非惯性系中要引入惯性力

❖ 在不同的参考系中，力所做的功，体系的动能和体系的机械能可能不同

➢ 内力所作的总功虽与参考系无关（对非惯性系也成立），但外力的功一般与参考系有关

➢ 体系的动能与参考系有关；势能与参考系无关

➢ 一个体系在一个参考系中机械能守恒，但在另一个参考系中并不一定成立

功能原理和机械能守恒定律

- 由体系的功能原理：$W_{ext.} + W_{nci.} = E - E_0$，如果质点组所受合外力非零，则质点组的质心系是非惯性系，需要考虑惯性力的贡献
- 在质心系中：
  - $W'_{ext.} + W'_{nci.} + W'_{inertial} = E_c - E_{c0}$
  - 其中 $E_c = E_{kc} + E_p$ 为质心系中质点组的总机械能（势能与参考系无关）
- 惯性力做功：
  - 设质心的加速度为$\vec{\boldsymbol{a}}_c$，则第i个质点的惯性力为 $-m_i\vec{\boldsymbol{a}}_c$
  - $W'_{inertial} = \sum_i \int_{\vec{r}_{iA}}^{\vec{r}_{iB}} -m_i\vec{\boldsymbol{a}}_c \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}'_i = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i -m_i\vec{\boldsymbol{a}}_c \cdot \vec{\boldsymbol{v}}'_i\, dt = \int_{t_0}^{t_1} -\vec{\boldsymbol{a}}_c \cdot (\sum_i m_i\vec{\boldsymbol{v}}'_i)dt = 0$
- 则有质心系中的功能原理：$\boxed{W'_{ext.} + W'_{nci.} = E_c - E_{c0}}$
  - 即在质心系中，外力做功与非保守内力的功之和等于体系机械能的增量，与惯性力无关。功能原理形式上与惯性系中的相同

只要我们选择质心系，即使它不是惯性系，也不需要考虑惯性力所作的功

宇宙速度

第一宇宙速度：$7.9 km/s$
第二宇宙速度：$11.2 km/s$
第三宇宙速度：$16.7 km/s$
详见 Prof. Xu 的 Chapter 3 Lecture P65-P72

考虑两个质点的孤立体系，不受外力

在质心系中处理：质心的运动 + 两质点的相对运动

质心：静止或匀速直线运动，质心系为惯性系

折合质量：$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$，$\vec{F} = \mu\ddot{\vec{r}}$

体系能量：$E = \frac{1}{2}\mu\vec{v}^2 + V(r)$

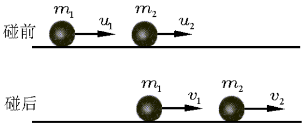
1 内容回顾与补充拓展

碰撞：两物体互相接近、运动状态发生急剧变化的过程
碰前：两物体均处于自由运动状态，没有相互作用
碰后：分离，回到各自的自由运动状态
碰撞过程：发生相互作用，涉及动量和能量交换的过程
碰撞前后系统动量守恒，有些过程中的内力远大于外力，而且作用时间极短，外力的冲量可以忽略，也可以看成是碰撞

弹性碰撞：碰撞过程中没有机械能的损失
非弹性碰撞：碰撞后物体的形变不能完全消失，这时机械能不守恒
一维碰撞：碰撞前后两质点的速度都在同一条直线上，也称为正碰
二维碰撞：碰撞前后质点的速度在同一个平面内
三维碰撞：碰撞前后不在同一个平面内
二维、三维碰撞也称为斜碰

正碰

- 设两球碰前速度$\vec{u}_1,\vec{u}_2$，碰后$\vec{v}_1,\vec{v}_2$，以球心连线为坐标轴，以$\vec{u}_1$的正方向为轴的正方向。则由动量守恒
  - $m_1u_1+m_2u_2=m_1v_1+m_2v_2$
- 为求解v_1,v_2，尚缺一个方程，须对碰撞进行细致分析→考虑一些极限情况
- (1)弹性碰撞：碰撞前后机械能没有损失



$$\begin{cases} m_1u_1+m_2u_2=m_1v_1+m_2v_2 \\ \frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2u_2^2=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}u_1+\frac{2m_2}{m_1+m_2}u_2 \\ v_2=\frac{2m_1}{m_1+m_2}u_1+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}u_2 \end{cases}$$

$$\boxed{v_2-v_1=u_1-u_2}$$

碰撞前后相对速率大小不变

注意：在S系里可以立马得到此结论

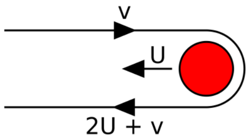
物理图像不直观？考虑几个特殊情况（极限情况）：弹弓效应、对碰、打靶

正碰

❖ “弹弓效应”：若$m_1 \ll m_2$

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2 \approx -u_1 + 2u_2$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} u_2 \approx u_2$$

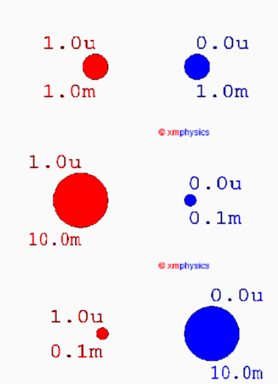


若初始时刻（碰撞前），u_1, u_2速度方向相反（即相向而行），则碰后小球速度反向，并获得一个增量
若u_1, u_2速度方向相同，则可以实现减速

正碰

- 若$m_1 = m_2$： $v_1 = u_2, v_2 = u_1$， 两球碰后交换速度
  - 特殊情况： $u_1 + u_2 = 0$，对碰(对心碰撞，head-on collision)

- $u_2 = 0$即m_2静止（“打靶”实验)
  - 若$m_1 \gg m_2$，且$u_2 = 0$即m_2静止：则 $v_1 \approx u_1, v_2 \approx 2u_1$，即大球几乎以原速继续前进，而小球以两倍于大球的速率前进
  - 若$m_1 \ll m_2$，且$u_2 = 0$即m_2静止：则 $v_1 \approx -u_1, v_2 \approx 0$，小球以相等的速率返回，而大球仍静止



正碰

完全非弹性碰撞：$\Delta E_k = -\frac{1}{2}\mu(u_1 - u_2)^2$

资用能：质心动能在对撞前后不变，m_1，m_2 在质心系中的动能之和称为资用能 $E_{kc0} = -\frac{1}{2}\mu(u_1 - u_2)^2$

正碰

一般非弹性碰撞

- (3) 一般非弹性碰撞，定义恢复系数$e \equiv \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2}$ $\Rightarrow \frac{E_{kc}}{E_{kc0}} = \frac{\frac{1}{2}\mu(v_1 - v_2)^2}{\frac{1}{2}\mu(u_1 - u_2)^2} = e^2$
  - 恢复系数e由实验测得，只与两物体质料有关

$$\begin{cases} m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ v_2 - v_1 = e(u_1 - u_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{m_1 - e m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{(1+e) m_2}{m_1 + m_2} u_2 \\ v_2 = \frac{(1+e) m_1}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{m_2 - e m_1}{m_1 + m_2} u_2 \end{cases}$$

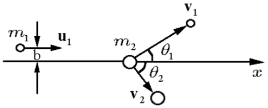
- 碰撞过程中的动能损失： $\Delta E_k = E_{kc} - E_{kc0}$
  - 碰前： $E_{kc0} = \frac{1}{2}\mu(u_1 - u_2)^2$
  - 碰后： $E_{kc} = \frac{1}{2}\mu(v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2}\mu e^2(u_1 - u_2)^2$
  - $\Delta E_k = \frac{1}{2}\mu(e^2 - 1)(u_1 - u_2)^2$

1. $e = 1$ 完全弹性碰撞;
2. $e = 0$ 完全非弹性碰，动能损失最大;
3. $0 < e < 1$ 非弹性碰撞

斜碰

- 在一般情况下，斜碰为三维问题，碰撞后的速度$\vec{\boldsymbol{v}}_1, \vec{\boldsymbol{v}}_2$不一定在$\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2$所组成的平面上
  - 若碰撞前一个小球处在静止状态，即$\vec{\boldsymbol{u}}_2 = 0$，则是二维问题 (eg. 康普顿散射)
- 若该斜碰是完全弹性碰撞，则有动量和能量都守恒

$$\begin{cases} m_1\vec{\boldsymbol{u}}_1 = m_1\vec{\boldsymbol{v}}_1 + m_2\vec{\boldsymbol{v}}_2 \\ \dfrac{1}{2}m_1\vec{\boldsymbol{u}}_1^2 = \dfrac{1}{2}m_1\vec{\boldsymbol{v}}_1^2 + \dfrac{1}{2}m_2\vec{\boldsymbol{v}}_2^2 \end{cases}$$



- 取$\vec{\boldsymbol{u}}_1$方向为x轴，碰撞所在面为$x-y$平面，上面的方程化为

$$\begin{cases} m_1u_1 = m_1v_1\cos\theta_1 + m_2v_2\cos\theta_2 \\ m_1v_1\sin\theta_1 = m_2v_2\sin\theta_2 \\ \dfrac{1}{2}m_1\vec{\boldsymbol{u}}_1^2 = \dfrac{1}{2}m_1\vec{\boldsymbol{v}}_1^2 + \dfrac{1}{2}m_2\vec{\boldsymbol{v}}_2^2 \end{cases}$$

- 通常，应用实验方法测出四个未知数（$v_1, v_2, \theta_1, \theta_2$）中的一个，才能求出其余三个
- 如果碰撞是非弹性的， 那么只有前两个方程，未知量有四个，所以必须用实验方法测出四个未知数中的两个，才能求出其余两个

质心坐标系中讨论碰撞

- 在质心系中，体系的动量永远为零。质心系中描写碰撞，表达形式简单，物理意义清晰
- 质心速度为$\vec{\boldsymbol{v}}_c = \dfrac{m_1\vec{\boldsymbol{u}}_1 + m_2\vec{\boldsymbol{u}}_2}{m_1+m_2}$
- 在质心系中，碰撞前后两质点的速度分别为$\vec{\boldsymbol{u}}_1', \vec{\boldsymbol{u}}_2'$和$\vec{\boldsymbol{v}}_1', \vec{\boldsymbol{v}}_2'$
- 正碰：

$$\begin{cases} m_1 u_1' + m_2 u_2' = m_1 v_1' + m_2 v_2' = 0 \\ v_2' - v_1' = e(u_1' - u_2') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1' = -e u_1' \\ v_2' = -e u_2' \end{cases}$$

即在质心系中每个质点碰后的速度为其碰前速度的$-e$倍

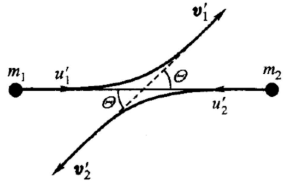
对于弹性正碰，在质心系下，粒子的速率在碰撞前后保持不变，只是方向相反

质心坐标系中讨论碰撞

- 弹性斜碰：

$$\begin{cases} m_1\vec{u}_1' + m_2\vec{u}_2' = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = 0 \\ \frac{1}{2}m_1\vec{u}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{u}_2'^2 = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2'^2 \end{cases}$$

碰前$\vec{u}_1', \vec{u}_2'$在一条直线上，而碰后$\vec{v}_1', \vec{v}_2'$也在一条直线上，故可将该方程写成标量形式



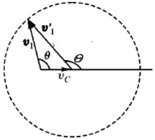
$$\Rightarrow \begin{cases} v_1' = u_1' \\ v_2' = u_2' \end{cases}$$

即在质心系中，两球碰撞后，它们的速度都只改变方向，而不改变大小。偏离原方向的角度称为散射角，$\Theta \in [0, \pi]$

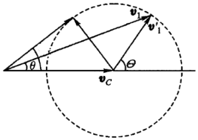
思考：能在质心系下求出散射角的具体大小吗？

- 若靶粒子m_2静止，即$\vec{u}_2 = 0$，则有$\vec{v}_c = \frac{m_1\vec{u}_1}{m_1+m_2}$

$$\begin{cases} \vec{u}_1' = \vec{u}_1 - \vec{v}_c = \frac{m_2\vec{u}_1}{m_1 + m_2} \\ \vec{u}_2' = \vec{u}_2 - \vec{v}_c = -\frac{m_1\vec{u}_1}{m_1 + m_2} \end{cases}$$



$m_1 < m_2$



$m_1 > m_2$

- 若$m_1 < m_2$，$v_c < v_1'$，实验室系m_1的散射角θ可取$0 \sim \pi$之间的任意值，$0 \le \theta \le \pi$
- 若$m_1 > m_2$，$v_c > v_1'$，$0 \le \theta \le \sin^{-1}\frac{m_2}{m_1}$

作业习题讲解

Q&A

Thanks!