

1. 胡少铠 PB25511991:

助教好，上课讲的对称性和守恒律不太理解，上网一搜索就是从拉格朗日方程开始...所以为什么空间平移不变性是动量守恒的来源啊？动量守恒不就是m和v不变么，好像跟平不平移空间没什么关系呀。还有还有，时间平移不变性为什么是能量守恒的来源？好像相关的推导都没涉及到时间呀。

2. 易俊驰 PB25000114:

2:41

HD 5G 90



Chapter5_流体_2025Fall...

...



• 要描述过M点任意小面元的应力情况, 需要用到应力张量

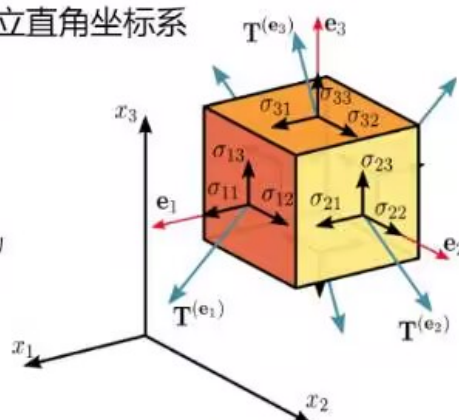
- 过一点有无数的截面，只有任意截面上的应力分量都被确定，才能说应力状态是确定的
- 取三个互相垂直的截面，并以它们的法线方向建立直角坐标系
- 每个面有三个方向的分力，总共有9个应力分量

柯西应力张量 (Cauchy stress tensor)

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad \sigma_{ij}, i=j \text{ 法应力}; i \neq j \text{ 切应力}$$

对于法线沿x正方向的截面的应力: $\vec{\sigma}_x = \sigma_{xx}\vec{i} + \sigma_{xy}\vec{j} + \sigma_{xz}\vec{k}$

对于法线方向为 \vec{n} 的截面的应力: $\vec{\sigma}_n = \sigma \cdot \vec{n}$



11/11/25

徐来林

11

应力

• 应力张量的性质

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

可以证明:

- σ 是对称张量, 即 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$
- 应力张量具有三个互相垂直的主轴方向。在主轴坐标系中, 应力张量可写成下列对角形式
 - $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma'_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{zz} \end{pmatrix}$
 - $\sigma'_{xx}, \sigma'_{yy}, \sigma'_{zz}$ 称为法向主应力。于是在与主轴方向垂直的面上, 只有法应力, 切应力等于零

理想流体:

- 对切向形变没有任何抗拒能力, 因此在理想流体内部, 应力到处与它所在的面垂直
- 流体不能承受拉力, 所以法向应力必为压力
- 可以证明: 同一点各个不同方向上, 法向应力是相等的, 即 $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$, p 为理想流体的压力 (压强)

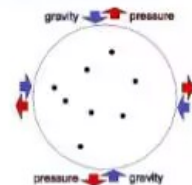
静止流体: 可以是理想的, 也可以是黏性的。流体在静止时不能承受切向应力, 同样可以得出上述理想流体对应的性质

静止流体平衡方程

- 取一封闭曲面 S , 以 S 为边界的体积 V , 这部分流体处于静止, 表面力和彻体力平衡

$$\oint \vec{T} d\vec{S} + \int \vec{F} \rho dV = 0$$

\vec{F} 为单位质量上的彻体力, ρ 为流体密度, \vec{T} 为流体内部的应力



积分形式的静止流体平衡方程

- 静止的流体不可能存在切应力, 只有正应力。而且流体中通常只有压应力 (即应力与法方向相反), 用 p 表示

$$-\oint p d\vec{S} + \int \vec{F} \rho dV = 0$$

$d\vec{S}$ 为有向曲面, 方向垂直面元、由体积内指向外侧
 p : 压强, $\vec{T} d\vec{S} = -p d\vec{S}$

由高斯散度定理可得 $\oint f d\vec{S} = \int \nabla f dV$

$$\nabla p = \rho \vec{F}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho F_x, \frac{\partial p}{\partial y} = \rho F_y, \frac{\partial p}{\partial z} = \rho F_z$$

$$\Rightarrow \oint p d\vec{S} = \int \nabla p dV$$

微分形式的流体平衡方程

压强



编辑



转Word



转图片



保存



更多

这个矩阵为什么自伴

3. 易俊驰 PB25000114:

11:14



数学基础_2025Fall.pdf



特征方程

- 对于 n 阶常系数齐次线性微分方程

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

- 其特征方程为

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

- 在复数域 它有 n 个根 称为对应微分方程的特征根 记做 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

在复数域, 它有 n 个根, 称为对应微分方程的特征根。记作 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 每个特征根对应于一个特解, 这些特解线性无关

特征根	特解
λ_j 为互异实根	$y_j = e^{\lambda_j x}, j = 1, \dots, n$
$\lambda = \alpha + i\beta$ 为单根 则 $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ 也是	$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ $y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$
λ 是 r 重实根	$y_1(x) = e^{\lambda x}, y_2(x) = x e^{\lambda x},$ $\dots, y_r = x^{r-1} e^{\lambda x}$
若 $\lambda = \alpha + i\beta$ 是 r 重复根 则 $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ 也是	$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x), y_2 = x e^{\alpha x} \cos(\beta x),$ $\dots, y_r = x^{r-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ $y_{r+1}(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x), y_{r+2} = x e^{\alpha x} \sin(\beta x),$ $\dots, y_{2r} = x^{r-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

11/11/25

徐来林

18

解的结构

- 如果齐次方程 $\mathcal{L}(y) = 0$ 有 n 个线性无关的特解, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, 那么它的通解是:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

- c_1, c_2, \dots, c_n 是任意常数

- 非齐次线性微分方程 $\mathcal{L}(y) = f(x)$ 的通解是它的一个特解 $y^*(x)$ 与对应齐次方程 $\mathcal{L}(y) = 0$ 的通解之和

$$y(x) = y^*(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

$$D = \frac{d}{dx}, \mathcal{L} = a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \dots + a_n D^n$$

11/11/25

徐来林

19

特解的形式

$f(x)$ 的形式	条件	特解的形式
$P_n(x)$	"0" 不是特征根 "0" 是单特征根 "0" 是重特征根	$Q_n(x)$ $x Q_n(x)$ $x^2 Q_n(x)$
$a e^{\alpha x}$	α 不是特征根 α 是单特征根 α 是重特征根	$A e^{\alpha x}$ $A x e^{\alpha x}$ $A x^2 e^{\alpha x}$
$a \cos \beta x + b \sin \beta x$	$\pm i\beta$ 不是特征根 $\pm i\beta$ 是特征根	$A \cos \beta x + B \sin \beta x$ $x(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$
$P_n(x) e^{\alpha x}$	α 不是特征根 α 是单特征根 α 是重特征根	$Q_n(x) e^{\alpha x}$ $x Q_n(x) e^{\alpha x}$ $x^2 Q_n(x) e^{\alpha x}$
$P_n(x) e^{\alpha x} (a \cos \beta x + b \sin \beta x)$ ($\beta \neq 0$)	$\alpha \pm i\beta$ 不是特征根 $\alpha \pm i\beta$ 是特征根	$e^{\alpha x} [Q_n(x) \cos \beta x + R_n(x) \sin \beta x]$ $x e^{\alpha x} [Q_n(x) \cos \beta x + R_n(x) \sin \beta x]$

其中 $Q_n(x), R_n(x)$ 为 n 次多项式, 系数待定

11/11/25

徐来林

20



编辑



转Word



转图片



保存



更多

怎么理解这个微分方程的解法以及一堆特解的形式

4. 陈必昊 PB25020563:

对于非惯性系，需考虑惯性力的力矩 M'_I : $\frac{dL}{dt} = M'_{ex} + M'_I$

- 只有外力矩才对体系的角动量变化有贡献，但内力矩对角动量在体系内的分配是有作用的
- 角动量守恒定律是一个**独立**的规律，并不包含在动量守恒定律或能量守恒定律中
- 角动量守恒定律是**矢量式**，它有三个分量，各分量可以分别守恒
- 讲一个体系角动量守恒并不正确，需讲清楚是对哪一点守恒！

11/6/25 徐来林 110

举例

【例题】圆锥摆。摆球质量为 m ，做匀速圆周运动，轻质绳长为 l 的，与竖直方向夹角为 α

(1) 以圆心 A 为参考点，合力矩 $\vec{M}_{ex} = 0$
 角动量 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = L_z \vec{e}_z, L_z = mvr$
 显然满足角动量守恒

(2) 以悬挂点 B 为参考点
 重力矩 $\vec{M} = \vec{r}' \times m\vec{g}$ ，沿着轨迹切线方向 \vec{e}_τ , $\vec{M} = mgl \cos \alpha \vec{e}_\tau$
 角动量 $\vec{L} = \vec{r}' \times \vec{p}$
 将分解为沿着 $\vec{\omega}$ 方向和垂直于 $\vec{\omega}$ 方向, $\vec{L} = \vec{L}_\parallel + \vec{L}_\perp$
 $\vec{L}_\parallel = \vec{r}_\parallel \times \vec{p} = mvr \vec{e}_z$
 $\vec{L}_\perp = \vec{r}_\perp \times \vec{p} = mvl \cos \alpha \vec{e}_\parallel$
 \vec{L}_\parallel 为恒矢量, \vec{L}_\perp 为旋转的矢量 (沿水平方向 \vec{e}_\parallel)
 $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_\perp}{dt} = mvl \cos \alpha \frac{d\vec{e}_\parallel}{dt} = mvl \cos \alpha \vec{\omega} \times \vec{e}_\parallel = m\omega^2 r \cos \alpha \vec{e}_\tau$
 (或直接由旋转的矢量: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L}$)
 容易验证: $m\omega^2 r \cos \alpha = mgl \cos \alpha \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$

牛顿动力学: Mg
 $T \cos \alpha = mg$
 $T \sin \alpha = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$
 $\Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{r} \tan \alpha$

当然也可以直接从角动量定理出发，求得 ω

11/6/25 徐来林 111

举例

【例题】卢瑟福等人发现用 α 粒子轰击金铂时有些入射偏转角很大，甚至超过 90° 。卢瑟福于1911年提出原子必有一带正电的核心，即原子核；此即原子结构的行星模型。已知 α 粒子的质量为 m ，以速度 v_0 接近电荷为 Ze 的重原子核。已知瞄准距离为 b ，如图所示，求 α 粒子接近重核的最近距离。设原子核质量比 α 粒子大很多，可近似看作静止

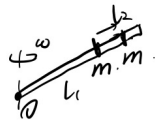
这里我写写怎么是 $\sin \alpha$ ，这不是一个叉乘 $\sin \alpha$ 嘛，这里是ppt有问题

5. 吕峻熙 PB25000095:

为什么质点的动能定理和动量定理实际上是一个方程。而质点系中就是相互独立的方程了。

6. 冯子禾 PB25000081:

角速度不变体系



杆绕O以 ω 水平面内旋转,其上套有环m.

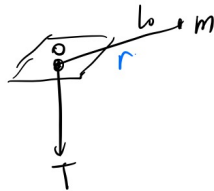
从 l_1 处(相对杆)静止释放,则到 l_2 处的径向速度 v ?

能量解法: $F_{离} = m\omega^2 r$
 定义势能 $V_{eff} = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ (满足 $F_{离} = -\frac{dV}{dr}$)

$$\Rightarrow \text{机械能 } \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 l_2^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 l_1^2$$

$$\Rightarrow v = \omega \sqrt{l_2^2 - l_1^2}$$

角动量守恒体系



水平桌面上质点m,手中拿绳子穿过孔与m相连.

m在 l_0 处以 $v_0 \perp l_0$ 释放.

此时m对O角动量守恒 即 $L = m l_0 v_0$.

$$L = m r \cdot (r\dot{\theta}) = m r^2 \dot{\theta}$$

$$\text{故切向运动动能 } E_k = \frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}m r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{2mr^2}$$

$$\text{定义势能 } V_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} + E_p.$$

$$(\text{动能仅有径向 } E_k = \frac{1}{2}m\dot{r}^2)$$

做题时常用到这两种“有效势能”,都可以把问题简化为只在径向考虑,但是这二者形式上大相径庭,我总是背下解题的套路,那么有没有更高层次的理解

7. 胡少铠 PB25511991:

图 10.5 流体的表面力

作用力, 则

$$p = \frac{df}{d\sigma} \quad (10.3.1)$$

就代表作用在单位面积上的表面力, 即应力. 应力 p 在法线 n 上的投影 p_n , 叫做**法应力**, 而应力 p 在过同一点的切面上的投影 p_t , 叫做**切应力**. 由于流体中可以存在切应力, 故 p 的方向一般不与 $d\sigma$ 的方向 (即 n 的方向) 相同, 当 $d\sigma$ 的方向改变时, p 的大小和方向也随之改变.

由此可见, 体积力和表面力的基本差异是: 体积力分布密度是空间点和时间的单值函数, 亦即它形成一个矢量场, 而应力则在空间每一点随受力面取向的不同而有无穷多个值. 我们可以说应力是两个矢量即空间点的位置矢量 r 和该点处小面元的法线单位矢量 n 的函数.

如果我们对于“通过 M 点、任意方向的小面元如 $(d\sigma)$ ”所相应的应力都清楚了, 那么可以认为我们对这一点的应力情况就完全清楚了. 下面我们来证明, 应力

助教好, 我对体积力和表面力的基本差异这一段有疑问, 体积力与空间点和时间有关没问题, 但是应力不应该不仅和空间点和受力面取向有关还时间有关吗? 为什么这里没有说应力和时间有关?