

力学 A (PHYS1001A.04): 第二次习题课

Course NOT easy: The Survival Guide 1+1

Yu Shu & Chihao Shi

School of Physics, USTC

Oct.13, 2025



1 内容回顾与补充拓展

2 作业习题讲解

3 Q&A

① 内容回顾与补充拓展

自然坐标系与微分几何

运动的相对性

运动学总结

牛顿运动定律

单位制与量纲分析

力

牛顿运动定律的应用

③ Q&A

① 内容回顾与补充拓展

自然坐标系与微分几何

运动的相对性

运动学总结

牛顿运动定律

单位制与量纲分析

力

牛顿运动定律的应用

② 作业习题讲解

③ Q&A

自然坐标系

在质点运动的轨迹线上任取一点 O 为自然坐标原点，以质点所在位置 P 点与 O 点间轨迹的长度 s 来确定质点的位置，则称 s 为质点的自然坐标。为描写平面内质点的运动，我们还需规定两个依赖于质点位置的单位矢量：

- \vec{e}_τ : 切向单位矢量, 沿曲线切向, 且指向自然坐标增大方向
 - \vec{e}_n : 法向单位矢量, 沿曲线法向, 且指向曲线的凹侧

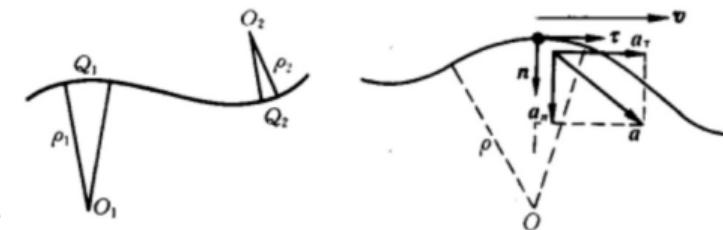
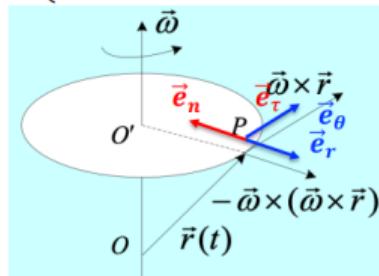
\vec{e}_r 和 \vec{e}_n 不是常矢量：长度不变，但是方向取决于质点的位置
只是轨道上的点才对应有坐标和单位矢量，轨道外的点不能用自然坐标系来描写

运动分解

- 运动方程: $s = s(t)$
 - 速度: $\vec{v} = |\vec{v}| \vec{e}_\tau = \dot{s} \vec{e}_\tau$
 - 加速度: $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = a_\tau \vec{e}_\tau + a_n \vec{e}_n$

对于圆周运动: $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta \Rightarrow \vec{a}_\tau = \vec{a}_\theta, \vec{a}_n = -\vec{a}$

$$\begin{cases} a_r = -r\omega^2 = -\frac{v^2}{r} \\ a_\theta = r\dot{\omega} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{v^2}{r} \\ a_\tau = r\dot{\omega} = i \end{cases}$$

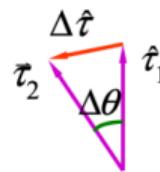
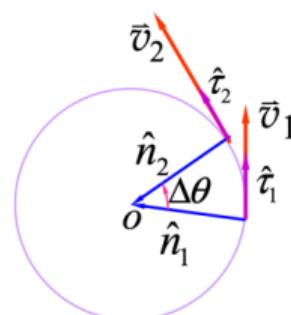


对于一般的光滑平面曲线轨道，对于曲线上的某点附近的一小段，总可以将无穷小曲线段看成某个圆的一段圆弧。此圆称为曲线在该点的曲率圆。

$$\begin{cases} a_n = v^2 \kappa = \frac{v^2}{\rho} & \text{描述运动方向的变化} \\ a_\tau = \dot{v} & \text{描述运动快慢的变化} \end{cases}$$

κ 表征切线方向变化快慢，即曲线的“弯曲”程度，称为**曲率**(curvature)

运动分解



注意：这种推导本质上还是
微元法思想

$$\vec{v} = v\vec{e}_\tau = \dot{s}\vec{e}_\tau \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{s}\vec{e}_\tau + \dot{s}\frac{d\vec{e}_\tau}{dt}$$

$\frac{d\vec{e}_\tau}{dt}$: 旋转的矢量 $\Rightarrow d\vec{e}_\tau \perp \vec{e}_\tau$, $d\vec{e}_\tau \parallel \vec{e}_n$, 只需求出 $d\vec{e}_\tau$ 的模长
(或者 $\frac{d\vec{e}_\tau}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_\tau$, 需要求出 ω 的大小)

考虑无穷小的时间间隔：切线方向转过角度 $\Delta\theta$

$$|\Delta\vec{e}_\tau| = 2 \sin \frac{\Delta\theta}{2} = \Delta\theta$$

$$\frac{|\Delta\vec{e}_\tau|}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega = \frac{v}{\rho}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_n = \dot{s} \frac{d\vec{e}_\tau}{dt} = v \frac{v}{\rho} \vec{e}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{s}\vec{e}_\tau + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n}$$

运动分解

- 运动方程: $s = s(t)$
- 速度: $\vec{v} = |\vec{v}| \vec{e}_\tau = \dot{s} \vec{e}_\tau$
- 加速度: $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = a_\tau \vec{e}_\tau + a_n \vec{e}_n$ $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{s} \vec{e}_\tau + \dot{s} \frac{d\vec{e}_\tau}{dt}$ 如何用弧长参数构造 \vec{e}_τ, \vec{e}_n ?

曲线的切向向量: $\vec{\alpha}(s) = \frac{d\vec{\lambda}(s)}{ds} \rightarrow$ 可以证明 $\vec{\alpha}(s)$ 为单位向量

$$\vec{\alpha}(s) = \frac{d\vec{\lambda}(s)}{ds} = \frac{d\vec{r}(t)}{ds} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\vec{r}}}{v} \Rightarrow |\vec{\alpha}(s)| = 1, \text{ 不妨取 } \vec{e}_\tau = \vec{\alpha}(s)$$

$$\frac{d\vec{e}_\tau}{dt} = \frac{d\vec{e}_\tau}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{d\vec{e}_\tau}{ds}$$

令 $\frac{d\vec{e}_\tau}{ds} = \kappa(s) \vec{\beta}(s)$, $\vec{\beta}(s)$ 为单位向量 ($\kappa(s) \equiv \left| \frac{d\vec{e}_\tau}{ds} \right|$)

$$\vec{e}_\tau \cdot \vec{e}_\tau = 1 \Rightarrow \frac{d(\vec{e}_\tau \cdot \vec{e}_\tau)}{ds} = 2 \vec{e}_\tau \cdot \frac{d\vec{e}_\tau}{ds} = 0 \Rightarrow \vec{e}_\tau \text{ 与 } \frac{d\vec{e}_\tau}{ds} \text{ 正交}$$

不妨取 $\vec{e}_n = \vec{\beta}(s)$

$$\vec{a} = \ddot{s} \vec{e}_\tau + \dot{s} \frac{d\vec{e}_\tau}{dt} = \ddot{s} \vec{e}_\tau + \dot{s}^2 \kappa(s) \vec{e}_n = \dot{v} \vec{e}_\tau + v^2 \kappa(s) \vec{e}_n$$

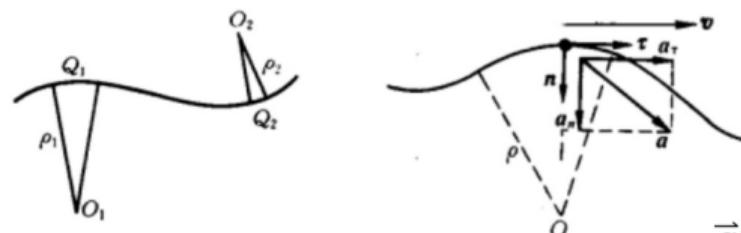
$\kappa(s) \equiv \left| \frac{d\vec{e}_\tau}{ds} \right|$ 表征切线方向变化快慢, 即曲线的“弯曲”程度, 称为曲率

$$\begin{cases} a_\tau = \ddot{s} = \dot{v} \\ a_n = \dot{s}^2 \kappa = v^2 \kappa \end{cases}$$

$$\kappa = \frac{a_n}{v^2}$$

运动分解

- κ 表征切线方向变化快慢，即曲线的“弯曲”程度，称为曲率(curvature)
- 物理图像：对于光滑平面曲线轨道，为表现其弯曲性，可以将无穷小曲线段逼近处理成无穷小圆弧段



$$\vec{v} = |\vec{v}| \vec{e}_\tau = \dot{s} \vec{e}_\tau$$

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = a_\tau \vec{e}_\tau + a_n \vec{e}_n$$

$$\begin{cases} a_\tau = \ddot{s} = \dot{v} \\ a_n = \dot{s}^2 \kappa = v^2 \kappa \end{cases}$$

$$\vec{a} \times \vec{v} = (a_\tau \vec{e}_\tau + a_n \vec{e}_n) \times (\dot{s} \vec{e}_\tau) = \dot{s}^3 \kappa(s) \vec{e}_n \times \vec{e}_\tau$$

$$\kappa(s) = \frac{|\vec{a} \times \vec{v}|}{v^3} = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}$$

由运动学可求得轨迹上任意一点的曲率半径 $\rho = \frac{1}{\kappa}$

与运动的具体形式无关！

知识拓展：Fernet Frame

单位切向量 \mathbf{T} , 单位法向量 \mathbf{N} , 单位副法向量 \mathbf{B} , 被称作弗勒内标架, 他们的具体定义如下:

- \mathbf{T} 是与曲线相切的单位向量, 指向运动方向。
- \mathbf{N} 是法线单位向量, 是切向量 \mathbf{T} 对弧长参数的微分单位化得到的向量。
- \mathbf{B} 是 \mathbf{T} 与 \mathbf{N} 的外积。

我们也有一组方程, 称为 Ferne-Serret Formulas:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \kappa \mathbf{N} \\ \frac{d\mathbf{N}}{dt} = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B} \\ \frac{d\mathbf{B}}{dt} = -\tau \mathbf{N} \end{cases}$$

知识拓展：Fernet Frame

$$s(t) = \int_0^t ||\vec{r}(\tau)|| d\tau$$

$$\mathbf{T} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{ds}}{||\frac{d\mathbf{T}}{ds}||}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$$

由于 $|\mathbf{T}| = 1$, $\frac{d\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}}{ds} = 2\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0$, $\mathbf{T} \perp \mathbf{N}$

$$\text{故 } \begin{bmatrix} \mathbf{N}' & \mathbf{T}' \\ \mathbf{B}' & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

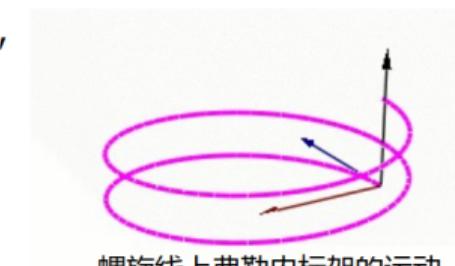
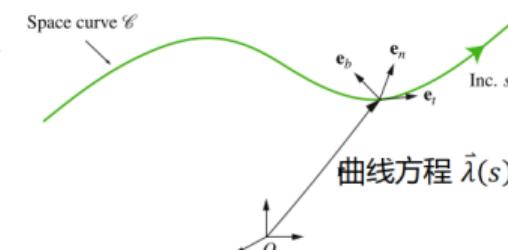
知识拓展：Fernet Frame

- 用来描述欧几里得空间 \mathbb{R}^3 中的粒子在连续可微曲线上的运动
 - 描述了曲线的切向，法向，副法方向之间的关系

- 单位切向量 $\vec{e}_\tau = \frac{d\vec{\lambda}(s)}{ds} = \vec{\lambda}'$

$$-\text{ 主法向量 } \vec{e}_n = \frac{\frac{d\vec{e}_\tau}{ds}}{\left| \frac{d\vec{e}_\tau}{ds} \right|} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\vec{e}_\tau}{ds} = \frac{1}{\kappa} \vec{\lambda}'' \quad \text{构成右手坐标架}$$

- 副法向量 \vec{e}_b 定义为 \vec{e}_τ 和 \vec{e}_n 的外积 $\vec{e}_b = \vec{e}_\tau \times \vec{e}_n = \frac{1}{\kappa} \vec{\lambda}' \times \vec{\lambda}'$



弗勒内 (Frenet) 公式

$$\begin{cases} \frac{d\vec{e}_\tau}{ds} = \kappa \vec{e}_n \\ \frac{d\vec{e}_n}{ds} = -\kappa \vec{e}_\tau + \tau \vec{e}_b \\ \frac{d\vec{e}_b}{ds} = -\tau \vec{e}_n \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_\tau' \\ \vec{e}_n' \\ \vec{e}_b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_\tau \\ \vec{e}_n \\ \vec{e}_b \end{pmatrix}$$

κ 为曲线的曲率 (curvature)
 τ 为曲线的挠率 (torsion)

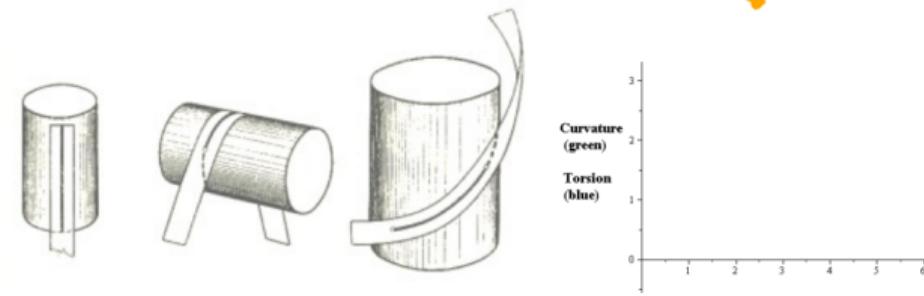
κ 为曲线的曲率 (curvature) $\kappa \equiv \left| \frac{d\vec{e}_\tau}{ds} \right| \equiv |\vec{\lambda}'|$

$$\tau \text{ 为曲线的挠率 (torsion)} \quad \tau = -\vec{e}_n \cdot \frac{d\vec{e}_b}{ds} = -\frac{1}{\kappa} \vec{\lambda}'' \cdot \left(\frac{1}{\kappa} \vec{\lambda}' \times \vec{\lambda}'' \right)' = \frac{\vec{\lambda}' \cdot (\vec{\lambda}'' \times \vec{\lambda}''')}{\vec{\lambda}''' \cdot \vec{\lambda}'''}$$

知识拓展：Fernet Frame

- 曲率半径 $\kappa(s)$: 反映平面内轨迹方向改变的剧烈程度
- 挠率(torsion) τ : 反映轨迹在三维空间的形态, 法向变化率
 - 平面运动的法向不变, 挠度 $\tau=0$
- 根据曲率 κ 和挠率 τ 可对轨道进行分类:
 - 一维直线运动: $\kappa = 0, \tau = 0$
 - 二维平面运动: $\kappa \neq 0, \tau = 0$
 - 三维空间运动: $\kappa \neq 0, \tau \neq 0$

Torus knot with tangent vector (brown), normal vector (green) and binormal vector (blue)



知识拓展：Fernet Frame

以圆周运动为例

- 直角坐标系下的位矢 $\vec{r}(t) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t)$ ($\omega = \text{const.}$)
- 弧长参数 $s = R\omega t \Rightarrow t = \frac{s}{R\omega}$, 变量替换 $\vec{\lambda}(s) = \left(R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R} \right)$
- 切向量: $\vec{\alpha}(s) = \frac{d\vec{\lambda}(s)}{ds} = \left(-\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R} \right) \Rightarrow$ 显然为单位向量
- 主法向量: $\frac{d\vec{\alpha}}{ds} = \kappa \vec{\beta}$, $\frac{d\vec{\alpha}}{ds} = \left(-\frac{1}{R} \cos \frac{s}{R}, -\frac{1}{R} \sin \frac{s}{R} \right) = \frac{1}{R} \left(-\cos \frac{s}{R}, -\sin \frac{s}{R} \right)$
- \rightarrow 曲率 $\kappa = \frac{1}{R}$, $\vec{\beta} = \left(-\cos \frac{s}{R}, -\sin \frac{s}{R} \right)$
- 自然坐标系下的速度、加速度
 - $v = \dot{s} = R\omega$, $\vec{v} = v\vec{\alpha} = R\omega \left(-\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R} \right)$
 - $\vec{a} = \dot{v}\vec{\alpha} + \kappa v^2 \vec{\beta} = R^2 \omega^2 \cdot \frac{1}{R} \cdot \left(-\cos \frac{s}{R}, -\sin \frac{s}{R} \right) = R\omega^2 \left(-\cos \frac{s}{R}, -\sin \frac{s}{R} \right)$
- 直角坐标系下:
 - $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (-R\omega \sin \omega t, R\omega \cos \omega t) = v\vec{\alpha}$
 - $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (-R\omega^2 \cos \omega t, -R\omega^2 \sin \omega t) = \kappa v^2 \vec{\beta}$

① 内容回顾与补充拓展

自然坐标系与微分几何

运动的相对性

运动学总结

牛顿运动定律

单位制与量纲分析

力

牛顿运动定律的应用

② 作业习题讲解

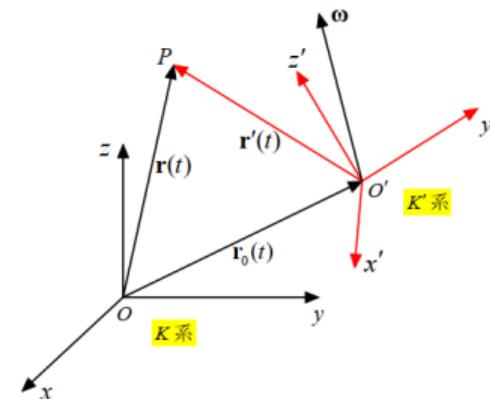
③ Q&A

相对运动

- 通常把相对观察者静止的参考系称为定参考系或**静参考系**
- 把相对观察者运动的参考系称为**动参考系**
- 把物体相对于动参考系的运动称为**相对运动**
 - 相应的有相对速度和相对加速度
- 物体相对静参考系的运动称为**绝对运动**
 - 相应的有绝对速度和绝对加速度
- 动参考系相对静参考系的运动称为**牵连运动**
 - 相应的有牵连速度和牵连加速度

牛顿运动学：

- 时间间隔是绝对的：两事件在 K' 系的时间间隔 $\Delta t'$ 与其相对于 K 系的时间间隔 Δt 是相同的， $\Delta t' = \Delta t$
- 长度是绝对的：如果相对于 K' 系静止的间隔具有长度 $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ ，那么在相对于 K 系中，它具有相同的长度 $|\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1|$ ， $|\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$



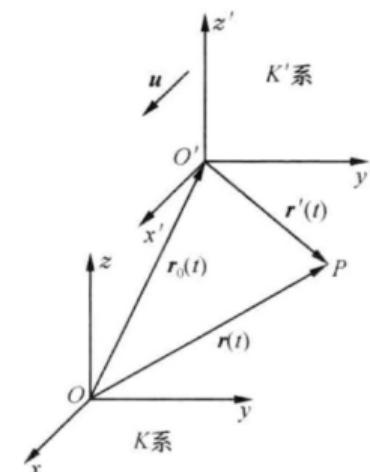
假设 K 系为静参考系， K' 系为动参考系：
 K' 系相对 K 系的相对运动可以分为两类：

平动和**转动**

(转动将在下一章讨论)

平动

- 假设 K 系静止, K' 系相对 K 系做平移运动
 - 注意: 平动不一定是直线运动!
 - 它们具有相同的坐标基矢
 - K 系中的位矢和时间: \vec{r}, t
 - K' 系中的位矢和时间: \vec{r}', t'
 - 设初始时刻 K' 系的坐标原点 O' 与 K 系的坐标原点 O 重合
 - $\begin{cases} t' = t \\ \vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0 \end{cases}$, \vec{r}_0 为 t 时刻 O' 在 K 系的位矢



平动

- 速度、加速度的相对性

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

❖ 速度具有相对性
❖ 加速度对于相对匀速运动的所有参考系，具有不变性

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d(\vec{r} - \vec{r}_0)}{dt} = \vec{v} - \vec{v}_0$$

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt'} = \frac{d(\vec{v} - \vec{v}_0)}{dt} = \vec{a} - \vec{a}_0$$

- 伽利略变换： K' 系相对 K 系做匀速运动 $\vec{a}_0 = 0$

$$\begin{cases} t' = t \\ \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_0 t \end{cases}$$

假设 K' 系相对 K 系沿着 x 轴做匀速运动

$$\Rightarrow \begin{cases} t' = t \\ x' = x - v_0 t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$(t', x', y', z') = (t, x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & -v_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

❖ 伽利略变换在物体以接近光速运动时明显不成立
❖ 电磁过程也不成立（相对论效应）

① 内容回顾与补充拓展

自然坐标系与微分几何

运动的相对性

运动学总结

牛顿运动定律

单位制与量纲分析

力

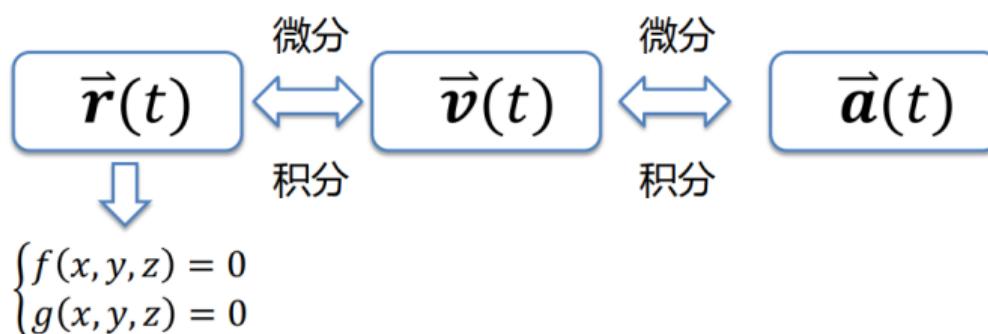
牛顿运动定律的应用

② 作业习题讲解

③ Q&A

- 描述运动的三个物理量

- 位矢 $\vec{r}(t)$
- 速度 $\vec{v}(t)$
- 加速度 $\vec{a}(t)$



- 运动在三个常用坐标系下的分解

直角坐标系 $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$ $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$

极坐标系 $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$

自然坐标系 $\vec{v} = v\vec{e}_\tau = s\vec{e}_\tau$ $\vec{a} = a_\tau\vec{e}_\tau + a_n\vec{e}_n = \dot{v}\vec{e}_\tau + v^2\kappa(s)\vec{e}_n$

- 运动的相对性

- 质点运动是相对一定的参考系而言的，相对不同的参考系，质点运动情况不同，但又以一定的方式互相关联

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0 \quad \vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0 \quad \vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0$$

① 内容回顾与补充拓展

自然坐标系与微分几何

运动的相对性

运动学总结

牛顿运动定律

单位制与量纲分析

力

牛顿运动定律的应用

② 作业习题讲解

③ Q&A

牛顿之前

- 亚里士多德
- 哥白尼、开普勒、伽利略
- 笛卡尔、惠更斯、胡克

牛顿第一定律（惯性定律）

任何物体都保持静止状态或匀速直线运动状态，直到其它物体的作用迫使它改变这种状态为止

- 第一定律是大量观察与实验事实的抽象与概括，不能用实验直接验证。不可能不受其他物体作用
- 第一定律定性提出了“力”和“惯性”两个重要概念
 - 惯性 (Inertial): 运动物体自身具有保持其匀速运动或静止的属性，这种属性称为“惯性”
 - 力是一个物体对另一物体的相互作用。是改变物体运动状态的原因，而不是维持运动状态的原因
- 惯性定律的意义是在于断言：一定存在着这样的参考系，相对于它，所有不受外力作用的物体都保持自己的速度
- 第一定律具有公理性

惯性系

牛顿第一定律定律成立的参考系为惯性参考系 (L.Lange, 1885)。

在惯性系中，从同一点向三个不同方向（非共面）扔出的质点都会直线运动。

常用的惯性参考系：

- 地面参考系：又称实验室参考系。由于地球的自转造成的的加速度为 $3.4 \times 10^{-2} m/s^2$ ，在精度不太高时，自转的加速度效应可以忽略，因此可将地球参考系可以看作惯性参考系
- 地心参考系：即地球 恒星参考系，以地心为原点，坐标轴指向恒星的惯性参考系。地球公转造成的加速度为 $5.9 \times 10^{-3} m/s^2$ ，常在发射人造地球卫星时采用
- 太阳系：即太阳 恒星参考系，以太阳中心为原点，坐标轴指向其它恒星的惯性参考系。太阳对银河系中心的转动加速度为 $10^{-10} m/s^2$ ，常在在研究行星等天体运动时采用
- 基本星表参考系 (Catalogues of Fundamental Stars, FK 系)：是以相对于选定的大量恒星的平均静止位形作为基准的参考系
- 马赫原理

牛顿第二定律

运动的改变与所加的外力成正比，并发生在所加的力的那个直线方向上

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

若物体的质量不随时间变化，则 $\vec{F} = m\vec{a}$ 。

牛顿第二定律

第二定律可认为既是定义又是定律

在相同的力 作用下的两个物体，质量与加速度成反比。设这两个物体的质量分别为 m_1, m_2 ，加速度分别为 a_1, a_2 ，则有： $m_1 a_1 = m_2 a_2 \Rightarrow m_2 = m_1 \frac{a_1}{a_2}$ 。若取 m_1 为标准质量，由于 a_1, a_2 都是可以测量的，那么 m_2 可以完全确定。这种用惯性大小定义的质量称为惯性质量。

- 惯性质量 (Inertial mass): 描述物体运动改变难易程度的物理量
- 引力质量 (Gravitational mass): 描述物体在一个引力场里受引力的大小

从 17 世纪以来不断有实验证明，惯性质量和引力质量是等价的，这条原理在广义相对论中称为等效原理（弱等效原理，weak equivalence principle）。核心实验是 Eötvös 实验

牛顿第二定律

在 2019 年 5 月 20 日之前，千克仍是国际单位制基本单位中唯一仍使用实物进行定义的单位，即被定义为国际千克原器（以铂铱合金铸造）的质量。

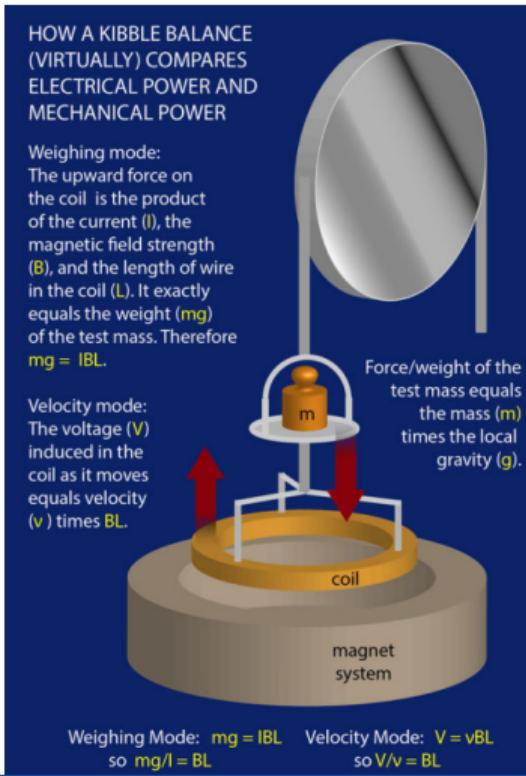
物理学中诸多的物理量都和千克有关，例如牛顿（力学单位），瓦特（功率单位），焦耳（能量单位）等，因此，千克原器任何轻微改变都会引起其他物理量定义的混乱。

现行千克定义为： $1\text{kg} = \frac{h}{6.62607015 \times 10^{-34}} \text{m}^{-2}\text{s}$ 。

牛顿第二定律

- 第二定律适用的参考系是惯性系
- 定律中的外力是合外力 $\vec{F} = \sum_{i=0}^n \vec{F}_i$
- 第二定律是瞬时关系式：当有力作用时，物体即产生加速度。一旦力消失，加速度也随之消失，二者是同步的。牛顿第二定律描述的是一种超距作用 (action at a distance)。
- 公式 $\vec{F} = m\vec{a}$ 是矢量式

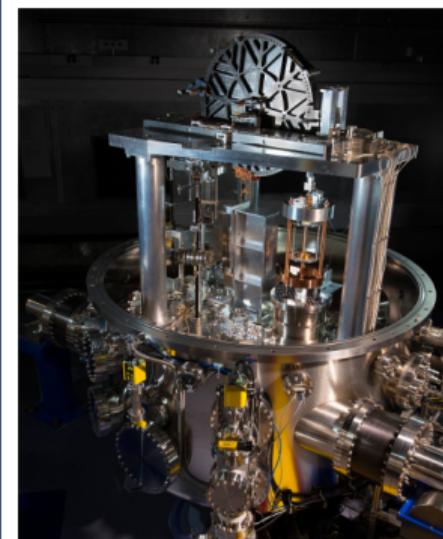
知识拓展：瓦特天平



瓦特天平

$$mgv = IV$$

等式右边是功率的单位，所以称为瓦特天平
由英国物理学家Bryan Kibble 1975年提出



电压和电流的精确测量基于两种量子效应：
约瑟夫森效应(Josephson effect)和量子霍尔效应

$$V = n \frac{\hbar}{2e} f_1 \quad (\text{约瑟夫森效应})$$

$$P = IV = V \frac{V_2}{R_2} = Cf_1 f_2 h$$

$$m = \frac{Cf_1 f_2}{gv} h$$

C 是电学标定常数， f_1 和 f_2 是两个约瑟夫森电压测量的微波频率
NIST-4基布尔秤，于2015年初开始全面运行。2017年时，以十亿分之十三的精度测量了普朗克常数，这一精度足以认为2019年对千克的重定

质量和力的定义

质量是绝对量：物体质量的度量值与物体的运动状态无关，在不同的参考系中质量 m 的度量值相同

质量具有可加性：两个物体组合成大物体的质量等于两个物体质量的和

在国际单位制中，力是导出量力的单位是牛顿 (N)， $1N$ 的力使质量为 $1kg$ 的物体产生 $1m \cdot s^{-2}$ 的加速度

“牛顿第零定律”

牛顿运动定律提出质量的概念，并建立在物体质量不随时间变化的基础上
隐含“质量守恒”：物体的质量被认为是独立于其速度和任何时间与它的外力，总质量既不产生也不消灭，只是在物体相互作用的时候重新分配

1773年，“现代化学之父”拉瓦锡（Antoine Lavoisier）提出质量守恒定律：参与化学反应的原子没有被消耗或产生，只是重新组合，因此原子的种类、数量和质量都守恒，从而保证了整个系统的质量守恒。

思考：从现代的观点看，“牛顿第零定律”和拉瓦锡的“质量守恒定律”是否严格成立？

牛顿第三定律

力与反作用力的描述：

- 作用力和反作用力总是成对地产生，并且同时存在、同时消失
- 作用力和反作用力是具有相同性质的力
- 有别于一对平衡力，作用力和反作用力分别作用于两个物体上，不能抵消

思考：重力与支持力是反作用力吗？离心力与向心力是作用力与反作用力吗？

作用力与反作用力相等而反向，是以力的传递不需要时间，即传递速度无穷大为前提的。如果力以有限的速度传递，作用力和反作用力就不一定相等了。

① 内容回顾与补充拓展

自然坐标系与微分几何

运动的相对性

运动学总结

牛顿运动定律

单位制与量纲分析

力

牛顿运动定律的应用

② 作业习题讲解

③ Q&A

详情可见第一次习题课讲义

① 内容回顾与补充拓展

自然坐标系与微分几何

运动的相对性

运动学总结

牛顿运动定律

单位制与量纲分析

力

牛顿运动定律的应用

② 作业习题讲解

③ Q&A

常见的力

力的分类：

- 接触力：两物体因接触而产生的相互作用力
- 非接触力：未接触时即存在的力

常见的力

弹性力（又称胡克力， elasticity）：物体发生弹性变形后，内部产生欲恢复形变的力。常见的有：弹簧的弹力、绳索间的张力、压力、支持力等。

$$\vec{F} = -k\Delta\vec{x}$$

k : 弹性系数，由弹簧本身性质决定。负号表示弹性力与形变方向相反。

常见的力

摩擦力 (friction): 物体与物体相互接触时, 沿接触面两物体相互施以阻止相对滑动的作用力。

分子力是产生摩擦的根本原因。

静摩擦力: $0 \leq f_s \leq \mu_s N$, μ_s 为静摩擦系数。方向: 与物体相对滑动趋势的方向相反。大小: 只能根据物体所处的运动状态, 由平衡条件和牛顿定律来求解, 与正压力 N 无关。

滑动摩擦力: $f_k = \mu_k N$, μ_k 为动摩擦系数。方向: 与物体相对运动的方向相反。

湿摩擦 (粘滞阻力, drag): 固体与液体或者气体接触面发生相对运动时产生的阻力。低速下, 常有 $f = -bv$, 速度较大情况下有 $f = -cv^2$ 。一般情况下, 粘性流体的运动由 N-S 方程描述。

$$\begin{cases} \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \mu [\nabla u + (\nabla \vec{u})^T - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \vec{u})I] + \rho \vec{a}, & \text{可压缩流体} \\ \frac{D\vec{u}}{Dt} = \nu \nabla^2 \vec{u} - \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \vec{f}, & \text{不可压缩流体} \end{cases}$$

常见的力

万有引力：自然界任何两物体之间都存在着相互吸引力，叫做万有引力。两质点间万有引力大小与两质点的质量乘积成正比，与两质点间的距离平方成反比，力的方向沿着两质点的连线。

$$F = \frac{Gm_1 m_2}{r^2}$$

公式中的质量称为引力质量，它是物体与其他物体相互吸引性质的量度。

重力：地球对表面物体的万有引力， $\vec{F} = m\vec{g}$ 。

常见的力

库仑力：两个静止的点电荷之间的作用力的大小与它们电荷 q_1, q_2 的乘积成正比，与它们之间的距离 r 的平方成反比，方向沿着两点电荷的连线。如果电荷是异号的，则为吸引力，如果是同号的，则是排斥力。

思考：万有引力和库仑力数学形式上的一致性，是否有更深层次的原因？

洛伦兹力：带电质点在电磁场中所受力， $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ 。

分子力：分子间相互作用的规律较复杂，很难用简单的数学公式来表示。一般在实验的基础上，采用简化模型处理问题，可近似地用半经验公式 $F = \frac{\lambda}{r^s} - \frac{\mu}{r^t}$ 来描述，其中 $s > t$ 。

基本相互作用

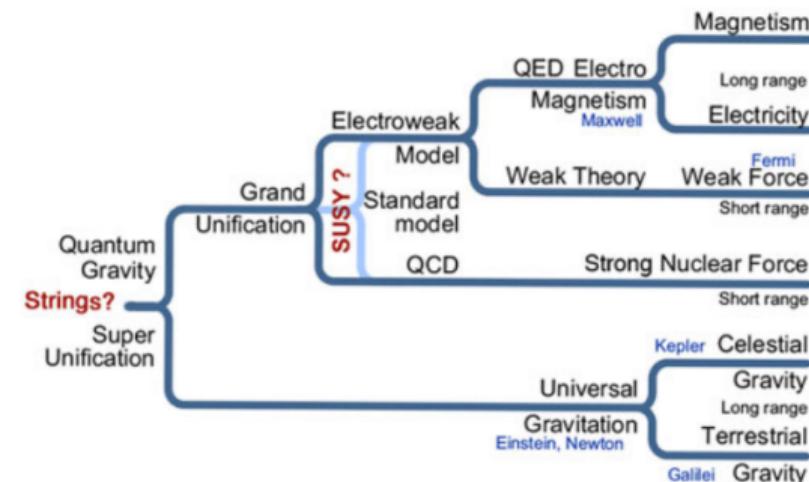
表 1: 基本相互作用

力	相对强度	作用范围	描述性质
强相互作用 (Strong force)	1	10^{-15} m	结合原子核
电磁力 (Electromagnetic force)	10^{-2}	∞	除引力外的宏观力
弱相互作用 (Weak force)	10^{-5}	10^{-15} m	原子核衰变
引力 (Gravitational force)	10^{-39}	∞	组织宇宙

基本相互作用

基本相互作用的统一：

- 1967 年，温伯格和萨拉姆提出电磁和弱相互作用的统一理论，并被实验所验证（1979 年 Nobel Prize）。
- 大统一理论（Grand Unified Theory）：将强相互作用统一进来。
- 万有理论（Theory of Everything）：统合四种基本相互作用，目前被认为最有可能成功的万有理论是弦理论（string theory）和圈量子引力论（loop quantum gravity）。



① 内容回顾与补充拓展

自然坐标系与微分几何

运动的相对性

运动学总结

牛顿运动定律

单位制与量纲分析

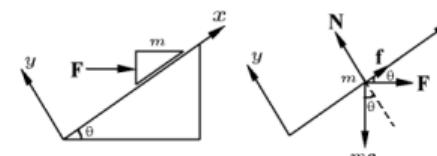
力

牛顿运动定律的应用

② 作业习题讲解

③ Q&A

- 质点动力学的三类问题
 - 1. 已知力求运动; 2. 已知加速度或运动求力
 - 3. 已知某些力和运动条件求另一些力及运动
 - 求解质点动力学问题的基本步骤 (四部曲) :
 - 1. 认物体
 - 隔离物体, 确定研究对象
 - 如果所讨论的问题多于一个质点, 可以把几个物体分别隔离出来, 对每个物体分别加以讨论
 - 2. 看运动
 - 分析所认定的物体的运动状态, 包括它的轨迹速度和加速度
 - 问题涉及几个物体时, 还要找出它们的运动之间的联系, 即它们的速度或加速度之间的关系
 - 3. 查受力: 对每一个质点分析受力(画受力图);
 - 4. 列方程:
 - 选择适当的坐标系, 写出动力学方程 $\bar{F} = m\bar{a}$ 的分量形式;
 - 方程求解、讨论



(a) 装置

(b) 受力分析

在具体问题中，**求运动**和**求力**两类问题往往交织在一起，需要运用一定的技巧，才能从已知量中求出所需的未知量来。

- 在经典力学里，物体的运动必须遵守牛顿运动定律。除此以外，每一个物理系统时常会有一些约束(constraints)，物体的运动也必须遵守这些约束

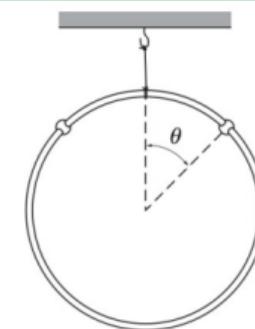
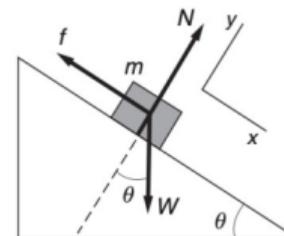
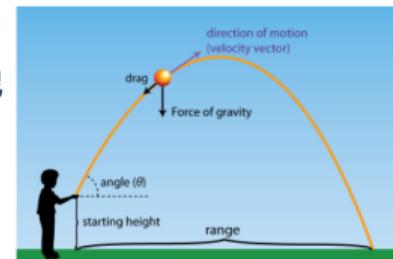
无约束运动

- 物体在重力场或其它力场中运动。可以有均匀介质存在，介质表现为阻尼
- Eg: 抛体运动

约束运动

- 物体在重力场或其它力场中运动，但物体是**约束在曲面或曲线上运动**
- 曲面或曲线的约束可以表现为**约束反力**，即支持力、摩擦力等

- 约束反力不可能事先知道，是一种被动力，必要时可由物体的运动去求得
- 由于物体被约束在一定的几何位形上，它的位矢(坐标)就受到一定限制，这种限制常表现为各坐标之间一定的函数关系，这种函数关系常称为**约束方程**。约束方程起了减少未知因素的作用，从而使运动的求解成为可能



① 内容回顾与补充拓展

② 作业习题讲解

③ Q&A

作业习题讲解

① 内容回顾与补充拓展

② 作业习题讲解

③ Q&A

QgA

Thanks!