

CODE FESTIVAL 2016 予選 B 解説

DEGwer

2016 年 10 月 10 日

A: Signboard

問題概要

16 文字の文字列が与えられる。最小で何文字変えれば”CODEFESTIVAL2016”になるか。

解説

与えられた文字列と、文字列”CODEFESTIVAL2016”を持っておき、同じ箇所の文字を比較して異なるところの個数を単純なループで数えればよいです。

B: Qualification Simulator

問題概要

N 人の参加する予選が行われ、最大で $A + B$ 人が通過する。海外の学生は
その中で B 位まで、国内の学生は海外の学生と合わせて $A + B$ 位までに入
れば予選を通過できる。学生でない人は通過できない。各人について、予選
を通過したかどうかを出力せよ。

解説

カウンタを 2 つもち、片方ではこれまでに通過した人数、もう片方ではこ
れまでに通過した海外の学生の人数を持っておきます。

上位から順に、

- 学生でないなら通過せず、
- 国内の学生なら、前者のカウンタ値が $A + B$ 以下なら通過し、そのカ
ウンタを 1 増加させ、そうでなければ通過せず、
- 海外の学生なら、前者のカウンタ値が $A + B$ 以下かつ後者のカウンタ
値が B 以下なら通過し、両方のカウンタを 1 増加させ、そうでなけれ
ば通過しない

として、順次通過するかどうかを求めていけばよいです。

C: Gr-idian MST

問題概要

$(W+1) \times (H+1)$ のグリッドグラフがある。 (i, j) と $(i+1, j)$ を結ぶときは j によらずコストが p_i 、 (i, j) と $(i, j+1)$ を結ぶときは i によらずコストが q_j にかかる。最小全域木のコストを求めよ。

$$W, H \leq 10^5$$

解説

最小全域木をクラスカル法で求めることを考えます。クラスカル法では、辺をコストの小さい順にソートし、両端点異なる連結成分にあるならその辺を使うという操作を繰り返します。

それを行うために、 p_i たちと q_j たちを一緒にしてソートします。これらの値の小さい順に、辺を追加できるだけ追加していけば最小全域木が求まります。

では、各ステップで辺は何本追加できるでしょうか。配列の p_i に対応する要素を見るときには、 (i, j) と $(i+1, j)$ を結ぶ辺を何本追加できるかを求め、さらにすべての j に対し、 (i, j) と $(i+1, j)$ を連結にすればよいです。

そしてこの連結操作は、「これ以降 x 座標 i と $i+1$ を同一視する」という操作です。よって、この操作では「 x 座標 j を固定したときに、 (i, j) と $(i, j+1)$ を結ぶような辺の数が 1 減少する」ということが起こります。

以上をまとめると、

- p_i たちと q_j たちをまとめてソートし、
- $a = W+1, b = H+1$ として、その列を前から見て、
- (i, j) と $(i+1, j)$ を結ぶ辺を見るときはそのような辺を b 本使い、 a を 1 減らし、
- (i, j) と $(i, j+1)$ を結ぶ辺を見るときはそのような辺を a 本使い、 b を 1 減らす

という操作で満点を得ることができます。計算量は $O((W+H) \log(W+H))$ です。

D: Greedy Customers

問題概要

N 項からなる数列がある。正整数 k を指定し、 k 以上の最初の要素から k を引くという操作を、数列のどの要素も 0 になってはいけないという条件下で最大で何回できるか。 $N \leq 10^5$

解説

$k = 1$ は、最大で (最初の要素 $- 1$) 回指定することができます。それ以降 1 は選択できません。もし数列に 2 が存在しないのならば、それ以降は数列の 2 以上の最初の要素が奇数なら 2 を、偶数なら 3 を選択し続けることで、明らかに最大の回数を達成します。(1 は選択できないため)

では、数列に 2 が存在する場合はどうなるでしょうか。数列の 2 以上の最初の要素が 2 のとき、それ以降 1 も 2 も選択することはできないため、それ以降は 3 以上の整数を指定する必要があります。逆に、それまでは 2 を選択できることになります。

より一般に、最初の要素を 1 まで減らした後、ある位置 x までの位置に整数 $2, 3, \dots, t$ がこの順に (必ずしも連続せず) 出現しているとします。このとき、位置 x 以降の要素を減らすためには、そのあとどんな操作を行っても、 t 以下の整数を指定することはできません。これは、 t 以下の整数 s を指定するためには x までに現れる s を減らさなければなりません、そのためには s 以下の整数を指定せねばならず... となり、数列の要素が 0 になることを避けられないからです。

以上より、次のように整数を減らしていくのが最適です。

- まず、最初の要素を 1 になるまで減らす
- 次に 2 が現れるまで、すべての要素を 2 ずつ (ただし偶数は 3) 減らす
- 次に 3 が現れるまで、すべての要素を 3 ずつ (ただし 3 の倍数は 4) 減らす
- 4, 5, 6, ... と同じように繰り返す

このアルゴリズムは容易に $O(N)$ 時間でシミュレートすることができるので、時間計算量 $O(N)$ でこの問題を解くことができます。

E: Lexicographical disorder

問題概要

英小文字からなる文字列が N 個与えられる。文字どうしの大小関係を表す順列と、整数 k の組が与えられるので、文字列たちをその順序で辞書順にソートしたとき k 番目の文字列が何番目に来るかを求めるクエリを Q 個処理せよ。

$N, Q \leq 10^5$, 文字列長の合計 $\leq 4 \times 10^5$

解説

文字列たちをある文字同士の大小関係のもとでソートしたときに辞書順で x 番目であるというのは、辞書順でその文字列より小さい文字列が $x - 1$ 個あるということと等価なので、その文字列より辞書順で小さい文字列の個数を数えることにします。

文字列 s が文字列 t より辞書順で小さいというのは、以下のいずれかの状況です。

- s は t の接頭辞である
- s と t を前から見て、初めて異なる文字が現れるようなところの文字を比較したときに、 s の文字のほうが小さい

前者の個数は文字同士の大小関係によらないので、全ての文字列についてあらかじめ trie 木上での簡単な操作で求めておくことができます。これ以降、後者を考えます。

「初めて異なる文字が現れる位置」は文字同士の大小関係によりません。よって、 t より小さい t の接頭辞でない文字列がいくつあるかは、これらの「初めて異なる文字が現れる位置の文字」を、ほかのすべての文字列と比較すればいいことになります。

さて、この比較はどれくらい行えばよいでしょうか。文字は 26 種類しかないので、比較すべき文字の組というのは高々 26^2 通りしかありません。よって、各文字列 t と、文字の組 (x_1, x_2) に対し、「 $x_1 < x_2$ のとき、その条件で t より小さいことが決まるような文字列の個数」というのをあらかじめ計算しておけば、クエリ当たり 26^2 回の比較を行い、それによって得られた値をすべて足し合わせることで、すべてのクエリにこたえることができます。

この前計算は、trie 木を使って ($\sigma = 26$ として)、 $O(\text{文字列長の合計} \times \sigma)$ で行うことができるので、合計 $O(\text{文字列長の合計} \times \sigma + Q\sigma^2)$ でこの問題を解くことができました。