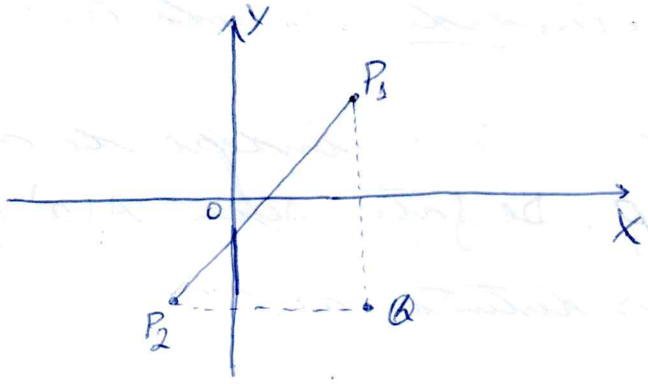
Sejam $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ pontos do plano. Traçamos por P_1 uma reta paralela ao eixo dos y e por P_2 uma reta paralela ao eixo dos x. Estas retas se intersectam num ponto Q de coordenadas (x_1, y_2).



Temos que a distância de P_2 a Q é $P_2Q = |x_1 - x_2|$ e a distância de P_1 a Q é $QP_1 = |y_1 - y_2|$. Logo, pelo Teorema de Pitagoras, temos que a distância de P_1 a P_2 será dada por.

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Exercícios: 1) Ache a distancia entre os pontos abaixo:

a) $P(2, 5)$, $Q(7, 1)$

b) $P(1, 0)$, $Q(-1, 2)$

c) $P(-2, -2)$, $Q(5, 3)$

2) Verifique se ~~Mostre que~~ os pontos $P(1, 1+2\sqrt{3})$, $Q(2+\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$ e $R(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ são vértices de um triângulo equilátero.

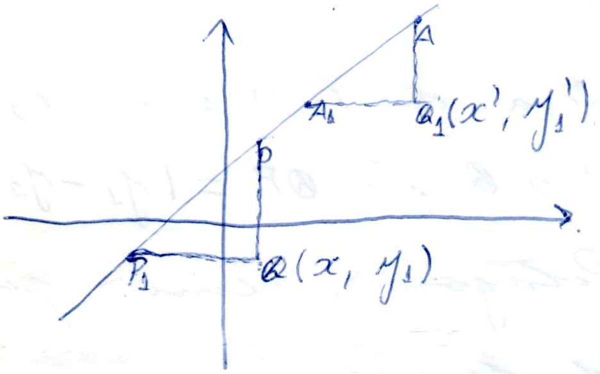
3) Ache o L.G dos pontos do plano que estão a mesma distância dos pontos $P(3, 7)$ e $Q(4, -5)$.

Def: Seja r uma reta não-paralela ao eixo dos y e sejam $P(x, y)$ e $P_1(x_1, y_1)$ dois pontos distintos de r. O número

$$\frac{y - y_1}{x - x_1}$$

é chamado <u>declividade</u> da reta r.

Obs: 1) A declividade da reta r independe da escolha dos pontos P e P_1. De fato, sejam $A(x', y')$ e $A_1(x_1', y_1')$ dois outros pontos distintos de r.



Pela semelhança dos triângulos AQ_1A_1 e PQP_1, temos:

$$\frac{Q_1 A}{A_1 Q_1} = \frac{QP}{P_1 Q} \therefore \frac{y' - y_1'}{x' - x_1'} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

2) A declividade da reta ligando os pontos $(0,0)$ e $(1, m)$ é $\frac{m - 0}{1 - 0} = m$. Logo, todo nº real m é a declividade de alguma reta.

3) Também, por semelhança de triângulos, temos que duas retas não-verticais (não-paralelas ao eixo y) paralelas entre si, têm a mesma declividade. Reciprocamente, se duas retas, não-verticais, tiverem a mesma declividade, elas são paralelas. De fato,

suponha que r_1 e r_2 são duas retas não-verticais do plano, que se intersectam num ponto $P(x,y)$. Sejam $P_1(x_1,y_1)$ e $P_2(x_1,y_2)$ pontos distintos com mesma abscissa $x_1 \neq x$ em r_1 e r_2, respectivamente. Temos $y_1 \neq y_2$. Logo,

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \neq \frac{y_2 - y}{x_1 - x}$$

Portanto, as retas r_1 e r_2 não podem ter a mesma declividade. Assim, se duas retas não-verticais do plano, têm a mesma declividade, elas não se intersectam, ou seja, são paralelas.

A declividade de uma reta é também chamada <u>coeficiente angular</u> da reta.

Se r é uma reta vertical que corta o eixo dos x no ponto $(x_1, 0)$, então todo ponto desta reta tem abscissa x_1. Reciprocamente, todo ponto de abscissa x_1 está sobre esta reta. Logo, um ponto $P(x,y)$ está sobre esta reta se, e somente se, satisfizer a equação $x = x_1$, que é a equação da reta.

Agora, suponha que r seja uma reta não-vertical, com coeficiente angular m. Seja $P_1(x_1, y_1)$ um ponto fixo da reta. Um ponto $P(x,y)$ estará sobre a reta se, e somente se,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \quad \therefore \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

que é a <u>equação da reta</u>.

Reciprocamente, uma equação da forma $ax+by=c$ $(*)$ representa uma reta. De fato, se $b=0$, temos $x=\frac{c}{a}$ que é a equação de uma reta vertical. Se $b\neq 0$, seja $P(x,y)$ e $P_1(x_1,y_1)$ pontos satisfazendo $(*)$, ou seja,

$$ax+by=c \quad \text{e} \quad ax_1+by_1=c.$$

$$\therefore \quad ax+by=ax_1+by_1 \quad \therefore \quad a(x-x_1)=b(y_1-y)$$

$$\therefore \quad y-y_1=-\frac{a}{b}(x-x_1)$$

Logo, $P(x,y)$ está na reta que passa por $P_1(x_1,y_1)$ e tem coeficiente angular $-\frac{a}{b}$.

<u>Exemplo</u>: Achar a equação da reta que passa pelos pontos $A(1,2)$ e $B(3,-5)$

<u>Solução</u>: Como estes pontos não têm mesma abcissa, a reta determinada por eles não é vertical. O coeficiente angular desta reta é

$$m=\frac{-5-2}{3-1}=-\frac{7}{2}.$$

Logo, um ponto $P(x,y)$ estará sobre esta reta se, e somente se,

$$\frac{y-2}{x-1}=-\frac{7}{2} \quad \therefore \quad 2(y-2)=-7(x-1)$$

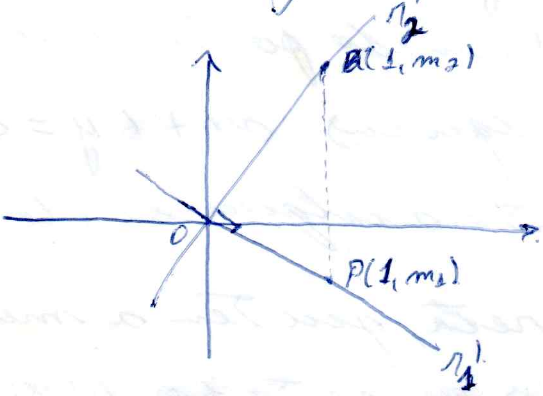
$$\therefore \quad 7x+2y-11=0.$$

<u>Exercício</u>: Determine a equação da reta que passa pelo ponto $P(4,-2)$ e tem coeficiente angular $m=\frac{2}{3}$.

Teorema: Duas retas com coeficientes angulares m_1 e m_2 são perpendiculares se, e somente se, $m_1 m_2 = -1$.

Prova: ($\Rightarrow$) Seja r_1 e r_2 retas perpendiculares com coeficientes angulares m_1 e m_2, respectivamente.

Tomemos retas r_1' e r_2' paralelas a r_1 e r_2, respectivamente, passando pela origem do sistema de coordenadas cartesianas retangulares.



As equações de r_1' e r_2' são dadas por:

$$y = m_1 x \qquad \text{e} \qquad y = m_2 x.$$

Os pontos $P(1, m_1)$ e $Q(1, m_2)$ estão sobre as retas r_1' e r_2', respectivamente. Pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$(OP)^2 + (OQ)^2 = (PQ)^2 \quad \therefore \quad 1^2 + m_1^2 + 1 + m_2^2 = (1-1)^2 + (m_1 - m_2)^2$$

$$\therefore \quad 1 + m_1^2 + 1 + m_2^2 = m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \quad \therefore \quad 2 = -2m_1 m_2 \quad \therefore m_1 m_2 = -1.$$

Reciprocamente, se $m_1 m_2 = -1$, então $(OP)^2 + (OQ)^2 = (PQ)^2$. Logo, o triângulo POQ é retângulo de hipotenusa PQ. Portanto, as retas r_1' e r_2' são perpendiculares. ■