תורת הגרפים – הצגת מושג הגרף
דף תרגילים

שאלה 1
כתבו אלגוריתם שסיבוכיותו $O(|V|+|E|)$ המקבל כקלט גרף מכוון חסר מעגלים ומחזיר את אורכו של מסלול פשוט ארוך ביותר בגרף.

שאלה 2
הראו שכל גרף קשיר בלתי מכוון $G=(V,E)$ מקיים: $|E|\geq|V|-1$.

שאלה 3
הוכיחו:

בגרף לא מכוון כלשהו, $G=(V,E)$ $(|V|>1)$, יש שני צמתים בעלי אותה דרגה.

שאלה 4
הגדרה:

קבוצת צמתים שלטת V' בגרף לא מכוון $G=(V,E)$ היא תת-קבוצה של V המקיימת: כל צומת $v\in V$ שייך ל- V' או שיש קשת המחברת בינו לבין צומת ב - V'.

הוכיחו או הפריכו: בכל גרף לא מכוון, שאין בו צמתים מבודדים, קיימת חלוקה של הצמתים לשתי קבוצות שולטות.

שאלה 5
כאשר משתמשים בייצוג על-ידי מטריצת סמיכויות, רוב האלגוריתמים על גרפים רצים בזמן $\Theta(V^2)$, אולם ישנם כמה יוצאים מהכלל. הראו שניתן לקבוע בזמן $O(V)$ אם גרף מכוון מכיל בור (sink) – קודקוד בעל דרגת כניסה $|V|-1$ ודרגת יציאה 0 – כשמשתמשים בייצוג על-ידי מטריצת סמיכויות.

כתבו אלגוריתם המקבל גרף ומחזיר את הבור בגרף (או -1, אם אין בור בגרף).

שאלה 6
הוכיחו או הפריכו כל אחת משתי הטענות הבאות:

א. לכל גרף מכוון $G=(V,E)$ הוספת קשת חדשה לגרף גורמת למספר הרכיבים הקשירים היטב בגרף לקטון לכל היותר ב-1.

ב. לכל גרף לא מכוון וקשיר $G=(V,E)$ ולכל ריצת *DFS* על *G*, מספר הרכיבים הדו-קשירים של *G* גדול או שווה ממספר העלים בעץ ה-*DFS* המתאים.

תורת הגרפים – הצגת מושג הגרף
פתרונות דף התרגילים – למרצה

מושג הגרף - פתרון שאלה 1

נבצע מיון טופולוגי על הגרף (בזמן $O(|V|+|E|)$).

נעבור על הצמתים בסדר הפוך לסדר המיון (כלומר, נתחיל מהבורות, מהצמתים שדרגת היציאה שלהם 0) ונבצע:

לכל צומת v (ע"פ הסדר שתואר לעיל):

1. $len(v)=0$
2. עבור כל קשת $e=(v, u)$
   2.1. $len(v)=\max(len(v), len(u)+1)$

בסיום האלגוריתם $len(v)$ הוא אורך המסלול הפשוט הארוך ביותר שמתחיל מ-v ולכן יש עוד למצוא את הערך המקסימלי מבין $len(v)$ עבור כל צומת v שהוא מקור בגרף (כלומר, עם דרגת כניסה שווה ל-0).

הסיבוכיות היא $O(|V|+|E|)$.

מושג הגרף - פתרון שאלה 2

ההוכחה היא באינדוקציה על מספר הצמתים:

בסיס האינדוקציה:

כאשר $|V|=1$ ברור ש $|E|\geq|V|-1=0$.

צעד האינדוקציה:

נניח שהמשפט נכון לכל גרף בעל k קודקודים (זו הנחת האינדוקציה),

ונוכיח שהמשפט נכון לכל גרף בעל k+1 קודקודים.

נבחר קודקוד $v\in V$ שדרגתו 1 (אם אין קודקוד כזה, אז כל הקודקודים מדרגה 2 ומעלה, ומספר הקשתות הוא לפחות $|v|$). נמחק את v ואת הקשת היחידה שהוא חלק ממנה מהגרף. לגרף שנוצר נקרא 'G.

הגרף 'G קשיר ויש בו k קודקודים, ולפי הנחת האינדוקציה יש בו לפחות k-1 קשתות. לפיכך יש בגרף G לפחות k קשתות.

מושג הגרף - פתרון שאלה 3

נניח שלכל צמת דרגה שונה משאר הצמתים. כלומר: יש צמת שדרגתו 0, יש צמת שדרגתו 1, יש צמת שדרגתו 2, ..., יש צמת שדרגתו n-1.

נקרא לצמת שדרגתו 0 : v. נקרא לצמת שדרגתו n-1: u.

מצד אחד: ל-u יש n-1 שכנים ולכן הוא שכן של כל הצמתים. בפרט, u שכן של v.

מצד שני: ל-v אין שכנים, ולכן הוא לא שכן של u.

הגענו לסתירה. מכאן שיש בגרף שני צמתים בעלי אותה דרגה.

מושג הגרף - פתרון שאלה 4

נוכיח על-ידי הצגת אלגוריתם המוצא את החלוקה הנ"ל (הגרף מיוצג על-ידי רשימת שכנויות):
האלגוריתם צובע את הצמתים בשני צבעים - ירוק ואדום - ובסופו של דבר קבוצת הצמתים האדומים היא קבוצה שלטת, ומשלימתה - קבוצת הצמתים הירוקים - אף היא קבוצה שלטת.

1. לכל $v \in V$ בצע:

1.1 אם הצומת אינו צבוע, יהי u השכן הראשון ברשימת השכנות שלו (יש כזה, כי אין צמתים מבודדים).

1.1.1 אם u צבוע, צבע את v בצבע האחר.

1.1.2 אחרת, צבע את v באדום ואת u בירוק.

סיבוכיות האלגוריתם $O(|V|)$.

מושג הגרף - פתרון שאלה 5

הלולאה הראשונה פוסלת את הצמתים שאינם יכולים להיות בור. בסיומה i הוא הצמת היחיד שיכול להיות בור. אם התנאי בתוך הלולאה הראשונה מתקיים אז i איננו בור, אחרת j איננו בור.

הלולאה השנייה בודקת האם צמת i הוא בור ומחזירה תשובה בהתאם.

```
find sink(G)
i←1
for j←2 to |V| do
  if not(ai,j=0 and aj,i=1)
  then i←j
for j←1 to |V| do
  if j≠i and(ai,j≠0 or aj,i≠1)
  then return -1
return i
```

מושג הגרף - פתרון שאלה 6

א. הטענה אינה נכונה: למשל, גרף מכוון ובו שלושה צמתים {1, 2, 3} וקשתות (1, 2), (2, 3). בגרף שלושה רכיבים קשירים היטב – כל צומת הוא רכיב בפני עצמו. אבל, אם נוסיף את הקשת (3, 1) יהיה בגרף רכיב קשיר היטב אחד, המכיל את כל הצמתים. כלומר, מספר הרכיבים קטן ב-2.

ב. הטענה אינה נכונה: למשל, גרף לא מכוון ובו ארבעה צמתים {1, 2, 3, 4} וקשתות (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4) ו-(3, 4) (זהו ריבוע עם אלכסון אחד). לגרף הזה רכיב דו-קשיר אחד, המכיל את כל צמתי הגרף וקשתותיו. אבל, ניתן להריץ DFS החל מצומת 1, להמשיך ל-4, מ-4 ל-3 ואז לסגת בחזרה ל-4, מ-4 ל-2 ואז לסגת בחזרה ל-4 ול-1. בעץ ה-DFS המתקבל שני עלים.