

Q1.

Prove or give a counterexample:

Given an undirected graph it is always possible to direct the edges so the graph becomes a directed acyclic graph.

הוכיחי או תני דוגמה נגדית:

בהינתן גרף לא מכוון תמיד אפשר לכוון את הקשתות כך שיתקבל גרף מכוון ללא מעגלים.

תשובה:

נתאר אלגוריתם שמכוון את הקשתות כנדרש.

לכל רכיב קשירות נבצע BFS. כל צמת נסמן ברמה שלו בעץ. את כל הקשתות נכוון מהצמת ברמה הנמוכה יותר לצמת ברמה הגבוהה יותר (אם רמות שני הצמתים זהות – הכיוון לא משנה).

Q2.

Prove that any connected undirected graph $G = (V, E)$ satisfies $|E| \geq |V| - 1$.

הוכיחי שכל גרף קשיר ולא מכוון $G = (V, E)$ מתקיים $|E| \geq |V| - 1$.

תשובה:

נריץ BFS על הגרף ונקבל עץ BFS. מספר הקשתות בעץ הוא $|V| - 1$, כי לכל צמת יש שכן אחד ויחיד ברמה שמעליו (חוץ מאשר לשורש). לכן בגרף יש לפחות $|V| - 1$ קשתות.

Q3.

Write (in pseudocode) an algorithm that colors the vertices of an undirected connected graph in two colors: red and black. Every black vertex must have a red neighbor and any red vertex must have a black neighbor.

The graph is represented as an adjacency list.

The running time of the algorithm should be $O(n)$ (n is the number of the vertices in the graph).

כתבי (בפסידוקוד) אלגוריתם שצובע קדקודי גרף לא מכוון וקשיר נתון בשני צבעים: שחור ואדום. לכל צמת שחור חייב להיות שכן אדום ולכל צמת אדום חייב להיות שכן שחור. הגרף מיוצג ברשימת שכנויות. זמן הריצה של האלגוריתם הוא $O(n)$. n הוא מספר צמתי הגרף.

תשובה:

נעבור על כל צמתי הגרף ולכל צמת נבצע:

אם הצמת לא צבוע וגם שכנו הראשון (שבוודאי קיים כי הגרף קשיר, ואפשר למצוא אותו בזמן קבוע) לא צבוע אז נצבע את הצמת בשחור ואת שכנו באדום.
אם הצמת לא צבוע ושכנו צבוע, נצבע את הצמת בצבע שלא בו צבוע השכן.

```
for i ← 1 to n do
  c[i] ← non
for i ← 1 to n do
  let j be the first neighbor of node i
  if c[i] = non and c[j] = non
  then c[i] ← black
    c[j] ← red
  else if c[i] = non and c[j] = red
  then c[i] ← black
  else if c[i] = non
  then c[i] ← black
```

Q4.

All the edges of a graph have the same weight, except of one edge e . describe an algorithm that finds the MST of this graph. Its running time is linear in the size of the graph.

לכל הקשתות של גרף יש אותו משקל, חוץ מלקשת אחת e .
תארי אלגוריתם המוצא MST בגרף. זמן הריצה שלו לינארי בגודל הגרף.

תשובה:

אם משקל הקשת החריגה קטן ממשקל שאר הקשתות נריץ BFS מצמת שהוא אחד מצידי הקשת החריגה. עץ ה-BFS המתקבל הוא העץ"מ.
אם משקל הקשת החריגה גדול ממשקל שאר הקשתות, נוציא אותה מהעץ ונריץ BFS. אם עץ ה-BFS שמתקבל מכיל את כל צמתי הגרף אז הוא העץ"מ. אם העץ המתקבל לא מכיל את כל הצמתים, נחזיר את הקשת לגרף ונבצע BFS. העץ המתקבל הוא העץ"מ.

Q5.

Some of the vertices of a directed weighted graph (with positive weights) are colored red, some are colored black and some are not colored.

Describe an efficient algorithm (as efficient as dijkstra's algorithm) that find the shortest path from a red vertex to a black one.

חלק מקדקודי גרף מכוון וממושקל (משקלים חיוביים) צבועים באדום, חלק מהקדקודים צבועים בשחור, וחלק לא צבועים. תארי אלגוריתם יעיל (יעיל כמו האלגוריתם של דייקסטרה) שמוצא מסלול קצר ביותר מצמת אדום לצמת שחור.

תשובה:

נוסיף צמת מקור לגרף וממנו נמתח קשת, במשקל 0, לכל הצמתים האדומים. נוסיף צמת יעד לגרף ונמתח אליו קשתות, במשקל 0, מכל הצמתים השחורים. נריץ דייקסטרה מהמקור ליעד. מהמסלול שהתקבל נוריד את צמת המקור וצמת היעד ונקבל את המסלול המבוקש.