

תורת הגרפים – עצים פורשים מינימליים דף תרגילים

שאלה 1

נתון גרף $G=(V,E)$ קשיר ולא מכוון. כתוב אלגוריתם למציאת עץ פורש T ב- G כך שהקשת המקסימלית ב- T קטנה ככל הניתן.

שאלה 2

יהי $G=(V, E)$ גרף קשיר. נסמן ב- K_G את מספר העצים הפורשים של G . הוכח או הפרך:

- א. קיים $G=(V, E)$ קשיר כך ש- $K_G = 4$.
- ב. קיים $G=(V, E)$ קשיר כך ש- $K_G = 3$.
- ג. קיים $G=(V, E)$ קשיר כך ש- $K_G = 2$.

שאלה 3

כתבו אלגוריתם המקבל כקלט גרף לא מכוון וחסר משקלות ומוצא בו עץ פורש T , כך שבכל עץ פורש אחר של גרף זה הדרגה המקסימלית אינה עולה על הדרגה המקסימלית ב- T .

תורת הגרפים – עצים פורשים מינימליים פתרונות דף התרגילים – למרצה

עצים פורשים מינימליים - פתרון שאלה 1

טענה: יהי H עץ פורש מינימלי כלשהו, אזי $\max_{e \in H} w(e) = \min_{T \text{ is s.t. } \max_{e \in T} w(e)}$. כלומר: לכל עץ פורש מינימלי יש את התכונה הנ"ל.

הוכחה: יהי T עץ פורש בעל קשת מקסימלית קטנה ככל הניתן. נניח בשלילה שהטענה איננה נכונה, אז

$\max_{e \in H} w(e) > \max_{e \in T} w(e)$. תהי $e_0 \in H$ קשת בעלת משקל מקסימלי ב- H , $w(e_0) = \max_{e \in H} w(e)$.
 $w(e)$. $H \setminus \{e_0\}$ הוא יער פורש בעל שני רכיבי קשירות: V ו- W . כיוון ש- T עץ פורש, חייבת להיות קשת $e_1 \in T$ שקצה אחד שלה ב- V וקצה שני שלה ב- W . לכן $H \setminus \{e_0\} \cup \{e_1\}$ קשיר, וממספר קשתותיו $(|V|-1)$ אנו מסיקים שהוא עץ פורש. נשים לב ש- $w(e_0) > \max_{e \in T} w(e) > w(e_1)$, ולכן $w(H \setminus \{e_0\} \cup \{e_1\}) < w(H)$. בסתירה למינימליות של H .

חשוב לציין שמציאת עפ"מ אינה הדרך היעילה ביותר למצוא עץ כמבוקש בשאלה.

עצים פורשים מינימליים - פתרון שאלה 2

- א. הטענה נכונה. למשל הגרף G שהוא ריבוע: כלומר, מכיל ארבעה צמתים $\{1, 2, 3, 4\}$ כאשר 1 מחובר ל-2, 2 ל-3, 3 ל-4 ו-4 ל-1. זהו גרף קשיר ויש לו ארבעה עצים פורשים – כל עץ מתקבל ע"י הורדת קשת אחת מהגרף.
- ב. באופן דומה ניקח גרף שהוא מעגל בן 3 צמתים. הוא קשיר, ויש לו 3 עצים פורשים – כל עץ מתקבל ע"י הורדת קשת אחת מהגרף.
- ג. לא נכון. אם הגרף הנתון הוא עץ יש לו רק עץ פורש אחד. אחרת, יש בהכרח מעגל שהוא לפחות בן 3 קשתות (בגרף לא מכוון אין קשתות מקבילות) ואז הורדת כל קשת במעגל תיתן עץ פורש אחר ולכן יש לגרף לפחות 3 עצים פורשים.

עצים פורשים מינימליים - פתרון שאלה 3

האלגוריתם:

א. חשב $d(v)$ לכל v

ב. מצא קודקוד u כך ש- $d(u)$ מקסימלי

ג. החזר $T = BFS(G, u)$