HW05

2. $S \to RS|R$
   $R \to aSb|cRd|ab|cd|\epsilon$

   Добавим стартовый нетерминал:
   $S_{start} \to S$
   $S \to RS|R$
   $R \to aSb|cRd|ab|cd|\epsilon$

   Избавимся от неодиночных терминалов:
   $S_{start} \to S$
   $S \to RS|R$
   $R \to ASB|CRD|AB|CD|\epsilon$
   $A \to a$
   $B \to b$
   $C \to c$
   $D \to d$

   Устраним длинные правила:
   $S_{start} \to S$
   $S \to RS|R$
   $R \to AQ|CP|AB|CD|\epsilon$
   $A \to a$
   $B \to b$
   $C \to c$
   $D \to d$
   $Q \to SB$
   $P \to RD$

   Устраним ϵ-правила:
   $S_{start} \to S|\epsilon$
   $S \to RS|R|S$
   $R \to AQ|CP|AB|CD$
   $A \to a$
   $B \to b$
   $C \to c$
   $D \to d$
   $Q \to SB|B$
   $P \to RD|D$

   Устраним цепные правила:
   $S_{start} \to RS|AQ|CP|AB|CD|\epsilon$
   $S \to RS|AQ|CP|AB|CD$
   $R \to AQ|CP|AB|CD$

$A \to a$
$B \to b$
$C \to c$
$D \to d$
$Q \to SB|b$
$P \to RD|d$

Done.

3. КС грамматика для языка:
$S \to aaS|aSb|Sbb|ab|aa|bb$

Поймем, что у нас получаются все слова вида $a^n b^m$, $n + m > 0$, $(n + m) \vdots 2$ и только они. Сначала то, что все. Рассмотрим случаи:
1) $m = 0 \Rightarrow n > 0$ - чётное.
Применим $\frac{n}{2} - 1$ раз $S \to Sbb$ и один раз $S \to bb$. Получим $S \to Sbb \to \cdots \to Sbb \ldots bb \to b^n$ (если n = 0, то то же самое)
2) $m, n > 0$, чётные.
Применим $\frac{n}{2}$ раз $S \to Sbb$, $\frac{m}{2} - 1$ раз $S \to aaS$, и один раз $S \to aa$
3) $m, n > 0$, нечётные.
Применим $\frac{n-1}{2}$ раз $S \to Sbb$, $\frac{m-1}{2}$ раз $S \to aaS$, и один раз $S \to ab$

Теперь докажем, что никакие другие не получатся. Понятно, что нет пустого слова. Понятно (например по индукции), что все буквы a левее букв b. А так как в каждом правиле четность суммы сохраняется, то и в конце она тоже четная.