Формальные языки

домашнее задание до 23:59 05.03

1. Доказать или опровергнуть утверждение: произведение двух минимальных автоматов всегда дает минимальный автомат (рассмотреть случаи для пересечения, объединения и разности языков).

2. Для регулярного выражения:

$$(a \mid b)^{+}(aa \mid bb \mid abab \mid baba)^{*}(a \mid b)^{+}$$

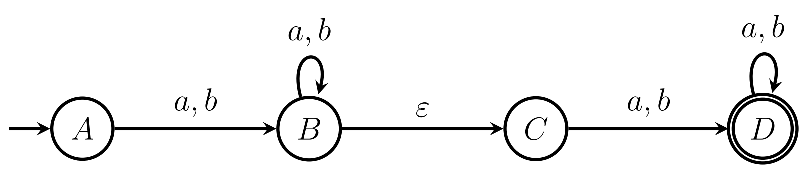
   Построить эквивалентные:

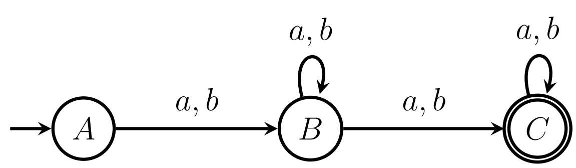
   (a) Недетерминированный конечный автомат

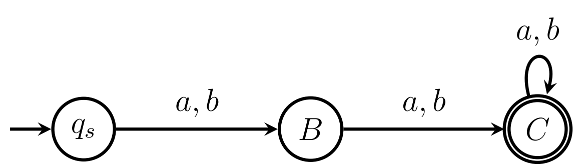
   (b) Недетерминированный конечный автомат без ε-переходов

   (c) Минимальный полный детерминированный конечный автомат

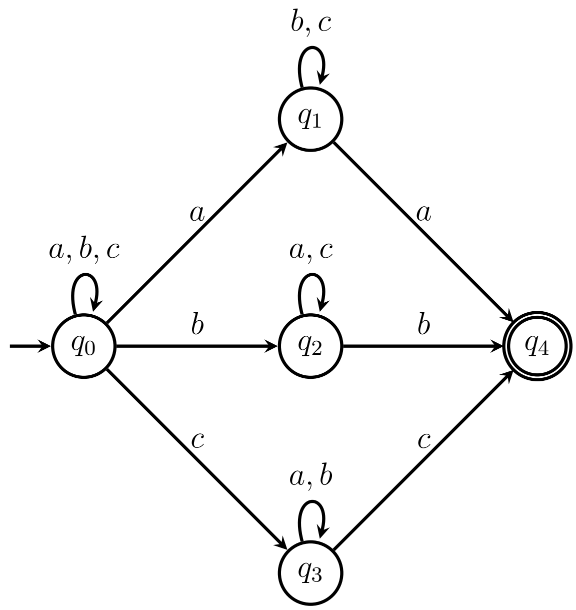
   Решение:
   Заметим, что очевидно можно выкинуть центральную скобку и ничего не изменится. Решим для $(a \mid b)^{+}(a \mid b)^{+}$.

(a)


(b)


(c)


3. Построить регулярное выражение, распознающее тот же язык, что и автомат:



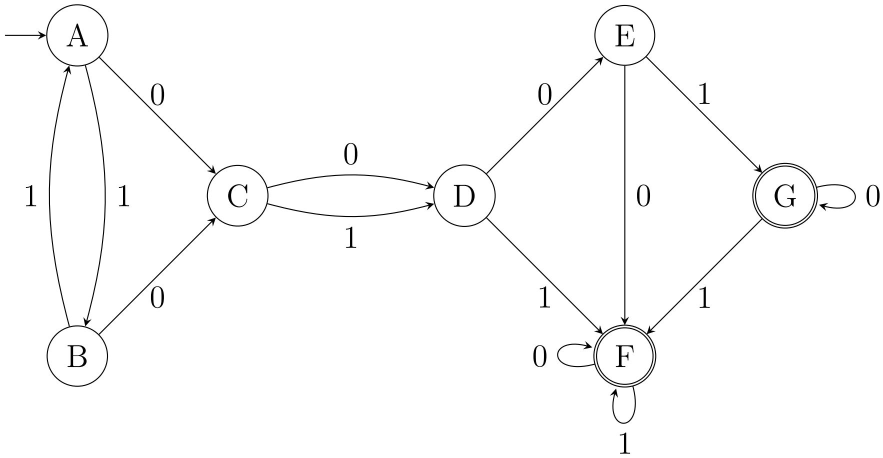
Решение:
$(a \mid b \mid c)^*(a(b \mid c)^*a \mid b(a \mid c)^*b \mid c(a \mid b)^*c)$

4. Определить, является ли автоматным язык $\{\omega\omega^r \mid \omega \in \{0,1\}^*\}$. Если является — построить автомат, иначе — доказать.
Решение:
Воспользуемся леммой о накачке. Пусть язык автоматный. Возьмем n из леммы и рассмотрим слово $\omega = 0^n1^n1^n0^n$. Пусть $xyz = \omega, |xy| < n, y \neq \varepsilon$, тогда $y = 0^b$. Теперь возьмем $k = 3$. Тогда максимальный префикс из нулей у слова xy^kz имеет размер $n+2b > n$. А максимальный суффикс из нулей имеет размер n. Противоречие с тем, что слово из языка.

5. Определить, является ли автоматным язык $\{uaav \mid u, v \in \{a,b\}^*, |u|_b \geq |v|_a\}$. Если является — построить автомат, иначе — доказать.
Решение:
Воспользуемся леммой о накачке. Пусть язык автоматный. Возьмем n из леммы и рассмотрим слово $\omega = b^naa(ba)^n$. Теперь берем $k = 0$. В слове xy^kz возможно только одно вхождение aa. y не пуст, поэтому до aa будет $< n$ символов b, а после aa будет n символов a. Противоречие.

Пример применения алгоритма минимизации

Минимизируем данный автомат:



Автомат полный, в нем нет недостижимых вершин — продолжаем.

Строим обратное δ отображение.

δ^{-1}	0	1
A	—	B
B	—	A
C	A B	—
D	C	C
E	D	—
F	E F	D F G
G	G	E

Отмечаем в таблице и добавляем в очередь пары состояний, различаемых словом ε: все пары, один элемент которых — терминальное состояние, а второй — не терминальное состояние. Для данного автомата это пары

$(A, F), (B, F), (C, F), (D, F), (E, F), (A, G), (B, G), (C, G), (D, G), (E, G)$

Дальше итерируем процесс определения неэквивалентных состояний, пока очередь не оказывается пуста.

(A, F) не дает нам новых неэквивалентных пар. Для (B, F) находится 2 пары: $(A, D), (A, G)$. Первая пара не отмечена в таблице — отмечаем и добавляем в очередь. Вторая пара уже отмечена в таблице, значит, ничего делать не надо. Переходим к следующей паре из очереди. Итерируем дальше, пока очередь не опустошится.

Результирующая таблица (заполнен только треугольник, потому что остальное симметрично) и порядок добавления пар в очередь.

	A	B	C	D	E	F	G
A							
B							
C	✓	✓					
D	✓	✓	✓				
E	✓	✓	✓	✓			
F	✓	✓	✓	✓	✓		
G	✓	✓	✓	✓	✓		

Очередь:
$(A, F), (B, F), (C, F), (D, F), (E, F), (A, G), (B, G), (C, G), (D, G), (E, G),$
$(B, D), (A, D), (A, E), (B, E), (C, E), (C, D), (D, E), (A, C), (B, C))$

В таблице выделились классы эквивалентных вершин: $\{A, B\}, \{C\}, \{D\}, \{E\}, \{F, G\}$. Остается только нарисовать результирующий автомат с вершинами-классами. Переходы добавляются тогда, когда из какого-нибудь состояния первого класса есть переход в какое-нибудь состояние второго класса. Минимизированный автомат: