

4주차(2/3)

퍼셉트론 알고리즘

파이썬으로 배우는 기계학습

한동대학교
김영섭 교수

퍼셉트론

- 학습 목표
 - 퍼셉트론 알고리즘을 이해한다.
- 학습 내용
 - 퍼셉트론 알고리즘
 - 퍼셉트론 가중치 계산
 - 퍼셉트론 학습 전체 과정
 - 퍼셉트론 알고리즘의 한계
 - 퍼셉트론 예제

1.퍼셉트론 알고리즘 개요

- 목적:
 - 입력 \mathbf{x} 를 분류하는 가중치 \mathbf{w} 구하기
- 알고리즘:
 - 가중치를 작은 난수($0 \sim 1$)로 초기화
 - 각 학습자료 $x^{(i)}$ 에 대해
 - 출력 \hat{y} 계산, $\hat{y} = h(w^T x)$
 - 가중치 w_j 조정, $w_j := w_j + \Delta w_j$
- 표기법:
 - $x^{(i)}$
(i)번째 입력된 학습자료
 - $x_j^{(i)}$
(i)번째 입력된 학습자료의 j번째 특성
 - \hat{y}
퍼셉트론의 출력(읽기:**y hat**), 예측값
 - y
클래스 레이블, 실제값
 - w_j
j번째 특성에 대한 가중치
 - Δw_j
델타(미세한) 가중치 조정값

2. 가중치 계산: 계산법

- 목적:
 - 입력 \mathbf{x} 를 분류하는 가중치 \mathbf{w} 구하기
- 알고리즘:
 - 가중치를 작은 난수(**0 ~ 1**)로 초기화
 - 각 학습자료 $x^{(i)}$ 에 대해
 - 출력 \hat{y} 계산, $\hat{y} = h(w^T x)$
 - 가중치 w_j 조정, $w_j := w_j + \Delta w_j$

- 가중치 조정값 계산법

$$\Delta w_j = \eta(y^{(i)} - \hat{y}^{(i)})x_j^{(i)} \quad (1)$$

- η (**eta**, 에타) 학습률은 **0 ~ 1** 값
- j 특성의 수 + **1** (편향)

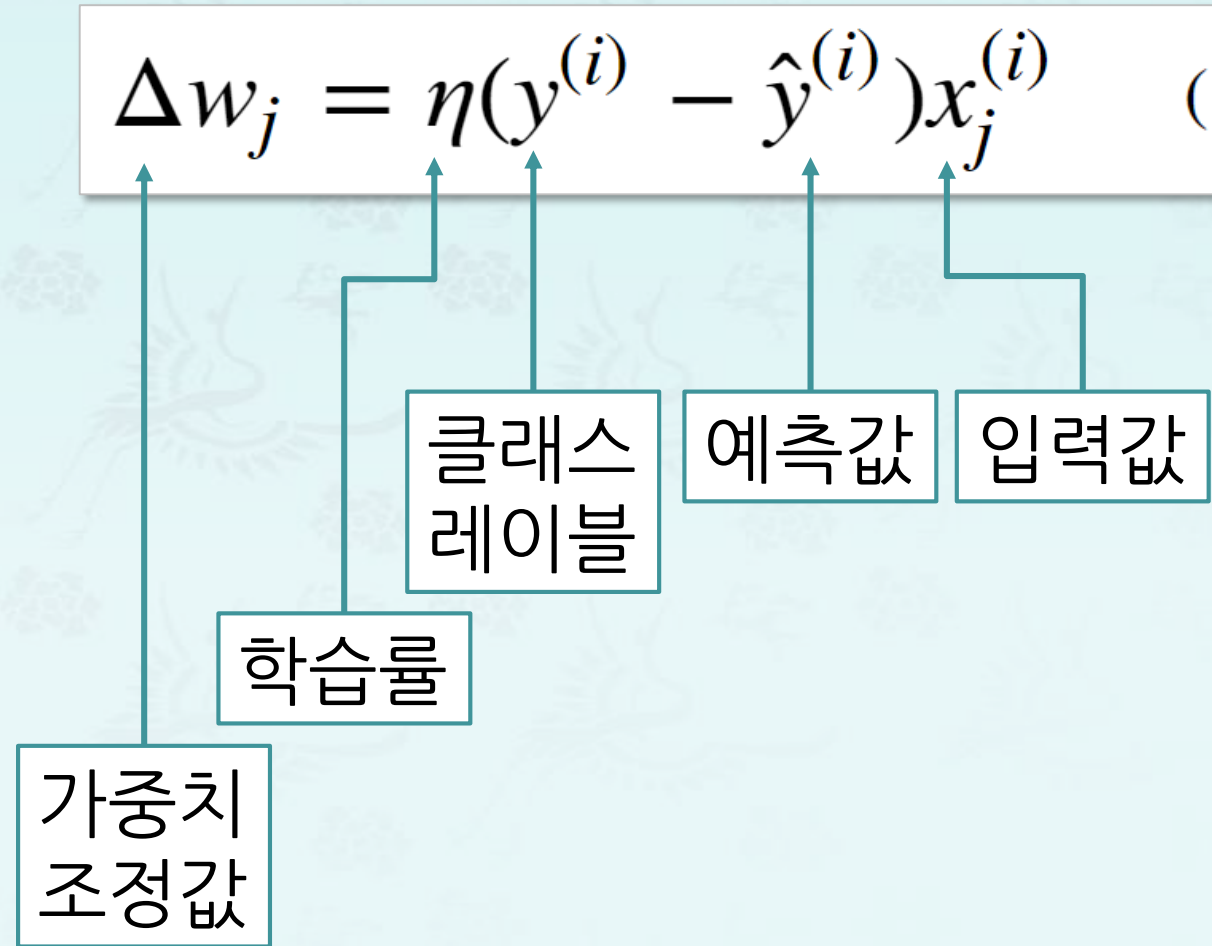
$$\begin{aligned}\Delta w_0 &= \eta(y^{(i)} - \hat{y}^{(i)}) \\ \Delta w_1 &= \eta(y^{(i)} - \hat{y}^{(i)})x_1^{(i)} \\ \Delta w_2 &= \eta(y^{(i)} - \hat{y}^{(i)})x_2^{(i)}\end{aligned}$$

2. 가중치 계산: 계산법

- 목적:
 - 입력 \mathbf{x} 를 분류하는 가중치 \mathbf{w} 구하기
- 알고리즘:
 - 가중치를 작은 난수(0 ~ 1)로 초기화
 - 각 학습자료 $x^{(i)}$ 에 대해
 - 출력 \hat{y} 계산, $\hat{y} = h(w^T x)$
 - 가중치 w_j 조정, $w_j := w_j + \Delta w_j$

- 가중치 조정값 계산법

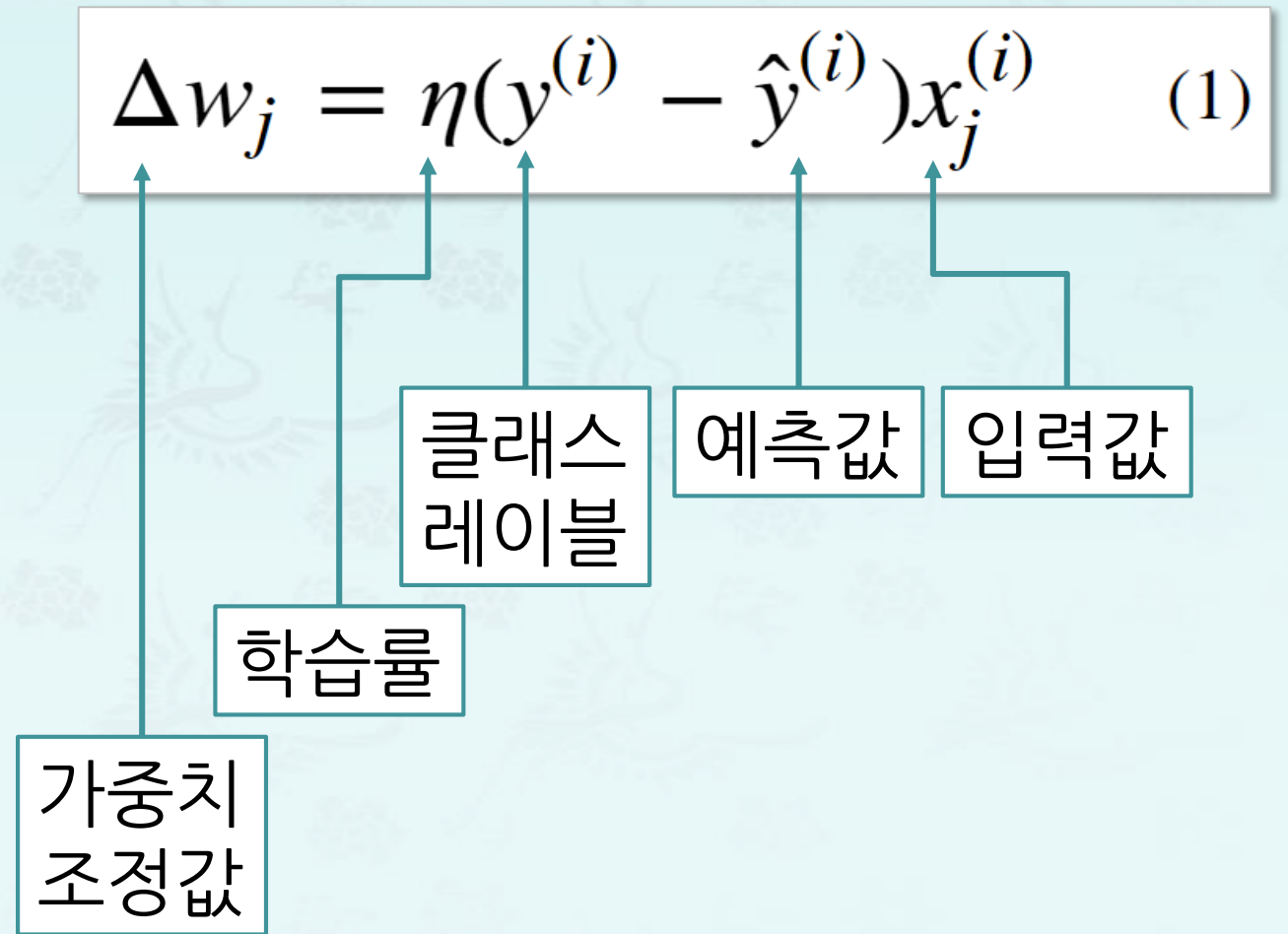
$$\Delta w_j = \eta(y^{(i)} - \hat{y}^{(i)})x_j^{(i)} \quad (1)$$



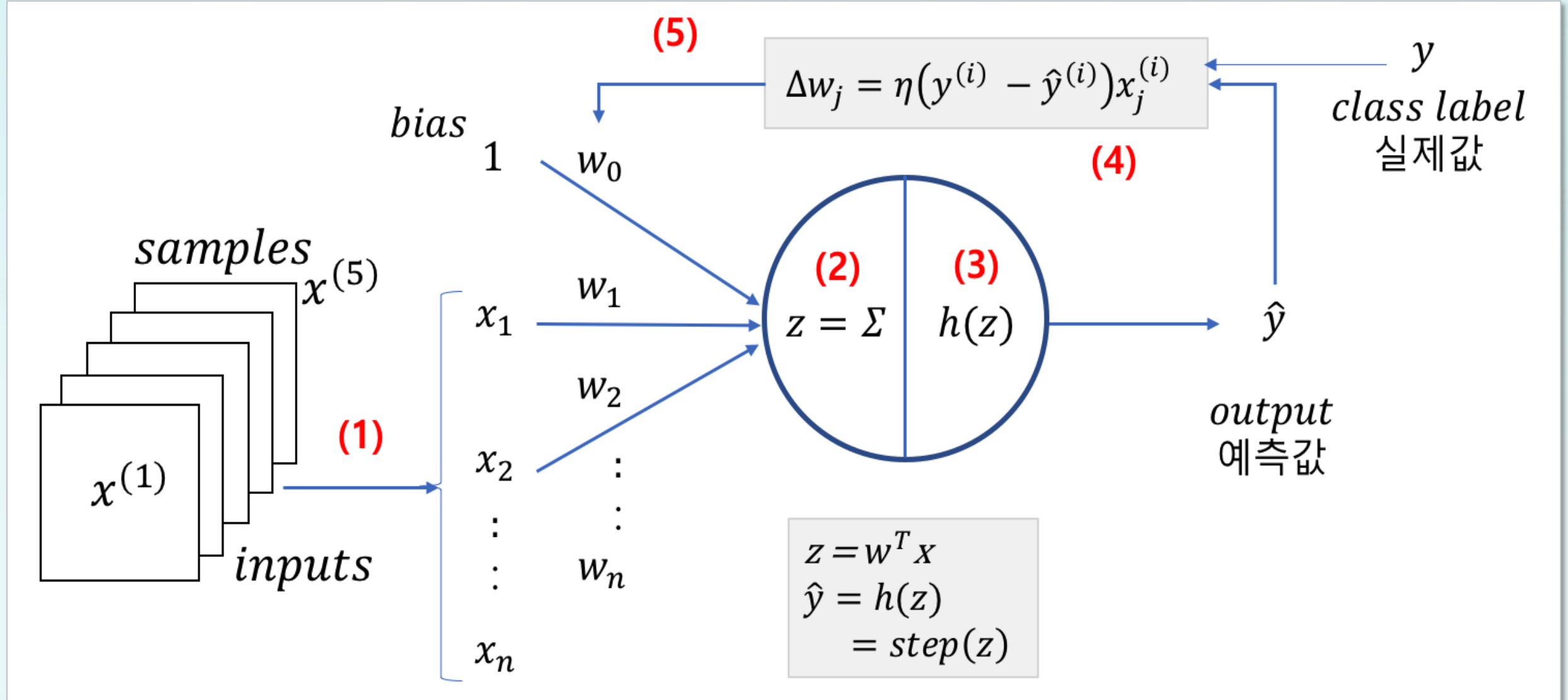
2. 가중치 계산: 식 테스트

- (1) 식의 테스트:
 - 양극성 계단함수(활성화함수)는 -1 혹은 1 반환
- **Case 1:** $\hat{y} = y$
 - $\Delta w_j = 0$
 - 가중치 변화없음
- **Case 2:** $\hat{y} \neq y$
 - $\Delta w_j = \eta(1^i - (-1^i))x_j^i = \eta(2)x_j^i$
 - $\Delta w_j = \eta(-1^i - 1^i)x_j^i = \eta(-2)x_j^i$

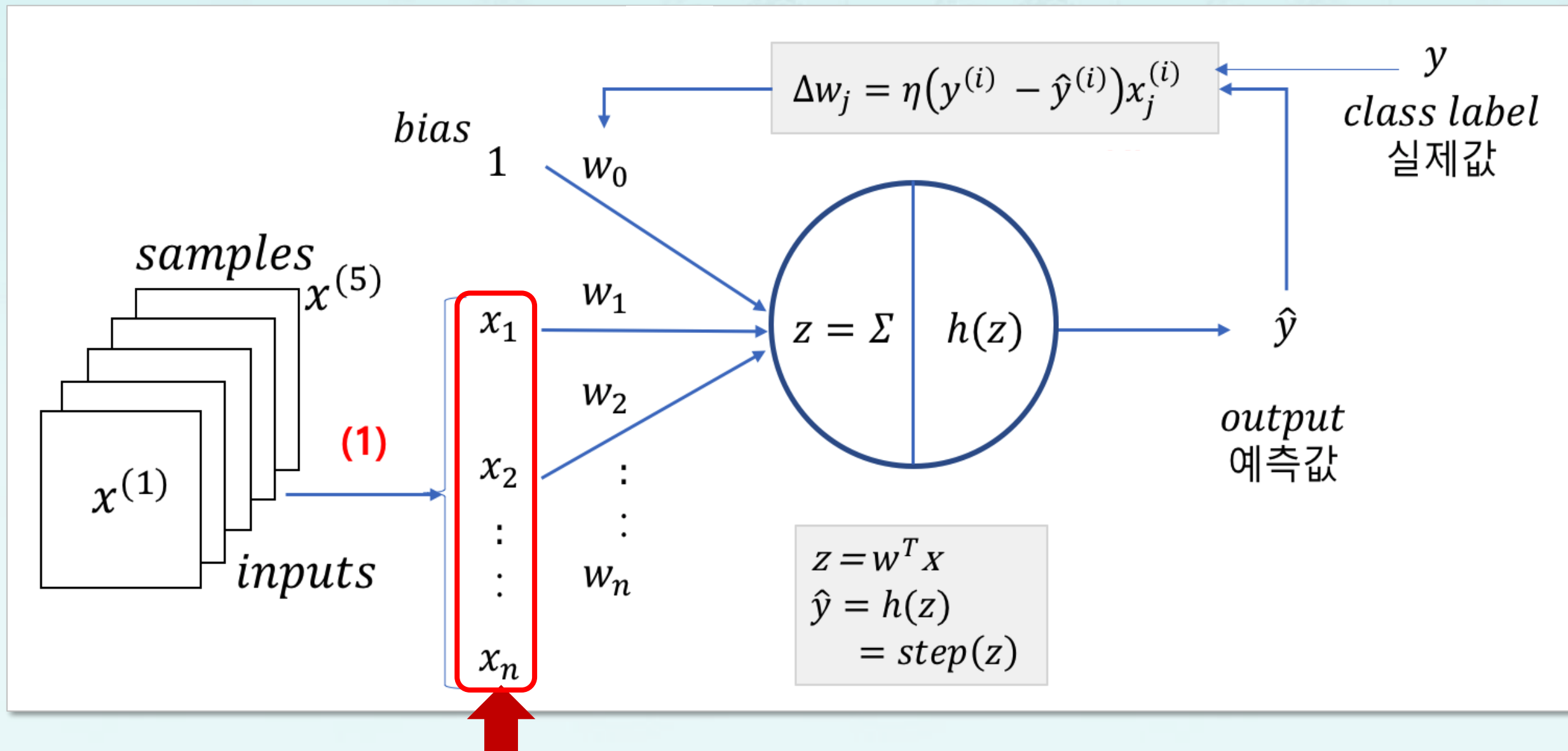
- 가중치 조정값 계산법



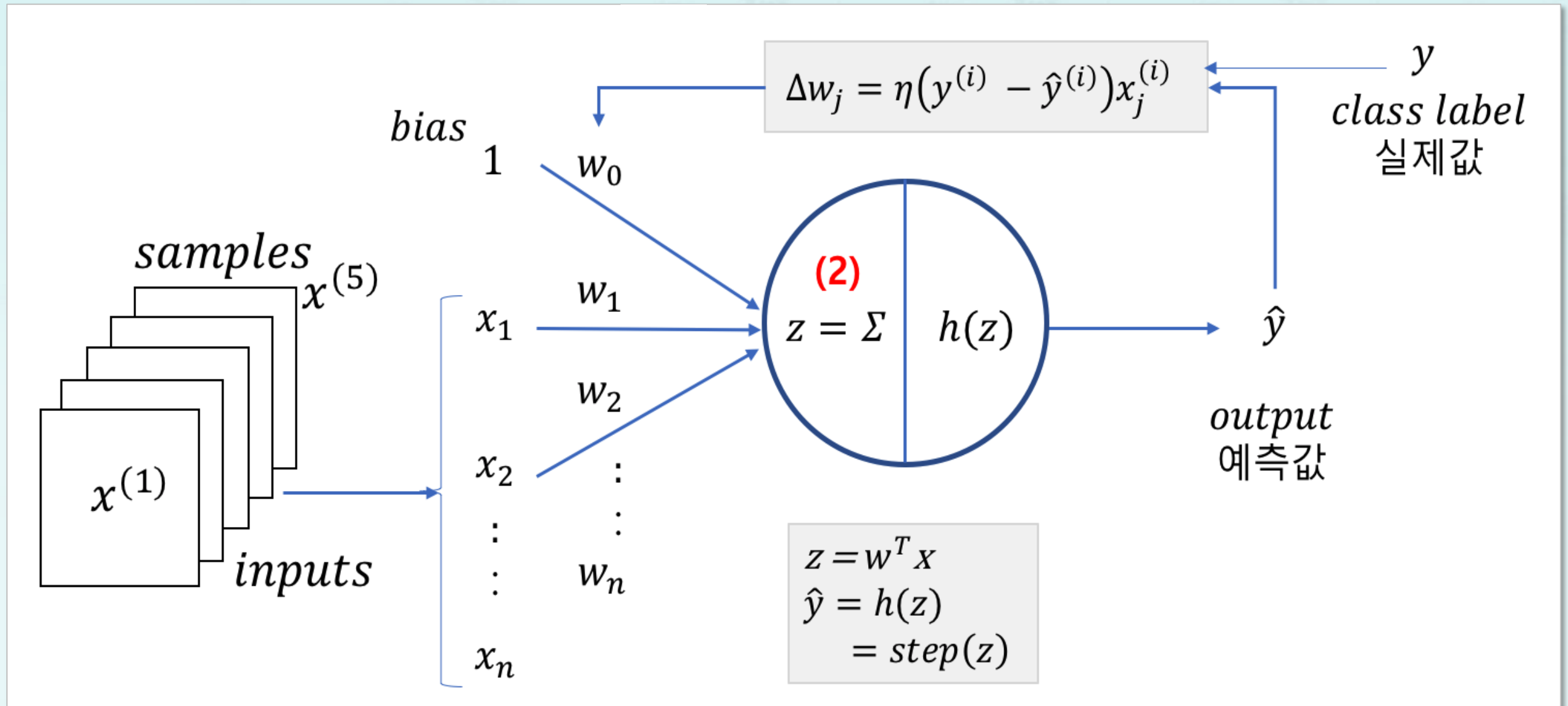
3. 퍼셉트론 학습 전체 과정: 알고리즘 도식화



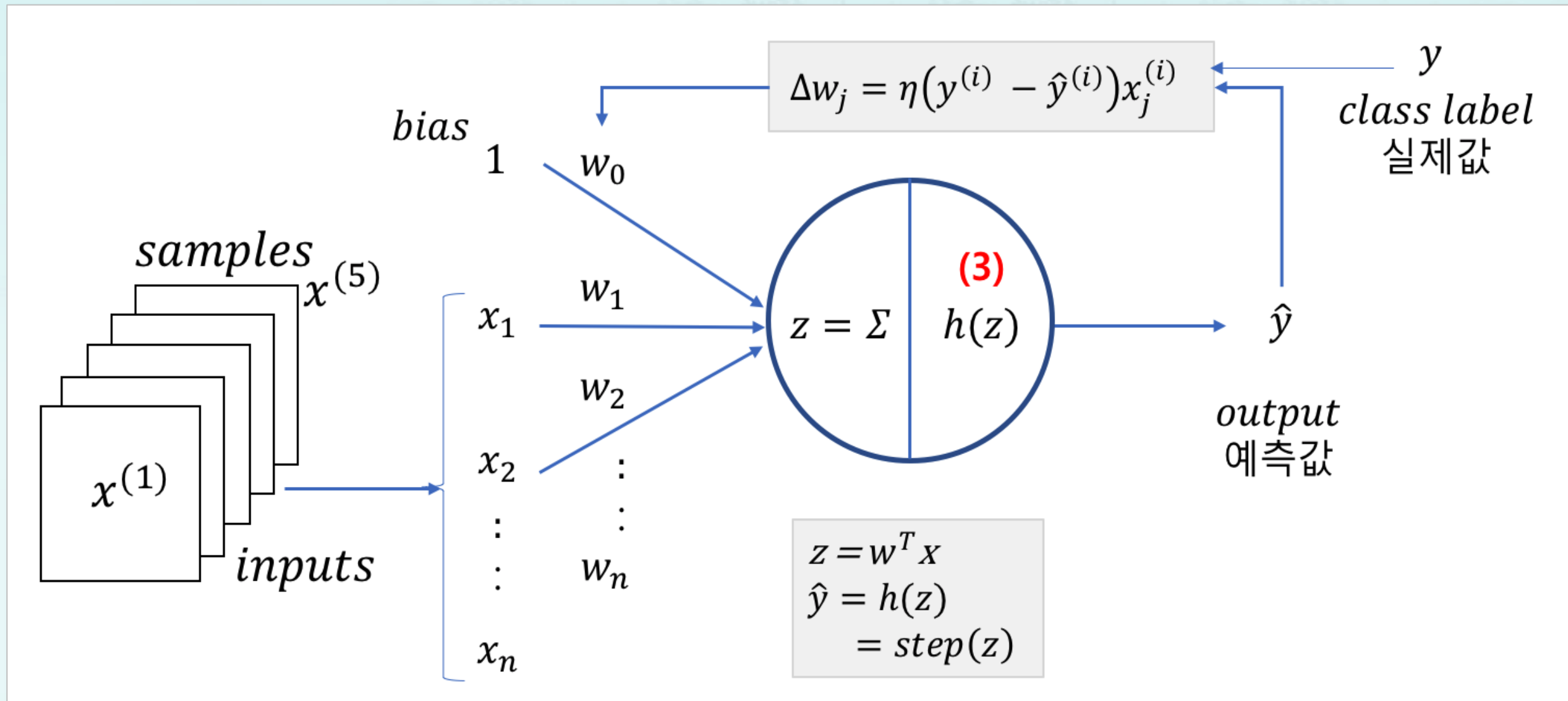
3. 퍼셉트론 학습 전체 과정: 입력단계



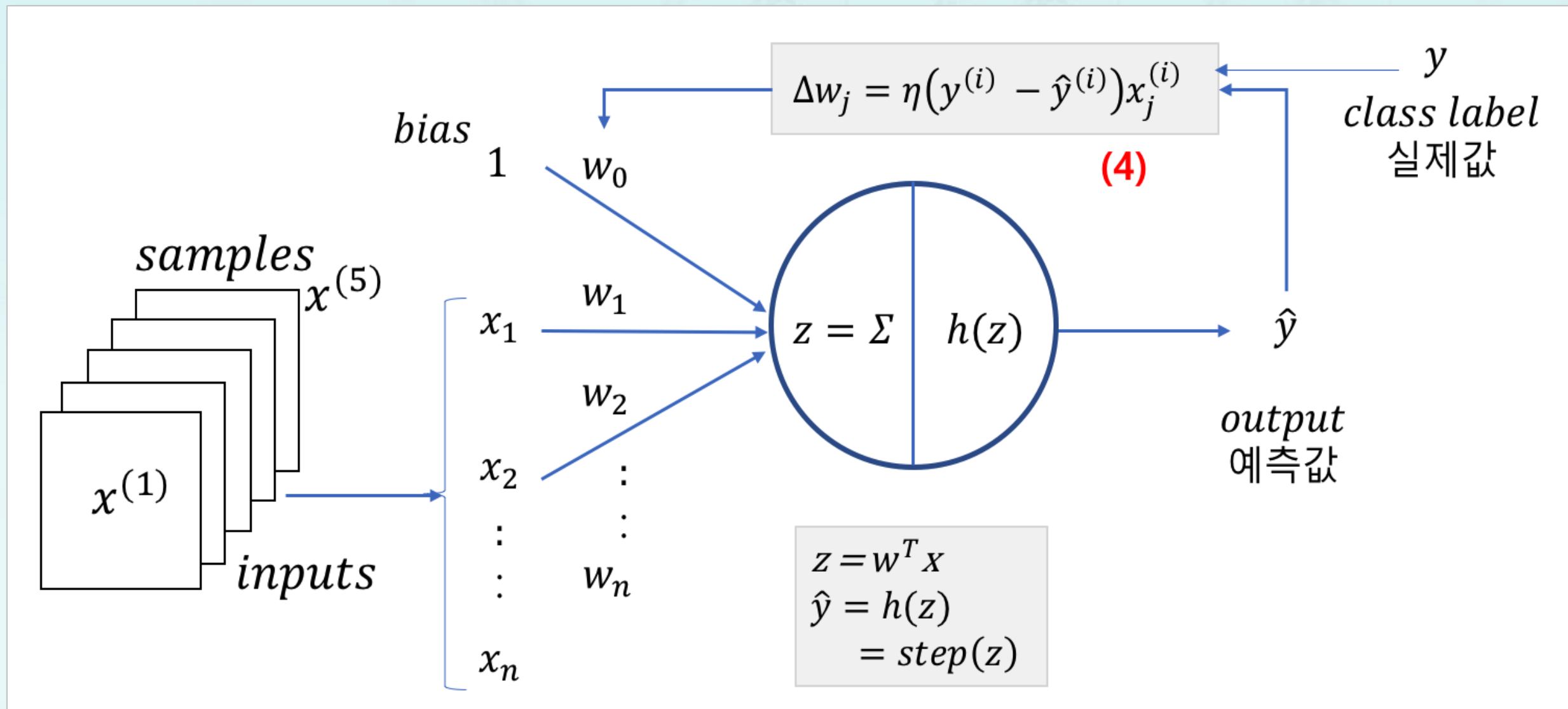
3. 퍼셉트론 학습 전체 과정: 순입력 계산 단계



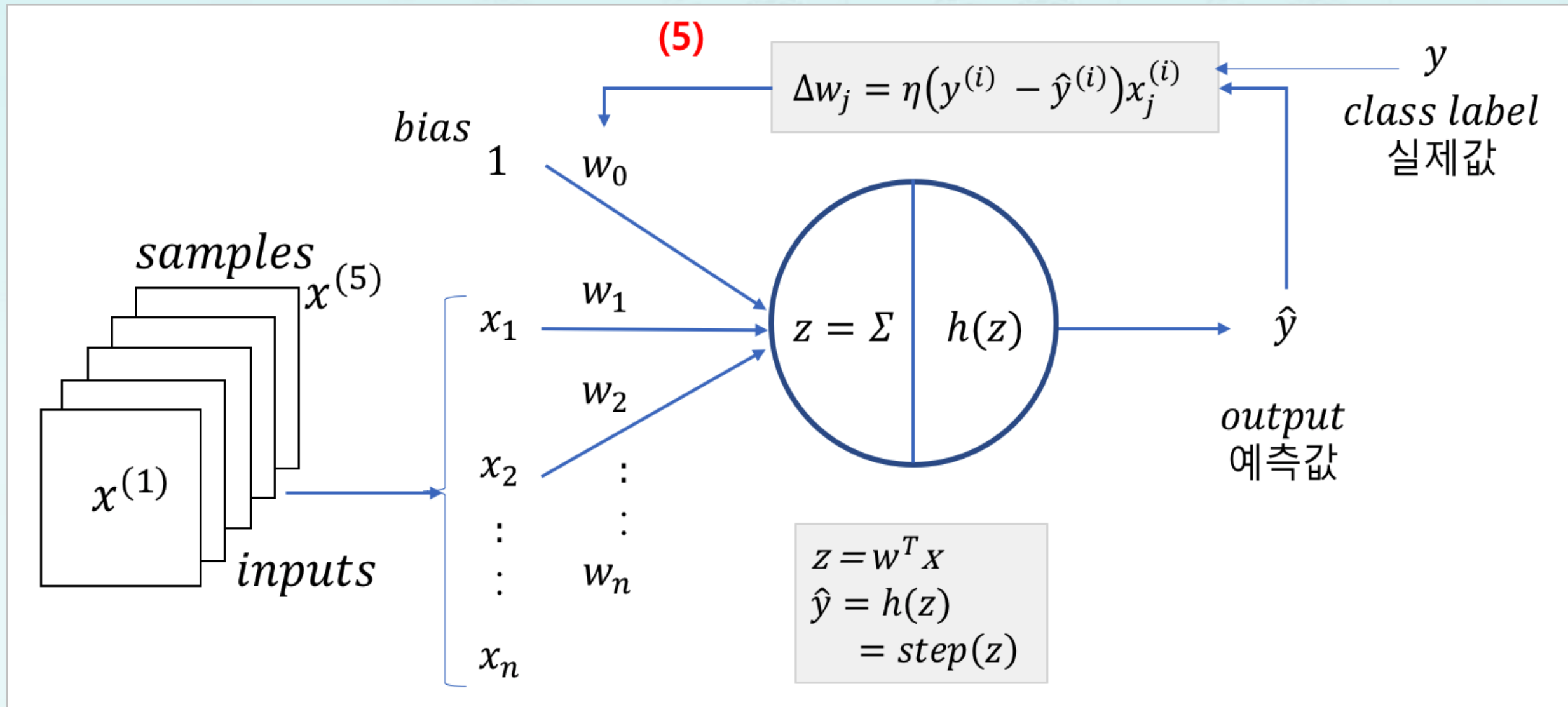
3. 퍼셉트론 학습 전체 과정: 출력단계



3. 퍼셉트론 학습 전체 과정: 비교단계



3. 퍼셉트론 학습 전체 과정: 가중치 조정 단계



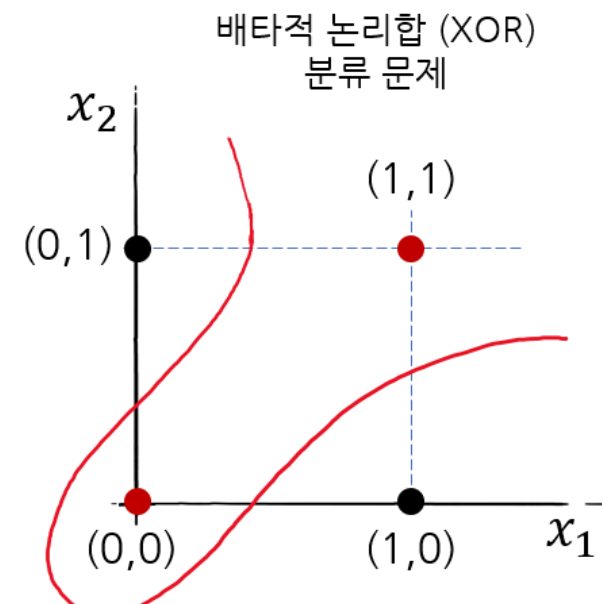
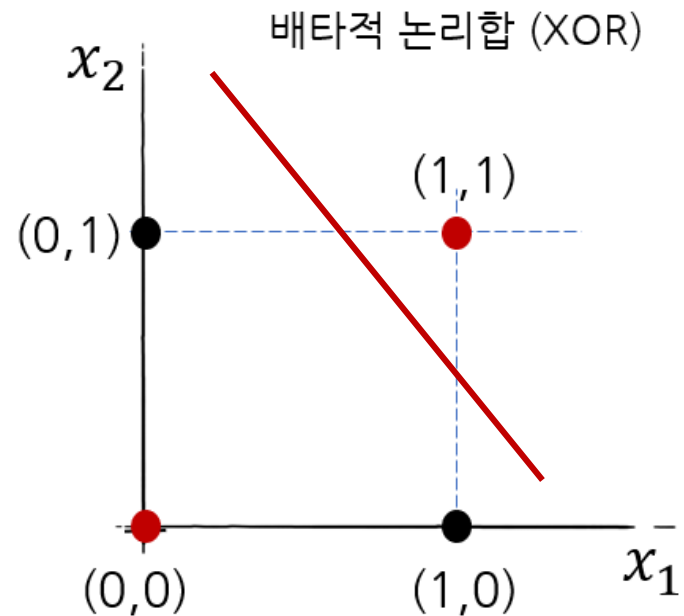
4. 퍼셉트론 알고리즘의 한계: 논리 계산의 한계

- **1957:** 로젠블라트 퍼셉트론 발표
- **1958:** 뉴욕 타임즈
- **1969: MIT** 마빈 민스키
 - 퍼셉트론 한계: **XOR** 풀이 불가
 - 다층 퍼셉트론은 **XOR** 풀이 가능함, 그러나 학습방법은 찾지 못함.
- **1974:** 하버드 대학원생, 펄 워브스
 - 다층 퍼셉트론을 학습시킬 수 있는 역전파 알고리즘 발표

4. 퍼셉트론 알고리즘의 한계: 논리 계산의 한계

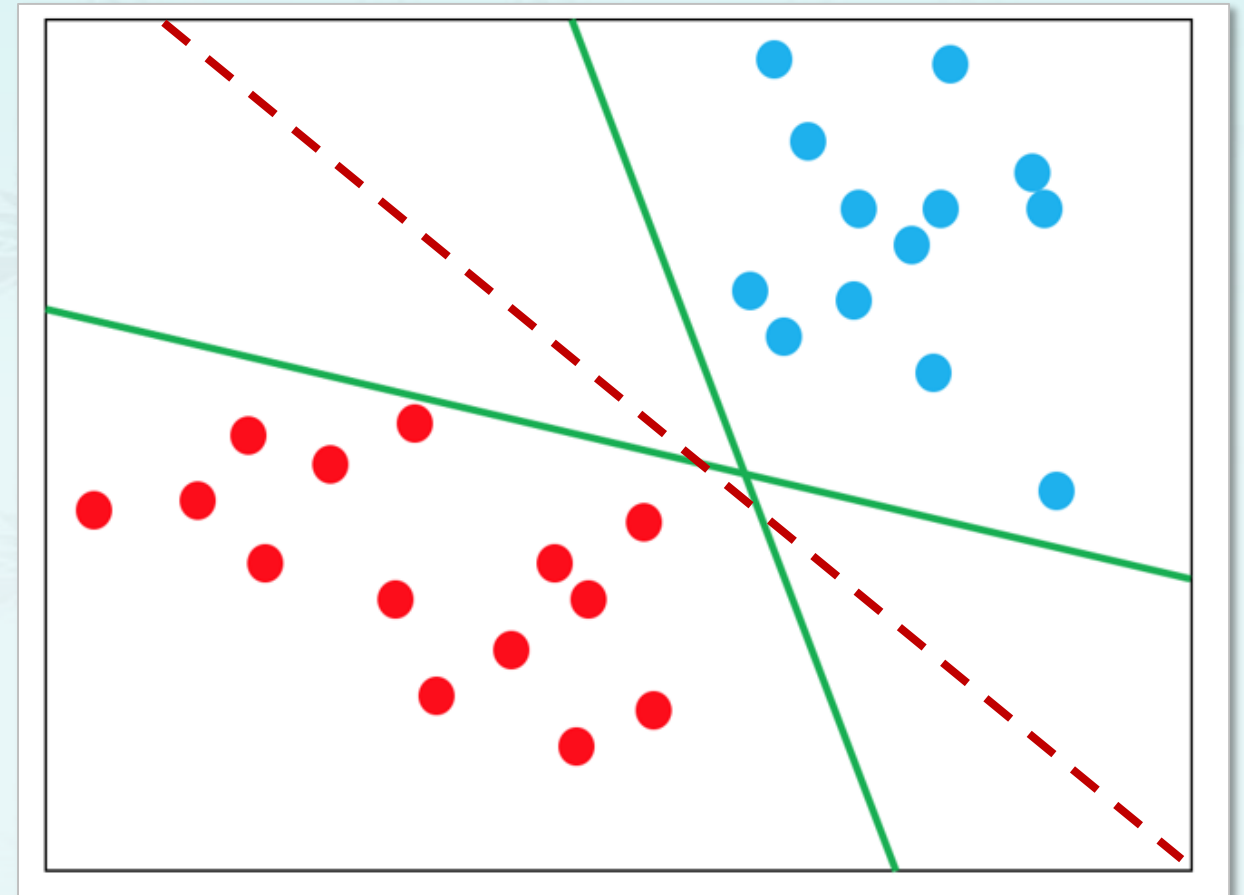
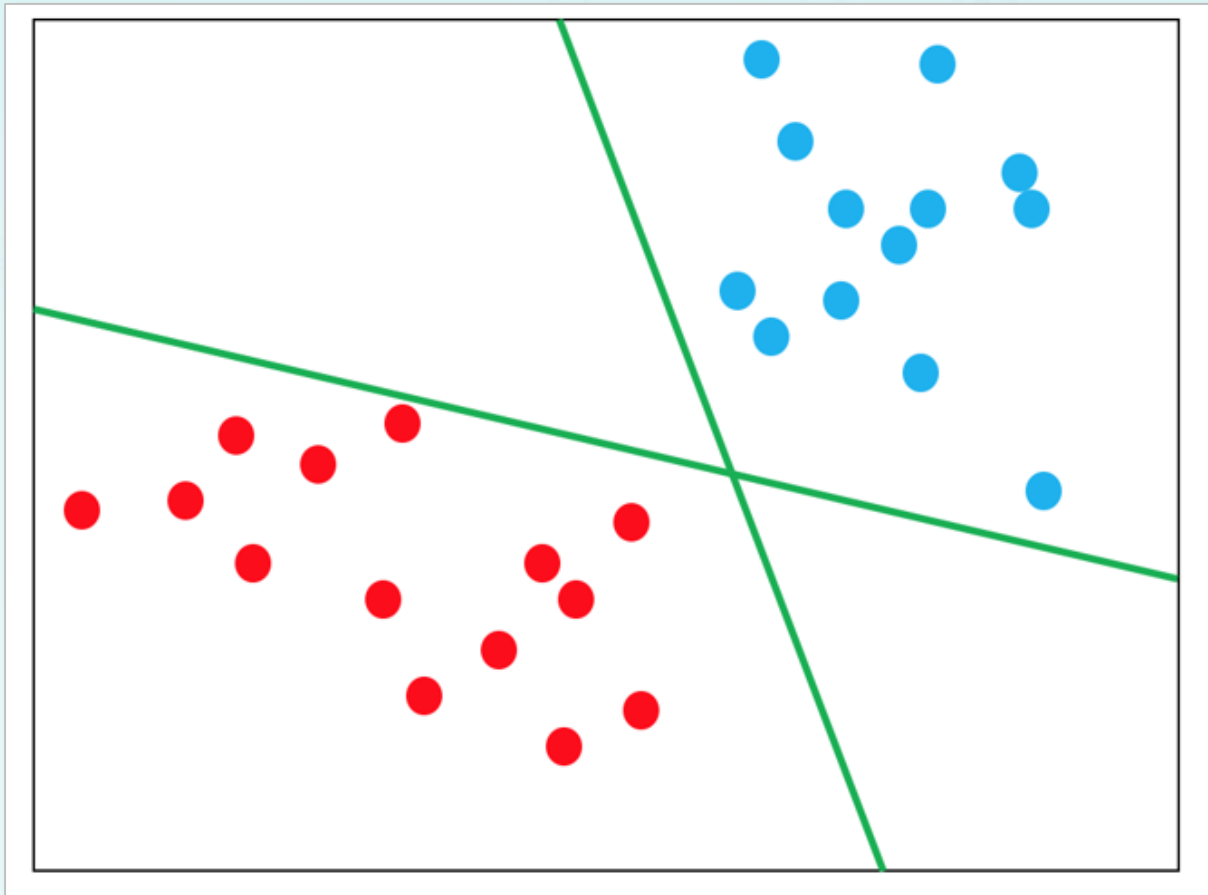
XOR 진리표

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



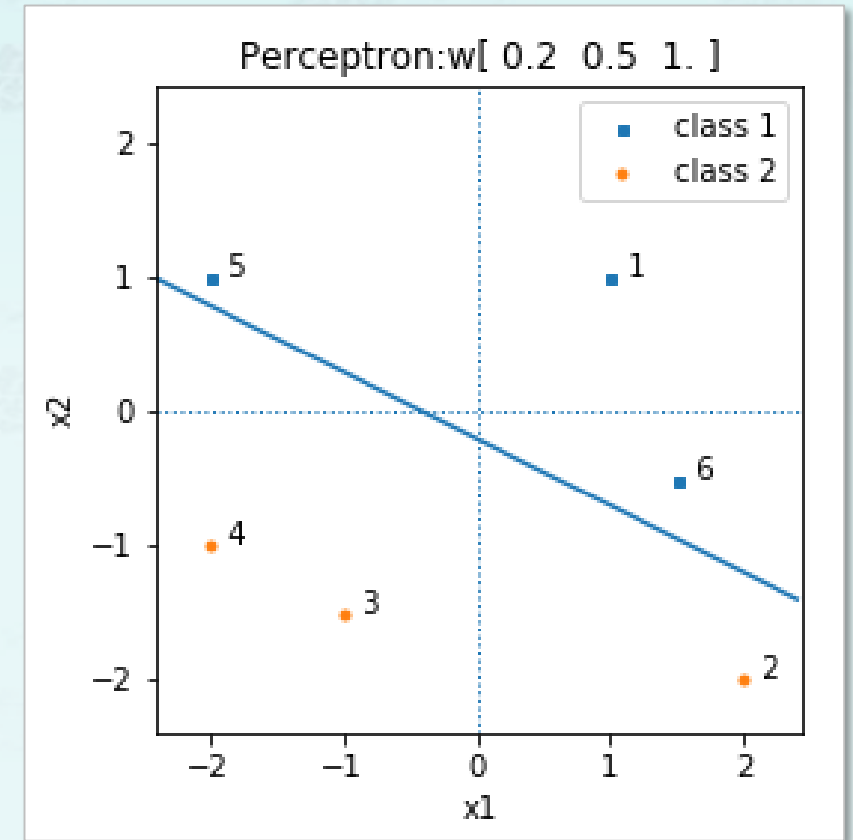
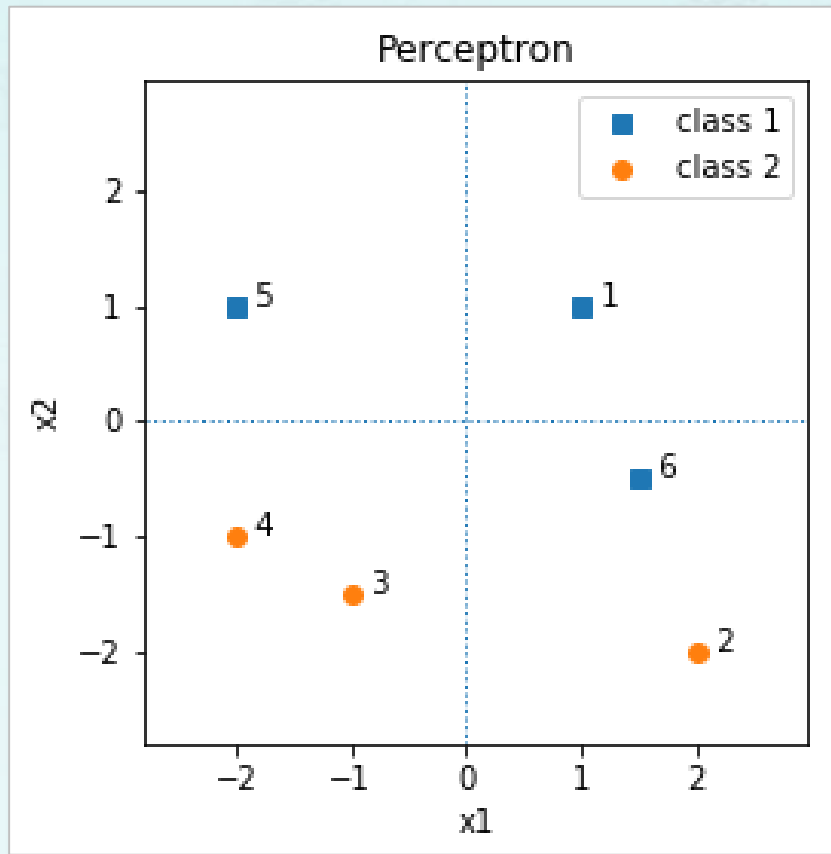
4. 퍼셉트론 알고리즘의 한계: 최적 분류의 한계

- 직선으로 분류는 하지만, 최적의 직선은 아님



4. 퍼셉트론 예제: 학습자료

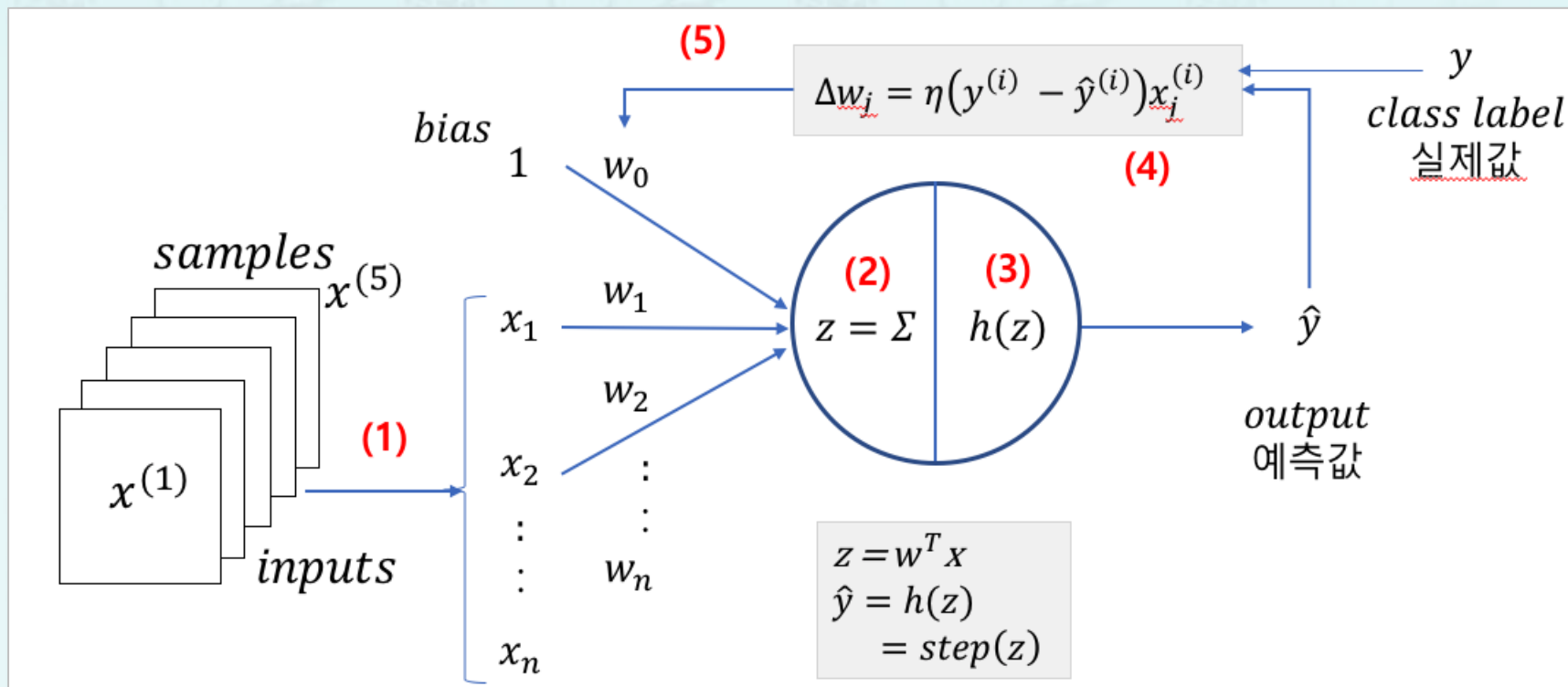
- 6개의 학습자료
- 클래스 레이블 $y = [1, -1, -1, -1, 1, 1]$



4. 퍼셉트론 예제: 가중치 계산

■ Step 1: 가중치 w 계산하기

- w 의 초기 가중치:
 - $w^T = [0 \ 1 \ 0.5]$
- 학습률 $\eta = 0.1$
- 학습자료:
 - $x^{(1)} = [1, 1]$
 - $x^{(2)} = [2, -2]$
 - $x^{(3)} = [-1, -1.5]$
 - $x^{(4)} = [-2, -1.0]$
 - $x^{(5)} = [1, -2.0, 1.0]$
 - $x^{(6)} = [1, 1.5, -0.5]$



4. 퍼셉트론 예제: 가중치 계산

■ Step 1: 가중치 w 계산하기

i	$(x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$	(w_0, w_1, w_2)	$\mathbf{w}^T \mathbf{x}$	$\hat{y}^{(i)}$	$y^{(i)}$	η	Δw
1	(1.0, 1.0, 1.0)	(0.0, 1.0, 0.5)					
2	(1.0, 2.0, -2.0)						
3	(1.0, -1.0, -1.5)						
4	(1.0, -2.0, -1.0)						
5	(1.0, -2.0, 1.0)						
6	(1.0, 1.5, -0.5)						
<i>final</i>							

4. 퍼셉트론 예제: 가중치 계산

- Step 1: 가중치 w 계산하기

i	$(x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$	(w_0, w_1, w_2)	$w^T x$	$\hat{y}^{(i)}$	$y^{(i)}$	η	Δw
1	(1.0, 1.0, 1.0)	(0.0, 1.0, 0.5)			1	0.1	
2	(1.0, 2.0, -2.0)				-1	0.1	
3	(1.0, -1.0, -1.5)				-1	0.1	
4	(1.0, -2.0, -1.0)				-1	0.1	
5	(1.0, -2.0, 1.0)				1	0.1	
6	(1.0, 1.5, -0.5)				1	0.1	
<i>final</i>							

4. 퍼셉트론 예제: 가중치 계산

■ Step 1: 가중치 w 계산하기

i	$(x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$	(w_0, w_1, w_2)	$\mathbf{w}^T \mathbf{x}$	$\hat{y}^{(i)}$	$y^{(i)}$	η	Δw
➡ 1	(1.0, 1.0, 1.0)	(0.0, 1.0, 0.5)		1	0.1		
2	(1.0, 2.0, -2.0)			-1	0.1		
3	(1.0, -1.0, -1.5)			-1	0.1		
4	(1.0, -2.0, -1.0)			-1	0.1		
5	(1.0, -2.0, 1.0)			1	0.1		
6	(1.0, 1.5, -0.5)			1	0.1		
<i>final</i>							

4. 퍼셉트론 예제: 가중치 계산

■ Step 1: 가중치 w 계산하기

i	$(x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$	(w_0, w_1, w_2)	$w^T x$	$\hat{y}^{(i)}$	$y^{(i)}$	η	Δw
1	(1.0, 1.0, 1.0)	(0.0, 1.0, 0.5)	1.5	1.0	1	0.1	0
2	(1.0, 2.0, -2.0)	(0.0, 1.0, 0.5)			-1	0.1	
3	(1.0, -1.0, -1.5)				-1	0.1	
4	(1.0, -2.0, -1.0)				-1	0.1	
5	(1.0, -2.0, 1.0)				1	0.1	
6	(1.0, 1.5, -0.5)				1	0.1	
<i>final</i>							

4. 퍼셉트론 예제: 가중치 계산

- Step 1: 가중치 w 계산하기

i	$(x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$	(w_0, w_1, w_2)	$w^T x$	$\hat{y}^{(i)}$	$y^{(i)}$	η	Δw
1	(1.0, 1.0, 1.0)	(0.0, 1.0, 0.5)	1.5	1.0	1	0.1	0
2	(1.0, 2.0, -2.0)	(0.0, 1.0, 0.5)	1.0	1.0	-1	0.1	
3	(1.0, -1.0, -1.5)				-1	0.1	
4	(1.0, -2.0, -1.0)				-1	0.1	
5	(1.0, -2.0, 1.0)				1	0.1	
6	(1.0, 1.5, -0.5)				1	0.1	
<i>final</i>							

4. 퍼셉트론 예제: 가중치 계산

■ Step 1: 가중치 w 계산하기

i	$(x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$	(w_0, w_1, w_2)	$w^T \mathbf{x}$	$\hat{y}^{(i)}$	$y^{(i)}$	η	Δw
1	(1.0, 1.0, 1.0)	(0.0, 1.0, 0.5)	1.5	1.0	1	0.1	0
2	(1.0, 2.0, -2.0)	(0.0, 1.0, 0.5)	1.0	1.0	-1	0.1	
3	(1.0, -1.0, -1.5)						
4	(1.0, -2.0, -1.0)						
5	(1.0, -2.0, 1.0)						
6	(1.0, 1.5, -0.5)						
<i>final</i>							

$$\begin{aligned}\Delta w_j &= \eta(y^{(i)} - \hat{y}^{(i)})x_j^{(i)} \\ &= 0.1(-1 - 1)x_j^{(2)} \\ &= -0.2x_j^{(2)}\end{aligned}$$

4. 퍼셉트론 예제: 가중치 계산

■ Step 1: 가중치 w 계산하기

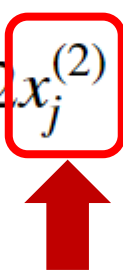
i	$(x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$	(w_0, w_1, w_2)	$w^T \mathbf{x}$	$\hat{y}^{(i)}$	$y^{(i)}$	η	Δw
1	(1.0, 1.0, 1.0)	(0.0, 1.0, 0.5)	1.5	1.0	1	0.1	0
2	(1.0, 2.0, -2.0)	(0.0, 1.0, 0.5)	1.0	1.0	-1	0.1	
3	(1.0, -1.0, -1.5)						
4	(1.0, -2.0, -1.0)						
5	(1.0, -2.0, 1.0)						
6	(1.0, 1.5, -0.5)						
<i>final</i>							

$$\begin{aligned}
 \Delta w_j &= \eta(y^{(i)} - \hat{y}^{(i)})x_j^{(i)} \\
 &= 0.1(-1 - 1)x_j^{(2)} \\
 &= -0.2x_j^{(2)} \leftarrow
 \end{aligned}$$

4. 퍼셉트론 예제: 가중치 계산

■ Step 1: 가중치 w 계산하기

i	$(x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$	(w_0, w_1, w_2)	$w^T x$	$\hat{y}^{(i)}$	$y^{(i)}$	η	Δw
1	(1.0, 1.0, 1.0)	(0.0, 1.0, 0.5)	1.5	1.0	1	0.1	0
2	(1.0, 2.0, -2.0)	(0.0, 1.0, 0.5)	1.0	1.0	-1	0.1	
3	(1.0, -1.0, -1.5)						
4	(1.0, -2.0, -1.0)						
5	(1.0, -2.0, 1.0)						
6	(1.0, 1.5, -0.5)						
<i>final</i>							

$$\begin{aligned}
 \Delta w_j &= \eta(y^{(i)} - \hat{y}^{(i)})x_j^{(i)} \\
 &= 0.1(-1 - 1)x_j^{(2)} \\
 &= -0.2x_j^{(2)}
 \end{aligned}$$


4. 퍼셉트론 예제: 가중치 계산

■ Step 1: 가중치 w 계산하기

i	$(x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$	(w_0, w_1, w_2)	$w^T \mathbf{x}$	$\hat{y}^{(i)}$	$y^{(i)}$	η	Δw
1	(1.0, 1.0, 1.0)	(0.0, 1.0, 0.5)	1.5	1.0	1	0.1	0
2	(1.0, 2.0, -2.0)	(0.0, 1.0, 0.5)	1.0	1.0	-1	0.1	
3	(1.0, -1.0, -1.5)						
4	(1.0, -2.0, -1.0)						
5	(1.0, -2.0, 1.0)						
6	(1.0, 1.5, -0.5)						
<i>final</i>							

$$\begin{aligned}\Delta w_j &= \eta(y^{(i)} - \hat{y}^{(i)})x_j^{(i)} \\ &= 0.1(-1 - 1)x_j^{(2)} \\ &= -0.2x_j^{(2)}\end{aligned}$$

4. 퍼셉트론 예제: 가중치 계산


■ Step 1: 가중치 w 계산하기

i	$(x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$	(w_0, w_1, w_2)	$w^T x$	$\hat{y}^{(i)}$	$y^{(i)}$	η	Δw
1	(1.0, 1.0, 1.0)	(0.0, 1.0, 0.5)	1.5	1.0	1	0.1	0
2	(1.0, 2.0, -2.0)	(0.0, 1.0, 0.5)	1.0	1.0	-1	0.1	(-.2, -.4, .4)
3	(1.0, -1.0, -1.5)						
4	(1.0, -2.0, -1.0)						
5	(1.0, -2.0, 1.0)						
6	(1.0, 1.5, -0.5)						
<i>final</i>							

$$\begin{aligned}\Delta w_j &= \eta(y^{(i)} - \hat{y}^{(i)})x_j^{(i)} \\ &= 0.1(-1 - 1)x_j^{(2)} \\ &= -0.2x_j^{(2)} \\ \Delta w &= -0.2(1.0, 2.0, -2.0) \\ &= (-0.2, -0.4, 0.4)\end{aligned}$$

4. 퍼셉트론 예제: 가중치 계산

■ Step 1: 가중치 w 계산하기

i	$(x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$	(w_0, w_1, w_2)	$w^T x$	$\hat{y}^{(i)}$	$y^{(i)}$	η	Δw
1	(1.0, 1.0, 1.0)	(0.0, 1.0, 0.5)	1.5	1.0	1	0.1	0
2	(1.0, 2.0, -2.0)	W (0.0, 1.0, 0.5)	1.0	1.0	-1	0.1	ΔW (-.2, -.4, .4)
3	(1.0, -1.0, -1.5)	(-2.0, 0.6, 0.9)					
4	(1.0, -2.0, -1.0)	 $W + \Delta W$					
5	(1.0, -2.0, 1.0)						
6	(1.0, 1.5, -0.5)						
<i>final</i>							

$$\begin{aligned}\Delta w_j &= \eta(y^{(i)} - \hat{y}^{(i)})x_j^{(i)} \\ &= 0.1(-1 - 1)x_j^{(2)} \\ &= -0.2x_j^{(2)} \\ \Delta w &= -0.2(1.0, 2.0, -2.0) \\ &= (-0.2, -0.4, 0.4)\end{aligned}$$

4. 퍼셉트론 예제: 가중치 계산

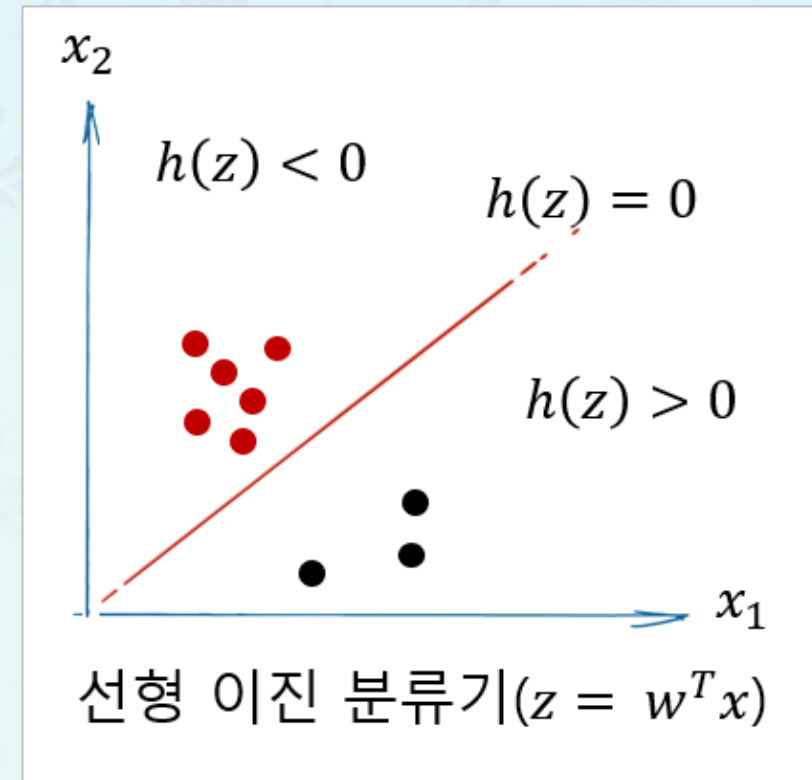
■ Step 1: 가중치 w 계산하기

i	$(x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$	(w_0, w_1, w_2)	$w^T \mathbf{x}$	$\hat{y}^{(i)}$	$y^{(i)}$	η	Δw
1	(1.0, 1.0, 1.0)	(0.0, 1.0, 0.5)	1.5	1.0	1	0.1	0
2	(1.0, 2.0, -2.0)	(0.0, 1.0, 0.5)	1.0	1.0	-1	0.1	(-.2, -.4, .4)
3	(1.0, -1.0, -1.5)	(-2.0, 0.6, 0.9)	-2.15	-1	-1	0.1	0
4	(1.0, -2.0, -1.0)	(-0.2, 0.6, 0.9)	-2.3	-1	-1	0.1	0
5	(1.0, -2.0, 1.0)	(0.0, 0.2, 1.1)	-0.25	-1	1	0.1	(.2, -.4, .2)
6	(1.0, 1.5, -0.5)	(0.0, 0.2, 1.1)	-0.25	-1	1	0.1	(.2, .3, -.1)
<i>final</i>	-	(0.2, 0.5, 1.0) ←	-	-	-	-	-

4. 퍼셉트론 예제: 판별식

- **Step 1:** 가중치 구하기
 - $w = [0.2, 0.5, 1.0]$
- **Step 2:** 판별식 구하기
 - $h(z) = 0$ 즉, $h(w^T x) = 0$

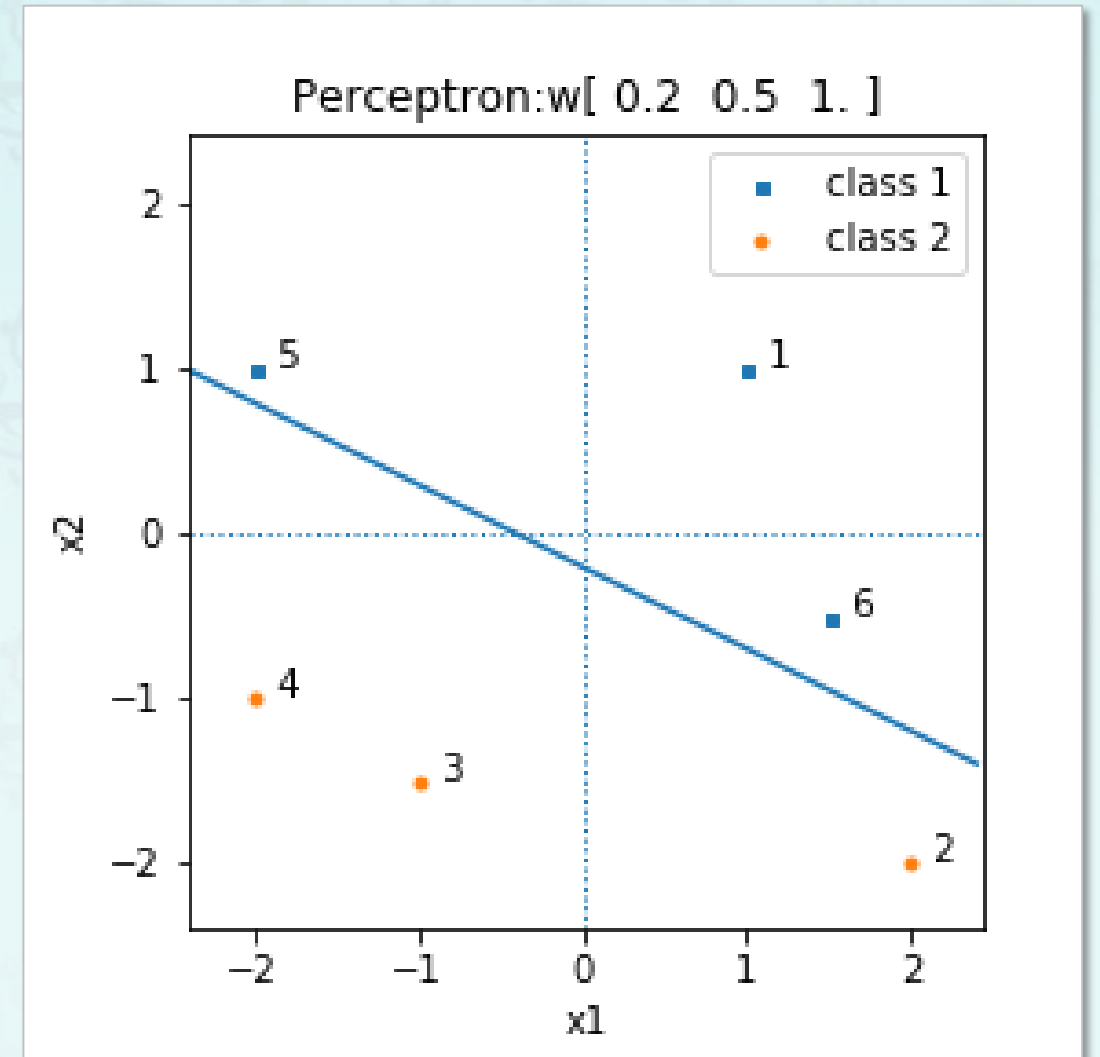
$$\begin{aligned} & w^T x = 0 \\ & \begin{bmatrix} w_0 & w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \\ & w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 = 0 \\ & 0.2 + 0.5x_1 + 1.0x_2 = 0 \end{aligned}$$



4. 퍼셉트론 예제: 시각화

- **Step 1:** 가중치 구하기
 - $w = [0.2, 0.5, 1.0]$
- **Step 2:** 판별식 구하기
 - $x_2 = -.5x_1 - 0.2$
- **Step 3:** 판별식 시각화
 - `plot_xyw()`

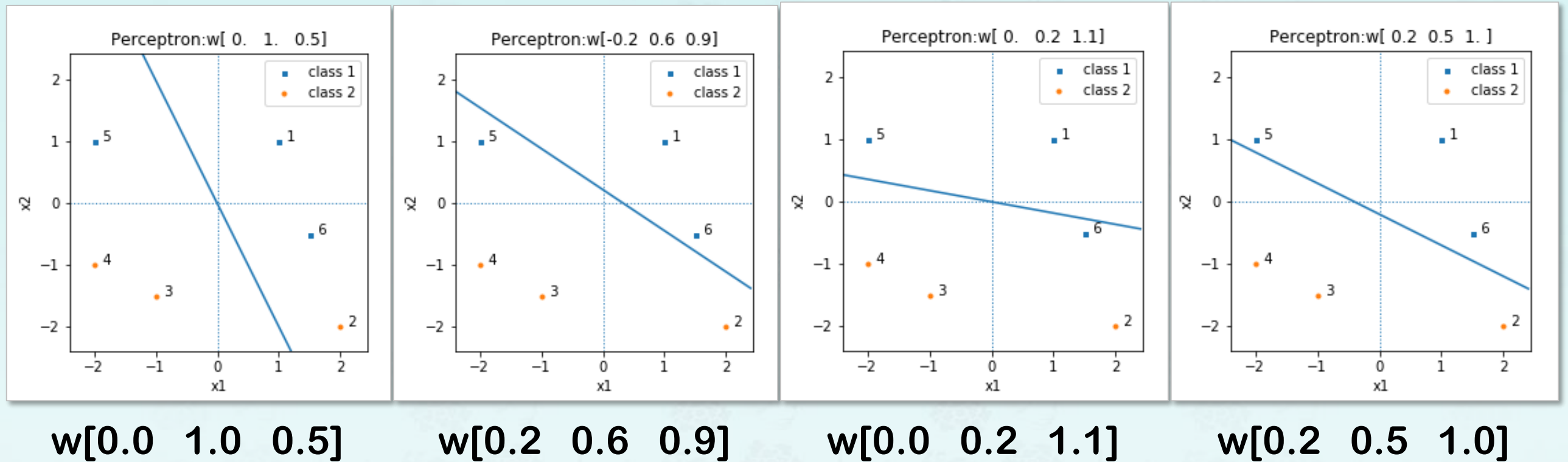
- `plot_xyw()`



4. 퍼셉트론 예제: 시각화 코드

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3 %matplotlib inline
4 %run code/plot_xyw.py
5
6 x = np.array([[1.0, 1.0], [2.0, -2.0], [-1.0, -1.5],
7              [-2.0, -1.0], [-2.0, 1.0], [1.5, -0.5]])
8 X = np.c_[ np.ones(len(x)), x ]
9 y = np.array([1, -1, -1, -1, 1, 1])
10 w = np.array([0.2, 0.5, 1.0])
11 plot_xyw(X, y, w, X0=True, annotate=True)
```


4. 퍼셉트론 예제: 판별식의 수렴 과정



퍼셉트론

- 학습 정리
 - 퍼셉트론 알고리즘
 - 퍼셉트론 가중치 계산
 - 퍼셉트론 학습 전체 과정
 - 퍼셉트론 알고리즘의 한계
 - 퍼셉트론 예제