

Tugas Besar TF2202

Selesaikan soal-soal berikut ini dengan menggunakan Scilab.

1 Soal 1: Perbandingan akurasi beberapa metode

Carilah solusi numerik dari persamaan diferensial berikut

$$y''(t) + y(t) = 0 \quad (1)$$

dengan syarat awal

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (2)$$

pada interval $0 \leq t \leq 10$.

Bandingkan solusi yang diperoleh dengan solusi analitik:

$$y(t) = \sin(t) \quad (3)$$

Gunakan menggunakan metode-metode berikut ini untuk mencari solusi numeriknya.

- Euler
- Euler dengan prediktor-korektor (Runge-Kutta orde-2)
- Runge-Kutta orde-4

Dari solusi numerik yang didapatkan, buatlah (1) plot antara y dan y' dan (2) plot antara t dan y .

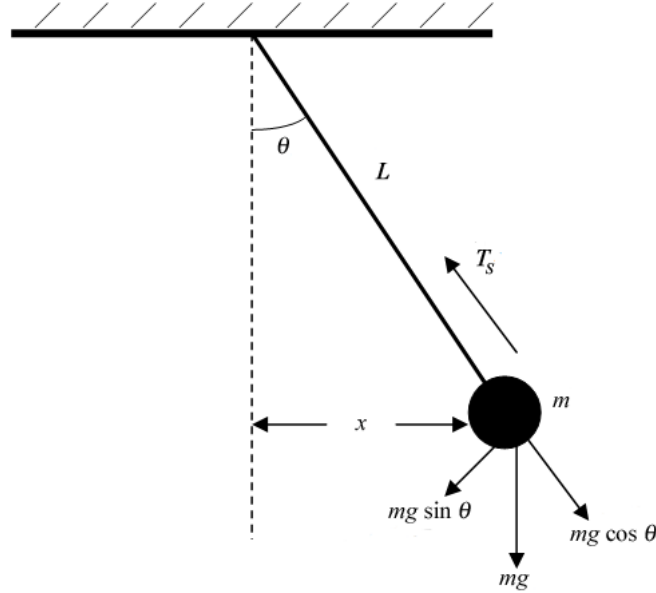
2 Soal 2: Gerakan pendulum

Gerak suatu pendulum dapat dinyatakan dengan persamaan diferensial:

$$\theta''(t) = -\frac{g}{L} \sin(\theta(t)) - k\theta'(t) \quad (4)$$

dengan syarat awal

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = 0 \quad (5)$$



Gambar 1: Pendulum sederhana

Dalam persamaan tersebut θ menyatakan simpangan pendulum, θ_0 menyatakan simpangan awal pendulum, g menyatakan percepatan gravitasi, L menyatakan panjang benang pendulum, dan $k\theta'$ menyatakan suku redaman (gesekan) yang berbanding lurus dengan kecepatan θ' (k adalah bilangan positif).

- Cari solusi $\theta(t)$ untuk kasus $k = 0$ untuk simpangan awal $\theta_0 = 0.1, \pi/5$ dan 3.0 .
- Masih untuk kasus $k = 0$, tentukan periode osilasi T sebagai fungsi dari simpangan awal u_0 .
- Carilah solusi $u(t)$ untuk kasus $k = 0.1, 0.3, 0.5$ dan 0.8 untuk simpangan awal yang sama.

3 Soal 3: Persamaan Schrodinger (metode shooting)

Persamaan Schrodinger independen-waktu pada 1 dimensi dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (6)$$

Dengan menggunakan unit atomik, kita dapat mengambil $\hbar = 1$ dan $m = 1$, dan persamaan (6) dapat ditulis menjadi:

$$\psi'' = 2[V(x) - E]\psi \quad (7)$$

Untuk solusi keadaan terikat (bound states), nilai E hanya dapat memiliki nilai yang diskrit. Selain itu, untuk bound states fungsi gelombang dibatasi dengan syarat

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x) = 0 \quad (8)$$

Selain itu, fungsi gelombang biasanya juga dinyatakan dalam bentuk ternormalisasi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x) dx = 1 \quad (9)$$

Untuk potensial yang simetrik terhadap $x = 0$, secara matematis dapat ditulis $V(-x) = V(x)$. Contoh potensial simetrik yang akan dibahas adalah potensial harmonik

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad (10)$$

Dengan demikian, kita bisa mendapatkan solusi pada $(-\infty, \infty)$ hanya dengan solusi pada $(0, \infty)$. Ingat lagi dari kuliah mekanika kuantum bahwa, untuk potensial harmonik, nilai E yang diperbolehkan adalah:

$$E = \frac{(n+1)}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

Kita dapat mengelompokkan solusi ini menjadi dua kelompok:

- solusi ganjil ($n = 1, 3, 5, \dots$), dengan fungsi gelombang $\psi(x) = -\psi(-x)$
- solusi genap ($n = 0, 2, 4, \dots$), dengan fungsi gelombang $\psi(x) = \psi(-x)$

Persamaan (7) dapat diselesaikan dengan menggunakan metode standard seperti Runge-Kutta orde-4. Metode lain yang sering digunakan adalah metode Numerov. Metode ini biasa digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde dua tanpa suku dengan turunan pertama, seperti pada persamaan (7). Metode ini dapat dituliskan dalam bentuk:

$$u_m = 1 - \frac{1}{6}h^2 [V(x_m) - E] \quad (12)$$

$$\psi_{m+1} = \frac{(12 - 10u_m)\psi_m - u_{m-1}\psi_{m-1}}{u_{m+1}} \quad (13)$$

Untuk mengaplikasikan metode shooting, persamaan nilai batas harus dikonversi menjadi permasalahan syarat awal:

$$\psi(0) = \psi_0, \quad \psi'(0) = 0, \quad n = 0, 2, 4, \dots \quad (14)$$

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = \psi'_0, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (15)$$

Nilai dari ψ_0 dan ψ'_0 dapat dipilih dengan nilai sembarang bukan nol. Untuk soal ini kita akan ambil $\psi_0 = 1$ dan $\psi'_0 = 1$.

- (a) Buatlah program untuk menghitung solusi numerik dari persamaan 7 dengan menggunakan metode Numerov. Perhatikan bahwa untuk mendapatkan nilai ψ_{m+1} kita memerlukan dua nilai sebelumnya, yaitu ψ_m dan ψ_{m-1} , sedangkan dari deskripsi masalah kita biasanya hanya memiliki informasi nilai awal ψ_0 dan ψ'_0 . Untuk mencari nilai ψ_1 kita dapat menggunakan metode Euler-Cromer:

$$\psi_1 = \psi_0 + \psi'_0 \Delta x + 2(V(x_0) - E)(\Delta x)^2 \quad (16)$$

Gunakan nilai solusi analitik $E = 0.5$ dan disekitarnya misalnya $E = 0.499$ dan 0.501 serta bandingkan hasilnya numerik dari ψ yang didapatkan dengan ψ eksak, yaitu $\psi = \exp(-x^2/2)$. Anda dapat mengaproksimasi solusi pada selang $0 \leq x < \infty$ dengan solusi selang $0 < x < 5$, misalnya dengan asumsi bahwa fungsi gelombang eksak telah memiliki nilai nol pada $x = 5$. Gunakan juga syarat awal yang sesuai untuk $E = 0.5$ (solusi genap), yaitu $\psi_0 = 1$ dan $\psi'_0 = 0$.

- (b) Gunakan metode shooting dengan cara memvariasikan nilai E untuk mencari nilai E yang mungkin dalam rentang $0 \leq E \leq 15$. Gunakan syarat awal yang sesuai untuk solusi ganjil dan genap.

4 Soal 4: Persamaan Schrodinger (nilai eigen)

Metode alternatif yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan Schrodinger independen-waktu adalah dengan menyelesaikan persamaan eigenvalue

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x) \quad (17)$$

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x) \quad (18)$$

Nilai-nilai E yang mungkin dapat dicari dengan cara menghitung nilai eigen dari matriks Hamiltonian

$$H_{ij} = K_{ij} + V_{ij} \quad (19)$$

Dengan K_{ij} dan V_{ij} adalah representasi matriks dari operator kinetik dan potensial. Fungsi eigen terkait adalah fungsi gelombang solusi dari persamaan (7).

Suatu selang $-L < x < L$ dengan L suatu bilangan positif dibagi-bagi kedalam $N - 1$ partisi dengan jumlah total titik N , yaitu $x_i, i = 1, 2, \dots, N$. Potensial $V(x)$ dapat dihitung pada x_i sehingga kita peroleh representasi diskrit dari potensial: $V_i = V(x_i)$.

Matriks V_{ij} adalah matriks diagonal yang elemen diagonalnya adalah nilai dari $V(x)$ pada titik x_i . Matriks K_{ij} dapat diaproksimasi dengan cara mengaproksimasi operator $d^2/\mathrm{d}x^2$ dengan menggunakan beda hingga.

- Gunakan beda hingga sentral 3 titik untuk mengaproksimasi matriks K_{ij}
- Hitung matriks Hamiltonian dan selesaikan persamaan eigen $H\psi = E\psi$. Anda dapat menggunakan perintah `[psi,D] = spec(H); E = diag(D)` pada Scilab. Bandingkan hasil yang Anda peroleh dengan solusi analitik.
- Ulangi (a) dan (b) dengan menggunakan beda hingga sentral 5, 7, dan 9 titik. Bandingkan hasilnya dengan menggunakan Δx yang sama.

5 Soal 5: Persamaan Poisson 2D

Hitung solusi numerik dari persamaan Laplace:

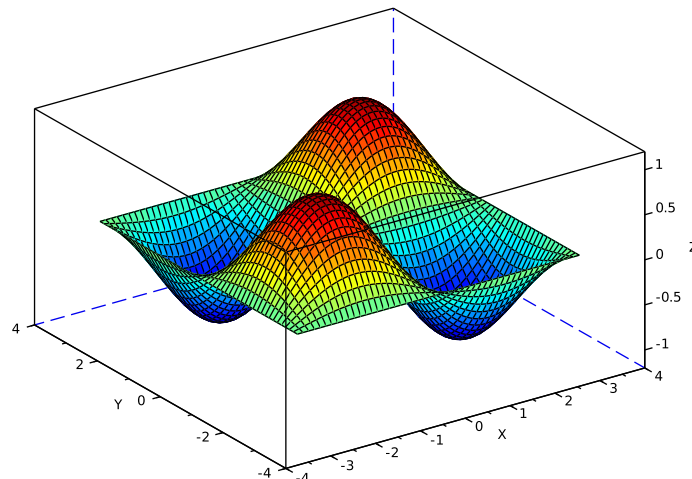
$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = \cos(x + y) - \sin(x - y) \quad (20)$$

pada domain rektanguler $-\pi < x < \pi, -\pi < y < \pi$ dengan syarat batas

$$u(\pm\pi, y) = 0, \quad u(x, \pm\pi) = 0 \quad (21)$$

dengan menggunakan metode beda hingga. Gunakan metode Gauss-Seidel untuk menyelesaikan sistem persamaan linear yang dihasilkan. Bandingkan solusi numerik yang diperoleh dengan solusi analitik

$$u(x, y) = \sin(x) \cos(y) \quad (22)$$



Gambar 2: Solusi persamaan Laplace $u(x, y)$

6 Soal 6: Persamaan transfer kalor

Hitung solusi numerik dari

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (23)$$

untuk $0 \leq x \leq 1$ dan $0 \leq t \leq 0.1$ dengan syarat awal

$$u(x, 0) = \sin(\pi x) \quad (24)$$

dan syarat batas

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0 \quad (25)$$

Gunakan metode Euler eksplisit, Euler implisit dan Crank-Nicolson serta bandingkan hasilnya. Buat juga animasi (dalam format GIF) yang menggambarkan perubahan profil suhu terhadap waktu.

7 Soal 7: Persamaan gelombang

Selesaikan PDE berikut dengan menggunakan metode beda hingga. Buat juga visualisasi solusi berupa animasi dari solusi yang didapatkan.

(a) Hitung solusi numerik persamaan gelombang 1d

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (26)$$

untuk $0 < x < 1$ dan $0 \leq t \leq 5$ dengan syarat awal

$$u(x, 0) = \sin(2\pi x)$$

dan syarat batas:

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0$$

(b) Selesaikan persamaan gelombang 2d

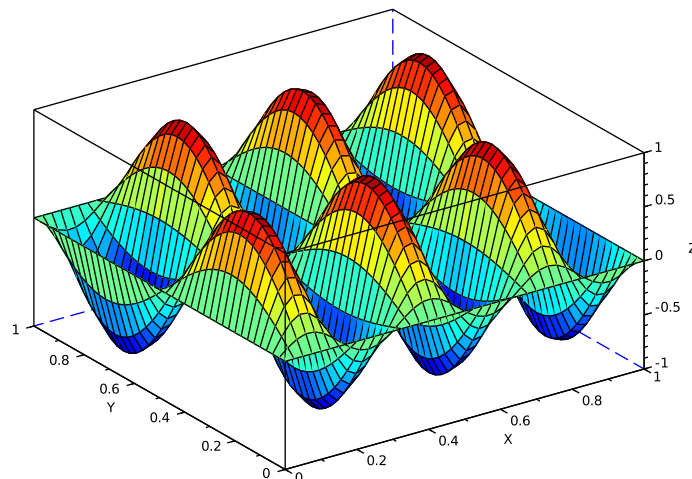
$$\frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} \quad (27)$$

pada domain rectangular dengan $0 < x < 1$ dan $0 < y < 1$ serta pada selang waktu $0 < t < 2$ dengan syarat awal

$$u(x, y, 0) = \sin(6\pi x) \sin(2\pi y)$$

dan syarat batas:

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= 0, & u(x, 0, t) &= 0 \\ u(1, y, t) &= 0, & u(x, 1, t) &= 0 \end{aligned}$$



Gambar 3: Syarat awal $u(x, y, 0)$