Persamaan Difusi

TF4062: Komputasi Rekayasa Lanjut

Iwan Prasetyo
Fadjar Fathurrahman

Teknik Fisika
Institut Teknologi Bandung

Persamaan Difusi Kalor 1d

Pada satu dimensi spasial, misalkan x, dapat dituliskan

$$\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) \tag{1}$$

Solusi $x(x,t)$ akan dicari pada domain spasial: $0 \leq x \leq x_f$ dan domain temporal: $0 \leq t \leq t_f$. dengan syarat batas: $u(0,t) = b_0(t)$ and $u(x_f,t) = b_{x_f}(t)$ dan syarat awal: $u(x,0) = u_0(x)$

Metode Euler Eksplisit

Domain spasial dibagi menjadi N_x segmen dengan $\Delta x = x_f/(N_x - 1)$. Domain temporal dibagi menjadi N_t segmen dengan $\Delta t = t_f/(N_t - 1)$. Turunan parsial kedua terhadap x diaproksimasi dengan menggunakan central difference. Turunan parsial pertama terhadap t diaproksimasi dengan forward difference.

Dengan menggunakan notasi berikut: $u(x,t) = u_i^k$, $u(x+\Delta x, t) = u_{i+1}^k$ $u(x-\Delta x, t) = u_{i-1}^k$, $u(x, t+\Delta t) = u_i^{k+1}$, and $u(x, t-\Delta t) = u_i^{k-1}$ dapat dituliskan:

$$\alpha \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{(\Delta x)^2} = \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} \tag{2}$$

Dengan menggunakan definisi:

$$r = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \tag{3}$$

Persamaan ini dapat dipecahkan untuk mendapatkan u_i^{k+1}

$$u_i^{k+1} = r\left(u_{i+1}^k + u_{i-1}^k\right) + (1-2r)u_i^k \tag{4}$$

untuk $i = 1, 2, \ldots, N_x - 1$.

Dapat ditunjukkan bahwa skema ini akan stabil jika:

$$r = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \tag{5}$$

An example

Cari solusi numerik persamaan kalor:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)$$

pada domain spasial: $0 \leq x \leq 1$ and $0 \leq t \leq 0.1$.

Syarat batas: $u(0,t) = 0$ $u(1,t) = 0$

Syarat awal: $u(x,0) = \sin(\pi x)$

Bandingkan dengan solusi analitik:

$$u(x,t) = \sin(\pi x) \exp(-\pi^2 t) \tag{6}$$

Metode Euler implisit

Turunan parsial kedua terhadap x diaproksimasi dengan menggunakan central difference. Turunan parsial pertama terhadap t diaproksimasi dengan backward difference.

$$\alpha \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{(\Delta x)^2} = \frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\Delta t} \tag{7}$$

Dengan menggunakan definisi

$$r = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \tag{8}$$

Diperoleh persamaan implisit untuk $i = 2, 3, \ldots, N_x - 2$:

$$-ru_{i-1}^k + (1 + 2r)u_i^k - ru_{i+1}^k = u_i^{k-1} \tag{9}$$

Dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} 1+2r & -r & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -r & 1+2r & -r & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -r & 1+2r & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+2r & -r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -r & 1+2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ u_3^k \\ \cdots \\ u_{N_x-2}^k \\ u_{N_x-1}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^{k-1} + ru_0^k \\ u_2^{k-1} \\ u_3^{k-1} \\ \cdots \\ u_{N_x-2}^{k-1} \\ u_{N_x-1}^{k-1} + ru_{N_x}^k \end{bmatrix} \tag{10}$$

Metode Crank-Nicholson

Metode Crank-Nicholson diperoleh dengan menggunakan rata-rata aproksimasi central difference antara titik waktu $k+1$ dan k sehingga diperoleh:

$$\frac{\alpha}{2}\left(\frac{u_{i+1}^{k+1}-2u_i^{k+1}+u_{i-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2}+\frac{u_{i+1}^{k}-2u_i^{k}+u_{i-1}^{k}}{(\Delta x)^2}\right)=\frac{u_i^{k+1}-u_i^k}{\Delta t} \tag{11}$$

atau:

$$ru_{i+1}^{k+1}-2ru_i^{k+1}+ru_{i-1}^{k+1}+ru_{i+1}^{k}-2ru_i^{k}+ru_{i-1}^{k}=2u_i^{k+1}-2u_i^k \tag{12}$$

$$-ru_{i+1}^{k+1}+2(1+r)u_i^{k+1}-ru_{i-1}^{k+1}=ru_{i+1}^{k}+2(1-r)u_i^{k}+ru_{i-1}^{k} \tag{13}$$

Dalam bentuk matriks:

$$\mathbf{Au}^{k+1}=\mathbf{Bu}^{k} \tag{14}$$

dengan matriks sebagai berikut.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2(1+r) & -r & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -r & 2(1+r) & -r & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -r & 2(1+r) & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2(1+r) & -r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -r & 2(1+r) \end{bmatrix}$$

Metode Crank-Nicolson

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2(1-r) & r & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ r & 2(1-r) & r & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & r & 2(1-r) & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 2(1-r) & r \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & r & 2(1-r) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}^k = \begin{bmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ u_3^k \\ \cdot \\ u_{M-1}^k \\ u_M^k \end{bmatrix}$$

Metode eksplisit

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \tag{15}$$

pada domain: $x \in (0, L)$ dan $t \in (0, T]$

Syarat batas: $x(x, 0) = I(x)$, $x \in [0, L]$

$u(0, t) = 0$ dan $u(L, t) = 0$ pada $t > 0$

Diskritisasi

$$x_i = (i - 1)\Delta x, \;\; i = 1, \ldots, N_x \tag{16}$$

$$t_n = (n - 1)\Delta t, \;\; n = 1, \ldots, N_t \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x_i, t_n) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_i, t_n) + f(x_i, t_n) \tag{18}$$

Forward difference in time and central difference in space:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + f_i^n \tag{19}$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + F\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right) + f_i^n \Delta t \tag{20}$$

$$F = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \tag{21}$$

Aturan θ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = G(u) \tag{22}$$

di mana $G(u)$ adalah suatu operator diferensial spasial

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \theta G(u_i^{n+1}) + (1-\theta) G(u_i^n) \tag{23}$$

Untuk persamaan difusi:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha \left(\theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + (1-\theta) \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right) + \theta f_i^{n+1} + (1-\theta) f_i^n \tag{24}$$

Sistem matriks:

$$A_{i,i-1} = -F\theta, \; A_{i,i} = 1 + 2F\theta, \; A_{i,i+1} = -F\theta \tag{25}$$