

# Aproksimasi, Kesalahan, dan Deret Taylor

Tim Praktikum Komputasi Rekayasa 2021

Teknik Fisika

Institut Teknologi Bandung

## 1 Chapra Contoh 3.2

Fungsi eksponensial dapat dihitung dengan menggunakan deret sebagai berikut:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \quad (1)$$

Kita ingin menggunakan Persamaan (1) untuk menghitung estimasi dari  $e^{0.5}$ . Dengan menggunakan kriteria dari Scarborough:

$$\epsilon_s = (0.5 \times 10^{2-3})\% = 0.05\%$$

Kita akan menambahkan suku-suku pada Persamaan (1) sampai  $\epsilon_a$  lebih kecil dari  $\epsilon_s$ .

Program Python berikut ini dapat digunakan untuk melakukan perhitungan yang ada pada buku teks.

```
from math import factorial, exp

def approx_exp(x, N):
    assert(N >= 0)
    if N == 0:
        return 1
    s = 0.0
    for i in range(N+1):
        s = s + x**i/factorial(i)
    return s

x = 0.5
true_val = exp(x) # from math module

n_digit = 3
# Equation 3.7
epsilon_s_percent = 0.5*10**(2-n_digit)

prev_approx = 0.0
for N in range(50):
    approx_val = approx_exp(x, N)
    epsilon_t_percent = abs(approx_val - true_val)/true_val * 100
    if N > 0:
        epsilon_a_percent = abs(approx_val - prev_approx)/approx_val * 100
    else:
        epsilon_a_percent = float('nan')
    prev_approx = approx_val
    print("%3d %18.10f %10.5f%% %10.5f%%" % (N+1, approx_val, epsilon_t_percent, epsilon_a_percent))
    if epsilon_a_percent < epsilon_s_percent:
        print("Converged within %d significant digits" % n_digit)
        break
```

```
print("true_val is %18.10f" % true_val)
print("approx_val is %18.10f" % approx_val)
```

Catatan: Pada program di atas, `for`-loop digunakan dengan jumlah iterasi yang relatif besar. Anda dapat menggunakan `while`-loop sebagai gantinya.

Contoh output:

```
1      1.0000000000    39.34693%      nan%
2      1.5000000000    9.02040%     33.33333%
3      1.6250000000    1.43877%     7.69231%
4      1.6458333333    0.17516%     1.26582%
5      1.6484375000    0.01721%     0.15798%
6      1.6486979167    0.00142%     0.01580%
Converged within 3 significant digits
true_val is      1.6487212707
approx_val is      1.6486979167
```

**Soal 1.** Ulangi perhitungan ini untuk jumlah digit signifikan yang berbeda, misalnya 5, 8, dan 10 digit signifikan. Silakan melakukan modifikasi terhadap program yang diberikan.

## 2 Chapra Contoh 3.2, *single precision*

Secara default, perhitungan dengan *floating number* pada Python (dan NumPy) dilakukan dengan menggunakan *double precision*. Pada bagian ini, kita akan mengulangi Chapra Contoh 3.2 dengan menggunakan *single precision*. Pada C dan C++, tipe yang relevan adalah `float` untuk *single precision* dan `double` untuk *double precision*. Pada Fortran kita dapat menggunakan `REAL(4)` untuk *single precision* dan `REAL(8)` untuk *double precision*.

Karena Python merupakan bahasa pemrograman dinamik yang *type-loose* kita tidak dapat dengan mudah memberikan spesifikasi pada variabel yang kita gunakan. Meskipun demikian, kita dapat menggunakan *single precision* pada Python melalui `np.float32`<sup>1</sup>, meskipun program yang dihasilkan kurang elegan. Selain itu, kita juga harus mengecek apakah hasil akhir yang diberikan tetap berupa *single precision* (tidak terjadi *type promotion* ke *double precision*).

```
from math import factorial
import numpy as np

def approx_exp(x, N):
    assert(N >= 0)
    if N == 0:
        return 1
    s = np.float32(0.0)
    for i in range(N+1):
        s = s + np.float32(x**i)/np.float32(factorial(i))
    return s

x = np.float32(0.5)
true_val = np.exp(x) # from np module

n_digit = 3
# Equation 3.7
ε_s_percent = np.float32(0.5)*np.float32(10**(2-n_digit))

prev_approx = np.float32(0.0)
for N in range(50):
    approx_val = approx_exp(x, N)
```

<sup>1</sup>np digunakan sebagai singkatan dari modul numpy

```

ε_t_percent = abs(approx_val - true_val)/true_val * 100
if N > 0:
    ε_a_percent = abs(approx_val - prev_approx)/approx_val * 100
else:
    ε_a_percent = float('nan')
prev_approx = approx_val
print("%3d %18.10f %10.5f%% %10.5f%%" % (N+1, approx_val, ε_t_percent, ε_a_percent))
if ε_a_percent < ε_s_percent:
    print("Converged within %d significant digits" % n_digit)
    break

print("true_val is %18.10f" % true_val)
print("approx_val is %18.10f" % approx_val)

# Make sure that float32 is used
print()
print("type(true_val) = ", type(true_val))
print("type(approx_val) = ", type(approx_val))

```

Berikut ini adalah keluaran dari program.

```

1      1.0000000000    39.34693%    nan%
2      1.5000000000     9.02040%   33.33333%
3      1.6250000000     1.43876%    7.69231%
4      1.6458333731     0.17516%    1.26583%
5      1.6484375000     0.01721%    0.15798%
6      1.6486979723     0.00141%    0.01580%
Converged within 3 significant digits
true_val is      1.6487212181
approx_val is    1.6486979723

type(true_val) = <class 'numpy.float32'>
type(approx_val) = <class 'numpy.float32'>

```

**Soal 2.** Ulangi perhitungan pada Chapra Contoh 3.2 dengan menggunakan *single precision* dengan jumlah digit signifikan yang berbeda, misalnya 5, 8, dan 10 digit signifikan (berdasarkan kriteria Scarborough). Bandingkan hasil yang Anda dapatkan jika *double precision*. Apa yang dapat Anda simpulkan?

### 3 Chapra Contoh 3.8

Akar-akar suatu polinomial kuadrat:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

diberikan oleh formula berikut

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2)$$

Untuk kasus di mana  $b^2 \gg 4ac$  perbedaan antara pembilang dapat menjadi sangat kecil. Pada kasus tersebut, kita dapat menggunakan *double precision* untuk mengurangi kesalahan pembulatan. Selain itu, kita juga dapat menggunakan formula:

$$x_{1,2} = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} \quad (3)$$

Mengikuti contoh yang diberikan pada buku, kita akan menggunakan  $a = 1$ ,  $b = 3000.001$ , dan  $c = 3$ . Akar-akar eksaknya adalah  $x_1 = -0.001$  dan  $x_2 = -3000$ .

**Soal 3.** Buat program Python dengan menggunakan *single precision* dan *double precision* untuk melihat perbedaan hasil yang diberikan dari Persamaan (2) dan Persamaan (3).

Program berikut ini adalah dalam *single precision* yang dapat Anda lengkapi. Anda juga dapat menggunakan program yang Anda tulis sendiri dari awal atau modifikasi dari program ini.

```
import numpy as np

def calc_quad_root_v1(a, b, c):
    D = np.float32(b**2) - np.float32(4)*a*c
    x1 = (-b + np.sqrt(D))/(np.float32(2)*a)
    x2 = # ... lengkapi
    return x1, x2

def calc_quad_root_v2(a, b, c):
    D = # ... lengkapi
    x1 = # ... lengkapi
    x2 = # ... lengkapi
    return x1, x2

a = np.float32(1.0)
b = np.float32(3000.001)
c = np.float32(3.0)

x1_true = np.float32(-0.001)
x2_true = np.float32(-3000.0)

x1, x2 = calc_quad_root_v1(a, b, c)
print("Using 1st formula: approx roots: ", x1, " ", x2)
print(type(x1), type(x2)) # cek apakah x1 dan x2 merupakan np.float32

x1, x2 = calc_quad_root_v2(a, b, c)
print(type(x1), type(x2))
print("Using 2nd formula: approx roots: ", x1, " ", x2)
print("True roots: ", x1_true, " ", x2_true)
```

Bandingkan akar-akar yang Anda peroleh dengan akar-akar eksak. Untuk masing-masing akar, formula mana yang memberikan hasil yang paling dekat dengan hasil eksak?

**Soal 4.** Program berikut ini, kita akan menggunakan CAS atau *computer algebra system* untuk memastikan bahwa formula (2) dan (3) memberikan hasil yang identik. Lengkapi kode berikut ini dan cek apakah hasil yang diberikan dari kedua formula tersebut adalah sama.

```

from sympy import *

def calc_quad_root_v1(a, b, c):
    D = b**2 - 4*a*c
    x1 = (-b + sqrt(D))/(2*a)
    x2 = (-b - sqrt(D))/(2*a)
    return x1, x2

def calc_quad_root_v2(a, b, c):
    D = # lengkapi ...
    x1 = # lengkapi ...
    x2 = # lengkapi ...
    return x1, x2

a = Rational(1)
b = Rational(3000001, 1000)
c = Rational(3)

x1_true = -Rational(1, 1000)
x2_true = -3000

x1, x2 = calc_quad_root_v1(a, b, c)
print("Using 1st formula: approx roots: ", x1, " ", x2)

x1, x2 = calc_quad_root_v2(a, b, c)
print("Using 2nd formula: approx roots: ", x1, " ", x2)

print("True roots: ", x1_true, " ", x2_true)

```

Perhatikan bahwa kode di atas juga mencetak tipe dari variabel  $x_1$  dan  $x_2$  adalah bilangan integer atau rasional. Pada SymPy, tipe untuk integer dan rasional adalah:

```
<class 'sympy.core.numbers.Integer'> <class 'sympy.core.numbers.Rational'>
```

Coba turunkan formula (3) dari (2).

## 4 Chapra Contoh 4.2

Deret Taylor dapat dituliskan sebagai berikut.

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n \quad (4)$$

dengan  $h = x_{i+1} - x_i$  dan  $R_n$  adalah suku sisa (*remainder*).

Kita akan menggunakan deret Taylor dari  $n = 0$  sampai  $n = 6$  untuk mengaproksimasi  $f(x) = \cos(x)$  pada  $x_{i+1} = \pi/3$  dengan nilai  $f(x)$  dari turunan-turunannya pada  $x_i = \pi/4$ , atau  $h = x_{i+1} - x_i = \pi/12$ .

Program berikut ini menggunakan kombinasi perhitungan simbolik dan numerik dengan SymPy.

```

from sympy import * # be very careful when using this!

init_printing(use_unicode=True)
# if you are using Jupyter Lab or Notebook, use the following line instead:
#init_printing(use_latex=True)

x = symbols("x")

f = cos(x)

```

```

xi = pi/4
xip1 = pi/3
h = xip1 - xi

# zeroth order
f_approx = diff(f, x, 0).subs({x: xi}) # or simply call cos(xi)

for n in range(1,7): # from 1 to 6
    new_term = diff(f, x, n) * h**n / factorial(n)
    f_approx = f_approx + new_term
    pprint(f_approx)
    print(N(f_approx.subs({x: xi}))) # use N to force numerical expression

f_true = N(f.subs({x: xip1}))
print("f_true = ", f_true)
print(type(f_true))

```

**Soal 5.** Lakukan modifikasi pada program di atas sehingga dapat menampilkan error atau perbedaan antara nilai aproksimasi dan nilai benar. Program di atas juga menampilkan deret Taylor yang digunakan secara simbolik. Anda dapat menonaktifkan baris kode yang sesuai dengan cara menghapusnya atau menjadikannya komentar.

## 5 Chapra Contoh 4.4

Diketahui sebuah fungsi:

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.25 \quad (5)$$

Kita ingin menghitung pendekatan nilai turunan fungsi ini pada  $x = 0.5$  dengan menggunakan tiga formula. Formula pertama adalah beda hingga maju (*forward finite difference*):

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} \quad (6)$$

beda hingga mundur:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h} \quad (7)$$

dan beda hingga tengah:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} \quad (8)$$

Nilai pendekatan akan dibandingkan dengan hasil evaluasi langsung dari turunan  $f'(x)$ :

$$f'(x) = -0.4x^3 - 0.45x^2 - x - 0.25 \quad (9)$$

**Soal 6.** Buat program Python untuk menghitung pendekatan nilai  $f'(x)$  pada  $x = 0.5$  dengan menggunakan  $h = 0.5$  dan  $h = 0.25$ . Bandingkan hasilnya dengan nilai eksak. Formula mana yang memberikan kesalahan paling kecil?

## 6 Chapra Contoh 4.6

Defleksi  $y$  dari bagian atas tiang kapal dapat dinyatakan dengan

$$y = \frac{FL^4}{8EI} \quad (10)$$

dengan  $F$  menyatakan *loading* seragam yang bekerja pada sisi tiang (N/m),  $L$  menyatakan tinggi tiang (m), dan  $E$  menyatakan modulus elastisitas tiang N/m<sup>2</sup>, dan  $I$  menyatakan momen inersia (m<sup>4</sup>). Kita ingin menghitung estimasi kesalahan pada  $y$  dengan menggunakan data-data berikut.

- $\tilde{F} = 750$  N/m dan  $\Delta\tilde{F} = 30$  N/m
- $\tilde{L} = 9$  m dan  $\Delta\tilde{L} = 0.03$  m
- $\tilde{E} = 7.5 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup> dan  $\Delta\tilde{E} = 5 \times 10^7$  N/m<sup>2</sup>
- $\tilde{I} = 0.0005$  m<sup>4</sup> dan  $\Delta\tilde{I} = 0.000005$  m<sup>4</sup>

Kita akan menggunakan hasil dari analisis error orde-1 (Persamaan 4.27 pada Chapra), kita mendapatkan

$$\Delta y(\tilde{F}, \tilde{L}, \tilde{E}, \tilde{I}) = \left| \frac{\partial y}{\partial F} \right| \Delta\tilde{F} + \left| \frac{\partial y}{\partial L} \right| \Delta\tilde{L} + \left| \frac{\partial y}{\partial E} \right| \Delta\tilde{E} + \left| \frac{\partial y}{\partial I} \right| \Delta\tilde{I}$$

Kita akan menggunakan SymPy untuk melakukan perhitungan ini.

**Soal 7.** Lengkapi dan/atau modifikasi kode berikut ini sehingga dapat menampilkan  $\Delta y$  seperti yang dijelaskan pada Chapra Contoh 4.6.

```

from sympy import *

F, L, E, I = symbols("F L E I")
y = # ... lengkapi, tulis formula untuk menghitung y di sini

F_num = 750; ΔF = 30 # N/m
L_num = 9; ΔL = 0.03 # m
E_num = 7.5e9; ΔE = 5e7 # N/m^2
I_num = 0.0005; ΔI = 0.000005 # m^4

# Hitung nilai y dengan nilai numerik
dict_subs = {F: F_num, L: L_num, E: E_num, I: I_num}
y_num = y.subs(dict_subs)
print("y = ", y_num)

# Hitung nilai Δy dengan Pers. 4.27
Δy = abs(diff(y,F))*ΔF + ... # lengkapi
pprint(Δy) # bentuk simbolik
print("Δy = ", Δy.subs(dict_subs)) # evaluasi/substitusi nilai numerik

# Hitung nilai ekstrim

dict_subs = {
    F: F_num - ΔF, L: L_num - ΔL,
    E: E_num + ΔE, I: I_num + ΔI # mengapa seperti ini?
}
ymin = y.subs(dict_subs)
print("ymin = ", ymin)

dict_subs = .... # lengkapi
ymax = y.subs(dict_subs)
print("ymax = ", ymax)

```

## 7 Chapra Contoh 4.8

Diketahui sebuah fungsi:

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2 \quad (11)$$

Turunan pertama dari  $f(x)$  adalah:

$$f'(x) = -0.4x^3 - 0.45x^2 - x - 0.25 \quad (12)$$

Kita akan menghitung pendekatan fungsi ini pada  $x = 0.5$  dengan menggunakan formula beda hingga tengah. Kita akan mulai dari  $h = 1$ , kemudian secara bertahap memperkecil nilai  $h$  dengan faktor 10 untuk mempelajari bagaimana pengaruh nilai  $h$  terhadap kesalahan.

**Soal 8.** Berikut ini adalah program yang dapat Anda lengkapi (versi *single precision*).



```

import numpy as np

def f(x):
    return -np.float32(0.1)*x**np.float32(4) - np.float32(0.15)*x**np.float32(3) - \
    np.float32(0.5)*x**np.float32(2) - np.float32(0.25)*x + np.float32(1.2)

def df(x):
    return -np.float32(0.4)*x**np.float32(3) - np.float32(0.45)*x**np.float32(2) - \
    x - np.float32(0.25)

def centered_diff(f, x, h):
    return ( .... )/(np.float32(2)*h) # isi titik-titik

x = np.float32(0.5)
h = np.float32(1.0)
true_val = ! ... lengkapi

print("-----")
print("          h          approx_val          error")
print("-----")

for i in range(11):
    approx_val = # ... lengkapi
    et = abs(approx_val - true_val)
    print("%18.10f %18.14f %18.13f" % (h, approx_val, et))
    h = h/np.float32(10)

print(type(h))
print(type(centered_diff(f,x,h)))

```

Coba juga untuk versi *double precision* (default pada NumPy atau `np.float64`). Apakah error yang Anda peroleh semakin mendekati nol apabila nilai  $h$  semakin diperkecil? NumPy juga menyediakan tipe bilangan *quadruple precision*, yang lebih *precise* dari *double precision*, yaitu `np.float128`. Coba ulangi perhitungan dan analisis Anda dengan menggunakan `np.float128`. Berikan penjelasan mengenai hasil yang Anda dapatkan.

## 8 Soal tambahan

**Soal 9. Chapra Latihan 3.5** Deret tak-hingga:

$$f(n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^4}$$

konvergen ke nilai  $\pi^4/90$  untuk  $n$  mendekati tak-hingga Untuk kasus  $n \rightarrow \infty$  nilai ini merupakan nilai dari fungsi zeta Riemann  $\zeta(4)$ <sup>a</sup>. Tulis program Python menggunakan `np.float32` atau *single precision* untuk menghitung nilai  $f(n)$  dengan  $n = 10000$ . Pastikan bahwa tipe numerik yang Anda gunakan pada program Python adalah *single precision* dengan cara menampilkan tipe dari hasil akhir yang didapatkan. Lakukan penjumlahan dengan menggunakan perulangan dari  $i = 1$  ke 10000. Ulangi perhitungan dengan menggunakan perulangan dengan urutan kebalikan yaitu dari  $i = 10000$  ke  $i = 1$ . Hitung kesalahan untuk kedua kasus tersebut. Jelaskan hasil yang Anda dapatkan. Ulangi perhitungan Anda dengan menggunakan *double precision*.

<sup>a</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann\\_zeta\\_function#Specific\\_values](https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function#Specific_values)

**Soal 10. Chapra Latihan 3.6** Evaluasi aproksimasi nilai dari  $e^{-5}$  dengan menggunakan dua formula:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (13)$$

dan

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots} \quad (14)$$

Bandingkan nilai yang diperoleh dengan menggunakan fungsi *built-in* dari modul `math` atau `numpy`. Gunakan 20 suku untuk masing-masing formula. Hitung juga kesalahan sebenarnya dan kesalahan relatif dari aproksimasi yang dibuat.

**Soal 11. Chapra Latihan 3.11** Gunakan formula (2) dan (3) untuk mencari akar-akar pada persamaan kuadrat:

$$x^2 - 5000.002x + 10$$

Lakukan dalam *single precision* dan *double precision*.

**Soal 12. Chapra Latihan 3.13** Metode "bagi dan rata-rata" adalah metode yang dapat digunakan untuk mengaproksimasi akar kuadrat dari suatu bilangan positif  $a$  dengan input tebakan awal  $x^0$ . Dalam bentuk iterasi, metode ini dapat dituliskan sebagai:

$$x^{i+1} = \frac{x^i + \frac{a}{x^i}}{2} \quad (15)$$

di mana  $x^i$  menyatakan nilai aproksimasi akar pada iterasi ke- $i$ . Buatlah program Python untuk mengimplementasikan metode ini. Hitung kesalahan relatif dan sebenarnya (dengan referensi hasil fungsi *built-in* `sqrt` pada Python).

**Soal 13. Chapra Latihan 4.2** Deret Maclaurin untuk  $\cos(x)$  adalah

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

Buatlah program Python untuk menghitung aproksimasi dari  $\cos(\pi/3)$  menggunakan deret Maclaurin tersebut. Hitung juga kesalahan untuk tiap penambahan suku baru dengan referensi nilai yang diberikan oleh fungsi *built-in* pada modul `math` atau `numpy`.

**Soal 14. Chapra Latihan 4.3** Lakukan hal yang sama dengan soal sebelumnya untuk mengestimasi nilai  $\sin(\pi/3)$  dengan menggunakan deret Maclaurin:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

**Soal 15. Chapra Latihan 4.5** Gunakan ekspansi deret Taylor orde-0 sampai dengan orde-3 untuk memprediksi  $f(3)$  untuk

$$f(x) = 25x^3 - 6x^2 + 7x - 88$$

dengan titik basis pada  $x = 1$ . Hitung kesalahan pada masing-masing aproksimasi.

**Soal 16. Chapra Latihan 4.6** Gunakan deret Taylor dengan orde-0 sampai dengan orde-10 untuk memprediksi  $f(2.5)$  untuk  $f(x) = \ln(x)$  dengan menggunakan nilai fungsi pada  $x = 1$ . Hitung juga kesalahan pada masing-masing aproksimasi. Berikan penjelasan mengenai hasil yang Anda dapatkan.

**Soal 17. Chapra Latihan 4.11** Diketahui kecepatan jatuh seorang penerjun dapat dihitung dengan:

$$v(t) = \frac{gm}{c}(1 - e^{-(c/m)t})$$

Gunakan analisis kesalahan orde-1 untuk mengestimasi kesalahan pada  $v$  pada  $t = 6$  s, jika  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  dan  $m = 50 \text{ kg}$ , namun  $c = 12.5 \pm 1.5 \text{ kg/s}$ .

**Soal 18. Chapra Latihan 4.12** Ulangi soal sebelumnya dengan  $g = 9.81$ ,  $t = 6$ ,  $c = 12.5 \pm 1.5$ , dan  $m = 50 \pm 2$ .