Analisis Galat

TF4062: Komputasi Rekayasa Lanjut

Iwan Prasetyo
Fadjar Fathurrahman

Teknik Fisika
Institut Teknologi Bandung

Galat dalam metode numerik

Galat atau kesalahan (error) pada metode numerik muncul karena adanya aproksimasi untuk merepresentasikan suatu kuantitas dan operasi matematik yang eksak.

Beberapa tipe galat:

- kesalahan pembulatan (rounding error): akibat penggunaan bilangan yang memiliki bilangan penting, jumlah digit, atau akurasi yang terbatas.
- kesalahan pemotongan (truncation error): akibat adanya aproksimasi yang digunakan ketika merepresentasikan suatu prosedur matematika eksak.

Secara umum dapat dituliskan:

$$E_t = \text{true value} - \text{aproksimasi} \tag{1}$$

di mana E_t adalah nilai eksak dari galat (”true” error).

Galat lebih sering dinyatakan dalam nilai relatifnya:

$$\text{true fractional relative error} = \frac{\text{true error}}{\text{true value}} \tag{2}$$

atau dalam persentase:

$$\epsilon_t = \frac{\text{true error}}{\text{true value}} 100\% \tag{3}$$

Sumber galat (error)

Dalam banyak kasus kita tidak bisa mengetahui nilai sebenarnya (true value), sehingga galat sebenarnya tidak dapat dihitung. Sebagai alternatif, digunakan galat aproksimasi:

$$\epsilon_a = \frac{\text{approximate error}}{\text{approximation}} 100\% \tag{4}$$

Untuk metode iteratif sering digunakan:

$$\epsilon_a = \frac{\text{current approximation - prev approximation}}{\text{current approximation}} 100\% \tag{5}$$

Salah satu tantangan yang sering muncul pada metode numerik adalah menentukan estimasi galat tanpa adanya informasi mengenai informasi eksak.

Kesalahan pembulatan (rounding error)

Rounding error disebabkan karena komputer hanya menyimpan jumlah digit signifikan yang tetap dan terbatas. Bilangan-bilangan seperti π, e, dan $\sqrt{7}$ tidak bisa dinyatakan dengan jumlah digit tetap.

Bilangan pada komputer dinyatakan dalam sistem biner.

Satuan dasar informasi pada komputer dinyatakan dalam *word* yang terdiri dari beberapa binary digit atau bit. Bilangan biasanya disimpan dalam beberapa word.

Ukuran dari 1 word biasanya bergantung dari jenis prosesor.

Representasi bilangan integer

Salah satu metode yang sering dipakai adalah *signed magnitude method*. Bit pertama digunakan untuk menyatakan tanda (sign), 0 untuk bilangan positif dan 1 untuk bilangan negatif. Bit yang lain digunakan untuk menyimpan bilangan.

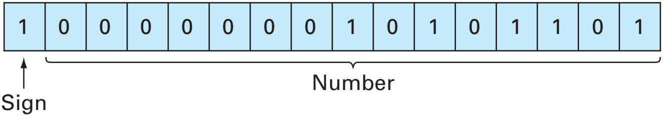


FIGURE 3.6
The representation of the decimal integer −173 on a 16-bit computer using the signed magnitude method.

Representasi floating-point

Bilangan fraksional biasanya dinyatakan dalam bentuk floating point. Dengan pendekatan ini suatu bilangan dinyatakan dalam bagian fraksional yang disebut mantissa atau significant dan bagian integer yang disebut exponent atau characteristic:

$$m \cdot b^e \tag{6}$$

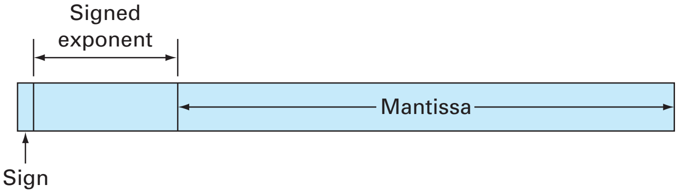
m: mantissa

b: basis dari bilangan yang digunakan

e: exponent

FIGURE 3.7

The manner in which a floating-point number is stored in a word.



Menghindari kesalahan pembulatan

- menggunakan formula dengan kesalahan pembulatan yang lebih kecil.
- menggunakan lebih banyak digit signifikan (extended precision).

Kesalahan pemotongan (*truncation error*)

Kesalahan pemotongan diakibatkan adanya aproksimasi dari suatu prosedur eksak. Contohnya adalah pada pemotongan suku pada suatu deret tak hingga.

Contoh lain adalah kesalahan akibat adanya diskritisasi (*discretization error*) dari proses yang kontinu seperti interpolasi, diferensiasi, dan integrasi.

Contoh lain adalah kesalahan konvergensi (*convergence error*) dari suatu metode iteratif. Banyak masalah nonlinear harus diselesaikan dengan metode iteratif. Proses iteratif ini akan konvergen jika iterasi dilakukan terus sampai tak hingga. Secara praktis hal ini tidak bisa dilakukan sehingga iterasi harus dihentikan dengan jumlah terhingga.

Sumber kesalahan yang lain

- Kesalahan pada model matematika yang digunakan, misalnya aproksimasi dari situasi fisis yang sebenarnya.
- Kesalahan pada data input, misalnya dari pengukuran dengan akurasi yang terbatas.
- Kesalahan manusia (pemrograman)

Propagasi kesalahan

Misalkan kita memiliki suatu fungsi $f(x)$ dengan variabel independen x dan $\tilde{x}$ adalah aproksimasi dari x. Kita ingin mengetahui perbedaan antara hasil evaluasi dari $f(x)$ dengan $f(\tilde{x})$:

$$\Delta f(\tilde{x}) = |f(x) - f(\tilde{x})| \tag{7}$$

Gunakan deret Taylor:

$$f(x) = f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x - \tilde{x}) + \frac{f''(\tilde{x})}{2}(x - \tilde{x})^2 + \cdots \tag{8}$$

Abaikan suku dengan turunan kedua ke atas:

$$f(x) - f(\tilde{x}) \approx f'(\tilde{x})(x - \tilde{x}) \tag{9}$$

atau:

$$\Delta f(\tilde{x}) = \left| f'(\tilde{x}) \right| \Delta\tilde{x} \tag{10}$$

Propagasi kesalahan

Untuk fungsi multivariabel $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\Delta f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \Delta\tilde{x}_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \Delta\tilde{x}_2 + \ldots \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \Delta\tilde{x}_n \quad (11)$$

TABLE 4.3 Estimated error bounds associated with common mathematical operations using inexact numbers $\tilde{u}$ and $\tilde{v}$.

Operation		**Estimated Error**
Addition	$\Delta(\tilde{u} + \tilde{v})$	$\Delta\tilde{u} + \Delta\tilde{v}$
Subtraction	$\Delta(\tilde{u} - \tilde{v})$	$\Delta\tilde{u} + \Delta\tilde{v}$
Multiplication	$\Delta(\tilde{u} \times \tilde{v})$	$\|\tilde{u}\|\Delta\tilde{v} + \|\tilde{v}\|\Delta\tilde{u}$
Division	$\Delta\left(\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}\right)$	$\frac{\|\tilde{u}\|\Delta\tilde{v} + \|\tilde{v}\|\Delta\tilde{u}}{\|\tilde{v}\|^2}$

Stabilitas dan kondisi

Kondisi dari suatu masalah matematika berhubungan dengan sensitivitas terhadap perubahan pada nilai input.

Suatu algoritma atau komputasi dinyatakan tidak stabil secara numerik (*numerically unstable*) apabila ketidakpastian dari nilai input diperbesar oleh metode numerik.

Dari deret Taylor orde 1:

$$f(x) = f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x - \tilde{x}) \tag{12}$$

Kesalahan relatif dari $f(x)$ didefinisikan sebagai:

$$\frac{f(x) - f(\tilde{x})}{f(\tilde{x})} = \frac{f'(\tilde{x})(x - \tilde{x})}{f(\tilde{x})} \tag{13}$$

Kesalahan relatif dari x:

$$\frac{x - \tilde{x}}{\tilde{x}} \tag{14}$$

Bilangan kondisi untuk operasi $f(x)$ dapat didefinisikan sebagai rasio dari dua kesalahan tersebut:

$$\text{condition number} = \frac{\tilde{x} f'(\tilde{x})}{f(\tilde{x})} \tag{15}$$

Stabilitas dan kondisi

$$\text{condition number} = \frac{\tilde{x} f'(\tilde{x})}{f(\tilde{x})} \tag{16}$$

- Bilangan kondisi memberikan suatu ukuran seberapa besar ketidakpastian pada x diperbesar oleh $f(x)$.
- Nilai lebih kecil dari satu menyatakan bahwa kesalahan relatif mengalami atenuasi (semakin kecil)
- Nilai lebih besar dari satu menyatakan bawah kesalahan relatif mengalami amplifikasi (semakin besar)

Suatu fungsi atau prosedur dengan nilai bilangan kondisi sangat besar sering disebut *ill-conditioned*.