

2013

1. X_1, X_2 为两个独立的随机变量, 分别服从 $\text{Exp}(\lambda_1), \text{Exp}(\lambda_2)$, 求 $E(X_1 | X_1 < X_2)$

$$\begin{aligned} E(X_1 | X_1 < X_2) &= \int_0^\infty p(x_1 | X_1 < X_2) x_1 dx_1 = \int_0^\infty \frac{\int_{x_1}^\infty p(x_1, x_2) dx_2}{P(X_1 < X_2)} x_1 dx_1 \\ &= \frac{\int_0^\infty \int_{x_1}^\infty x_1 p(x_1, x_2) dx_2 dx_1}{\int_0^\infty \int_{x_1}^\infty p(x_1, x_2) dx_2 dx_1} = \frac{\int_0^\infty \int_{x_1}^\infty x_1 \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2} dx_2 dx_1}{\int_0^\infty \int_{x_1}^\infty \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2} dx_2 dx_1} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \end{aligned}$$

2. 抛一枚均匀的硬币 $n+m$ 次, 至少出现一次正面, 问第一次正面出现在第 n 次的概率 $P(\text{第 } n \text{ 次第一次出现正面} | \text{至少出现一次正面})$

$$= \frac{P(\text{第 } n \text{ 次第一次出现正面且至少出现一次正面})}{P(\text{至少出现一次正面})} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+m}}$$

$$= \frac{2^m}{2^{n+m} - 1}$$

3. 从编号为 $1 \sim n$ 的卡片任抽一张, 记为 k , 再从编号为 $1 \sim k$ 的卡片中任抽一张, 记第二次抽出的卡片编号为 X 。求 $E(X)$
设第一次抽取卡片编号为 Y

$$E(X) = E(E(X|Y)) = E\left(\frac{1+Y}{2}\right) = \frac{1+E(Y)}{2} = \frac{1+\frac{1+n}{2}}{2} = \frac{n+3}{4}$$

4. $X_1 \sim X_{n+1}$ 为 $n+1$ 个独立同分布的随机变量, 其中 $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = 0) = 1 - p$; $Y_i = \text{if } (X_i + X_{i+1}) = \text{odd} \{1\} \text{ else } \{0\}$ 求 $\sum_{i=1}^n Y_i$ 的方差

$$\begin{aligned} E(Y_i) &= 2p(1-p) \\ E(Y_i Y_j) &= \begin{cases} 2p(1-p) & (i=j) \\ P(Y_i = 1 \cap Y_j = 1) = p^2(1-p) + (1-p)^2 p = p(1-p) & (|i-j|=1) \\ E(Y_i)E(Y_j) = 4p^2(1-p)^2 & (|i-j| > 1) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) &= E\left(\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^2\right) - \left(E\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n E(Y_i^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E(Y_i Y_j) - \left(\sum_{i=1}^n E(Y_i)\right)^2 \\ &= n \times 2p(1-p) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} E(Y_i Y_{i+1}) + 2 \times \left(\binom{n}{2} - (n-1)\right) \\ &\quad \times 4p^2(1-p)^2 - (n \times 2p(1-p))^2 \\ &= 2p(1-p)[2n-1 - (6n+4)p(1-p)] \end{aligned}$$

5. X, Y 独立且都满足 $N(0, 1)$, 求 $E((X-3Y)^2 | 2X+Y=3)$

$$\begin{aligned}
E((X-3Y)^2|2X+Y=3) &= \frac{\int_{2X+Y=3} (x-3y)^2 p(x,y) dl}{\int_{2X+Y=3} p(x,y) dl} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [(1+t) - 3(1-2t)]^2 p(1+t, 1-2t) \sqrt{1^2 + (-2)^2} dt}{\int_{-\infty}^{\infty} p(1+t, 1-2t) \sqrt{1^2 + (-2)^2} dt} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (7t-2)^2 e^{-\frac{(1+t)^2 + (1-2t)^2}{2}} dt}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(1+t)^2 + (1-2t)^2}{2}} dt} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (7t-2)^2 e^{-\frac{5t^2-2t+2}{2}} dt}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{5t^2-2t+2}{2}} dt} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (7x-\frac{3}{5})^2 e^{-\frac{5x^2}{2}} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{5x^2}{2}} dx} = \frac{254}{25}
\end{aligned}$$

6. 司机在一年发生事故的次数满足参数为 λ 的泊松分布，而 λ 满足 μ 的指数分布，问某一司机上一年不发生事故，今年也不发生事故的概率
 设一年内发生事故次数为随机变量 X ，则有

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \int_0^{\infty} P(X=k|\lambda=x) p_{\lambda}(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{x^k e^{-x}}{k!} \times \mu e^{-\mu x} dx = \frac{\mu}{k!} \int_0^{\infty} x^k e^{-(\mu+1)x} dx \\
&= \frac{\mu}{k!} \times \frac{\Gamma(k+1)}{(1+\mu)^{k+1}} = \frac{\mu}{(1+\mu)^{k+1}}
\end{aligned}$$

则司机连续两年不发生事故的概率为(两年发生事故相互独立)

$$P = \left(\frac{\mu}{(1+\mu)^1} \right)^2 = \left(\frac{\mu}{1+\mu} \right)^2$$

7. 有 n 枚硬币，他们正面朝上的概率分别为 p_1, p_2, \dots, p_n 。比较下面两种情况第一次出现正面抛掷次数的期望。
 1) 任选一枚连续抛掷 2) 每次抛掷后重新选择硬币
 设第一次出现正面时抛掷次数为随机变量 X ，第一次选择硬币标号为 Y

- 1) 任选一枚连续抛掷：

$$E(X) = E(E(X|Y)) = \sum_{i=1}^n E(X|Y=i) \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$$

- 2) 每次抛掷后重新选择：

$$\begin{aligned}
E(X|Y=i) &= 1 \times p_i + (1-p_i) \sum_{k \neq i} (1 + E(X|Y=k)) \frac{1}{n-1} \\
&= 1 + \frac{1-p_i}{n-1} \left(\sum_{k=1}^n E(X|Y=k) - E(X|Y=i) \right)
\end{aligned}$$

从而有

$$E(X|Y=i) = \frac{n-1}{n-p_i} + \frac{1-p_i}{n-p_i} \sum_{k=1}^n E(X|Y=k)$$

则对 i 再求和，最终可得

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n E(X|Y=k) &= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{n-1}{n-p_i}}{1 - \sum_{i=1}^n \frac{1-p_i}{n-p_i}} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{n-1}{n-p_i}}{1 - \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{(n-1)}{n-p_i} \right)} \\
&= \frac{(n-1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{n-p_i}}{(1-n) + \sum_{i=1}^n \frac{n-1}{n-p_i}} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n-p_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n-p_i} - 1}
\end{aligned}$$

因而

$$E(X) = E(E(X|Y)) = \sum_{i=1}^n E(X|Y=i) \frac{1}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n-p_i}}{n \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n-p_i} - 1 \right)}$$

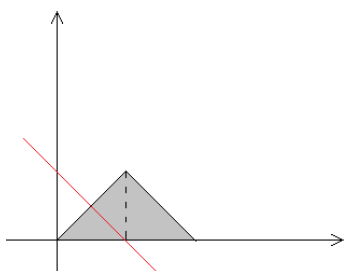
下面证明第二种抛法抛出正面所用次数较少，即第二个期望小于第一个：

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n-p_i}}{n \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n-p_i} - 1 \right)} &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} \\ \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n-p_i} - 1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n-p_i}} &\geq \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n-p_i}} &\leq 1 - \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}} \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} &\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n-p_i} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} - 1 \right) \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{p_i} + \frac{1}{n-p_i} \right) &\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n-p_i} \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{n}{p_i(n-p_i)} &\leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n-p_i} \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} \\ \Leftrightarrow n \sum_{i=1}^n a_i b_i &\leq \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i \end{aligned}$$

其中 $a_i = \frac{1}{n-p_i}$ 与 $b_i = \frac{1}{p_i}$ 大小排序刚好相反，因此左边为 n 个反序和，右边展开后可

分为 n 组乱序和，由排序不等式即证

8. 联合分布的密度函数为 $f(x,y) = \begin{cases} C e^{-(x+y)} & 0 < x < 2, 0 < y < 2-x \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ 求 C 与 $P(X+Y \geq 1)$



$$1 = \iint f(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_y^{2-y} C e^{-(x+y)} dx dy = C \int_0^1 e^{-y} (e^{-y} - e^{y-2}) dy = \frac{1-3e^{-2}}{2} C$$

$$\text{从而 } C = \frac{2e^2}{e^2-3}$$

$$\begin{aligned} P(X+Y \geq 1) &= 1 - \int_0^{\frac{1}{2}} \int_y^{1-y} C e^{-(x+y)} dx dy = 1 - \frac{2e^2}{e^2-3} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-y} (e^{-y} - e^{y-1}) dy \\ &= \frac{2e-3}{e^2-3} \end{aligned}$$

9. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-x^2/(2y)} & y > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ 求 $\text{Var}(X)$

在 y 固定时 x 分布为均值为 0 方差为 $1/y$ 的正态分布； y 的边缘分布为 $\Gamma(2,1)$ 分布

$$E(X) = E(E(X|Y)) = E(0) = 0$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(E(X^2|Y)) = E\left(\frac{1}{Y}\right) = \int_0^{\infty} \frac{1}{y} \times ye^{-y} dy = 1$$

10. 公交站起点站等可能发出 a, b 两班汽车, 其中 a 停 m 站, b 停 n 站, 车上人数服从参数为 λ 的泊松分布, 每名乘客在各站下车的概率相同, 如果该站没有乘客下车, 则公交车不停站。求一辆从起点站开出的公交车停站的期望与方差。

车上人数为 k, 站数为 n 固定时设公交车停站数为随机变量 N, X_i 表示第 i 站是否有人下车(有人下车则为 1, 无人下车则为 0, 服从 $p=1-(1-1/n)^k$ 的两点分布)

$$E(N) = E\left(\sum X_i\right) = n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right)$$

$$\begin{aligned} E(N^2) &= \sum E(X_i^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E(X_i X_j) \\ &= n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right) + 2 \binom{n}{2} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k\right) \\ &= n^2 - (2n^2 - n)\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k + (n^2 - n)\left(1 - \frac{2}{n}\right)^k \end{aligned}$$

站数为 n 固定时公交车停站数为 N, 车上人数 K 服从泊松分布, 从而

$$\begin{aligned} E(N) &= E(E(N|K)) = E\left(n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right) \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\ &= n - n \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = n\left(1 - e^{\left(1-\frac{1}{n}\right)\lambda} e^{-\lambda}\right) = n\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(N^2) &= E(E(N^2|K)) = E\left(n^2 - (2n^2 - n)\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k + (n^2 - n)\left(1 - \frac{2}{n}\right)^k\right) \\ &= n^2 - (2n^2 - n) \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\ &\quad + (n^2 - n) \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = n^2 - (2n^2 - n)e^{-\frac{\lambda}{n}} + (n^2 - n)e^{-\frac{2\lambda}{n}} \end{aligned}$$

考虑到发车不同最终结果为:

$$\begin{aligned} E(N) &= \frac{1}{2} \left(n\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}\right) + m\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}}\right) \right) \\ \text{Var}(N) &= E(N^2) - E(N)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(n^2 - (2n^2 - n)e^{-\frac{\lambda}{n}} + (n^2 - n)e^{-\frac{2\lambda}{n}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(m^2 - (2m^2 - m)e^{-\frac{\lambda}{m}} + (m^2 - m)e^{-\frac{2\lambda}{m}} \right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} \left(n\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}\right) + m\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}}\right) \right)^2 \end{aligned}$$

2012

1. 已知 $t^2 + U \cdot t + V = 0$ 的两个根独立同分布, $\sim U(-1, 1)$, 求 $p_U(u)$ 和 $p_V(v)$
设两根为 t_1, t_2

$$p_U(u) = p_{t_1+t_2}(-u) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{t_1}(t) p_{t_2}(-u-t) dt = \frac{1}{4} (2 - |u|) (-2 \leq u \leq 2)$$

$$p_U(u) = p_{t_1 t_2}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{t_1}(t) p_{t_2}(v/t) \frac{dt}{|t|} = -\frac{\ln|v|}{2} (-1 \leq v \leq 1)$$

2. 已知 V, X_1, X_2, \dots 相互独立, V 满足参数为 λ 的泊松分布与各 X_i 独立, $X_i (i=1,2,\dots)$ 的特征函数为 $f(t)$, 求 $Y=X_1+X_2+\dots+X_V$ 的特征函数。

V 分布函数的母函数(对离散型随机变量而言)为

$$G_V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(V=k)z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} z^k = e^{\lambda(z-1)}$$

Y 的特征函数为

$$\begin{aligned} f_Y(t) &= E(e^{iyt}) = E(E(e^{iyt}|V)) = E(E(e^{it \sum_{k=1}^V x_k}|V)) = E(E(e^{itx}|V)^V) = E(f(t)^V) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(V=k) f(t)^k = G_V(f(t)) = e^{\lambda(f(t)-1)} \end{aligned}$$

3. 教授办公, 每天来到办公室的时间为 9AM 到 1PM 的均匀分布, 来到办公室后工作时间为 0~4 小时的均匀分布, 办公结束后就离开。同时, 其一位学生会会在 9AM 到 5PM 的均匀分布的时间拜访教授, 如果当时教授不在就会立即离开, 如果教授在, 两人就会进行一场长度为 0~2 小时均匀分布的讨论, 讨论结束后教授会立即离开, 不管工作有没有做完。求教授离开办公室的平均时间。

设教授到达办公室时间为 A , 工作时间为 B , 学生到达时间为 C , 讨论时间为 D , 教授离开时间为 F ;

若学生没见到教授, 则有 $F=A+B$;

$$E(F|C < A \cup C > A+B) = E(A+B|C < A \cup C > A+B)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\iiint_{9 < C < A, 9 < A < 13, 0 < B < 4} (a+b)p(a,b,c)dV + \iiint_{A+B < C < 17, 9 < A < 13, 0 < B < 4} (a+b)p(a,b,c)dV}{\iiint_{9 < C < A \text{ 或 } A+B < C < 17, 9 < A < 13, 0 < B < 4} p(a,b,c)dV} \\ &= \frac{\int_9^{13} da \int_0^4 db \int_9^a \frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{8} (a+b)dc + \int_9^{13} da \int_0^4 db \int_{a+b}^{17} \frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{8} (a+b)dc}{\int_9^{13} da \int_0^4 db \int_9^a \frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{8} dc + \int_9^{13} da \int_0^4 db \int_{a+b}^{17} \frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{8} dc} = \frac{\frac{41}{12} + \frac{37}{6}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = 12\frac{7}{9} \end{aligned}$$

若学生见到了教授, 则有 $F=C+D$ (讨论时间与 A, B, C 均独立, 条件期望与期望相等);

$$E(F|A+B < C < A) = E(C|A < C < A+B) + E(D)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\iiint_{A < C < A+B, 9 < A < 13, 0 < B < 4} cp(a,b,c)dV}{\iiint_{A < C < A+B, 9 < A < 13, 0 < B < 4} p(a,b,c)dV} + 1 \\ &= \frac{\int_9^{13} da \int_0^4 db \int_a^{a+b} \frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{8} cdc}{\int_9^{13} da \int_0^4 db \int_a^{a+b} \frac{1}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{8} dc} + 1 = \frac{\frac{37}{12}}{\frac{1}{4}} = 12\frac{1}{3} \end{aligned}$$

从而离开时间的期望为

$$E(F) = \frac{3}{4} \times 12\frac{7}{9} + \frac{1}{4} \times 12\frac{1}{3} = 12\frac{2}{3}$$

教授离开平均时间 12 点 40

4. r 个人互相抛一个球, 每一次某一个人会将手上的球等可能地抛给剩下 $r-1$ 个人中的任意一个。最开始球在甲手上, 请问经过 n 次抛球后, 求 P (球没有再次回到过甲手上)和 P (没有任意一个人得到过两次或更多次球)。

$$P(\text{球没有再次回到甲手上}) = \frac{(r-1)(r-2)^{n-1}}{(r-1)^n} = \left(\frac{r-2}{r-1}\right)^{n-1}$$

$$P(\text{没有任意一个人得到过两次或更多次球}) = \begin{cases} \frac{(r-1)(r-2)\dots(r-n)}{(r-1)^n} & (n < r) \\ 0 & (n \geq r) \end{cases}$$

5. 抛一枚不均匀的硬币，其正面朝上的概率为 p ，连续两次正面或连续两次反面就结束。求从开始到结束的抛的次数的期望。

设第一次抛掷结果为随机变量 X (正面为 1，反面为 0)，抛掷次数为随机变量 N

$$E(N|X=1) = 2 \times p + (1 + E(N|X=0)) \times (1-p)$$

$$E(N|X=0) = 2 \times (1-p) + (1 + E(N|X=1)) \times p$$

以上解得

$$\begin{cases} E(N|X=1) = \frac{p^2 - 2p + 3}{p^2 - p + 1} \\ E(N|X=0) = \frac{p^2 + 2}{p^2 - p + 1} \end{cases}$$

从而

$$E(N) = pE(N|X=1) + (1-p)E(N|X=0) = \frac{3}{p^2 - p + 1} - 1$$

6. $p(x,y) = \begin{cases} axy(1-y) & (0 \leq y < x \leq 1) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ ，请计算出常数 a 的值，并计算 $P(x > 0.5 | y < 0.5)$

$$1 = \iint p(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_0^x axy(1-y) dy dx = \frac{7a}{120}$$

则 $a = 120/7$;

$$P(X > 0.5 | Y < 0.5) = \frac{P(X > 0.5, Y < 0.5)}{P(Y < 0.5)} = \frac{\int_0^{0.5} dy \int_{0.5}^1 \frac{120}{7} xy(1-y) dx}{\int_0^{0.5} dy \int_y^1 \frac{120}{7} xy(1-y) dx} = \frac{15/28}{71/112} = \frac{60}{71}$$

7. 取一截长度为 1 的木棒，等可能地任取一个点砍成 2 截，取较长的一截；再将这一截等可能地任取一个点，砍成两截，求这之中任一截的长度的方差。

第二次为任意取一段，则第二次截取时两段长度分布相同，因此可固定取某一段计算方差即可；

设第一次截断点坐标为 X ，第一次取出较长长度为 L ，第二次截断点坐标距左端为 Y ，并没次始终取左边一段；

则 X 服从 $U(0,1)$ ，在 L 固定条件下， Y 的条件分布即为 $U(0,L)$ ；

先求 L 的期望及二阶矩：

$$E(L) = E(E(L|X)) = \int_0^{1/2} (1-x) \times 1 dx + \int_{1/2}^1 x \times 1 dx = \frac{3}{4}$$

$$E(L^2) = E(E(L^2|X)) = \int_0^{1/2} (1-x)^2 \times 1 dx + \int_{1/2}^1 x^2 \times 1 dx = \frac{7}{12}$$

求 Y 的期望及方差：

$$E(Y) = E(E(Y|L)) = E\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{2}E(L) = \frac{3}{8}$$

$$E(Y^2) = E(E(Y^2|L)) = E\left(\frac{L^2}{3}\right) = \frac{1}{3}E(L^2) = \frac{7}{36}$$

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{31}{576}$$

2011

1. 网球比赛共有 $2n$ 个选手参加, 共打 n 轮, 决出最终的冠军。假定赛前抽签是完全随机的, 且当任意两个选手相遇时, 双方有相同的取胜概率。 A 、 B 两位选手参加了比赛, 计算这两名选手在头两轮相遇的概率。

$$P(A, B \text{ 在第一轮相遇}) = \frac{1}{2n-1}$$

$$P(A, B \text{ 在第二轮相遇}) = \frac{2n-2}{2n-1} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{4n-2}$$

$$P(A, B \text{ 在头两轮相遇}) = \frac{3}{4n-2}$$

2. A 和 B 掷同一个均匀硬币, 假定 A 掷了 $n+1$ 次, B 掷了 n 次, 计算 A 掷出的正面比 B 多的概率。

A 掷出的正面比 B 多的概率与 A 掷出的反面比 B 多的概率相等, 而且二者不交(否则 A 掷的次数至少比 B 多 2)且并集为全集(否则 A 掷的次数不超过 B 掷的次数), 则概率为 $1/2$ (推导原理: 设 A 掷出正面数为 X , B 掷出正面数为 Y)

$$\begin{aligned} P(X > Y) &= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n+1}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n+1}{i} \binom{n}{j} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n+1}{i} \binom{n}{j} + \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=i-1}^0 \binom{n+1}{i} \binom{n}{n-j} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n+1}{i} \binom{n}{j} + \sum_{i=n+1}^1 \sum_{j=n+1-i}^n \binom{n+1}{i} \binom{n}{j} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} \left(\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n+1}{i} \binom{n}{j} + \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n \binom{n+1}{n+1-i} \binom{n}{j} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{i} \binom{n}{j} + \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{0} \binom{n}{j} \right) \\ &+ \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{n+1} \binom{n}{j} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} \left(\sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{i} \binom{n}{j} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} 2^{n+1} 2^n = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

即证)

3. 某系统包括 A 、 B 、 C 、 D 和 E 共 5 个子系统, 系统会在两种情况之一下失效: 或者 A 子系统失效, 或者其他四个子系统中有至少两个失效。假定各个子系统的失效相互独立, 且失效的概率均为 p 。计算在已知系统失效的条件下, A 子系统失效的概率。

$$\begin{aligned} P(A \text{ 失效} | \text{系统失效}) &= \frac{P(A \text{ 失效且系统失效})}{P(\text{系统失效})} = \frac{p}{p + (1-p) \sum_{k=2}^4 \binom{4}{k} p^k (1-p)^{4-k}} \\ &= \frac{1}{-3p^4 + 11p^3 - 14p^2 + 6p + 1} \end{aligned}$$

4. 假设某种产品分两类, 一类是好的, 无论如何测试都不会出问题; 一类是有缺陷的,

测试时出问题的概率为 p 。如果随机抽取，抽中好产品的概率为 r 。现抽出一个产品，连续测试三次，都没有出问题，计算在第四次测试出问题的概率。

$$\begin{aligned} P(\text{第四次测试有问题} | \text{测试三次没问题}) &= \frac{P(\text{测试前三次没问题, 第四次有问题})}{P(\text{测试三次没问题})} \\ &= \frac{P(\text{抽到坏产品且前三次测试没问题, 第四次有问题})}{P(\text{抽到好产品}) + P(\text{抽到坏产品且前三次测试没问题})} \\ &= \frac{(1-r)(1-p)^3 p}{r + (1-r)(1-p)^3} \end{aligned}$$

5. 设 X 和 Y 为独立的非负随机变量，满足 $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = 1$ ，且 $E(XY) = C$ ， C 为确定性常数，试给出 $\text{Var}(XY)$ 的取值范围。

设 $E(X) = a$ ， $E(Y) = b$ ，则由于 X, Y 独立有 $E(XY) = E(X)E(Y) = ab = C$

$$\begin{aligned} \text{Var}(XY) &= E((XY)^2) - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - C^2 \\ &= (\text{Var}(X) + E(X)^2)(\text{Var}(Y) + E(Y)^2) - C^2 = (1 + a^2)(1 + b^2) - C^2 \\ &= 1 + a^2 + b^2 = 1 + (a - b)^2 + 2C \end{aligned}$$

显然由于 $a > 0$ ； $b > 0$ 则有 $\text{Var}(XY) \geq 0$

6. 同时掷两个均匀色子，重复投掷，直到两个色子至少有一个为 6 点时停止。设停止时两个色子的点数之和为 Y ，从开始到停止所用的投掷次数为 N ，计算 $E(Y/N)$ 。

每次出现至少一个 6 点的概率为 $P = 1 - (5/6)^2 = 11/36$ ，则 N 服从参数为 P 的几何分布；

Y 的分布即为点数和在至少出现一个 6 的条件下的条件分布，

$$P(Y = k) = \begin{cases} \frac{2 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}}{\frac{11}{36}} = \frac{2}{11} & (k = 7, 8, 9, 10, 11) \\ \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}}{11/36} = \frac{1}{11} & (k = 12) \end{cases}$$

可计算

$$E(Y) = \frac{1}{11} \times 12 + \frac{2}{11} \sum_{k=7}^{11} k = \frac{102}{11}$$

$$E\left(\frac{1}{N}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} p(1-p)^{n-1} = -\frac{p}{1-p} \ln(1 - (1-p)) = \frac{p \ln(p)}{p-1} = \frac{11}{25} \ln\left(\frac{36}{11}\right)$$

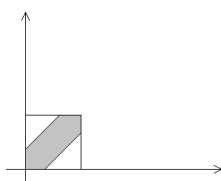
显然 Y 与 N 相互独立(最后一次结果与实验次数无关)，从而

$$E\left(\frac{Y}{N}\right) = E(Y)E\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{102}{25} \ln\left(\frac{36}{11}\right)$$

7. A 和 B 两个人准备约会，假定两人到达约会地点的时间服从 12:00 到 13:00 之间的均匀分布，且任意一人到达约会地点后，如果另一人未到，则等待 s 分钟后离开。计算使得约会成功概率不小于 0.5 的 s 的最小值。

设 A 到达时间为 X p.m. B 到达时间为 Y p.m.

$$P(\text{约会成功}) = P(Y - s \leq X \leq Y + s) = 1 - 2 \times \frac{(1-s)^2}{2} \geq 0.5$$



解得 $s \geq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

8. A 和 B 两个通信站间存在两条并行的通信链路。两条链路的通信延迟相互独立，且都服从 0 到 1 分钟的均匀分布。假定信息通过两条链路同时传输，且从一条链路收到算作“收到”，两条链路都收到算作“完好”。请计算从“收到”到“完好”的时间间隔的分布函数。

设两条通信链路的延时分别为随机变量 X 、 Y ，其中较小值 A 为收到时间，较大值 B 为完好时间，有 A 、 B 联合分布函数为

$$F(A \leq x, B \leq y)$$

$$= \begin{cases} (x > y, 1 \geq y)P(X \leq y, Y \leq y) = P(X \leq y)P(Y \leq y) = y^2 \\ (x \leq y \leq 1)P(B \leq y) - P(A > x) = P(X \leq y)P(Y \leq y) - P(x < X \leq y)P(x < Y \leq y) = y^2 - (y - x)^2 \end{cases}$$

可得 A 、 B 的联合概率密度为

$$p(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x \partial y} = 2 \quad (0 \leq x \leq y \leq 1)$$

则时间间隔即 $B - A$ 的分布函数为

$$F(x) = P(B - A < x) = \int_0^{1-x} \int_a^{a+x} 2dbda + \int_{1-x}^1 \int_a^1 2dbda = 2x - x^2 \quad (0 < x < 1)$$

全实轴上值为

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ 2x - x^2 & (0 < x \leq 1) \\ 1 & (x > 1) \end{cases}$$

9. A 到银行存钱，假定银行内排队的顾客人数从 0 个到 2 个不等，且每种情况出现的概率相同，如果每个顾客的服务时间服从参数为 1 的指数分布，请计算 A 在银行内等待时间的分布函数。

设银行内排队顾客数为随机变量 N 服从 0,1,2 的等概率分布，第 1,2 位等待时间分别为随机变量 X_1 、 X_2 均服从参数为 1 的指数分布

则有等待时间 T

$$\begin{aligned} E(T) &= E(E(T|N)) = \frac{1}{3}(E(T|N=0) + E(T|N=1) + E(T|N=2)) \\ &= \frac{1}{3}(0 + E(X_1) + E(X_1 + X_2)) = \frac{1}{3}(0 + 1 + (1 + 1)) = 1 \end{aligned}$$

10. 设随机变量 X 服从正态分布， $X \sim N(0; \sigma^2)$ ，计算 $\cos(X)$ 的均值。

随机变量 X 的特征函数为

$$f(t) = E(e^{itx}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)e^{itx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx)p(x)dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx)p(x)dx$$

由于 X 服从正态分布，可得

$$f(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

从而

$$E(\cos(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x)p(x)dx = \operatorname{Re}(f(1)) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}}$$