第二章　一元随机变量

2.1　随机变量及其分布

定义 2.1 (随机变量直观定义) 用来记录随机现象结果的变量称为随机变量

例 2.1 投掷一枚骰子，出现的点数 X 为随机变量，取值为 X=*1,2,3,4,5,6*;

晶体管的寿命 X 为随机变量，取值为 $X \in [0, +\infty)$；

抛一枚硬币，可以用 *0* 表示数字一面朝上，*1* 表示有图案的一面朝上，则结果 X 是随机变量，X=*0,1*，这样是将随机现象的结果数量化；

随机取一个清华学生进行调查，体重 X 为随机变量，取值为 $X \in (0, +\infty)$。

可以从以下两个方面来思考随机变量的更深刻的含义：

首先，思考随机变量与一般变量的区别。变量就是一个符号，可取不同的数值。一般变量不关心变量取不同值的可能性，而随机变量有一个伴随的概率空间 $\{\Omega, \mathscr{F}, P(\cdot)\}$ 刻画了随机变量取不同值的可能性。言及随机变量，前提是有概率空间。

其次，思考在数学上怎么表示“记录”？

定义 2.2 (随机变量严谨定义) 从样本空间到实轴 $\mathbb{R}$ 的函数 $X(\omega)$，称为随机变量。

这样定义更好地体现了随机变量的本质 - 随机变量是函数。当然，考虑的函数最好具有实际意义。例如，

$$X(\omega) = \begin{cases} 0, \omega \text{ 为男}, \\ 1, \omega \text{ 为女}. \end{cases}$$

这个函数是对随机现象结果的一个记录，样本点包含的信息很多，可以用随机变量来记录感兴趣的量。

总结：随机变量是随机会（ω）而变的量。

在定义了随机变量后，可以用随机变量来表示随机事件。设 B 为实数集，X 为随机变量，约定随机变量的取值 $\{X \in B\}$ 表示随机事件 $\{\omega : X(\omega) \in B\}$，从而

$$P(X \in B) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\})$$

例如用 $X(\omega)$ 表示样本点 ω 的身高，则 $\{X<1.7m\}$ 即表示事件" 身高低于 1.7m"，$P(X<1.7m)$ 表示这一事件的概率。

严格意义上，应该要求B 的原像，作为 Ω 的子集，应称得上是事件，即属于事件域。在离散样本空间时，可将样本空间的所有子集定义成一个事件域，这个要求自然成立。在连续样本空间时，例如，在 $\Omega=\mathbb{R}$ 时，一个常见的事件域是 Borel 域。

基本 Borel 集指 $\{(-\infty,a]|-\infty<a<+\infty\}$。从基本 Borel 集出发，经过可列次交并差补得到的数集；以及在这些数集上经过可列次交并差补得到的数集；这些数集之全体，称为 Borel 域。Borel 域中的数集称为 Borel 集。

下面定理告诉我们在连续样本空间情形时，取 Borel 域为事件域让这个要求自然成立，极大方便了我们的讨论。

定理 2.1 *对直线上的任何 Borel 集 B，有 $\{\omega:X(\omega)\in B\}\in\mathscr{F}$。*

Borel 域包含了非常广泛的数集，基本囊括了在计算随机变量取值的概率时，人们感兴趣的数集。本课程中所出现的随机变量的取值所表达的事件，基本都是 X 取值于 Borel 集的事件。为了计算随机变量取值于任意 Borel 集的概率，只需关心随机变量取值于基本 Borel 集的事件，即随机变量取值于半直线的概率。

定义 2.3 *称 $F_X(x)=P(X\leqslant x)=P(\{\omega:X(\omega)\leqslant x\})$ 为 X 的（累积）分布函数，$x\in\mathbb{R}$.（Cumulative Distribution Function, CDF），记为 $X\sim F_X(x)$.*

定理 2.2 *分布函数满足*

（*1*） *单调性，若 $a<b$，则 $F(a)\leqslant F(b)$；*

（*2*） *有界性，$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$，$\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$；*

（*3*） *右连续性，$F(a)=F(a+0)\triangleq\lim_{\delta\to0^+}F(a+\delta)$.*

定理（3）证明：考虑 $C_n=\{X\leqslant a+\frac{1}{n}\},n\in\mathbb{N}$，则 $C_1\supset C_2\supset\cdots$ 且 $\bigcap_{n=1}^{+\infty}C_n=\{X\leqslant a\}$，故

$$\lim_{\delta\to0^+}F(a+\delta)=\lim_{n\to+\infty}F(a+\frac{1}{n})=\lim_{n\to+\infty}P(C_n)=P(\lim_{n\to+\infty}C_n)=P(X\leqslant a)=F(a)$$

注 1： 有了分布函数 $F(x)$，计算随机变量取值的概率都可以归结为从基本 Borel 集出发的运算。与 X 有关的各种事件的概率可以完全确定，都可以通过分布函数计算出来。这就是常说的，分布函数完全刻画了随机变量的概率特性。

成立

$$
\begin{aligned}
&P(X \leqslant a) = F(a) \\
&P(X < a) = F(a-0) = \lim_{\delta \to 0^+} F(a-\delta) \\
&P(X = a) = F(a) - F(a-0) \\
&P(X > b) = 1 - F(b) \\
&P(X \geqslant b) = 1 - F(b-0) \\
&P(x \in (a,b]) = F(b) - F(a) \\
&P(x \in (a,b)) = F(b-0) - F(a) \\
&P(x \in [a,b]) = F(b) - F(a-0) \\
&P(x \in [a,b)) = F(b-0) - F(a-0)
\end{aligned}
$$

考虑 $D_n = \{X \leqslant a - \frac{1}{n}\}, n \in \mathbb{N}$，则 $D_1 \subset D_2 \subset \cdots$ 且 $\bigcup_{n=1}^{+\infty} D_n = \{X < a\}$，则

$$
F(a-0) = \lim_{\delta \to 0^+} F(a-\delta) = \lim_{n\to\infty} F(a-\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} P(D_n) = P(\lim_{n\to\infty} D_n) = P(X < a)
$$

注 2： 有没有分布是区分一般变量和随机变量的主要标志。当有了分布函数后，计算随机变量的取值的概率就可交给了分布函数。

定义 2.4 若随机变量 X 的取值为有限或可列个，则称为离散随机变量；可能取值分别记为 $x_1, x_2, \cdots$，称一列数 $P(X = x_k) \triangleq f_X(x_k)$ 为 X 的分布列，也简称为概率分布或概率函数。

定理 2.3 分布列满足

（*1*） 非负性，$f(x_k) \geqslant 0$；

（*2*） 正则性，$\sum_k f(x_k) = 1$。

那么 $F(x) = \sum_{x_k \leqslant x} f(x_k)$。

例 2.2 常数 c 为单点分布，$P(X = c) = 1$。

例 2.3 (两点分布/Bernoulli 分布) 射击击中目标的概率为 p，则 $P(X{=}1){=}p$，$P(X{=}0){=}1{-}p$。

定义 2.5 如果随机变量的可能取值充满实轴的一个区间，若存在实轴上的一个非负可积函数 $f(x)$，使得对任意函数 x，有

$$
F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du
$$

则称 X 为连续随机变量，称 $f(x)$ 为 X 的概率密度函数，简称密度函数或分布密度。

注 1： $F(x)$ 为实轴上的连续函数，所以 $P(X = a) = 0$；

注 2： 在 $F(x)$ 的导数存在的点上，$F'(x)=f(x)$。

定理 2.4 连续随机变量的分布函数和分布密度满足

（1） 非负性，$f(x)\geqslant 0$；

（2） 正则性，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$；

（3） $P(a<X\leqslant b)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$

离散随机变量与连续随机变量的比较

离散随机变量	连续随机变量
$F(x)$ 是右连续的阶梯函数	$F(x)$ 是实轴上的连续函数
在可能取值的点上的概率一般不为 0	在实轴上任意点的取值概率恒为 0
计算概率需要点点计较	个别点密度值改变不影响概率计算，$P(a\leqslant x\leqslant b)=P(a<x\leqslant b)$

注： 连续随机变量的概率密度函数不唯一，在把密度函数的某些个别点的值改为任意非负数后，得到的函数仍是密度函数，因为定积分的值与被积函数上个别点的值无关。

例 2.4 连续均匀分布 $X\sim U(a,b)$，分布密度

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$