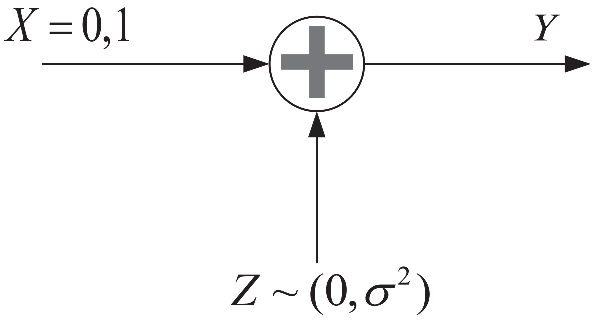
0.1 条件分布与条件期望

0.1.1 条件期望

首先，我们回顾上节的一个例子。

例 0.1 二元通信模型

设 X 服从等概 $0-1$ 分布，$Z \sim N(0,\sigma^2)$,X 与 Z 相互独立，设 $Y=X+Z$，求 $f_{X|Y}(x|y)$。



(a) 二元通信示意

一种常见的错误是

$$\begin{aligned}&E\left[X|Y=y\right]\\&=E\left[X|X+Z=y\right]\\&=E\left[X|X=y-Z\right]\\&=E\left[y-Z\right]\\&=y\end{aligned}$$

上节我们给出了重期望公式：

$$E\left[X\right]=E\left[E\left(X|Y\right)\right]=\int\limits_{y\in\mathscr{Y}}E\left(X|y\right)f_Y\left(y\right)dy$$

例 0.2 设某个码头一天到达的船数 $N\sim Poisson(\lambda)$，这些船上所装的货物量 $X_1,X_2,\ldots,X_N$ 为独立同分布随机变量，且 $X_i\sim U[50,100]$, 它们与 N 也相互独立。求一天内到达码头的货物总量的均值。

解： 令货物总量 $Y=X_1+X_2+...+X_N$

$$E[Y|N=n]=nE\left(X_1\right)=n\frac{150}{2}$$

$$E[Y]=E\left(N\frac{150}{2}\right)=\frac{150}{2}\lambda$$

重期望的嵌套 由 $E[X]=E[E(X|Y)]$

$$E_{X|Z=z}(X|Z=z)=E_{Y|Z=z}\left\{E_{X|Y,Z=z}(X|Y,Z=z)\right\}$$

简单起见，我们通常把上式中取期望的下标省略。接着，对上式关于 Z 取期望得

$$E\{E(X|Z)\}=E\{E[E(X|Y,Z)]\}=E(X)$$

也可这么来理解，定义 $f(y,z)\triangleq E(X|Y=y,Z=z)$，然后如下计算

$$g(z)=E[f(Y,z)]\,,E[g(Z)]=E(X)$$

例 0.3 仍是码头货物的问题。设码头所在地区晴天与阴天的概率分别为 0.8 和 0.2，晴天时 $N\sim Poisson(\lambda_1)$，阴天时 $N\sim Poisson(\lambda_2)$。求一天内到达码头的货物总量的均值。

解： 设 Z 表示该码头天气状况，$Z=\begin{cases}\text{晴},0.8\\ \text{雨},0.2\end{cases}$ 此问题三层嵌套，$Z,N,\{X_i\}$。

$$E(Y)=E\{E[E(Y|N,Z)]\}=E\{E(Y|Z)\}$$

$$\begin{gathered}E\left(Y|Z{=}\text{晴}\right)=\tfrac{150}{2}\lambda_1\\ E(Y|Z{=}\text{雨})=\tfrac{150}{2}\lambda_2\end{gathered}$$

$$E(Y)=0.8\times\frac{150}{2}\lambda_1+0.2\times\frac{150}{2}\lambda_2$$

利用重期望求概率 事件 A 示性变量 $I_A=\begin{cases}1,A\text{发生}\\ 0,A\text{不发生}\end{cases}$ $E(I_A)=P(A)$ 连续情形下全概率公式：

$$\begin{aligned}E(I_A)&=E[E(I_A|Y)]\\&=\int E(I_A|Y=y)\,f_Y(y)dy\\&=\int P(\mathrm{A}|Y=y)\,f_Y(y)dy\\&=P(A)\end{aligned}$$

离散情形下全概率公式：

$$P(A)=\sum_i P(\mathrm{A}|Y=y_i)\,f_Y(y_i)$$

例 0.4 $X_1,X_2,\ldots,X_6$ 独立同分布概率密度函数为 $f(x)$。求 $P[X_6>X_1|X_1=\max(X_1,...,X_5)]$。

解法一：

$$P\left[X_6 > X_1 | X_1 = \max\left(X_1, ..., X_5\right)\right] = \frac{P\left[X_6 > X_1, X_1 = \max\left(X_1, ..., X_5\right)\right]}{P\left[X_1 = \max\left(X_1, ..., X_5\right)\right]}$$

其中，

$$P\left[X_1 = \max\left(X_1, ..., X_5\right)\right] = \frac{1}{5}.$$

$$\begin{aligned}
&P\left[X_6 > X_1, X_1 = \max\left(X_1, ..., X_5\right)\right] \\
&= \int P\left[X_6 > X_1, X_1 = \max\left(X_1, ..., X_5\right) | X_1 = x\right] f\left(x\right) dx \\
&= \int P\left[X_6 > x, X_2 < x, ..., X_5 < x | X_1 = x\right] f\left(x\right) dx \\
&= \int P\left(X_6 > x\right) P\left(X_2 < x\right) ... P\left(X_5 < x\right) f\left(x\right) dx
\end{aligned}$$

由于独立同分布，

$$\begin{aligned}
&P\left[X_6 > X_1, X_1 = \max\left(X_1, ..., X_5\right)\right] \\
&= \int \left[1 - F\left(x\right)\right] \left[F\left(x\right)\right]^4 dF\left(x\right) \\
&= \int_0^1 \left(1 - y\right) y^4 dy \\
&= \frac{1}{30}
\end{aligned}$$

代入即可。

解法二： 对于分子也可以如下方式计算。

$$\begin{aligned}
&P\left[X_6 > X_1, X_1 = \max\left(X_1, ..., X_5\right)\right] \\
&= \int\limits_{x_6 > x_1, x_2 < x_1, ..., x_5 < x_1} f_{X_1}\left(x_1\right) f_{X_2}\left(x_2\right) ... f_{X_6}\left(x_6\right) dx_1 ... dx_6 \\
&= \int\limits_{x_1} \left[\int_{-\infty}^{x_1} f\left(x\right) dx\right]^4 \left[\int_{x_1}^{+\infty} f\left(x\right) dx\right] dx_1 \\
&= \frac{1}{30}
\end{aligned}$$

0.1.2 条件方差

类似条件期望的定义，对于随机变量 $X|Y = y$

$$Var\left(X|Y = y\right) \triangleq h\left(y\right)$$
$$Var\left(X|Y\right) \triangleq h\left(Y\right)$$

性质：

$$\begin{aligned} Var\left(X|Y=y\right) &= E\left(X^2|Y=y\right) - \left[E\left(X|Y=y\right)\right]^2 \\ Var\left(X|Y\right) &= E\left(X^2|Y\right) - \left[E\left(X|Y\right)\right]^2 \end{aligned} \tag{1}$$

定理 0.1 重方差公式

$$Var\left(X\right) = E\left[Var\left(X|Y\right)\right] + Var\left[E\left(X|Y\right)\right]$$

证明： 对 (**??**) 式作用期望，得：

$$E\left[Var\left(X|Y\right)\right] = E\left[E\left(X^2|Y\right)\right] - E\left[E^2\left(X|Y\right)\right]$$

另有

$$Var\left[E\left(X|Y\right)\right] = E\left[E^2\left(X|Y\right)\right] - \left\{E\left[E\left(X|Y\right)\right]\right\}^2$$

两式相加，得：

$$\begin{aligned} &E\left[Var\left(X|Y\right)\right] + Var\left[E\left(X|Y\right)\right] \\ &= E\left[E\left(X^2|Y\right)\right] - \left\{E\left[E\left(X|Y\right)\right]\right\}^2 \\ &= E\left(X^2\right) - E^2\left(X\right) \\ &= Var\left(X\right) \end{aligned}$$

例 0.5 货船问题 求 $Var\left(Y\right) = E\left[Var\left(Y|N\right)\right] + Var\left[E\left(Y|N\right)\right]$。

$$\begin{aligned} &E\left(Y|N=n\right) = n\frac{150}{2} \\ &Var\left(Y|N=n\right) = nVar\left(X_n\right) = n\frac{50^2}{12} \\ &Var\left(Y\right) = E\left[N\frac{50^2}{12}\right] + Var\left[N\frac{150}{2}\right] = \frac{50^2}{12}\lambda + \left(\frac{150}{2}\right)^2\lambda \end{aligned}$$

第一章　大数定律与中心极限定理

1.1　大数定律

定理 1.1 记一次试验中，$P(A)=p$，n 次试验中，$X_n \sim B(n,p)$，$E(X_n)=np, Var(X_n)=np(1-p)$。则 $\forall \varepsilon>0, \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1$

证明： 切比雪夫不等式：$\forall \varepsilon>0, P\left\{|Y-E(Y)|<\varepsilon\right\}>1-\frac{Var(Y)}{\varepsilon^2}$ 因此，

$$1 \geq P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)>1-\frac{Var\left(\frac{X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}=1-\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

根据夹逼准则，

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1$$

定义 1.1 设 $\{Y_n\}_{n\geq 1}$，若 $\forall \varepsilon>0, \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1$，则称 $Y_n \xrightarrow{P} Y$。

这样，$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{P} X, n\to\infty$。

1.2　中心极限定理

定义 1.2 设 $X_n \sim F_n(), X \sim F()$，
称点点收敛，若 $F_n(\cdot)\to F(\cdot), n\to\infty$，即 $\forall x, F_n(x)\to F(x), n\to\infty$。
称依分布收敛（弱收敛），若在 $F(x)$ 连续点处，$F_n(x)\to F(x), n\to\infty$。

定理 1.2 $\{X_n\} i.i.d.$，$E(X_i)=\mu, Var(X)=\sigma^2$，$Y_n=\sum\limits_{i=1}^{n} X_n$ 定义 $\frac{Y_n-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \triangleq Z_n$ 则 $Z_n \xrightarrow{D} N(0,1)$。