2.3 随机变量的函数

当知道一个随机变量的概率分布以后，经常会感兴趣求它的一些函数的分布。寻求随机变量函数的分布，是概率论的基本技巧。

定义 2.12 (随机变量的函数) 核心问题：已知 $X = X(\omega)$ 的概率分布（$CDF/PMF/PDF$），设 $y = g(x)$ 是定义在 R 上的一个函数，$g(X) = g(X(\omega))$ 是一个随机变量，记为 $Y = g(X)$，求 Y 的分布。

2.3.1 离散随机变量的分布函数

若 X 为随机变量，Y 也是离散随机变量，直接求 Y 的分布列，可表示为：$P(Y = y_k) = P\{\omega|Y(\omega) \in y_k\} = P\{\omega|g\{X(\omega)\} = y_k\}$

例 2.8 已知 X 的分布列 求 $Y = X^2$ 的分布列

表 2.1: X 的分布列

X	-2	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.1	0.3	0.3

解答:Y 的可能值为 $0, 1, 4$, $P(Y = 4) = P\{X^2 = 4\} = P(X = 2) + P(X = -2) = 0.5$, $P(Y = 1) = 0.4$,$P(Y = 0) = 0.1$, Y 的分布为：

表 2.2: Y 的分布列

Y	0	1	4
P	0.1	0.4	0.5

2.3.2 连续型随机变量的分布函数

例 2.9 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 设 $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}, (\sigma > 0)$, 求 Y 的 PDF
解：y 的取值范围 $(-\infty \ +\infty)$ $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq y) = P(X \leq \mu + y\sigma) = \int_{-\infty}^{\mu+y\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} E^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$
设 $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$
原式 $= \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$,
$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$
所以 $Y \sim N(0, 1)$

例 2.10 设 X 的 PDF 为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(x+1) & -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & else \end{cases}$$

$Y = X^2$, 求 Y 的 PDF
(1) 找出 Y 的支集 $y = [0, 4]$

(2)$\forall y \in [0,4]$

$y \in [0,1], F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{2}{9}(x+1)dx = \frac{4}{9}\sqrt{y}$

$y \in [1,4], F_Y(y) = \int_{-1}^{\sqrt{y}} \frac{2}{9}(x+1)dx = \frac{1}{9}y + \frac{2}{9}\sqrt{y} + \frac{1}{9}$

检查 $F_Y(y=4) = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = 1, F_Y(y=1) = \frac{4}{9}$

故

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{9}\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{9}y^{-\frac{1}{2}} & 0 < y \ge 1 \\ \frac{1}{9} + \frac{2}{9}\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9}y^{-\frac{1}{2}} & 1 \le y \le 4 \\ 0 & else \end{cases}$$

例 2.11 设连续变量 $X \sim F_X(x)/f_X(x)$，支集 $\mathcal{X}$, $g(x)$ 为 R 上的严格单调函数, 求 $Y = g(X)$ 的 CDF/CPF。

解：(1) 列出 y 的支集，$\mathcal{Y} = \{y : \exists x \in \mathcal{X}, g(x) = y\}$

(2) 若 $y \in \mathcal{Y}, g(x) = y$ 建立了 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 的一一映射，求 $F_Y(y)$

$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\{g(X) \le y\} = P\{X \le g^{-1}(y)\} = F_X(g^{-1}(y))$, 若 $g^{-1}(y)$ 在 $\mathcal{Y}$ 上可导

则 $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\frac{dg^{-1}(y)}{dy}, y \in \mathcal{Y}$

若 $g(.)$ 严格递减，$F_Y(y) = P(X \ge g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$

$f_Y(y) = -f_X(g^{-1}(y))\frac{dg^{-1}(y)}{dy}, y \in \mathcal{Y}$

统一可写成

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y))|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}| & y \in \mathcal{Y} \\ 0 & y \notin \mathcal{Y} \end{cases}$$

方便记忆 微元概率在变换前后不变，$y \in \mathcal{Y}, f_Y(y) = f_X(x)|\frac{dx}{dy}|$, $f_X(x)dx$ 表示 X 落在 x 附近元素小区间 dx 内的概率，$f_Y(y)dy$ 表示 Y 落在 y 附近元素小区间 dy 内的概率。

例 2.12 $X \sim N(\mu, \sigma^2), a \neq 0$, 求 $Y = aX + b$ 的分布。

解：$f_Y(y) = f_X(x)|\frac{dx}{dy}| = f_X(\frac{y-b}{a})|\frac{1}{a}| = \frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(\frac{y-b}{a}-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(a\sigma)^2}}e^{-\frac{y-a\mu-b}{2(a\sigma)^2}}$, 即 $Y \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

注（1）： 正态变量的线性变换仍为线性变换，其均值和方差可以直接由线性变换求得；

注（2）： 特别地，$u = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0\,,1)$ 称为随机变量 X 的标准化；即随机变量 X 通过线性变换可以化成一个均值为 0，方差为 1 的随机变量

$F_X(a) = P(a < X < b) = P(\frac{a-\mu}{\sigma} < U < \frac{b-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$

注（3）： 设 $X \sim N(0\,,\sigma^2)$，则 $Y = -X \sim N(0\,,\sigma^2)$, X 和 $-X$ 有相同的分布，但却是两个不同的随机变量。