第一章　概率论基本概念

1.1　随机事件

1.1.1　基本概念

概率统计研究的对象是随机现象。

概率论是研究自然界和人类社会中随机现象数量规律的数学分支。

定义 1.1 (随机现象) 指事先没有确定的把握，只能事后见结果的现象称为随机现象。

随机现象的随机性在事前。

例 1.1 扔一个骰子，出现第几点是随机现象，因为在扔之前不知道出现几点，一旦停了，是几点就是几点，概率论所研究的就是扔之前各点出现的可能性有多大。

例 1.2 买一张彩票，是否中奖是随机现象，因为买之前不知道，而在买之后，是否中奖是确定的。

随机现象到处可见，而且从事先来看，不同结果出现有不同的可能性，概率论研究的目的就是对其加以研究，并描述、掌握它，研究随机现象事先的随机性，做事前诸葛亮。相对应地，在概率论中，用样本空间表示不同的结果，用概率来度量不同的可能性。

定义 1.2 (确定性现象) 只有一个结果的现象称为确定性现象。

例 1.3 口袋中有 *10* 个白球，任取出一个球，颜色必为红色，这是一个确定性现象。

定义 1.3 (随机试验) 在相同条件下，可以重复的随机现象称为随机试验。

随机试验是特殊的随机现象，需要在一定条件下可以重复。

例 1.4 小李生病了，要动手术，手术是否成功是随机现象，但不是随机试验。不能说让小李再生一场病，再动手术。

随机现象一般有多个结果，那么在数学中是靠什么来描述多个结果？这就需要集合论的知识。

1.1.2 集合论复习

集合是数学中最基本、最重要的概念之一，从集合论开始去认识概率论是大学概率论的一个特点。

1 记法

集合 $\mathbb{Z}$，$\mathbb{N}$，$\mathbb{R}$，元素 a，b，c，集合的集合 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$，$\mathscr{C}$。

2 集合关系

包含关系 $A \subset B$（A 是 B 的子集），相等关系 $A = B$。

3 集合运算

并集 $A \cup B$，交集 $A \cap B$，差集 $A \backslash B$（或 $A - B = A\bar{B}$），余集（补集）$\bar{A}$。

4 映射/函数/变换

定义 1.4 (映射) 设 A、B 为两个非空集合，若 $\forall x \in A$，按照某种法则 f，对应于 B 中一个确定的 y，则称 f 为定义在 A 上取值于 B 中的一个映射 $f: A \to B$。

对于集合 A、B 中的元素 x 和 y，$x \to y = f(x)$，称 x 为原像，y 为映像。

若 $\forall x_1, x_2 \in A$，对于 $x_1 \neq x_2$，有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称映射 f 为单射。

若 $\forall y \in B$，$\exists x \in A$，使得 $f(x) = y$，则称映射 f 为满射。

既是单射又是满射的映射称为双射。

5 可列集

定义 1.5 (可列集) 若一个集合存在与自然数集的双射，则称此集合为可列集。

6 集合的笛卡尔乘积（叉积）

定义 1.6 集合 A 和 B 的叉积，定义为集合 $\{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$，记为 $A \times B$，即由 A 中元素与 B 中元素形成的有序对集合。

A 和 B 的叉积是二维关系，多维空间就是由叉积定义而来的，例如 $R \times R$，$R \times R \times R \times \cdots \times R \triangleq R^n$，而 $\{0,1\}^n$ 表示 n 个比特的集合。

7 集合的运算性质

交换律 $A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$。

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$。

分配率 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$。

1.1.3 样本空间

随机现象研究的第一件事就是列出随机现象的所有可能结果。

定义 1.7 随机现象一切可能的基本结果组成的集合称为样本空间，记为 $\Omega = \{\omega\}$，其中 ω 表示基本结果，又称为样本点。

认识随机现象，首先要列出它的样本空间。注意区分“结果”与“基本结果”。

样本点的个数为有限个或可列个的样本空间称为离散样本空间；样本点的个数为不可列无穷多个的样本空间称为连续样本空间。

例 1.5 （*1*）扔一颗骰子出现的点数，样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$。
（*2*）无穷次掷一枚硬币的正反面情况，样本空间 $\Omega=\{0,1\}^\infty$。
（*3*）一天之内进入六教的学生数，样本空间 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$。
（*4*）一个晶体管的寿命，样本空间 $\Omega=\{t|t\geqslant 0\}$。

1.1.4 （随机）事件

定义 1.8 随机现象的某些样本点组成的集合称为（随机）事件。

样本空间的任一子集 $A\subset\Omega$ 为一个事件。

例 1.6 投掷一个骰子，记 $A=$“出现奇数点”，A 是在通俗意义上用明白无误的语言描述的事件，也可以从数学角度用集合表示 $A=\{1,3,5\}$，则 $A\subset\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$。

那么应该怎么样理解这种表达？对事件来说，很重要的是它发生还是不发生。事件“奇数点出现”意味着 $\{1,3,5\}$ 中的某个出现了。在这个过程中存在一条约定：集合 A 中的某个样本点出现 $\Leftrightarrow$ 事件 A 发生，这条约定是数学表达与直观认识之间的桥梁，因此依托集合描述事件与通俗描述事件均可，两种描述达到了同样的目的，集合即事件，事件即集合，随机现象出现的一定是基本结果，若这个基本结果属于某个集合（事件），则称这个事件发生了。不严格地，随机现象的某种结果称为事件。

由 Ω 的单个元素组成的事件称为基本事件，例如投掷骰子点数 $A=\{1\}$ 为一个基本事件。全集 Ω 称为必然事件，因为无论出现的是哪一个基本结果，这个事件都会发生。空集 ϕ 称为不可能事件，因为随机现象不管出现什么结果，该事件都不会发生。

这里应当注意的是基本结果并不是基本事件，事件是集合，基本结果的集合才是基本事件。

因为事件和集合之间的联系，事件可以表示为集合，而事件间的关系即集合间的关系。

$A \subset B$　事件 B 包含事件 A，A 发生 $\Rightarrow \exists \omega \in A$ 且 ω 出现 $\Rightarrow \omega \in B$ 且 ω 出现 $\Rightarrow$B 发生，所以如果 A 发生，则 B 必然发生，例如 $\{1\} \subset \{1,3,5\}$。

$A = B$　事件 A 与 B 等价。

$A \cap B = \phi$　事件 A 与 B 互不相容，例如 $\{1,3,5\} \cap \{2,4,6\} = \phi$

在这里集合不是普通的集合，集合运算具有与事件相关的含义，用简单事件的集合运算来表达复杂事件，事件的运算即集合的运算。

$A \cup B$　事件 A 与 B 至少有一个发生。$A \cup B$ 发生 $\Leftrightarrow \exists \omega \in A \cup B$ 发生 $\Leftrightarrow \omega \in A$ 或 $\omega \in B \Leftrightarrow$ A 发生或 B 发生。

$A \cap B$　，简写为 AB，事件 A 与 B 都发生。

$A - B = A\bar{B}$　事件 A 发生，而 B 不发生。

$\bar{A}$　A 的对立事件，非 A。

$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$　诸 A_n 的并，表示这些 $A_n(n = 1, 2, \cdots)$ 中至少一个发生，$\{\omega \mid \exists n, \omega \in A_n\}$。

$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$　诸 A_n 的交，表示这些 $A_n(n = 1, 2, \cdots)$ 都发生，$\{\omega \mid \forall n, \omega \in A_n\}$。

事件的运算性质与集合的运算性质类似。

$\bigcup_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n}, 1) = (0, 1)$，晶体管寿命在 $(\frac{1}{n}, 1)$ 之间这些事件的可列并，其实就是寿命在 $(0, 1)$ 之间。

$\bigcap_{n=1}^{+\infty}[0, \frac{1}{n}) = \{0\}$。

"A,B,C 至少有两个发生" 可表示为 $AB \cup BC \cup AC$。

1.2　古典概型

随机事件发生的可能性是可以设法度量的，概率就是随机事件发生的可能性的大小。

古典概型，即概率的古典定义，基于等可能性假设，用比率来定义概率。代表学者为卡丹诺。

例 1.7 (盒中抽球) *盒子里放着 10 个大小和质地一样并从 1 到 10 编号的球，前 7 个为黑球，后 3 个为白球，充分扰乱后，从中抽出一个球。*
（1）列出 $\Omega = \{1, 2, 3, \cdots, 9, 10\}$，假设基本结果的等可能性。考虑事件 A=“抽出球的颜色是白色”，$A = \{8, 9, 10\}$.
（2）$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{10}$，分子和分母分别为 A 和 Ω 中含有的样本点个数。

计数——排列与组合

1　从 n 个不同元素中任取 r 个元素的取法总数：讲究取出元素间的次序，则用排列公式 $P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$；否则用组合公式 $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$。

2　乘法原理：分步骤讨论，k 个步骤，$m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_k$；加法原理，分情况讨论，k 种情况，$m_1 + m_2 + \cdots + m_n$。

例 1.8 *从装有号码为 $1, 2, \cdots, n$ 的球的箱子中有放回地抽取了 r 次（每次取一个球，记下号码后放回箱子里），求 A=“这些号码按严格增大的次序出现”，B=“这些号码按不减少的次序出现”的概率。*
解： 样本点记为 $\Omega = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in \{1, 2, \cdots, N\}, i = 1, 2, \cdots, n\}$，则 $|\Omega| = N^r$
事件 $A = \{(x_1, x_2, \cdots, x_r) | x_1 < x_2 < \cdots < x_r\}$，等效于从编号 $1 \ldots N$ 的球中任取 r 个球的组合数，$|A| = C_N^r$
因此 $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{C_N^r}{N^r}$

而事件

$$
\begin{aligned}
B &= \{(x_1, x_2, \cdots, x_r) | x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_r\} \\
&= \{(x_1, x_2, \cdots, x_r) | x_1 < x_2 + 1 < x_3 + 2 < \cdots < x_r + r - 1\} \\
&\xrightarrow[x_i = y_i + (i-1), i = 1, 2, \cdots, r]{\text{等价变换}} \{(y_1, y_2, \cdots, y_r) | y_1 < y_2 < \cdots < y_r, y_i \in \{1, 2, \cdots, N + r - 1\}\}
\end{aligned}
$$

$|B| = C_{N+r-1}^r$，$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{C_{N+r-1}^r}{N^r}$