第一章　总复习

三个基本内容：$P\left(x\right), F_X\left(x\right)/f_X\left(x\right), E\left(X\right)$

1.1　概率

求概率：　古典概型和性质

事件 A: 样本空间的子集，$P(A), A \subset \Omega \triangleq \{\omega\}$。

古典概型：$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$。

1、　转化，例如：$P\left(B-A\right) \overset{A\subseteq B}{=} P\left(B\right) - P\left(A\right)$

2、　$P\left(A|B\right) \triangleq \frac{P(AB)}{P(B)}$，若 $P\left(B\right) > 0$。三大公式：乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式。

例 1.1 苏格拉底请柏拉图到花园摘一朵玫瑰花，只能摘一次。花园是一直线，不能回头走，错过了就不能回来。花园里的玫瑰花共有 *9* 朵，任意两朵花的漂亮程度不同。柏拉图的策略是将最先看到的 *3* 朵玫瑰花当作参考，无论如何都不摘，接下去只要看到比这 *3* 朵更漂亮的花，就直接摘，不再犹豫。请问：柏拉图摘到最美丽的玫瑰花的概率是多少？

解：　设 A 表示摘到最漂亮的花；B_i 表示最漂亮的花在位置 i，则 $P(B_i) = \frac{1}{9}$ 若 $i = 1, 2, 3$，$P(A|B_i) = 0$；若 $i = 4, 5, ..., 9$，摘到最漂亮的花等价于第 4 到 $i-1$ 朵花逊于前三朵，所以 $P(A|B_i) = \frac{3}{i-1}$。因此，$P\left(A\right) = \frac{1}{9}\left(0 + \frac{3}{3} + \frac{3}{4} + ... + \frac{3}{8}\right)$。

3、　分布和概率什么关系？

$$P\left(X \le a\right) \triangleq P(\{\omega : X\left(\omega \le a\right)\})$$

$$P\left((X,Y) \in G\right) = \int\limits_{(x,y)\in G} f_{XY}\left(x,y\right) dxdy$$

例 1.2 设服务大厅有两个服务台，C 进入大厅时 A、B 已分别在两个服务台上办理业务，设三人办理业务的时间相互独立，且均服从参数为 λ 的指数分布。求 C 最后一个离开的概率。

解：　令 X_A, X_B, X_C 分别表示自 C 进入大厅以后，三人的服务时长。则所求概率等价于：

$$P\left\{\min\left(X_A, X_B\right) + X_C > \max\left(X_A, X_B\right)\right\}$$

化简，上述概率等价于 $P\{|X_A, X_B| < X_C\}$，记 $Y \triangleq |X_A - X_B|$，

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(|X_A - X_B| \le y) \\ &= 2P(X_A - X_B \le y) \\ &= 2\int\limits_{x_A - x_B \le y} \lambda e^{-\lambda x_A} \lambda e^{-\lambda x_B} dx_A dx_B \\ &= 1 - e^{-\lambda y}, y \ge 0 \end{aligned}$$

可知，Y 服从参数为 λ 的指数分布，且与 X_C 独立，所以 $P(|X_A - X_B| \le X_C) = \frac{1}{2}$。

4、 条件分布

$$P(Y \in B(x) | X = x) = \int\limits_{y \in B(x)} f_{Y|X}(y|x)\, dy$$

$$P(A) = \int P(A|X = x) f_X(x)\, dx$$

1.2 分布

1、 联合、边缘、条件

$$f_{XY}(x,y) \begin{array}{l} \nearrow \ f_X(x) = \int f_{XY}(x,y)\, dy, f_{XY}(x,y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x) \\ \searrow \ f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}, f_{XY}(x,y) = f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) \end{array}$$

2、 变量的函数

3、 常用分布

离散：伯努利分布，二项分布，泊松分布，几何分布，均匀分布

连续：均匀分布，指数分布，正态分布

4、 独立性

若 $X_1, X_2, ..., X_n$ 独立，则对于任意的函数 $f_i()$，$f_1(X_1), ..., f_n(X_n)$ 独立。

若 $X_1, X_2, ..., X_n$ 独立，则对于 $A \subset \{1, 2, ..., n\}$，$X_A$ 诸分量独立。

1.3 期望

一、期望

1、 函数的期望

$$E[g(X)] = \int g(x) f_X(x)\, dx$$

2、 线性

3、 关于示性变量

$$E\left[I_A\right]=P\left(A\right)$$

二、方差

$$Var\left(X\right)=E\left(X^2\right)-E^2\left(X\right)$$

$$Var\left(aX+bY\right)\overset{independent}{=}a^2Var\left(X\right)+b^2Var\left(Y\right)$$

三、协方差、相关系数

四、条件期望、条件方差

例 1.3 长为 *1* 的棍子，随机截成两段，取较长再截两段，求其中一段的方差。

解法 1： 设 X 表示第一次截得较长的一段的长度，Y 表示第二次截得其中一段的长度，则 $X\sim U\left[0.5,1\right]$。
易知 $Y|X=x\sim U\left[0,x\right],0.5\leq x\leq 1$。因此

$$f_{Y|X}\left(y|x\right)=\begin{cases}{}^{1}\!/_{x}, & 0.5\leq x\leq 1,0\leq y\leq x\\ 0, & else\end{cases}$$

$$f_{XY}\left(x,y\right)=f_X\left(x\right)f_{Y|X}\left(y|x\right)=\begin{cases}{}^{2}\!/_{x}, & 0.5\leq x\leq 1,0\leq y\leq x\\ 0, & else\end{cases}$$

而后可以通过积分计算期望方差。

解法 2： $Y|X=x\sim U\left[0,x\right]$，所以可求得其期望方差

$$\begin{aligned}E\left(Y|X=x\right)&=\tfrac{x}{2}\\ Var\left(Y|X=x\right)&=\tfrac{x^2}{12}\end{aligned}$$

$$Var\left(Y\right)=Var\left[E\left(Y|X\right)\right]+E\left[Var\left(Y|X\right)\right]$$

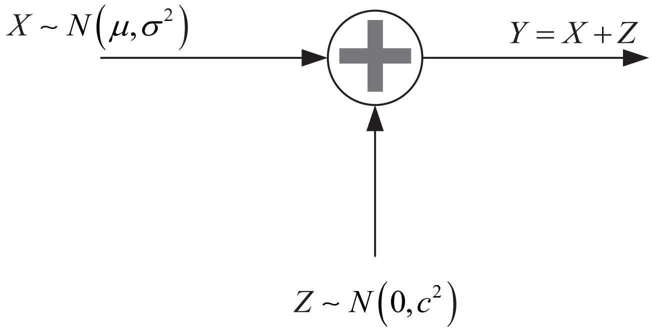
可知 $X\sim U\left[0.5,1\right]$

$$\begin{aligned}Var\left(Y\right)&=Var\left[\frac{X}{2}\right]+E\left[\frac{X^2}{12}\right]\\ &=\frac{1}{4}Var\left(X\right)+\frac{1}{12}E\left(X^2\right)\end{aligned}$$

其中，

$$\begin{aligned}&\mathrm{var}\left(X\right)=\frac{{}^{1}\!/_{4}}{12}=\frac{1}{48}\\ &E\left(X^2\right)=\mathrm{var}\left(X\right)+E^2\left(X\right)=\frac{1}{48}+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{144}\end{aligned}$$

例 1.4 设有下图通信问题，X 与 Z 相互独立，求 $f_Y\left(y\right),f_{X|Y}\left(x|y\right)$。



(a) 信号传输示意图

解法 1： 根据正态分布的性质，$Y \sim N(\mu, \sigma^2 + c^2)$，进而可利用下式计算

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x)\, f_{Y|X}(y|x)}{f_Y(y)}$$

解法 2：

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix}$$

$$E\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Cov\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

进而根据正态变量的线性变换仍服从正态分布的性质进行计算。

第二章　大数定律与中心极限定理

2.1　大数定律

定理 2.1 记一次试验中，$P(A)=p$，n 次试验中，$X_n\sim B(n,p)$，$E(X_n)=np, Var(X_n)=np(1-p)$。则 $\forall\varepsilon>0, \lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1$

证明：　切比雪夫不等式：$\forall\varepsilon>0, P\{|Y-E(Y)|<\varepsilon\}>1-\frac{Var(Y)}{\varepsilon^2}$ 因此，

$$1\geq P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)>1-\frac{Var\left(\frac{X_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}=1-\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

根据夹逼准则，

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1$$

定义 2.1 设 $\{Y_n\}_{n\geq1}$，若 $\forall\varepsilon>0, \lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1$，则称 $Y_n\xrightarrow{P}Y$。

这样，$\frac{X_n}{n}\xrightarrow{P}X, n\to\infty$。

2.2　中心极限定理

定义 2.2 设 $X_n\sim F_n(), X\sim F()$，
称点点收敛，若 $F_n(\cdot)\to F(\cdot), n\to\infty$，即 $\forall x, F_n(x)\to F(x), n\to\infty$
称依分布收敛（弱收敛），若在 $F(x)$ 连续点处，$F_n(x)\to F(x), n\to\infty$。

定理 2.2 $\{X_n\}i.i.d.$，$E(X_i)=\mu, Var(X)=\sigma^2$，$Y_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_n$ 定义 $\frac{Y_n-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\triangleq Z_n$ 则 $Z_n\xrightarrow{D}N(0,1)$。