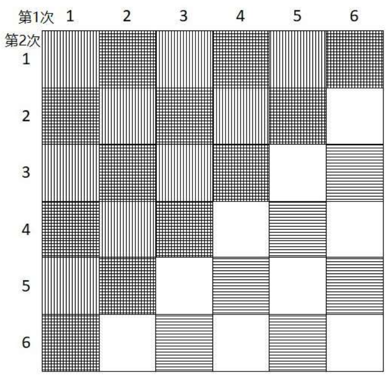
1.5 条件概率

1.5.1 条件概率的含义

在某事件 A 发生的条件下，另一事件 B 的概率称为条件概率，记为 $P(B|A)$。

例 1.13 同时掷两枚骰子，求在已知事件 A“点数和是奇数”的条件下，事件 B“点数和小于 8”的概率。

解： 掷两枚骰子，所有可能的结果有 36 种。据经验这 36 种有相等的机会出现，所以本例中样本空间有限且每个样本点具有等可能性，可以用古典概型来计算概率。可以通过画表格来表示可能的情况，每个格子代表一种可能的结果，横坐标是第一次投掷的结果，纵坐标是第二次投掷的结果，事件 A 由画横线的结果组成，事件 B 由画竖线的结果组成。



在 A 发生的情况下，所有可能的结果有 18 种，据经验这 18 种结果等可能。在 A 发生的条件下的事件 B 包含 12 种结果，因此 A 发生的条件下的事件 B 发生的概率为 $P(B|A) = \frac{|AB|}{|A|} = \frac{12}{18} = \frac{3}{4}$。

在本例中，可以发现式 $P(B|A) = \frac{|AB|}{|A|}$ 分子分母同除以总的样本数 $|\Omega|$ 有 $P(B|A) = \frac{|AB|/|\Omega|}{|A|/|\Omega|} = \frac{P(AB)}{P(A)}$，这个结果具有一般性。

定义 1.13 设 A 和 B 是样本空间 Ω 中的两个事件，称 $P(B|A) \triangleq \frac{P(AB)}{P(A)}(P(A) > 0)$ 为“在 A 发生条件下 B 的条件概率”。

注 1： 上述定义是从大量实践中总结出来的，不是用纯数学推导出来的，这是一条“定义”而非“定理”。

注 2： 条件概率存在的前提是 $P(A) > 0$，若事件 A 中所有样本点概率之和为 0，则事件 A 中每个样本点概率都为 0，只有在事件 A 可能出现的条件下，条件概率才有意义。

注 3： 想要求出条件概率的值，既可以按定义在原空间上计算，也可以通过样本空间缩减来计算，即把条件概率视为条件发生下缩减后的样本空间中的概率计算。已知事件 A 发生，样本空间 Ω 缩减为 $\Omega_A = A$，在此前提下，计算事件 B 发生的概率等效于在 Ω_A 空间，计算 AB 发生的概率，如果用古典概型，条件概率可以认为是相对比率。

注 4： 条件概率 $P(\cdot|A)$ 是概率测度，所有有关概率的定理加上条件后仍是成立的。

例 1.14 一个坛子里有 r 个红球和 b 个蓝球，随机地从中无放回依次取出 $n(n \leqslant r+b)$ 个，在已知其中有 $k(k \leqslant n, k \leqslant b)$ 个蓝球的条件下，问第一个球是蓝球的条件概率。

解 1： 事件 $A=$“从 r+b 个球中无放回抽出 n 个球含 k 个蓝球”，事件 $B=$“第一次取的球为蓝球”，在 A 的条件下接着考虑，A 作为新的样本空间即 n 个球中有 k 个蓝球，所以该条件概率等效于从含 k 个蓝球的 n 个球中，第一次取出的球为蓝球的概率，所以 $P(B|A)=\frac{k}{n}$。

解 2： 由条件概率定义 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A|B)}{P(B)}$，其中，易知 $P(B)=\frac{b}{r+b}$；设所有球都标了号，蓝球标 *1-b*，红球标 *b+1-b+r*，则总的样本空间对应从球 *1-r+b* 中任取 n 个球的一个组合。含 k 个蓝球的基本结果对应先从 *1-b* 蓝球中任取 k 个蓝球，再从 r 个红球中任取 *n-k* 个红球的一个组合。所以 $P(A)=\frac{C_b^k C_r^{n-k}}{C_{b+r}^n}$，$P(A|B)=\frac{C_{b-1}^{k-1} C_r^{n-k}}{C_{r+b-1}^{n-1}}$，代入得 $P(B|A)=\frac{k}{n}$。

解 3： 由古典概型 $P(B|A)=\frac{|AB|}{|A|}$，在事件 AB=“n 个球中有 k 个蓝球，且第一个是蓝球”，计算样本点数时需要考虑排序，$|AB|=bC_{b-1}^{k-1}C_r^{n-k}(n-1)!$，计数 A 时也应考虑顺序 $|A|=C_b^k C_r^{n-k} n!$，故 $P(B|A)=\frac{k}{n}$。

例 1.15 一个盒子中有 *5* 个红球，*5* 个白球。

（1） 有放回取球两次，求第一次取出红球条件下，第二次摸出仍为红球的概率；

（2） 无放回取球两次，求第一次取出红球条件下，第二次摸出仍为红球的概率；

解：（1） 第一次取出红球条件下，盒子中仍有 *5* 个红球，*5* 个白球，所以第二次摸出为红球的概率 $P(B|A)=\frac{5}{10}$；

（2） 第一次取出红球条件下，盒子中有 *4* 个红球，*5* 个白球，所以第二次摸出为红球的概率 $P(B|A)=\frac{4}{9}$.

条件概率是一种概率，因此可以用概率的各种性质将复杂事件转化为简单的事件来求。同时，作为一定条件下的概率，条件概率也有一些独特的性质，总结为三条公式：乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式。这里的难点在于领会其中的思想，灵活运用。

1.5.2 乘法公式

定理 1.9 （*1*） 若 $P(A)>0$，则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$。

（*2*） 若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_n)$。

思想：（1） 求交事件的概率可以转化为条件概率。

（2） 乘法公式体现了分步骤讨论（乘法原理）的方法，特别适用于分步骤的随机现象，以前面的步骤作为条件可以使当前步骤的讨论变得简单。

例 1.16 (Polya 罐子模型) *口袋中有 n-1 个黑球和 1 个白球，每次从袋中随即取出 1 个球，并换入 1 个黑球，问第 k 次摸球时摸到黑球的概率是多少？*

解： 用事件 A_i 来表示第 i 次摸出黑球，则事件 A_k 的逆事件 $\bar{A}_k$"第 k 次摸球摸到白球"又可以表示为 $\bar{A}_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap \bar{A}_k$，即前 *k-1* 次是黑球，第 k 次是白球。在前 *i-1* 次取出黑球又放回黑球情况下，第 i 次取出黑球等效于从 *n-1* 个黑球和 *1* 个白球中取出黑球，因此

$$
\begin{aligned}
&P(A_1 \cdots A_{k-1}\bar{A}_k)\\
=&P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(\bar{A}_k|A_1A_2\cdots A_{k-1})\\
=&(\frac{n-1}{n})^{k-1}\frac{1}{n}\\
&P(A_k) = 1-(\frac{n-1}{n})^{k-1}\frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

1.5.3 全概率公式

定理 1.10 *设一列事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分（完备事件组，即 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 互不相容，且 $P(B_i) > 0$，$\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$），则对任一事件 A，有*

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)$$

证明： $A = A\Omega = A(\bigcup_{i=1}^n B_i) = \bigcup_{i=1}^\infty (AB_i)$ 且诸 AB_i 互不相容，所以 $P(A) = \sum_{i=1}^n P(AB_i) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)$。

事件 A 发生的概率 $P(A) =$ 各个 B_i 条件下 A 发生的条件概率加权和，权重是各个 B_i 条件发生的概率。

思想：（1） 全概率公式体现了分情况讨论（加法原理）的方法，把随机现象按照某种信息分成不同情况，附加信息（条件）后的每种情况变得更简单。

（2） 特例：可以将随机现象划分为两个对立事件，$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})$。

例 1.17 *3 张形状完全相同的卡片，第一张两面全黑，第二张两面全白，第三张一面黑一面白，3 张卡片放在桌子下混合后，从中取出一张放在桌上，求卡片朝上的一面是黑色的概率。*

解： 事件 A"取出的卡片朝上一面是黑色"，可以对样本空间进行如下划分：B_1"取出第 *1* 张牌"，B_2"取出第 *2* 张牌"，B_3"取出第 *3* 张牌"，B_1, B_2, B_3 构成完备事件组，则由全概率公式 $P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_2) = \frac{1}{3}\times 1 + \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\times 0 = \frac{1}{2}$。