3.2　随机矢量的函数的分布

在实际中，我们经常需要考虑一些随机变量的变换，得到另外一些随机变量。求变换后的随机变量的分布，基本来讲有两种方法：直接法（最根本）和变换变量法（可视为直接法在保维变换且存在反函数情形下的应用）。

核心问题　设 $X_{1:n}=(X_1(\omega)\cdots X_n(\omega))^T, y=g(x), x\in R^n, y\in\mathcal{R}^m$ 则 $g(X)=Y$ 是 m 维随机变量，求 Y 的分布。

$m=1$ 时的两种常见函数：

1. 独立的随机变量的和；

2. 最大值，最小值，次序统计量；

直接法

例 3.10 离散情形：设 $X\sim Poisson(\lambda_1), Y\sim Poisson(\lambda_2), X, Y$ 相互独立，求 $Z=X+Y$ 的分布

解：*(1)* 找出 $\mathcal{Z}$ 的可能取值：$0,1,2\cdots$ *(*非负整数*)*

(2) $k=0,1,\cdots$

$P(X+Y=k)=\sum_0^k P(X=i,Y=k-i)$

$=\sum_0^k P(X=i)P(Y=k-i)$

$=\sum_0^k e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}$

$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_0^k C_n^k(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})^i(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2})^{k-i}$

$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2})^k$

即 $Z\sim Poisson(\lambda_1+\lambda_2)$

由该例可知：若 $X\sim Poisson(\lambda_1), Y\sim Poisson(\lambda_2)$，$X,Y$ 相互独立, 则 $X+Y\sim Poisson(\lambda_1+\lambda_2)$

可加性　若独立同分布的变量和仍服从同一类分布。

例 3.11 连续情形：$X\sim f_X(.), Y\sim f_Y(.), (X,Y)\sim f_{XY}(.)$，求 $Z=X+Y$ 的 PDF

解：*(1)* 找出 Z 的支集 $\mathcal{Z}$。$f_Z(z)>0, z\in\mathcal{Z}; f_Z(z)=0, z\notin\mathcal{Z}$

(2)$F_Z(z)=P(Z\leq z)$

$=P(X+Y\leq z)$

$=\int\int_{x+y\leq z}f_{X,Y}(x,y)dxdy$

$=\int_{-\infty}^{-\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-x}f_{X,Y}(x,y)dy\right]dx$

$f_Z(z)=\frac{d}{dz}F_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,z-x)dx$

若 X,Y 独立，则有

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$

一般结论 两个独立随机变量和的 PDF 是各变量 PDF 的卷积。

独立高斯变量和的分布仍服从高斯分布 X_1, X_2 相互独立,$X_1 \sim (\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim (\mu_2, \sigma_2^2)$,
则 $Z = X_1 + X_2 \sim (\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

可证 X_1, X_2, X_3 相互独立,$X_1 \sim (\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim (\mu_2, \sigma_2^2), X_3 \sim (\mu_3, \sigma_3^3)$,
则 $Z = X_1 + X_2 + X_3 \sim (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)$

注 1 $Z = X - Y; Z = XY; Z = \frac{X}{Y}$ 分布的求解，借助 $\frac{d}{dz}\int_{a(z)}^{b(z)} g(\xi, z)d\xi = \cdots$

注 2 注意支集

例 3.12 $X \sim Exp(\lambda), Y \sim Exp(\lambda), \mathcal{X} = \{x \geq 0\}, \mathcal{Y} = \{y \geq 0\}$，$X, Y$ 相互独立,
设 $Z = X + Y$，则 $\mathcal{Z} = \{z \geq 0\}$，$Z \sim Gamma(2, \lambda)$。

例 3.13 最小值分布：设 $X_1 \cdots X_n$ 是相互独立的 n 个变量，$Y = min(X_1 \cdots X_n)$，求 Y 的分布？
解：$F_Y(y) = P(min(X_1 \cdots X_n) \leq y)$
$= 1 - P(min(X_1 \cdots X_n) > y)$
$= 1 - P(X_1 > y \cdots X_n > y)$
$= 1 - P(X_1 > y) \cdots P(X_n > y)$
$= 1 - \prod_{i=1}^n [1 - F_i(y)]$
特别地，若诸 X_i 同分布，$X_i \sim F(x)$, 则 $F_Y(y) = 1 - (1 - F(y))^n$
$f_Y(y) = n(1 - F(y))^{n-1}\frac{dF(y)}{dy}$

例 3.14 最大值分布：设 $X_1 \cdots X_n$ 是相互独立的 n 个变量，$Y = max(X_1 \cdots X_n)$，求 Y 的分布？
解：$F_Y(y) = P(max(X_1 \cdots X_n) \leq y)$
$= P(max(X_1 \leq y \cdots X_n \leq y))$
$= P(X_1 \leq y \cdots X_n \leq y)$
$= P(X_1 \leq y) \cdots P(X_n \leq y)$
$= \prod_{i=1}^n F_i(y)$
特别地，若诸 X_i 同分布，$X_i \sim F(x)$, 则 $F_Y(y) = (F(y))^n$
$f_Y(y) = nF(y)^{n-1}f(y)$

变量替换法

定理 设 $X_{1:n} = X, g(X) = Y \in \mathcal{R}^n, \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ 为一一映射，
即：设变换 $y_i = g_i(x_1 \cdots x_n), i = 1, 2 \cdots n$，反变换 $x_i = h_i(x_1 \cdots x_n), i = 1, 2 \cdots n$，
则 $f_Y(y) = f_X(x)||\frac{\partial x}{\partial y}||, y \in \mathcal{Y}$；
$y \notin \mathcal{Y}$ 时,$f_Y(y) = 0$。
其中 Jacob 矩阵 $\frac{\partial x}{\partial y} = (\frac{\partial x_1}{\partial y} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial y})^T = (\frac{\partial x_i}{\partial y_j})_{i,j=1,2\cdots n}$

直观认识 随机变量取值于微元的概率在变换前后不变：$f_Y(y)\partial y = f_X(x)\partial x$