《线性代数》第二部分

南京大学数学学院 曹立元 2025 年 9 月 8 日创建，2025 年 10 月 24 日更新

1. 线性方程组的解

我们称线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 所有解组成的集合 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \ \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}\}$ 为通解 (general solution)，通解中的一个元素为特解 (particular solution)。我们接下来探索几个问题:

1. $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 什么时候有解?
2. $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 如果有解，什么时候只有一个解?
3. LU 分解法是否会改变线性方程组的解集?

1.1. 齐次线性方程组与零空间

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 齐次线性方程组 (homogeneous linear system) 中的每一项都是未知数的一次方。

其解的集合 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \ \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}\}$ 满足 (1) 若包含 $\boldsymbol{u}$，则包含 $k\boldsymbol{u}, \forall k \in \mathbb{R}$; (2) 若包含 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$，则包含 $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, 因此该集合是 $\mathbb{R}^n$ 的一个线性子空间，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 要么只有一个解 $\boldsymbol{0}$，要么有无穷多个解。

解集 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \ \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}\}$ 被称为矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 的零空间 (null space), 记为 $\mathrm{Null}(\boldsymbol{A})$ 或 $\mathrm{N}(\boldsymbol{A})$. 零空间中的任意向量与行空间中的任意向量互相垂直。

1.2. 非齐次线性方程组

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ 非齐次线性方程组 (non-homogeneous/inhomogeneous linear system) 中包含了未知数的一次项和零次项。以下定理说明了 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 解的关系，包括但不限于: 若 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解，则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有相同数量的解（1 或 ∞）。

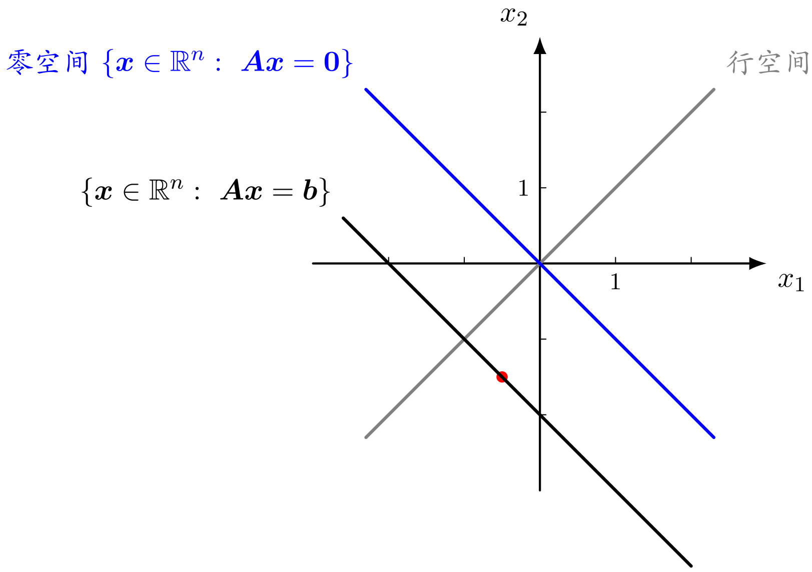
定理 1. 若 $\boldsymbol{Az} = \boldsymbol{b}$，则 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \ \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}\} = \{\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \ \boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{0}\}$.
即 $\quad \big(\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \text{ 的通解}\big) = \big(\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \text{ 的特解}\big) + \big(\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0} \text{ 的通解}\big)$

证明. 先证明 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \ \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}\} \subseteq \{\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \ \boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{0}\}$. 假设 $\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \ \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}\}$，则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$，故 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}) \in \{\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \ \boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{0}\}$.

再证明 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \ \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}\} \supseteq \{\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \ \boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{0}\}$. 假设 $\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \ \boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{0}\}$，则存在 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}$ 满足 $\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{0}$, 进而可得 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{x} \in \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \ \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}\}$. □

$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \ \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}\}$ 代表一个过 $\boldsymbol{z}$ 点且与 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \ \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}\}$平行的仿射空间。

以 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}=-2$ 为例，此时 $\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}-0.5 & -1.5\end{bmatrix}^T$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{b}$，是非齐次线性方程的一个特解。



2. 线性表示与等价矩阵

2.1. 线性表示、向量组的等价性

定义 1 (线性表示). 对于一组同维向量 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{u}$，若存在一组实数 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ 使得

$$\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{v}_m$$

则称 $\boldsymbol{u}$ 可由向量组 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ 线性表示。

对于两个同维向量集合 $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m\} \subset \mathbb{R}^n$ 和 $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_\ell\} \subset \mathbb{R}^n$，若 $\boldsymbol{A}$ 中任何一个向量都可以由 $\boldsymbol{B}$ 线性表示，则称向量组 $\boldsymbol{A}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{B}$ 线性表示。
若向量组 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 可以互相线性表示，则称这两个向量组等价。（自反性、对称性、传递性）

2.2. 向量组等价的几何意义

两个同维向量集合 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 等价的充要条件是它们的线性生成空间一样。

定理 2 (等价向量组的线性生成空间一样). $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为等价向量组的充要条件是 $\mathrm{span}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{span}(\boldsymbol{B})$（所有能由 $\boldsymbol{A}$ 线形表示的向量所组成的集合等于所有能由 $\boldsymbol{B}$ 线形表示的向量所组成的集合）。

2.3. 等价矩阵

之前 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是向量的集合，接下来将 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 记为两个行、列数一致的矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \\ \boldsymbol{a}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad \text{和} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1^T \\ \boldsymbol{b}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_m^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

定义 2 (矩阵的等价性). 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等行（列）变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 行（列）等价 (row/column equivalent)，记为 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{r} \boldsymbol{B}$ ($\boldsymbol{A} \xrightarrow{c} \boldsymbol{B}$)。如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价 (equivalent)（$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是等价矩阵），记为 $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$。

由于初等变换可逆，如果 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{r} \boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B} \xrightarrow{r} \boldsymbol{A}$；如果 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{c} \boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B} \xrightarrow{c} \boldsymbol{A}$；如果 $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行等价矩阵的集合可表示为 $\{\boldsymbol{PA} :\ \boldsymbol{P} = \cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1 \text{ 代表有限次行初等变换}\}$，列等价矩阵的集合可表示为 $\{\boldsymbol{AQ} :\ \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots \text{ 代表有限次行初等变换}\}$，等价矩阵的集合可表示为 $\{\boldsymbol{PAQ} :\ \boldsymbol{P} = \cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1 \text{ 代表有限次行初等变换}, \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots \text{ 代表有限次行初等变换}\}$。

行、列等价和等价的关系是：行等价矩阵的集合 $\cup$ 列等价矩阵的集合 $\subset$ 等价矩阵的集合。如果两个矩阵行（列）等价，则它们等价；反之则未必。比如 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 行等价、列等价、等价；$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 行等价、等价，但不列等价；$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 等价，但既不行等价也不列等价。$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ 不等价。

2.4. 等价矩阵与等价向量组的关系

定理 3. 令 $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 为一个初等矩阵，则 $\boldsymbol{PA}$ 的行向量组与 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组等价。

证明. 若 $\boldsymbol{P}$ 为初等对调矩阵，行向量组不变。根据自反性，两个向量组等价。

若 $\boldsymbol{P}$ 为对应 kr_i 的初等倍乘矩阵，则 $\boldsymbol{PA}$ 中第 i 行可以由 $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性表示，系数是 $k\boldsymbol{e}_i$，即 $\boldsymbol{e}_i^T\boldsymbol{PA} = (k\boldsymbol{e}_i)^T\boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{A}$ 中第 i 行可以由 $\boldsymbol{PA}$ 的行向量线性表示，系数是 $k^{-1}\boldsymbol{e}_i$，即 $\boldsymbol{e}_i^T\boldsymbol{A} = (k^{-1}\boldsymbol{e}_i)^T\boldsymbol{AP}$; 对于 $j \neq i$，$\boldsymbol{PA}$ 中第 j 行等于 $\boldsymbol{A}$ 中第 j 行，也可以互相线性表示，系数都是 $\boldsymbol{e}_j$，即 $\boldsymbol{e}_j^T\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{e}_j^T\boldsymbol{A}$.

若 $\boldsymbol{P}$ 为对应 $r_i + kr_j$ 的初等行倍加矩阵，则有

$$\boldsymbol{e}_\ell^T\boldsymbol{PA} = \begin{cases} (\boldsymbol{e}_i + k\boldsymbol{e}_j)^T\boldsymbol{A} & \text{如果}\ell = i, \\ \boldsymbol{e}_\ell^T\boldsymbol{A} & \text{如果}\ell \neq i; \end{cases} \quad \text{和} \quad \boldsymbol{e}_\ell^T\boldsymbol{A} = \begin{cases} (\boldsymbol{e}_i - k\boldsymbol{e}_j)^T\boldsymbol{PA} & \text{如果}\ell = i, \\ \boldsymbol{e}_\ell^T\boldsymbol{PA} & \text{如果}\ell \neq i. \end{cases}$$

□

推论 1. 令 $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为一个初等矩阵，则 $\boldsymbol{AQ}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价。

证明. 以上证明的转置。 □

定理 4. $\boldsymbol{A} \xrightarrow{r} \boldsymbol{B}$ ($\boldsymbol{A} \xrightarrow{c} \boldsymbol{B}$) 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行（列）数量相同且的行（列）向量组等价。

证明. ($\Rightarrow$) 由上面的定理直接得到。

($\Leftarrow$) 假设矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 的行向量组等价，再假设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的前 $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ 行一样，我们只需证明对 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别进行一系列初等行变换后获得的两个矩阵的前 $k+1$ 行一样，即可得证 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{r} \boldsymbol{B}$。

令 $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_i$ 分别代表 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 行，且 $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b}_i, \forall i \leq k$. 考虑到 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价，必定存在一组系数 $\{x_i\}$ 使得 $\boldsymbol{b}_{k+1} = \sum_{i=1}^m x_i\boldsymbol{a}_i$.

1a. 若 $x_{k+1} \neq 0$, 那么如下一系列初等行变换可以在不改变其他行的情况下将 $\boldsymbol{A}$ 的第 $k+1$ 行变为 $\boldsymbol{B}$ 的第 $k+1$ 行: $x_{k+1}r_{k+1}$, 然后 $r_{k+1} + x_ir_i$, $\forall i \neq k+1$.

1b. 若 $x_{k+1} = 0$ 但 $\exists i > k+1$, s.t. $x_i \neq 0$，那么如下一系列初等行变换可以在不改变其他行的情况下将 $\boldsymbol{A}$ 的第 $k+1$ 行变为 $\boldsymbol{B}$ 的第 $k+1$ 行: $r_{k+1} \leftrightarrow r_i$, x_ir_{k+1}, 然后 $r_{k+1} + x_jr_j$, $\forall j \neq i$ 或 $k+1$.

2a. 若 $x_i = 0, \forall i > k$（此时 $\boldsymbol{b}_{k+1} \in \operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$），但 $\exists\{y_i\}$ s.t. $\boldsymbol{a}_{k+1} = \sum_{i=1}^k y_i\boldsymbol{a}_i$，则可以先使用初等变换: $r_{k+1} - y_ir_i$, $\forall i = 1, \ldots, k$ 将 A 的第 $k+1$ 行变为零向量，再使用初等行变换 $r_{k+1} + x_ir_i$, $\forall i = 1, \ldots, k$ 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 $k+1$ 行变为 $\boldsymbol{B}$ 的第 $k+1$ 行。

2b. 若 $x_i = 0, \forall i > k$，且 $\boldsymbol{a}_{k+1} \notin \operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$，则尝试 $r_{k+1} \leftrightarrow r_i$, $i > k+1$，若 $\exists i > k+1$ s.t. $\boldsymbol{a}_i \in \operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$，则进入情况 2a.

3a. 若 $\forall i > k$ 都有 $x_i = 0$ 和 $\boldsymbol{a}_i \notin \operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$，则对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 尝试 $r_{k+1} \leftrightarrow r_j$, $j > k+1$. 令 $\boldsymbol{P}$ 为代表 $r_{k+1} \leftrightarrow r_i$ 的初等矩阵。若对任意 $j > k+1$，行对调后的矩阵 $\boldsymbol{PB}$ 满足之前四个条件中的任意一个，则说明存在一系列初等行变换可以在不改变其他行的情况下将 $\boldsymbol{A}$ 的第 $k+1$ 行变为 $\boldsymbol{PB}$ 的第 $k+1$ 行。

3b. 假设在 3a 的情况下对所有 $j > k+1$，行对调后的矩阵 $\boldsymbol{PB}$ 都不满足之前四个条件中的任意一个。此时 $\forall i > k$ 都有 $\boldsymbol{a}_i \notin \operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$ 和 $\boldsymbol{b}_i \in \operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$. 然而 $\operatorname{span}(\boldsymbol{B}) = \operatorname{span}(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m) = \operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_m) = \operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$ 意味着 $\boldsymbol{a}_i \notin \operatorname{span}(\boldsymbol{B})$，这与 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价的前提矛盾，因此这种情况不存在。 $\square$

2.5. 与线性方程组解的关系

$$\text{一个线性方程组 } \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \text{ 有解} \iff \begin{array}{l} \boldsymbol{b} \text{ 可由 } \boldsymbol{A} \text{ 的列向量线性表示} \\ (\boldsymbol{b} \text{ 在 } \boldsymbol{A} \text{ 的列空间中}) \end{array}$$

定理 5 (列初等变换不改变线性方程组的可解性，但改变解的值). 给定 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ 和初等矩阵 $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$，则 $\{\boldsymbol{x}\colon\ \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}\} = \{\boldsymbol{Qy}\colon\ (\boldsymbol{AQ})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}\}$.

证明. 记这两个集合分别为 $\mathcal{X}_1$ 和 $\mathcal{X}_2$. 因为列初等变换后的矩阵 $\boldsymbol{AQ}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 列等价，由定理 2 可知线形系统 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 与 $(\boldsymbol{AQ})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ 要么都有解，要么都无解。

现在假设两个解集不为空集。若 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}_2$, 则存在一个 $\boldsymbol{y}$ 满足 $\boldsymbol{AQy} = \boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Qy}$，此时 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Qy}) = \boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}_1$，进而得 $\mathcal{X}_1 \supseteq \mathcal{X}_2$；若 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}_1$，则其满足 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$，此时 $\boldsymbol{y} := \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{x}$ 满足 $(\boldsymbol{AQ})\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{AQ})(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$，故 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Qy} \in \mathcal{X}_2$，因此 $\mathcal{X}_1 \subseteq \mathcal{X}_2$. $\square$

以上定理说明 LU 分解法不会改变线性方程组的解集。

3. 线性相关性

3.1. 线性相关性

定义 3 (线性无关、相关). 对于一组向量 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$，若其线性组合

$$x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_m\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{0} \text{ 仅在 } x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0 \text{ 时成立,}$$

则称这组向量线性无关 (linearly independent)，否则称它们线性相关 (linearly dependent).

任何一组向量中只要有零向量（哪怕这“组”向量只包含一个向量），则其必然线性相关。

对于一组向量，线性相关 $\Leftrightarrow$ 其中存在一个向量可以由其他向量线性表示。(书上定理 2.7.1)

对于一组向量，线性无关 $\Leftrightarrow$ 其中任何一个向量都无法由其他向量线性表示。(上一条的逆否)

如果一组向量 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ 线形无关，而 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{u}\}$ 线形相关，则 $\boldsymbol{u}$ 可由向量组 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}$ 线形表示，且表示是唯一的。(书上定理 2.7.2)

3.2. 线性相关性的几何意义

一组向量 $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ 线性无关
$\Leftrightarrow$ 其中任何一个向量都不在其他向量的线性生成空间里
$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的任何一个真子集的线性生成空间都是 $\mathrm{span}(\boldsymbol{A})$ 的真子集。

类似地，一组向量 $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ 线性相关
$\Leftrightarrow$ 其中一个向量在其他向量的线性生成空间里
$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 有一个真子集的线性生成空间是 $\mathrm{span}(\boldsymbol{A})$。

可以认为线性相关性在讨论：一组向量在生成其线性生成空间时是否有冗余。

3.3. 矩阵行（列）向量的线性相关性与初等变换

定理 6. 行（列）等价矩阵的行（列）向量组的线性相关性一致。

证明. 行对调变换显然不改变矩阵行向量组的线性相关性。

对于行倍乘变换 kr_i，若行向量线性相关，则存在一组不全为零的系数 $x_1, \ldots, x_m$ 使得 $\sum_{\ell=1}^{m} x_\ell \boldsymbol{r}_\ell = \boldsymbol{0}$，那么 $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i/k, x_{i+1}, \ldots, x_m$ 是一组不全为零的系数并可使得变换后的行向量和为零：$(x_i/k)(k\boldsymbol{r}_i) + \sum_{\ell \neq i} x_\ell \boldsymbol{r}_\ell = \sum_{\ell=1}^{m} x_\ell \boldsymbol{r}_\ell = \boldsymbol{0}$，所以变换后的行向量也线性相关；若行向量线性无关，可根据初等变换的可逆性通过类似方法证明逆否命题“若变换后的行向量线性相关，则原行向量线性相关”，从而证明变换后的行向量线性无关。

对于行倍加变换 $r_i + kr_j$，若行向量线性相关，则存在一组不全为零的系数 $x_1, \ldots, x_m$ 使得 $\sum_{\ell=1}^{m} x_\ell \boldsymbol{r}_\ell = \boldsymbol{0}$，那么 $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j - kx_i, x_{j+1}, \ldots, x_m$ 是一组不全为零的系数并可使得变换后的行向量和为零：$x_i(\boldsymbol{r}_i + k\boldsymbol{r}_j) + (x_j - kx_i)(\boldsymbol{r}_j) + \sum_{\ell \neq i,j} x_\ell \boldsymbol{r}_\ell = \sum_{\ell=1}^{m} x_\ell \boldsymbol{r}_\ell = \boldsymbol{0}$，所以变换后的行向量也线性相关；若行向量线性无关，可根据初等变换的可逆性通过类似方法证明逆否命题“若变换后的行向量组线性相关，则原行向量组线性相关”，从而证明变换后的行向量线性无关。 □

推论 2. 若 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 的行向量线性无关，则与其行等价的行（简化）梯形矩阵没有全零行；若 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 的列向量线性无关，则与其列等价的列（简化）梯形矩阵没有全零列。

定理 7. 列（行）等价矩阵的行（列）向量组的线性相关性一致。

证明. 用矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 代表任一列初等变换，用 $\boldsymbol{Q}^{-1}$ 代表其逆变换。注意 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}$. 这样 $\boldsymbol{AQ}$ 代表矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过列变换后的矩阵。

先假设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性相关，则存在非零向量 $\boldsymbol{x}$ 使得 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}^T$，进而使得 $\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{AQ})=(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{0}^T\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{0}^T$，故 $\boldsymbol{AQ}$ 的行向量线性相关。

再假设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性无关。此时若 $\boldsymbol{AQ}$ 的行向量线性相关，则存在非零向量 $\boldsymbol{x}$ 使得 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{0}^T$，从而 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{-1})=(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{AQ})\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{0}^T\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{0}^T$. 这与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量线性无关的前提相矛盾，故 $\boldsymbol{AQ}$ 的行向量线性无关。 □

推论 3. 等价矩阵的行（列）向量组的线性相关性一致。

推论 4. 对于一组向量，若所含向量的个数多于维度，则其必然线性相关。

证明. 将这组向量写成行向量，然后逐行排成一个矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$，其中 $m>n$. 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与其标准形 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0}_{r\times(n-r)}\\ \boldsymbol{0}_{(m-r)\times r} & \boldsymbol{0}_{(m-r)\times(n-r)}\end{bmatrix}$ 等价，而 $m>n$ 导致其中 $m-r>n-r\geq 0$，故标准形中有全零行，行向量线性相关。由推论 3 可得原向量组线性相关。 □

推论 5. 若 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}(m\leq n)$ 的行向量线性无关，则它与 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0}_{m\times(n-m)}\end{bmatrix}$ 等价（可通过初等变换相互转化）；若 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}(m\geq n)$ 的列向量线性无关，则它与 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n\\ \boldsymbol{0}_{(m-n)\times n}\end{bmatrix}$ 等价；若方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性无关，列向量也线性无关，则它与 $\boldsymbol{I}$ 等价。

3.4. 与线性方程组解的关系

由线性相关性的定义可知:

$$\text{齐次线性方程组 } \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0} \text{ 有唯一解 } \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{A} \text{ 的列向量线性无关}$$

由此可得，若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，

$$\text{非齐次线性方程组线性方程组 } \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b} \text{ 有唯一解} \iff \boldsymbol{A} \text{ 的列向量线性无关}$$

定理 8. 给定 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^m$，若 $\boldsymbol{A}$ 行向量线性无关，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 必定有解。

证明. 若行向量线性无关，必然有 $m\leq n$. 那么根据推论 5，存在初等矩阵的积 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{P}_{k-1}\cdots\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_\ell$ 使得 $\boldsymbol{PAQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0}_{m\times(n-m)}\end{bmatrix}$. 等价，由于

$$(\boldsymbol{PAQ})(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0}_{m\times(n-m)}\end{bmatrix}(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{x})=\boldsymbol{Pb} \text{ 必定有解 } \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Pb}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 必定有解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Pb}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$. □

4. 秩

4.1. 向量组的极大无关组与秩

定义 4. 对于一组向量 $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^m$，若其中一部分向量 $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^r$ 线性无关，且对于任意 $r < j \leq m$，向量组 $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^r \cup \{\boldsymbol{v}_j\}$ 都线性相关，则称 $\{\boldsymbol{v}_k\}_{k=1}^r$ 是 $\{\boldsymbol{v}_k\}_{k=1}^m$ 的一个极大线性无关组。(书上定义 2.7.4)

向量组与它的任意一个极大线性无关组等价（根据定义可证)；

向量组的各个极大线性无关组之间等价 (由传递性证明)；

两个向量组等价 $\Leftrightarrow$ 它们的极大线性无关组等价 (由传递性证明)。

定理 9. 一个向量组的各个极大无关组所含向量的个数相同。(书上定理 2.7.11)

证明. 设这组向量是 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$，并用矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 的行来表示这一组向量，不妨设其前 r_1 行 $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{r_1}\}$ 是一个极大无关组，$r_0 + 1$ 至 $r_0 + r_2$ 行 $\{\boldsymbol{a}_{r_1+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{r_1+r_2}\}$ 又是一个极大无关组，并且 $r_1 < r_2$.

我们可以先利用行倍加变换将 $r_1 + 1$ 至 m 行化为全零行，获得矩阵 $A_1 = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 \cdots & \boldsymbol{a}_{r_1} & \boldsymbol{0} \cdots & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}^T$.

我们也可以先利用行对调变换将 $r_0 + 1$ 至 $r_0 + r_2$ 调至前 r_2 行，再用倍加变换将 $r_2 + 1$ 至 m 行化为全零行，获得矩阵 $A_2 = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_{r_0} \cdots & \boldsymbol{a}_{r_2} & \boldsymbol{0} \cdots & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}^T$.

这样一来，$\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{A}_2$ 应该行等价。因为从一个向量组中去除或增加零向量不会改变向量组的线形生成空间，因此 $\boldsymbol{A}_1$ 的前 r_2 行与 $\boldsymbol{A}_2$ 的前 r_2 行应该是两个等价的矩阵。可是 $\boldsymbol{A}_1$ 的前 r_2 行包含零向量，是线形相关的；而 $\boldsymbol{A}_2$ 的前 r_2 行是线形无关的，这与行等价矩阵的行向量组的线形相关性一致（定理 6）相悖，故不可能出现 $r_1 < r_2$ 的情况。 □

定义 5. 向量组的一个极大无关组所含向量的个数称为该向量组的秩 (rank)。规定仅含零向量的向量组的秩为 0. （书上定义 2.7.5)

定理 10. 对于两个向量组 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \subseteq \mathbb{R}^n$，若 $\boldsymbol{A}$ 可由 $\boldsymbol{B}$ 线形表示，则 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) \leq \operatorname{rank}(\boldsymbol{B})$. 进一步有：等价向量组必有相同的秩。(书上定理 2.7.12)

4.2. 矩阵的秩

定义 6. 矩阵的行（列）秩 (row/column rank) 是其行（列）向量组的秩。

定理 11. 一个矩阵（不一定是方阵）的行秩和列秩相等。

证明. 假设矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 的列秩为 R，此时不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 R 列 $\{\boldsymbol{c}_k\}_{k=1}^R$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大无关组，则对于任意 $i \in \{1, \ldots, n\}$，都存在一组实数 $\{r_{ki}\}_{k=1}^R$ 使得 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列 $\boldsymbol{c}_i$ 满足 $\boldsymbol{c}_i = \sum_{k=1}^R r_{ki}\boldsymbol{c}_k$. 因此，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以分解为两个矩阵的积

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_1 & \boldsymbol{c}_2 & \cdots & \boldsymbol{c}_R\end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{R1} & r_{m2} & \cdots & r_{Rn}\end{bmatrix}.$$

现在将以上两个矩阵左边视为一组 $m \times R$ 的系数，右边视为 R 个行向量，则以上等式说明 $\boldsymbol{A}$ 的行向

量均可以由 $\{(r_{i1}, r_{i2}, \ldots, r_{in})\}_{i=1}^{R}$ 这 R 个向量的线性组合表达，因此 A 的行秩 $\leq R$，也就是说 A 的行秩 $\leq A$ 的列秩。

接下来再假设 $\boldsymbol{A}$ 的行秩为 R，可以类似地证明出 A 的列秩 $\leq R$，也就是说 A 的行秩 $\geq A$ 的列秩。 □

对于一个矩阵 $\boldsymbol{A}$，由于其行秩与列秩相等，我们称这个数字为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 (rank)，记为 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$ 或 $r(\boldsymbol{A})$，不超过行数，也不超过列数。

任一秩为 r 的矩阵都可以经过若干次初等行变换变为有 r 个非零行的行简化梯形矩阵，也可以经过若干次初等列变换变为有 r 个非零列的列简化梯形矩阵。（证明与定理 9 类似）

等价矩阵的秩一样。若 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 等价，秩为 r，则它与 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \mathbf{0}_{r\times(n-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r)\times r} & \mathbf{0}(m-r)\times(n-r) \end{bmatrix}$ 等价。

满秩矩阵 (full rank matrix)：秩等于阶数的方阵。

满秩矩阵都可以经过若干次初等行变换变为单位矩阵，也可以经过若干次初等列变换变为单位矩阵。

对于两个矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$，(1) $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leq r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B})$; (2) $r(\boldsymbol{AB}) \leq \min\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\}$; (3) 若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为方阵，$r(\boldsymbol{AB}) \geq r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) - n$. （书上定理 2.7.14）

4.3. 极大无关组和秩的几何意义

线性空间的基 (basis) 是任何一组满足以下两个条件的向量集合:

(1) 线性无关，　　(2) 线性生成空间是原线性空间。

一个向量集合的极大无关组是该集合的线性生成空间的一组基。

一个线性空间的基有无穷多种选择，除非线性空间只包含原点，这种情况下基是空集 $\emptyset$.

在基确定后，其中的向量被称为基向量 (basis vector)。

线性空间的维度 (dimension) 是该线性空间基向量的个数。说通俗点：一个线性空间中你能找到几个线性无关的向量，它就是几维。

矩阵的行（列）秩 (row/column rank) 是其行（列）空间的维度。

齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 所有的解组成的集合是 $\boldsymbol{A}$ 的零空间，这个零空间的任意一组基是齐次线性方程组的基础解系，$\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的任意一个解都可以写为基础解系的线性组合。

定理 12. 零空间的维度 + 秩 = 矩阵的列数。(书上推论 3.4.6)

4.4. 与线性方程组解的关系

若 $\boldsymbol{A}$ 行满秩，则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 必定有解。

若 $\boldsymbol{A}$ 列满秩，则 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 当且仅当 $\boldsymbol{x} = 0$ 时成立（非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 如果有解，则解唯一）。

若 $\boldsymbol{A}$ 满秩（方阵），$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解。

5. 逆矩阵

5.1. 定义与基本性质

定义 7. 对于方阵 $\boldsymbol{A}$, 满足线性方程组 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$ 的同阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 被称为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 (inverse matrix), 记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

定理 13. $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 满秩。此外，若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 唯一。

证明. 令矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的阶数为 n。

($\Leftarrow$) 若 $\boldsymbol{A}$ 满秩，则对于任意 $i=1,\dots,n$，线形方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{e}_i$ 都有唯一解，因此逆矩阵存在且唯一。求解逆矩阵的过程与同时求解 n 个线性方程组一致，可用高斯消元法计算。

($\Rightarrow$) 我们证明逆否命题成立。假设方阵 $\boldsymbol{A}$ 秩不满，此时若存在矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$，则有悖论 $n=\operatorname{rank}(I)\leq\min\{\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}),\operatorname{rank}(\boldsymbol{B})\}\leq\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})<n$, 故 $\boldsymbol{A}$ 不可逆。 □

定理 14. 若 $\boldsymbol{A}$ 存在逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{I}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$.

证明. 由推论 5可知满秩矩阵（可逆矩阵）与 $\boldsymbol{I}$ 等价。因此当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时存在代表一系列初等变换的矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 满足 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PIQ}=\boldsymbol{PQ}$. 因 $\boldsymbol{AQ}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{PQQ}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{I}$，所以 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}$，接下来即可得到 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1})(\boldsymbol{PQ})=\boldsymbol{I}$. □

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A},\quad (k\boldsymbol{A})^{-1}=k^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\text{当}k\neq 0,\quad (\boldsymbol{A}^T)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^T,\quad (\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

5.2. 逆矩阵与等价矩阵

由推论 5 直接得到：任何可逆矩阵都与同阶的单位矩阵既行等价，又列等价。

因此，等价矩阵可以这么定义：对于矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{m\times n}$

- 若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}\in\mathbb{R}^{m\times m}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PA}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 行等价；
- 若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AQ}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 列等价；
- 若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}\in\mathbb{R}^{m\times m}$ 和 $\boldsymbol{Q}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PAQ}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价。

5.3. Sherman–Morrison formula*

对于可逆矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 和向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n$，矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{uv}^T$ 可逆的充要条件是 $1+\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{u}\neq 0$，且有

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{uv}^T)^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\frac{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{uv}^T\boldsymbol{A}^{-1}}{1+\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{u}}.$$

6. 秩与行列式的关系

6.1. 伴随矩阵

令 A_{ij} 为 $\boldsymbol{A}$ 的代数余子式，伴随矩阵是由代数余子式所组成的矩阵的转置，记为 $\boldsymbol{A}^*$，即

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

具备 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}$ 的重要性质。

6.2. 两种秩的定义的等价性

引理 1. $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})$.

证明. 令 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = r$.

若一个向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$；反之，若 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，则 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2 = \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = 0$，继而有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ 有相同的零空间，进而它们的行空间一致，它们的秩一样。

注意 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^T)$, 然后使用相同的方法可证明 $\boldsymbol{A}^T$ 与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ 有相同的零空间、行空间、秩。 □

定理 15. 对于矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，其秩 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = r$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 至少存在一个非零的 r 阶子式，且所有 $r+1$ 阶子式全为零。

证明. ($\Leftarrow$) 若 $\boldsymbol{A}$ 存在一个非零的 r 阶子式，则该子式所处的行（列）线形无关，从而 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) \geq r$.

现在假设 $m \leq n$，同时令 $\tilde{\boldsymbol{A}} \in \mathbb{R}^{(r+1)\times n}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 中任意 $r+1$ 行构成的子阵。由柯西-比内公式可知 $r+1$ 阶方阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{A}}^T$ 的行列式值为 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 所有 $r+1$ 阶子式的平方和，而由于所有 $r+1$ 阶子式为零，$\det(\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{A}}^T) = 0$，故 $\operatorname{rank}(\tilde{\boldsymbol{A}}) = \operatorname{rank}(\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{A}}^T) \leq r$，从而有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) \leq r$. 若干 $m > n$，通过分析 $\tilde{\boldsymbol{A}}^T\tilde{\boldsymbol{A}}$ 亦可得出 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) \leq r$.

($\Rightarrow$) 若存在一个非零的 $r+1$ 阶子式，则该子式所处的行（列）线形无关，从而有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) \geq r+1$，这与 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = r$ 相悖，故所有 $r+1$ 阶子式全为零。

若所有 r 阶子式为零，利用与上面基于柯西-比内公式的论据，我们可以判断出 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) \leq r-1$，这与 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = r$ 相悖，故至少存在一个非零的 r 阶子式。 □

6.3. 满秩 $\Leftrightarrow$ 非奇异

令 $\boldsymbol{P}$ 为任意初等矩阵，已知 $\det(\boldsymbol{P}) \neq 0$ 和 $\det(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}) = \det(\boldsymbol{P})\det(\boldsymbol{A})$，故初等变化不改变一个矩阵的行列式是否为零。又因为满秩矩阵与 $\boldsymbol{I}$ 等价，因此矩阵满秩的充要条件是其非奇异。

从几何角度也容易看出：一个方阵的行（列）向量线性相关 $\Leftrightarrow$ 存在一个向量在别的向量的线形生成空间内，平行多面体体积为零。

6.4. 分块矩阵的舒尔补 *

对于一个分块矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}$, 若 $\boldsymbol{D}$ 可逆, $\boldsymbol{M}$ 中 $\boldsymbol{D}$ 的舒尔补 (Schur complement) 是 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}$, 而且 $\det(\boldsymbol{M})=\det(\boldsymbol{D})\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C})$; 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{M}$ 中 $\boldsymbol{A}$ 的舒尔补是 $\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$, 而且 $\det(\boldsymbol{M})=\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$.

7. 总结

给定 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^{m}$.

线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{A}$ 的列空间中。

若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解则

$$\operatorname{rank}(A)=n \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{A}\text{ 列向量线性无关} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\text{ 有唯一解 }\boldsymbol{0} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\text{ 有唯一解}.$$

若 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是方阵则

$$\begin{array}{l}
\boldsymbol{A}\text{ 行向量线性无关} \qquad\qquad \Rightarrow \\
\boldsymbol{A}\text{ 的列空间是 }\mathbb{R}^n \;\Rightarrow\; \boldsymbol{b}\text{ 在 }\boldsymbol{A}\text{ 的列空间中} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\text{ 有解} \\
\qquad\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow \\
\;\boldsymbol{A}\text{ 满秩} \;\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\text{ 列向量线性无关} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\text{ 有唯一解 }\boldsymbol{0} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\text{ 有唯一解} \\
\qquad\Updownarrow \\
\boldsymbol{A}\text{ 非奇异 }(\det(\boldsymbol{A})\neq 0) \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{A}\text{ 可逆}
\end{array}$$