第五次的作业

1. 解读课上并行scan算法，给出其原理，证明正确性；
2. 对于碰撞检测场景，如果每个线程检测出来的碰撞结果个数完全随机，如何实现结果收集（连续保存在一个大小为M的数组，M为总的碰撞个数）？

1.1 并行scan算法解读

scan 算法的计算伪代码为

```
for j:=1 to log2n do
    for all k in parallel do
        if k >= 2^j then
            x[k]:=x[k-2^(j-1)] + x[k]
        fi
    od
od
```

其中 j 表示迭代计算的次数，每次计算时检查当前数据的索引值 k 与 $2^{(j-1)}$ 进行比较，若有 $k \geq 2^{(j-1)}$，则当前下标为 k 的数据与 $k-2^{(j-1)}$相加作为 $j+1$ 轮下标为 k 处的数据，若条件不成立，$j+1$ 轮下标为 k 处的数据与 j 轮数据一致。直至 j 的值与 $\lfloor log_2 n \rfloor$ 的值一致，即 $2^{j-1} < n \leq 2^j$，运算结束。最终的值与串行计算结果一致，k 处结果为 $\sum_{i=0}^{k} x_i$。

上述计算实现了层序分离，使得每一轮的计算能够利用到 $n-2^j$ 数量的线程，相较串行办法，总的加法计算复杂度为 $O(nlogn)$,每一步的计算复杂度为 $O(logn)$。

1.2 Hillis Steele Algorithm 证明

根据Hillis Steele算法原理，有如下关系成立：对于一个k维的并行计算数据，记x_n为第n个数，j表示第j次运算，那么有

$$\begin{cases} x_n^{[j]} = x_{n-2^{j-1}}^{[j-1]} + x_n^{[j-1]} & ,n > 2^{j-1}, j \in [1, log_2 k] \\ x_n^{[j]} = x_n^{[j-1]} & ,n \leq 2^{j-1}, j \in [1, log_2 k] \end{cases} \tag{1}$$

不妨记区间 $[a, b]$ 之间的元素和为

$$\sum_{(a)}^{(b)} = \sum_{i=a}^{b} x_i, i \in [a, b]$$

那么有如下等式必然成立

$$\sum_{(a)}^{(b)} + \sum_{(b+1)}^{(c)} = \sum_{(a)}^{(c)}$$

设当前 j_f 表示最后一次运算，结合式 (1) 有如下关系

$$\begin{aligned} n - 2^{j_f - 1} &> 0 \\ n - 2^{j_f} &\leq 0 \end{aligned}$$

式 (1) 中的上式可以表示为如下形式

$$x_n^{[j_f]}=\sum\nolimits_{(0)}^{(n)}=\sum_{i=0}^{1}x_{n-i*2^{j-1}}^{[j-1]}$$

证明过程

根据式 (1)，向前 x 步展开的结果应为

$$x_n^{[j_f]}=\sum\nolimits_{(0)}^{(n)}=\sum_{i=0}^{2^x-1}x_{n-i*2^{j-x}}^{[j-x]} \tag{2}$$

对式 (2) 代入 式 (1) 的上式，再向前展开一步，即向前展开到 $x+1$ 步，如下所示

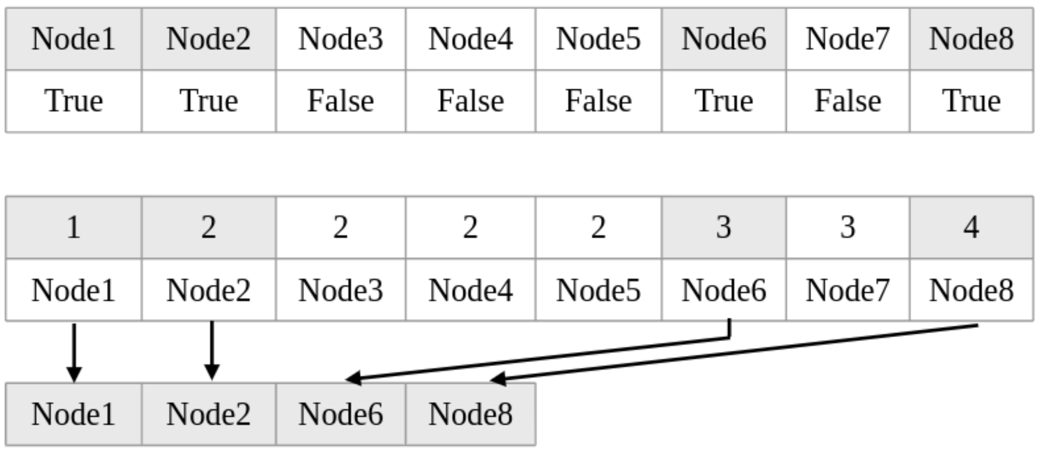
$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2^x-1}x_{n-i*2^{j-x}}^{[j-x]} &= \sum_{i=0}^{2^x-1}x_{n-i*2^{j-x}-2^{j-x-1}}^{[j-x-1]}+x_{n-i*2^{j-x}}^{[j-x-1]} \\ &= \sum_{i=0}^{2^x-1}x_{n-(2i+1)*2^{j-x-1}}^{[j-x-1]}+x_{n-(2i)*2^{j-x-1}}^{[j-x-1]} \\ &= x_n^{[j-x-1]}+x_{n-2^{j-x-1}}^{[j-x-1]}+x_{n-2*2^{j-x-1}}^{[j-x-1]}+x_{n-3*2^{j-x-1}}^{[j-x-1]}+...+x_{n-(2^{x+1}-2)*2^{j-x-1}}^{[j-x-1]}+x_{n-(2^{x+1}-1)*2^{j-x-1}}^{[j-x-1]} \\ &= \sum_{i=0}^{2^{x+1}-1}x_{n-i*2^{j-x-1}}^{[j-x-1]}\end{aligned} \tag{3}$$

通过数学归纳法代入式 (3) 递推公式，可以证明式 (2) 为该公式的通项当， $x=j$ 时有

$$\begin{aligned}x_n^{[j_f]}=\sum\nolimits_{(0)}^{(n)} &= \sum_{i=0}^{2^j-1}x_{n-i*2^0}^{[0]} \\ &= x_n^{[0]}+x_{n-1}^{[0]}+...+x_1^{[0]},j\in MAX(1,\lfloor log_2k\rfloor)\end{aligned} \tag{4}$$

证毕。

2. 碰撞检测结果存储



每个线程都去做碰撞检测，碰撞的节点记录碰撞结果 (True or False)，每个线程输出的时候时，在之前 scan 计算得到的 inclusive "cary"的基础上计算当前线程的 scan，对于存在碰撞的节点，scan_sum增加1，那么在这次扫描结束后，scan_sum发生改变节点就是需要存储的位置。计算的最终结果最后的inclusive "carry"的值作为下一个线程计算的偏移量。最终有M个碰撞点被检测到，最后的"carry"值也是M。