关于点线最值问题的微探究

内容摘要：

在中学接触了一定量的最值问题后，发现了两类可以解析的最值类型，一是绝对值最值，即在数轴上的点和的最值。由此我们想到将其推广到更一般的形式，限于能力仅作部分推广。将最值问题从另一代数化的的角度去思考会发现别有一番洞天。\small 在中学接触了一定量的最值问题后，发现了两类可以解析的最值类型，一是绝对值最值，即在数轴上的点和的最值。由此我们想到将其推广到更一般的形式，限于能力仅作部分推广。将最值问题从另一代数化的的角度去思考会发现别有一番洞天。在中学接触了一定量的最值问题后，发现了两类可以解析的最值类型，一是绝对值最值，即在数轴上的点和的最值。由此我们想到将其推广到更一般的形式，限于能力仅作部分推广。将最值问题从另一代数化的的角度去思考会发现别有一番洞天。

关键词：

最值，平面几何，解析几何，代数分析

一、费马点问题

问题：在平面内的一个给定的三角形中，试求一点P使得该点到三角形各顶点的距离和最小。（费马点） 事实上，我们先对三角形进行分类：

I.对于最大角$\alpha=\angle A$,若$\alpha<120^\circ$ 则取三角形内一点P，连接PA,PB,PC,并且将$\triangle PAB$绕点A逆时针旋转60° 至$\triangle QAB'$处，所以$\triangle QAP$是一个等边三角形，PA长就转化到PQ长上，可见$PA+PB+PC=PA+PQ+QB\geq B'A$，于是就解得$\angle APB=\angle APC=\angle BPC=120^\circ$

II.对于最大角$\alpha=\angle A$,若$\alpha>120^\circ$ or $\alpha=120^\circ$ 则所求点P即为A点。

对于这类问题我们有相应类似的问题，我们就是要来讨论他们。

二、最值问题的几个弱化

1.数轴问题

在数轴上有给定的两个点A，B，其对应数分别为m,n (m>n)。求一点P到A、B的距离和最小。

设点P所对应的数为x。

由距离的定义，我们得出$PA=|x-m|$, $PB=|x-n|$

构造函数$y=|x-m|+|x-n|$，所求即为y的最小值。

y也可以是一个分段函数，写成

$$y = \begin{cases} 2x - m - n & x \geq m, \\ m - n \\ -2x + m + n & x \leq n \end{cases}$$

我们便得到了它的最小值所对应的区间$x \in [m, n]$

事实上我们还可以就从几何意义来入手，因为PA ， PB表示了P到A、B的距离，显然当P在AB之间时，取到距离和的最小值，这是从几何直观来入手的。

2.平面问题

平面内给定一个点O(m,n)，求一个点P使得P到O的距离最小。

首先考虑所有到所有到点O距离相同的点的集合P，那么由定义可知

$$P = \{ (x, y) \mid \sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2} = r^2 \quad x, y \in R\}$$

换句话而言，P即为以O为圆心，r为半径的一个圆。若要使点到点的距离最小，就要让半径r最小，由r的取值集合知，$r\min = 0$ 所以当所求点P（这里只点，而非点集）与O重合之时，OP取最小值。

但同样的，从几何直观的角度，的确不需要思考就可以得到，O、P重合，距离最短。但这样就缺乏数学的严谨。

3.空间问题

空间内考虑一个点$O(i, j, k)$,求一个点到O的欧几里得距离的最小值。

我们同样考虑一切到O距离为定值的点的集合，形式如下

$$P = \{ (x, y, z) \mid \sqrt{(x-i)^2 + (y-j)^2 + (z-k)^2} = r^2 \quad x, y \in R\}$$

同样的，由函数定义可知，$r \geq 0$,所以最小值即为$r = 0$.

三、弱化问题的相关推广

1.数轴问题

一级推广

现在，在数轴上存在n个点$X_1, X_2, X_3 ...... X_n$，他们的坐标给定：对于点X_i

在数轴上所对应的数（即坐标）为m_i 求数轴上一点P，使得$OX_1 + OX_2 + OX_3 + ... + OX_n$的和最小。

我们设所求的O点所对应的数为x,由此可以得到线段和关于点坐标的函数

$$y = |x - m_1| + |x - m_2| + |x - m_3| + ... + |x - m_{n-1}| + |x - m_n|$$

写成分段函数的形式即为：

$$y = \begin{cases} -nx + m_1 + m_2 + ... + m_n & x \leqslant m_1 \\ -(n-2)x - m_1 + m_2 + ... + m_n & m_1 < x \leqslant m_2 \\ -(n-4)x - m_1 - m_2 + m_3 + ... + m_n & m_2 < x \leqslant m_3 \\ ...... & m_i < x \leqslant m_{i+1} \\ (n-2)x - m_1 - m_2 - m_3 - ... - m_{n-1} + m_n & m_{n-1} < x \leqslant m_n \\ nx - m_1 - m_2 - m_3 - ... - m_n & m_n < x \end{cases}$$

对其求导之后，便得到了y的导函数y'

$$y' = \begin{cases} -n & x \leqslant m_1 \\ -n+2 & m_1 < x \leqslant m_2 \\ -n+4 & m_2 < x \leqslant m_3 \\ ...... & \\ -n+2i & m_i < x \leqslant m_{i+1} \\ ...... & \\ n-2 & m_{n-1} < x \leqslant m_n \\ n & m_n < x \end{cases}$$

当$y' < 0$时，我们得到了y的单调减区间，同理$y' > 0$时我们得到了y的单调增区间。取$y' = 0$即为其取最值得时候，即

$$y' = -n + 2i = 0$$

$$i = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$$

这表明当n为奇数时，y存在唯一的最值点，而n为偶数时，y存在一个区间段使得y取最小值，改区间为闭区间，即$[\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1]$

二级推广

相较于一级推广，我们给每个m_i加权,原问题转为对于$k_1 OX_1 + k_2 OX_2 + ... + k_n OX_n$的和最小值。同样是上面的函数只不过稍复杂些：$y = \sum_{i=1}^{n} k_i | x - m_i |$

写成分段函数即为

$$y=a_ix+b_i=\sum_{j=1}^{i}k_j(x-m_j)-\sum_{j=i+1}^{n}k_j(x-m_j)\quad m_i<x\leqslant m_{i+1}$$

整理系数得：

$$\begin{cases}a_i=\sum_{j=1}^{i}k_j-\sum_{j=i+1}^{n}k_j\\ b_i=\sum_{j=1}^{i}k_jm_j-\sum_{j=i+1}^{n}k_jm_j\end{cases}$$

易证其单调性，求导后与上一问题同理。

2.平面问题

一级推广

在平面内有两个点$F_1(c,0),F_2(-c,0)$,求一点到此两点距离和的最小值。

事实上，我们同样去一个到这两点距离和恒定的点的集合，所设距离和为$2a$

则该点集合就是一个椭圆：

$$P=\{(x,y)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ \ x,y\in R\}$$

要距离和最短，就是要让$2a$最小，当离心率最小时，椭圆就退化成一条线段，此时取到最小值$2c$.

二级推广

平面上有n个点，X_i坐标为（x_i,y_i）求一点P(x,y)到X_i距离和最小。

写出函数关系式

$$z=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}=\sum_{i=1}^{n}z_i$$

现将验证z在R上存在极值

即保证$\exists P(x_0,y_0)$使得$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$且

$$H_f(P_0)=\begin{pmatrix}f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0)\\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}_{P_0}$$

因为我们要的极值时极小值，所以另有条件是：

$$\text{当}f_{xx}>0\text{，则}(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)_{P_0}>0$$

于是我们算z的一阶偏导：

$$z=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}$$

$$令s_i=(x-x_i)^2, t_i=(y-y_i)^2, 则z_i=\sqrt{s_i^2+t_i^2}$$

$$f_x=\frac{\partial z_i}{\partial x_i}=\frac{\partial z_i}{\partial s_i}\frac{\partial s_i}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial s_i}=s(s^2+t^2)^{-\frac{1}{2}},\frac{\partial z_i}{\partial t_i}=t(s^2+t^2)^{-\frac{1}{2}},\frac{\partial s_i}{\partial x_i}=2(x-x_i),\frac{\partial t_i}{\partial y_i}=2(y-y_0)$$

$$\therefore f_{x_i}=2s(s^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}(x-x_i)$$

$$\text{同理，}f_{y_i}=2t(s^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}(y-y_i)$$

$$\therefore f_x=\frac{\partial z}{\partial x}=\sum_{i=1}^{n}2s(s^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}(x-x_i),\ f_y=\frac{\partial z}{\partial y}=\sum_{i=1}^{n}2t(s^2+t^2)^{-\frac{1}{2}}(y-y_i)$$

略去计算步骤，易证该函数z满足以上要求，故存在此点$P(x_0,y_0)$使得z取最小值。

参考资料

1.《数学分析》华东师范大学数学科学学院编--高等教育出版社

2.LaTeX 数学公式大全[LaTeX 数学公式大全 - Iowa_BattleShip 的博客 - 洛谷博客 (luogu.com.cn)]

鸣谢

陈耕同学和李明老师给予了极大的帮助与思路，没有他们我也绝不会研究这一方面的内容以及如此多的未曾涉猎的领域，特此致谢