Алгоритмы и структуры данных

Введение

д.т.н., проф. Трифонов Петр Владимирович

Содержание лекции

1. Организационные вопросы
2. Понятие алгоритма
3. Инкрементальный подход к построению алгоритмов
4. Разделяй и властвуй
5. Анализ сложности алгоритмов
6. Рекуррентные соотношения
7. Разностные уравнения

Система управления курсом Moodle

- https://moodle.itmo.ru
- Login using University ID: используйте логин/пароль от ИСУ
- Курс "Алгоритмы и структуры данных"
- Запись на курс: ключ по номеру группы (Algorithms#N3247,...,Algorithms#N3253)

Отчетность

- 4 практических задания — 50 % итоговой оценки
  - https://acm.timus.ru/
  - Отправить в Moodle
    - URL страницы с результатом задания, успешно выполненного в установленное время
    - Файл с исходным кодом
    - Пояснительную записку
  - При выявлении плагиата задание зачтено не будет всем, кто в этом будет замешан
- Активность на практических занятиях — 10 % итоговой оценки
- Контрольная работа в середине семестра — 20 % итоговой оценки
- Экзамен — 20 % итоговой оценки

Литература

- Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн. Алгоритмы: Построение и анализ. — М.: МЦНМО, 2012
- Д. Кнут. Искусство программирования. Т. 1 – 4
- А.В. Ахо, Д.Э.Хопкрофт, Д.Д.Ульман: Структуры данных и алгоритмы. М.: «Вильямс», 2001

Понятие алгоритма

- Алгоритм — точное предписание о порядке исполнения некоторой системы операций над исходными данными для получения желаемого результата за конечное число шагов
- Мухаммед аль-Хорезми: Книга о сложении и вычитании — алгоритмы работы с числами в десятичной системе счисления

Основные свойства алгоритмов

- Корректность
  - А. правилен, если на любом допустимом наборе исходных данных он заканчивает работу и выдает результат, удовлетворяющий требованиям задачи
  - Если задачу решить не удалось, должно быть сформировано соответствующее сообщение
- Погрешность (если она допустима) решения задачи
- Сложность
  - Однопроцессорная машина с произвольным доступом к памяти
- Возможность параллельного исполнения
- Понятность

Сложность алгоритмов

- Тип оценки
    - В худшем случае
    - В лучшем случае
    - В среднем
- Вычислительная сложность
    - Число арифметических операций
    - Число вызовов некоторой функции
- Объем используемой памяти
- Число операций или общий объем ввода/вывода
    - Обращения к диску
    - Передача данных по сети
- Число кэш-промахов

Сложность, как правило, является функцией от размерности исходных данных

Асимптотические обозначения

- Пусть $f(n)$, $g(n)$ — некоторые функции, неотрицательные для достаточно больших n
- $f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = 0 \Leftrightarrow \forall c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : f(n) \leq cg(n)$
- $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow \exists c_1, c_2 > 0, n_0$: для всех $n \geq n_0$

  $$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

  $g(n)$ — асимптотически точная оценка для $f(n)$
- $f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \exists c > 0, n_0$: для всех $n \geq n_0$

  $$0 \leq f(n) \leq cg(n)$$

- $f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow \exists c > 0, n_0$: для всех $n \geq n_0$

  $$0 \leq cg(n) \leq f(n)$$

- Теорема: $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = O(g(n)) \wedge f(n) = \Omega(g(n))$

Инкрементальный подход к построению алгоритмов

- Предположим, что мы умеем решать задачу размерности $n-1$
- Как модифицировать результат решения такой задачи, чтобы получить решение задачи размерности n?

Сортировка вставками

- Пусть дан массив A длины $n = length(A)$
- Найдем в отсортированном массиве размерности $n-1$ место для еще одного элемента, и вставим его туда

Algorithm 1: InsertionSort(A)

```
1 for j = 1, ..., length(A) - 1 do
2     k=A[j].key;
3     i=j-1;
4     while i ≥ 0 ∧ A[i].key > k do
5         A[i+1]=A[i];
6         i=i-1;
7     A[i+1]=A[j];
8 return A
```

строка	стоимость	число раз
2	c_1	n
3	c_2	$n-1$
4	c_3	$n-1$
5	c_4	$\sum_{j=1}^{n-1}(t_j)$
6	c_5	$\sum_{j=1}^{n-1}(t_j-1)$
7	c_6	$\sum_{j=1}^{n-1}(t_j-1)$
8	c_7	$n-1$

Сложность $T(n) = c_1 n + c_2(n-1) + c_3(n-1) + c_4 \sum_{j=1}^{n-1} t_j + c_5 \sum_{j=1}^{n-1}(t_j-1) + c_6 \sum_{j=1}^{n-1}(t_j-1) + c_7(n-1)$

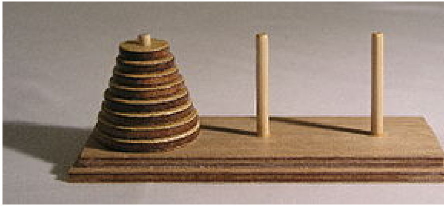
- Лучший случай: массив уже отсортирован $\Rightarrow t_j = 1 \Rightarrow T(n) = \Theta(n)$
- Худший случай: массив отсортирован в обратном порядке $\Rightarrow t_j = j \Rightarrow T(n) = \Theta(n^2)$

Задача о Ханойских башнях

- Даны 3 стержня и n дисков различного диаметра
- За один раз можно переносить один диск
- Нельзя класть больший диск на меньший
- Как перенести все диски с одного штыря на другой?

Задача о Ханойских башнях

- Даны 3 стержня и n дисков различного диаметра
- За один раз можно переносить один диск
- Нельзя класть больший диск на меньший
- Как перенести все диски с одного штыря на другой?
- Перенесем $n-1$ диск на второй стержень
- Перенесем последний диск на третий (пустой) стержень
- Перенесем $n-1$ диск со второго на третий стержень
- Сложность $T(n) = 2T(n-1) + 1 = 4T(n-2) + 2 + 1 = \sum_{s=0}^{n-1} 2^s = 2^n - 1$



Разделяй и властвуй

- Разделим задачу размерности n на t подзадач размерности n/s
- Решим подзадачи размерности n/s
- Объединим результаты решения подзадач

Сортировка слиянием

Algorithm 2: MergeSort(A,p,r)

```
if p < r then
    q = ⌊(p+r)/2⌋;
    MergeSort(A,p,q);
    MergeSort(A,q+1,r);
    Merge(A,p,q,r);
```

Merge(A,p,q,r)

Предполагается, что:

- $p \leq q < r$
- $A[p], \ldots, A[q]$, $A[q+1], \ldots, A[r]$ отсортированы

Процедура осуществляет слияние $A[p], \ldots, A[q]$, $A[q+1], \ldots, A[r]$ в один отсортированный массив $A[p], \ldots, A[r]$

Сложность

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & \text{если } n = 1 \\ 2T(n/2) + \Theta(n), & \text{если } n > 1 \end{cases}$$

$$T(n) = \Theta(n \log n)$$

Как избежать использования вспомогательного массива B?

О пользе быстрых алгоритмов

Сортировка массива из $n = 10^9$ чисел

	Суперкомпьютер	Ноутбук
Производительность, оп/с	10^{10}	10^8
метод	вставками	слиянием
сложность	$\sim 2n^2$ (очень хорошая реализация)	$\sim 50n\log n$ (очень плохая реализация)
время, с	$2\cdot 10^8$	149

- Хорошо реализованные асимптотически медленные алгоритмы могут быть использованы для решения малых подзадач, возникающих в асимптотически быстрых алгоритмах (кодлеты)
- Асимптотически самый быстрый алгоритм зачастую оказывается бесполезным для конкретных практических задач

Рекуррентные соотношения

Сложность решения задачи размерности n

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & n = 1 \\ aT(\lfloor n/b \rfloor) + f(n) & n > 1 \end{cases}$$

- Как найти асимптотическую оценку $T(n)$?
- Целые части обычно (но не всегда!!!) можно игнорировать
- $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow \exists c_1, c_2 > 0, n_0$: для всех $n \geq n_0$

$$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

Метод подстановки

Попытаемся угадать оценку, а затем докажем ее по индукции

$$T(n) = \begin{cases} a & n = 1 \\ 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & n > 1 \end{cases}$$

- Гипотеза: $T(n) \le cn \log_2 n, c > 0$
- Индукционное предположение: $T(n/2) \le c(n/2)\log_2(n/2)$

$$T(n) = 2T(n/2) + n \le 2c(n/2)\log_2(n/2) + n = cn\log_2(n) - cn\log_2 g(2) + n \le cn\log_2(n), c \ge 1$$

- База индукции: $n = 1$ — не работает
- База индукции: $n = 2, n = 3$ — подберем c:
  $T(2) = 2T(1)+2 = 2a+2 \le 2c$, $T(3) = 2T(1)+3 = 2a+3 \le 3c\log_2 3 \Rightarrow c \ge \max(a+1, \frac{2a+3}{3\log_2 3})$

Метод подстановки 2

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$$

- Гипотеза: $T(n) = O(n)$
- Пусть $T(n) \le cn : T(n) \le c\lfloor n/2 \rfloor + c\lceil n/2 \rceil + 1 = cn + 1 \not\Rightarrow T(n) \le cn$
- Усилим гипотезу: $T(n) \le cn - b$

$$T(n) \le c\lfloor n/2 \rfloor - b + c\lceil n/2 \rceil - b + 1 = cn - 2b + 1 \le cn - b, b \ge 1$$

Метод итераций

$$
\begin{aligned}
T(n) =& 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + n = \\
=& n + 3T(\lfloor n/4 \rfloor) = n + 3(\lfloor n/4 \rfloor + 3T(\lfloor n/16 \rfloor) = \\
=& n + 3\lfloor n/4 \rfloor + 9\lfloor n/16 \rfloor + 27T(\lfloor n/64 \rfloor) \le \\
\le& n + 3n/4 + 9n/16 + 27n/64 + \cdots + 3^{\log_4(n)}\Theta(1) \le \\
\le& n\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^i + \Theta(n^{\log_4(3)}) = 4n + o(n) = O(n)
\end{aligned}
$$

Общий метод

Theorem

Пусть $a \geq 1, b > 1, T(n) = aT(n/b) + f(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. *Тогда*

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}), & \text{если } f(n) = O(n^{\log_b a-\epsilon}) \\ \Theta(n^{\log_b a}\log n), & \text{если } f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \\ \Theta(f(n)), & \text{если } f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\epsilon}), \exists n_0 \in \mathbb{N}, d < 1 : \forall n \geq n_0 : af(n/b) \leq df(n) \end{cases}$$

Здесь $n/b = \lfloor n/b \rfloor$ или $n/b = \lceil n/b \rceil$
$n^{\log_b a}$ — число листьев в дереве рекурсии. Тип функции $T(n)$ определяется тем, что является более сложным: решение подзадач, на которые разбивается исходная задача, или “сборка” решения задачи из решений подзадач

Примеры

$$T(n) = 9T(n/3) + n = \Theta(n^2)$$

$a = 9, b = 3, f(n) = n = O(n^{\log_3 9 - 1})$

$$T(n) = T(2n/3) + 1 = \Theta(\log n)$$

$a = 1, b = 3/2, f(n) = 1 = O(n^{\log_{3/2} 1})$

$$T(n) = 3T(n/4) + n \log n = \Theta(n \log n)$$

$a = 3, b = 4, f(n) = n \log n = \Omega(n^{\log_4 3 + 0.2}), af(n/b) = 3(n/4)\log(n/4) \leq (3/4)n \log n = cf(n)$

Доказательство (1): $n = b^i, i \in \mathbb{N}, b > 1, f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$

$$
\begin{aligned}
T(n) =& aT(n/b) + f(n) = f(n) + af(n/b) + a^2 T(n/b^2) = \\
=& f(n) + af(n/b) + a^2 f(n/b^2) + \cdots + a^{\log_b n - 1} f(n/b^{\log_b n - 1}) + a^{\log_b n} T(1) = \\
=& \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} a^j f(n/b^j)}_{g(n)} + \Theta(n^{\log_b a}), k = \log_b n
\end{aligned}
$$

Доказательство (1): $n = b^i, i \in \mathbb{N}, b > 1, f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$

$$\begin{aligned}
T(n) =& aT(n/b) + f(n) = f(n) + af(n/b) + a^2 T(n/b^2) = \\
=& f(n) + af(n/b) + a^2 f(n/b^2) + \cdots + a^{\log_b n - 1} f(n/b^{\log_b n - 1}) + a^{\log_b n} T(1) = \\
=& \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} a^j f(n/b^j)}_{g(n)} + \Theta(n^{\log_b a}), k = \log_b n
\end{aligned}$$

$$f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon}) \Rightarrow f(n) \le cn^\alpha, \alpha = \log_b a - \epsilon \Rightarrow g(n) \le c \sum_{j=0}^{k-1} a^j (n/b^j)^\alpha =$$

$$cn^\alpha \frac{\left(\frac{a}{b^\alpha}\right)^k - 1}{\frac{a}{b^\alpha} - 1} = cn^\alpha \frac{\left(\frac{a}{b^{\log_b a - \epsilon}}\right)^k - 1}{\frac{a}{b^{\log_b a - \epsilon}} - 1} = cn^\alpha \frac{(b^\epsilon)^k - 1}{b^\epsilon - 1} = \frac{c}{b^\epsilon - 1} n^\alpha (n^\epsilon - 1) \le c' n^{\log_b a}$$

Доказательство (1): $n = b^i, i \in \mathbb{N}, b > 1, f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$

$$
\begin{aligned}
T(n) =& aT(n/b) + f(n) = f(n) + af(n/b) + a^2T(n/b^2) = \\
=& f(n) + af(n/b) + a^2 f(n/b^2) + \cdots + a^{\log_b n - 1} f(n/b^{\log_b n - 1}) + a^{\log_b n} T(1) = \\
=& \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} a^j f(n/b^j)}_{g(n)} + \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_b a}), k = \log_b n
\end{aligned}
$$

$$
f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon}) \Rightarrow f(n) \le cn^\alpha, \alpha = \log_b a - \epsilon \Rightarrow g(n) \le c\sum_{j=0}^{k-1} a^j (n/b^j)^\alpha =
$$

$$
cn^\alpha \frac{\left(\frac{a}{b^\alpha}\right)^k - 1}{\frac{a}{b^\alpha} - 1} = cn^\alpha \frac{\left(\frac{a}{b^{\log_b a - \epsilon}}\right)^k - 1}{\frac{a}{b^{\log_b a - \epsilon}} - 1} = cn^\alpha \frac{(b^\epsilon)^k - 1}{b^\epsilon - 1} = \frac{c}{b^\epsilon - 1} n^\alpha (n^\epsilon - 1) \le c' n^{\log_b a}
$$

Доказательство (2): $n = b^i, i \in \mathbb{N}, b > 1, f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

$$T(n) = aT(n/b) + f(n) = \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} a^j f(n/b^j)}_{g(n)} + \Theta(n^{\log_b a}), k = \log_b n$$

Доказательство (2): $n = b^i, i \in \mathbb{N}, b > 1, f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

$$T(n) = aT(n/b) + f(n) = \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} a^j f(n/b^j)}_{g(n)} + \Theta(n^{\log_b a}), k = \log_b n$$

$$f(n) = O(n^\alpha), \alpha = \log_b a \Rightarrow g(n) \leq c \sum_{j=0}^{k-1} a^j \left(\frac{n}{b^j}\right)^\alpha = cn^\alpha \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{a}{b^\alpha}\right)^j = cn^\alpha k = cn^{\log_b a} \log_b n$$

Аналогично $g(n) \geq c' n^{\log_b a} \log_b n \Rightarrow g(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

Доказательство (2): $n = b^i, i \in \mathbb{N}, b > 1, f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

$$T(n) = aT(n/b) + f(n) = \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} a^j f(n/b^j)}_{g(n)} + \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_b a} \log n), k = \log_b n$$

$$f(n) = O(n^\alpha), \alpha = \log_b a \Rightarrow g(n) \le c \sum_{j=0}^{k-1} a^j \left(\frac{n}{b^j}\right)^\alpha = cn^\alpha \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{a}{b^\alpha}\right)^j = cn^\alpha k = cn^{\log_b a} \log_b n$$

Аналогично $g(n) \ge c' n^{\log_b a} \log_b n \Rightarrow g(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

Доказательство (3): $n = b^i, i \in \mathbb{N}, b > 1, f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\epsilon}), af(n/b) \le df(n)$

$$T(n) = aT(n/b) + f(n) = \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} a^j f(n/b^j)}_{g(n)} + \Theta(n^{\log_b a}), k = \log_b n$$

Доказательство (3): $n = b^i, i \in \mathbb{N}, b > 1, f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\epsilon}), af(n/b) \leq df(n)$

$$T(n) = aT(n/b) + f(n) = \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} a^j f(n/b^j)}_{g(n)} + \Theta(n^{\log_b a}), k = \log_b n$$

$$f(n) = \Omega(n^\alpha), \alpha = \log_b a + \epsilon \Rightarrow g(n) \leq c\sum_{j=0}^{k-1} d^j f(n) = cf(n)\frac{d^k - 1}{d - 1} \leq \frac{c}{1-d} f(n)$$

Доказательство (3): $n = b^i, i \in \mathbb{N}, b > 1, f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\epsilon}), af(n/b) \le df(n)$

$$T(n) = aT(n/b) + f(n) = \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} a^j f(n/b^j)}_{g(n)} + \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(f(n)), k = \log_b n$$

$$f(n) = \Omega(n^{\alpha}), \alpha = \log_b a + \epsilon \Rightarrow g(n) \le c\sum_{j=0}^{k-1} d^j f(n) = cf(n)\frac{d^k - 1}{d - 1} \le \frac{c}{1-d} f(n)$$

$$T(n) \ge f(n) \Rightarrow T(n) = \Theta(f(n))$$

Линейные разностные уравнения

$$\sum_{i=0}^{t} b_i a(k+i) = f(k), k \in \mathbb{N}, a(i) = a_i$$

- Аналог дифференциального уравнения
- Общее решение разностного уравнения имеет вид

$$a(k) = a'(k) + \sum_{i=1}^{\tau} \sum_{j=0}^{r_i-1} \lambda_{ij} x_i^k k^j$$

  - $a'(k)$ — частное решение неоднородного уравнения
  - $x_i, 1 \leq i \leq \tau$ — корни характеристического уравнения $\sum_{i=0}^{t} b_i x^i = 0$
  - r_i — кратность корня x_i
  - λ_{ij} — коэффициенты, зависящие от начальных условий

Последовательность Фибоначчи

- $F(k+2) = F(k+1) + F(k), F(0) = F(1) = 1$
- $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$
- Характеристическое уравнение $x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$
- $a(k) = \lambda_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k + \lambda_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = a(0) = 1 \\ \lambda_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \lambda_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) & = a(1) = 1 \end{cases}$$

$\lambda_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}, \lambda_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$

- $F(k) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} \right)$

Алгоритм Евклида

Наибольшим общим делителем двух натуральных чисел $a, b \in \mathbb{N}$ называется наибольшее натуральное число $c = \gcd(a, b)$, такое что $c|a$ и $c|b$

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b)$$

Algorithm 3: Euclid(a,b)

```
if b=0 then
    return a
else
    return
      Euclid(b, a mod b)
```

- Если $a < b$, возникает дополнительный уровень рекурсии для перехода к $Euclid(b, a)$
- Если $a > b \geq 1$ и процедура $Euclid(a, b)$ выполнила $k \geq 1$ рекурсивных вызовов, то $a \geq F(k+1), b \geq F(k)$

  $k = 1 : b \geq 1, a \geq 2$

  Пусть утверждение верно для $k - 1$ рекурсивных вызовов

  $k > 0 \Rightarrow b > 0$. На первом уровне рекурсии получим $b \geq F(k), a \bmod b \geq F(k-1)$

$$b + (a \bmod b) = b + (a - \lfloor a/b \rfloor b) \leq a \Rightarrow a \geq b + (a \bmod b) \geq F(k) + F(k-1) = F(k+1)$$

[Теорема Ламе] Если для $k \in \mathbb{N}$ выполняется $a > b \geq 1, b < F(k)$, то процедура $Euclid(a, b)$ выполняет менее k рекурсивных вызовов

Алгоритм Евклида

Наибольшим общим делителем двух натуральных чисел $a, b \in \mathbb{N}$ называется наибольшее натуральное число $c = \gcd(a, b)$, такое что $c|a$ и $c|b$

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b)$$

Algorithm 4: Euclid(a,b)

```
if b=0 then
    return a
else
    return Euclid(b, a mod b)
```

Сложность $O(\log(\min(a, b)))$

- Если $a < b$, возникает дополнительный уровень рекурсии для перехода к $Euclid(b, a)$
- Если $a > b \geq 1$ и процедура $Euclid(a, b)$ выполнила $k \geq 1$ рекурсивных вызовов, то $a \geq F(k + 1), b \geq F(k)$

  $k = 1 : b \geq 1, a \geq 2$

  Пусть утверждение верно для $k - 1$ рекурсивных вызовов

  $k > 0 \Rightarrow b > 0$. На первом уровне рекурсии получим $b \geq F(k), a \bmod b \geq F(k - 1)$

$$b + (a \bmod b) = b + (a - \lfloor a/b \rfloor b) \leq a \Rightarrow a \geq b + (a \bmod b) \geq F(k) + F(k - 1) = F(k + 1)$$

[Теорема Ламе] Если для $k \in \mathbb{N}$ выполняется $a > b \geq 1, b < F(k)$, то процедура $Euclid(a, b)$ выполняет менее k рекурсивных вызовов

Выводы

- Алгоритмы — строго определенные математические объекты
- Большие задачи можно пытаться свести к маленьким
- Алгоритмы характеризуются их асимптотической сложностью
- Анализ сложности многих алгоритмов сводится к решению рекуррентных уравнений