

Лабораторная работа № 11

Решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методами простых итераций и Зейделя

Цель работы: изучить метод простых итераций и метод Зейделя для решения системы линейных алгебраических уравнений. Написать программу на Си по поиску решения СЛАУ данными методами.

Краткие теоретические сведения

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений классифицируют на прямые (точные) и итерационные. Прямые методы основаны на выполнении конечного числа арифметических операций, например, это метод Гаусса. Суть итерационных методов, в свою очередь, заключается в том, чтобы за счет последовательных приближений получить решение системы, определяемое необходимой точностью.

Итерационные методы характеризуются большими расчетными объемами, что не мешает им быть по своей структуре достаточно простыми. За счет предыдущих приближений мы получаем новые приближения, и, если система удовлетворяет условию сходимости, то эти приближения все меньше и меньше отличаются от аналитического решения.

Для итерационных методов можно выделить три последовательных этапа:

1. Приведение исходной системы вида $\bar{A} \times \bar{x} = \bar{b}$ к итерационной форме $\bar{x} = \bar{C} * \bar{x}^0 + \bar{d}$
2. Проверка условия сходимости.
3. Решение системы одним из методов.

Метод простых итераций

Для общего вида систем должно выполняться тождество $m=n$, где m - количество уравнений в системе, n - количество неизвестных. Т.е. не имеет смысла решать недоопределенные ($m < n$) и переопределенные ($m > n$) системы, т.к. они могут быть сведены путем элементарных алгебраических преобразований к нормальным ($m=n$) системам линейных уравнений. Другими словами, если у вас имеется «ненормальная» система, то прежде, чем использовать метод простых итераций, преобразуйте ее к нормальной.

Система линейных уравнений может быть записана в матричной форме, где A – матрица коэффициентов, b – вектор свободных членов, x – вектор неизвестных.

Возьмем систему:

$$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 8 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 10 \end{cases}$$

Ее матричная форма:

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Первый этап итерационных методов предполагает преобразование исходной системы, а именно матрицы A и вектора b к итерационной форме, где C и d – итерационные формы исходных данных.

Переход к итерационному виду осуществляется по следующим формулам:

$$c_{ij} = -a_{ij}/a_{ii} \quad d_i = b_i/a_{ii}, \text{ где } i, j = 1, 2, 3 \dots$$

Также следует отметить, что, несмотря на эти формулы, диагональные элементы новой матрицы обнуляются, хотя должны быть равны -1.

В итоге для нашей системы должно получиться:

$$\begin{pmatrix} 0 & -0.25 & 0.5 \\ 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.6 & 0.2 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Чтобы система удовлетворила условию сходимости:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^2} < 1$$

Прежде чем следовать этапам итерационных методов, нужно привести исходную систему к виду, в котором все диагональные элементы были бы максимальными по модулю в своих строках. Только при таком виде матрицы коэффициентов можно надеется на выполнение условия сходимости.

Смотрим нашу начальную систему. Видим, что третий элемент третьей строки по модулю больше других. Оставим его неизменным. Меняем местами первую и вторую строки. Теперь умножаем строку, ставшую первой, на -1 и складываем с новой второй. В итоге получаем:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Переходим ко второму этапу: "Проверка условия сходимости" (формулу смотрите выше). Если система не проходит проверку, то приближения не будут сходиться к реальному решению, и ответ получен не будет. В этом случае можно попытаться получить другую "благоприятную" форму. Если условие сходимости выполнено, то стратегия метода простых итераций применима и осуществляется переход к третьему этапу.

В конечном счете, мы получили систему линейных алгебраических уравнений в итерационной форме:

$$\begin{cases} x_1 = 0x_1 - 0.25x_2 + 0.5x_3 + 2 \\ x_2 = 0.2x_1 + 0x_2 + 0.2x_3 + 2 \\ x_3 = 0.6x_1 + 0.2x_2 + 0x_3 - 2 \end{cases}$$

где x_1, x_2, x_3 – приближения, получаемые на текущей итерации за счет приближений полученных на предыдущей итерации - x_1^0, x_2^0, x_3^0 .

Итерационный процесс в методе простых итераций идет до тех пор, пока вектор приближений не достигнет заданной точности, т.е. пока не выполнится условие выхода:

$$\text{Max}|x_i - x_i^0| < \varepsilon, \text{ где } \varepsilon - \text{требуемая точность.}$$

Метод Зейделя

Метод простых итераций и метод Зейделя почти идентичны. Разница лишь в том, что в методе Зейделя расчет вектора приближений на текущей итерации происходит с использованием данных, полученных не только на предыдущей, но и на нынешней итерации. То есть элемент x_1 вычисляется на основе x_2 и x_3 , значения которых, рассчитаны на предыдущей итерации, а следующий элемент x_2 уже вычисляется за счет x_1 , полученного именно на текущей итерации, и x_3 на предыдущей. Другими словами данные в методе Зейделя для расчета вектора X поступают в процесс по мере их вычисления. А в методе простых итераций используются данные, строго полученные на предыдущей итерации.

Это различие говорит нам о том, что метод Зейделя обладает наилучшей сходимостью, нежели метод простых итераций, так как для него характерна тенденция использования приближений, получаемых по ходу процесса, наиболее близких к конечному результату.

Практическая часть

Составить программу на Си по решению системы линейных алгебраических уравнений методами простых итераций и Зейделя в согласии вариантами:

- | | |
|--|---|
| 1 $\begin{cases} 0,12x_1 - 0,43x_2 + 0,14x_3 = -0,17; \\ -0,07x_1 + 0,34x_2 + 0,72x_3 = 0,62; \\ 1,18x_1 - 0,08x_2 - 0,25x_3 = 1,12. \end{cases}$ | 6 $\begin{cases} 2,5x_1 - 3,12x_2 - 4,03x_3 = -7,5; \\ 0,61x_1 + 0,71x_2 - 0,05x_3 = 0,44; \\ -1,03x_1 - 2,05x_2 + 0,87x_3 = -1,16. \end{cases}$ |
| 2 $\begin{cases} 0,14x_1 + 0,24x_2 - 0,84x_3 = 1,11; \\ 1,07x_1 - 0,83x_2 + 0,56x_3 = 0,48; \\ 0,64x_1 + 0,43x_2 - 0,38x_3 = -0,83. \end{cases}$ | 7 $\begin{cases} 0,71x_1 + 0,10x_2 + 0,12x_3 = 0,29; \\ 0,10x_1 + 0,34x_2 - 0,04x_3 = 0,32; \\ 0,12x_1 - 0,04x_2 + 0,10x_3 = -0,10. \end{cases}$ |
| 3 $\begin{cases} 0,66x_1 - 1,44x_2 - 0,18x_3 = 1,83; \\ 0,48x_1 - 0,24x_2 + 0,37x_3 = -0,84; \\ 0,86x_1 + 0,43x_2 + 0,64x_3 = 0,64. \end{cases}$ | 8 $\begin{cases} 1,14x_1 - 2,15x_2 - 5,11x_3 = -4,16; \\ -0,71x_1 + 0,81x_2 - 0,02x_3 = -0,17; \\ 0,42x_1 - 1,13x_2 + 7,05x_3 = 6,15. \end{cases}$ |
| 4 $\begin{cases} 1,6x_1 + 0,12x_2 + 0,57x_3 = 0,18; \\ 0,38x_1 + 0,25x_2 - 0,54x_3 = 0,63; \\ 0,28x_1 + 0,46x_2 - 1,12x_3 = 0,88. \end{cases}$ | 9 $\begin{cases} 3,11x_1 - 1,66x_2 - 0,60x_3 = -0,92; \\ -1,65x_1 + 1,51x_2 - 0,78x_3 = 2,57; \\ 0,60x_1 + 0,78x_2 - 1,87x_3 = 1,65. \end{cases}$ |
| 5 $\begin{cases} 0,10x_1 - 0,04x_2 - 0,13x_3 = -0,15; \\ -0,04x_1 + 0,34x_2 + 0,05x_3 = 0,31; \\ -0,13x_1 + 0,05x_2 + 0,63x_3 = 0,37. \end{cases}$ | 10 $\begin{cases} 0,42x_1 - 1,13x_2 + 7,05x_3 = 6,15; \\ 1,14x_1 - 2,15x_2 + 5,11x_3 = -4,16; \\ -0,71x_1 + 0,81x_2 - 0,02x_3 = -0,17. \end{cases}$ |