

# INSINÖÖRIMATEMATIIKAN VALMENTAVAT OPINNOT HARJOITUSTEHTÄVIÄ

Ulla Miekkala, Kirsi-Maria Rinneheimo, Pia Ruokonen-Kaukolinna, Matti Vaarma

10. elokuuta 2021

\* haastava tehtävä

ratkaistut viimeisessä sivussa

## Yhtälöpari

### Harjoitustehtävät

VIDEO

1. Ratkaise yhtälöpari käyttämällä sijoitusmenetelmää

$$a) \begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$$

$$\vee b) \begin{cases} x + 5y = 1 \\ 3x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = -\frac{12}{73} \\ y = \frac{5}{73} \end{matrix}$$

2. Ratkaise yhtälöpari käyttämällä yhteenlaskukeinoja

VIDEO

$$a) \begin{cases} 10x - 6y = 15 \\ 3x - 4y = -1 \end{cases}$$

VIDEO

$$b) \begin{cases} 2,5x + 4,0y = 6,0 \\ 6,0y = 5,5x - 7,0 \end{cases}$$

3. Ratkaise yhtälöpari

$$\vee a) \begin{cases} 2x = 3y - 5 \\ 5x + 6y = 10 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = 0 \\ y = \frac{5}{3} \end{matrix}$$

$$\vee b) \begin{cases} 8x - 2y = 7 \\ 4x - y = 5 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{ei ole} \\ \text{ratkaistava} \end{matrix}$$

4. Ratkaise yhtälöpari

VIDEO

$$a) \begin{cases} 6,0I_1 - 2,0I_2 = 0 \\ 3,0I_1 + 2,5I_2 + 20,4 = 0 \end{cases}$$

VIDEO

$$b) \begin{cases} F_1 \sin(10,3^\circ) = F_2 \cos(55,2^\circ) \\ F_1 \cos(10,3^\circ) + F_2 \sin(55,2^\circ) = 170,0 \text{ N} \end{cases}$$

\* 5. Ratkaise yhtälöparit

$$\checkmark_a) \begin{cases} 2,6 \text{ m} \cdot F_1 + 1,7 \text{ m} \cdot F_2 = 10,2 \text{ Nm} \\ 1,5 \text{ m} \cdot F_1 + 1,1 \text{ m} \cdot F_2 = 9,3 \text{ Nm} \end{cases}$$

$$F_1 = -15 \text{ Nm}$$

$$F_2 = 20 \text{ Nm}$$

$$\checkmark_b) \begin{cases} \frac{x+1}{6} - \frac{y+1}{2} = 10 \\ \frac{x}{5} - 4y = 12 \end{cases} \quad \begin{aligned} x &= \frac{1060}{77} \\ y &= \frac{2}{77} \end{aligned}$$

VIDEO

6. Varastossa on kahta lajia suodattimia. Tiedot suodattimien yksikköhinnoista ovat kadonneet. On saatu selville, että lokakuun toimituksessa oli ollut 50 kpl A-tyyppin ja 100 kpl B-tyyppin suodattimia ja ne olivat maksaneet yhteensä 454 €. Marraskuun toimituksessa oli puolestaan ollut 30 kpl A-tyyppin ja 40 kpl B-tyyppin suodatinta ja ne olivat maksaneet yhteensä 202 €. Määritä suodattimien yksikköhinnat.

$\checkmark$   
\* 7. Kuntayhtymä järjestää koulutusta sekä omissa että vuokratuissa tiloissa. Vuokratuista tiloista kuntayhtymä maksaa vuokraa 50 €/m<sup>2</sup> kuukaudessa. Omista tiloista on kustannuksia 12 €/m<sup>2</sup> kuukaudessa. Yhteensä tiloja on käytössä 2030 m<sup>2</sup> ja kokonaismenot ovat 42 220 € kuukaudessa. Kuinka monta neliömetriä on omaa ja kuinka monta neliömetriä vuokrattua tilaa? Muodosta tehtävään yhtälö/yhtälöt ja ratkaise.

$$\text{oma} = 470 \text{ m}^2$$

$$\text{vuokrattu} = 1560 \text{ m}^2$$

VIDEO

\* 8. Taina talletti pankkiin 10 000,00 €. Osan hän talletti käyttötilille, jonka vuotuisen korko on 2,00 %. Loput hän talletti talletustilille, jonka korko on 4,25 %. Vuodessa rahasumma kasvoi korkoa 348,50 €. Kuinka paljon hän talletti rahaa kummallekin tilille?

$\checkmark$   
\* 9. Aalto ja Berner haluavat jakaa 3200 €:n urakkasumman siten, että heidän netto-osuutensa ovat yhtä suuret. Mitkä ovat brutto-osuudet, kun Aallon kokonaisveroprosentti on 38 ja Bernerin 43? (netto-osuus = käteen jäävä palkka verojen jälkeen)

$$\text{Aallon brutto on } 1532,77 \text{ €}$$

$$\text{Bernerin brutto on } 1667,23 \text{ €}$$

$$1) b) \begin{cases} x + 5y = 1 \\ 3x + 2y + 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} x &= 1 - 5y \\ 3(1 - 5y) + 2y + 2 &= 0 \\ 3 - 15y + 2y + 2 &= 0 \\ -13y + 2y &= -2 - 3 \\ -12y &= -5 \quad || : -12 \\ y &= \frac{5}{12} \end{aligned} \quad \begin{aligned} x &= 1 - 5\left(\frac{5}{12}\right) \\ x &= 1 - \frac{25}{12} \\ x &= -\frac{11}{12} \end{aligned}$$

$$3) a) \begin{cases} 2x = 3y - 5 \\ 5x + 6y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{3y - 5}{2} \\ x &= \frac{3\left(\frac{3y - 5}{2}\right) - 5}{2} \\ x &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} 5\left(\frac{3y - 5}{2}\right) + 6y &= 10 \\ \frac{15y - 25}{2} + 6y &= 10 \quad || \cdot 2 \\ 15y - 25 + 12y &= 20 \\ 27y + 12y &= 20 + 25 \\ 27y &= 45 \quad || : 27 \\ y &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$b) \begin{cases} 8x - 2y = 7 \\ 4x - y = 5 \quad || \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 8x - 2y &= 7 \\ 8x - 2y &= 10 \quad \neq \text{error!} \end{aligned}$$

$$5) a) \begin{cases} 2,6m \cdot F_1 + 1,7m \cdot F_2 = 10,2Nm \\ 1,5m \cdot F_1 + 1,1m \cdot F_2 = 9,3Nm \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2,6F_1 + 1,7F_2 &= 10,2Nm \\ 1,5F_1 + 1,1F_2 &= 9,3Nm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2,6F_1 &= 10,2Nm - 1,7F_2 \quad || : 2,6 \\ F_1 &= \frac{10,2Nm - 1,7F_2}{2,6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1,5\left(\frac{10,2 - 1,7F_2}{2,6}\right) + 1,1F_2 &= 9,3Nm \\ \frac{15,3 - 2,55F_2}{2,6} + 1,1F_2 &= 9,3 \quad || \cdot 2,6 \\ 15,3 - 2,55F_2 + 2,86F_2 &= 24,18 \\ -2,55F_2 + 2,86F_2 &= 24,18 - 15,3 \end{aligned}$$

$$0,31F_2 = 8,88 \quad || : 0,31$$

$$F_2 \approx 28,6 \approx 29Nm$$

$$F_1 = \frac{10,2Nm - 1,7 \cdot 29}{2,6}$$

$$F_1 \approx -15Nm$$

$$b) \frac{x+1}{6} - \frac{y+1}{2} = 10 \quad || \cdot 6$$

$$\frac{x}{3} - 4y = 72 \quad || \cdot 5$$

$$\begin{aligned} x - 20y &= 60 \\ x &= 60 + 20y \end{aligned}$$

$$\frac{60 + 20y + 1}{6} - \frac{y + 1}{2} = 10 \quad || \cdot 6$$

$$60 + 20y + 1 - 3y - 3 = 60$$

$$20y - 3y = 60 + 3 - 1 - 60$$

$$17y = 2 \quad || : 17$$

$$y = \frac{2}{17}$$

$$x = 60 + 20 \cdot \frac{2}{17}$$

$$x = 60 + \frac{40}{17}$$

$$x = \frac{1060}{17}$$

$$7) \quad \text{Oma} = x$$

$$\text{Vuokratu} = y$$

$$50 \text{ e/m}^2/\text{kk}$$

$$72 \text{ e/m}^2/\text{kk}$$

$$42220 \text{ e}/2030 \text{ m}^2/\text{kk}$$

$$\begin{cases} 50x + 72y = 42220 \text{ e} \\ x + y = 2030 \text{ m}^2 \end{cases}$$

$$y = 2030 - x$$

$$50x + 72(2030 - x) = 42220$$

$$50x + 146160 - 72x = 42220$$

$$-22x = 42220 - 146160$$

$$22x = 103940$$

$$x = 4724.545$$

$$38x = 17852.72$$

$$x = 470 \text{ m}^2$$

$$y = 2030 - 470$$

$$y = 1560 \text{ m}^2$$

9)

$$A_n \text{ netto} = x(1 - 0.38)$$

$$B_n \text{ netto} = y(1 - 0.43)$$

$$x(1 - 0.38) = y(1 - 0.43)$$

$$x + y = 3200$$

$$0.62x = 0.57y$$

$$x = 3200 - y$$

$$0.62(3200 - y) = 0.57y$$

$$1984 - 0.62y = 0.57y$$

$$1984 = 0.57y + 0.62y$$

$$1984 = 1.19y \quad || : 1.19$$

$$y \approx 1667.226891$$

$$\approx 1667.23$$

$$x = 3200 - 1667.226891$$

$$\approx 1532.773109$$

$$\approx 1532.77$$

## VASTAUKSET

1. a)  $\begin{cases} x = -\frac{11}{10} \\ y = \frac{9}{5} \end{cases}$

b)  $\begin{cases} x = -\frac{12}{13} \\ y = \frac{5}{13} \end{cases}$

2. a)  $\begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$

b)  $\begin{cases} x = 1,7 \\ y = 0,42 \end{cases}$

3. a)  $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$

b) ei ratkaisua!

4. a)  $\begin{cases} I_1 = -1,9 \\ I_2 = -5,8 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} F_1 = 137 \text{ N} \\ F_2 = 42,9 \text{ N} \end{cases}$

5. a)  $\begin{cases} F_1 = -15 \text{ N} \\ F_2 = 29 \text{ N} \end{cases}$

b)  $\begin{cases} x = \frac{1060}{17} \\ y = \frac{2}{17} \end{cases}$

6. A-tyyppi 2,04 € ja B-tyyppi 3,52 € .

7. omaa 1560 m<sup>2</sup> ja vuokrattua 470 m<sup>2</sup>

8. KT: 3400 € ja TT: 6600 €

9. Aalto 1533 € ja Berner 1667 €.