

## INSINÖÖRIMATEMATIIKAN VALMENTAVAT OPINNOT

Ulla Miekka, Kirsi-Maria Rinneheimo, Pia Ruokonen-Kaukolinna, Matti Vaarma  
13. syyskuuta 2021

\* haastava tehtävä

### 1. ASTEEN YHTÄLÖ JA KAAVAT HARJOITUSTEHTÄVIÄ

✓ 1. Ratkaise yhtälö

- a)  $24x - 9 = 3 \Leftrightarrow 24x = 3 + 9 \Leftrightarrow 24x = 12 \quad || : 24 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} (=0,5)$
- b)  $3x + 11 = -x + 3 \Leftrightarrow 3x + x = 3 - 11 \Leftrightarrow 4x = -8 \quad || : 4 \Leftrightarrow x = -2$
- c)  $-3,5s + 4,5 = 1,5s \Leftrightarrow 4,5 = 1,5s + 3,5s \Leftrightarrow 4,5 = 5s \quad || : 5 \Leftrightarrow s = 0,9$
- d)  $\frac{k}{2} = \frac{4k}{3} + 1 \Leftrightarrow \frac{3k}{2} - \frac{4k}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{3k}{6} - \frac{8k}{6} = 1 \Leftrightarrow -\frac{5k}{6} = 1 \quad || \cdot \frac{6}{-5} \Leftrightarrow k = -\frac{6}{5} (= -1,2)$
- e)  $\frac{x}{3} + 2 - \frac{x}{6} = -\frac{x}{4} + 1 \Leftrightarrow \frac{4x}{12} - \frac{2x}{12} + \frac{3x}{12} = 1 - 2 \Leftrightarrow \frac{4x}{12} - \frac{2x}{12} + \frac{3x}{12} = -1 \Leftrightarrow \frac{5x}{12} = -1 \quad || \cdot \frac{12}{5} \Leftrightarrow x = -\frac{12}{5} (= -2,4)$

VIDEO

2. Ratkaise yhtälö

- a)  $\frac{x}{6} - 5 = 16$
- b)  $3x + 2\pi \cdot x = 50$
- c)  $\frac{4x-1}{5} = 3 - \frac{x+1}{2}$
- d)  $\frac{2x+5}{3} - \frac{x+6}{2} = \frac{x-8}{6}$

VIDEO

3. Ratkaise yhtälö

- a)  $\frac{x}{6} = \frac{4}{9}$
- b)  $\frac{3m}{19m} = \frac{7m}{l}$
- c)  $\frac{x+50}{x} = \frac{2}{3}$
- d)  $\frac{\frac{x}{6}}{4x-3} = \frac{7}{2(x+1)}$

## VIDEO

## 4. Ratkaise yhtälö

$$a) \cos(23.6^\circ) = \frac{a}{19,2 \text{ m}}$$

$$b) \sin(30^\circ) = \frac{4}{x}$$

$$c) \frac{\sin(37.52^\circ)}{c} = \frac{\sin(69.23^\circ)}{2,73 \text{ km}}$$

## 5. Ratkaise yhtälö

$$a) \frac{3x}{2} - 5 = \frac{7 - 2x}{3}$$

$$b) \frac{2x - 4}{3} = 4 - \frac{9 - x}{5} \quad || \cdot 15 \Leftrightarrow 10x - 20 = 60 - 27 + 3x \Leftrightarrow 10x - 3x = 60 + 20 - 27 \Leftrightarrow 7x = 53 \quad || : 7$$

$$c) \frac{x - 3}{2x} = \frac{3}{8} \quad || \cdot 8x \Leftrightarrow 4x - 12 = 3x \Leftrightarrow 4x - 3x = 12 \Leftrightarrow x = 12$$

$$d) \tan(67^\circ) = \frac{6,3 \text{ cm}}{b} \Leftrightarrow b = \frac{6,3}{\tan(67)} \Leftrightarrow b \approx 2,67 \text{ cm} = 2,7 \text{ cm}$$

## 6. Ratkaise kaavat ilmoitetun suureen suhteen.

$$a) A = 2\pi r h \quad r = ? \quad A = 2\pi r h \quad || : 2\pi h \Leftrightarrow r = \frac{A}{2\pi h} \quad I = \frac{E - U}{R_s}$$

$$b) U = E - R_s I \quad I = ? \quad R_s I = E - U \quad || : R_s \Leftrightarrow I = \frac{E - U}{R_s}$$

$$c) F_1 l_1 + F_2 l_2 = R r \quad l_2 = ? \quad F_2 l_2 = R r - F_1 l_1 \quad || : F_2 \Leftrightarrow l_2 = \frac{R r - F_1 l_1}{F_2}$$

$$d) I = I_0(1 + \lambda t) \quad \lambda = ? \quad I = I_0 + I_0 \lambda t \Leftrightarrow I - I_0 = I_0 \lambda t \quad || : I_0 t \Leftrightarrow \frac{I - I_0}{I_0 t} = \lambda$$

## VIDEO

## 7. Ratkaise kaavat ilmoitetun suureen suhteen.

$$a) v = \frac{s}{t} \quad t = ?$$

$$b) A = \frac{1}{2} a h \quad h = ?$$

$$c) \frac{P_1}{P_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad T_2 = ?$$

$$d) \frac{E}{e} = \frac{R + r}{r} \quad r = ? \quad [*]$$

$$e) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{30} \quad b = ? \quad [*]$$

$$v_k = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2} \quad || \cdot v_1 + v_2$$

$$v_k(v_1+v_2) = 2v_1v_2$$

$$v_k v_1 + v_k v_2 = 2v_1v_2 \quad || : 2v_1$$

$$\frac{v_k v_1 + v_k v_2}{2v_1} = v_2$$

$$v_2 = \frac{47,5 \cdot 35 + 47,5 \cdot v_1}{2 \cdot 35}$$

$$v_2 = \frac{1662,5 + 47,5v_1}{70} \quad || \cdot 70$$

$$70v_2 = 1662,5 + 47,5v_1$$

$$-47,5v_1 + 70v_2 = 1662,5$$

$$22,5v_2 = 1662,5 \quad || : 22,5$$

$$v_2 \approx 73,9 \text{ km/h}$$

- \*8. Kaava  $v_k = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$  antaa keskinopeuden, kun sama matka kuljetaan ensin nopeudella  $v_1$  ja sitten nopeudella  $v_2$ . Ratkaise yhtälöstä paluunopeus  $v_2$  ja laske sen arvo, kun  $v_k = 47,5 \text{ km/h}$  ja  $v_1 = 35,0 \text{ km/h}$
- Vastaus:  $73,9 \text{ km/h}$

## VIDEO 9. Ratkaise yhtälö

- a)  $\frac{1}{2}x^2 = 7$
- b)  $3x^4 = 58 \quad || : 3 \Leftrightarrow x^4 = \frac{58}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{\frac{58}{3}} \approx 2,1$
- c)  $x^3 - 124 = 1$
- d)  $\frac{4,7x^5}{3} = 18,2 \quad || : \frac{4,7}{3} \Leftrightarrow x^5 = \frac{546}{47} \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{\frac{546}{47}} \approx 1,63$

## 10. Ratkaise kaavat (kaavoissa esiintyvät suureet ovat positiivisia).

- a)  $A = \pi r^2 \quad || : \pi \quad r = ? \quad r^2 = \frac{A}{\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$
- b)  $c^2 = a^2 + b^2 \quad b = ? \quad b^2 = c^2 - a^2 \Leftrightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$
- c)  $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad || : \frac{4}{3}\pi \quad r = ? \quad r^3 = \frac{3}{4}\pi V \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3}{4}\pi V}$
- d)  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad a = ?$
- e)  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad \cos \alpha = ?$

## 11. Ratkaise yhtälöt käyttämällä tulon nollasääntöä.

- a)  $x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x=0 \vee x-4=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=4$
- b)  $(5x-1)(x+3) = 0 \Leftrightarrow 5x-1=0 \vee x+3=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{5} \vee x=-3$
- c)  $3x(x+7)(3x-6) = 0$

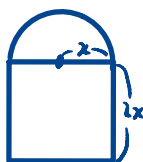
## 12. Kun erääseen lukuun lisätään 17, saadaan alkuperäinen luku nelinkertaisena. Mikä luku on kyseessä? Muodosta tehtävään yhtälö ja ratkaise se.

$$x + 17 = 4x \Leftrightarrow 4x - x = 17 \Leftrightarrow 3x = 17 \quad || : 3 \Leftrightarrow x = \frac{17}{3}$$

## VIDEO 13. Kauppias myönsi pesukoneesta 20,0 % alennuksen. Asiakas sai lisäksi 2,0 % käteisalennuksen, joka annetaan alennetusta hinnasta. Mikä oli koneen alentamaton hinta, kun asiakas maksoi koneesta 411,60 €? Muodosta tehtävään yhtälö ja ratkaise se.

$$*14. p = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$A = \pi \cdot r^2$$



$$p = 5,70 \text{ m} = \frac{2\pi x}{2} + 2x \cdot 3$$

$$5,7 = \pi x + 6x \quad ||: \pi + 6$$

$$x = \frac{5,7}{\pi + 6}$$

$$x \approx 0,1235$$

$$A = \frac{\pi \cdot x^2}{2} + 2x^2$$

$$A = \frac{\pi \cdot 0,1235^2}{2} + (2 \cdot 0,1235)^2$$

$$A \approx 2,115$$

$$\approx 2,17 \text{ m}^2$$

- \*14. Ikkuna-aukon yläosa on muodoltaan puoliympyrä ja alaosa neliö. Aukon ympärysmitta on 5,70 m. Laske ikkuna-aukon pinta-ala. Muodosta tehtävään yhtälö ja ratkaise se.

pinta-ala on  $2,17 \text{ m}^2$

- \*15. Juha, Minna ja Tiia jakoivat 1700 euron palkkion niin, että

$$1700 = x + (x - 100) + (x + 150) \Leftrightarrow 1700 = 3x + 50 \Leftrightarrow -3x = 50 - 1700 \Leftrightarrow -3x = -1650 \quad ||: -3 \Leftrightarrow x = 550 \text{ e}$$

- a) Juha sai 100 euroa enemmän kuin Minna ja 150 euroa vähemmän kuin Tiia. Kuinka paljon kukin sai? Muodosta tehtävään yhtälö ja ratkaise se.

Juha = 550 e

Minna = 450 e

Tiia = 700 e

- b) Juha sai 20 % enemmän kuin Minna ja Tiia sai 15 % vähemmän kuin Minna. Kuinka paljon kukin sai? Muodosta tehtävään yhtälö ja ratkaise se.

- VIDEO** 16. Eräaseen rahastoon sijoitetaan 12 500 € seitsemän vuoden ajaksi. (Mahdollisia veroja ei huomioida).

- a) Kuinka suureksi pääoma kasvaa, jos vuotuinen korkoprosentti on 1,0 %. Muodosta tehtävään yhtälö ja ratkaise se.
- b) Kuinka suuri on vuotuinen korkoprosentti, kun seitsemän vuoden kuluttua rahastosta nostettava summa on kasvanut 18 983 €:ksi? Muodosta tehtävään yhtälö ja ratkaise se.

# VASTAUKSET

- |  |   |
|--|---|
| <p>1. a) <math>x = \frac{1}{2}</math><br/> b) <math>x = -2</math><br/> c) <math>s = 0,9</math><br/> d) <math>k = -\frac{6}{5}</math><br/> e) <math>x = -\frac{12}{5}</math></p> <p>2. a) <math>x = 126</math><br/> b) <math>x = \frac{50}{3 + 2\pi}</math><br/> c) <math>x = \frac{27}{13}</math><br/> d) yhtälö toteutuu kaikilla muuttujan <math>x</math> arvoilla</p> <p>3. a) <math>x = \frac{8}{3}</math><br/> b) <math>l = \frac{133}{3} \text{ m} \approx 44 \text{ m}</math><br/> c) <math>x = -150</math><br/> d) <math>x = \frac{33}{16}</math></p> <p>4. a) <math>a = 17,6 \text{ m}</math><br/> b) <math>x = \frac{4}{\sin(30^\circ)} = 8</math><br/> c) <math>c = 1,78 \text{ km}</math></p> <p>5. a) <math>x = \frac{44}{13}</math><br/> b) <math>x = \frac{53}{7}</math><br/> c) <math>x = 12</math><br/> d) <math>b = 2,7 \text{ cm}</math></p> <p>6. a) <math>r = \frac{A}{2\pi h}</math><br/> b) <math>I = \frac{E - U}{R_s}</math><br/> c) <math>l_2 = \frac{Rr - F_1 l_1}{F_2}</math><br/> d) <math>\lambda = \frac{I - I_0}{I_0 t}</math></p> <p>7. a) <math>t = \frac{s}{v}</math></p> | <p>b) <math>h = \frac{2A}{a}</math><br/> c) <math>T_2 = \frac{P_2 T_1}{P_1}</math><br/> d) <math>r = \frac{Re}{E - e}</math><br/> e) <math>b = \frac{30a}{a - 30}</math></p> <p>8. <math>73,9 \text{ km/h}</math></p> <p>9. a) <math>x = \pm\sqrt{14}</math><br/> b) <math>x = \pm\sqrt[4]{\frac{58}{3}} \approx \pm 2,10</math><br/> c) <math>x = 5</math><br/> d) <math>x \approx 1,63</math></p> <p>10. a) <math>r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}</math><br/> b) <math>b = \sqrt{c^2 - a^2}</math><br/> c) <math>r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}</math><br/> d) <math>a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}</math><br/> e) <math>\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}</math></p> <p>11. a) <math>x = 0 \vee x = 4</math><br/> b) <math>x = \frac{1}{5} \vee x = -3</math><br/> c) <math>x = 0 \vee x = -7 \vee x = 2</math></p> <p>12. <math>\frac{17}{3}</math></p> <p>13. <math>525 \text{ €}</math></p> <p>14. <math>2,17 \text{ m}^2</math></p> <p>15. a) Juha: 550 €, Minna: 450 €, Tiia: 700 €<br/> b) Juha 669 €, Minna: 557 €, Tiia: 474 €</p> <p>16. a) 13 402 €<br/> b) 6,15 %</p> |
|--|---|