DCC638 - Introdução à Lógica Computacional
2023.1

Os Fundamentos: Regras de Inferência

Área de Teoria DCC/UFMG

Introdução

Regras de inferência: Introdução

- Em diversas situações é preciso deduzir **conclusões** a partir de **premissas**:
  1. em matemática: estabelecer verdades absolutas (teoremas),
  2. em ciência da computação: verificar que propriedades de um sistema são satisfeitas dada sua especificação,
  3. em política/filosofia: demonstrar que certas ideias são bem fundamentadas.
- O processo de derivar conclusões de premissas é chamado de **argumento**.

  Um argumento é **válido** se, e somente se, é impossível que suas premissas sejam todas verdadeiras e sua conclusão seja falsa.
- Aqui estudaremos **regras de inferência** que nos permitem derivar argumentos válidos.

Regras de inferência

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Um **argumento** é uma sequência de proposições.

- As proposições iniciais são chamadas de **premissas**.

- A proposição final é chamada de **conclusão**.

- Um **argumento válido** é aquele em que a verdade de suas premissas implica na verdade de sua conclusão.

Argumentos válidos em lógica proposicional

- $\boxed{\text{Exemplo 1}}$ Considere o seguinte argumento envolvendo proposições:

    1. *"Se você está matriculado em Introdução à Lógica Computacional, você tem acesso à página da disciplina."*
    2. *"Você está matriculado em Introdução à Lógica Computacional."*

    Logo,

    3. *"Você tem acesso à página da disciplina."*

    O argumento acima é válido?

    Ou seja, é verdade que a <u>conclusão</u> (3) é verdadeira sempre que as <u>premissas</u> (1) e (2) forem ambas verdadeiras?

Argumentos válidos em lógica proposicional

- $\boxed{\text{Exemplo 1}}$ (Continuação)

  Solução. Vamos analisar a estrutura do argumento.

  Sejam as proposições:

  - p: *"Você está matriculado em Introdução à Lógica Computacional"*, e
  - q: *"Você tem acesso à página da disciplina"*.

  O argumento anterior tem a estrutura

$$\frac{p \qquad p \rightarrow q}{q}$$

  representando que,

  1. se as premissas p e $p \rightarrow q$ são verdadeiras
  2. então a conclusão q é verdadeira

Argumentos válidos em lógica proposicional

- $\boxed{\text{Exemplo 1}}$ (Continuação)

Considerando p e q como variáveis proposicionais, podemos usar uma tabela da verdade para verificar que sempre que as premissas são verdadeiras, a conclusão também é.

		Premissas		**Conclusão**
p	q	p $\rightarrow$ q	p	q
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

Assim, o argumento

$$\frac{p \qquad p \rightarrow q}{q}$$

é válido.

- Note que $(p \wedge p \rightarrow q) \rightarrow q$ é uma tautologia!

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Um argumento válido pode ser interpretada como uma regra de preservação da verdade:
    1. De premissas verdadeiras um argumento válido garante uma conclusão verdadeira.
    2. Por outro lado de premissas falsas qualquer conclusão é possível.

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Um **argumento inválido** é aquele em que a verdade das premissas não garante a verdade da conclusão.

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ Mostre que o argumento a seguir é <u>inválido</u>.

$$\frac{p \to q \qquad q}{p}$$

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Um **argumento inválido** é aquele em que a verdade das premissas não garante a verdade da conclusão.

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ Mostre que o argumento a seguir é <u>inválido</u>.

$$\frac{p \to q \qquad q}{p}$$

Solução.

A terceira linha da tabela da verdade mostra que as premissas $p \to q$ e q podem ser ambas verdadeiros, e mesmo assim a conclusão q ser falsa. Assim, o formato de argumento é inválido.

		Premissas		**Conclusão**
p	q	p → q	q	p
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	F

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Um **argumento inválido** é aquele em que a verdade das premissas não garante a verdade da conclusão.

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ Mostre que o argumento a seguir é inválido.

$$\frac{p \to q \qquad q}{p}$$

Solução.

A terceira linha da tabela da verdade mostra que as premissas $p \to q$ e q podem ser ambas verdadeiros, e mesmo assim a conclusão q ser falsa. Assim, o formato de argumento é inválido.

		Premissas		**Conclusão**
p	q	p → q	q	p
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	F

- Note que $(p \to q \wedge q) \to p$ **não** é uma tautologia!

Argumentos válidos em lógica proposicional

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ (Continuação)

  Como um exemplo de como este formato de argumento é inválido, note que das premissas

  - *"Se Bill Gates ganhar na loteria, ela fica rico"* e
  - *"Bill Gates é rico"*

  não se pode concluir que necessariamente

  - *"Bill Gates ganhou na loteria"*.

Argumentos válidos em lógica proposicional: validade vs. verdade

- A validade é uma propriedade do argumento.
- A verdade é uma propriedade das premissas e conclusões do argumento.
- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$

  Considere o argumento

  "Se a França é um país rico, então sua língua oficial é o inglês."
  "A França é um país rico."
  $\therefore$ *"A lingua oficial da França é o inglês."*

  Este argumento é um argumento válido.

  Note, entretanto, que sua primeira premissa é falsa, assim como sua conclusão é falsa.

Argumentos válidos em lógica proposicional: validade vs. verdade

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ (Continuação)

  Considere o argumento:

  $$\begin{array}{rl} & \textit{“Se Londres é uma metrópole, então ela tem prédios altos.”} \\ & \textit{“Londres tem prédios altos.”} \\ \hline \therefore & \textit{“Londres é uma metrópole.”} \end{array}$$

  Este argumento é um <u>argumento inválido</u>.

  Note, entretanto, que sua <u>conclusão é verdadeira</u>.

  (Porém a veracidade da conclusão é incidental: ela não segue necessariamente da verdade das premissas.)

Argumentos válidos em lógica proposicional: validade vs. verdade

- Em resumo, a conclusão de um argumento é garantidamente verdadeira se:

  1. o argumento for válido, e
  2. todas as suas premissas forem verdadeiras.

  Caso contrário, a verdade da conclusão não é garantida.

Regras de inferência para lógica proposicional

- Argumentos válidos correspondem a tautologias

- Argumentos complexos podem ser difíceis de verificar
  - Por exemplo, a tabela de verdade de um argumento com 10 variáveis tem $2^{10} = 1\,024$ linhas.

- Construímos argumentações complexas com argumentos simples, verificados válidos, chamados de **regras de inferência**.

Regras de inferência para lógica proposicional

- Modus ponens (do latim para "*modo de afirmação*"):

$$\frac{p \qquad p \rightarrow q}{q}\ \mathrm{MP}$$

A regra de modus ponens nos diz que:

1. se uma afirmação condicional $p \rightarrow q$ é verdadeira,

   e

2. a hipótese p do condicional é verdadeira,

   então

3. a conclusão q do condicional é necessariamente verdadeira.

Regras de inferência para lógica proposicional

- $\boxed{\text{Exemplo 4}}$ Suponha que saibamos que

  1. *"Se fizer sol hoje, eu vou ao clube"*,

     e que

  2. *"Está fazendo sol hoje"*,

     então, por modus ponens, podemos concluir que

  3. *"Eu vou ao clube."*

Regras de inferência para lógica proposicional

- Algumas regras de inferência importantes na lógica proposicional:

Nome	Inferência
Modus ponens	$\dfrac{p \qquad p \rightarrow q}{q}\ \mathrm{MP}$
Modus tollens	$\dfrac{p \rightarrow q \qquad \neg q}{\neg p}\ \mathrm{MT}$
Silogismo hipotético	$\dfrac{p \rightarrow q \qquad q \rightarrow r}{p \rightarrow r}\ \mathrm{SH}$
Silogismo disjuntivo	$\dfrac{p \vee q \qquad \neg p}{q}\ \mathrm{SD}$

Nome	Inferência
Adição disjuntiva	$\dfrac{p}{p \vee q}\ \mathrm{AD}$
Simplificação conjuntiva	$\dfrac{p \wedge q}{p}\ \mathrm{SC}$
Adição conjuntiva	$\dfrac{p \qquad q}{p \wedge r}\ \mathrm{AC}$
Resolução	$\dfrac{p \vee q \qquad \neg p \vee r}{q \vee r}\ \mathrm{R}$

Regras de inferência para lógica proposicional

- $\boxed{\text{Exemplo 5}}$ Justifique a validade do argumento abaixo:

  "Se Zeus é humano, então Zeus é mortal.

  Zeus não é mortal.

  Logo, Zeus não é humano."

Regras de inferência para lógica proposicional

- $\boxed{\text{Exemplo 5}}$ Justifique a validade do argumento abaixo:

  "Se Zeus é humano, então Zeus é mortal.

  Zeus não é mortal.

  Logo, Zeus não é humano."

  Solução. Sejam

  - p a proposição *"Zeus é humano"*, e
  - q a proposição *"Zeus é mortal"*.

  O argumento utilizou modus tollens

$$\frac{p \to q \qquad \neg q}{\neg p}\ \mathrm{MT}$$

  para concluir $\neg p$, ou seja, que Zeus não é humano.

Regras de inferência para lógica proposicional

- $\boxed{\text{Exemplo 6}}$ Justifique a validade do argumento abaixo:

  "Se chover hoje, não faremos um pique-nique hoje.

  Se não fizermos um pique-nique hoje, faremos um pique-nique amanhã.

  Logo, se chover hoje, faremos um pique-nique amanhã."

Regras de inferência para lógica proposicional

- $\boxed{\text{Exemplo 6}}$ Justifique a validade do argumento abaixo:

"Se chover hoje, não faremos um pique-nique hoje.

Se não fizermos um pique-nique hoje, faremos um pique-nique amanhã.

Logo, se chover hoje, faremos um pique-nique amanhã."

Solução. Sejam

- p a proposição *"Chove hoje"*,
- q a proposição *"Não faremos um pique-nique hoje"*, e
- r a proposição *"Faremos um pique-nique amanhã"*.

O argumento utilizou silogismo hipotético

$$\frac{p \rightarrow q \qquad q \rightarrow r}{p \rightarrow r}\ \mathrm{SH}$$

para concluir $p \rightarrow r$, i.e., que se chover hoje faremos um pique-nique amanhã.

Usando regras de inferência para construir argumentos

- Quando há várias premissas, várias regras de inferência podem ser necessárias para mostrar que um argumento é válido.

- $\boxed{\text{Exemplo 7}}$ Mostre que as premissas

  a. *"Esta tarde não está ensolarada, e está mais frio hoje que ontem."*
  b. *"Nós vamos nadar somente se estiver ensolarado."*
  c. *"Se nós não formos nadar, vamos andar de canoa."*
  d. *"Se formos andar de canoa, estaremos em casa antes do pôr do sol."*

  levam à conclusão:

  "Estaremos em casa ao pôr do sol."

Usando regras de inferência para construir argumentos

- Exemplo 7 (Continuação)

Solução. Para formalizar os fatos que você sabe, vamos usar as proposições:

- p : *"Esta tarde está ensolarada."*
- q : *"Está mais frio hoje que ontem."*
- r : *"Nós vamos nadar."*
- s : *"Nós vamos andar de canoa."*
- t : *"Estaremos em casa ao pôr do sol."*

Assim, as premissas são:

(a) $\neg p \land q$ (b) $r \rightarrow p$ (c) $\neg r \rightarrow s$ (d) $s \rightarrow t$

E a conclusão é t.

Usando regras de inferência para construir argumentos

- Exemplo 7 (Continuação)

Podemos construir um argumento para mostrar que as premissas levam à conclusão da seguinte forma:

Passo	**Justificativa**
1. $\neg p \wedge q$	Premissa (a)
2. $\neg p$	Simplificação usando (1)
3. $r \to p$	Premissa (b)
4. $\neg r$	Modus tollens usando (2) e (3)
5. $\neg r \to s$	Premissa (c)
6. s	Modus ponens usando (4) e (5)
7. $s \to t$	Premissa (d)
8. t	Modus ponens usando (6) e (7)

Usando regras de inferência para construir argumentos

- $\boxed{\text{Exemplo 8}}$ Ao sair para a universidade de manhã eu percebo que não estou usando meus óculos.

  Ao tentar descobrir onde estão meus óculos, me lembro dos seguintes fatos, que são todos verdadeiros:

  a) Se meus óculos estão na bancada da cozinha, então eu os vi durante o café da manhã.
  b) Eu estava lendo o jornal na sala ou estava lendo o jornal na cozinha.
  c) Se eu estava lendo o jornal na sala, então meus óculos estão na mesinha de centro.
  d) Eu não vi meus óculos durante o café da manhã.
  e) Se eu estava lendo um livro na cama, então meus óculos estão no criado-mudo.
  f) Se eu estava lendo o jornal na cozinha, então meus óculos estão na bancada da cozinha.

  Usando regras de inferência válidas, deduza onde estão meus óculos.

Usando regras de inferência para construir argumentos

- Exemplo 8 (Continuação)

Solução. Para formalizar os fatos que eu sei, vamos usar as proposições:

- p : *"Os meus óculos estão na bancada da cozinha."*
- q : *"Eu vi meus óculos durante café da manhã."*
- r : *"Eu estava lendo o jornal na sala."*
- s : *"Eu estava lendo o jornal na cozinha."*
- t : *"Meus óculos estão na mesinha de centro."*
- u : *"Eu estava lendo um livro na cama."*
- v : *"Meus óculos estão no criado-mudo."*

Assim, os fatos que eu sei são:

(a) $p \to q$
(b) $r \vee s$
(c) $r \to t$
(d) $\neg q$
(e) $u \to v$
(f) $s \to p$

Usando regras de inferência para construir argumentos

- $\boxed{\text{Exemplo 8}}$ (Continuação)

Podemos deduzir onde se encontram meus óculos da seguinte forma.

Passo	**Justificativa**
1. $p \to q$	Premissa (a)
2. $\neg q$	Premissa(d)
3. $\neg p$	Modus tollens usando (1) e (2)
4. $s \to p$	Premissa (f)
5. $\neg s$	Modus tollens usando (3) e (4)
6. $r \vee s$	Premissa (b)
7. r	Silogismo disjuntivo usando (5) e (6)
8. $r \to t$	Premissa (c)
9. t	Modus ponens usando (7) e (8)

Assim podemos concluir que t é verdadeiro, ou seja,

"Os óculos estão na mesinha de centro."

Regras de inferência para proposições quantificadas

- Vamos discutir regras de inferência para proposições quantificadas.
  - Muito usadas em argumentos matemáticos, muitas vezes de forma implícita.

- Regras de inferência importantes para lógica de predicados:

Nome	Inferência	Condição
Instanciação universal	$\dfrac{\forall x.\, P(x)}{P(c)}\ \mathrm{I}\forall$	para qualquer c do domínio do x
Generalização universal	$\dfrac{P(c)}{\forall x.\, P(x)}\ \mathrm{G}\forall$	se c é um elemento arbitrário do domínio
Instanciação existencial	$\dfrac{\exists x.\, P(x)}{P(c)}\ \mathrm{I}\exists$	para algum c do domínio
Generalização existencial	$\dfrac{P(c)}{\exists x.\, P(x)}\ \mathrm{G}\exists$	para algum c do domínio

Regras de inferência para proposições quantificadas

- $\boxed{\text{Exemplo 9}}$ Mostre que as premissas

  a. *"Todos os matriculados em Introdução à Lógica Computacional são estudantes dedicados"*

     e

  b. *"Felipe está matriculado em Introdução à Lógica Computacional"*

     implicam a conclusão

  c. *"Felipe é um estudante dedicado"*

Regras de inferência para proposições quantificadas

- $\boxed{\text{Exemplo 9}}$ Mostre que as premissas

  (a) *"Todos os matriculados em Introdução à Lógica Computacional são estudantes dedicados"*

  e

  (b) *"Felipe está matriculado em Introdução à Lógica Computacional"*

  implicam a conclusão

  (c) *"Felipe é um estudante dedicado"*

  Solução. Vamos definir os seguintes predicados, tendo como domínio o conjunto de todas os estudantes:

  - $M(x)$: *"x está matriculado em Introdução à Lógica Computacional."*
  - $D(x)$: *"x é um estudante dedicado."*

Regras de inferência para proposições quantificadas

- Exemplo 9 (Continuação)

As premissas do argumento são, então:

(a) $\forall x : (\, M(x) \;\rightarrow\; D(x)\,)$

(b) $M(\texttt{Felipe})$

A conclusão do argumento é:

(c) $D(\texttt{Felipe})$

A derivação da conclusão a partir das premissas pode ser feita assim:

Passo	**Justificativa**
1. $\forall x : (\, M(x) \;\rightarrow\; D(x)\,)$	Premissa (a)
2. $M(\texttt{Felipe}) \rightarrow D(\texttt{Felipe})$	Instanciação universal de (1)
3. $M(\texttt{Felipe})$	Premissa (b)
4. $D(\texttt{Felipe})$	Modus ponens usando (2) e (3)

Regras de inferência para proposições quantificadas

- $\boxed{\text{Exemplo 10}}$ Mostre que as premissas

  (a) *"Um estudante de Introdução à Lógica Computacional não leu o livro-texto"*, e

  (b) *"Todos os estudantes de Introdução à Lógica Computacional foram bem na prova"*

  implicam a conclusão

  (c) *"Algum estudante de Introdução à Lógica Computacional que foi bem na prova não leu o livro-texto"*

Regras de inferência para proposições quantificadas

- $\boxed{\text{Exemplo 10}}$ Mostre que as premissas

  (a) *"Um estudante de Introdução à Lógica Computacional não leu o livro-texto"*, e

  (b) *"Todos os estudantes de Introdução à Lógica Computacional foram bem na prova"*

  implicam a conclusão

  (c) *"Algum estudante de Introdução à Lógica Computacional que foi bem na prova não leu o livro-texto"*

Solução. Vamos definir os seguintes predicados, tendo como domínio o conjunto de todas as pessoas:

- $M(x)$: *"x é estudante de Introdução à Lógica Computacional."*
- $L(x)$: *"x leu o livro-texto."*
- $P(x)$: *"x foi bem na prova."*

Regras de inferência para proposições quantificadas

- $\boxed{\text{Exemplo 10}}$ (Continuação)

  As premissas do argumento são, então:

  (a) $\exists x : (\, M(x) \wedge \neg L(x)\,)$

  (b) $\forall x : (\, M(x) \rightarrow P(x)\,)$

  A conclusão do argumento é:

  (c) $\exists x : (\, M(x) \wedge \neg L(x) \wedge P(x)\,)$

Regras de inferência para proposições quantificadas

- $\boxed{\text{Exemplo 10}}$ (Continuação)

A derivação da conclusão a partir das premissas pode ser feita assim:

Passo	**Justificativa**
1. $\exists x : (\, M(x) \,\wedge\, \neg L(x)\,)$	Premissa (a)
2. $M(c) \wedge \neg L(c)$	Instanciação existencial de (1)
3. $\forall x : (\, M(x) \,\rightarrow\, P(x)\,)$	Premissa (b)
4. $M(c) \rightarrow P(c)$	Instanciação universal de (3)
5. $M(c)$	Simplificação conjuntiva de (2)
6. $P(c)$	Modus ponens de (4) e (5)
7. $M(c) \wedge \neg L(x) \wedge P(c)$	Adição conjuntiva de (2) e (6)
8. $\exists x : (\, M(c) \,\wedge\, \neg L(c) \,\wedge\, P(c)\,)$	Generalização existencial de (7)

Combinando regras de inferência para proposições e predicados quantificados

- Como MP e $\text{I}_\forall$ são combinadas com frequência, podemos usar a seguinte regra conhecida como **modus ponens universal**:

$$\frac{\forall x.\, P(x) \rightarrow Q(x) \qquad P(c)}{Q(c)}\ \text{MP}_\forall$$

- $\boxed{\text{Exemplo 11}}$ Assuma que a seguinte premissa seja verdadeira:

  "Para todo inteiro positivo n, se $n > 4$, então $n^2 < 2^n$".

  Sabemos que a proposição "$10 > 4$" é verdadeira.

  Por modus ponens universal, podemos concluir que "$10^2 < 2^{10}$".