

DCC638 - Introdução à Lógica Computacional
2023.1

Estruturas Básicas: Conjuntos

Área de Teoria DCC/UFMG

Introdução

Estruturas Básicas: Introdução

- Aqui vamos estudar algumas estruturas básicas da matemática discreta:
 - conjuntos,
 - funções,
 - sequências.

Conjuntos

Conjuntos: Introdução

- **Conjuntos** são as estruturas discretas fundamentais sobre as quais todas as demais estruturas discretas podem ser construídas.
- A **Teoria dos Conjuntos** é capaz de representar toda a Matemática.

Conceitos básicos como conjunto, pertinência de elementos a um conjunto, o conjunto vazio, operações sobre conjuntos (união, interseção, complemento, ...) podem capturar conceitos como aritmética, lógica, etc.

- Os conceitos que estudaremos aqui são essenciais para diversas áreas, incluindo algumas que estudaremos neste curso:
 - funções,
 - sequências,
 - análise combinatória,
 - relações.

Conjuntos

- Um **conjunto** é uma coleção não-ordenada de objetos bem definidos, denominados **elementos** ou **membros** do conjunto.

Escrevemos

$$a \in A$$

para denotar que o elemento a pertence ao conjunto A .

Escrevemos

$$a \notin A$$

para denotar que o elemento a não pertence ao conjunto A .

- Usamos normalmente letras maiúsculas para denotar conjuntos, e minúsculas para denotar elementos destes conjuntos.

Formas de se definir um conjunto

- Listar seus elementos entre chaves:

$$\textcircled{1} A = \{\text{Ana}, \text{Bia}, \text{Carlos}\}$$

$$\textcircled{2} B = \{a, e, i, o, u\}$$

$$\textcircled{3} C = \{\text{Júpiter}, 2, \pi, \text{Ana}\}$$

$$\textcircled{4} D = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$$

- Especificar uma propriedade que define um conjunto:

$$S = \{x \mid P(x)\}$$

significa que o conjunto S consiste em todos os elementos x que tornem o predicado $P(x)$ verdadeiro.

$$\textcircled{1} E = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$$

$$\textcircled{2} F = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é primo e } x > 431\}$$

$$\textcircled{3} G = \{x \mid \text{a pessoa } x \text{ mora no Brasil}\}$$

Formas de se definir um conjunto

- Usar uma definição indutiva:

❶ O conjunto

$$H = \begin{cases} 1 \in H, \\ \text{se } x \in H \text{ e } x + 2 \leq 10, \text{ então } x + 2 \in H. \end{cases}$$

é o conjunto

$$H = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

(Vamos estudar definições indutivas com muito mais cuidado mais à frente neste curso.)

Formas de se definir um conjunto

- Especificar uma função característica, que retorna 1 para todo elemento que pertence ao conjunto e 0 em caso contrário:

- 1 A função característica

$$\mu_I(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{N} \text{ é primo,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

define o conjunto dos números naturais primos.

- Nem sempre é possível utilizar todos os tipos de definição:

- 1 Não é possível definir o conjunto

$$J = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

listando todos os seus elementos.

(Vamos demonstrar isso mais à frente neste curso.)

Alguns conjuntos importantes

- Alguns conjuntos importantes são:

- 1 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ é o conjunto dos **números naturais**.
- 2 $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ é o conjunto dos **números inteiros**.
- 3 $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ é o conjunto dos **números inteiros positivos**.
- 4 $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, \text{ e } q \neq 0\}$ é o conjunto dos **números racionais**.
- 5 \mathbb{R} é o conjunto dos **números reais**.
- 6 \mathbb{R}^+ é o conjunto dos **números reais positivos**.
- 7 \mathbb{C} é o conjunto dos **números complexos**.

Igualdade de conjuntos

- Dois conjuntos são **iguais** sse eles possuem os mesmos elementos.

Formalmente, para todos conjuntos A e B ,

$$A = B \quad \equiv \quad \forall x : (x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

- A definição de igualdade de conjuntos implica que:
 - A ordem na qual os elementos são listados é irrelevante:
① $\{a, b, c, d\} = \{d, c, b, a\} = \{c, a, d, b\}$
 - Elementos podem aparecer mais de uma vez no conjunto:
① $\{a, a, a, a, b, b, b, c, c, d\} = \{a, b, c, d\}$

Subconjuntos

- Um conjunto A é chamado **subconjunto** de um conjunto B sse cada elemento de A também é um elemento de B .

Usamos $A \subseteq B$ para denotar que A é subconjunto de B .

Formalmente:

$$A \subseteq B \quad \equiv \quad \forall x : (x \in A \rightarrow x \in B).$$

- As frases “ A **está contido** em B ” e “ B **contém** A ” são formas alternativas de dizer que A é um subconjunto de B .
 - 1 O conjunto dos naturais é um subconjunto dos inteiros.
 - 2 O conjunto de brasileiros é um subconjunto do conjunto de brasileiros. (Nada impede que um conjunto seja um subconjunto de si próprio!)
 - 3 O conjunto dos números complexos não é um subconjunto dos números reais.

Subconjuntos próprios

- Um conjunto A é **subconjunto próprio** de um conjunto B sse cada elemento de A está em B e existe pelo menos um elemento de B que não está em A .

Formalmente:

$$\begin{aligned} A \subset B &\equiv \forall x : (x \in A \rightarrow x \in B) \quad \wedge \quad \exists x : (x \in B \wedge x \notin A) \\ &\equiv A \subseteq B \quad \wedge \quad A \neq B. \end{aligned}$$

- 1 O conjunto dos naturais é um subconjunto próprio do conjunto dos inteiros.
- 2 O conjunto dos brasileiros não é um subconjunto próprio dos brasileiros.

Diagramas de Venn

- Se os conjuntos A e B forem representados por regiões no plano, relações entre A e B podem ser representadas por desenhos chamados de **Diagramas de Venn**.
- Exemplo 1 $A \subseteq B$.
- Exemplo 2 $A \not\subseteq B$.
- Diagramas de Venn não podem ser usados como demonstração!

O conjunto vazio

- O **conjunto vazio** ou **conjunto nulo** não contém elementos.

Denotamos o conjunto vazio por $\{\}$ ou \emptyset .

- Note que $\{\emptyset\}$ não denota o conjunto vazio, mas o conjunto cujo único elemento é o conjunto vazio.
- **Teorema:** O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

Demonstração. Seja A um conjunto qualquer. Queremos mostrar que $\emptyset \subseteq A$, o que equivale a mostrar que

$$\forall x : (x \in \emptyset \rightarrow x \in A) .$$

Mas a condicional universal acima é verdade por vacuidade, já que a premissa da implicação é sempre falsa.

Logo $\emptyset \subseteq A$.



A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$:

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.
 - a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.
 - a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.
 - b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$:

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.
 - a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.
 - b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: Falso: \emptyset não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- **Exemplo 3** Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.
 - a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.
 - b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: Falso: \emptyset não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.
 - c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$:

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.

b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: Falso: \emptyset não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.

c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.

b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: Falso: \emptyset não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.

c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.

d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$:

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

- a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.
- b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: Falso: \emptyset não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.
- c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.
- d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$: Verdadeiro: \emptyset é um elemento do conjunto $\{\emptyset\}$.

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

- a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.
- b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: Falso: \emptyset não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.
- c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.
- d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$: Verdadeiro: \emptyset é um elemento do conjunto $\{\emptyset\}$.
- e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$:

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

- a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.
- b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: Falso: \emptyset não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.
- c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.
- d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$: Verdadeiro: \emptyset é um elemento do conjunto $\{\emptyset\}$.
- e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

- a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.
- b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: Falso: \emptyset não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.
- c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.
- d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$: Verdadeiro: \emptyset é um elemento do conjunto $\{\emptyset\}$.
- e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.
- f) $42 \in \mathbb{N}$:

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

- a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.
- b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: Falso: \emptyset não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.
- c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.
- d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$: Verdadeiro: \emptyset é um elemento do conjunto $\{\emptyset\}$.
- e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.
- f) $42 \in \mathbb{N}$: Verdadeiro: 42 é um elemento de \mathbb{N} .

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

- a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.
- b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: Falso: \emptyset não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.
- c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.
- d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$: Verdadeiro: \emptyset é um elemento do conjunto $\{\emptyset\}$.
- e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.
- f) $42 \in \mathbb{N}$: Verdadeiro: 42 é um elemento de \mathbb{N} .
- g) $42 \in \{\mathbb{N}\}$:

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3

 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.
 - a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.
 - b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: Falso: \emptyset não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.
 - c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.
 - d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$: Verdadeiro: \emptyset é um elemento do conjunto $\{\emptyset\}$.
 - e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.
 - f) $42 \in \mathbb{N}$: Verdadeiro: 42 é um elemento de \mathbb{N} .
 - g) $42 \in \{\mathbb{N}\}$: Falso: o único elemento do conjunto $\{\mathbb{N}\}$ é o próprio conjunto \mathbb{N} .

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3

 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.
 - a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.
 - b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: Falso: \emptyset não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.
 - c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.
 - d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$: Verdadeiro: \emptyset é um elemento do conjunto $\{\emptyset\}$.
 - e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.
 - f) $42 \in \mathbb{N}$: Verdadeiro: 42 é um elemento de \mathbb{N} .
 - g) $42 \in \{\mathbb{N}\}$: Falso: o único elemento do conjunto $\{\mathbb{N}\}$ é o próprio conjunto \mathbb{N} .
 - h) $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\}$:

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3

 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.
 - a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.
 - b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: Falso: \emptyset não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.
 - c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.
 - d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$: Verdadeiro: \emptyset é um elemento do conjunto $\{\emptyset\}$.
 - e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.
 - f) $42 \in \mathbb{N}$: Verdadeiro: 42 é um elemento de \mathbb{N} .
 - g) $42 \in \{\mathbb{N}\}$: Falso: o único elemento do conjunto $\{\mathbb{N}\}$ é o próprio conjunto \mathbb{N} .
 - h) $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\}$: Verdadeiro: o conjunto \mathbb{N} é um elemento de $\{\mathbb{N}\}$.

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3

 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.
 - a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.
 - b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: Falso: \emptyset não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.
 - c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.
 - d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$: Verdadeiro: \emptyset é um elemento do conjunto $\{\emptyset\}$.
 - e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.
 - f) $42 \in \mathbb{N}$: Verdadeiro: 42 é um elemento de \mathbb{N} .
 - g) $42 \in \{\mathbb{N}\}$: Falso: o único elemento do conjunto $\{\mathbb{N}\}$ é o próprio conjunto \mathbb{N} .
 - h) $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\}$: Verdadeiro: o conjunto \mathbb{N} é um elemento de $\{\mathbb{N}\}$.
 - i) $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$:

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3

 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.
 - a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.
 - b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: Falso: \emptyset não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.
 - c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.
 - d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$: Verdadeiro: \emptyset é um elemento do conjunto $\{\emptyset\}$.
 - e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.
 - f) $42 \in \mathbb{N}$: Verdadeiro: 42 é um elemento de \mathbb{N} .
 - g) $42 \in \{\mathbb{N}\}$: Falso: o único elemento do conjunto $\{\mathbb{N}\}$ é o próprio conjunto \mathbb{N} .
 - h) $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\}$: Verdadeiro: o conjunto \mathbb{N} é um elemento de $\{\mathbb{N}\}$.
 - i) $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$: Falso: o conjunto \mathbb{N} não é um elemento de \mathbb{Z} .

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- **Exemplo 3** Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.
 - a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.
 - b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: Falso: \emptyset não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.
 - c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.
 - d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$: Verdadeiro: \emptyset é um elemento do conjunto $\{\emptyset\}$.
 - e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.
 - f) $42 \in \mathbb{N}$: Verdadeiro: 42 é um elemento de \mathbb{N} .
 - g) $42 \in \{\mathbb{N}\}$: Falso: o único elemento do conjunto $\{\mathbb{N}\}$ é o próprio conjunto \mathbb{N} .
 - h) $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\}$: Verdadeiro: o conjunto \mathbb{N} é um elemento de $\{\mathbb{N}\}$.
 - i) $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$: Falso: o conjunto \mathbb{N} não é um elemento de \mathbb{Z} .
 - j) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$:

A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3

 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.
 - a) $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.
 - b) $\emptyset \in \{a, b, c\}$: Falso: \emptyset não é um elemento do conjunto $\{a, b, c\}$.
 - c) $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$: Verdadeiro: \emptyset é um elemento do conjunto $\{\emptyset, a, b, c\}$.
 - d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$: Verdadeiro: \emptyset é um elemento do conjunto $\{\emptyset\}$.
 - e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$: Verdadeiro: \emptyset é subconjunto de qualquer conjunto.
 - f) $42 \in \mathbb{N}$: Verdadeiro: 42 é um elemento de \mathbb{N} .
 - g) $42 \in \{\mathbb{N}\}$: Falso: o único elemento do conjunto $\{\mathbb{N}\}$ é o próprio conjunto \mathbb{N} .
 - h) $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\}$: Verdadeiro: o conjunto \mathbb{N} é um elemento de $\{\mathbb{N}\}$.
 - i) $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$: Falso: o conjunto \mathbb{N} não é um elemento de \mathbb{Z} .
 - j) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$: Verdadeiro: o conjunto \mathbb{N} é um subconjunto de \mathbb{Z} .



Conjunto potência

- Dado um conjunto A , o **conjunto potência de A** é o conjunto de todos os subconjuntos de A .

Denotamos por $\mathcal{P}(A)$ o conjunto potência de A .

- Exemplos:

- 1 Dado o conjunto $S = \{x, y, z\}$, seu conjunto potência é

$$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}.$$

- 2 Dado o conjunto vazio \emptyset , seu conjunto potência é

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}.$$

- 3 Dado o conjunto $\{\emptyset\}$, seu conjunto potência é

$$\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

Conjunto potência

- **Teorema:** Se um conjunto finito A tem n elementos, então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.

Demonstração. Para formar um subconjunto S qualquer de A , podemos percorrer cada elemento $a_i \in A$ ($1 \leq i \leq n$), decidindo se $a_i \in S$ ou se $a_i \notin S$.

Como para cada elemento há duas opções (pertence ou não pertence), e há um total de n elementos em A , há 2^n maneiras de se formar um subconjunto S de A .

Logo, $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.



Tuplas ordenadas

- Uma **n -tupla ordenada** (a_1, a_2, \dots, a_n) é uma coleção ordenada de n elementos, em que a_1 é o primeiro elemento, a_2 é o segundo elemento, \dots , e a_n é o n -ésimo elemento.
- Algumas n -tuplas ordenadas recebem nomes especiais:
 - Uma 2-tupla ordenada é chamada de **par ordenado**.
 - Uma 3-tupla ordenada é chamada de **tripla ordenada**.
 - Uma 4-tupla ordenada é chamada de **quádrupla ordenada**.
 - \dots
- Duas n -tuplas ordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) e (y_1, y_2, \dots, y_n) são **iguais** sse

$$x_i = y_i, \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

Produto Cartesiano

- Sejam A e B conjuntos. O **produto cartesiano** de A e B , denotado $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) , onde $a \in A$ e $b \in B$.

Formalmente:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

- Exemplo 4

 Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$.

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

$$A \times A = A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

Note, em geral, que $A \times B \neq B \times A$.



Produto Cartesiano

- Produtos cartesianos podem ser generalizados para mais de dois conjuntos.
- Sejam A_1, A_2, \dots, A_n conjuntos.

O **produto cartesiano** de A_1, A_2, \dots, A_n , denotado

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n,$$

é o conjunto de todas n -tuplas ordenadas (a_1, a_2, \dots, a_n) , onde $a_i \in A_i$ para $i = 1 \dots n$.

Formalmente:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ para } i = 1 \dots n\}$$

- Exemplo 5 Sejam $A = \{0, 1\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{\gamma, \delta\}$.

$$\begin{aligned} A \times B \times C = \{ & (0, a, \gamma), (0, a, \delta), (0, b, \gamma), (0, b, \delta), \\ & (1, a, \gamma), (1, a, \delta), (1, b, \gamma), (1, b, \delta) \} \end{aligned}$$

O tamanho de conjuntos finitos

- Seja A um conjunto finito contendo exatamente n elementos distintos.
Dizemos que a **cardinalidade** (ou **tamanho**) de A é n .
A notação $|A| = n$ indica que o tamanho de A é n elementos.
- Estudaremos a cardinalidade de conjuntos infinitos mais adiante.

Operações em conjuntos

Operações em conjuntos: Introdução

- Dois ou mais conjuntos podem ser combinados de diferentes maneiras.

Por exemplo, dados o conjunto de estudantes de Lógica Computacional e o conjunto de pessoas nascidas em Minas Gerais, podemos definir:

- 1 o conjunto de mineiros que estudam Lógica Computacional,
 - 2 o conjunto de pessoas que são mineiras ou estudam Lógica Computacional,
 - 3 o conjunto de estudantes de Lógica Computacional que não são mineiros,
 - 4 ...
- Aqui estudaremos **operações em conjuntos** que permitem a criação de conjuntos mais complexos a partir de conjuntos mais simples.

Operações em conjuntos

- Sejam A e B subconjuntos do conjunto universo U :

União:	$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$
Alternativamente:	$x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$
Notação:	$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$
Interseção:	$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$
Alternativamente:	$x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$
Notação:	$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$
Diferença:	$A - B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
Alternativamente:	$x \in A - B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$
Complemento:	$\bar{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$
Alternativamente:	$x \in \bar{A} \leftrightarrow x \notin A$

Operações em conjuntos

- **Exemplo 6** Sejam os conjuntos $A = \{1, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 5, 6\}$.

Considere como conjunto universo $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- $B - A = \{2, 6\}$

- $A \cap B = \{1, 5\}$

- $\overline{A} = \{0, 2, 6, 7\}$

- $A - B = \{3, 4\}$

- $\overline{B} = \{0, 3, 4, 7\}$



Operações em conjuntos

- Exemplo 7 Considere uma família de conjuntos definida como

$$A_i = \{0, 1, 2, \dots, i\}$$

para $i = 1, 2, 3, \dots$

Determine:

a) $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$.

b) $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$.

Operações em conjuntos

- Exemplo 7 Considere uma família de conjuntos definida como

$$A_i = \{0, 1, 2, \dots, i\}$$

para $i = 1, 2, 3, \dots$

Determine:

a) $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$.

b) $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$.

Solução.

Primeiro, vamos entender quem é cada conjunto A_i com alguns exemplos.

$$A_0 = \{0\}$$

$$A_1 = \{0, 1\}$$

$$A_2 = \{0, 1, 2\}$$

$$A_3 = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\dots = \dots$$

$$A_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Operações em conjuntos

- Exemplo 7 (Continuação)

Agora podemos verificar o seguinte.

a) $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = \mathbb{N}$

Para ver o porquê, note que $0 \in A_i$ para todo $i = 0, 1, 2, 3, \dots$, logo o número 0 deve estar na união desejada. Além disso, para qualquer inteiro positivo n temos que $n \in A_n$, logo n também deve estar na união desejada.

Assim temos que a união deseja inclui 0 e todos os inteiros positivos, logo esta união é o próprio conjunto \mathbb{N} dos naturais.

b) $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \{0\}$

Para ver o porquê, note que $0 \in A_i$ para todo $i = 0, 1, 2, 3, \dots$, logo o número 0 deve estar na interseção desejada. Além disso, para qualquer inteiro positivo n temos que $n \notin A_{n-1}$, logo n não pode estar na interseção desejada.

Assim temos que a interseção desejada inclui 0, mas não inclui nenhum inteiro positivo, logo esta interseção é o conjunto $\{0\}$.



Igualdade de conjuntos

- Dois conjuntos A e B são iguais se, e somente se, cada elemento de A está em B , e cada elemento de B está em A .
- Uma maneira conveniente de se mostrar que dois conjuntos são iguais é mostrando que cada conjunto é subconjunto do outro.

Formalmente:

$$A = B \quad \equiv \quad \forall x : (x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Teorema: $A = B$ sse $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Demonstração. Escrevendo $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ formalmente:

$$\begin{aligned} A &= B \\ \equiv \quad \forall x : (x \in A \leftrightarrow x \in B) & \quad \text{(definição de igualdade)} \\ \equiv \quad \forall x : ((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)) & \quad \text{(definição de } \leftrightarrow \text{)} \\ \equiv \quad (\forall x : (x \in A \rightarrow x \in B)) \wedge (\forall x : (x \in B \rightarrow x \in A)) & \quad \text{(distributividade de } \forall \text{ sobre } \wedge \text{)} \\ \equiv \quad A \subseteq B \wedge B \subseteq A & \quad \text{(definição de } \subseteq \text{)} \end{aligned}$$



Igualdade de conjuntos

- Exemplo 8 Mostre que $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Solução.

- Método 1: Manipulando a definição dos operadores em conjuntos.

Vamos mostrar que $x \in \overline{(A \cap B)}$ sse $x \in (\bar{A} \cup \bar{B})$:

$$\begin{aligned} x \in \overline{(A \cap B)} &\Leftrightarrow x \notin (A \cap B) && \text{(definição de complemento)} \\ &\Leftrightarrow \neg(x \in (A \cap B)) && \text{(definição de } \notin \text{)} \\ &\Leftrightarrow \neg((x \in A) \wedge (x \in B)) && \text{(definição de interseção)} \\ &\Leftrightarrow \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) && \text{(de Morgan)} \\ &\Leftrightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B) && \text{(definição de } \notin \text{)} \\ &\Leftrightarrow (x \in \bar{A}) \vee (x \in \bar{B}) && \text{(definição de complemento)} \\ &\Leftrightarrow x \in (\bar{A} \cup \bar{B}) && \text{(definição de união)} \end{aligned}$$

Igualdade de conjuntos

- Exemplo 8 (Continuação)

- Método 2: Usando uma **tabela de pertinência**, em que usamos o símbolo 1 para indicar que um elemento pertence a um conjunto, e o símbolo 0 para indicar que ele não pertence.

A tabela abaixo demonstra que um elemento pertence a $\overline{(A \cap B)}$ (quarta coluna) sse ele pertence a $\overline{A} \cup \overline{B}$ (sexta coluna):

A	B	$A \cap B$	$\overline{(A \cap B)}$	\overline{A}	\overline{B}	$\overline{A} \cup \overline{B}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1



Igualdade de conjuntos

- Sejam todos os conjuntos abaixo subconjuntos do conjunto universo U .

Comutatividade	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Associatividade	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Distributividade	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
União e interseção com U	$A \cap U = A$	$A \cup U = U$
Complemento duplo	$\overline{\overline{A}} = A$	
Idempotência	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
De Morgan	$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Absorção	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
Diferença de conjuntos	$A - B = A \cap \overline{B}$	
União e interseção com \emptyset	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
União e interseção com o complemento	$A \cup \overline{A} = U$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$
Complementos de U e \emptyset	$\overline{U} = \emptyset$	$\overline{\emptyset} = U$

Conjuntos disjuntos

- Dois conjuntos são chamados **disjuntos** sse eles não têm nenhum elemento em comum.

Formalmente:

$$A \text{ e } B \text{ são disjuntos} \quad \equiv \quad A \cap B = \emptyset.$$

- Proposição:** Dados dois conjuntos A e B , $(A - B)$ e B são disjuntos.

Demonstração. Por contradição. Suponha que a afirmação seja falsa, ou seja, que existem conjuntos A e B tais que $(A - B) \cap B \neq \emptyset$. Neste caso existe um elemento x tal que $x \in (A - B) \wedge x \in B$. Note que, em particular, isso significa que $x \in B$.

Por outro lado, também teremos $x \in (A - B)$, o que, pela definição de diferença, significa que $x \in A \wedge x \notin B$. Em particular, isso implica que $x \notin B$.

Logo chegamos a uma contradição, uma vez que $x \in B$ e $x \notin B$. Portanto, a proposição deve ser verdadeira. □

Partições de um conjunto

- Os conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n são chamados **mutuamente disjuntos** (ou **disjuntos par-a-par**, ou **sem sobreposição**) sse $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todos $i, j = 1, 2, \dots, n$ e $i \neq j$.
- Uma coleção de conjuntos não vazios $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ é uma **partição** do conjunto A sse
 - (i) $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, e
 - (ii) A_1, A_2, \dots, A_n são mutuamente disjuntos.
- Exemplo 9** Dado o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, algumas partições possíveis são:
 - a) $\{\{2, 3, 5\}, \{1, 4\}\}$,
 - b) $\{\{1\}, \{2, 4, 5\}, \{3\}\}$,
 - c) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$, e
 - d) $\{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}$.
- Exemplo 10** \mathbb{Z} pode ser particionado entre o conjunto dos números pares e o conjunto dos números ímpares.

O Paradoxo de Russell e a Teoria de Conjuntos “Ingênua”

O Paradoxo do Barbeiro

- Vimos que um conjunto pode ser especificado através de uma propriedade que define um conjunto, como em $S = \{x \mid P(x)\}$:

$$\textcircled{1} \quad \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$$

$$\textcircled{2} \quad \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é primo e } x > 431\}$$

- Entretanto, a propriedade $P(x)$ não pode ser uma propriedade qualquer.
- **Paradoxo do Barbeiro:** *“O barbeiro é alguém que barbeia todos aqueles, e apenas aqueles, homens que não se barbeiam sozinhos.”*

A pergunta é: o barbeiro barbeia a si mesmo?

Equivalentemente, seja b o barbeiro e seja B o conjunto de todas as pessoas que o barbeiro b barbeia. Então:

$$b \in B?$$

Paradoxo: $b \in B \leftrightarrow b \notin B$!

O Paradoxo de Russell e a Teoria de Conjuntos “Ingênua”

- O Paradoxo do Barbeiro é um caso especial do problema identificado por Bertrand Russell:

Paradoxo de Russell: Se definirmos S como “o conjunto de todos os conjuntos que não têm a si mesmo como elemento”, ou seja,

$$S = \{A \mid A \text{ é um conjunto e } A \notin A\},$$

como decidir se $S \in S$?

Paradoxo: $S \in S \leftrightarrow S \notin S$!

- Lições:
 - Teoria de Conjuntos “Ingênua” (“*Naïve set theory*”) não pode ser usada sem cuidado.
 - Para isso existem **abordagens axiomáticas**, como a de Zermelo-Fraenkel (“*ZF Set Theory*”).