

DCC638 - Introdução à Lógica Computacional
2023.1

Estruturas Básicas: Funções, Sequências, e Somatórios

Área de Teoria DCC/UFMG

Funções

Funções: Introdução

- Frequentemente temos que atribuir a cada elemento de um conjunto um elemento particular de outro conjunto.

Por exemplo, podemos:

- 1 Atribuir a cada aluno de Introdução à Lógica Computacional uma nota.
 - 2 Atribuir a cada inteiro seu quadrado.
 - 3 Atribuir a cada país seu chefe de Estado.
- O conceito de **função** formaliza este tipo de atribuição.
 - Em matemática e ciência da computação, funções são fundamentais:
 - na definição de estruturas discretas como **sequências** e **strings**,
 - no estudo de complexidade de algoritmos,
 - na produção de algoritmos recursivos,
 - ...

- Sejam A e B conjuntos não-vazios.

Uma **função** f de A para B é uma atribuição de exatamente um elemento de B a cada elemento de A .

Escrevemos

$$f(a) = b$$

se b for o único elemento de B atribuído através de f ao elemento a de A .

Funções

- Se f é uma função de A para B , escrevemos

$$f : A \rightarrow B$$

para denotar o **tipo** da função.

O conjunto A é chamado de **domínio** de f .

O conjunto B é chamado de **co-domínio** ou **contra-domínio** de f .

A **imagem** de f é o conjunto de valores que f pode assumir:

$$\text{imagem de } f = \{b \in B \mid b = f(a) \text{ para algum } a \in A\}$$

A **imagem inversa** de um elemento $b \in B$ é o conjunto de valores $a \in A$ que são mapeados a b via f :

$$\text{imagem inversa de } b = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

Funções: Exemplos

- Exemplo 1 Sejam os conjuntos $A = \{x, y, z\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Seja a função $f : A \rightarrow B$ definida pelo diagrama abaixo.

- Domínio de f : $\{x, y, z\}$
- Co-domínio de f : $\{1, 2, 3, 4\}$
- Imagem de f : $\{2, 4\}$
- $f(x) = 2$
- $f(y) = 4$
- $f(z) = 2$
- Imagem inversa de 1: \emptyset
- Imagem inversa de 2: $\{x, z\}$
- Imagem inversa de 3: \emptyset
- Imagem inversa de 4: $\{y\}$
- A função f pode ser representada como o **conjunto de pares ordenados**:

$$f = \{(x, 2), (y, 4), (z, 2)\}$$



Funções: Exemplos

- Exemplo 2 Outros exemplos de funções:

- Função quadrado $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = x^2 \quad \text{ou} \quad f : x \mapsto x^2$$

- Função sucessor $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$:

$$f(n) = n + 1 \quad \text{ou} \quad f : n \mapsto n + 1$$

- Função constante $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$:

$$f(r) = 2 \quad \text{ou} \quad f : r \mapsto 2$$

- Função líder $f : P \rightarrow H$, onde P é o conjunto de todos os países, H é o conjunto de indivíduos humanos, e

$$f : p \mapsto c, \quad \text{onde } c \text{ é o chefe de Estado do país } p.$$



Igualdade de funções

- Duas funções f e g funções são **iguais** sse elas:
 - têm o mesmo domínio
 - têm o mesmo co-domínio
 - mapeiam cada elemento do domínio ao mesmo elemento do co-domínio.

Formalmente, para duas funções f e g definidas em $A \rightarrow B$:

$$f = g \quad \text{sse} \quad \forall a \in A : f(a) = g(a).$$

- Exemplo 3 Sejam as funções definidas dos reais para os reais não-negativos:

$$f(x) = |x| \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{x^2}.$$

Então $f = g$, pois $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$



Função injetiva

- Uma função $f : A \rightarrow B$ é uma **função injetiva** (ou **injetora** ou **um-para-um**) sse para todos $a_1, a_2 \in A$:

$$a_1 \neq a_2 \rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

ou, equivalentemente,

$$f(a_1) = f(a_2) \rightarrow a_1 = a_2$$

- Intuitivamente, uma função é injetiva se cada elemento do domínio é mapeado em um elemento diferente do co-domínio.

- Exemplo 4 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ em cada caso abaixo. Então:

- $f(x) = x + 1$
é injetiva;

- $f(x) = x/10$
é injetiva;

- $f(x) = x^2$
não é injetiva;



Função sobrejetiva

- Uma função $f : A \rightarrow B$ é uma **função sobrejetiva** (ou **sobrejetora**) sse para todo $b \in B$ é possível achar um $a \in A$ tal que $f(a) = b$.
- Intuitivamente, uma função é sobrejetora se cada elemento do co-domínio é imagem de pelo menos um elemento do domínio.
- Exemplo 5

 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ em cada caso abaixo. Então:
 - $f(x) = x + 1$ é sobrejetiva;
 - $f(x) = x/10$ é sobrejetiva;
 - $f(x) = x^2$ não é sobrejetiva;



Função bijetiva

- Uma função $f : A \rightarrow B$ é uma **função bijetiva** (ou **bijetora**) sse f é injetiva e sobrejetiva.
- Exemplo 6

 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ em cada caso abaixo. Então:
 - $f(x) = x + 1$ é bijetiva, pois é injetiva e sobrejetiva;
 - $f(x) = x/10$ é bijetiva, pois é injetiva e sobrejetiva;
 - $f(x) = 2^x$ não é bijetiva (é injetiva mas não é sobrejetiva);
 - $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ não é bijetiva (é sobrejetiva mas não é injetiva).



Função inversa

- Seja $f : A \rightarrow B$ uma função bijetiva.

A **função inversa** de f é $f^{-1} : B \rightarrow A$ tal que

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{sse} \quad y = f(x)$$

- Exemplo 7** A função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida como $f(x) = x + 1$ é invertível porque ela é bijetiva. Sua inversa é

$$f^{-1}(x) = x - 1$$

- Exemplo 8** A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$ não é invertível porque ela não é bijetiva: $f(2) = f(-2) = 4$, logo $f^{-1}(4)$ não é definido.

Composição de funções

- Sejam $g : A \rightarrow B'$ e $f : B \rightarrow C$ funções tais que a imagem de g é um subconjunto do domínio de f , i.e., $B' \subseteq B$.

A **função composta** de f com g , denotada por $f \circ g : A \rightarrow C$, é definida para todo $a \in A$ da seguinte forma:

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

A função $f \circ g$ é chamada de **composição de f e g** .

Composição de funções

- Exemplo 9 Sejam $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tais que

$$f(n) = n + 1 \quad \text{e} \quad g(n) = n^2.$$

É verdade que $f \circ g = g \circ f$?

Solução. $\forall n \in \mathbb{Z}$ temos que

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(n^2) = n^2 + 1.$$

porém

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n + 1) = (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1,$$

Logo $f \circ g \neq g \circ f$.

- O exemplo acima mostra que a composição de funções não é comutativa.



Composição com a função identidade

- Dado um domínio A , a **função identidade** $\iota_A : A \rightarrow A$ é definida como:

$$\iota_A(a) = a, \quad \forall a \in A.$$

- **Teorema.** Se f é uma função de X para Y , e ι_X é a função identidade em X e ι_Y é a função identidade em Y , então

$$f \circ \iota_X = f$$

$$\iota_Y \circ f = f$$

Demonstração. Exercício para o(a) estudante!

- **Teorema.** Se $f : X \rightarrow Y$ uma função bijetiva com função inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$, então

$$f^{-1} \circ f = \iota_X$$

$$f \circ f^{-1} = \iota_Y$$

Demonstração. Exercício para o(a) estudante!

Funções importantes: Função piso e função teto

- A função **piso** ou **chão** (em inglês, *floor*) atribui a cada número real x o maior número inteiro menor ou igual a ele.

O valor da função piso é denotado por $\lfloor x \rfloor$.

- A função **teto** (em inglês, *ceiling*) atribui a cada número real x o menor número inteiro maior ou igual a ele.

O valor da função teto é denotado por $\lceil x \rceil$.

- Tanto a função piso quanto a função teto têm tipo $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$.

- Exemplo 10

 :

- $$\begin{aligned}\lfloor \pi \rfloor &= 3 \\ \lceil \pi \rceil &= 4\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\lfloor -2.7 \rfloor &= -3 \\ \lceil -2.7 \rceil &= -2\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\lfloor 42 \rfloor &= 42 \\ \lceil 42 \rceil &= 42\end{aligned}$$



Funções importantes: Função piso e função teto

- Algumas propriedades úteis das funções piso e teto:

1. $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$

2. $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$

3. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

- Para demonstrar propriedades sobre funções piso e teto, é útil observar que:

$$x = \lfloor x \rfloor + \varepsilon, \quad \text{para algum } 0 \leq \varepsilon < 1,$$

$$x = \lceil x \rceil - \varepsilon, \quad \text{para algum } 0 \leq \varepsilon < 1.$$

Funções importantes: Função piso e função teto

- Exemplo 11 Vamos demonstrar a propriedade de que $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$.

Demonstração. Vamos representar o número x como $n + \epsilon$, onde $n \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq \epsilon < 1$.

Há dois casos a se considerar, dependendo se $\epsilon = 0$ ou não.

Caso 1: $\epsilon = 0$. Neste caso $x = n$ e $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil = -n$.

Caso 2: $0 < \epsilon < 1$. Primeiramente, note que

$$\begin{aligned}\lfloor -x \rfloor &= \lfloor -(n + \epsilon) \rfloor && \text{(pois } x = n + \epsilon) \\ &= \lfloor -n - \epsilon \rfloor \\ &= -(n + 1) && \text{(pela definição da função piso),}\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}-\lceil x \rceil &= -\lceil n + \epsilon \rceil && \text{(pois } x = n + \epsilon) \\ &= -(n + 1) && \text{(pela definição da função teto),}\end{aligned}$$

de onde concluímos que $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$.



Funções parciais

- Uma **função parcial** f de um conjunto A para um conjunto B atribui a cada elemento a em um subconjunto de A , chamado de **domínio de definição** de f , um único elemento b de B .

Os conjuntos A e B são chamados de **domínio** e **co-domínio** de f , respectivamente.

Dizemos que f é **indefinida** para elementos de A que não estão no domínio de definição de f .

Quando o domínio de definição de f é o próprio domínio A , dizemos que f é uma **função total**.

- Exemplo 12 A função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ onde $f(n) = \sqrt{n}$ é uma função parcial de \mathbb{Z} para \mathbb{R} em que o domínio da definição é o conjunto dos inteiros não-negativos.

A função f é indefinida para os inteiros negativos.



Sequências

Sequências: Introdução

- **Sequências** são listas ordenadas de elementos.
- Sequências são estruturas discretas que aparecem com frequência em ciência da computação:
 - 1 progressão aritmética,
 - 2 progressão geométrica,
 - 3 strings,
 - 4 ...
- Nesta seção vamos estudar como definir sequências, e como encontrar regras para geração de sequências.

Sequências

- Uma sequência é uma estrutura utilizada para representar uma lista ordenada.

Formalmente, uma **sequência** é uma função definida de um subconjunto dos inteiros para um conjunto arbitrário S .

Normalmente o domínio de uma sequência são os naturais ou os inteiros positivos, mas qualquer subconjunto dos inteiros pode ser usado como domínio.

- Usamos a_n para denotar a imagem do inteiro n .

Cada a_n é chamado de um **termo** da sequência.

A sequência como um todo é frequentemente denotada como $\{a_n\}$.

- Exemplos:

- ① A sequência (infinita) dos números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...
- ② A sequência (infinita) de $1/n$, para n inteiro positivo: 1, $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, $1/6$, ...
- ③ A sequência (finita) de dias da semana: domingo, segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado.

Sequências importantes

- Uma **progressão aritmética** é uma sequência da forma

$$a, \quad a + d, \quad a + 2d, \quad a + 3d, \quad \dots, \quad a + nd, \quad \dots$$

onde o **termo inicial** a e a **diferença comum** d são números reais.

- Exemplo 13 A sequência $\{a_n\}$ com

$$a_n = -1 + 4n$$

é uma progressão aritmética com:

- termo inicial: -1
- diferença comum: 4

Seus termos iniciais $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ são:

$$-1, \quad 3, \quad 7, \quad 11, \quad 15, \quad 19, \quad \dots$$

Sequências importantes

- Uma **progressão geométrica** é uma sequência da forma

$$a, \quad ar, \quad ar^2, \quad ar^3, \quad \dots, \quad ar^n, \quad \dots$$

onde o **termo inicial** a e a **razão** r são números reais.

- Exemplo 14 A sequência $\{g_n\}$ com

$$g_n = 6 \cdot (1/3)^n$$

é uma progressão geométrica com:

- termo inicial: 6
- razão: $1/3$

Seus termos iniciais $g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, \dots$ são:

$$6, \quad 2, \quad 2/3, \quad 2/9, \quad 2/27, \quad 2/81, \quad \dots$$



Fórmulas explícitas para sequências

- Uma **fórmula explícita** define como obter o n -ésimo termo de uma sequência diretamente em função de n .

Uma mesma sequência pode ser definida por mais de uma fórmula explícita.

- Exemplo 15 A sequência

$$1, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \dots, \quad \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad \dots$$

pode ser definida como uma função dos naturais para os reais:

$$0 \mapsto 1 \quad 1 \mapsto -\frac{1}{2} \quad 2 \mapsto \frac{1}{3} \quad 3 \mapsto -\frac{1}{4} \quad \dots \quad n \mapsto \frac{(-1)^n}{n+1} \quad \dots$$

Formalmente, a sequência pode ser descrita por $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, onde

$$f(n) = \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

Fórmulas explícitas para sequências

- Exemplo 15 (Continuação)

A mesma sequência pode ser definida como uma função dos inteiros positivos para os reais:

$$1 \mapsto 1 \quad 2 \mapsto -\frac{1}{2} \quad 3 \mapsto \frac{1}{3} \quad 4 \mapsto -\frac{1}{4} \quad \dots \quad n \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \dots$$

Formalmente, a sequência pode ser descrita por $g : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, onde

$$g(n) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$



Definindo uma sequência a partir de seus termos

- Um problema comum é, dados alguns termos iniciais de uma sequência, determinar uma regra para gerar a sequência como um todo.
- Maneiras típicas de se definir uma sequência são:
 - Prover uma fórmula explícita para cada termo da sequência.
 - Prover um algoritmo que gere a sequência.
 - Prover uma fórmula recursiva para cada termo da sequência.
- É importante notar que, dado um número limitado de termos

$$a_1, a_2, \dots, a_i$$

de uma sequência, podemos achar uma regra que gere estes termos, mas esta regra é garantida apenas para os termos a_1, a_2, \dots, a_i apresentados.

Nada garante que a fórmula ou algoritmo valha para a_{i+1} , ou para a sequência como um todo!

Definindo uma sequência a partir de seus termos

- Exemplo 16 Seja a sequência cujos 5 primeiros termos são:

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5.$$

A fórmula

$$a_n = n, \quad \text{para } n \geq 1$$

gera estes 5 termos corretamente, e prevê que

$$a_6 = 6.$$

Por outro lado, o algoritmo

“Gere todos os naturais cujo resto da divisão por 10 está entre 1 e 5”

também gera estes mesmos cinco termos, e prevê que

$$a_6 = 11.$$

As duas descrições concordam para todos os termos dados, mas geram sequências diferentes. Apenas com as informações dadas não há como dizer qual sequência é mais apropriada.



Provendo uma fórmula explícita para a sequência

- **Exemplo 17** Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ cujos 10 primeiros termos são:

1, 7, 25, 79, 241, 727, 2185, 6559, 19681, 59047.

Provendo uma fórmula explícita para a sequência

- Exemplo 17 Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ cujos 10 primeiros termos são:

1, 7, 25, 79, 241, 727, 2185, 6559, 19681, 59047.

Solução.

A seguinte fórmula explícita pode gerar os 10 primeiros termos desta sequência:

$$a_n = 3^n - 2, \quad \text{para inteiros } n \geq 1.$$



Provendo uma fórmula explícita para a sequência

- Exemplo 18 Encontre uma fórmula explícita para a sequência $\{a_n\}$ cujos 10 primeiros termos são:

$$1, \quad -2, \quad 3, \quad -4, \quad 5, \quad -6, \quad 7, \quad -8, \quad 9, \quad -10.$$

Solução.

Esta é uma **sequência alternante**, ou seja, cada termo a_n possui sinal oposto ao do termo a_{n-1} .

A seguinte fórmula explícita pode gerar os 10 primeiros termos desta sequência:

$$a_n = (-1)^{n+1} n, \quad \text{para inteiros } n \geq 1.$$



Provendo um algoritmo para gerar a sequência

- Exemplo 19 Como produzir os termos de uma sequência cujos 10 primeiros termos são:

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4?

Solução.

Uma possível maneira é seguir o algoritmo seguinte:

“Começando de 1, em ordem crescente, cada natural n é repetido n vezes na sequência.”



Provendo uma algoritmo para gerar a sequência

- Exemplo 20 Como produzir os termos de uma sequência cujos 16 primeiros termos são:

0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0?

Solução.

Uma possível maneira é seguir o algoritmo seguinte:

“Para cada natural $n \geq 1$, em ordem crescente, adicione à sequência n termos 0, seguidos de n termos 1.”

Desafio: Você consegue encontrar uma fórmula explícita para esta mesma sequência?



Provendo uma fórmula recursiva para gerar a sequência

- Uma **fórmula recursiva** para uma sequência define cada termo em função de termos anteriores.

Definições recursivas são baseadas em relações de recorrência.

- Uma **relação de recorrência** para uma sequência $\{a_n\}$ é uma equação que expressa a_n em termos de um ou mais termos prévios na sequência (i.e., a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) para cada $n \geq n_0$, onde n_0 é um inteiro não-negativo.

Provendo uma fórmula recursiva para gerar a sequência

- Exemplo 21 A sequência

1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5 040, 40 320, 362 880, ...

pode ser definida pela fórmula explícita

$$a_n = n!, \quad n \geq 0,$$

ou pela fórmula recursiva

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_n = n \cdot a_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

- Por enquanto vamos nos focar em fórmulas explícitas e algoritmos. Fórmulas recursivas serão estudadas em profundidade mais no curso de **Matemática Discreta**.

Somatórios e Produtórios

Somatórios

- Muitas vezes estamos interessados na soma ou no produto de todos os termos de uma sequência.
- Seja uma sequência $\{a_k\}$. O **somatório** dos termos

$$a_m, \quad a_{m+1}, \quad a_{m+2}, \quad \dots, \quad a_n$$

de $\{a_k\}$ é a soma

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n.$$

Para representação do somatório, usamos o **símbolo de somatório** Σ :

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n.$$

Somatórios

- Exemplo 22 Seja a sequência $\{a_k\}$ em que $a_k = k^2$.

$$\sum_{k=3}^6 a_k = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 9 + 16 + 25 + 36 = 86$$

- Uma notação alternativa para somatórios é

$$\sum_{s \in S} f(s),$$

em que S é um conjunto de domínio e f é uma função com domínio S .

- Exemplo 23

$$\sum_{s \in \{0,3,7\}} s^2 = 0^2 + 3^2 + 7^2 = 0 + 9 + 49 = 58.$$

Variáveis ligadas e livres em um somatório

- A **variável ligada** de um somatório é a variável sob a qual os termos do somatório são definidos.

As demais variáveis são chamadas de **variáveis livres**.

- Exemplo 24 Em

$$\sum_{i=1}^n (i - 1)$$

i é a variável ligada; n é uma variável livre.

- Exemplo 25 Em

$$\sum_{k=m}^n k^2$$

k é a variável ligada; m e n são variáveis livres.

Mudança de variável em um somatório

- A variável ligada não é relevante:
trocar a variável ligada não altera o valor do somatório.

- Exemplo 26

$$\sum_{i=1}^n \frac{(i+1)}{i} = \sum_{j=1}^n \frac{(j+1)}{j} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{(\alpha+1)}{\alpha}$$

- Variáveis livres são relevantes:
trocar uma variável livre pode alterar o valor do somatório.

- Exemplo 27 Os somatórios abaixo são distintos, pois se $m \neq n$, eles darão valores diferentes.

$$\sum_{i=1}^n \frac{(i+1)}{i} \neq \sum_{i=1}^m \frac{(i+1)}{i}$$

Mudança de variável em um somatório

- Dois somatórios são **idênticos** sse eles possuem termos idênticos.

- Exemplo 28

$$\sum_{j=2}^4 (j-1)^2 = \sum_{k=1}^3 k^2,$$

pois

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^4 (j-1)^2 &= (2-1)^2 + (3-1)^2 + (4-1)^2 \\ &= 1^2 + 2^2 + 3^2\end{aligned}$$

e

$$\sum_{k=1}^3 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2$$

Mudança de variável em um somatório

- Exemplo 29 Substitua $k + 1$ na soma abaixo por j :

$$\sum_{k=0}^6 \frac{1}{k+1}$$

Passos:

1. Calcule os novos limites do somatório: $\begin{cases} \text{Para } k = 0, & j = 0 + 1 = 1 \\ \text{Para } k = 6, & j = 6 + 1 = 7 \end{cases}$
2. Calcule o termo geral:

Como $j = k + 1$, então $k = j - 1$. Logo,

$$\frac{1}{k+1} = \frac{1}{(j-1)+1} = \frac{1}{j}$$

A soma pode ser reescrita como

$$\sum_{k=0}^6 \frac{1}{k+1} = \sum_{j=1}^7 \frac{1}{j}.$$

Produtórios

- Seja uma sequência $\{a_k\}$. O **produtório** dos termos

$$a_m, \quad a_{m+1}, \quad a_{m+2}, \quad \dots, \quad a_n$$

de $\{a_k\}$ é o produto

$$a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \dots \cdot a_n.$$

Para representação do produtório, usamos o **símbolo de produtório** \prod :

$$\prod_{i=m}^n a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \dots \cdot a_n.$$

- Exemplo 30

 $\prod_{i=1}^3 i^i = 1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 = 1 \cdot 4 \cdot 27 = 108$

- As definições de **variável ligada** e **variáveis livres** para somatórios também se aplicam a produtórios.

Propriedades de somatórios e produtórios

- Dadas duas sequências de números reais

$$a_m, \quad a_{m+1}, \quad a_{m+2}, \quad \dots,$$

$$b_m, \quad b_{m+1}, \quad b_{m+2}, \quad \dots,$$

e seja c é um número real qualquer.

Então as seguintes equações são válidas para qualquer $n \geq m$:

$$\textcircled{1} \quad \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k = \sum_{k=m}^n (a_k + b_k)$$

$$\textcircled{2} \quad c \cdot \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^n c \cdot a_k$$

$$\textcircled{3} \quad \left(\prod_{k=m}^n a_k \right) \cdot \left(\prod_{k=m}^n b_k \right) = \prod_{k=m}^n (a_k \cdot b_k)$$