DCC638 - Introdução à Lógica Computacional
2023.2

Lógica Proposicional: Satisfatibilidade

Área de Teoria DCC/UFMG

Satisfatibilidade

Satisfatibilidade

- Um fórmula é **satisfatível** quando existe uma atribuição de valores de verdade a suas variáveis que torna a expressão verdadeira.
  - Se tal atribuição de valores não existe, a fórmula é **insatisfatível**.
  - O problema de determinar se uma fórmula é satisfatível é chamado de **problema de satisfatibilidade (SAT)**.

- Note que uma fórmula é insatisfatível quando ela é uma contradição.

Satisfatibilidade

- A atribuição de valores às variáveis que torna a fórmula verdadeira é chamada de **solução** do problema SAT em questão.

- Para mostrar que uma expressão é satisfatível basta encontrar uma solução.
  - Já para mostrar insatisfatibilidade, temos que mostrar que *não existe solução*.
  - Podemos fazer isso usando tabelas da verdade, mas isto é trabalhoso.

Satisfatibilidade

- $\boxed{\text{Exemplo 1}}$ Determine se cada uma das expressões abaixo é satisfatível.

  1. $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$
  2. $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$
  3. $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (p \oplus r)$

Solução.

1. $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$ é

Satisfatibilidade

- $\boxed{\text{Exemplo 1}}$ Determine se cada uma das expressões abaixo é satisfatível.

  1. $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$
  2. $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$
  3. $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (p \oplus r)$

Solução.

1. $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$ é <u>satisfatível</u>: a atribuição $p = T$, $q = T$, $r = T$ é uma solução que torna a expressão verdadeira.
2. $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ é

Satisfatibilidade

- Exemplo 1 Determine se cada uma das expressões abaixo é satisfatível.

  1. $(p \lor \neg q) \land (q \lor \neg r) \land (r \lor \neg p)$
  2. $(p \lor q \lor r) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg r)$
  3. $(p \leftrightarrow q) \land (q \leftrightarrow r) \land (p \oplus r)$

Solução.

1. $(p \lor \neg q) \land (q \lor \neg r) \land (r \lor \neg p)$ é satisfatível: a atribuição $p = T$, $q = T$, $r = T$ é uma solução que torna a expressão verdadeira.
2. $(p \lor q \lor r) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg r)$ é satisfatível: a atribuição $p = T$, $q = F$, $r = F$ é uma solução que torna a expressão verdadeira.
3. $(p \leftrightarrow q) \land (q \leftrightarrow r) \land (p \oplus r)$ é

Satisfatibilidade

- Exemplo 1 Determine se cada uma das expressões abaixo é satisfatível.

1. $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$
2. $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$
3. $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (p \oplus r)$

Solução.

1. $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$ é satisfatível: a atribuição $p = T$, $q = T$, $r = T$ é uma solução que torna a expressão verdadeira.
2. $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ é satisfatível: a atribuição $p = T$, $q = F$, $r = F$ é uma solução que torna a expressão verdadeira.
3. $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (p \oplus r)$ é instatisfazível: uma tabela da verdade mostra que nenhuma atribuição de valores a p, q, r torna a expressão verdadeira.

   Ou: note que a fórmula não tem solução porque ela exige que p e q tenham o mesmo valor de verdade ($p \leftrightarrow q$), assim como q e r ($q \leftrightarrow r$), mas também exige que p e r tenham valores diferentes ($p \oplus r$), o que é absurdo.

O problema das n rainhas

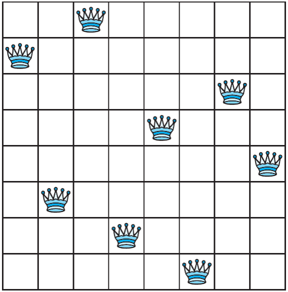
Satisfatibilidade: Aplicações

- Muitos problemas em ciência da computação (robótica, inteligência artificial, visão computacional, ...) e em outras áreas (genética, planejamento de cronogramas, ...) podem ser modelados como problemas de satisfatibilidade.

- Exemplo 2 **O problema da n rainhas.** O problema consiste em posicionar n rainhas em um tabuleiro de xadrez de tamanho $n \times n$ sem que nenhuma rainha possa "atacar" outra rainha.

Isso quer dizer que não pode haver duas rainhas posicionadas em uma mesma linha, em uma mesma coluna, ou em uma mesma diagonal.

Por exemplo, uma solução para o problema quando há $n = 8$ rainhas é dada ao lado.



Satisfatibilidade: Aplicações

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ (Continuação)

Podemos modelar o problema das n rainhas como um problema de satisfatibilidade como a seguir.

Sejam n^2 variáveis $p(i,j)$, com

- $i = 1, 2, \ldots, n$
- $j = 1, 2, \ldots, n$.

Dada uma configuração do tabuleiro:

$$p(i,j) = \begin{cases} \text{T}, & \text{se há uma rainha na linha } i \text{ e coluna } j \text{, e} \\ \text{F}, & \text{se não há uma rainha na linha } i \text{ e coluna } j. \end{cases}$$

No exemplo anterior, temos que

1. $p(2,1) = T$
2. $p(6,2) = T$
3. $\ldots$
4. $p(1,1) = F$
5. $p(1,2) = F$
6. $\ldots$

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ (Continuação)

  Uma questão central do problema é identificar quando duas casas do tabuleiro estão na mesma diagonal.

  Note que dizer que duas casas (i, j) e (i', j') estão na mesma digonal significa dizer que para ir da casa (i, j) à casa (i', j') precisamos mover o mesmo número de casas na vertical (linhas) e na horizontal (colunas).

  Em outras palavras, (i, j) e (i', j') estão na mesma diagonal se a distância entre as linhas e as colunas de (i, j) e (i', j') for a mesma:

$$
\begin{aligned}
& i - i' = j - j' && \text{ou} \\
& i - i' = -(j - j') \ .
\end{aligned}
$$

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ (Continuação)

  Agora estamos prontos para verificar as condições necessárias para o problema ter solução:

  - Há pelo menos uma rainha em cada linha:

$$Q_1 : \quad \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{n} p(i,j)$$

Por exemplo, no caso de um tabuleiro 3×3, a condição acima equivale a:

$$\begin{aligned} Q_1 : & (p(1,1) \lor p(1,2) \lor p(1,3)) \land \\ & (p(2,1) \lor p(2,2) \lor p(2,3)) \land \\ & (p(3,1) \lor p(3,2) \lor p(3,3)) \end{aligned}$$

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ (Continuação)

  Note que, para o problema ter solução, as seguintes condições têm que ser satisfeitas:

  - Há no máximo uma rainha em cada linha:

$$Q_2 : \quad \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n-1} \bigwedge_{k=j+1}^{n} (p(i,j) \rightarrow \neg p(i,k))$$

Por exemplo, no caso de um tabuleiro 3×3, a condição acima equivale a:

$$\begin{aligned} Q_2 : &((p(1,1) \rightarrow \neg p(1,2)) \wedge (p(1,1) \rightarrow \neg p(1,3)) \wedge (p(1,2) \rightarrow \neg p(1,3))) \wedge \\ &((p(2,1) \rightarrow \neg p(2,2)) \wedge (p(2,1) \rightarrow \neg p(2,3)) \wedge (p(2,2) \rightarrow \neg p(2,3))) \wedge \\ &((p(3,1) \rightarrow \neg p(3,2)) \wedge (p(3,1) \rightarrow \neg p(3,3)) \wedge (p(3,2) \rightarrow \neg p(3,3))) \end{aligned}$$

Satisfatibilidade: Aplicações

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ (Continuação)

  Note que, para o problema ter solução, as seguintes condições têm que ser satisfeitas:

  - Há no máximo uma rainha em cada coluna:

$$Q_3: \quad \bigwedge_{j=1}^{n} \bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{k=i+1}^{n} (p(i,j) \rightarrow \neg p(k,j))$$

  Por exemplo, no caso de um tabuleiro 3×3, a condição acima equivale a:

$$\begin{aligned} Q_3 : & ((p(1,1) \rightarrow \neg p(2,1)) \wedge (p(1,1) \rightarrow \neg p(3,1)) \wedge (p(2,1) \rightarrow \neg p(3,1))) \wedge \\ & ((p(1,2) \rightarrow \neg p(2,2)) \wedge (p(1,2) \rightarrow \neg p(3,2)) \wedge (p(2,2) \rightarrow \neg p(3,2))) \wedge \\ & ((p(1,3) \rightarrow \neg p(2,3)) \wedge (p(1,3) \rightarrow \neg p(3,3)) \wedge (p(2,3) \rightarrow \neg p(3,3))) \end{aligned}$$

  (Note que Q_3 e Q_1 (toda linha contém pelo menos uma rainha) juntas implicam que cada coluna contém pelo menos uma rainha.)

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ (Continuação)

  Note que, para o problema ter solução, as seguintes condições têm que ser satisfeitas:

  - Nenhuma diagonal contém duas rainhas:

$$Q_4 : \quad \bigwedge_{i=2}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n-1} \bigwedge_{k=1}^{\min(i-1,n-j)} (p(i,j) \to \neg p(i-k, k+j))$$

$$Q_5 : \quad \bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{j=1}^{n-1} \bigwedge_{k=1}^{\min(n-i,n-j)} (p(i,j) \to \neg p(i+k, j+k))$$

  (Encontrar a expansão das condições acima para o caso de um tabuleiro 3×3 fica como dever de casa!)