# DCC638 - Introdução à Lógica Computacional 2023.2

Lógica Proposicional: Aplicações, Equivalências

Área de Teoria DCC/UFMG

# Aplicações da Lógica Proposicional

### Aplicações da lógica proposicional: Introdução

- A lógica tem importantes aplicações na matemática, ciência da computação, e diversas outras disciplinas:
  - tradução de sentenças em linguagem natural, frequentemente ambíguas, para uma linguagem precisa,
  - 2 especificação de circuitos lógicos,
  - o solução de quebra-cabeças (o que é essencial para inteligência artificial),
  - automatização do processo de construção de demonstrações matemáticas,
  - **⑤** ...
- Nesta seção vamos exemplificar algumas destas aplicações práticas da lógica proposicional.

### Traduzindo sentenças em linguagem natural

• Sentenças em linguagem natural são frequentemente ambíguas, o que pode causar problemas de comunicação.

 Traduzir sentenças em linguagem natural para proposições compostas remove a ambiguidade.

 Uma vez traduzidas para proposições lógicas, estas sentenças podem ser analisadas quanto ao seu valor de verdade.

### Traduzindo sentenças em linguagem natural

• Exemplo 1 | Seja a sentença em linguagem natural:

"Você não pode andar na montanha russa se você tiver menos que 1,50m de altura, a menos que você tenha mais de 16 anos."

Podemos traduzí-la para uma proposição composta, usamos as seguintes proposições:

- q: "você pode andar na montanha russa",
- r: "você tem menos que 1,50m de altura",
- s: "você tem mais de 16 anos".

A sentença em linguagem natural é, então, traduzida para:

$$(r \land \neg s) \rightarrow \neg q.$$

(Note que esta não é a única maneira de representar esta sentença.)

 Traduzir sentenças de linguagem natural para linguagem lógica é parte essencial da especificação de sistemas de hardware e software.

Exemplo 2 Expresse a especificação abaixo como uma proposição composta.

"A resposta automática não pode ser enviada quando o sistema de arquivos está cheio."

• Traduzir sentenças de linguagem natural para linguagem lógica é parte essencial da especificação de sistemas de hardware e software.

Exemplo 2 Expresse a especificação abaixo como uma proposição composta.

"A resposta automática não pode ser enviada quando o sistema de arquivos está cheio."

**Solução.** Podemos traduzir a especificação para uma proposição composta, usando as seguintes proposições:

- r: "a reposta automática pode ser enviada",
- c : "o sistema de arquivos está cheio".

 Traduzir sentenças de linguagem natural para linguagem lógica é parte essencial da especificação de sistemas de hardware e software.

Exemplo 2 Expresse a especificação abaixo como uma proposição composta.

"A resposta automática não pode ser enviada quando o sistema de arquivos está cheio."

**Solução.** Podemos traduzir a especificação para uma proposição composta, usando as seguintes proposições:

- r: "a reposta automática pode ser enviada",
- c : "o sistema de arquivos está cheio".

A especificação fica, então, traduzida para:

$$c \rightarrow \neg r$$
.

- Especificações de sistemas devem ser consistentes.
  - Não devem conter requisitos conflitantes.
  - Senão, seria possível derivar uma contradição.

Quando as especificações não são consistentes, não é possível desenvolver um sistema que satisfaça todos os requisitos.

- Exemplo 3 Determine se a seguinte especificação de sistema é consistente:
  - "A mensagem de diagnóstico é armazenada no buffer ou é retransmitida."
  - "A mensagem de diagnóstico não está armazenada no buffer."
  - "Se a mensagem de diagnóstico estiver armazenada no buffer, ela será retransmitida."

- Especificações de sistemas devem ser **consistentes**.
  - Não devem conter requisitos conflitantes.
  - Senão, seria possível derivar uma contradição.

Quando as especificações não são consistentes, não é possível desenvolver um sistema que satisfaça todos os requisitos.

- Exemplo 3 Determine se a seguinte especificação de sistema é consistente:
  - "A mensagem de diagnóstico é armazenada no buffer ou é retransmitida."
  - "A mensagem de diagnóstico não está armazenada no buffer."
  - "Se a mensagem de diagnóstico estiver armazenada no buffer, ela será retransmitida."

**Solução.** Para determinar se essas especificações são consistentes, primeiro vamos representar seus componentes como expressões lógicas:

- p : "A mensagem de diagnóstico é armazenada no buffer."
- q : "A mensagem de diagnóstico é retransmitida."

• Exemplo 3 (Continuação)

Assim, a especificação do sistema pode ser reescrita como:

 $ullet p ee q \qquad ullet \neg p \qquad ullet p 
ightarrow q$ 

Podemos verificar se especificação é consistente com uma tabela da verdade que mostra se é possível satisfazer todos os três requisitos ao mesmo tempo.

• Exemplo 3 (Continuação)

Assim, a especificação do sistema pode ser reescrita como:

$$ullet p ee q \qquad ullet \neg p \qquad ullet p 
ightarrow q$$

Podemos verificar se especificação é consistente com uma tabela da verdade que mostra se é possível satisfazer todos os três requisitos ao mesmo tempo.

р	q	$p \lor q$	¬р	$p\toq$
T	T	T	F	T
T	F	T	F	F
F	T	T	T	T
F	F	F	T	T

Note que a especificação do sistema é consistente, e ela é satisfeita quando p = F e q = T.

- Exemplo 4 Suponha que adicionemos à especificação do exemplo anterior o seguinte requisito:
  - "A mensagem de diagnóstico não é retransmitida."

Neste caso a especificação do sistema continua consistente?

- Exemplo 4 Suponha que adicionemos à especificação do exemplo anterior o seguinte requisito:
  - "A mensagem de diagnóstico não é retransmitida."

Neste caso a especificação do sistema continua consistente?

**Solução.** O novo requisito pode ser representado logicamente como  $\neg q$ , e a tabela da verdade atualizada é a seguinte.

р	q	p∨q	¬р	$p\toq$	$\neg q$
T	T	T	F	T	F
T	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	F
F	F	F	T	T	T

Pode-se notar que agora é impossível satisfazer todos os requisitos ao mesmo tempo e, portanto, a especificação do sistema é inconsistente.

### Resolução de problemas e quebra-cabeças

• Exemplo 5 Considere uma ilha em que há apenas dois tipos de habitantes: cavaleiros, que só falam a verdade, e cavilosos, que só falam mentiras.

Você encontra duas pessoas, A e B.

A pessoa A diz:

"B só diz a verdade",

enquanto a pessoa B diz:

"A e eu somos pessoas de tipos diferentes".

Qual o tipo de A e o tipo de B?

Solução.

Dever de casa.

# **Equivalências Proposicionais**

### Equivalência de proposições: Introdução

• Um passo importante na resolução de muitos problemas é a substituição de uma afirmação por outra com mesmo valor de verdade.

• Como determinar se duas fórmulas tem sempre o mesmo valor de verdade?

- Duas fórmulas são equivalentes quando elas têm o mesmo valor para qualquer atribuição de suas variáveis.
  - Ou seja, para quaisquer valores que as proposições atômicas possam tomar.

### Equivalência de proposições: Introdução

- Primeiro, vamos categorizar os tipos de fórmulas:
  - uma tautologia é uma expressão sempre verdadeira independentemente o valor de verdade das variáveis que nela aparecem;
  - uma contradição é uma expressão sempre falsa independentemente o valor de verdade das variáveis que nela aparecem;
  - uma contingência é uma expressão que não é nem uma tautologia, nem uma contradição.
- Exemplo 6 A tabela da verdade abaixo mostra que  $(p \land \neg p)$  é uma contradição, enquanto a expressão  $(p \lor \neg p)$  é uma tautologia.

р	¬р	$p \wedge \neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	F	T
F	T	F	T

• Duas fórmulas  $\varphi$  e  $\psi$  são **logicamente equivalentes** se  $\varphi \leftrightarrow \psi$  é uma tautologia.

A notação  $\varphi \equiv \psi$  denota que  $\varphi$  e  $\psi$  são logicamente equivalentes.

- ullet Uma maneira de determinar se  $\varphi \equiv \psi$  é usando tabelas da verdade.
- Exemplo 7 Mostre que p o q e  $\neg p \lor q$  são logicamente equivalentes.

#### Solução.

Tabela da verdade para  $p \rightarrow q$  e  $\neg p \lor q$ :

р	q	¬р	$\neg p \vee q$	$p\toq$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Como a coluna correspondente a  $p \rightarrow q$  e a coluna correspondente a  $\neg p \lor q$  possuem sempre o mesmo valor de verdade,  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \lor q)$  é uma tautologia.

Logo 
$$p \to q \equiv (\neg p \lor q)$$
.

• Exemplo 8 Mostre que  $\neg(p \lor q)$  e  $\neg p \land \neg q$  são logicamente equivalentes.

**Solução.** Tabela da verdade para  $\neg(p \lor q)$  e  $\neg p \land \neg q$ :

р	q	p∨q	$\neg(p \lor q)$	¬р	¬q	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

Uma vez que a coluna correspondente a  $\neg(p \lor q)$  e a coluna correspondente a  $\neg p \land \neg q$  possuem sempre o mesmo valor de verdade,  $\neg(p \lor q) \leftrightarrow (\neg p \land \neg q)$  é uma tautologia.

Logo, 
$$\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$$
.

A equivalência que demonstramos é uma das **Leis de De Morgan**:

#### Leis de De Morgan

$$\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$$
$$\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$$

• Exemplo 9 Mostre que  $p \lor (q \land r)$  e  $(p \lor q) \land (p \lor r)$  são logicamente equivalentes.

**Solução.** Tabela da verdade para  $p \lor (q \land r)$  e  $(p \lor q) \land (p \lor r)$ :

р	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	p∨r	$(p \lor q) \land (p \lor r)$
T	Т	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Como as colunas correspondentes a  $p \lor (q \land r)$  e  $(p \lor q) \land (p \lor r)$  possuem sempre o mesmo valor de verdade,  $p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$ .

A equivalência que demonstramos é a lei da distributividade da disjunção sobre a conjunção.

• Algumas equivalências lógicas importantes:

Nome	Equivalência
Leis de identidade	$p \wedge T \equiv p$
	$p \lor F \equiv p$
Leis de dominância	$ \begin{array}{ccc} p \land F & \equiv & F \\ p \lor T & \equiv & T \end{array} $
Leis de idempotência	$p \wedge p \equiv p$
Leis de idempotencia	$p \lor p \equiv p$
Lei da dupla negação	$\neg(\neg p) \equiv p$
Leis de comutatividade	$p \wedge q \equiv q \wedge p$
Leis de comatatividade	$p \lor q \equiv q \lor p$
Leis de associatividade	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
	$(p \lor q) \lor r \equiv p \lor (q \lor r)$
Leis de distributividade	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Leis de De Morgan	$\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$
	$\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$
Leis de absorção	$p \lor (p \land q) \equiv p$
	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$
Leis da negação	$p \wedge \neg p \equiv \underline{F}$
	$p \lor \neg p \equiv T$

**Equivalências** 

 Equivalências lógicas envolvendo proposições condicionais:

-quivalencias
$p  o q \equiv \neg p \lor q$
$p  o q \equiv \neg q  o \neg p$
$p \lor q \equiv \neg p \to q$
$p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$
$\neg(p  o q) \equiv p \wedge \neg q$
$(p \rightarrow q) \land (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \land r)$

 $(p \to r) \land (q \to r) \equiv (p \lor q) \to r$  $(p \to q) \lor (p \to r) \equiv p \to (q \lor r)$  $(p \to r) \lor (q \to r) \equiv (p \land q) \to r$ 

• Equivalências lógicas envolvendo proposições bicondicionais:

Equivalências		
$p \leftrightarrow q \equiv (p  ightarrow q) \wedge (q  ightarrow p)$		
$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$		
$p \leftrightarrow q \equiv (p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$		
$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$		

## Usos das Leis de De Morgan

A lei

$$\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$$

diz que a negação da disjunção é a conjunção das negações.

Exemplo 10 Use as Leis de De Morgan para negar a proposição:

"Danilo vai assistir a Star Wars ou vai assistir a O Senhor dos Anéis."

## Usos das Leis de De Morgan

A lei

$$\neg(p\vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

diz que a negação da disjunção é a conjunção das negações.

Exemplo 10 Use as Leis de De Morgan para negar a proposição:

"Danilo vai assistir a Star Wars ou vai assistir a O Senhor dos Anéis."

**Solução.** Esta proposição pode ser escrita como  $p \lor q$ , onde  $p \not\in$  "Danilo vai assistir a Star Wars", e  $q \not\in$  "Danilo vai assistir a O Senhor dos Anéis".

Pela lei de De Morgan, a negação é  $\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$ , que se traduz em

"Danilo não vai assistir a Star Wars e nem vai assistir a O Senhor dos Anéis."

Lógica Proposicional: Aplicações, Equivalências

### Usos das Leis de De Morgan

• A lei de De Morgan

$$\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$$

diz que a negação da conjunção é a disjunção das negações.

Exemplo 11 Use as Leis de De Morgan para negar a proposição:

"Estela tem um celular e um computador."

**Solução.** Esta proposição pode ser escrita como  $p \land q$ , onde p é "Estela tem um celular", e q é "Estela tem um computador".

Pelas Leis de De Morgan, a negação é  $\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$ , que se traduz em

"Estela não tem um celular ou ela não tem um computador."

Lógica Proposicional: Aplicações, Equivalências

• A tabela de verdade de uma fórmula com n variáveis tem  $2^n$  linhas.

- Para n grande, é ineficiente construir a tabela da verdade. Por exemplo:
  - Quanto n = 3, temos  $2^n = 8$

② Quando n = 10, temos  $2^n = 1024$ 

 Uma alternativa é utilizar equivalências lógicas já conhecidas para derivar novas equivalências lógicas.

• Exemplo 12 Mostre que  $\neg(p \to q)$  e  $p \land \neg q$  são logicamente equivalentes.

$$\neg(p \rightarrow q) \equiv$$

• Exemplo 12 Mostre que  $\neg(p \to q)$  e  $p \land \neg q$  são logicamente equivalentes.

$$\neg(p 
ightarrow q) \ \equiv \neg(\neg p \lor q)$$
 (pela tabela de equiv. de condicionais)

• Exemplo 12 Mostre que  $\neg(p \to q)$  e  $p \land \neg q$  são logicamente equivalentes.

$$\neg(p \to q) \equiv \neg(\neg p \lor q)$$
 (pela tabela de equiv. de condicionais) 
$$\equiv \neg(\neg p) \land \neg q$$
 (pelas Leis de De Morgan)

ullet Exemplo 12 Mostre que  $\neg(p o q)$  e  $p \wedge \neg q$  são logicamente equivalentes.

#### Solução.

$$egin{aligned}
\neg(p 
ightarrow q) &\equiv \neg(\neg p \lor q) & ext{(pela tabela de equiv. de condicionais)} \\
&\equiv \neg(\neg p) \land \neg q & ext{(pelas Leis de De Morgan)} \\
&\equiv p \land \neg q & ext{(pela lei da dupla negação)}
\end{aligned}$$

Note a intuição por trás dessa equivalência: dizer que uma implicação é falsa  $(\neg(p \rightarrow q))$  é o mesmo que dizer que sua hipótese é verdadeira mas sua conclusão é falsa  $(p \land \neg q)$ .

• Exemplo 13 Mostre que  $\neg(p \lor (\neg p \land q))$  e  $\neg p \land \neg q$  são logicamente equivalentes.

$$\neg(p \lor (\neg p \land q)) \equiv$$

• Exemplo 13 Mostre que  $\neg(p \lor (\neg p \land q))$  e  $\neg p \land \neg q$  são logicamente equivalentes.

$$\neg(p \lor (\neg p \land q)) \ \equiv \neg p \land \neg(\neg p \land q) \qquad \qquad \text{(pelas Leis de De Morgan)}$$

• Exemplo 13 Mostre que  $\neg(p \lor (\neg p \land q))$  e  $\neg p \land \neg q$  são logicamente equivalentes.

$$\neg(p \lor (\neg p \land q)) \equiv \neg p \land \neg(\neg p \land q)$$
 (pelas Leis de De Morgan)  
$$\equiv \neg p \land (\neg(\neg p) \lor \neg q)$$
 (pelas Leis de De Morgan)

Exemplo 13 Mostre que  $\neg(p \lor (\neg p \land q))$  e  $\neg p \land \neg q$  são logicamente equivalentes.

$$\neg(p \lor (\neg p \land q)) \equiv \neg p \land \neg(\neg p \land q)$$
 (pelas Leis de De Morgan)  
$$\equiv \neg p \land (\neg(\neg p) \lor \neg q)$$
 (pelas Leis de De Morgan)  
$$\equiv \neg p \land (p \lor \neg q)$$
 (pela lei da dupla negação)

• Exemplo 13 Mostre que  $\neg(p \lor (\neg p \land q))$  e  $\neg p \land \neg q$  são logicamente equivalentes.

• Exemplo 13 Mostre que  $\neg(p \lor (\neg p \land q))$  e  $\neg p \land \neg q$  são logicamente equivalentes.

• Exemplo 13 Mostre que  $\neg(p \lor (\neg p \land q))$  e  $\neg p \land \neg q$  são logicamente equivalentes.

$$\neg(p \lor (\neg p \land q)) \equiv \neg p \land \neg(\neg p \land q) \qquad \text{(pelas Leis de De Morgan)}$$

$$\equiv \neg p \land (\neg(\neg p) \lor \neg q) \qquad \text{(pelas Leis de De Morgan)}$$

$$\equiv \neg p \land (p \lor \neg q) \qquad \text{(pela lei da dupla negação)}$$

$$\equiv (\neg p \land p) \lor (\neg p \land \neg q) \qquad \text{(pela lei da distributividade)}$$

$$\equiv F \lor (\neg p \land \neg q) \qquad \text{(porque } \neg p \land p \equiv F)$$

$$\equiv (\neg p \land \neg q) \lor F \qquad \text{(pela lei da comutatividade)}$$

Exemplo 13 Mostre que  $\neg(p \lor (\neg p \land q))$  e  $\neg p \land \neg q$  são logicamente equivalentes.

$$\neg(p \lor (\neg p \land q)) \equiv \neg p \land \neg(\neg p \land q) \qquad \text{(pelas Leis de De Morgan)}$$

$$\equiv \neg p \land (\neg(\neg p) \lor \neg q) \qquad \text{(pelas Leis de De Morgan)}$$

$$\equiv \neg p \land (p \lor \neg q) \qquad \text{(pela lei da dupla negação)}$$

$$\equiv (\neg p \land p) \lor (\neg p \land \neg q) \qquad \text{(pela lei da distributividade)}$$

$$\equiv F \lor (\neg p \land \neg q) \qquad \text{(porque } \neg p \land p \equiv F)$$

$$\equiv (\neg p \land \neg q) \lor F \qquad \text{(pela lei da comutatividade)}$$

$$\equiv \neg p \land \neg q \qquad \text{(pela lei de identidade)}$$

ullet Exemplo 14 Mostre que  $(p \wedge q) o (p ee q)$  é uma tautologia.

#### Solução.

$$\begin{array}{ll} (p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) & \equiv \neg (p \wedge q) \vee (p \vee q) & \text{(equivalência de condicionais)} \\ & \equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q) & \text{(pela Leis de De Morgan)} \\ & \equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q) & \text{(comutatividade e associatividade)} \\ & \equiv T \vee T & \text{(pela lei de negação)} \\ & \equiv T & \text{(pela lei de dominância)} \end{array}$$

Lógica Proposicional: Aplicações, Equivalências