

DCC638 - Introdução à Lógica Computacional  
2023.2

# Álgebra Booleana

Área de Teoria DCC/UFMG

# Introdução

# Álgebra Booleana: Introdução

- Circuitos operam com entradas e saídas **binárias**, i.e. com valores 0 e 1.
- Isto facilita a construção de circuitos
  - Qualquer dispositivo que diferencie dois estados (ligado/deligado, alta voltagem/baixa voltagem, etc.)
- Normalmente nos referimos a cada um dos estados binários como **bits** (do inglês “*binary digits*”), ou **valores Booleanos**.
- Em 1938 Claude Shannon demonstrou que as regras básicas da lógica, introduzidas por George Boole em 1854 no seu livro “*The Laws of Thought*”, podem ser usadas para projetar circuitos.
- Estas regras formam a base da **lógica Booleana**, que é o que vamos estudar aqui.

# Álgebra Booleana: Introdução

- Nesta parte do curso vamos fazer a conexão da lógica proposicional e álgebra Booleana com os circuitos de computação.
- Para isto, vamos estudar os fundamentos da álgebra Booleana, incluindo:
  - Como representar números em base binária.
  - Como representar funções Booleanas.
  - Como projetar circuitos que implementem funções.
  - Como minimizar circuitos para obter implementações eficientes.

# Representação de Números em Base Binária

# Representação de números em base decimal

- O nosso sistema numérico é um sistema baseado em potências de 10.
  - Números representados como somas ponderadas de potências de 10, usando dígitos decimais 0, 1, 2, ..., 9 como pesos.

- Exemplo 1 O número decimal 237 pode ser decomposto como:

$$237_{10} = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

- Não há nada de especial na escolha de potências de 10 para decompor números.
- Podemos usar qualquer inteiro positivo como uma base numérica.
- Notação:  $n_b$  indica que o número  $n$  está representado na base  $b$ .

# Representação de números em base binária

- Podemos representar números naturais em potências de 2, por exemplo.
- Somas ponderadas de potências de 2, usando dígitos binários 0, 1 como pesos.
- Exemplo 2

$$\begin{aligned}11101101_2 &= 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + \\&\quad 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\&= 1 \cdot 128 + 1 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + \\&\quad 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\&= 237_{10}\end{aligned}$$



# Convertendo de base binária para decimal

- Formalmente, um número binário de  $k$  bits ( $b_i \in \{0,1\}$ , para  $k-1 \geq i \geq 0$ )

$$n_2 = b_{k-1} b_{k-2} \dots b_2 b_1 b_0$$

pode ser convertido para seu equivalente decimal  $m_{10}$  pela fórmula

$$m_{10} = \sum_{i=0}^{k-1} b_i \cdot 2^i .$$



# Convertendo de base binária para decimal

- Um método rápido para converter um número binário para seu equivalente decimal é dado no exemplo a seguir.
- Exemplo 3 Encontre o decimal equivalente a  $110101_2$ .

# Convertendo de base binária para decimal

- Um método rápido para converter um número binário para seu equivalente decimal é dado no exemplo a seguir.
- Exemplo 3** Encontre o decimal equivalente a  $110101_2$ .

**Solução.** O equivalente ao binário pedido é o decimal 53, como mostra a tabela abaixo.

Posição $i$	5	4	3	2	1	0	
Dígito $b_i$	1	1	0	1	0	1	
Equivalente decimal: $2^i$	32	16	8	4	2	1	
Contribuição $b_i \cdot 2^i$	32	16	0	4	0	1	<b>53</b>



# Convertendo de base decimal para binária

- No caso geral, processo de conversão de um decimal  $m_{10}$  para seu equivalente binário  $n_2$  se dá da seguinte forma:
  1. Realize a divisão inteira do número decimal  $m_{10}$  por 2 repetidas vezes, guardando o resto  $r_i$  de cada passo  $i$ .
  2. Pare quando o resultado da divisão for 0.
  3. Produza como resultado  $n_2$  a concatenação dos restos  $r_i$  na ordem contrária em que foram encontrados.

# Convertendo de base decimal para binária

- Exemplo 4 Converta 77 de decimal para seu equivalente binário.

# Convertendo de base decimal para binária

- Exemplo 4 Converta 77 de decimal para seu equivalente binário.

**Solução.** Podemos seguir o seguinte processo:

$$\begin{array}{ccccccc} 77 & \xrightarrow[\text{resto}=1]{\text{div}2} & 38 & \xrightarrow[\text{resto}=0]{\text{div}2} & 19 & \xrightarrow[\text{resto}=1]{\text{div}2} & 9 & \xrightarrow[\text{resto}=1]{\text{div}2} \\ 4 & \xrightarrow[\text{resto}=0]{\text{div}2} & 2 & \xrightarrow[\text{resto}=0]{\text{div}2} & 1 & \xrightarrow[\text{resto}=1]{\text{div}2} & 0 & \end{array}$$

A representação binária é obtida invertendo-se a ordem dos restos produzidos:

$$77 = 1001101_2.$$



# Convertendo de base decimal para binária

- Exemplo 5 Converta 237 de decimal para seu equivalente binário.

**Solução.** Podemos seguir o seguinte processo:

$$\begin{array}{ccccccc} 237 & \xrightarrow[\text{resto}=1]{\text{div2}} & 118 & \xrightarrow[\text{resto}=0]{\text{div2}} & 59 & \xrightarrow[\text{resto}=1]{\text{div2}} & 29 & \xrightarrow[\text{resto}=1]{\text{div2}} \\ 14 & \xrightarrow[\text{resto}=0]{\text{div2}} & 7 & \xrightarrow[\text{resto}=1]{\text{div2}} & 3 & \xrightarrow[\text{resto}=1]{\text{div2}} & 1 & \xrightarrow[\text{resto}=1]{\text{div2}} & 0 \end{array}$$

A representação binária é obtida invertendo-se a ordem dos restos produzidos:

$$237 = 11101101_2.$$



# Somando dois números em base binária

- Podemos realizar operações usuais em números binários.
- Em particular, a adição binária é feita de forma análoga à decimal:
  - Nos decimais, ao somar o dígito 7 com o dígito 5, por exemplo, o resultado é o dígito 2, e sobra 1 como excedente para a próxima coluna de dígitos.

Isso ocorre sempre que o resultado ultrapassa o maior dígito decimal, que é 9.
  - Com os binários, isso ocorre quando o maior dígito binário, 1, é ultrapassado.
- Exemplo 6

 Compute o valor da soma  $1101_2 + 100_2$ .

# Somando dois números em base binária

- Podemos realizar operações usuais em números binários.
- Em particular, a adição binária é feita de forma análoga à decimal:
  - Nos decimais, ao somar o dígito 7 com o dígito 5, por exemplo, o resultado é o dígito 2, e sobra 1 como excedente para a próxima coluna de dígitos.

Isso ocorre sempre que o resultado ultrapassa o maior dígito decimal, que é 9.
  - Com os binários, isso ocorre quando o maior dígito binário, 1, é ultrapassado.
- Exemplo 6** Compute o valor da soma  $1101_2 + 100_2$ .

**Solução.** Realizando a soma abaixo, encontramos o valor  $10101_2$ .

	(1)	(1)				(excedente, ou “vai um”)
		1	1	0	1	(primeira parcela = $13_{10}$ )
+			1	0	0	(segunda parcela = $4_{10}$ )
	1	0	0	0	1	(resultado = $17_{10}$ )



# Funções Booleanas

# Funções Booleanas: Introdução

- A **álgebra Booleana** fornece as operações e as regras para trabalharmos com o conjunto  $\{0, 1\}$ .
- Em particular, circuitos eletrônicos podem ser estudados usando este conjunto binário e as regras da álgebra Booleana.

# Funções Booleanas: Operações Booleanas

- As três operações em álgebra Booleana que mais vamos usar são:

- O **complemento**, denotada por uma barra  $\bar{\phantom{x}}$ , definido como  $\bar{x} = 1 - x$ :

$$\bar{0} = 1, \quad \text{e} \quad \bar{1} = 0.$$

- O **produto Booleano**, denotado por  $\cdot$  ou *AND*, e definido como  $x \cdot y = \min(x, y)$ :

$$0 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot 1 = 0, \quad 1 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

- A **soma Booleana**, denotada por  $+$  ou *OR*, e definida como  $x + y = \max(x, y)$ :

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1, \quad 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 1.$$

- Quando não há risco de ambiguidade, podemos omitir o símbolo  $\cdot$  de produto Booleano, escrevendo  $ab$  no lugar de  $a \cdot b$ .

# Funções Booleanas: Operações Booleanas

- A ordem de precedência de operadores Booleanos é:

1. primeiro avaliam-se complementos;
2. em seguida avaliam-se produtos;
3. por fim avaliam-se somas.

- Exemplo 7 Ache o valor de  $1 \cdot 0 + \overline{(0 + 1)}$ .

# Funções Booleanas: Operações Booleanas

- A ordem de precedência de operadores Booleanos é:

1. primeiro avaliam-se complementos;
2. em seguida avaliam-se produtos;
3. por fim avaliam-se somas.

- Exemplo 7 Ache o valor de  $1 \cdot 0 + \overline{(0 + 1)}$ .

**Solução.**

$$\begin{aligned} 1 \cdot 0 + \overline{(0 + 1)} &= 1 \cdot 0 + \bar{1} \\ &= 1 \cdot 0 + 0 \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$



# Funções Booleanas: Correspondência com lógica proposicional

- Existe uma correspondência entre a álgebra Booleana e a lógica proposicional no seguinte sentido:
  - O complemento  $\bar{\phantom{x}}$  corresponde ao operador de negação  $\neg$ .
  - A soma Booleana  $+$  corresponde ao operador de disjunção  $\vee$ .
  - O produto Booleano  $\cdot$  corresponde ao operador de conjunção  $\wedge$ .
  - O valor 0 corresponde ao valor de verdade  $F$  (falso).
  - O valor 1 corresponde ao valor de verdade  $T$  (verdadeiro).
- Por este motivo, igualdades em álgebra Booleana podem ser traduzidas imediatamente em equivalências proposicionais, e vice-versa.

# Funções Booleanas: Correspondência com lógica proposicional

- Exemplo 8 Converta a igualdade Booleana  $1 \cdot 0 + \overline{(0 + 1)} = 0$  na equivalência proposicional correspondente.

# Funções Booleanas: Correspondência com lógica proposicional

- Exemplo 8 Converta a igualdade Booleana  $1 \cdot 0 + \overline{(0 + 1)} = 0$  na equivalência proposicional correspondente.

**Solução.** A fórmula Booleana  $1 \cdot 0 + \overline{(0 + 1)} = 0$  corresponde à equivalência proposicional

$$T \wedge F \vee \neg(F \vee T) \equiv F .$$

- Exemplo 9 Converta a equivalência proposicional  $(T \wedge T) \vee \neg F \equiv T$  na igualdade Booleana correspondente.



# Funções Booleanas: Correspondência com lógica proposicional

- Exemplo 8 Converta a igualdade Booleana  $1 \cdot 0 + \overline{(0 + 1)} = 0$  na equivalência proposicional correspondente.

**Solução.** A fórmula Booleana  $1 \cdot 0 + \overline{(0 + 1)} = 0$  corresponde à equivalência proposicional

$$T \wedge F \vee \neg(F \vee T) \equiv F .$$

- Exemplo 9 Converta a equivalência proposicional  $(T \wedge T) \vee \neg F \equiv T$  na igualdade Booleana correspondente.

**Solução.** A equivalência proposicional  $(T \wedge T) \vee \neg F \equiv T$  corresponde à fórmula Booleana

$$(1 \cdot 1) + \bar{0} = 1 .$$

# Expressões Booleanas e Funções Booleanas

- Seja  $B = \{0, 1\}$  o **conjunto de valores Booleanos**.

Então

$$B^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in B \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$$

é o **conjunto de todas as  $n$ -tuplas formadas por 0s e 1s**.

- Uma variável  $x$  que assume um valor em  $B$  é chamada de **variável Booleana**.
- Uma função de  $B^n$  para  $B$  é chamada de **função Booleana de grau  $n$** .
- Exemplo 10

 A função Booleana  $F(x, y) = x\bar{y}$  de tipo  $B^2 \rightarrow B$  é representada na tabela abaixo.

$x$	$y$	$F(x, y) = x\bar{y}$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

# Expressões Booleanas e Funções Booleanas

- Funções Booleanas podem ser representadas por expressões formadas por variáveis Booleanas e operações Booleanas.
- As **expressões Booleanas** sobre as variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são definidas recursivamente como:
  1.  $0, 1, x_1, x_2, \dots, x_n$  são expressões Booleanas.
  2. Se  $E_1$  e  $E_2$  são expressões Booleanas, então também são expressões Booleanas:

a)  $\bar{E}_1,$

b)  $(E_1 + E_2),$

c)  $(E_1 \cdot E_2).$

- Cada expressão Booleana representa uma função Booleana.  
(Mais para frente vamos ver também a afirmação conversas: cada função Booleana pode ser representada por uma expressão Booleana.)
- Para calcular o valor da função, basta substituir cada variável pelo seu valor (0 ou 1).

# Expressões Booleanas e Funções Booleanas

- Exemplo 11 Determine os valores da função Booleana  $F(x, y, z) = xy + \bar{z}$ .

**Solução.** A tabela abaixo especifica o comportamento da função desejada.

$x$	$y$	$z$	$xy$	$\bar{z}$	$F(x, y, z) = xy + \bar{z}$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1



# Expressões Booleanas e Funções Booleanas

- Duas funções Booleanas  $F$  e  $G$  de  $n$  variáveis são **iguais** se, e somente se:

$$F(b_1, b_2, \dots, b_n) = G(b_1, b_2, \dots, b_n)$$

para todos os valores  $b_1, b_2, \dots, b_n \in B$ .

- Duas expressões Booleanas que representam a mesma função são chamadas de **equivalentes**.

Por exemplo, as três expressões abaixo são todas equivalentes:

①  $xy$

②  $xy + 0$

③  $xy \cdot 1$

# Expressões Booleanas e Funções Booleanas

- Sejam  $F$  e  $G$  funções Booleanas de grau  $n$ . Podemos definir:

- O **complemento** de  $F$  é a função  $\overline{F}$ , definida como

$$\overline{F}(b_1, b_2, \dots, b_n) = \overline{F(b_1, b_2, \dots, b_n)}$$

- A **soma Booleana** de  $F$  e  $G$  é a função  $F + G$ , definida como

$$(F + G)(b_1, b_2, \dots, b_n) = F(b_1, b_2, \dots, b_n) + G(b_1, b_2, \dots, b_n)$$

- O **produto Booleano** de  $F$  e  $G$  é a função  $F \cdot G$ , definida como

$$(F \cdot G)(b_1, b_2, \dots, b_n) = F(b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot G(b_1, b_2, \dots, b_n)$$

# Expressões Booleanas e Funções Booleanas

- Note que uma função Booleana de grau 2 possui

- como domínio: um conjunto de quatro elementos:

$$\{ (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) \} ,$$

- como contra-domínio: um conjunto de dois elementos:

$$\{0, 1\} .$$

- Portanto, o número de funções Booleanas distintas de grau 2 é  $2^4 = 16$ .

# Expressões Booleanas e Funções Booleanas

- Note que uma função Booleana de grau 2 possui

- como domínio: um conjunto de quatro elementos:

$$\{ (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) \} ,$$

- como contra-domínio: um conjunto de dois elementos:

$$\{0, 1\} .$$

- Portanto, o número de funções Booleanas distintas de grau 2 é  $2^4 = 16$ .
  - 2 saídas possíveis pra cada entrada



# Expressões Booleanas e Funções Booleanas

- Exemplo 12 Enumere todas as 16 possíveis funções Booleanas de grau 2.

**Solução.** Todas as possíveis funções Booleanas  $F_0, F_1, \dots, F_{15}$  de grau 2 estão representadas na tabela abaixo.

$x$	$y$	$F_0$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$F_7$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

$x$	$y$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$	$F_{11}$	$F_{12}$	$F_{13}$	$F_{14}$	$F_{15}$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

# Expressões Booleanas e Funções Booleanas

- Note que no caso geral, uma função Booleana de grau  $n$  possui
  - como domínio: um conjunto de  $2^n$  elementos,
  - como contra-domínio: um conjunto de dois elementos:  $\{0, 1\}$ .

Portanto, o número de funções Booleanas distintas de grau  $n$  é  $2^{2^n}$ .

- Exemplo 13 Número de funções Booleanas de grau  $n$ :

Grau = $n$	Número de funções = $2^{2^n}$
1	4
2	16
3	256
4	65 536
5	4 294 967 296
6	18 446 744 073 709 551 616

# Identidades Booleanas

- Existem muitas **identidades** na álgebra Booleana.

Essas identidades são úteis na simplificação do projeto de circuitos.

- Identidades Booleanas podem ser verificadas usando tabelas de valores.
- Exemplo 14 Verifique a identidade Booleana de que  $x(y + z) = xy + xz$ .

# Identidades Booleanas

- Existem muitas **identidades** na álgebra Booleana.

Essas identidades são úteis na simplificação do projeto de circuitos.

- Identidades Booleanas podem ser verificadas usando tabelas de valores.
- Exemplo 14

 Verifique a identidade Booleana de que  $x(y + z) = xy + xz$ .

**Solução.** Podemos verificar a identidade usando a tabela abaixo.

x	y	z	$y + z$	$x(y + z)$	$xy$	$xz$	$xy + xz$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Note que esta identidade Booleana corresponde à equivalência lógica

$$x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

que é uma das leis de distributividade. •

# Identidades Booleanas

- Algumas identidades Booleanas importantes:

Nome	Identidade
Lei da dupla complementação	$\overline{\overline{x}} = x$
Leis de idempotência	$x + x = x$ $x \cdot x = x$
Leis de identidade	$x + 0 = x$ $x \cdot 1 = x$
Leis de dominância	$x + 1 = 1$ $x \cdot 0 = 0$
Leis de comutatividade	$x + y = y + x$ $xy = yx$
Leis de associatividade	$x + (y + z) = (x + y) + z$ $x(yz) = (xy)z$
Leis de distributividade	$x + yz = (x + y)(x + z)$ $x(y + z) = xy + xz$
Leis de De Morgan	$\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$ $\overline{x + y} = \overline{x} \overline{y}$
Leis de absorção	$x + xy = x$ $x(x + y) = x$
Propriedade da unidade	$x + \overline{x} = 1$
Propriedade do zero	$x \cdot \overline{x} = 0$

# Identidades Booleanas

- É possível verificar identidades Booleanas usando identidades já verificadas.
- Exemplo 15 Verifique a lei de absorção  $x(x + y) = x$  usando identidades Booleanas dadas na tabela anterior.

# Identidades Booleanas

- É possível verificar identidades Booleanas usando identidades já verificadas.
- Exemplo 15 Verifique a lei de absorção  $x(x + y) = x$  usando identidades Booleanas dadas na tabela anterior.

**Solução.**

$$x(x + y) \equiv$$

# Identities Booleanas

- É possível verificar identidades Booleanas usando identidades já verificadas.
- Exemplo 15 Verifique a lei de absorção  $x(x + y) = x$  usando identidades Booleanas dadas na tabela anterior.

**Solução.**

$$x(x + y) \equiv (x + 0)(x + y) \quad (\text{lei de identidade para a soma})$$



# Identities Booleanas

- É possível verificar identidades Booleanas usando identidades já verificadas.
- Exemplo 15 Verifique a lei de absorção  $x(x + y) = x$  usando identidades Booleanas dadas na tabela anterior.

## Solução.

$$\begin{aligned}x(x + y) &\equiv (x + 0)(x + y) && \text{(lei de identidade para a soma)} \\ &\equiv x + (0 \cdot y) && \text{(distributividade da soma sobre o produto)}\end{aligned}$$

# Identities Booleanas

- É possível verificar identidades Booleanas usando identidades já verificadas.
- **Exemplo 15** Verifique a lei de absorção  $x(x + y) = x$  usando identidades Booleanas dadas na tabela anterior.

## Solução.

$$\begin{aligned}x(x + y) &\equiv (x + 0)(x + y) && \text{(lei de identidade para a soma)} \\ &\equiv x + (0 \cdot y) && \text{(distributividade da soma sobre o produto)} \\ &\equiv x + y \cdot 0 && \text{(comutatividade do produto)}\end{aligned}$$

# Identities Booleanas

- É possível verificar identidades Booleanas usando identidades já verificadas.
- **Exemplo 15** Verifique a lei de absorção  $x(x + y) = x$  usando identidades Booleanas dadas na tabela anterior.

## Solução.

$$\begin{aligned}x(x + y) &\equiv (x + 0)(x + y) && \text{(lei de identidade para a soma)} \\&\equiv x + (0 \cdot y) && \text{(distributividade da soma sobre o produto)} \\&\equiv x + y \cdot 0 && \text{(comutatividade do produto)} \\&\equiv x + 0 && \text{(lei de dominância para o produto)}\end{aligned}$$

# Identities Booleanas

- É possível verificar identidades Booleanas usando identidades já verificadas.
- **Exemplo 15** Verifique a lei de absorção  $x(x + y) = x$  usando identidades Booleanas dadas na tabela anterior.

## Solução.

$$\begin{aligned}x(x + y) &\equiv (x + 0)(x + y) && \text{(lei de identidade para a soma)} \\&\equiv x + (0 \cdot y) && \text{(distributividade da soma sobre o produto)} \\&\equiv x + y \cdot 0 && \text{(comutatividade do produto)} \\&\equiv x + 0 && \text{(lei de dominância para o produto)} \\&\equiv x && \text{(lei de identidade para a soma)}\end{aligned}$$



# Dualidade

- As identidades da tabela anterior vêm em pares (exceto pelas leis da dupla complementação, da unidade, e do zero).
- Para explicar a relação entre as duas identidades em cada par nós usamos o conceito **dualidade**.
- O **dual** de uma expressão Booleana é obtido pelo intercâmbio entre:
  - somas Booleanas e produtos Booleanos,
  - valores 0 e valores 1.
- Exemplo 16

 Encontre os duais das expressões abaixo.
  - O dual de  $x(y + 0)$  é:  $x + (y \cdot 1)$ .
  - O dual de  $\bar{x} \cdot 1 + (\bar{y} + z)$  é:  $(\bar{x} + 0)(\bar{y}z)$



# Dualidade: O princípio da dualidade

- O **dual de uma função Booleana**  $F$  representada por uma expressão Booleana é a função  $F^d$  representada pelo dual desta expressão correspondente.

A função dual  $F^d$  não depende da expressão Booleana particular usada para representar  $F$ .

- Um resultado importante é o **princípio da dualidade**:

*“Uma identidade entre funções representadas por expressões Booleanas permanece válida quando ambos os lados da igualdade são substituídos por seus duais.”*

- O princípio da dualidade é particularmente útil para derivar novas identidades.
- Exemplo 17 Construa uma identidade a partir de  $x(x + y) = x$  (uma das leis de absorção) usando o princípio da dualidade.

# Dualidade: O princípio da dualidade

- O **dual de uma função Booleana**  $F$  representada por uma expressão Booleana é a função  $F^d$  representada pelo dual desta expressão correspondente.

A função dual  $F^d$  não depende da expressão Booleana particular usada para representar  $F$ .

- Um resultado importante é o **princípio da dualidade**:

*“Uma identidade entre funções representadas por expressões Booleanas permanece válida quando ambos os lados da igualdade são substituídos por seus duais.”*

- O princípio da dualidade é particularmente útil para derivar novas identidades.
- Exemplo 17 Construa uma identidade a partir de  $x(x + y) = x$  (uma das leis de absorção) usando o princípio da dualidade.

**Solução.** Tomando duais em ambos lados da identidade, chegamos à nova identidade  $x + xy = x$  (que é a outra lei de absorção).



# Definição abstrata de álgebra Booleana

- Note que os resultados que estabelecemos podem ser traduzidos:
  - em resultados sobre lógica proposicional (onde complemento,  $+$ ,  $\cdot$ ,  $0$ ,  $1$ , correspondem a, respectivamente, a negação,  $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $F$ ,  $T$ );
  - em resultados sobre teoria de conjuntos (onde complemento,  $+$ ,  $\cdot$ ,  $0$ ,  $1$ , correspondem a, respectivamente, a complemento de conjuntos,  $\cup$ ,  $\cap$ ,  $\emptyset$ , conjunto universo  $U$ ).

(Verifique você mesmo(a) que as identidades Booleanas correspondem às identidades de conjuntos!)
- Formalizamos estes princípios como uma **álgebra Booleana abstrata**.
- Ao mostrar que uma estrutura (e.g., lógica proposicional, teoria de conjuntos, etc.) é uma álgebra Booleana, então os resultados estabelecidos sobre álgebras Booleanas em geral podem ser aplicados a esta estrutura particular!



# Definição abstrata de álgebra Booleana

- Uma **álgebra Booleana** é um conjunto  $B$  com duas operações binárias  $\wedge$  e  $\vee$ , elementos 0 e 1, e uma operação unária  $\bar{\phantom{x}}$  tais que as seguintes propriedades sejam válidas para todo  $x, y$ , e  $z$  em  $B$ :

$$\text{Leis de identidade : } \begin{cases} x \vee 0 = x \\ x \wedge 1 = x \end{cases}$$

$$\text{Leis de complemento : } \begin{cases} x \vee \bar{x} = 1 \\ x \wedge \bar{x} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Leis de associatividade : } \begin{cases} (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \\ (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) \end{cases}$$

$$\text{Leis de comutatividade : } \begin{cases} x \vee y = y \vee x \\ x \wedge y = y \wedge x \end{cases}$$

$$\text{Leis de distributividade : } \begin{cases} x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \end{cases}$$

# Representação de Funções Booleanas

# Representação de Funções Booleanas: Introdução

- Aqui vamos atacar dois problemas importantes da álgebra Booleana:
  1. Como encontrar uma expressão Booleana que represente uma função pretendida?
    - Veremos como qualquer função Booleana pode ser representada por expressões apenas com soma, produto, complemento, variáveis e valores Booleanos.
  2. Existe um conjunto menor de operadores que pode ser usado para representar todas as funções Booleanas?
    - Veremos que todas as funções Booleanas podem ser representadas usando apenas um operador!
- Ambos os problemas têm enorme importância prática no design de circuitos.

# Forma normal disjuntiva

- Uma maneira de representar qualquer função Booleana
- Facilmente computável a partir da tabela de valores da função
- Exemplo 18 Encontre uma expressão Booleana para a função  $F$  dada na tabela abaixo.

$x$	$y$	$z$	$F$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

# Forma normal disjuntiva

- Exemplo 18 (Continuação)

**Solução.** Primeiramente, note que para representar a função  $F$  precisamos de uma expressão Booleana que:

- assuma o valor 1 quando  $x = 1$ ,  $y = 0$ , e  $z = 1$ , e
- assuma o valor 0 em caso contrário.

Esta expressão pode ser formada tomando o produto Booleano de  $x$ ,  $\bar{y}$  e  $z$ , pois

$$x\bar{y}z = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 1, y = 0 \text{ e } z = 1 \\ 0, & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

Assim, chegamos à conclusão de que uma expressão para  $F$  é

$$F = x\bar{y}z .$$



# Forma normal disjuntiva

- Exemplo 19 Encontre uma expressão Booleana para a função  $G$  dada na tabela abaixo.

$x$	$y$	$z$	$G$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

# Forma normal disjuntiva

- Exemplo 19 Encontre uma expressão Booleana para a função  $G$  dada na tabela abaixo.

$x$	$y$	$z$	$G$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

**Solução.** Primeiramente, note que para representar a função  $G$  precisamos de uma expressão Booleana que:

- assuma o valor 1 quando:  $x = 0, y = 1$  e  $z = 0$ , ou  $x = 1, y = 1$  e  $z = 0$ .
- assuma o valor 0 em caso contrário.

# Forma normal disjuntiva

- Exemplo 19 (Continuação)

Esta expressão pode ser formada tomando a soma Booleana de dois produtos Booleanos, pois

$$\bar{x}y\bar{z} = \begin{cases} 1, & \text{se } x = z = 1 \text{ e } y = 0 \\ 0, & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

e

$$xy\bar{z} = \begin{cases} 1, & \text{se } x = z = 1 \text{ e } y = 0 \\ 0, & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

Assim, chegamos à conclusão de que uma expressão para  $G$  é

$$G = \bar{x}y\bar{z} + xy\bar{z}$$





# Forma normal disjuntiva

- Cada combinação de valores das variáveis para as quais a função tem o valor 1 leva a um produto Booleano das variáveis ou seus complementos.
  - Como generalizar?
- Um **literal** é uma variável Booleana ou seu complemento.
- Um **mintermo** das variáveis Booleanas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é um produto Booleano  $y_1, y_2, \dots, y_n$  em que para cada  $i$  temos  $y_i = x_i$  ou  $y_i = \overline{x_i}$ .  
(Um mintermo é um produto de  $n$  literais, com um literal para cada variável.)
- Exemplo 20 Encontre um mintermo que seja igual a 1 se  $x_1 = x_3 = 0$  e  $x_2 = x_4 = x_5 = 1$ .

# Forma normal disjuntiva

- Cada combinação de valores das variáveis para as quais a função tem o valor 1 leva a um produto Booleano das variáveis ou seus complementos.
  - Como generalizar?
- Um **literal** é uma variável Booleana ou seu complemento.
- Um **mintermo** das variáveis Booleanas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é um produto Booleano  $y_1, y_2, \dots, y_n$  em que para cada  $i$  temos  $y_i = x_i$  ou  $y_i = \overline{x_i}$ .  
(Um mintermo é um produto de  $n$  literais, com um literal para cada variável.)
- Exemplo 20

 Encontre um mintermo que seja igual a 1 se  $x_1 = x_3 = 0$  e  $x_2 = x_4 = x_5 = 1$ .

**Solução.** O mintermo é  $\overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4x_5$ .



# Forma normal disjuntiva

- Dada uma tabela de valores para uma função Booleana  $F$  de grau  $n$ :
  1. Tome o mintermo de cada combinação de variáveis que fazem  $F$  igual a 1.
  2. Defina  $F$  como a soma Booleana destes mintermos.

Esta soma dos mintermos é a **forma normal disjuntiva** ou **expansão em soma de produtos** da função Booleana.

- Exemplo 21 Encontre a forma normal disjuntiva da função Booleana  $\oplus$  ( $XOR$ ) definida na tabela abaixo.

$x_1$	$x_2$	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

# Forma normal disjuntiva

- Dada uma tabela de valores para uma função Booleana  $F$  de grau  $n$ :
  1. Tome o mintermo de cada combinação de variáveis que fazem  $F$  igual a 1.
  2. Defina  $F$  como a soma Booleana destes mintermos.

Esta soma dos mintermos é a **forma normal disjuntiva** ou **expansão em soma de produtos** da função Booleana.

- **Exemplo 21** Encontre a forma normal disjuntiva da função Booleana  $\oplus$  ( $XOR$ ) definida na tabela abaixo.

$x_1$	$x_2$	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

**Solução.** A função  $x_1 \oplus x_2$  assume valor 1 quando:

- $x_1 = 0$  e  $x_2 = 1$  (mintermo  $\overline{x_1}x_2$ ); ou
- $x_1 = 1$  e  $x_2 = 0$  (mintermo  $x_1\overline{x_2}$ ).

Logo  $x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1}x_2 + x_1\overline{x_2}$ .



# Forma normal disjuntiva

- Exemplo 22 Encontre a forma normal disjuntiva da função  
 $F(x, y, z) = (x + y)\bar{z}$ .

# Forma normal disjuntiva

- Exemplo 22 Encontre a forma normal disjuntiva da função  $F(x, y, z) = (x + y)\bar{z}$ .

**Solução.** Vamos resolver esta questão de duas maneiras.

A primeira maneira é construir a tabela do comportamento de  $F$  e derivar dela a forma normal conjuntiva.

$x$	$y$	$z$	$x + y$	$\bar{z}$	$(x + y)\bar{z}$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

# Forma normal disjuntiva

- Exemplo 22** Encontre a forma normal disjuntiva da função  $F(x, y, z) = (x + y)\bar{z}$ .

**Solução.** Vamos resolver esta questão de duas maneiras.

A primeira maneira é construir a tabela do comportamento de  $F$  e derivar dela a forma normal conjuntiva.

$x$	$y$	$z$	$x + y$	$\bar{z}$	$(x + y)\bar{z}$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

A função  $F$  assume valor 1 quando:

- $x = z = 0$  e  $y = 1$   
(mintermo  $\bar{x} y \bar{z}$ ); ou
- $x = 1$  e  $y = z = 0$   
(mintermo  $x \bar{y} \bar{z}$ ); ou
- $x = y = 1$  e  $z = 0$   
(mintermo  $x y \bar{z}$ ).

Logo  $F(x, y, z) = \bar{x} y \bar{z} + x \bar{y} \bar{z} + x y \bar{z}$ .

# Forma normal disjuntiva

- Exemplo 22 (Continuação)

A segunda maneira é usar identidades Booleanas para expandir o produto que representa a função  $F$ , e depois simplificá-lo.

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= (x + y) \bar{z} \\ &= x \bar{z} + y \bar{z} && \text{(Lei da distributividade)} \\ &= x 1 \bar{z} + 1 y \bar{z} && \text{(Lei da identidade)} \\ &= x (y + \bar{y}) \bar{z} + (x + \bar{x}) y \bar{z} && \text{(Lei da unidade)} \\ &= x y \bar{z} + x \bar{y} \bar{z} + x y \bar{z} + \bar{x} y \bar{z} && \text{(Lei da distributividade)} \\ &= x y \bar{z} + x \bar{y} \bar{z} + \bar{x} y \bar{z} && \text{(Lei de idempotência)} \end{aligned}$$





# Completude de Operadores

- Toda função Booleana pode ser expressa em forma normal disjuntiva
  - (Como você demonstraria isso?)
- Na forma normal disjuntiva utilizamos os operadores Booleanos de:
  - complemento  $\bar{\phantom{x}}$  ,
  - soma  $+$  , e
  - produto  $\cdot$  .
- Logo o conjunto  $\{\bar{\phantom{x}}, +, \cdot\}$  é **funcionalmente completo**.
- Isto leva à pergunta:

*“É possível encontrar um conjunto menor de operadores que seja funcionalmente completo?”*

# Completude de Operadores

- Podemos eliminar um dos operadores se ele poder ser expresso por outros.
- Em particular, podemos eliminar a soma Booleana, notando que:

$$x + y =$$

# Completude de Operadores

- Podemos eliminar um dos operadores se ele poder ser expresso por outros.
- Em particular, podemos eliminar a soma Booleana, notando que:

$$x + y = \overline{\overline{x + y}} \quad (\text{Lei da dupla complementação})$$
$$=$$

# Completude de Operadores

- Podemos eliminar um dos operadores se ele poder ser expresso por outros.
- Em particular, podemos eliminar a soma Booleana, notando que:

$$\begin{aligned}x + y &= \overline{\overline{x + y}} && \text{(Lei da dupla complementação)} \\ &= \overline{\overline{x} \overline{y}} && \text{(De Morgan)}\end{aligned}$$

Isso significa que  $\{\overline{\phantom{x}}, \cdot\}$  também é funcionalmente completo.

# Completude de Operadores

- Podemos eliminar um dos operadores se ele poder ser expresso por outros.
- Em particular, podemos eliminar a soma Booleana, notando que:

$$\begin{aligned}x + y &= \overline{\overline{x + y}} && \text{(Lei da dupla complementação)} \\ &= \overline{\overline{x} \overline{y}} && \text{(De Morgan)}\end{aligned}$$

Isso significa que  $\{\overline{\phantom{x}}, \cdot\}$  também é funcionalmente completo.

- De forma similar, podemos eliminar o produto Booleana, notando que:

$$xy =$$

# Completude de Operadores

- Podemos eliminar um dos operadores se ele poder ser expresso por outros.
- Em particular, podemos eliminar a soma Booleana, notando que:

$$\begin{aligned}x + y &= \overline{\overline{x + y}} && \text{(Lei da dupla complementação)} \\ &= \overline{\overline{x} \overline{y}} && \text{(De Morgan)}\end{aligned}$$

Isso significa que  $\{\overline{\phantom{x}}, \cdot\}$  também é funcionalmente completo.

- De forma similar, podemos eliminar o produto Booleana, notando que:

$$\begin{aligned}xy &= \overline{\overline{xy}} && \text{(Lei da dupla complementação)} \\ &= \end{aligned}$$

# Completude de Operadores

- Podemos eliminar um dos operadores se ele poder ser expresso por outros.
- Em particular, podemos eliminar a soma Booleana, notando que:

$$\begin{aligned}x + y &= \overline{\overline{x + y}} && \text{(Lei da dupla complementação)} \\ &= \overline{\overline{x} \overline{y}} && \text{(De Morgan)}\end{aligned}$$

Isso significa que  $\{\overline{\phantom{x}}, \cdot\}$  também é funcionalmente completo.

- De forma similar, podemos eliminar o produto Booleana, notando que:

$$\begin{aligned}xy &= \overline{\overline{xy}} && \text{(Lei da dupla complementação)} \\ &= \overline{\overline{x} + \overline{y}} && \text{(De Morgan)}\end{aligned}$$

Isso significa que  $\{\overline{\phantom{x}}, +\}$  também é funcionalmente completo.

# Completude de Operadores

- O operador **NAND**, denotado por  $|$ , é definido como

$$0 | 0 = 1, \quad 0 | 1 = 1, \quad 1 | 0 = 1, \quad 1 | 1 = 0.$$

- O conjunto  $\{|\}$  é funcionalmente completo pois  $\{\bar{\phantom{x}}, \cdot\}$  também o é e *NAND* pode representar complemento e produtos Booleanos.
- Primeiro, note que  $\bar{x} = x | x$ , como mostra a tabela abaixo.
- Segundo, note que  $xy = (x | y) | (x | y)$ , como mostra a tabela abaixo.

$x$	$\bar{x}$	$x   x$
0	1	1
1	0	0

$x$	$y$	$xy$	$x   y$	$(x   y)   (x   y)$
0	0	0	1	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	1