

DCC638 - Introdução à Lógica Computacional  
2023.2

## Estruturas Básicas: Funções, Sequências, e Somatórios

Área de Teoria DCC/UFMG

# Funções

# Funções: Introdução

- Frequentemente temos que atribuir a cada elemento de um conjunto um elemento particular de outro conjunto.

Por exemplo, podemos:

- 1 Atribuir a cada aluno de Introdução à Lógica Computacional uma nota.
  - 2 Atribuir a cada inteiro seu quadrado.
  - 3 Atribuir a cada país seu chefe de Estado.
- O conceito de **função** formaliza este tipo de atribuição.
  - Em matemática e ciência da computação, funções são fundamentais:
    - na definição de estruturas discretas como **sequências** e **strings**,
    - no estudo de complexidade de algoritmos,
    - na produção de algoritmos recursivos,
    - ...

- Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos não-vazios.

Uma **função**  $f$  de  $A$  para  $B$  é uma atribuição de exatamente um elemento de  $B$  a cada elemento de  $A$ .

Escrevemos

$$f(a) = b$$

se  $b$  for o único elemento de  $B$  atribuído através de  $f$  ao elemento  $a$  de  $A$ .

# Funções

- Se  $f$  é uma função de  $A$  para  $B$ , escrevemos

$$f : A \rightarrow B$$

para denotar o **tipo** da função.

O conjunto  $A$  é chamado de **domínio** de  $f$ .

O conjunto  $B$  é chamado de **co-domínio** ou **contra-domínio** de  $f$ .

A **imagem** de  $f$  é o conjunto de valores que  $f$  pode assumir:

$$\text{imagem de } f = \{b \in B \mid b = f(a) \text{ para algum } a \in A\}$$

A **imagem inversa** de um elemento  $b \in B$  é o conjunto de valores  $a \in A$  que são mapeados a  $b$  via  $f$ :

$$\text{imagem inversa de } b = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

# Funções: Exemplos

- Exemplo 1 Sejam os conjuntos  $A = \{x, y, z\}$  e  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ .

Seja a função  $f : A \rightarrow B$  definida pelo diagrama abaixo.

- Domínio de  $f$ :  $\{x, y, z\}$
- Co-domínio de  $f$ :  $\{1, 2, 3, 4\}$
- Imagem de  $f$ :  $\{2, 4\}$
- $f(x) = 2$
- $f(y) = 4$
- $f(z) = 2$
- Imagem inversa de 1:  $\emptyset$
- Imagem inversa de 2:  $\{x, z\}$
- Imagem inversa de 3:  $\emptyset$
- Imagem inversa de 4:  $\{y\}$
- A função  $f$  pode ser representada como o **conjunto de pares ordenados**:

$$f = \{(x, 2), (y, 4), (z, 2)\}$$



# Funções: Exemplos

- Exemplo 2 Outros exemplos de funções:

- Função quadrado  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$f(x) = x^2$$

- Função sucessor  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ :

$$f(n) = n + 1$$

- Função constante  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$ :

$$f(r) = 2$$

- Função líder  $f : P \rightarrow H$ , em que  $P$  é o conjunto de todos os países,  $H$  é o conjunto de indivíduos humanos, e

$$f(p) = c, \quad \text{em que } c \text{ é o chefe de Estado do país } p.$$

# Igualdade de funções

- Duas funções  $f$  e  $g$  são **iguais** sse elas:
  - têm o mesmo domínio
  - têm o mesmo co-domínio
  - mapeiam cada elemento do domínio ao mesmo elemento do co-domínio.

Formalmente, para duas funções  $f$  e  $g$  definidas em  $A \rightarrow B$ :

$$f = g \quad \text{sse} \quad \forall a \in A. f(a) = g(a).$$

- Exemplo 3 Sejam as funções definidas dos reais para os reais não-negativos:

$$f(x) = |x| \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{x^2}.$$

Então  $f = g$ , pois para todo  $x \in \mathbb{R}$ :

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$





# Função injetiva

- Uma função  $f : A \rightarrow B$  é uma **função injetiva** (ou **injetora** ou **um-para-um**) sse para todos  $a_1, a_2 \in A$ :

$$a_1 \neq a_2 \rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

ou, equivalentemente,

$$f(a_1) = f(a_2) \rightarrow a_1 = a_2$$

- Intuitivamente, uma função é injetiva se cada elemento do domínio é mapeado em um elemento diferente do co-domínio.

- Exemplo 4 Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  em cada caso abaixo. Então:

- $f(x) = x + 1$   
é injetiva;

- $f(x) = x/10$   
é injetiva;

- $f(x) = x^2$   
não é injetiva;



# Função sobrejetiva

- Uma função  $f : A \rightarrow B$  é uma **função sobrejetiva** (ou **sobrejetora**) sse para todo  $b \in B$  é possível achar um  $a \in A$  tal que  $f(a) = b$ .
- Intuitivamente, uma função é sobrejetora se cada elemento do co-domínio é imagem de pelo menos um elemento do domínio.
- Exemplo 5

 Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  em cada caso abaixo. Então:
  - $f(x) = x + 1$  é sobrejetiva;
  - $f(x) = x/10$  é sobrejetiva;
  - $f(x) = x^2$  não é sobrejetiva;



# Função bijetiva

- Uma função  $f : A \rightarrow B$  é uma **função bijetiva** (ou **bijetora**) sse  $f$  é injetiva e sobrejetiva.
- Exemplo 6

 Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  em cada caso abaixo. Então:
  - $f(x) = x + 1$  é bijetiva, pois é injetiva e sobrejetiva;
  - $f(x) = x/10$  é bijetiva, pois é injetiva e sobrejetiva;
  - $f(x) = 2^x$  não é bijetiva (é injetiva mas não é sobrejetiva);
  - $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$  não é bijetiva (é sobrejetiva mas não é injetiva).



# Função inversa

- Seja  $f : A \rightarrow B$  uma função bijetiva.

A **função inversa** de  $f$  é  $f^{-1} : B \rightarrow A$  tal que

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{sse} \quad y = f(x)$$

- Exemplo 7** A função  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  definida como  $f(x) = x + 1$  é invertível porque ela é bijetiva. Sua inversa é

$$f^{-1}(x) = x - 1$$

- Exemplo 8** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(x) = x^2$  não é invertível porque ela não é bijetiva:  $f(2) = f(-2) = 4$ , logo  $f^{-1}(4)$  não é definido.

# Composição de funções

- Sejam  $g : A \rightarrow B'$  e  $f : B \rightarrow C$  funções tais que a imagem de  $g$  é um subconjunto do domínio de  $f$ , i.e.,  $B' \subseteq B$ .

A **função composta** de  $f$  com  $g$ , denotada por  $f \circ g : A \rightarrow C$ , é definida para todo  $a \in A$  da seguinte forma:

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

A função  $f \circ g$  é chamada de **composição de  $f$  e  $g$** .

# Composição de funções

- Exemplo 9 Sejam  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  e  $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  tais que

$$f(n) = n + 1 \quad \text{e} \quad g(n) = n^2.$$

É verdade que  $f \circ g = g \circ f$ ?

**Solução.** Para todo  $n \in \mathbb{Z}$  temos que

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(n^2) = n^2 + 1.$$

porém

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n + 1) = (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1,$$

Logo  $f \circ g \neq g \circ f$ .

- O exemplo acima mostra que a composição de funções não é comutativa.



# Composição com a função identidade

- Dado um domínio  $A$ , a **função identidade**  $\iota_A : A \rightarrow A$  é definida como:

$$\iota_A(a) = a, \quad \text{para todo } a \in A.$$

- **Teorema.** Se  $f$  é uma função de  $X$  para  $Y$ , e  $\iota_X$  é a função identidade em  $X$  e  $\iota_Y$  é a função identidade em  $Y$ , então

$$f \circ \iota_X = f$$

$$\iota_Y \circ f = f$$

**Demonstração.** Exercício para o(a) estudante!

- **Teorema.** Se  $f : X \rightarrow Y$  uma função bijetiva com função inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ , então

$$f^{-1} \circ f = \iota_X$$

$$f \circ f^{-1} = \iota_Y$$

**Demonstração.** Exercício para o(a) estudante!

# Funções parciais

- Uma **função parcial**  $f$  de um conjunto  $A$  para um conjunto  $B$  atribui a cada elemento  $a$  em um subconjunto de  $A$ , chamado de **domínio de definição** de  $f$ , um único elemento  $b$  de  $B$ .

Os conjuntos  $A$  e  $B$  são chamados de **domínio** e **co-domínio** de  $f$ , respectivamente.

Dizemos que  $f$  é **indefinida** para elementos de  $A$  que não estão no domínio de definição de  $f$ .

Quando o domínio de definição de  $f$  é o próprio domínio  $A$ , dizemos que  $f$  é uma **função total**.

- **Exemplo 10** A função  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  em que  $f(n) = \sqrt{n}$  é uma função parcial de  $\mathbb{Z}$  para  $\mathbb{R}$  em que o domínio da definição é o conjunto dos inteiros não-negativos.

A função  $f$  é indefinida para os inteiros negativos.





# Sequências

# Sequências: Introdução

- **Sequências** são listas ordenadas de elementos.
- Sequências são estruturas discretas que aparecem com frequência em ciência da computação:
  - 1 progressão aritmética,
  - 2 progressão geométrica,
  - 3 strings,
  - 4 ...
- Nesta seção vamos estudar como definir sequências, e como encontrar regras para geração de sequências.

# Sequências

- Uma sequência é uma estrutura utilizada para representar uma lista ordenada.

Formalmente, uma **sequência** é uma função definida de um subconjunto dos inteiros para um conjunto arbitrário  $S$ .

Normalmente o domínio de uma sequência são os naturais ou os inteiros positivos, mas qualquer subconjunto dos inteiros pode ser usado como domínio.

- Usamos  $a_n$  para denotar a imagem do inteiro  $n$ .

Cada  $a_n$  é chamado de um **termo** da sequência.

A sequência como um todo é frequentemente denotada como  $\{a_n\}$ .

- Exemplos:
  - ① A sequência (infinita) dos números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...
  - ② A sequência (infinita) de  $1/n$ , para  $n$  inteiro positivo: 1,  $1/2$ ,  $1/3$ ,  $1/4$ ,  $1/5$ ,  $1/6$ , ...
  - ③ A sequência (finita) de dias da semana: domingo, segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado.

# Sequências importantes

- Uma **progressão aritmética** é uma sequência da forma

$$a, \quad a + d, \quad a + 2d, \quad a + 3d, \quad \dots, \quad a + nd, \quad \dots$$

em que o **termo inicial**  $a$  e a **diferença comum**  $d$  são números reais.

- Exemplo 11 A sequência  $\{a_n\}$  com

$$a_n = -1 + 4n$$

é uma progressão aritmética com:

- termo inicial:  $-1$
- diferença comum:  $4$

Seus termos iniciais  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$  são:

$$-1, \quad 3, \quad 7, \quad 11, \quad 15, \quad 19, \quad \dots$$

# Sequências importantes

- Uma **progressão geométrica** é uma sequência da forma

$$a, \quad ar, \quad ar^2, \quad ar^3, \quad \dots, \quad ar^n, \quad \dots$$

em que o **termo inicial**  $a$  e a **razão**  $r$  são números reais.

- Exemplo 12 A sequência  $\{g_n\}$  com

$$g_n = 6 \cdot (1/3)^n$$

é uma progressão geométrica com:

- termo inicial: 6
- razão:  $1/3$

Seus termos iniciais  $g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, \dots$  são:

$$6, \quad 2, \quad 2/3, \quad 2/9, \quad 2/27, \quad 2/81, \quad \dots$$

# Fórmulas explícitas para sequências

- Uma **fórmula explícita** define como obter o  $n$ -ésimo termo de uma sequência diretamente em função de  $n$ .

Uma mesma sequência pode ser definida por mais de uma fórmula explícita.

- Exemplo 13 A sequência

$$1, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \dots, \quad \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad \dots$$

pode ser definida como uma função dos naturais para os reais:

$$0 \mapsto 1 \quad 1 \mapsto -\frac{1}{2} \quad 2 \mapsto \frac{1}{3} \quad 3 \mapsto -\frac{1}{4} \quad \dots \quad n \mapsto \frac{(-1)^n}{n+1} \quad \dots$$

Formalmente, a sequência pode ser descrita por  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , em que

$$f(n) = \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

# Fórmulas explícitas para sequências

- Exemplo 13 (Continuação)

A mesma sequência pode ser definida como uma função dos inteiros positivos para os reais:

$$1 \mapsto 1 \quad 2 \mapsto -\frac{1}{2} \quad 3 \mapsto \frac{1}{3} \quad 4 \mapsto -\frac{1}{4} \quad \dots \quad n \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \dots$$

Formalmente, a sequência pode ser descrita por  $g : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , em que

$$g(n) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$



# Definindo uma sequência a partir de seus termos

- Um problema comum é, dados alguns termos iniciais de uma sequência, determinar uma regra para gerar a sequência como um todo.
- Maneiras típicas de se definir uma sequência são:
  - Prover uma fórmula explícita para cada termo da sequência.
  - Prover um algoritmo que gere a sequência.
  - Prover uma fórmula recursiva para cada termo da sequência.
- É importante notar que, dado um número limitado de termos

$$a_1, a_2, \dots, a_i$$

de uma sequência, podemos achar uma regra que gere estes termos, mas esta regra é garantida apenas para os termos  $a_1, a_2, \dots, a_i$  apresentados.

Nada garante que a fórmula ou algoritmo valha para  $a_{i+1}$ , ou para a sequência como um todo!



# Definindo uma sequência a partir de seus termos

- Exemplo 14 Seja a sequência cujos 5 primeiros termos são:

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5.$$

A fórmula

$$a_n = n, \quad \text{para } n \geq 1$$

gera estes 5 termos corretamente, e prevê que

$$a_6 = 6.$$

Por outro lado, o algoritmo

*“Gere todos os naturais cujo resto da divisão por 10 está entre 1 e 5”*

também gera estes mesmos cinco termos, e prevê que

$$a_6 = 11.$$

As duas descrições concordam para todos os termos dados, mas geram sequências diferentes. Apenas com as informações dadas não há como dizer qual sequência é mais apropriada.



# Provendo uma fórmula explícita para a sequência

- **Exemplo 15** Encontre uma fórmula explícita para a sequência  $\{a_n\}$  cujos 10 primeiros termos são:

1, 7, 25, 79, 241, 727, 2185, 6559, 19681, 59047.

# Provendo uma fórmula explícita para a sequência

- **Exemplo 15** Encontre uma fórmula explícita para a sequência  $\{a_n\}$  cujos 10 primeiros termos são:

1, 7, 25, 79, 241, 727, 2185, 6559, 19681, 59047.

## **Solução.**

A seguinte fórmula explícita pode gerar os 10 primeiros termos desta sequência:

$$a_n = 3^n - 2, \quad \text{para inteiros } n \geq 1.$$



# Provendo uma fórmula explícita para a sequência

- **Exemplo 16** Encontre uma fórmula explícita para a sequência  $\{a_n\}$  cujos 10 primeiros termos são:

1,   -2,   3,   -4,   5,   -6,   7,   -8,   9,   -10.

# Provendo uma fórmula explícita para a sequência

- Exemplo 16 Encontre uma fórmula explícita para a sequência  $\{a_n\}$  cujos 10 primeiros termos são:

$$1, \quad -2, \quad 3, \quad -4, \quad 5, \quad -6, \quad 7, \quad -8, \quad 9, \quad -10.$$

## Solução.

Esta é uma **sequência alternante**, ou seja, cada termo  $a_n$  possui sinal oposto ao do termo  $a_{n-1}$ .

A seguinte fórmula explícita pode gerar os 10 primeiros termos desta sequência:

$$a_n = (-1)^{n+1} n, \quad \text{para inteiros } n \geq 1.$$



# Provendo um algoritmo para gerar a sequência

- Exemplo 17 Como produzir os termos de uma sequência cujos 10 primeiros termos são:

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4?

## Solução.

Uma possível maneira é seguir o algoritmo seguinte:

*“Começando de 1, em ordem crescente, cada natural  $n$  é repetido  $n$  vezes na sequência.”*



# Provendo uma algoritmo para gerar a sequência

- Exemplo 18 Como produzir os termos de uma sequência cujos 16 primeiros termos são:

0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0?

# Provendo um algoritmo para gerar a sequência

- Exemplo 18 Como produzir os termos de uma sequência cujos 16 primeiros termos são:

0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0?

## Solução.

Uma possível maneira é seguir o algoritmo seguinte:

*“Para cada natural  $n \geq 1$ , em ordem crescente, adicione à sequência  $n$  termos 0, seguidos de  $n$  termos 1.”*

Desafio: Você consegue encontrar uma fórmula explícita para esta mesma sequência?





# Provendo uma fórmula recursiva para gerar a sequência

- Uma **fórmula recursiva** para uma sequência define cada termo em função de termos anteriores.

Definições recursivas são baseadas em relações de recorrência.

- Uma **relação de recorrência** para uma sequência  $\{a_n\}$  é uma equação que expressa  $a_n$  em termos de um ou mais termos prévios na sequência (i.e.,  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ ) para cada  $n \geq n_0$ , em que  $n_0$  é um inteiro não-negativo.

# Provendo uma fórmula recursiva para gerar a sequência

- Exemplo 19 A sequência

1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5 040, 40 320, 362 880, ...

pode ser definida pela fórmula explícita

$$a_n = n!, \quad n \geq 0,$$

ou pela fórmula recursiva

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_n = n \cdot a_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

- Por enquanto vamos nos focar em fórmulas explícitas e algoritmos. Fórmulas recursivas serão estudadas em profundidade mais no curso de **Matemática Discreta**.

# Função piso e função teto

# Funções importantes: Função piso e função teto

- A função **piso** ou **chão** (em inglês, *floor*) atribui a cada número real  $x$  o maior número inteiro menor ou igual a ele.

O valor da função piso é denotado por  $\lfloor x \rfloor$ .

- A função **teto** (em inglês, *ceiling*) atribui a cada número real  $x$  o menor número inteiro maior ou igual a ele.

O valor da função teto é denotado por  $\lceil x \rceil$ .

- Tanto a função piso quanto a função teto têm tipo  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ .

- Exemplo 20

 :

- $$\begin{aligned}\lfloor \pi \rfloor &= 3 \\ \lceil \pi \rceil &= 4\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\lfloor -2.7 \rfloor &= -3 \\ \lceil -2.7 \rceil &= -2\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\lfloor 42 \rfloor &= 42 \\ \lceil 42 \rceil &= 42\end{aligned}$$



# Funções importantes: Função piso e função teto

- Algumas propriedades úteis das funções piso e teto:

1.  $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$

2.  $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$

3.  $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

- Para demonstrar propriedades sobre funções piso e teto, é útil observar que:

$$x = \lfloor x \rfloor + \varepsilon, \quad \text{para algum } 0 \leq \varepsilon < 1,$$

$$x = \lceil x \rceil - \varepsilon, \quad \text{para algum } 0 \leq \varepsilon < 1.$$

# Funções importantes: Função piso e função teto

- Exemplo 21 Vamos demonstrar a propriedade de que  $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$ .

**Demonstração.** Vamos representar o número  $x$  como  $n + \epsilon$ , em que  $n \in \mathbb{Z}$  e  $0 \leq \epsilon < 1$ .

Há dois casos a se considerar, dependendo se  $\epsilon = 0$  ou não.

Caso 1:  $\epsilon = 0$ . Neste caso  $x = n$  e  $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil = -n$ .

Caso 2:  $0 < \epsilon < 1$ . Primeiramente, note que

$$\begin{aligned}\lfloor -x \rfloor &= \lfloor -(n + \epsilon) \rfloor && \text{(pois } x = n + \epsilon) \\ &= \lfloor -n - \epsilon \rfloor \\ &= -(n + 1) && \text{(pela definição da função piso),}\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}-\lceil x \rceil &= -\lceil n + \epsilon \rceil && \text{(pois } x = n + \epsilon) \\ &= -(n + 1) && \text{(pela definição da função teto),}\end{aligned}$$

de onde concluímos que  $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$ .



# Somatórios e Produtórios

# Somatórios

- Muitas vezes estamos interessados na soma ou no produto de todos os termos de uma sequência.
- Seja uma sequência  $\{a_k\}$ . O **somatório** dos termos

$$a_m, \quad a_{m+1}, \quad a_{m+2}, \quad \dots, \quad a_n$$

de  $\{a_k\}$  é a soma

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n.$$

Para representação do somatório, usamos o **símbolo de somatório**  $\Sigma$ :

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n.$$



# Somatórios

- Exemplo 22 Seja a sequência  $\{a_k\}$  em que  $a_k = k^2$ .

$$\sum_{k=3}^6 a_k = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 9 + 16 + 25 + 36 = 86$$

- Uma notação alternativa para somatórios é

$$\sum_{s \in S} f(s),$$

em que  $S$  é um conjunto de domínio e  $f$  é uma função com domínio  $S$ .

- Exemplo 23

$$\sum_{s \in \{0,3,7\}} s^2 = 0^2 + 3^2 + 7^2 = 0 + 9 + 49 = 58.$$

# Variáveis ligadas e livres em um somatório

- A **variável ligada** de um somatório é a variável sob a qual os termos do somatório são definidos.

As demais variáveis são chamadas de **variáveis livres**.

- Exemplo 24 Em

$$\sum_{i=1}^n (i - 1)$$

$i$  é a variável ligada;  $n$  é uma variável livre.

- Exemplo 25 Em

$$\sum_{k=m}^n k^2$$

$k$  é a variável ligada;  $m$  e  $n$  são variáveis livres.

# Mudança de variável em um somatório

- A variável ligada não é relevante:  
trocar a variável ligada não altera o valor do somatório.

- Exemplo 26

$$\sum_{i=1}^n \frac{(i+1)}{i} = \sum_{j=1}^n \frac{(j+1)}{j} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{(\alpha+1)}{\alpha}$$

- Variáveis livres são relevantes:  
trocar uma variável livre pode alterar o valor do somatório.

- Exemplo 27 Os somatórios abaixo são distintos, pois se  $m \neq n$ , eles darão valores diferentes.

$$\sum_{i=1}^n \frac{(i+1)}{i} \neq \sum_{i=1}^m \frac{(i+1)}{i}$$

# Mudança de variável em um somatório

- Dois somatórios são **idênticos** sse eles possuem termos idênticos.

- Exemplo 28

$$\sum_{j=2}^4 (j-1)^2 = \sum_{k=1}^3 k^2,$$

pois

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^4 (j-1)^2 &= (2-1)^2 + (3-1)^2 + (4-1)^2 \\ &= 1^2 + 2^2 + 3^2\end{aligned}$$

e

$$\sum_{k=1}^3 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2$$

# Mudança de variável em um somatório

- Exemplo 29 Substitua  $k + 1$  na soma abaixo por  $j$ :

$$\sum_{k=0}^6 \frac{1}{k+1}$$

Passos:

1. Calcule os novos limites do somatório:  $\begin{cases} \text{Para } k = 0, & j = 0 + 1 = 1 \\ \text{Para } k = 6, & j = 6 + 1 = 7 \end{cases}$
2. Calcule o termo geral:

Como  $j = k + 1$ , então  $k = j - 1$ . Logo,

$$\frac{1}{k+1} = \frac{1}{(j-1)+1} = \frac{1}{j}$$

A soma pode ser reescrita como

$$\sum_{k=0}^6 \frac{1}{k+1} = \sum_{j=1}^7 \frac{1}{j}.$$

# Produtórios

- Seja uma sequência  $\{a_k\}$ . O **produtório** dos termos

$$a_m, \quad a_{m+1}, \quad a_{m+2}, \quad \dots, \quad a_n$$

de  $\{a_k\}$  é o produto

$$a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \dots \cdot a_n.$$

Para representação do produtório, usamos o **símbolo de produtório**  $\prod$ :

$$\prod_{i=m}^n a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \dots \cdot a_n.$$

- Exemplo 30

 $\prod_{i=1}^3 i^i = 1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 = 1 \cdot 4 \cdot 27 = 108$

- As definições de **variável ligada** e **variáveis livres** para somatórios também se aplicam a produtórios.

# Propriedades de somatórios e produtórios

- Dadas duas sequências de números reais

$$a_m, \quad a_{m+1}, \quad a_{m+2}, \quad \dots,$$

$$b_m, \quad b_{m+1}, \quad b_{m+2}, \quad \dots,$$

e seja  $c$  é um número real qualquer.

Então as seguintes equações são válidas para qualquer  $n \geq m$ :

$$\textcircled{1} \quad \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k = \sum_{k=m}^n (a_k + b_k)$$

$$\textcircled{2} \quad c \cdot \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^n c \cdot a_k$$

$$\textcircled{3} \quad \left( \prod_{k=m}^n a_k \right) \cdot \left( \prod_{k=m}^n b_k \right) = \prod_{k=m}^n (a_k \cdot b_k)$$