DCC638 - Introdução à Lógica Computacional
2023.2

Demonstrações

Área de Teoria DCC/UFMG

Introdução

- Em diversas situações é preciso deduzir **conclusões** a partir de **premissas**:
  1. em matemática: estabelecer verdades absolutas (teoremas),
  2. em ciência da computação: verificar que propriedades de um sistema são válidas, dada sua especificação,
  3. em política/filosofia: demonstrar que certas ideias são bem fundamentadas.
- O processo de derivar conclusões de premissas é uma *argumentação*.
- Uma **demonstração** é uma argumentação, formal, de que a verdade de uma afirmação segue a partir da verdade de um conjunto de premissas.

Demonstrações em lógica proposicional

- Uma **demonstração** é uma sequência de proposições.
- As proposições iniciais são chamadas de **premissas**.
- A proposição final é chamada de **conclusão**.
- Cada proposição além das premissas deve ser derivada por um **argumento válido**.
- Uma **demonstração válida** é aquela em que a verdade de suas premissas implica, através de argumentos válidos, na verdade de sua conclusão.

Argumentos válidos em lógica proposicional

- $\boxed{\text{Exemplo 1}}$ Considere o seguinte argumento envolvendo proposições:

  1. *"Se você está matriculado em Introdução à Lógica Computacional, você tem acesso à página da disciplina."*
  2. *"Você está matriculado em Introdução à Lógica Computacional."*

  Logo,

  3. *"Você tem acesso à página da disciplina."*

  Essa é uma argumentação válida?

  Ou seja, é verdade que a conclusão (3) é verdadeira sempre que as premissas (1) e (2) forem ambas verdadeiras?

Argumentos válidos em lógica proposicional

- $\boxed{\text{Exemplo 1}}$ (Continuação)

Solução. Vamos analisar a estrutura do argumento.

Sejam as proposições:

- p: *"Você está matriculado em Introdução à Lógica Computacional"*, e
- q: *"Você tem acesso à página da disciplina"*.

O argumento anterior tem a estrutura

$$\frac{p \qquad p \to q}{q}$$

representando que,

1. se as premissas p e $p \to q$ são verdadeiras
2. então a conclusão q é verdadeira

Argumentos válidos em lógica proposicional

- $\boxed{\text{Exemplo 1}}$ (Continuação)

Considerando p e q como variáveis proposicionais, podemos usar uma tabela da verdade para verificar que sempre que as premissas são verdadeiras, a conclusão também é.

		Premissas		**Conclusão**
p	**q**	$\mathbf{p \to q}$	**p**	**q**
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

Assim, o argumento

$$\frac{p \qquad p \to q}{q}$$

é válido.

- Note que $(p \wedge p \to q) \to q$ é uma tautologia!

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Um argumento válido pode ser interpretado como uma regra de <u>preservação da verdade</u>:
    1. De premissas verdadeiras um argumento válido garante uma conclusão verdadeira.
    2. Por outro lado de premissas falsas qualquer conclusão é possível.

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Um **argumento inválido** é aquele em que a verdade das premissas não garante a verdade da conclusão.

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ Mostre que o argumento a seguir é <u>inválido</u>.

$$\frac{p \to q \qquad q}{p}$$

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Um **argumento inválido** é aquele em que a verdade das premissas não garante a verdade da conclusão.

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ Mostre que o argumento a seguir é <u>inválido</u>.

$$\frac{p \to q \qquad q}{p}$$

Solução.

A terceira linha da tabela da verdade mostra que as premissas $p \to q$ e q podem ser ambas verdadeiros, e mesmo assim a conclusão q ser falsa. Assim, o formato de argumento é inválido.

		Premissas		**Conclusão**
p	**q**	**p → q**	**q**	**p**
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	F

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Um **argumento inválido** é aquele em que a verdade das premissas não garante a verdade da conclusão.

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ Mostre que o argumento a seguir é <u>inválido</u>.

$$\frac{p \to q \qquad q}{p}$$

Solução.

A terceira linha da tabela da verdade mostra que as premissas $p \to q$ e q podem ser ambas verdadeiros, e mesmo assim a conclusão q ser falsa. Assim, o formato de argumento é inválido.

		Premissas		**Conclusão**
p	**q**	**p → q**	**q**	**p**
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	F

- Note que $(p \to q \land q) \to p$ **não** é uma tautologia!

Argumentos válidos em lógica proposicional

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ (Continuação)

  Como um exemplo de como este formato de argumento é inválido, note que das premissas

  - *"Se Bill Gates ganhar na loteria, ela fica rico"* e
  - *"Bill Gates é rico"*

  não se pode concluir que necessariamente

  - *"Bill Gates ganhou na loteria"*.

Validade vs. verdade

- A validade é uma propriedade do argumento.
- A verdade é uma propriedade das premissas e conclusões do argumento.
- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$

  Considere o argumento

  $$\begin{array}{rl} & \textit{“Se a França é um país rico, então sua língua oficial é o inglês.”} \\ & \textit{“A França é um país rico.”} \\ \hline \therefore & \textit{“A lingua oficial da França é o inglês.”} \end{array}$$

  Este argumento é um argumento válido.

  Note, entretanto, que sua primeira premissa é falsa, assim como sua conclusão é falsa.

Argumentos válidos em lógica proposicional: validade vs. verdade

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ (Continuação)

  Considere o argumento:

  $$\begin{array}{rl} & \text{\textit{“Se Londres é uma metrópole, então ela tem prédios altos.”}} \\ & \text{\textit{“Londres tem prédios altos.”}} \\ \hline \therefore & \text{\textit{“Londres é uma metrópole.”}} \end{array}$$

  Este argumento é um <u>argumento inválido</u>.

  Note, entretanto, que sua <u>conclusão é verdadeira</u>.

  (Porém a veracidade da conclusão é incidental: ela não segue necessariamente da verdade das premissas.)

Argumentos válidos em lógica proposicional: validade vs. verdade

- Em resumo, a conclusão de um argumento é garantidamente verdadeira se:

  1. o argumento for válido, e
  2. todas as suas premissas forem verdadeiras.

  Caso contrário, a verdade da conclusão não é garantida.

Regras de inferência para lógica proposicional

- Argumentos válidos correspondem a tautologias
  - Nós os chamamos de **regras de inferência**
- Demonstrações complexas podem ser difíceis de verificar
  - Por exemplo, a tabela de verdade de uma demonstração envolvendo 10 variáveis tem $2^{10} = 1\,024$ linhas.
- Construímos demonstrações através de passos mais simples, usando regras de inferência.

Regras de inferência

Regras de inferência para lógica proposicional

- Modus ponens (do latim para "*modo de afirmação*"):

$$\frac{p \qquad p \to q}{q}\,\mathrm{MP}$$

A regra de modus ponens nos diz que:

1. se uma afirmação condicional $p \to q$ é verdadeira,

   e

2. a hipótese p do condicional é verdadeira,

   então

3. a conclusão q do condicional é necessariamente verdadeira.

- $\boxed{\text{Exemplo 4}}$ Suponha que saibamos que

    1. *"Se fizer sol hoje, eu vou ao clube"*,

    e que

    2. *"Está fazendo sol hoje"*,

    então, por modus ponens, podemos concluir que

    3. *"Eu vou ao clube."*

Regras de inferência para lógica proposicional

- Algumas regras de inferência comuns na lógica proposicional:

Nome	Inferência
Modus ponens	$\dfrac{p \qquad p \to q}{q}\ \mathrm{MP}$
Modus tollens	$\dfrac{p \to q \qquad \neg q}{\neg p}\ \mathrm{MT}$
Silogismo hipotético	$\dfrac{p \to q \qquad q \to r}{p \to r}\ \mathrm{SH}$
Silogismo disjuntivo	$\dfrac{p \vee q \qquad \neg p}{q}\ \mathrm{SD}$

Nome	Inferência
Adição disjuntiva	$\dfrac{p}{p \vee q}\ \mathrm{AD}$
Simplificação conjuntiva	$\dfrac{p \wedge q}{p}\ \mathrm{SC}$
Adição conjuntiva	$\dfrac{p \qquad q}{p \wedge q}\ \mathrm{AC}$
Resolução	$\dfrac{p \vee q \qquad \neg p \vee r}{q \vee r}\ \mathrm{R}$

Regras de inferência para lógica proposicional

- $\boxed{\text{Exemplo 5}}$ Justifique a argumentação abaixo:

  "Se Zeus é humano, então Zeus é mortal.

  Zeus não é mortal.

  Logo, Zeus não é humano."

Regras de inferência para lógica proposicional

- $\boxed{\text{Exemplo 5}}$ Justifique a argumentação abaixo:

"Se Zeus é humano, então Zeus é mortal.

Zeus não é mortal.

Logo, Zeus não é humano."

Solução. Sejam

- p a proposição *"Zeus é humano"*, e
- q a proposição *"Zeus é mortal"*.

O argumento utilizou modus tollens

$$\frac{p \to q \qquad \neg q}{\neg p}\,\mathrm{MT}$$

para concluir $\neg p$, ou seja, que Zeus não é humano.

Regras de inferência para lógica proposicional

- $\boxed{\text{Exemplo 6}}$ Justifique a argumentação abaixo:

  "Se chover hoje, não faremos um pique-nique hoje.

  Se não fizermos um pique-nique hoje, faremos um pique-nique amanhã.

  Logo, se chover hoje, faremos um pique-nique amanhã."

- $\boxed{\text{Exemplo 6}}$ Justifique a argumentação abaixo:

  "Se chover hoje, não faremos um pique-nique hoje.

  Se não fizermos um pique-nique hoje, faremos um pique-nique amanhã.

  Logo, se chover hoje, faremos um pique-nique amanhã."

  Solução. Sejam

  - p a proposição *"Chove hoje"*,
  - q a proposição *"Não faremos um pique-nique hoje"*, e
  - r a proposição *"Faremos um pique-nique amanhã"*.

  O argumento utilizou silogismo hipotético

  $$\frac{p \to q \qquad q \to r}{p \to r}\ \mathrm{SH}$$

  para concluir $p \to r$, i.e., que se chover hoje faremos um pique-nique amanhã.

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- É possível que precisemos aplicar várias regras de inferência para demonstrar uma conclusão a partir de premissas.

- $\boxed{\text{Exemplo 7}}$ Mostre que as premissas

  a) *"Esta tarde não está ensolarada, e está mais frio hoje que ontem."*
  b) *"Nós vamos nadar somente se estiver ensolarado."*
  c) *"Se nós não formos nadar, vamos andar de canoa."*
  d) *"Se formos andar de canoa, estaremos em casa antes do pôr do sol."*

  levam à conclusão:

  "Estaremos em casa ao pôr do sol."

- $\boxed{\text{Exemplo 7}}$ (Continuação)

Solução. Para formalizar os fatos que você sabe, vamos usar as proposições:

- p : *"Esta tarde está ensolarada."*
- q : *"Está mais frio hoje que ontem."*
- r : *"Nós vamos nadar."*
- s : *"Nós vamos andar de canoa."*
- t : *"Estaremos em casa ao pôr do sol."*

Assim, as premissas são:

(a) $\neg p \wedge q$ (b) $r \rightarrow p$ (c) $\neg r \rightarrow s$ (d) $s \rightarrow t$

E a conclusão é t.

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- $\boxed{\text{Exemplo 7}}$ (Continuação)

Podemos construir um argumento para mostrar que as premissas levam à conclusão da seguinte forma:

Passo	**Justificativa**
1. $\neg p \wedge q$	Premissa (a)
2. $\neg p$	Simplificação usando (1)
3. $r \to p$	Premissa (b)
4. $\neg r$	Modus tollens usando (2) e (3)
5. $\neg r \to s$	Premissa (c)
6. s	Modus ponens usando (4) e (5)
7. $s \to t$	Premissa (d)
8. t	Modus ponens usando (6) e (7)

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- $\boxed{\text{Exemplo 8}}$ Ao sair para a universidade de manhã eu percebo que não estou usando meus óculos.

  Ao tentar descobrir onde estão meus óculos, me lembro dos seguintes fatos, que são todos verdadeiros:

  a. Se meus óculos estão na bancada da cozinha, então eu os vi durante o café da manhã.
  b. Eu estava lendo o jornal na sala ou estava lendo o jornal na cozinha.
  c. Se eu estava lendo o jornal na sala, então meus óculos estão na mesinha de centro.
  d. Eu não vi meus óculos durante o café da manhã.
  e. Se eu estava lendo um livro na cama, então meus óculos estão no criado-mudo.
  f. Se eu estava lendo o jornal na cozinha, então meus óculos estão na bancada da cozinha.

  Usando regras de inferência válidas, quero deduzir onde estão meus óculos.

- $\boxed{\text{Exemplo 8}}$ (Continuação)

Solução. Para formalizar os fatos que eu sei, vamos usar as proposições:

- p : *"Os meus óculos estão na bancada da cozinha."*
- q : *"Eu vi meus óculos durante café da manhã."*
- r : *"Eu estava lendo o jornal na sala."*
- s : *"Eu estava lendo o jornal na cozinha."*
- t : *"Meus óculos estão na mesinha de centro."*
- u : *"Eu estava lendo um livro na cama."*
- v : *"Meus óculos estão no criado-mudo."*

Assim, os fatos que eu sei são:

(a) $p \rightarrow q$
(b) $r \vee s$
(c) $r \rightarrow t$
(d) $\neg q$
(e) $u \rightarrow v$
(f) $s \rightarrow p$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 8 (Continuação)

  Se eu quero deduzir onde estão os óculos eu precise que os fatos que eu sei me permitam concluir:

  - ou p (óculos na bancada da cozinha)
  - ou t (óculos na mesinha do centro)
  - ou v (óculos no criado mudo)

- Note que o "ou" acima deve ser exclusivo para que o conjunto de fórmulas que estamos escrevendo faça sentido.

  - Os óculos não podem estar simultaneamente em mais de um lugar.
  - Logo eu *não* devo conseguir deduzir simultaneamente mais do que uma das opções acima a partir das premissas.

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 8 (Continuação)

Podemos deduzir que os óculos se encontram na mesinha do centro da seguinte forma.

Passo	**Justificativa**
1. $p \to q$	Premissa (a)
2. $\neg q$	Premissa(d)
3. $\neg p$	Modus tollens usando (1) e (2)
4. $s \to p$	Premissa (f)
5. $\neg s$	Modus tollens usando (3) e (4)
6. $r \vee s$	Premissa (b)
7. r	Silogismo disjuntivo usando (5) e (6)
8. $r \to t$	Premissa (c)
9. t	Modus ponens usando (7) e (8)

Como exercício, justifique que a partir das premissas não conseguimos deduzir que os óculos então na cozinha (p) ou no criado mudo (v).