DCC638 - Introdução à Lógica Computacional
2024.1

Métodos de Demonstração

Área de Teoria DCC/UFMG

Terminologia

- Uma setença é **válida** se ela é *sempre* verdadeira.
- Um **axioma** é uma afirmação tida como válida sem uma demonstração.
- Resultados de demonstrações recebem diferentes nomes. Convencionalmente:
  - **Teorema**: resultado considerado interessante em si mesmo.
  - **Proposição**: resultado considerado "de menor interesse".
  - **Lema**: resultado auxiliar, geralmente usado na demonstração de um teorema.
  - **Corolário**: resultado "imediato" a partir de outro resultado já demonstrado.
- Uma **conjectura** é uma afirmação que não é um axioma e para a qual uma demonstração não foi apresentada.

Evidência versus demonstração

- $\boxed{\text{Exemplo 1}}$ Seja a fórmula $p(n) = n^2 + n + 41$.

Conjectura: $\forall n \in \mathbb{N}.\ p(n)$ é primo.

Evidência versus demonstração

- $\boxed{\text{Exemplo 1}}$ Seja a fórmula $p(n) = n^2 + n + 41$.

$$\textbf{Conjectura:} \quad \forall n \in \mathbb{N}.\ p(n) \text{ é primo.}$$

Temos evidências de que a conjectura *pode estar* certa.

Testando valores de $n = 0, 1, \ldots, 39$ a proposição é verdadeira, ou seja, $p(n)$ é primo para $0 \leq n \leq 39$:

n	0	1	2	3	...	20	...	39
$p(n)$	41	43	47	53	...	461	...	1601

Evidência versus demonstração

- $\boxed{\text{Exemplo 1}}$ Seja a fórmula $p(n) = n^2 + n + 41$.

  Conjectura: $\forall n \in \mathbb{N}.\ p(n)$ é primo.

  Temos evidências de que a conjectura *pode estar* certa.

  Testando valores de $n = 0, 1, \ldots, 39$ a proposição é verdadeira, ou seja, $p(n)$ é primo para $0 \leq n \leq 39$:

n	0	1	2	3	...	20	...	39
$p(n)$	41	43	47	53	...	461	...	1601

  Daí, podemos ficar tentados a concluir:

  Isto não pode ser uma coincidência! A hipótese deve ser válida!

  Mas não é: $p(40) = 1681 = 41 \cdot 41$, que não é primo!

  Logo, a conjectura é <u>falsa</u>.

- Moral da história: <u>evidência não é o mesmo que demonstração!</u>

Evidência versus demonstração

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ Em 1 769, Euler (1 707–1 783) conjecturou que

$$a^4 + b^4 + c^4 = d^4$$

não tem solução no conjunto dos números inteiros positivos.

Durante mais de dois séculos, ninguém conseguiu encontrar valores de a, b, c e d que satisfizessem a equação.

O insucesso de todos os matemáticos envolvidos era evidência de que a conjectura *poderia ser* válida.

218 anos depois, em 1 987, Noam Elkies proveu um contra-exemplo:

$$95\,800^4 + 217\,519^4 + 414\,560^4 = 422\,481^4.$$

Logo, esta conjectura também é <u>falsa</u>.

- <u>Ausência de demonstração não é o mesmo que demonstração de ausência!</u>

Métodos de demonstração

- Construir uma demonstração é uma arte.

  Cada caso é um caso: não existe uma "receita fechada" para construir demonstrações para todas as afirmações.

- Existem, entretanto, técnicas comuns para construir demonstrações:
  - demonstração direta;
  - demonstração por contraposição;
  - demonstração por contradição (ou demonstração por redução ao absurdo).
  - demonstração por exaustão e divisão em casos.

- Outros métodos de demonstração (e.g., demonstração por indução matemática) serão vistos mais adiante no curso.

- Existem também formas sistemáticas de construir demonstrações (*automatização de raciocínio*)

Como escrever uma demonstração

- Escreva claramente qual a afirmação que se deseja demonstrar.

  (É comum preceder a afirmação com uma qualificação como **"Teorema"**, **"Lema"**, ou **"Proposição"**.)

- Delimite claramente o escopo da demonstração.

  Indique o início da demonstração com **"Demonstração."**

  Indique o fim da demonstração com um marcador. Podem-se usar:

  - um quadradinho $\square$, ou
  - a abreviação **Q.E.D.** (do latim *"quod erat demonstrandum"*), ou
  - sua tradução em português, **C.Q.D.** (*"conforme queríamos demonstrar"*).

- Escreva a demonstração de tal forma que ela seja autocontida.

  - Use linguagem natural (português) de forma clara, empregando sentenças completas e bem estruturadas.
  - Utilize fórmulas matemáticas, equações, etc., quando necessário.

Como escrever uma demonstração

- Identifique cada variável usada na demonstração juntamente com seu tipo. Exs.:

  1. Seja x um número real maior que 2.
  2. Suponha que m e n sejam inteiros sem divisores comuns.

- <u>Importante:</u>

  O objetivo principal de uma demonstração é convencer <u>o leitor</u> de que o resultado (teorema, proposição, lema) é válido.

  <u>Não basta</u> que <u>você mesmo</u> esteja convencido!

  Certifique-se de que está sendo conciso, mas claro.

Demonstração direta

- Forma geral: "Supondo a premissa P, em uma série de *passos* derivarei a conclusão C".

- Em lógica de predicados:
  1. Expresse a afirmação a ser demonstrada na forma:

  $$\forall x \in D. \, (\, P(x) \rightarrow C(x) \,)$$

  2. Comece a demonstração supondo $P(d)$, sendo d um elemento *arbitrário* de D.

     Ex.: *"Suponha que $P(d)$ é verdadeiro, para um $d \in D$ qualquer."*

  3. Mostre que a conclusão $C(d)$ é verdadeira utilizando definições, resultados anteriores e regras de inferência.

- Importante: Como $d \in D$ é escolhido arbitrariamente,
  - ele não depende de nenhuma suposição especial sobre d, e,
  - portanto, o resultado pode ser generalizado para todos os elementos de D.

Demonstração direta

- **Definição:**

  (i) Um inteiro n é **par** se existe um inteiro k tal que $n = 2k$.

  (ii) Um inteiro n é **ímpar** se existe um inteiro k tal que $n = 2k + 1$.

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Mostre que se n é um inteiro ímpar, então n^2 é ímpar.

Demonstração direta

- **Definição:**

  (i) Um inteiro n é **par** se existe um inteiro k tal que $n = 2k$.

  (ii) Um inteiro n é **ímpar** se existe um inteiro k tal que $n = 2k + 1$.

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Mostre que se n é um inteiro ímpar, então n^2 é ímpar.

  Demonstração. Queremos mostrar que

  $$\forall n. \, (\, P(n) \;\to\; Q(n) \,),$$

  em que

  - $P(n)$ é o predicado *"n é um inteiro ímpar"*, e
  - $Q(n)$ é o predicado *"n^2 é ímpar"*.

  Para produzir uma demonstração direta, supomos que para um inteiro k a hipótese da implicação, $P(k)$, seja verdadeira, ou seja, que k é ímpar.

  Então, pela definição de número ímpar, existe um inteiro k' tal que $k = 2k' + 1$.

Demonstração direta

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ (Continuação)

Queremos mostrar que a conclusão da implicação, $Q(k)$, é verdadeira, ou seja, que k^2 também é ímpar.

Para isto podemos calcular

$$\begin{aligned} k^2 &= (2k' + 1)^2 \\ &= 4k'^2 + 4k' + 1 \\ &= 2(2k'^2 + 2k') + 1. \end{aligned}$$

Mas note que isso significa que

$$k^2 = 2k'' + 1,$$

em que $k'' = 2k'^2 + 2k'$ é um inteiro.

Logo, pela definição de número ímpar, k^2 também é ímpar e está concluída nossa demonstração. $\square$

Demonstração direta

- **Definição:** Um inteiro a é um **quadrado perfeito** se existe um inteiro b tal que $a = b^2$.

- $\boxed{\text{Exemplo 4}}$ Mostre que se m e n são quadrados perfeitos, então mn é um quadrado perfeito.

  Demonstração. Para demonstrar esta proposição, vamos supor que m e n sejam quadrados perfeitos. Pela definição de quadrado perfeito, devem existir inteiros s e t tais que $m = s^2$ e $n = t^2$.

  O objetivo da demonstração é mostrar que mn será um quadrado perfeito quando m e n o forem. Para ver isto, podemos calcular

  $$mn \quad = \quad s^2 t^2 \quad = \quad (st)^2.$$

  Mas é claro que st também é um inteiro, logo mn satisfaz a definição de quadrado perfeito (já que $mn = (st)^2$), e a conclusão da implicação também é verdadeira.

  Logo concluímos a demonstração de que a afirmação é válida. □

Demonstração direta

- **Definição:**

  (i) Um número real n é **racional** quando existem inteiros p e q, com $q \neq 0$, tais que $n = p/q$.

  (ii) Um número real n é **irracional** quando ele não é racional.

- $\boxed{\text{Exemplo 5}}$ Mostre que a soma de dois números racionais é um número racional.

Demonstração direta

- **Definição:**

  (i) Um número real n é **racional** quando existem inteiros p e q, com $q \neq 0$, tais que $n = p/q$.

  (ii) Um número real n é **irracional** quando ele não é racional.

- $\boxed{\text{Exemplo 5}}$ Mostre que a soma de dois números racionais é um número racional.

  Demonstração. Formalmente, queremos mostrar que para todo número real r e todo número real s, se r e s são racionais, então $r + s$ também é racional.

  Para dar uma demonstração direta desta afirmação, vamos supor que r e s sejam racionais. Pela definição de número racional, devem existir então inteiros p e q, com $q \neq 0$, tais que $r = p/q$, e devem existir também inteiros t e u, com $u \neq 0$, tais que $s = t/u$.

Demonstração direta

- $\boxed{\text{Exemplo 5}}$ (Continuação)

  Para mostrar que $r + s$ também será racional quando r e s o forem, podemos calcular

  $$r + s \quad = \quad \frac{p}{q} + \frac{t}{u} \quad = \quad \frac{pu + qt}{qu}.$$

  Note que, por hipótese, q e u são diferentes de zero e, portanto, $qu \neq 0$.

  Consequentemente $r + s$ pode ser expresso como a razão de dois inteiros ($pu + qt$ e qu, com $qu \neq 0$) e, portanto, $r + s$ satisfaz a definição de número racional.

  Logo a afirmação é válida. $\square$

Demonstração por contraposição

- Forma geral: "Supondo o oposto da conclusão, i.e., $\neg C$, mostrarei o oposto da premissa, i.e., $\neg P$."

- Em lógica de predicados:
  1. Expresse a afirmação a ser demonstrada na forma:
  $$\forall x \in D. \, (\, P(x) \rightarrow C(x) \,)$$
  2. Encontre a afirmação contrapositiva da afirmação a ser demonstrada:
  $$\forall x \in D. \, (\, \neg C(x) \rightarrow \neg P(x) \,)$$
  3. Suponha que a conclusão $C(d)$ é falsa, i.e., $\neg C(d)$ é verdadeira, sendo d um elemento *arbitrário* de D.
  4. Mostre que a premissa $P(d)$ é falsa, i.e., $\neg P(d)$ é verdadeira, utilizando definições, resultados anteriores e regras de inferência.

Demonstração por contraposição

- $\boxed{\text{Exemplo 6}}$ Mostre que se n é um inteiro e $3n+2$ é ímpar, então n é ímpar.

Demonstração por contraposição

- $\boxed{\text{Exemplo 6}}$ Mostre que se n é um inteiro e $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar.

Demonstração. Queremos mostrar que $\forall n \in \mathbb{N}. (P(n) \rightarrow Q(n))$, onde $P(n)$ é *"$3n + 2$ é ímpar"*, e $Q(x)$ é *"n é ímpar"*.

Para produzir uma demonstração por contraposição, vamos demonstrar que $\forall n \in \mathbb{N}. (\neg Q(n) \rightarrow \neg P(n))$. Ou seja, vamos mostrar que se um número inteiro n não é ímpar, então $3n + 2$ também não é ímpar.

Se n não é ímpar, é porque n é par e, pela definição de número par, $n = 2k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Portanto podemos derivar

$$\begin{aligned} 3n + 2 &= 3(2k) + 2 \\ &= 6k + 2 \\ &= 2(3k + 1), \end{aligned}$$

de onde concluímos que $3n + 2$ satisfaz a definição de número par.

Como mostramos que sempre que a conclusão da implicação é falsa, a hipótese também é falsa, concluímos com sucesso a demonstração por contraposição . $\square$

Demonstração por contraposição

- $\boxed{\text{Exemplo 7}}$ Mostre que se $n = ab$ onde a e b são inteiros positivos, então $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$.

  Demonstração. Em primeiro lugar, note que o resultado que queremos demonstrar pode ser formalizado como

$$\forall n, a, b \in \mathbb{Z}^+. \ \big(n = ab \ \rightarrow \ a \leq \sqrt{n} \vee b \leq \sqrt{n}\big) \ .$$

  Para produzir uma demonstração por contraposição, vamos demonstrar que sempre que a conclusão da implicação é falsa, sua hipótese também é falsa.

  A conclusão da implicação é $(a \leq \sqrt{n}) \vee (b \leq \sqrt{n})$, logo por de Morgan, sua negação é

$$\begin{aligned} \neg((a \leq \sqrt{n}) \vee (a \leq \sqrt{n})) &\equiv \neg(a \leq \sqrt{n}) \wedge \neg(b \leq \sqrt{n}) \\ &\equiv (a > \sqrt{n}) \wedge (b > \sqrt{n}). \end{aligned}$$

  Já a hipótese da implicação é $n = ab$, e sua negação é $n \neq ab$.

- $\boxed{\text{Exemplo 7}}$ (Continuação)

  Queremos mostrar a contrapositiva da proposição original, ou seja, que para todos inteiros positivos a, b, n se $(a > \sqrt{n}) \wedge (b > \sqrt{n})$ então $n \neq ab$.

  Para isto, note que se $(a > \sqrt{n}) \wedge (b > \sqrt{n})$ podemos derivar o seguinte

$$\begin{aligned} ab &> \sqrt{n} \cdot b && \text{(pois } a > \sqrt{n}\text{)} \\ &> \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} && \text{(pois } b > \sqrt{n}\text{)} \\ &= n\ , \end{aligned}$$

  de onde se conclui que $ab > n$ e, portanto, $ab \neq n$.

  Como mostramos que sempre que a conclusão da implicação é falsa, a hipótese também é falsa, a demonstração por contraposição é concluída com sucesso. $\square$

Demonstração por vacuidade

- Forma geral: "Se a premissa nunca é verdadeira, ela permite demonstrar qualquer conclusão."

- Em lógica de predicados:
  1. Expresse a afirmação a ser demonstrada na forma:

  $$\forall x \in D.\,(\,P(x) \rightarrow C(x)\,)$$

  2. Mostre que não existem elementos $d \in D$ tais que $P(d)$ seja verdadeiro.
  3. Conclua que $\forall x \in D.\,(\,P(x) \rightarrow C(x)\,)$ é verdadeira, pelas definições de $\rightarrow$ e $\forall$.

- O nome **demonstração por vacuidade** segue de demonstrarmos que a premissa da implicação é "vácua", ou seja, falsa.

- Com isso nem precisamos analisar a conclusão para garantir que toda a implicação é válida.

Demonstração por vacuidade

- **Definição:** Um inteiro a é um **cubo perfeito** se existe um inteiro b tal que $a = b^3$.

- $\boxed{\text{Exemplo 8}}$ Mostre que se n é um inteiro, com $10 \leq n \leq 15$, tal que n é um quadrado perfeito, então n é também um cubo perfeito.

Demonstração por vacuidade

- **Definição:** Um inteiro a é um **cubo perfeito** se existe um inteiro b tal que $a = b^3$.

- $\boxed{\text{Exemplo 8}}$ Mostre que se n é um inteiro, com $10 \leq n \leq 15$, tal que n é um quadrado perfeito, então n é também um cubo perfeito.

  Demonstração.

  Note que queremos mostrar a seguinte implicação para todo inteiro n: se $10 \leq n \leq 15$ e n é um quadrado perfeito, então n é um cubo perfeito.

  Mas note que a hipótese da implicação é falsa: como $3^2 = 9$ e o próximo quadrado perfeito é $4^2 = 16$, não existe nenhum quadrado perfeito n tal que $10 \leq n \leq 15$.

  Consequentemente, a implicação a ser demonstrada é verdadeira, por vacuidade, para todos os inteiros n.

  $\square$

Demonstração trivial

- Forma geral: "Se a conclusão é sempre verdadeira, ela é demonstrável independentemente de premissas."

- Em lógica de predicados:
  1. Expresse a afirmação a ser demonstrada na forma:

     $$\forall x \in D.\,(\,P(x) \,\rightarrow\, C(x)\,)$$

  2. Mostre que a conclusão $C(d)$ é verdadeira, sendo d um elemento *arbitrário* de D.
  3. Conclua que $\forall x \in D.\,(\,P(x) \,\rightarrow\, C(x)\,)$ é verdadeira.

- O nome **demonstração trivial** segue de demonstrarmos que a conclusão da implicação é sempre verdadeira, sem usar a premissa.

Demonstração trivial

- $\boxed{\text{Exemplo 9}}$ Mostre que se um inteiro n é par, então $n \leq n$.

  Demonstração.

  Como todo inteiro é menor ou igual a si mesmo, a implicação vale independentemente da premissa.

  Consequentemente, a implicação a ser demonstrada é válida, trivialmente.

  $\square$

Demonstração por contradição ou por redução ao absurdo

- Forma geral: "Suponha o contrário do resultado a ser demonstrado. Se isto for absurdo, demonstra-se o resultado."

- Em lógica proposicional
  1. Para demonstrar que a afirmação p é verdadeira, suponha que sua negação $\neg p$ seja verdadeira.
  2. Mostre que $\neg p$ leva a uma contradição, ou seja, que
  $$\neg p \to \perp.$$
  Conclua que p é verdadeira.

Demonstração por contradição ou por redução ao absurdo

- $\boxed{\text{Exemplo 10}}$ Mostre que em qualquer grupo de 22 dias (consecutivos ou não), ao menos 4 dias caem no mesmo dia da semana.

  Demonstração. Seja F a proposição *"Em qualquer grupo de* 22 *dias (consecutivos ou não), ao menos* 4 *dias caem no mesmo dia da semana"*.

  Suponha que $\neg F$ seja verdadeiro, ou seja, que *"Existe um grupo de* 22 *dias (consecutivos ou não) em que no máximo* 3 *dias caem no mesmo dia da semana"*.

  Mas note que existem apenas 7 dias na semana. Logo, se no máximo 3 dias caem no mesmo dia da semana, o grupo de dias pode ter no máximo 21 dias. Isso contradiz a premissa de que o grupo tem 22 dias.

  Em outras palavra, se G é a proposição *"22 dias são escolhidos para fazer parte do grupo"*, teríamos $\neg F \to (G \wedge \neg G)$, ou seja, $\neg F \to \bot$.

  Logo, $\neg F$ não pode nunca ser verdadeiro, ou seja, F é sempre verdadeiro. $\square$

Demonstração por contradição ou por redução ao absurdo

- $\boxed{\text{Exemplo 11}}$ Mostre que se $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar.

Demonstração. Queremos mostrar a proposição *"se $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar"*. Podemos escrever esta proposição como $p \to q$.

Para demonstrar por contradição, vamos supor que $p \to q$ seja falso. Isso quer dizer que estamos suponde $p \wedge \neg q$, ou seja, que *"$3n + 2$ é ímpar e n não é ímpar"*.

Mas se n não é ímpar, é porque n é par e existe um inteiro k tal que $n = 2k$. Podemos, então, derivar

$$3n + 2 \quad = \quad 3(2k) + 2 \quad = \quad 6k + 2 \quad = \quad 2(3k + 1),$$

o que implica que $3n + 2$ é par. Mas isto significa que concluímos exatamente que p é falso, o que contradiz a hipótese de que p é verdadeiro.

Logo, não é possível ter $p \wedge \neg q$ sem cair em contradição, e, portanto, se $3n + 2$ é ímpar então n é ímpar. $\square$

Demonstração por contradição ou por redução ao absurdo

- $\boxed{\text{Exemplo 12}}$ Vamos mostrar que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração por contradição ou por redução ao absurdo

- $\boxed{\text{Exemplo 12}}$ Vamos mostrar que $\sqrt{2}$ é irracional.

  Demonstração. Para atingir uma contradição, suponha o contrário do que queremos demonstrar, ou seja, que $\sqrt{2}$ seja racional.

Demonstração por contradição ou por redução ao absurdo

- $\boxed{\text{Exemplo 12}}$ Vamos mostrar que $\sqrt{2}$ é irracional.

  Demonstração. Para atingir uma contradição, suponha o contrário do que queremos demonstrar, ou seja, que $\sqrt{2}$ seja racional.

  Neste caso, existem $p, q \in \mathbb{Z}$, com $mdc(p, q) = 1$, tais que $\sqrt{2} = p/q$. Elevando os dois lados ao quadrado, obtemos $2 = p^2/q^2$, ou seja, $p^2 = 2q^2$. Note que $2q^2$ é par, portanto pela igualdade acima p^2 também tem que ser par. Isto implica que p deve ser par.

Demonstração por contradição ou por redução ao absurdo

- $\boxed{\text{Exemplo 12}}$ Vamos mostrar que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração. Para atingir uma contradição, suponha o contrário do que queremos demonstrar, ou seja, que $\sqrt{2}$ seja racional.

Neste caso, existem $p, q \in \mathbb{Z}$, com $mdc(p, q) = 1$, tais que $\sqrt{2} = p/q$. Elevando os dois lados ao quadrado, obtemos $2 = p^2/q^2$, ou seja, $p^2 = 2q^2$. Note que $2q^2$ é par, portanto pela igualdade acima p^2 também tem que ser par. Isto implica que p deve ser par.

Agora, já que p é par, existe algum $s \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2s$. Isso implica que $2q^2 = p^2 = (2s)^2 = 4s^2$, o que resulta em $q^2 = 2s^2$. Note que então q^2 é par, portanto q deve ser par.

Demonstração por contradição ou por redução ao absurdo

- $\boxed{\text{Exemplo 12}}$ Vamos mostrar que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração. Para atingir uma contradição, suponha o contrário do que queremos demonstrar, ou seja, que $\sqrt{2}$ seja racional.

Neste caso, existem $p, q \in \mathbb{Z}$, com $mdc(p, q) = 1$, tais que $\sqrt{2} = p/q$. Elevando os dois lados ao quadrado, obtemos $2 = p^2/q^2$, ou seja, $p^2 = 2q^2$. Note que $2q^2$ é par, portanto pela igualdade acima p^2 também tem que ser par. Isto implica que p deve ser par.

Agora, já que p é par, existe algum $s \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2s$. Isso implica que $2q^2 = p^2 = (2s)^2 = 4s^2$, o que resulta em $q^2 = 2s^2$. Note que então q^2 é par, portanto q deve ser par.

Mas se ambos p e q são pares, isto contradiz a suposição de que o $mdc(p, q) = 1$: encontramos uma contradição.

Demonstração por contradição ou por redução ao absurdo

- $\boxed{\text{Exemplo 12}}$ Vamos mostrar que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração. Para atingir uma contradição, suponha o contrário do que queremos demonstrar, ou seja, que $\sqrt{2}$ seja racional.

Neste caso, existem $p, q \in \mathbb{Z}$, com $mdc(p, q) = 1$, tais que $\sqrt{2} = p/q$. Elevando os dois lados ao quadrado, obtemos $2 = p^2/q^2$, ou seja, $p^2 = 2q^2$. Note que $2q^2$ é par, portanto pela igualdade acima p^2 também tem que ser par. Isto implica que p deve ser par.

Agora, já que p é par, existe algum $s \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2s$. Isso implica que $2q^2 = p^2 = (2s)^2 = 4s^2$, o que resulta em $q^2 = 2s^2$. Note que então q^2 é par, portanto q deve ser par.

Mas se ambos p e q são pares, isto contradiz a suposição de que o $mdc(p, q) = 1$: encontramos uma contradição.

Logo podemos concluir que não existem $p, q \in \mathbb{Z}$, com $q \neq 0$ e $mdc(p, q) = 1$, tais que $\sqrt{2} = p/q$. Portanto $\sqrt{2}$ é irracional. $\square$

Demonstração de equivalências

- Forma geral:

  1. Para mostrar que $p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n$, mostre, separadamente, cada uma das implicações

$$\begin{aligned} p_1 &\rightarrow p_2 \\ p_2 &\rightarrow p_3 \\ \ldots &\rightarrow \ldots \\ p_n &\rightarrow p_1 \end{aligned}$$

- Importante: A demonstração não está completa se não se fechar o ciclo de implicações, demonstrando que a última proposição implica de volta na primeira: $p_n \rightarrow p_1$.
- Note que este resultado depende da seguinte tautologia:

$$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

Demonstração de equivalências

- $\boxed{\text{Exemplo 13}}$ Mostre que as seguintes afirmações sobre um inteiro n são equivalentes:

$$\begin{aligned} p_1 &: \quad \text{“}n \text{ é par”} \\ p_2 &: \quad \text{“}n-1 \text{ é ímpar”} \\ p_3 &: \quad \text{“}n^2 \text{ é par”} \end{aligned}$$

Demonstração de equivalências

- $\boxed{\text{Exemplo 13}}$ Mostre que as seguintes afirmações sobre um inteiro n são equivalentes:

$$\begin{aligned} p_1 &: \quad \text{“}n \text{ é par”} \\ p_2 &: \quad \text{“}n-1 \text{ é ímpar”} \\ p_3 &: \quad \text{“}n^2 \text{ é par”} \end{aligned}$$

Demonstração.

Vamos demonstrar que as três afirmações são equivalentes mostrando que as três implicações são verdadeiras: $p_1 \to p_2$, $p_2 \to p_3$, e $p_3 \to p_1$.

- $p_1 \to p_2$: Vamos usar uma demonstração direta.

  Se n é par, então $n = 2k$ para algum inteiro k. Logo:

$$n - 1 \quad = \quad 2k - 1 \quad = \quad 2(k-1) + 1 \ ,$$

  e, portanto $n - 1$ é ímpar, por ser da forma $2m + 1$ para o inteiro $m = k - 1$.

Demonstração de equivalências

- $\boxed{\text{Exemplo 13}}$ (Continuação)

  - $p_2 \to p_3$: Vamos usar uma demonstração direta.

    Se $n - 1$ é ímpar, então $n - 1 = 2k + 1$ para algum inteiro k. Logo:

    $$n = (2k + 1) + 1 = 2k + 2 .$$

    Portanto podemos derivar

    $$n^2 = (2k + 2)^2 = 4k^2 + 8k + 4 = 2(k^2 + 4k + 2) ,$$

    de onde concluímos que n^2 é par por ser da forma $n = 2m$ para o inteiro $m = k^2 + 4k + 2$.

  - $p_3 \to p_1$: Vamos usar uma demonstração por contraposição.

    Mas note que a contraposição desejada, $\neg p_1 \to \neg p_3$, é a afirmação *"Se n é ímpar, então n^2 é ímpar"*, que já demonstramos em um exemplo anterior.

Concluídas as demonstrações das três implicações, as equivalências desejadas estão estabelecidas.

□

Contra-exemplos

- Contra-exemplos evidenciam que conjecturas são inválidas.

- Em lógica de predicados:
  1. Expresse a afirmação a ser demonstrada na forma:
  $$\forall x \in D.\ P(x)$$
  2. Encontre um $d \in D$ tal que $P(d)$ seja falso.
  3. Conclua que a afirmação em questão é inválida.

Contra-exemplos

- $\boxed{\text{Exemplo 14}}$ Seja $f(n) = n^2 + n + 41$. Demonstre que, para todo inteiro n, $f(n)$ é primo.

Contra-exemplos

- $\boxed{\text{Exemplo 14}}$ Seja $f(n) = n^2 + n + 41$. Demonstre que, para todo inteiro n, $f(n)$ é primo.

  Solução. Tome o valor $n = 40$. Neste caso temos $f(n) = 1681 = 41 \cdot 41$, que não é primo. Logo $n = 40$ é um contra-exemplo e a afirmação não pode ser demonstrada. □

Demonstração por exaustão ou divisão em casos

- Forma geral: "Se o número de casos é finito, mostre para cada caso que a afirmação é verdadeira."
- Em lógica proposicional:
  1. Se deve-se mostrar que
  $$p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n \rightarrow q$$
  2. Mostre, separadamente, cada uma das implicações
  $$\begin{aligned} p_1 &\rightarrow q \\ p_2 &\rightarrow q \\ \ldots &\rightarrow \ldots \\ p_n &\rightarrow q \end{aligned}$$
  3. Conclua que $p \rightarrow q$.

Demonstração por exaustão ou divisão em casos

- $\boxed{\text{Exemplo 15}}$ Mostre que, dados dois números reais x, y, $min(x, y) + max(x, y) = x + y$.

Demonstração por exaustão ou divisão em casos

- $\boxed{\text{Exemplo 15}}$ Mostre que, dados dois números reais x, y, $min(x, y) + max(x, y) = x + y$.

  Demonstração. Há somente três possibilidades para x e y:

  $$x < y \quad \text{ou} \quad x = y \quad \text{ou} \quad x > \ .y$$

  Vamos analisar cada caso separadamente:

  - Se $x < y$, então $min(x, y) + max(x, y) = x + y$.
  - Se $x = y$, então $min(x, y) + max(x, y) = x + y$.
  - Se $x > y$, então $min(x, y) + max(x, y) = y + x = x + y$.

  Logo, podemos concluir que sempre teremos $min(x, y) + max(x, y) = x + y$. □

Demonstração por exaustão ou divisão em casos

- **Definição:** Dado um número real a, seu **valor absoluto** $|a|$ é definido como $|a| = a$ quando $a \geq 0$, e como $|a| = -a$ quando $a < 0$.

- $\boxed{\text{Exemplo 16}}$ Mostre que $|xy| = |x||y|$, em que x e y são números reais.

  Demonstração. Note que podemos identificar cinco casos exaustivos para a combinação de x e y:

  1. pelo menos um entre x e y é zero,
  2. x e y são ambos positivos,
  3. x é positivo e y é negativo,
  4. x é negativo e y é positivo, ou
  5. x e y são ambos negativos.

Demonstração por exaustão ou divisão em casos

- $\boxed{\text{Exemplo 16}}$ (Continuação)

Vamos analisar cada caso separadamente:

1. Se pelo menos um entre x e y é zero, então $xy = 0$ e pelo menos um entre $|x|$ e $|y|$ é zero e, portanto, temos
$$|xy| = 0 = |x||y|.$$
2. Se x e y são ambos positivos, então $xy > 0$ e temos
$$|xy| = xy = |x||y|.$$
3. Se x é positivo e y é negativo, então $xy < 0$ e temos
$$|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|.$$
4. Se x é negativo e y é positivo, então $xy < 0$ e temos
$$|xy| = -xy = (-x)y = |x||y|.$$
5. Se x e y são ambos negativos, então $xy > 0$ e temos
$$|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|.$$

Logo, podemos concluir que a afirmação é sempre verdadeira. $\square$

Demonstração de existência

- Uma demonstração de um teorema do tipo $\exists x \in D.\ P(x)$ é chamada de **demonstração de existência**.

- Uma demonstração de existência pode ser **construtiva**
  - Para *algum* elemento $d \in D$ mostra-se que $P(d)$ é verdadeiro.
  - O elemento d é chamado de **testemunha** da demonstração.

- Uma demonstração de existência pode ser **não-construtiva**
  - Não produz uma testemunha.
  - Demonstra-se $\exists x.\ P(x)$ de outra maneira.
  - Uma maneira é por exemplo por redução ao absurdo.

Demonstração de existência: construtiva

- $\boxed{\text{Exemplo 17}}$ Mostre que existe um inteiro positivo que pode ser escrito como a soma de cubos de inteiros positivos de duas maneiras distintas.

  Demonstração. Após uma busca trabalhosa (por exemplo, usando um programa de computador), encontramos que

$$1\,729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3.$$

$\square$

- A demonstração acima é construtiva porque ela produz uma testemunha (o número 1 729 junto com suas decomposições) que atesta a existência desejada.

Demonstração de existência: não-construtiva

- $\boxed{\text{Exemplo 18}}$ Existem números irracionais x e y tais que x^y é racional.

Demonstração de existência: não-construtiva

- $\boxed{\text{Exemplo 18}}$ Existem números irracionais x e y tais que x^y é racional.

  Demonstração. Sabemos que $\sqrt{2}$ é irracional (já demonstarmos isto).
  Considere o número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Há duas possibilidades para este número:

  1. Ele é racional. Neste caso temos dois números irracionais $x = \sqrt{2}$ e $y = \sqrt{2}$ tais que x^y é racional.
  2. Ele é irracional. Neste caso podemos calcular que

  $$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2,$$

     é um número racional. Assim temos dois números irracionais $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $y = \sqrt{2}$ tais que x^y é racional. $\square$

- A demonstração acima é não-construtiva porque ela não produz uma testemunha que atesta a existência desejada.

  Sabemos que ou o par $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$ ou o par $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $y = \sqrt{2}$ satisfaz a propriedade, mas não sabemos qual destes dois pares é o certo!

Demonstração de unicidade

- Alguns teoremas afirmam a existência de um único objeto com uma certa propriedade.

- Forma geral: "Existe um objeto para o qual a propriedade vale e *para todos os outros* ela é falsa."

  1. **Demonstração de existência**: Mostre que um objeto x com a propriedade deseja existe.
  2. **Demonstração de unicidade:** Mostre que se dois objetos x e y apresentam ambos a mesma propriedade desejada, então $x = y$.

- Em lógica de predicados:

$$\exists x.\ (P(x) \wedge \forall y.\, (P(y) \rightarrow y = x))$$

Demonstração de unicidade

- $\boxed{\text{Exemplo 19}}$ Mostre que se a e b são números reais tais que $a \neq 0$, então existe um único número real r tal que $ar + b = 0$.

Demonstração de unicidade

- $\boxed{\text{Exemplo 19}}$ Mostre que se a e b são números reais tais que $a \neq 0$, então existe um único número real r tal que $ar + b = 0$.

Demonstração.

Primeiro mostramos a existência de um real r com a propriedade desejada.

Para isto, fazemos $r = {}^{-b}/_{a}$ e verificamos que neste caso

$$ar + b \quad = \quad a\left(\frac{-b}{a}\right) + b \quad = \quad -b + b \quad = \quad 0\ .$$

Em seguida, mostramos que $r = {}^{-b}/_{a}$ é o único real satisfazendo a propriedade.

Para isto, suponha que exista um número real s tal que $as + b = 0$.

Então $ar + b = as + b$, com $r = {}^{-b}/_{a}$. Daí concluímos:

$$\begin{array}{lcll} ar + b = as + b & \rightarrow & ar = as & \text{(subtraindo } b \text{ dos dois lados)} \\ & \rightarrow & r = s & \text{(dividindo os dois lados por } a\text{)} \end{array}$$

$\square$

Erros comuns em demonstrações

- Existem muitos erros comuns na construção de demonstrações matemáticas.

- Entre os erros mais comuns estão os erros algébricos básicos.

- Além disso, cada etapa de uma demonstração matemática precisa estar correta e a conclusão precisa seguir logicamente das etapas que a precedem.

Erros comuns em demonstrações

- Muitos erros resultam da introdução de um passo que não segue logicamente daqueles que o precedem (falácias formais).

- Exemplo 20 Qual o erro na seguinte "demonstração" de que $1 = 2$?

Passo	**Justificativa**
1. $\exists x, y \in \mathbb{R}.\ x = y$	Premissa
2. $a = b$	Instanciação existencial de (1)
3. $a^2 = ab$	Multiplicando ambos os lados de (2) por a
4. $a^2 - b^2 = ab - b^2$	Subtraindo b^2 de ambos os lados de (3)
5. $(a+b)(a-b) = b(a-b)$	Fatorando ambos os lados de (4)
6. $a + b = b$	Dividindo ambos os lados de (5) por $(a-b)$
7. $2b = b$	Substituindo (2) em (6) e simplificando
8. $2 = 1$	Dividindo ambos os lados de (7) por b

Erros comuns em demonstrações

- Muitos erros resultam da introdução de um passo que não segue logicamente daqueles que o precedem (falácias formais).

- $\boxed{\text{Exemplo 20}}$ Qual o erro na seguinte "demonstração" de que $1 = 2$?

Passo	**Justificativa**
1. $\exists x, y \in \mathbb{R}.\ x = y$	Premissa
2. $a = b$	Instanciação existencial de (1)
3. $a^2 = ab$	Multiplicando ambos os lados de (2) por a
4. $a^2 - b^2 = ab - b^2$	Subtraindo b^2 de ambos os lados de (3)
5. $(a + b)(a - b) = b(a - b)$	Fatorando ambos os lados de (4)
6. $a + b = b$	Dividindo ambos os lados de (5) por $(a - b)$
7. $2b = b$	Substituindo (2) em (6) e simplificando
8. $2 = 1$	Dividindo ambos os lados de (7) por b

- $\boxed{\text{Exemplo 20}}$ (Continuação)

  Solução.

  Todos os passos na "demonstração" estão corretos, exceto pelo passo (6) e pelo passo (8).

  Como $a = b$ (pelo passo (2)), temos que $a - b = 0$ e, portanto, a divisão de um real por $(a - b)$ não pode ser realizada.

  Além disso, no passo (8) não sabemos se $b \neq 0$, logo não podemos dividir por b.

Erros comuns em demonstrações

- Outro erro comum em demonstrações é argumentar a partir de exemplos.
- Exemplo 21 **Teorema:** *"Se $m + n$ é par então $m - n$ é par."*

  Demonstração incorreta: Se $m = 14$ e $n = 6$ então $m + n = 20$, que é par, e $m - n = 8$, que também é par.

  Logo se $m + n$ é par então $m - n$ é par. $\square$

Erros comuns em demonstrações

- Mais um tipo comum de erro é pular para uma conclusão, ou alegar a verdade de alguma coisa sem dar uma razão adequada.

- $\boxed{\text{Exemplo 22}}$ **Teorema:** *"Se $m + n$ é par então $m - n$ é par."*

  Demonstração incorreta: Suponha que m e n sejam inteiros e que $m + n$ é par. Pela definição de par, $m + n = 2k$ para algum inteiro k. Então $m = 2k - n$ e assim $m - n$ é par. $\square$

Erros comuns em demonstrações

- Mais um tipo comum de erro é pular para uma conclusão, ou alegar a verdade de alguma coisa sem dar uma razão adequada.

- Exemplo 22 **Teorema:** *"Se $m + n$ é par então $m - n$ é par."*

  Demonstração incorreta: Suponha que m e n sejam inteiros e que $m + n$ é par. Pela definição de par, $m + n = 2k$ para algum inteiro k. Então $m = 2k - n$ e assim $m - n$ é par. □

- Exemplo 23 Corrija as demonstrações acima, demonstrando corretamente a afirmação *"Se $m + n$ é par então $m - n$ é par"*.

  Solução. Exercício para o(a) estudante!

- Muitas das falácias que vimos na aula sobre inferência lógica são erros comuns em demonstrações.