DCC638 - Introdução à Lógica Computacional
2025.1

Demonstrações: Dedução Natural

Área de Teoria DCC/UFMG

Dedução Natural

- Anteriormente vimos como utilizar *regras de inferências* para *deduzir* novas fórmulas a partir de outras

- Demonstrações de uma conclusão a partir de premissas é feito com sucessivas deduções até que se deduza a conclusão esperada.

- Um conjunto de regras de inferência estabelece um *sistema dedutivo*

- Apresentaremos agora o sistema dedutivo de *dedução natural*
  - Introduzido nos anos 30 por S. Jáskowski e por G. Gentzen
  - Comumente se representa demonstrações como *árvores de derivação*
  - As folhas são as hipóteses e raiz a conclusão

Exemplo

$$\cfrac{\cfrac{(\psi_1)^1 \qquad (\psi_1 \to \psi_2)^2}{\psi_2}\,{\to_E} \qquad (\psi_2 \to (\psi_3 \wedge \psi_4))^3}{\cfrac{\psi_3 \wedge \psi_4}{\psi_3}\,{\wedge_{E_d}}}\,{\to_E}$$

- Conclui-se a fórmula ψ_3 a partir das hipóteses 1, 2 e 3.
- Todas as hipóteses são etiquetadas (algumas regras usarão essas etiquetas).

Regras (do exemplo anterior)

- Regra $\rightarrow_E$ (eliminação da implicação)

  Permite concluir ψ a partir de derivações de φ e de $\varphi \rightarrow \psi$.

  Note que esta regra corresponde ao raciocínio de *modus ponens*.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ \varphi \rightarrow \psi\end{array}}{\psi} \rightarrow_E$$

  - $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ correspondem as derivações que concluem φ e $\varphi \rightarrow \psi$, respectivamente.
  - Esta é uma regra binária, que toma duas premissas.

- Regra $\wedge_{E_d}$ (eliminação da conjunção à direita)

  Permite concluir φ_1 a partir de uma derivação de $\varphi_1 \wedge \varphi_2$.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi_1 \wedge \varphi_2\end{array}}{\varphi_1} \wedge_{E_d}$$

  - Esta é uma regra unária, que toma apenas uma premissa.

Mais regras

- Regra $\wedge_{E_e}$ (eliminação da conjunção à esquerda)

  Permite concluir φ_2 a partir de uma derivação de $\varphi_1 \wedge \varphi_2$.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi_1 \wedge \varphi_2\end{array}}{\varphi_2}\ \wedge_{E_e}$$

Exemplo

- Esta é uma derivação da fórmula $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \to \varphi_1$ *sem utilizar hipóteses*.
- A regra $\to_{I,1}$ é uma regra que *introduz* uma hipótese (com a etiqueta 1) e depois a *fecha*.
- A intuição é que uma vez que a hipótese introduzida cumpre seu papel, ela é eliminada e não pode ser usada em outras partes da demonstração.

$$\dfrac{\dfrac{(\varphi_1 \wedge \varphi_2)^1}{\varphi_1}\wedge_{E_d}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2 \to \varphi_1}\to_{I,1}$$

- Regra $\to_{I,n}$ (introdução da implicação)

  Permite obter uma derivação para $\varphi_1 \to \varphi_2$ dada uma derivação de φ_2 a partir de um conjunto de hipóteses contendo, eventualmente, φ_1.

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi_1]^n \\ \mathcal{D} \\ \varphi_2\end{array}}{\varphi_1 \to \varphi_2}\to_{I,n}$$

Exemplo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\psi_1)^1 \qquad (\psi_1 \to (\psi_2 \wedge \psi_3)^2}{\psi_2 \wedge \psi_3}\to_E}{\psi_2}\wedge_{E_d}}{\psi_1 \to \psi_2}\to_{I,1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(\psi_1)^1 \qquad (\psi_1 \to (\psi_2 \wedge \psi_3)^2}{\psi_2 \wedge \psi_3}\to_E}{\psi_3}\wedge_{E_e}}{\psi_1 \to \psi_3}\to_{I,1}}{(\psi_1 \to \psi_2) \wedge (\psi_1 \to \psi_3)}\wedge_I}{(\psi_1 \to (\psi_2 \wedge \psi_3)) \to ((\psi_1 \to \psi_2) \wedge (\psi_1 \to \psi_3))}\to_{I,2}$$

Exemplo

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$(\psi_1)^1$}
\AxiomC{$(\psi_1 \to (\psi_2 \land \psi_3)^2$}
\RightLabel{$\to_E$}
\BinaryInfC{$\psi_2 \land \psi_3$}
\RightLabel{$\land_{E_d}$}
\UnaryInfC{ψ_2}
\RightLabel{$\to_{I,1}$}
\UnaryInfC{$\psi_1 \to \psi_2$}
\AxiomC{$(\psi_1)^1$}
\AxiomC{$(\psi_1 \to (\psi_2 \land \psi_3)^2$}
\RightLabel{$\to_E$}
\BinaryInfC{$\psi_2 \land \psi_3$}
\RightLabel{$\land_{E_e}$}
\UnaryInfC{ψ_3}
\RightLabel{$\to_{I,1}$}
\UnaryInfC{$\psi_1 \to \psi_3$}
\RightLabel{$\land_I$}
\BinaryInfC{$(\psi_1 \to \psi_2) \land (\psi_1 \to \psi_3)$}
\RightLabel{$\to_{I,2}$}
\UnaryInfC{$(\psi_1 \to (\psi_2 \land \psi_3)) \to ((\psi_1 \to \psi_2) \land (\psi_1 \to \psi_3))$}
\end{prooftree}
$$

- Regra $\land_I$ (introdução da conjunção)

  Dadas derivações para φ_1 e φ_2, podemos concluir $\varphi_1 \land \varphi_2$.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \end{array} \\
\dfrac{\varphi_1 \qquad\qquad \varphi_2}{\varphi_1 \land \varphi_2}\ \land_I
\end{array}
$$

Exemplo

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\varphi)^1 \qquad (\varphi \to \psi_1)^2}{\psi_1} \to_E}{\psi_1 \vee \psi_2} \vee_{I_d}}{\varphi \to (\psi_1 \vee \psi_2)} \to_{I,1}}{(\varphi \to \psi_1) \to (\varphi \to (\psi_1 \vee \psi_2))} \to_{I,2}
$$

Exemplo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\varphi)^1 \qquad (\varphi \to \psi_1)^2}{\psi_1} \to_E}{\psi_1 \lor \psi_2} \lor_{I_d}}{\varphi \to (\psi_1 \lor \psi_2)} \to_{I,1}}{(\varphi \to \psi_1) \to (\varphi \to (\psi_1 \lor \psi_2))} \to_{I,2}$$

- Regras $\lor_{I_d}$ e $\lor_{I_e}$ (introdução da disjunção à direita/esquerda)

  Dada a derivação de uma fórmula φ, podemos concluir $\varphi \lor \psi$, para qualquer ψ. Analogamente, podemos concluir $\psi \lor \varphi$

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi\end{matrix}}{\varphi \lor \psi} \lor_{I_d}$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi\end{matrix}}{\psi \lor \varphi} \lor_{I_e}$$

Exemplo

$$\dfrac{((\psi_1 \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_3))^1 \qquad \dfrac{(\psi_1 \wedge \psi_2)^2}{\psi_1}\wedge_{E_d} \qquad \dfrac{(\psi_1 \wedge \psi_3)^3}{\psi_1}\wedge_{E_d}}{\dfrac{\psi_1}{((\psi_1 \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_3)) \rightarrow \psi_1}\rightarrow_{I,1}}\vee_{E,2,3}$$

Exemplo

$$
\dfrac{((\psi_1 \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_3))^1 \qquad \dfrac{(\psi_1 \wedge \psi_2)^2}{\psi_1}\wedge_{E_d} \qquad \dfrac{(\psi_1 \wedge \psi_3)^3}{\psi_1}\wedge_{E_d}}{\dfrac{\psi_1}{((\psi_1 \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_3)) \to \psi_1} \to_{I,1}} \vee_{E,2,3}
$$

- Regra $\vee_{E,n_1,n_2}$ (eliminação da disjunção)

  Esta regra apresenta um raciocínio *por casos*. Para uma disjunção $\varphi_1 \vee \varphi_2$ ser verdadeira, um dos dois entre φ_1, φ_2 deve ser verdadeiro.
  Se tanto quanto φ_1 é verdadeiro como quando φ_2 é verdadeiro conseguimos derivar o mesmo ψ, então ψ é derivável de $\varphi_1 \vee \varphi_2$.

$$
\dfrac{\begin{array}{c} \\ \mathcal{D}_1 \\ \varphi_1 \vee \varphi_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} [\varphi_1]^{n_1} \\ \mathcal{D}_2 \\ \psi \end{array} \qquad \begin{array}{c} [\varphi_2]^{n_2} \\ \mathcal{D}_3 \\ \psi \end{array}}{\psi} \vee_{E,n_1,n_2}
$$

Outras regras

- Regra $\neg_E$ (eliminação da negação)

$$\frac{\varphi \qquad \neg\varphi}{\perp}\,\neg_E$$

- Regra $\neg_{I,n}$ (introdução da negação)

$$\frac{\begin{array}{c}[\varphi]^n \\ \mathcal{D} \\ \perp\end{array}}{\neg\varphi}\,\neg_{I,n}$$

- Regra $\perp_n$ (demonstração por redução ao absurdo)

$$\frac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^n \\ \mathcal{D} \\ \perp\end{array}}{\varphi}\,\perp_n$$