

DCC638 - Introdução à Lógica Computacional
2025.1

Métodos de Demonstração

Área de Teoria DCC/UFMG

Terminologia

- Uma afirmação é **válida** se ela é *sempre* verdadeira.
- Um **axioma** é uma afirmação tida como válida sem uma demonstração.
- Resultados de demonstrações recebem diferentes nomes. Convencionalmente:
 - **Teorema**: resultado considerado interessante em si mesmo.
 - **Proposição**: resultado considerado “de menor interesse”.
 - **Lema**: resultado auxiliar, geralmente usado na demonstração de um teorema.
 - **Corolário**: resultado “imediato” a partir de outro resultado já demonstrado.
- Uma **conjectura** é uma afirmação que não é um axioma e para a qual uma demonstração não foi apresentada.

Evidência versus demonstração

- Exemplo 1 Seja a fórmula $p(n) = n^2 + n + 41$.

Conjectura: $\forall n \in \mathbb{N}. p(n)$ é primo.

Evidência versus demonstração

- Exemplo 1 Seja a fórmula $p(n) = n^2 + n + 41$.

Conjectura: $\forall n \in \mathbb{N}. p(n)$ é primo.

Temos evidências de que a conjectura *pode estar* certa.

Testando valores de $n = 0, 1, \dots, 39$ a proposição é verdadeira, ou seja, $p(n)$ é primo para $0 \leq n \leq 39$:

n	0	1	2	3	...	20	...	39
$p(n)$	41	43	47	53	...	461	...	1601

Evidência versus demonstração

- Exemplo 1 Seja a fórmula $p(n) = n^2 + n + 41$.

Conjectura: $\forall n \in \mathbb{N}. p(n)$ é primo.

Temos evidências de que a conjectura *pode estar* certa.

Testando valores de $n = 0, 1, \dots, 39$ a proposição é verdadeira, ou seja, $p(n)$ é primo para $0 \leq n \leq 39$:

n	0	1	2	3	...	20	...	39
$p(n)$	41	43	47	53	...	461	...	1601

Daí, podemos ficar tentados a concluir:

Isto não pode ser uma coincidência! A conjectura deve ser válida!

Mas não é: $p(40) = 1681 = 41 \cdot 41$, que não é primo!

Logo, a conjectura é falsa.

- Moral da história: evidência não é o mesmo que demonstração!

Evidência versus demonstração

- Exemplo 2 Em 1769, Euler (1707–1783) conjecturou que

$$a^4 + b^4 + c^4 = d^4$$

não tem solução no conjunto dos números inteiros positivos.

Durante mais de dois séculos, ninguém conseguiu encontrar valores de a , b , c e d que satisfizessem a equação.

O insucesso de todos os matemáticos envolvidos era evidência de que a conjectura *poderia ser* válida.

218 anos depois, em 1987, Noam Elkies proveu um contra-exemplo:

$$95\,800^4 + 217\,519^4 + 414\,560^4 = 422\,481^4.$$

Logo, esta conjectura também é falsa.

- Ausência de demonstração não é o mesmo que demonstração de ausência!

Métodos de demonstração

- Construir uma demonstração é uma arte.

Cada caso é um caso: não existe uma “receita fechada” para construir demonstrações para todas as afirmações.

- Existem, entretanto, técnicas comuns para construir demonstrações:
 - demonstração direta;
 - demonstração por contraposição;
 - demonstração por contradição (ou demonstração por redução ao absurdo).
 - demonstração por exaustão e divisão em casos.
- Outros métodos de demonstração (e.g., demonstração por indução matemática) serão vistos mais adiante no curso.
- Demonstrações podem também ser construídas algoritmicamente a partir de um conjunto de regras de inferência (*dedução automática*)

Como escrever uma demonstração

- Escreva claramente qual a afirmação que se deseja demonstrar.
(É comum preceder a afirmação com uma qualificação como **“Teorema”**, **“Lema”**, ou **“Proposição”**.)
- Delimite claramente o escopo da demonstração.
Indique o início da demonstração com **“Demonstração.”**
Indique o fim da demonstração com um marcador. Podem-se usar:
 - um quadradinho \square , ou
 - a abreviação **Q.E.D.** (do latim *“quod erat demonstrandum”*), ou
 - sua tradução em português, **C.Q.D.** (*“conforme queríamos demonstrar”*).
- Escreva a demonstração de tal forma que ela seja autocontida.
 - Use linguagem natural (português) de forma clara, empregando afirmações completas e bem estruturadas.
 - Utilize fórmulas matemáticas, equações, etc., quando necessário.

Como escrever uma demonstração

- Identifique cada variável usada na demonstração juntamente com seu tipo.
Exs.:

① Seja x um número real maior que 2.

② Suponha que m e n sejam inteiros sem divisores comuns.

- Importante:

O objetivo principal de uma demonstração é convencer o leitor de que o resultado (teorema, proposição, lema) é válido.

Não basta que você mesmo esteja convencido!

Certifique-se de que está sendo conciso, mas claro.

Demonstração direta

- Forma geral: “Supondo a premissa P , em uma série de *passos* derivarei a conclusão C ”.

- Em lógica de predicados:

1. Expresse a afirmação a ser demonstrada na forma:

$$\forall x \in D. (P(x) \rightarrow C(x))$$

2. Comece a demonstração supondo $P(d)$, sendo d um elemento *arbitrário* de D .

Ex.: “*Suponha que $P(d)$ é verdadeiro, para um $d \in D$ qualquer.*”

3. Mostre que a conclusão $C(d)$ é verdadeira utilizando definições, resultados anteriores e regras de inferência.

- Importante: Como $d \in D$ é escolhido arbitrariamente,

- ele não depende de nenhuma suposição especial sobre d , e,
- portanto, o resultado pode ser generalizado para todos os elementos de D .

Demonstração direta

- **Definição:**

- (i) Um inteiro n é **par** se existe um inteiro k tal que $n = 2k$.
- (ii) Um inteiro n é **ímpar** se existe um inteiro k tal que $n = 2k + 1$.

- Exemplo 3 Mostre que se n é um inteiro ímpar, então n^2 é ímpar.

Demonstração direta

- **Definição:**

- (i) Um inteiro n é **par** se existe um inteiro k tal que $n = 2k$.
- (ii) Um inteiro n é **ímpar** se existe um inteiro k tal que $n = 2k + 1$.

- Exemplo 3 Mostre que se n é um inteiro ímpar, então n^2 é ímpar.

Demonstração. Queremos mostrar que

$$\forall n. (P(n) \rightarrow Q(n)),$$

em que

- $P(n)$ é o predicado “ n é um inteiro ímpar”, e
- $Q(n)$ é o predicado “ n^2 é ímpar”.

Para produzir uma demonstração direta, supomos que para um inteiro k a hipótese da implicação, $P(k)$, seja verdadeira, ou seja, que k é ímpar.

Então, pela definição de número ímpar, existe um inteiro k' tal que $k = 2k' + 1$.

Demonstração direta

- Exemplo 3 (Continuação)

Queremos mostrar que a conclusão da implicação, $Q(k)$, é verdadeira, ou seja, que k^2 também é ímpar.

Para isto podemos calcular

$$\begin{aligned}k^2 &= (2k' + 1)^2 \\&= 4k'^2 + 4k' + 1 \\&= 2(2k'^2 + 2k') + 1.\end{aligned}$$

Mas note que isso significa que

$$k^2 = 2k'' + 1,$$

em que $k'' = 2k'^2 + 2k'$ é um inteiro.

Logo, pela definição de número ímpar, k^2 também é ímpar e está concluída nossa demonstração. □

Demonstração direta

- **Definição:** Um inteiro a é um **quadrado perfeito** se existe um inteiro b tal que $a = b^2$.
- **Exemplo 4** Mostre que se m e n são quadrados perfeitos, então mn é um quadrado perfeito.

Demonstração. Para demonstrar esta proposição, vamos supor que m e n sejam quadrados perfeitos. Pela definição de quadrado perfeito, devem existir inteiros s e t tais que $m = s^2$ e $n = t^2$.

O objetivo da demonstração é mostrar que mn será um quadrado perfeito quando m e n o forem. Para ver isto, podemos calcular

$$mn = s^2 t^2 = (st)^2.$$

Mas é claro que st também é um inteiro, logo mn satisfaz a definição de quadrado perfeito (já que $mn = (st)^2$), e a conclusão da implicação também é verdadeira.

Logo concluímos a demonstração de que a afirmação é válida. □

Demonstração direta

- **Definição:**

- (i) Um número real n é **racional** quando existem inteiros p e q , com $q \neq 0$, tais que $n = p/q$.
- (ii) Um número real n é **irracional** quando ele não é racional.

- Exemplo 5 Mostre que a soma de dois números racionais é um número racional.

Demonstração direta

- **Definição:**

- (i) Um número real n é **racional** quando existem inteiros p e q , com $q \neq 0$, tais que $n = p/q$.
- (ii) Um número real n é **irracional** quando ele não é racional.

- Exemplo 5 Mostre que a soma de dois números racionais é um número racional.

Demonstração. Formalmente, queremos mostrar que para todo número real r e todo número real s , se r e s são racionais, então $r + s$ também é racional.

Para dar uma demonstração direta desta afirmação, vamos supor que r e s sejam racionais. Pela definição de número racional, devem existir então inteiros p e q , com $q \neq 0$, tais que $r = p/q$, e devem existir também inteiros t e u , com $u \neq 0$, tais que $s = t/u$.

Demonstração direta

- Exemplo 5 (Continuação)

Para mostrar que $r + s$ também será racional quando r e s o forem, podemos calcular

$$r + s = \frac{p}{q} + \frac{t}{u} = \frac{pu + qt}{qu}.$$

Note que, por hipótese, q e u são diferentes de zero e, portanto, $qu \neq 0$.

Consequentemente $r + s$ pode ser expresso como a razão de dois inteiros ($pu + qt$ e qu , com $qu \neq 0$) e, portanto, $r + s$ satisfaz a definição de número racional.

Logo a afirmação é válida. □

Demonstração por contraposição

- Forma geral: “Supondo o oposto da conclusão, i.e., $\neg C$, mostrarei o oposto da premissa, i.e., $\neg P$.”

- Em lógica de predicados:

1. Exprese a afirmação a ser demonstrada na forma:

$$\forall x \in D. (P(x) \rightarrow C(x))$$

2. Encontre a afirmação contrapositiva da afirmação a ser demonstrada:

$$\forall x \in D. (\neg C(x) \rightarrow \neg P(x))$$

3. Suponha que a conclusão $C(d)$ é falsa, i.e., $\neg C(d)$ é verdadeira, sendo d um elemento *arbitrário* de D .
4. Mostre que a premissa $P(d)$ é falsa, i.e., $\neg P(d)$ é verdadeira, utilizando definições, resultados anteriores e regras de inferência.

Demonstração por contraposição

- Exemplo 6 Mostre que se n é um inteiro e $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar.

Demonstração por contraposição

- Exemplo 6 Mostre que se n é um inteiro e $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar.

Demonstração. Queremos mostrar que $\forall n \in \mathbb{N}. (P(n) \rightarrow Q(n))$, onde $P(n)$ é “ $3n + 2$ é ímpar”, e $Q(x)$ é “ n é ímpar”.

Para produzir uma demonstração por contraposição, vamos demonstrar que $\forall n \in \mathbb{N}. (\neg Q(n) \rightarrow \neg P(n))$. Ou seja, vamos mostrar que se um número inteiro n não é ímpar, então $3n + 2$ também não é ímpar.

Se n não é ímpar, é porque n é par e, pela definição de número par, $n = 2k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Portanto podemos derivar

$$\begin{aligned} 3n + 2 &= 3(2k) + 2 \\ &= 6k + 2 \\ &= 2(3k + 1), \end{aligned}$$

de onde concluímos que $3n + 2$ satisfaz a definição de número par.

Como mostramos que sempre que a conclusão da implicação é falsa, a hipótese também é falsa, concluímos com sucesso a demonstração por contraposição .



Demonstração por contraposição

- Exemplo 7 Mostre que se $n = ab$ onde a e b são inteiros positivos, então $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$.

Demonstração. Em primeiro lugar, note que o resultado que queremos demonstrar pode ser formalizado como

$$\forall n, a, b \in \mathbb{Z}^+. (n = ab \rightarrow a \leq \sqrt{n} \vee b \leq \sqrt{n}) .$$

Para produzir uma demonstração por contraposição, vamos demonstrar que sempre que a conclusão da implicação é falsa, sua hipótese também é falsa.

A conclusão da implicação é $(a \leq \sqrt{n}) \vee (b \leq \sqrt{n})$, logo por de Morgan, sua negação é

$$\begin{aligned} \neg((a \leq \sqrt{n}) \vee (b \leq \sqrt{n})) &\equiv \neg(a \leq \sqrt{n}) \wedge \neg(b \leq \sqrt{n}) \\ &\equiv (a > \sqrt{n}) \wedge (b > \sqrt{n}). \end{aligned}$$

Já a hipótese da implicação é $n = ab$, e sua negação é $n \neq ab$.

Demonstração por contraposição

- Exemplo 7 (Continuação)

Queremos mostrar a contrapositiva da proposição original, ou seja, que para todos inteiros positivos a, b, n se $(a > \sqrt{n}) \wedge (b > \sqrt{n})$ então $n \neq ab$.

Para isto, note que se $(a > \sqrt{n}) \wedge (b > \sqrt{n})$ podemos derivar o seguinte

$$\begin{aligned} ab &> \sqrt{n} \cdot b && \text{(pois } a > \sqrt{n} \text{)} \\ &> \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} && \text{(pois } b > \sqrt{n} \text{)} \\ &= n, \end{aligned}$$

de onde se conclui que $ab > n$ e, portanto, $ab \neq n$.

Como mostramos que sempre que a conclusão da implicação é falsa, a hipótese também é falsa, a demonstração por contraposição é concluída com sucesso. □

Demonstração por vacuidade

- Forma geral: “Se a premissa nunca é verdadeira, ela permite demonstrar qualquer conclusão.”

- Em lógica de predicados:

1. Expresse a afirmação a ser demonstrada na forma:

$$\forall x \in D. (P(x) \rightarrow C(x))$$

2. Mostre que não existem elementos $d \in D$ tais que $P(d)$ seja verdadeiro.

3. Conclua que $\forall x \in D. (P(x) \rightarrow C(x))$ é verdadeira, pelas definições de \rightarrow e \forall .

- O nome **demonstração por vacuidade** segue de demonstrarmos que a premissa da implicação é “vácua”, ou seja, falsa.
- Com isso nem precisamos analisar a conclusão para garantir que toda a implicação é válida.

Demonstração por vacuidade

- **Definição:** Um inteiro a é um **cubo perfeito** se existe um inteiro b tal que $a = b^3$.
- Exemplo 8 Mostre que se n é um inteiro, com $10 \leq n \leq 15$, tal que n é um quadrado perfeito, então n é também um cubo perfeito.

Demonstração por vacuidade

- **Definição:** Um inteiro a é um **cubo perfeito** se existe um inteiro b tal que $a = b^3$.
- **Exemplo 8** Mostre que se n é um inteiro, com $10 \leq n \leq 15$, tal que n é um quadrado perfeito, então n é também um cubo perfeito.

Demonstração.

Note que queremos mostrar a seguinte implicação para todo inteiro n : se $10 \leq n \leq 15$ e n é um quadrado perfeito, então n é um cubo perfeito.

Mas note que a hipótese da implicação é falsa: como $3^2 = 9$ e o próximo quadrado perfeito é $4^2 = 16$, não existe nenhum quadrado perfeito n tal que $10 \leq n \leq 15$.

Consequentemente, a implicação a ser demonstrada é verdadeira, por vacuidade, para todos os inteiros n .



Demonstração trivial

- Forma geral: “Se a conclusão é sempre verdadeira, ela é demonstrável independentemente de premissas.”

- Em lógica de predicados:

1. Exprese a afirmação a ser demonstrada na forma:

$$\forall x \in D. (P(x) \rightarrow C(x))$$

2. Mostre que a conclusão $C(d)$ é verdadeira, sendo d um elemento *arbitrário* de D .

3. Conclua que $\forall x \in D. (P(x) \rightarrow C(x))$ é verdadeira.

- O nome **demonstração trivial** segue de demonstrarmos que a conclusão da implicação é sempre verdadeira, sem usar a premissa.

Demonstração trivial

- Exemplo 9 Mostre que se um inteiro n é par, então $n \leq n$.

Demonstração.

Como todo inteiro é menor ou igual a si mesmo, a implicação vale independentemente da premissa.

Consequentemente, a implicação a ser demonstrada é válida, trivialmente.



Demonstração por contradição ou por redução ao absurdo

- Forma geral: “Suponha o contrário do resultado a ser demonstrado. Se isto for absurdo, demonstra-se o resultado.”
- Em lógica proposicional
 1. Para demonstrar que a afirmação p é verdadeira, suponha que sua negação $\neg p$ seja verdadeira.
 2. Mostre que $\neg p$ leva a uma contradição, ou seja, que

$$\neg p \rightarrow \perp.$$

Conclua que p é verdadeira.

Demonstração por contradição ou por redução ao absurdo

- Exemplo 10 Mostre que em qualquer grupo de 22 dias (consecutivos ou não), ao menos 4 dias caem no mesmo dia da semana.

Demonstração. Seja F a proposição “Em qualquer grupo de 22 dias (consecutivos ou não), ao menos 4 dias caem no mesmo dia da semana”.

Suponha que $\neg F$ seja verdadeiro, ou seja, que “Existe um grupo de 22 dias (consecutivos ou não) em que no máximo 3 dias caem no mesmo dia da semana”.

Mas note que existem apenas 7 dias na semana. Logo, se no máximo 3 dias caem no mesmo dia da semana, o grupo de dias pode ter no máximo 21 dias. Isso contradiz a premissa de que o grupo tem 22 dias.

Em outras palavras, se G é a proposição “22 dias são escolhidos para fazer parte do grupo”, teríamos $\neg F \rightarrow (G \wedge \neg G)$, ou seja, $\neg F \rightarrow \perp$.

Logo, $\neg F$ não pode nunca ser verdadeiro, ou seja, F é sempre verdadeiro. \square

Demonstração por contradição ou por redução ao absurdo

- Exemplo 11 Mostre que se $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar.

Demonstração. Queremos mostrar a proposição “se $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar”. Podemos escrever esta proposição como $p \rightarrow q$.

Para demonstrar por contradição, vamos supor que $p \rightarrow q$ seja falso. Isso quer dizer que estamos supondo $p \wedge \neg q$, ou seja, que “ $3n + 2$ é ímpar e n não é ímpar”.

Mas se n não é ímpar, é porque n é par e existe um inteiro k tal que $n = 2k$. Podemos, então, derivar

$$3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1),$$

o que implica que $3n + 2$ é par. Mas isto significa que concluímos exatamente que p é falso, o que contradiz a hipótese de que p é verdadeiro.

Logo, não é possível ter $p \wedge \neg q$ sem cair em contradição, e, portanto, se $3n + 2$ é ímpar então n é ímpar. □

Demonstração por contradição ou por redução ao absurdo

- Exemplo 12 Vamos mostrar que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração por contradição ou por redução ao absurdo

- Exemplo 12 Vamos mostrar que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração. Para atingir uma contradição, suponha o contrário do que queremos demonstrar, ou seja, que $\sqrt{2}$ seja racional.

Demonstração por contradição ou por redução ao absurdo

- Exemplo 12 Vamos mostrar que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração. Para atingir uma contradição, suponha o contrário do que queremos demonstrar, ou seja, que $\sqrt{2}$ seja racional.

Neste caso, existem $p, q \in \mathbb{Z}$, com $\text{mdc}(p, q) = 1$, tais que $\sqrt{2} = p/q$.

Demonstração por contradição ou por redução ao absurdo

- Exemplo 12 Vamos mostrar que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração. Para atingir uma contradição, suponha o contrário do que queremos demonstrar, ou seja, que $\sqrt{2}$ seja racional.

Neste caso, existem $p, q \in \mathbb{Z}$, com $\text{mdc}(p, q) = 1$, tais que $\sqrt{2} = p/q$.

Elevando os dois lados ao quadrado, obtemos $2 = p^2/q^2$, ou seja, $p^2 = 2q^2$. Note que $2q^2$ é par, portanto pela igualdade acima p^2 também tem que ser par. Isto implica que p deve ser par.

Demonstração por contradição ou por redução ao absurdo

- Exemplo 12 Vamos mostrar que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração. Para atingir uma contradição, suponha o contrário do que queremos demonstrar, ou seja, que $\sqrt{2}$ seja racional.

Neste caso, existem $p, q \in \mathbb{Z}$, com $\text{mdc}(p, q) = 1$, tais que $\sqrt{2} = p/q$.

Elevando os dois lados ao quadrado, obtemos $2 = p^2/q^2$, ou seja, $p^2 = 2q^2$. Note que $2q^2$ é par, portanto pela igualdade acima p^2 também tem que ser par. Isto implica que p deve ser par.

Agora, já que p é par, existe algum $s \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2s$. Isso implica que $2q^2 = p^2 = (2s)^2 = 4s^2$, o que resulta em $q^2 = 2s^2$. Note que então q^2 é par, portanto q deve ser par.

Demonstração por contradição ou por redução ao absurdo

- Exemplo 12 Vamos mostrar que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração. Para atingir uma contradição, suponha o contrário do que queremos demonstrar, ou seja, que $\sqrt{2}$ seja racional.

Neste caso, existem $p, q \in \mathbb{Z}$, com $\text{mdc}(p, q) = 1$, tais que $\sqrt{2} = p/q$.

Elevando os dois lados ao quadrado, obtemos $2 = p^2/q^2$, ou seja, $p^2 = 2q^2$. Note que $2q^2$ é par, portanto pela igualdade acima p^2 também tem que ser par. Isto implica que p deve ser par.

Agora, já que p é par, existe algum $s \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2s$. Isso implica que $2q^2 = p^2 = (2s)^2 = 4s^2$, o que resulta em $q^2 = 2s^2$. Note que então q^2 é par, portanto q deve ser par.

Mas se ambos p e q são pares, isto contradiz a suposição de que o $\text{mdc}(p, q) = 1$: encontramos uma contradição.

Demonstração por contradição ou por redução ao absurdo

- Exemplo 12 Vamos mostrar que $\sqrt{2}$ é irracional.

Demonstração. Para atingir uma contradição, suponha o contrário do que queremos demonstrar, ou seja, que $\sqrt{2}$ seja racional.

Neste caso, existem $p, q \in \mathbb{Z}$, com $\text{mdc}(p, q) = 1$, tais que $\sqrt{2} = p/q$.

Elevando os dois lados ao quadrado, obtemos $2 = p^2/q^2$, ou seja, $p^2 = 2q^2$. Note que $2q^2$ é par, portanto pela igualdade acima p^2 também tem que ser par. Isto implica que p deve ser par.

Agora, já que p é par, existe algum $s \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2s$. Isso implica que $2q^2 = p^2 = (2s)^2 = 4s^2$, o que resulta em $q^2 = 2s^2$. Note que então q^2 é par, portanto q deve ser par.

Mas se ambos p e q são pares, isto contradiz a suposição de que o $\text{mdc}(p, q) = 1$: encontramos uma contradição.

Logo podemos concluir que não existem $p, q \in \mathbb{Z}$, com $q \neq 0$ e $\text{mdc}(p, q) = 1$, tais que $\sqrt{2} = p/q$. Portanto $\sqrt{2}$ é irracional. □

Demonstração de equivalências

- Forma geral:

- 1. Para mostrar que $p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow p_n$, mostre, separadamente, cada uma das implicações

$$p_1 \rightarrow p_2$$

$$p_2 \rightarrow p_3$$

$$\dots \rightarrow \dots$$

$$p_n \rightarrow p_1$$

- Importante: A demonstração não está completa se não se fechar o ciclo de implicações, demonstrando que a última proposição implica de volta na primeira: $p_n \rightarrow p_1$.
- Note que este resultado depende da seguinte tautologia:

$$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

Demonstração de equivalências

- Exemplo 13 Mostre que as seguintes afirmações sobre um inteiro n são equivalentes:

p_1 : “ n é par”

p_2 : “ $n - 1$ é ímpar”

p_3 : “ n^2 é par”

Demonstração de equivalências

- Exemplo 13 Mostre que as seguintes afirmações sobre um inteiro n são equivalentes:

p_1 : “ n é par”

p_2 : “ $n - 1$ é ímpar”

p_3 : “ n^2 é par”

Demonstração.

Vamos demonstrar que as três afirmações são equivalentes mostrando que as três implicações são verdadeiras: $p_1 \rightarrow p_2$, $p_2 \rightarrow p_3$, e $p_3 \rightarrow p_1$.

- $p_1 \rightarrow p_2$: Vamos usar uma demonstração direta.

Se n é par, então $n = 2k$ para algum inteiro k . Logo:

$$n - 1 = 2k - 1 = 2(k - 1) + 1 ,$$

e, portanto $n - 1$ é ímpar, por ser da forma $2m + 1$ para o inteiro $m = k - 1$.

Demonstração de equivalências

- Exemplo 13 (Continuação)

- $p_2 \rightarrow p_3$: Vamos usar uma demonstração direta.

Se $n - 1$ é ímpar, então $n - 1 = 2k + 1$ para algum inteiro k . Logo:

$$n = (2k + 1) + 1 = 2k + 2.$$

Portanto podemos derivar

$$n^2 = (2k + 2)^2 = 4k^2 + 8k + 4 = 2(2k^2 + 4k + 2),$$

de onde concluímos que n^2 é par por ser da forma $n = 2m$ para o inteiro $m = k^2 + 4k + 2$.

- $p_3 \rightarrow p_1$: Vamos usar uma demonstração por contraposição.

Mas note que a contraposição desejada, $\neg p_1 \rightarrow \neg p_3$, é a afirmação “Se n é ímpar, então n^2 é ímpar”, que já demonstramos em um exemplo anterior.

Concluídas as demonstrações das três implicações, as equivalências desejadas estão estabelecidas.



Contra-exemplos

- Contra-exemplos evidenciam que conjecturas são inválidas.

- Em lógica de predicados:

1. Expresse a afirmação a ser demonstrada na forma:

$$\forall x \in D. P(x)$$

2. Encontre um $d \in D$ tal que $P(d)$ seja falso.
3. Conclua que a afirmação em questão é inválida.

Contra-exemplos

- Seja $f(n) = n^2 + n + 41$. Demonstre que, para todo inteiro n , $f(n)$ é primo.

Contra-exemplos

- Exemplo 14 Seja $f(n) = n^2 + n + 41$. Demonstre que, para todo inteiro n , $f(n)$ é primo.

Solução. Tome o valor $n = 40$. Neste caso temos $f(n) = 1681 = 41 \cdot 41$, que não é primo. Logo $n = 40$ é um contra-exemplo e a afirmação não pode ser demonstrada. □

Demonstração por exaustão ou divisão em casos

- Forma geral: “Se o número de casos é finito, mostre para cada caso que a afirmação é verdadeira.”
- Em lógica proposicional:

1. Se deve-se mostrar que

$$p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n \rightarrow q$$

2. Mostre, separadamente, cada uma das implicações

$$p_1 \rightarrow q$$

$$p_2 \rightarrow q$$

$$\dots \rightarrow \dots$$

$$p_n \rightarrow q$$

3. Conclua que $p \rightarrow q$.

Demonstração por exaustão ou divisão em casos

- Exemplo 15 Mostre que, dados dois números reais x, y ,
 $\min(x, y) + \max(x, y) = x + y$.

Demonstração por exaustão ou divisão em casos

- Exemplo 15 Mostre que, dados dois números reais x, y ,
 $\min(x, y) + \max(x, y) = x + y$.

Demonstração. Há somente três possibilidades para x e y :

$$x < y \quad \text{ou} \quad x = y \quad \text{ou} \quad x > y$$

Vamos analisar cada caso separadamente:

- Se $x < y$, então $\min(x, y) + \max(x, y) = x + y$.
- Se $x = y$, então $\min(x, y) + \max(x, y) = x + y$.
- Se $x > y$, então $\min(x, y) + \max(x, y) = y + x = x + y$.

Logo, podemos concluir que sempre teremos
 $\min(x, y) + \max(x, y) = x + y$.



Demonstração por exaustão ou divisão em casos

- **Definição:** Dado um número real a , seu **valor absoluto** $|a|$ é definido como $|a| = a$ quando $a \geq 0$, e como $|a| = -a$ quando $a < 0$.
- Exemplo 16 Mostre que $|xy| = |x||y|$, em que x e y são números reais.

Demonstração. Note que podemos identificar cinco casos exaustivos para a combinação de x e y :

1. pelo menos um entre x e y é zero,
2. x e y são ambos positivos,
3. x é positivo e y é negativo,
4. x é negativo e y é positivo, ou
5. x e y são ambos negativos.

Demonstração por exaustão ou divisão em casos

• Exemplo 16 (Continuação)

Vamos analisar cada caso separadamente:

1. Se pelo menos um entre x e y é zero, então $xy = 0$ e pelo menos um entre $|x|$ e $|y|$ é zero e, portanto, temos

$$|xy| = 0 = |x||y|.$$

2. Se x e y são ambos positivos, então $xy > 0$ e temos

$$|xy| = xy = |x||y|.$$

3. Se x é positivo e y é negativo, então $xy < 0$ e temos

$$|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|.$$

4. Se x é negativo e y é positivo, então $xy < 0$ e temos

$$|xy| = -xy = (-x)y = |x||y|.$$

5. Se x e y são ambos negativos, então $xy > 0$ e temos

$$|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|.$$

Logo, podemos concluir que a afirmação é sempre verdadeira. □

Demonstração de existência

- Uma demonstração de um teorema do tipo $\exists x \in D. P(x)$ é chamada de **demonstração de existência**.
- Uma demonstração de existência pode ser **construtiva**
 - Para *algum* elemento $d \in D$ mostra-se que $P(d)$ é verdadeiro.
 - O elemento d é chamado de **testemunha** da demonstração.
- Uma demonstração de existência pode ser **não-construtiva**
 - Não produz uma testemunha.
 - Demonstra-se $\exists x. P(x)$ de outra maneira.
 - Uma maneira é por exemplo por redução ao absurdo.

Demonstração de existência: construtiva

- **Exemplo 17** Mostre que existe um inteiro positivo que pode ser escrito como a soma de cubos de inteiros positivos de duas maneiras distintas.

Demonstração. Após uma busca trabalhosa (por exemplo, usando um programa de computador), encontramos que

$$1\,729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3.$$



- A demonstração acima é construtiva porque ela produz uma testemunha (o número 1 729 junto com suas decomposições) que atesta a existência desejada.

Demonstração de existência: não-construtiva

- Exemplo 18 Existem números irracionais x e y tais que x^y é racional.

Demonstração de existência: não-construtiva

- Exemplo 18 Existem números irracionais x e y tais que x^y é racional.

Demonstração. Sabemos que $\sqrt{2}$ é irracional (já demonstramos isto).

Considere o número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Há duas possibilidades para este número:

1. Ele é racional. Neste caso temos dois números irracionais $x = \sqrt{2}$ e $y = \sqrt{2}$ tais que x^y é racional.
2. Ele é irracional. Neste caso podemos calcular que

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2,$$

é um número racional. Assim temos dois números irracionais $x = \sqrt{2}$ e $y = \sqrt{2}$ tais que x^y é racional. □

- A demonstração acima é não-construtiva porque ela não produz uma testemunha que atesta a existência desejada.

Sabemos que ou o par $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$ ou o par $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $y = \sqrt{2}$ satisfaz a propriedade, mas não sabemos qual destes dois pares é o certo!

Demonstração de unicidade

- Alguns teoremas afirmam a existência de um único objeto com uma certa propriedade.
- Forma geral: “Existe um objeto para o qual a propriedade vale e *para todos os outros* ela é falsa.”
 - 1. **Demonstração de existência:** Mostre que um objeto x com a propriedade deseja existe.
 - 2. **Demonstração de unicidade:** Mostre que se dois objetos x e y apresentam ambos a mesma propriedade desejada, então $x = y$.
- Em lógica de predicados:

$$\exists x. (P(x) \wedge \forall y. (P(y) \rightarrow y = x))$$

Demonstração de unicidade

- Exemplo 19 Mostre que se a e b são números reais tais que $a \neq 0$, então existe um único número real r tal que $ar + b = 0$.

Demonstração de unicidade

- Exemplo 19 Mostre que se a e b são números reais tais que $a \neq 0$, então existe um único número real r tal que $ar + b = 0$.

Demonstração.

Primeiro mostramos a existência de um real r com a propriedade desejada.

Para isto, fazemos $r = -b/a$ e verificamos que neste caso

$$ar + b = a \left(\frac{-b}{a} \right) + b = -b + b = 0.$$

Em seguida, mostramos que $r = -b/a$ é o único real satisfazendo a propriedade.

Para isto, suponha que exista um número real s tal que $as + b = 0$.

Então $ar + b = as + b$, com $r = -b/a$. Daí concluímos:

$$\begin{aligned} ar + b = as + b &\rightarrow ar = as && \text{(subtraindo } b \text{ dos dois lados)} \\ &\rightarrow r = s && \text{(dividindo os dois lados por } a) \end{aligned}$$



Erros comuns em demonstrações

- Existem muitos erros comuns na construção de demonstrações matemáticas.
- Entre os erros mais comuns estão os erros algébricos básicos.
- Além disso, cada etapa de uma demonstração matemática precisa estar correta e a conclusão precisa seguir logicamente das etapas que a precedem.

Erros comuns em demonstrações

- Muitos erros resultam da introdução de um passo que não segue logicamente daqueles que o precedem (falácias formais).
- Exemplo 20

 Qual o erro na seguinte “demonstração” de que $1 = 2$?

Passo

1. $\exists x, y \in \mathbb{R}. x = y$

2. $a = b$

3. $a^2 = ab$

4. $a^2 - b^2 = ab - b^2$

5. $(a + b)(a - b) = b(a - b)$

6. $a + b = b$

7. $2b = b$

8. $2 = 1$

Justificativa

Premissa

Instanciação existencial de (1)

Multiplicando ambos os lados de (2) por a

Subtraindo b^2 de ambos os lados de (3)

Fatorando ambos os lados de (4)

Dividindo ambos os lados de (5) por $(a - b)$

Substituindo (2) em (6) e simplificando

Dividindo ambos os lados de (7) por b

Erros comuns em demonstrações

- Muitos erros resultam da introdução de um passo que não segue logicamente daqueles que o precedem (falácias formais).
- **Exemplo 20** Qual o erro na seguinte “demonstração” de que $1 = 2$?

Passo

1. $\exists x, y \in \mathbb{R}. x = y$

2. $a = b$

3. $a^2 = ab$

4. $a^2 - b^2 = ab - b^2$

5. $(a + b)(a - b) = b(a - b)$

6. $a + b = b$

7. $2b = b$

8. $2 = 1$

Justificativa

Premissa

Instanciação existencial de (1)

Multiplicando ambos os lados de (2) por a

Subtraindo b^2 de ambos os lados de (3)

Fatorando ambos os lados de (4)

Dividindo ambos os lados de (5) por $(a - b)$

Substituindo (2) em (6) e simplificando

Dividindo ambos os lados de (7) por b

Erros comuns em demonstrações

- Exemplo 20 (Continuação)

Solução.

Todos os passos na “demonstração” estão corretos, exceto pelo passo (6) e pelo passo (8).

Como $a = b$ (pelo passo (2)), temos que $a - b = 0$ e, portanto, a divisão de um real por $(a - b)$ não pode ser realizada.

Além disso, no passo (8) não sabemos se $b \neq 0$, logo não podemos dividir por b .



Erros comuns em demonstrações

- Outro erro comum em demonstrações é argumentar a partir de exemplos.

- Exemplo 21 **Teorema:** “Se $m + n$ é par então $m - n$ é par.”

Demonstração incorreta: Se $m = 14$ e $n = 6$ então $m + n = 20$, que é par, e $m - n = 8$, que também é par.

Logo se $m + n$ é par então $m - n$ é par.



Erros comuns em demonstrações

- Mais um tipo comum de erro é pular para uma conclusão, ou alegar a verdade de alguma coisa sem dar uma razão adequada.
- Exemplo 22 **Teorema:** “Se $m + n$ é par então $m - n$ é par.”

Demonstração incorreta: Suponha que m e n sejam inteiros e que $m + n$ é par. Pela definição de par, $m + n = 2k$ para algum inteiro k . Então $m = 2k - n$ e assim $m - n$ é par. □

Erros comuns em demonstrações

- Mais um tipo comum de erro é pular para uma conclusão, ou alegar a verdade de alguma coisa sem dar uma razão adequada.

- Exemplo 22 **Teorema:** “Se $m + n$ é par então $m - n$ é par.”

Demonstração incorreta: Suponha que m e n sejam inteiros e que $m + n$ é par. Pela definição de par, $m + n = 2k$ para algum inteiro k . Então $m = 2k - n$ e assim $m - n$ é par. □

- Exemplo 23 Corrija as demonstrações acima, demonstrando corretamente a afirmação “Se $m + n$ é par então $m - n$ é par”.

Solução. Exercício para o(a) estudante! •