

DCC638 - Introdução à Lógica Computacional
2025.1

Demonstrações

Área de Teoria DCC/UFMG

Introdução

- Em diversas situações é preciso deduzir **conclusões** a partir de **premissas**:
 - ➊ em matemática: estabelecer verdades absolutas (teoremas),
 - ➋ em ciência da computação: verificar que propriedades de um sistema são válidas, dada sua especificação,
 - ➌ em política/filosofia: demonstrar que certas ideias são bem fundamentadas.
- O processo de derivar conclusões de premissas é uma *argumentação*.
- Uma **demonstração** é uma argumentação, formal, de que a verdade de uma afirmação segue a partir da verdade de um conjunto de premissas.

Demonstrações em lógica proposicional

- Uma **demonstração** é uma sequência de proposições.
- As proposições iniciais são chamadas de **premissas**.
- A proposição final é chamada de **conclusão**.
- Cada proposição além das premissas deve ser derivada por um **argumento válido**.
- Uma **demonstração válida** é aquela em que a verdade de suas premissas implica, através de argumentos válidos, na verdade de sua conclusão.
 - Em outras palavras: toda valoração que torna as premissas verdadeiras deve também tornar a conclusão verdadeira.

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Exemplo 1

 Considere o seguinte argumento envolvendo proposições:
 1. *“Se você está matriculado em Introdução à Lógica Computacional, você tem acesso à página da disciplina.”*
 2. *“Você está matriculado em Introdução à Lógica Computacional.”*Logo,
 3. *“Você tem acesso à página da disciplina.”*

Essa é uma argumentação válida?

Ou seja, é verdade que a conclusão (3) é verdadeira sempre que as premissas (1) e (2) forem ambas verdadeiras?

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Exemplo 1 (Continuação)

Solução. Vamos analisar a estrutura do argumento.

Sejam as proposições:

- p : “Você está matriculado em *Introdução à Lógica Computacional*”, e
- q : “Você tem acesso à página da disciplina”.

O argumento anterior pode ser visualizado como

$$\frac{p \quad p \rightarrow q}{q}$$

representando que

- se as premissas p e $p \rightarrow q$ são verdadeiras
- então a conclusão q é verdadeira

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Exemplo 1 (Continuação)

Considerando p e q como variáveis proposicionais, podemos usar uma tabela da verdade para verificar que sempre que as premissas são verdadeiras, a conclusão também é.

		Premissas		Conclusão
p	q	$p \rightarrow q$	p	q
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

Assim, o argumento

$$\frac{p \quad p \rightarrow q}{q}$$

é válido.

- Note que $(p \wedge p \rightarrow q) \rightarrow q$ é uma tautologia!



Argumentos válidos em lógica proposicional

- Um argumento válido pode ser interpretado como uma regra de preservação da verdade:
 1. De premissas verdadeiras um argumento válido garante uma conclusão verdadeira.
 2. Por outro lado de premissas falsas qualquer conclusão é possível.

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Um **argumento inválido** é aquele em que a verdade das premissas não garante a verdade da conclusão.
- Exemplo 2 Mostre que o argumento a seguir é inválido.

$$\frac{p \rightarrow q \quad q}{p}$$

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Um **argumento inválido** é aquele em que a verdade das premissas não garante a verdade da conclusão.
- Exemplo 2

 Mostre que o argumento a seguir é inválido.

$$\frac{p \rightarrow q \quad q}{p}$$

Solução.

A terceira linha da tabela da verdade mostra que as premissas $p \rightarrow q$ e q podem ser ambas verdadeiros, e mesmo assim a conclusão p ser falsa. Assim, o formato de argumento é inválido.

		Premissas		Conclusão
p	q	$p \rightarrow q$	q	p
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	F

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Um **argumento inválido** é aquele em que a verdade das premissas não garante a verdade da conclusão.
- Exemplo 2

 Mostre que o argumento a seguir é inválido.

$$\frac{p \rightarrow q \quad q}{p}$$

Solução.

A terceira linha da tabela da verdade mostra que as premissas $p \rightarrow q$ e q podem ser ambas verdadeiros, e mesmo assim a conclusão p ser falsa. Assim, o formato de argumento é inválido.

		Premissas		Conclusão
p	q	$p \rightarrow q$	q	p
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	F

- Note que $(p \rightarrow q \wedge q) \rightarrow p$ **não** é uma tautologia!

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Exemplo 2 (Continuação)

Como um exemplo de como este formato de argumento é inválido, note que das premissas

- “Se Bill Gates ganhar na loteria, ela fica rico” e
- “Bill Gates é rico”

não se pode concluir que necessariamente

- “Bill Gates ganhou na loteria”.



Validade vs. verdade

- A validade é uma propriedade do argumento.
- A verdade é uma propriedade das premissas e conclusões do argumento.

- Exemplo 3

Considere o argumento

“Se a França é um país rico, então sua língua oficial é o inglês.”
“A França é um país rico.”
∴ *“A língua oficial da França é o inglês.”*

Este argumento é um argumento válido.

Note, entretanto, que sua primeira premissa é falsa¹, assim como sua conclusão é falsa.

¹Na valoração que usaríamos para estas proposições que corresponde à nossa realidade.

Argumentos válidos em lógica proposicional: validade vs. verdade

- Exemplo 3 (Continuação)

Considere o argumento:

“Se Londres é uma metrópole, então ela tem prédios altos.”
“Londres tem prédios altos.”
∴ *“Londres é uma metrópole.”*

Este argumento é um argumento inválido.

Note, entretanto, que sua conclusão é verdadeira².

(Porém a veracidade da conclusão é incidental: ela não segue necessariamente da verdade das premissas.)

²Na valoração que usaríamos para estas proposições que corresponde à nossa realidade.

Argumentos válidos em lógica proposicional: validade vs. verdade

- Em resumo, a conclusão de um argumento é garantidamente verdadeira se:
 1. o argumento for válido, e
 2. todas as suas premissas forem verdadeiras.

Caso contrário, a verdade da conclusão não é garantida.

Regras de inferência para lógica proposicional

- Argumentos válidos correspondem a tautologias
 - Nós os chamamos de **regras de inferência**
- Demonstrações complexas podem ser difíceis de verificar
 - Por exemplo, a tabela de verdade de uma demonstração envolvendo 10 variáveis tem $2^{10} = 1\,024$ linhas.
- Construimos demonstrações através de passos mais simples, usando regras de inferência.

Regras de inferência

Regras de inferência para lógica proposicional

- Modus ponens (do latim para “*modo de afirmação*”):

$$\frac{p \quad p \rightarrow q}{q} \text{ MP}$$

A regra de modus ponens nos diz que:

1. se uma afirmação condicional $p \rightarrow q$ é verdadeira,
e
2. a hipótese p do condicional é verdadeira,
então
3. a conclusão q do condicional é necessariamente verdadeira.

Regras de inferência para lógica proposicional

- Exemplo 4 Suponha que saibamos que
 1. *“Se fizer sol hoje, eu vou ao clube”*,
e que
 2. *“Está fazendo sol hoje”*,
então, por modus ponens, podemos concluir que
 3. *“Eu vou ao clube.”*



Regras de inferência para lógica proposicional

- Algumas regras de inferência comuns na lógica proposicional:

Nome	Inferência	Nome	Inferência
Modus ponens	$\frac{p \quad p \rightarrow q}{q} \text{ MP}$	Adição disjuntiva	$\frac{p}{p \vee q} \text{ AD}$
Modus tollens	$\frac{p \rightarrow q \quad \neg q}{\neg p} \text{ MT}$	Simplificação conjuntiva	$\frac{p \wedge q}{p} \text{ SC}$
Silogismo hipotético	$\frac{p \rightarrow q \quad q \rightarrow r}{p \rightarrow r} \text{ SH}$	Adição conjuntiva	$\frac{p \quad q}{p \wedge q} \text{ AC}$
Silogismo disjuntivo	$\frac{p \vee q \quad \neg p}{q} \text{ SD}$	Resolução	$\frac{p \vee q \quad \neg p \vee r}{q \vee r} \text{ R}$

Regras de inferência para lógica proposicional

- Exemplo 5 Justifique a argumentação abaixo:

“Se Zeus é humano, então Zeus é mortal.

Zeus não é mortal.

Logo, Zeus não é humano.”

Regras de inferência para lógica proposicional

- Exemplo 5 Justifique a argumentação abaixo:

“Se Zeus é humano, então Zeus é mortal.”

Zeus não é mortal.

Logo, Zeus não é humano.”

Solução. Sejam

- p a proposição “Zeus é humano”, e
- q a proposição “Zeus é mortal”.

O argumento utilizou modus tollens

$$\frac{p \rightarrow q \quad \neg q}{\neg p} \text{ MT}$$

para concluir $\neg p$, ou seja, que Zeus não é humano.



Regras de inferência para lógica proposicional

- Exemplo 6 Justifique a argumentação abaixo:

“Se chover hoje, não faremos um pique-nique hoje.

Se não fizermos um pique-nique hoje, faremos um pique-nique amanhã.

Logo, se chover hoje, faremos um pique-nique amanhã.”

Regras de inferência para lógica proposicional

- Exemplo 6 Justifique a argumentação abaixo:

“Se chover hoje, não faremos um pique-nique hoje.

Se não fizermos um pique-nique hoje, faremos um pique-nique amanhã.

Logo, se chover hoje, faremos um pique-nique amanhã.”

Solução. Sejam

- p a proposição “Chove hoje”,
- q a proposição “Não faremos um pique-nique hoje”, e
- r a proposição “Faremos um pique-nique amanhã”.

O argumento utilizou silogismo hipotético

$$\frac{p \rightarrow q \quad q \rightarrow r}{p \rightarrow r} \text{ SH}$$

para concluir $p \rightarrow r$, i.e., que se chover hoje faremos um pique-nique amanhã.



Usando regras de inferência para construir demonstrações

- É possível que precisemos aplicar várias regras de inferência para demonstrar uma conclusão a partir de premissas.

- | |
|-----------|
| Exemplo 7 |
|-----------|

 Mostre que as premissas

- (a) *"Esta tarde não está ensolarada, e está mais frio hoje que ontem."*
 - (b) *"Nós vamos nadar somente se estiver ensolarado."*
 - (c) *"Se nós não formos nadar, vamos andar de canoa."*
 - (d) *"Se formos andar de canoa, estaremos em casa antes do pôr do sol."*

levam à conclusão:

"Estaremos em casa ao pôr do sol."

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 7 (Continuação)

Solução. Para formalizar os fatos que você sabe, vamos usar as proposições:

- p : “Esta tarde está ensolarada.”
- q : “Está mais frio hoje que ontem.”
- r : “Nós vamos nadar.”
- s : “Nós vamos andar de canoa.”
- t : “Estaremos em casa ao pôr do sol.”

Assim, as premissas são:

$$(a) \quad \neg p \wedge q$$

$$(b) \quad r \rightarrow p$$

$$(c) \quad \neg r \rightarrow s$$

$$(d) \quad s \rightarrow t$$

E a conclusão é t .

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 7 (Continuação)

Podemos construir um argumento para mostrar que as premissas levam à conclusão da seguinte forma:

Passo	Justificativa
1. $\neg p \wedge q$	Premissa (a)
2. $\neg p$	Simplificação usando (1)
3. $r \rightarrow p$	Premissa (b)
4. $\neg r$	Modus tollens usando (2) e (3)
5. $\neg r \rightarrow s$	Premissa (c)
6. s	Modus ponens usando (4) e (5)
7. $s \rightarrow t$	Premissa (d)
8. t	Modus ponens usando (6) e (7)

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 8 Ao sair para a universidade de manhã eu percebo que não estou usando meus óculos.

Ao tentar descobrir onde estão meus óculos, me lembro dos seguintes fatos, que são todos verdadeiros:

- (a) Se meus óculos estão na bancada da cozinha, então eu os vi durante o café da manhã.
- (b) Eu estava lendo o jornal na sala ou estava lendo o jornal na cozinha.
- (c) Se eu estava lendo o jornal na sala, então meus óculos estão na mesinha de centro.
- (d) Eu não vi meus óculos durante o café da manhã.
- (e) Se eu estava lendo um livro na cama, então meus óculos estão no criado-mudo.
- (f) Se eu estava lendo o jornal na cozinha, então meus óculos estão na bancada da cozinha.

Usando regras de inferência válidas, quero deduzir onde estão meus óculos.

Usando regras de inferência para construir demonstrações

Exemplo 8 (Continuação)

Solução. Para formalizar os fatos que eu sei, vamos usar as proposições:

- p : "Os meus óculos estão na bancada da cozinha."
- q : "Eu vi meus óculos durante café da manhã."
- r : "Eu estava lendo o jornal na sala."
- s : "Eu estava lendo o jornal na cozinha."
- t : "Meus óculos estão na mesinha de centro."
- u : "Eu estava lendo um livro na cama."
- v : "Meus óculos estão no criado-mudo."

Assim, os fatos que eu sei são:

$$(a) \quad p \rightarrow q$$

$$(c) \quad r \rightarrow t$$

$$(e) \quad u \rightarrow v$$

$$(b) \quad r \vee s$$

$$(d) \quad \neg q$$

$$(f) \quad s \rightarrow p$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 8 (Continuação)

Se eu quero deduzir onde estão os óculos eu preciso que os fatos que eu sei me permitam concluir:

- ou p (óculos na bancada da cozinha)
 - ou t (óculos na mesinha do centro)
 - ou v (óculos no criado mudo)
- Note que o “ou” acima deve ser exclusivo para que o conjunto de fórmulas que estamos escrevendo faça sentido.
 - Os óculos não podem estar simultaneamente em mais de um lugar.
 - Logo eu *não* devo conseguir deduzir simultaneamente mais do que uma das opções acima a partir das premissas.

Usando regras de inferência para construir demonstrações

● Exemplo 8 (Continuação)

Podemos deduzir que os óculos se encontram na mesinha do centro da seguinte forma.

Passo	Justificativa
1. $p \rightarrow q$	Premissa (a)
2. $\neg q$	Premissa(d)
3. $\neg p$	Modus tollens usando (1) e (2)
4. $s \rightarrow p$	Premissa (f)
5. $\neg s$	Modus tollens usando (3) e (4)
6. $r \vee s$	Premissa (b)
7. r	Silogismo disjuntivo usando (5) e (6)
8. $r \rightarrow t$	Premissa (c)
9. t	Modus ponens usando (7) e (8)

Como exercício, justifique que a partir das premissas não conseguimos deduzir que os óculos estão na cozinha (p) ou no criado mudo (v).



Regras de inferência para proposições quantificadas

Regras de inferência para proposições quantificadas

- Vamos discutir regras de inferência para proposições quantificadas.
 - Muito usadas em argumentos matemáticos, muitas vezes de forma implícita.
- Regras de inferência importantes para lógica de predicados:

Nome	Inferência	Condição
Instanciação universal	$\frac{\forall x. P(x)}{P(c)} \quad I_{\forall}$	para qualquer c do domínio do x
Generalização universal	$\frac{P(c)}{\forall x. P(x)} \quad G_{\forall}$	se c é um elemento arbitrário do domínio
Instanciação existencial	$\frac{\exists x. P(x)}{P(c)} \quad I_{\exists}$	para algum c do domínio
Generalização existencial	$\frac{P(c)}{\exists x. P(x)} \quad G_{\exists}$	para algum c do domínio

Regras de inferência para proposições quantificadas

- Exemplo 9 Mostre que as premissas
 - Ⓐ *“Todos os matriculados em Introdução à Lógica Computacional são estudantes dedicados”*
 - e
 - Ⓑ *“Felipe está matriculado em Introdução à Lógica Computacional”*
 - implicam a conclusão
 - Ⓒ *“Felipe é um estudante dedicado”*

Regras de inferência para proposições quantificadas

- Exemplo 9 Mostre que as premissas

(a) *"Todos os matriculados em Introdução à Lógica Computacional são estudantes dedicados"*

e

(b) *"Felipe está matriculado em Introdução à Lógica Computacional"*

implicam a conclusão

(c) *"Felipe é um estudante dedicado"*

Solução. Vamos definir os seguintes predicados, tendo como domínio o conjunto de todas os estudantes:

- $M(x)$: *"x está matriculado em Introdução à Lógica Computacional."*
- $D(x)$: *"x é um estudante dedicado."*

Regras de inferência para proposições quantificadas

Exemplo 9 (Continuação)

As premissas do argumento são, então:

$$(a) \quad \forall x : (M(x) \rightarrow D(x))$$

$$(b) \quad M(\text{Felipe})$$

A conclusão do argumento é:

$$(c) \quad D(\text{Felipe})$$

A derivação da conclusão a partir das premissas pode ser feita assim:

Passo

Justificativa

$$1. \quad \forall x : (M(x) \rightarrow D(x))$$

Premissa (a)

$$2. \quad M(\text{Felipe}) \rightarrow D(\text{Felipe})$$

Instanciação universal de (1)

$$3. \quad M(\text{Felipe})$$

Premissa (b)

$$4. \quad D(\text{Felipe})$$

Modus ponens usando (2) e (3)

Regras de inferência para proposições quantificadas

- Exemplo 10 Mostre que as premissas

- (a) *“Um estudante de Introdução à Lógica Computacional não leu o livro-texto”, e*
- (b) *“Todos os estudantes de Introdução à Lógica Computacional foram bem na prova”*

implicam a conclusão

- (c) *“Algum estudante de Introdução à Lógica Computacional que foi bem na prova não leu o livro-texto”*

Regras de inferência para proposições quantificadas

- Exemplo 10 Mostre que as premissas

- (a) *"Um estudante de Introdução à Lógica Computacional não leu o livro-texto", e*
 - (b) *"Todos os estudantes de Introdução à Lógica Computacional foram bem na prova"*
- implicam a conclusão
- (c) *"Algum estudante de Introdução à Lógica Computacional que foi bem na prova não leu o livro-texto"*

Solução. Vamos definir os seguintes predicados, tendo como domínio o conjunto de todas as pessoas:

- $M(x)$: *"x é estudante de Introdução à Lógica Computacional."*
- $L(x)$: *"x leu o livro-texto."*
- $P(x)$: *"x foi bem na prova."*

Regras de inferência para proposições quantificadas

- Exemplo 10 (Continuação)

As premissas do argumento são, então:

$$(a) \quad \exists x : (M(x) \wedge \neg L(x))$$

$$(b) \quad \forall x : (M(x) \rightarrow P(x))$$

A conclusão do argumento é:

$$(c) \quad \exists x : (M(x) \wedge \neg L(x) \wedge P(x))$$

Regras de inferência para proposições quantificadas

- Exemplo 10 (Continuação)

A derivação da conclusão a partir das premissas pode ser feita assim:

Passo

1. $\exists x : (M(x) \wedge \neg L(x))$

2. $M(c) \wedge \neg L(c)$

3. $\forall x : (M(x) \rightarrow P(x))$

4. $M(c) \rightarrow P(c)$

5. $M(c)$

6. $P(c)$

7. $M(c) \wedge \neg L(c) \wedge P(c)$

8. $\exists x : (M(c) \wedge \neg L(c) \wedge P(c))$

Justificativa

Premissa (a)

Instanciação existencial de (1)

Premissa (b)

Instanciação universal de (3)

Simplificação conjuntiva de (2)

Modus ponens de (4) e (5)

Adição conjuntiva de (2) e (6)

Generalização existencial de (7)



Combinando regras de inferência para proposições e predicados quantificados

- Como MP e I_{\forall} são combinadas com frequência, podemos usar a seguinte regra conhecida como **modus ponens universal**:

$$\frac{\forall x. P(x) \rightarrow Q(x) \quad P(c)}{Q(c)} \text{MP}_{\forall}$$

- Exemplo 11

 Suponha que a seguinte premissa seja verdadeira:

“Para todo inteiro positivo n , se $n > 4$, então $n^2 < 2^n$ ”.

Sabemos que a proposição “ $10 > 4$ ” é verdadeira.

Por modus ponens universal, podemos concluir que “ $10^2 < 2^{10}$ ”.

