

DCC638 - Introdução à Lógica Computacional
2025.1

Lógica Proposicional: Fundamentos

Área de Teoria DCC/UFMG

Introdução

Lógica: Introdução

- A **lógica** é o ramo da filosofia, matemática e ciência da computação que trata das **inferências válidas**.

A lógica é a base do raciocínio matemático e de todo o raciocínio automatizado.

- Ela estuda a **preservação da verdade** durante uma argumentação.

A lógica concerne técnicas que garantem que:

1. partindo de hipóteses verdadeiras,
 2. atinjam sempre conclusões também verdadeiras.
- As regras da lógica dão significado preciso a afirmações matemáticas. Elas são essenciais na construção de **demonstrações matemáticas**.

Lógica: Introdução

- A lógica é fundamental em aplicações em ciência da computação:
 - ① projeto de computadores e desenhos de circuitos,
 - ② especificação de sistemas,
 - ③ escrita de programas de computador,
 - ④ inteligência artificial,
 - ⑤ demonstração automática de teoremas,
 - ⑥ verificação de programas,
 - ⑦ processamento de linguagem natural,
 - ⑧ ...
- A lógica se divide em vários tipos: lógica proposicional, lógica de predicados, lógica de ordem superior, lógicas não-clássicas (como intuicionista e linear), etc.
- Neste curso vamos nos concentrar na **lógica proposicional** e na **lógica de predicados**.

Lógica Proposicional

Proposições

- Uma **proposição** é uma sentença declarativa (ou seja, uma sentença que estabelece um fato) que pode ser verdadeira ou falsa, mas não ambos.
- Exemplo 1

 As seguintes sentenças declarativas são proposições:
 - “*Belo Horizonte é a capital de Minas Gerais.*” (Proposição verdadeira)
 - “*Londres é a capital da França.*” (Proposição falsa)
 - “ $1 + 1 = 2.$ ” (Proposição verdadeira)
 - “ $2 + 2 = 3.$ ” (Proposição falsa)
- Exemplo 2

 As seguintes sentenças não são proposições:
 - “*Que horas são?*” (Não é uma sentença declarativa.)
 - “*Estude com afinco para a prova.*” (Não é uma sentença declarativa.)
 - “ $x + 2 = 3.$ ” (Seu valor de verdade vai depender do valor associado a x .)

Proposições

- Nós usamos letras para denotar **variáveis proposicionais**, ou seja, variáveis que representam proposições:

$$p, q, r, s, t, \dots$$

- O **valor de verdade** de uma proposição pode ser:
 - **verdadeiro**, denotado por V (verdadeiro) ou T (do inglês *true*), ou
 - **falso**, denotado por F (falso ou, em inglês, *false*).
- A área da lógica que lida com proposições é chamada de **lógica proposicional** ou **cálculo proposicional**.

A lógica proposicional foi formalizada pela primeira vez pelo filósofo grego Aristóteles no Século IV AC.

Proposições compostas

- **Proposições atômicas** são aquelas que não podem ser expressas em termos de proposições mais simples.
- **Proposições compostas** podem ser criadas ao se combinarem proposições já existentes.

A combinação de proposições é feita usando **operadores lógicos** ou **conectivos lógicos** como:

- negação (não),
 - conjunção (e),
 - disjunção (ou),
 - implicação (implica),
 - implicação dupla (implica duplamente).
-
- Um outro nome que damos a proposições é *fórmulas*.

Conectivos lógicos: Negação

- Seja p uma proposição.

A **negação de p** , denotada por $\neg p$ (ou também \bar{p} , $\sim p$, $!p$), é a afirmação

“Não é o caso que p .”

Lê-se a proposição $\neg p$ como “*não p* ”.

O valor de verdade de $\neg p$ é o oposto do valor de verdade de p .

- Tabela da verdade** para a negação $\neg q$ de uma proposição p :

Negação	
p	$\neg p$
T	F
F	T

Conectivos lógicos: Negação

- Exemplo 3 Seja a proposição

p : “O computador de Haniel roda Linux.”

A negação $\neg p$ é: “Não é o caso que o computador de Haniel rode Linux.”

- Exemplo 4 Seja a proposição

q : “Carolina tem pelo menos 25 anos.”

A negação $\neg q$ é: “Não é o caso que Carolina tenha pelo menos 25 anos.”

Em linguagem natural (ou seja, português), outra forma de escrever $\neg q$:
“Carolina não tem pelo menos 25 anos.”

Mais uma forma de escrever $\neg q$: “Carolina tem menos de 25 anos.”

Conectivos lógicos: Conjunção

- Sejam p e q proposições.

A **conjunção de p e q** , denotada por $p \wedge q$, é a afirmação

“ p e q ”.

A conjunção $p \wedge q$ é verdadeira quando ambos p e q são verdadeiros, e é falsa em caso contrário.

- Tabela da verdade** para a conjunção $p \wedge q$ de duas proposições p e q :

Conjunção

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Conectivos lógicos: Conjunção

- Exemplo 5 Sejam as proposições:

p : “Hoje é sábado”,

q : “Vou fazer o jantar”.

A conjunção $p \wedge q$ é:

“Hoje é sábado e vou fazer o jantar.”

- Às vezes em linguagem natural usamos “mas” para significar conjunção:

- Exemplo 6 A proposição

“Hoje chove, mas vou sair”

é a conjunção $p \wedge q$ das proposições

p : “Hoje chove”

q : “Hoje vou sair”.

Conectivos lógicos: Disjunção

- Sejam p e q proposições.

A **disjunção de p e q** , denotada por $p \vee q$, é a afirmação

“ p ou q ”.

A disjunção $p \vee q$ é verdadeira quando ao menos um entre p e q é verdadeiro, e é falsa em caso contrário.

- Tabela da verdade para a disjunção $p \vee q$ de duas proposições p e q :

Disjunção

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Conectivos lógicos: Disjunção

- Exemplo 7 Sejam as proposições:

p : “O celular de Alice é azul”,

q : “O celular de Alice é novo”.

A disjunção $p \vee q$ é:

“O celular de Alice é azul ou o celular de Alice é novo.”

Alternativamente, $p \vee q$ é:

“O celular de Alice é azul ou é novo.”



Conectivos lógicos: “Ou inclusivo” versus “ou exclusivo”

- A palavra “ou” tem dois significados diferentes em linguagem natural.
- O conectivo “ou” da disjunção corresponde ao significado de **ou inclusivo**, em que a disjunção é verdadeira se ao menos uma das proposições é verdadeira.
- Exemplo 8

 A disjunção

“Você pode se matricular nesta disciplina se tiver cursado Cálculo ou Programação”

significa que podem se matricular na disciplina:

- alunos que cursaram apenas Cálculo,
- alunos que cursaram apenas Programação,
- alunos que cursaram ambos Cálculo e Programação.

Esta é uma disjunção inclusiva.



Conectivos lógicos: “Ou inclusivo” versus “ou exclusivo”

- O outro significado de “ou” corresponde ao **ou exclusivo**, em que a disjunção é verdadeira se exatamente uma das proposições é verdadeira.

- Exemplo 9

 Se você ler na entrada de um conjunto de salas de cinema:

“O ingresso dá direito a assistir à sessão de Star Wars ou à sessão de O Senhor dos Anéis.”

você entende que você pode:

- escolher assistir à sessão de *Star Wars*, mas não à de *O Senhor dos Anéis*,
- escolher assistir à sessão de *O Senhor dos Anéis*, mas não à de *Star Wars*,
- mas você não pode assistir a ambas as sessões de *Star Wars* e de *O Senhor dos Anéis*.

Esta é uma disjunção exclusiva.



Conectivos lógicos: Ou exclusivo

- Sejam p e q proposições.

O **ou exclusivo** de p e q , denotado por $p \oplus q$, é a afirmação

“ou p ou q ”.

O ou exclusivo $p \oplus q$ é verdadeiro quando exatamente um entre p e q é verdadeiro, e é falso em caso contrário.

É comum ler $p \oplus q$ como “ p xor q ” (do inglês *exclusive or*).

- Tabela da verdade para o ou exclusivo $p \oplus q$ de duas proposições p e q :

Ou exclusivo

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Conectivos lógicos: Ou exclusivo

- Exemplo 10 Sejam as proposições

p : “Eu vou à festa hoje”,

q : “Eu vou ficar em casa hoje”.

O ou exclusivo $p \oplus q$ é:

“Hoje ou eu vou à festa, ou eu vou ficar em casa.”



Conectivos lógicos: Proposições condicionais

- Sejam p e q proposições.

A **afirmação condicional** ou **implicação** $p \rightarrow q$ é a afirmação

“se p , então q ”.

- A afirmação condicional $p \rightarrow q$ é falsa quando p é verdadeira e q é falsa.
- Em todos os outros casos*, definimos que a implicação é verdadeira.
- Na afirmação condicional $p \rightarrow q$:
 - p é chamada de **hipótese**, **antecedente**, ou **premissa**,
 - q é chamada de **conclusão** ou **consequente**.

Conectivos lógicos: Proposições condicionais

- Tabela da verdade para a proposição condicional $p \rightarrow q$ envolvendo duas proposições p e q :

Implicação

p	q	$p \rightarrow q$
<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>
<i>T</i>	<i>F</i>	<i>F</i>
<i>F</i>	<i>T</i>	<i>T</i>
<i>F</i>	<i>F</i>	<i>T</i>

A afirmação condicional $p \rightarrow q$ é falsa quando p é verdadeira e q é falsa, e a afirmação é verdadeira caso contrário.

Conectivos lógicos: Proposições condicionais

- A implicação $p \rightarrow q$ pode ser entendida como uma promessa:

“Se você me garantir p , eu te garanto q .”

A promessa só é quebrada (ou falsa) quando:

- você me garantir p e eu não te garantir q em troca.

A promessa é mantida (ou verdadeira) quando:

- você me garante p e eu te garanto q , ou
- você não me garante p (e neste caso eu sou livre para te garantir q ou não sem quebrar a promessa.)

Dizemos que neste caso a implicação é **trivialmente verdadeira**, pois a premissa é falsa.

Conectivos lógicos: Proposições condicionais

- Exemplo 11 Considere a implicação abaixo.

“Se eu ganhar o prêmio, eu vou dar uma festa.”

A implicação só é falsa quando ganho o prêmio mas não dou uma festa.

Se eu não ganhar o prêmio, eu posso dar uma festa ou não, sem assim quebrar minha promessa.

Logo, se eu não ganhar o prêmio, a proposição condicional é trivialmente verdadeira, independentemente de eu dar ou não uma festa.



Conectivos lógicos: Proposições condicionais

- Exemplo 12 Vamos analisar se as implicações abaixo são verdadeiras ou falsas.

- “*Se o sol emite luz, então queijos são laticínios.*”

Proposição verdadeira: premissa e conclusão verdadeiras.

- “*Se $2 + 2 = 3$, então morangos são animais.*”

Proposição verdadeira: premissa e conclusão falsas.

- “*Se a semana tem 7 dias, então o Brasil fica na Europa.*”

Proposição falsa: premissa verdadeira e conclusão falsa.

- “*Se 9 é primo, então 12 é par.*”

Proposição verdadeira: premissa falsa e conclusão verdadeira.



Proposições condicionais em linguagem natural

- Implicações aparecem na matemática e na linguagem natural em diversas formas.

A afirmação condicional $p \rightarrow q$ pode ser expressa como:

- “se p , então q ”
- “ q é necessário para p ”
- “se p , q ”
- “ p implica q ”
- “ q se p ”
- “ p somente se q ”
- “ q quando p ”
- “ q sempre que p ”
- “ p é suficiente para q ”
- “ q segue de p ”

(Após fazer exercícios o suficiente, você vai se acostumar com as várias formas da implicação e tudo vai parecer mais natural!)

Proposições condicionais em linguagem natural

- Exemplo 13 Sejam as proposições:

p : “*Está fazendo sol.*”

q : “*Eu vou ao clube.*”

A implicação $p \rightarrow q$ pode ser escrita em linguagem natural como:

- “*Se estiver fazendo sol, eu vou ao clube.*”
- “*Estar fazendo sol é condição suficiente para eu ir ao clube.*”
- “*O fato de eu ir ao clube segue do fato de estar fazendo sol.*”
- “*Eu vou ao clube sempre que faz sol.*”
- “*Faz sol somente se eu vou ao clube.*”



Proposições condicionais: Conversa, contrapositiva e inversa

- Dada uma implicação $p \rightarrow q$:
 - sua forma **contrapositiva** é a implicação $\neg q \rightarrow \neg p$,
 - sua forma **conversa** é a implicação $q \rightarrow p$,
 - sua forma **inversa** é a implicação $\neg p \rightarrow \neg q$.

Proposições condicionais: Conversa, contrapositiva e inversa

- Exemplo 14 Seja a proposição

“Bruno vai bem na prova sempre que estuda com afinco.”

Esta implicação pode ser escrita como $p \rightarrow q$, em que

p é a proposição *“Bruno estuda com afinco”*, e

q é a proposição *“Bruno vai bem na prova”*.

- A contrapositiva $\neg q \rightarrow \neg p$ é a proposição

“Se Bruno não foi bem na prova, então ele não estudou com afinco.”

- A conversa $q \rightarrow p$ é a proposição

“Se Bruno foi bem na prova, ele estudou com afinco.”

- A inversa $\neg p \rightarrow \neg q$ é a proposição

“Se Bruno não estudou com afinco, ele não foi bem na prova.”

Conectivos lógicos: Proposições bicondicionais

- Sejam p e q proposições.

A **afirmação bicondicional** ou **implicação dupla** $p \leftrightarrow q$ é a afirmação

“ p se, e somente se, q ”.

A afirmação bicondicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeira quando p e q têm o mesmo valor de verdade, e é falsa em caso contrário.

- Em linguagem natural é comum expressar $p \leftrightarrow q$ como:
 - “ p é necessário e suficiente para q .”
 - “ p sse q .” Note que usamos “sse” com dois “s”.(Em inglês, usa-se o “iff” com dois “f”.)

Conectivos lógicos: Proposições bicondicionais

- Tabela da verdade para a implicação dupla $p \leftrightarrow q$ entre duas proposições p e q :

Implicação dupla

p	q	$p \leftrightarrow q$
<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>
<i>T</i>	<i>F</i>	<i>F</i>
<i>F</i>	<i>T</i>	<i>F</i>
<i>F</i>	<i>F</i>	<i>T</i>

- A proposição bicondicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeira sempre que ambos $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ são verdadeiros, e ela é falsa em caso contrário.

Tabela da verdade de proposições compostas

- Nós introduzimos a negação e os conectivos lógicos de disjunção, conjunção, ou exclusivo, implicação e implicação dupla.
- Nós podemos usar estes operadores para expressar proposições cada vez mais complexas.
- Para determinar o valor de verdade de proposições compostas, podemos usar **tabelas da verdade**.

Exemplo 15 Tabela da verdade para a expressão $(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$:

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F

