DCC638 - Introdução à Lógica Computacional
2025.1

Álgebra Booleana

Área de Teoria DCC/UFMG

Introdução

Álgebra Booleana: Introdução

- Circuitos operam com entradas e saídas **binárias**, i.e. com valores 0 e 1.
- Isto facilita a construção de circuitos
  - Qualquer dispositivo que diferencie dois estados (ligado/deligado, alta voltagem/baixa voltagem, etc.)
- Normalmente nos referimos a cada um dos estados binários como **bits** (do inglês "*binary digits*"), ou **valores Booleanos**.
- Em 1 938 Claude Shannon demonstrou que as regras básicas da lógica, introduzidas por George Boole em 1 854 no seu livro "*The Laws of Thought*", podem ser usadas para projetar circuitos.
- Estas regras formam a base da **lógica Booleana**, que é o que vamos estudar aqui.

Álgebra Booleana: Introdução

- Nesta parte do curso vamos fazer a conexão da lógica proposicional e álgebra Booleana com os circuitos de computação.

- Para isto, vamos estudar os fundamentos da álgebra Booleana, incluindo:
  - Como representar números em base binária.
  - Como representar funções Booleanas.
  - Como projetar circuitos que implementem funções.
  - Como minimizar circuitos para obter implementações eficientes.

Representação de Números em Base Binária

Representação de números em base decimal

- O nosso sistema numérico é um sistema baseado em potências de 10.
  - Números representados como somas ponderadas de potências de 10, usando dígitos decimais 0, 1, 2, ..., 9 como pesos.

- $\boxed{\text{Exemplo 1}}$ O número decimal 237 pode ser decomposto como:

$$237_{10} \quad = \quad 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

- Não há nada de especial na escolha de potências de 10 para decompor números.

- Podemos usar qualquer inteiro positivo como uma base numérica.

- Notação: n_b indica que o número n está representado na base b.

Representação de números em base binária

- Podemos representar números naturais em potências de 2, por exemplo.
- Somas ponderadas de potências de 2, usando dígitos binários 0, 1 como pesos.
- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$

$$
\begin{aligned}
11101101_2 &= 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + \\
&\quad 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\
&= 1 \cdot 128 + 1 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + \\
&\quad 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\
&= 237_{10}
\end{aligned}
$$

Convertendo de base binária para decimal

- Formalmente, um número binário de k bits ($b_i \in \{0, 1\}$, para $k - 1 \geq i \geq 0$)

$$n_2 = b_{k-1}\, b_{k-2}\, \ldots\, b_2\, b_1\, b_0$$

pode ser convertido para seu equivalente decimal m_{10} pela fórmula

$$m_{10} = \sum_{i=0}^{k-1} b_i \cdot 2^i \ .$$

Convertendo de base binária para decimal

- Um método rápido para converter um número binário para seu equivalente decimal é dado no exemplo a seguir.

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Encontre o decimal equivalente a 110101_2.

Convertendo de base binária para decimal

- Um método rápido para converter um número binário para seu equivalente decimal é dado no exemplo a seguir.

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Encontre o decimal equivalente a 110101_2.

  Solução. O equivalente ao binário pedido é o decimal 53, como mostra a tabela abaixo.

Posição i	5	4	3	2	1	0	
Dígito b_i	1	1	0	1	0	1	
Equivalente decimal: 2^i	32	16	8	4	2	1	
Contribuição $b_i \cdot 2^i$	32	16	0	4	0	1	**53**

Convertendo de base decimal para binária

- No caso geral, processo de conversão de um decimal m_{10} para seu equivalente binário n_2 se dá da seguinte forma:
  1. Realize a divisão inteira do número decimal m_{10} por 2 repetidas vezes, guardando o resto r_i de cada passo i.
  2. Pare quando o resultado da divisão for 0.
  3. Produza como resultado n_2 a concatenação dos restos r_i na ordem contrária em que foram encontrados.

Convertendo de base decimal para binária

- $\boxed{\text{Exemplo 4}}$ Converta 77 de decimal para seu equivalente binário.

Convertendo de base decimal para binária

- $\boxed{\text{Exemplo 4}}$ Converta 77 de decimal para seu equivalente binário.

Solução. Podemos seguir o seguinte processo:

$$77 \xrightarrow[resto=1]{div2} 38 \xrightarrow[resto=0]{div2} 19 \xrightarrow[resto=1]{div2} 9 \xrightarrow[resto=1]{div2}$$

$$4 \xrightarrow[resto=0]{div2} 2 \xrightarrow[resto=0]{div2} 1 \xrightarrow[resto=1]{div2} 0$$

A representação binária é obtida invertendo-se a ordem dos restos produzidos:

$$77 = 1001101_2.$$

Convertendo de base decimal para binária

- $\boxed{\text{Exemplo 5}}$ Converta 237 de decimal para seu equivalente binário.

Solução. Podemos seguir o seguinte processo:

$$237 \xrightarrow[resto=1]{div2} 118 \xrightarrow[resto=0]{div2} 59 \xrightarrow[resto=1]{div2} 29 \xrightarrow[resto=1]{div2}$$

$$14 \xrightarrow[resto=0]{div2} 7 \xrightarrow[resto=1]{div2} 3 \xrightarrow[resto=1]{div2} 1 \xrightarrow[resto=1]{div2} 0$$

A representação binária é obtida invertendo-se a ordem dos restos produzidos:

$$237 = 11101101_2.$$

Somando dois números em base binária

- Podemos realizar operações usuais em números binários.
- Em particular, a adição binária é feita de forma análoga à decimal:
  - Nos decimais, ao somar o dígito 7 com o dígito 5, por exemplo, o resultado é o dígito 2, e sobra 1 como excedente para a próxima coluna de dígitos.

    Isso ocorre sempre que o resultado ultrapassa o maior dígito decimal, que é 9.
  - Com os binários, isso ocorre quando o maior dígito binário, 1, é ultrapassado.
- $\boxed{\text{Exemplo 6}}$ Compute o valor da soma $1101_2 + 100_2$.

Somando dois números em base binária

- Podemos realizar operações usuais em números binários.
- Em particular, a adição binária é feita de forma análoga à decimal:
  - Nos decimais, ao somar o dígito 7 com o dígito 5, por exemplo, o resultado é o dígito 2, e sobra 1 como excedente para a próxima coluna de dígitos.

    Isso ocorre sempre que o resultado ultrapassa o maior dígito decimal, que é 9.
  - Com os binários, isso ocorre quando o maior dígito binário, 1, é ultrapassado.

- Exemplo 6 Compute o valor da soma $1101_2 + 100_2$.

Solução. Realizando a soma abaixo, encontramos o valor 10101_2.

$$\begin{array}{rccccccl}
 & (1) & (1) & & & & \quad & \text{(excedente, ou "vai um")} \\
 & & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & & \text{(primeira parcela} = 13_{10}) \\
+ & & & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \text{(segunda parcela} = 4_{10}) \\
\hline
 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & & \text{(resultado} = 17_{10})
\end{array}$$

Funções Booleanas

Funções Booleanas: Introdução

- A **álgebra Booleana** fornece as operações e as regras para trabalharmos com o conjunto $\{0, 1\}$.

- Em particular, circuitos eletrônicos podem ser estudados usando este conjunto binário e as regras da álgebra Booleana.

Funções Booleanas: Operações Booleanas

- As três operações em álgebra Booleana que mais vamos usar são:
  - O **complemento**, denotada por uma barra $\overline{}$, definido como $\bar{x} = 1 - x$:
  $$\overline{0} = 1, \qquad \text{e} \qquad \overline{1} = 0 \; .$$
  - O **produto Booleano**, denotado por $\cdot$ ou *AND*, e definido como $x \cdot y = min(x, y)$:
  $$0 \cdot 0 = 0, \qquad 0 \cdot 1 = 0, \qquad 1 \cdot 0 = 0, \qquad 1 \cdot 1 = 1 \; .$$
  - A **soma Booleana**, denotada por $+$ ou *OR*, e definida como $x + y = max(x, y)$:
  $$0 + 0 = 0, \qquad 0 + 1 = 1, \qquad 1 + 0 = 1, \qquad 1 + 1 = 1 \; .$$
  - Quando não há risco de ambiguidade, podemos omitir o símbolo $\cdot$ de produto Booleano, escrevendo ab no lugar de $a \cdot b$.

Funções Booleanas: Operações Booleanas

- A ordem de precedência de operadores Booleanos é:
  1. primeiro avaliam-se complementos;
  2. em seguida avaliam-se produtos;
  3. por fim avaliam-se somas.

- $\boxed{\text{Exemplo 7}}$ Ache o valor de $1 \cdot 0 + \overline{(0 + 1)}$.

Funções Booleanas: Operações Booleanas

- A ordem de precedência de operadores Booleanos é:
  1. primeiro avaliam-se complementos;
  2. em seguida avaliam-se produtos;
  3. por fim avaliam-se somas.

- $\boxed{\text{Exemplo 7}}$ Ache o valor de $1 \cdot 0 + \overline{(0+1)}$.

  Solução.

$$\begin{aligned} 1 \cdot 0 + \overline{(0+1)} &= 1 \cdot 0 + \overline{1} \\ &= 1 \cdot 0 + 0 \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Funções Booleanas: Correspondência com lógica proposicional

- Existe uma correspondência entre a álgebra Booleana e a lógica proposional no seguinte sentido:
  - O complemento $\overline{}$ corresponde ao operador de negação $\neg$.
  - A soma Booleana $+$ corresponde ao operador de disjunção $\vee$.
  - O produto Booleano $\cdot$ corresponde ao operador de conjunção $\wedge$.
  - O valor 0 corresponde ao valor de verdade F (falso).
  - O valor 1 corresponde ao valor de verdade T (verdadeiro).

- Por este motivo, igualdades em álgebra Booleana podem ser traduzidas imediatamente em equivalências proposicionais, e vice-versa.

Funções Booleanas: Correspondência com lógica proposicional

- $\boxed{\text{Exemplo 8}}$ Converta a igualdade Booleana $1 \cdot 0 + \overline{(0+1)} = 0$ na equivalência proposicional correspondente.

Funções Booleanas: Correspondência com lógica proposicional

- $\boxed{\text{Exemplo 8}}$ Converta a igualdade Booleana $1 \cdot 0 + \overline{(0+1)} = 0$ na equivalência proposicional correspondente.

  Solução. A fórmula Booleana $1 \cdot 0 + \overline{(0+1)} = 0$ corresponde à equivalência proposicional
  $$T \wedge F \vee \neg(F \vee T) \equiv F\ .$$

- $\boxed{\text{Exemplo 9}}$ Converta a equivalência proposicional $(T \wedge T) \vee \neg F \equiv T$ na igualdade Booleana correspondente.

Funções Booleanas: Correspondência com lógica proposicional

- $\boxed{\text{Exemplo 8}}$ Converta a igualdade Booleana $1 \cdot 0 + \overline{(0+1)} = 0$ na equivalência proposicional correspondente.

  Solução. A fórmula Booleana $1 \cdot 0 + \overline{(0+1)} = 0$ corresponde à equivalência proposicional
  $$T \wedge F \vee \neg(F \vee T) \equiv F \ .$$

- $\boxed{\text{Exemplo 9}}$ Converta a equivalência proposicional $(T \wedge T) \vee \neg F \equiv T$ na igualdade Booleana correspondente.

  Solução. A equivalência proposicional $(T \wedge T) \vee \neg F \equiv T$ corresponde à fórmula Booleana
  $$(1 \cdot 1) + \overline{0} = 1 \ .$$

Expressões Booleanas e Funções Booleanas

- Seja $B = \{0, 1\}$ o **conjunto de valores Booleanos**.

  Então

  $$B^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in B \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$$

  é o **conjunto de todas as n-tuplas formadas por 0s e 1s**.

- Uma variável x que assume um valor em B é chamada de **variável Booleana**.
- Uma função de B^n para B é chamada de **função Booleana de grau n**.

- $\boxed{\text{Exemplo 10}}$ A função Booleana $F(x, y) = x\overline{y}$ de tipo $B^2 \to B$ é representada na tabela abaixo.

x	y	$F(x, y) = x\overline{y}$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Expressões Booleanas e Funções Booleanas

- Funções Booleanas podem ser representadas por expressões formadas por variáveis Booleanas e operações Booleanas.
- As **expressões Booleanas** sobre as variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são definidas recursivamente como:

  1. 0, 1, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são expressões Booleanas.
  2. Se E_1 e E_2 são expressões Booleanas, então também são expressões Booleanas:

     a) $\bar{E}_1$, b) $(E_1 + E_2)$, c) $(E_1 \cdot E_2)$.

- Cada expressão Booleana representa uma função Booleana.

  (Mais para frente vamos ver também a afirmação conversa: cada função Booleana pode ser representada por uma expressão Booleana.)

- Para calcular o valor da função, basta substituir cada variável pelo seu valor (0 ou 1).

- $\boxed{\text{Exemplo 11}}$ Determine os valores da função Booleana $F(x,y,z) = xy + \bar{z}$.

Solução. A tabela abaixo especifica o comportamento da função desejada.

x	y	z	xy	$\bar{z}$	$F(x,y,z) = xy + \bar{z}$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

Expressões Booleanas e Funções Booleanas

- Duas funções Booleanas F e G de n variáveis são **iguais** se, e somente se:

$$F(b_1, b_2, \ldots, b_n) = G(b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

para todos os valores $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B$.

- Duas expressões Booleanas que representam a mesma função são chamadas de **equivalentes**.

Por exemplo, as três expressões abaixo são todas equivalentes:

1. xy
2. $xy + 0$
3. $xy \cdot 1$

Expressões Booleanas e Funções Booleanas

- Sejam F e G funções Booleanas de grau n. Podemos definir:
  - O **complemento** de F é a função $\overline{F}$, definida como

$$\overline{F}(b_1, b_2, \ldots, b_n) \;=\; \overline{F(b_1, b_2, \ldots, b_n)}$$

  - A **soma Booleana** de F e G é a função $F + G$, definida como

$$(F + G)(b_1, b_2, \ldots, b_n) \;=\; F(b_1, b_2, \ldots, b_n) + G(b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

  - O **produto Booleano** de F e G é a função $F \cdot G$, definida como

$$(F \cdot G)(b_1, b_2, \ldots, b_n) \;=\; F(b_1, b_2, \ldots, b_n) \cdot G(b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

Expressões Booleanas e Funções Booleanas

- Note que uma função Booleana de grau 2 possui
  - como domínio: um conjunto de quatro elementos:

    $$\{ (0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (1,1) \}\ ,$$

  - como contra-domínio: um conjunto de dois elementos:

    $$\{0,1\}\ .$$

- Portanto, o número de funções Booleanas distintas de grau 2 é $2^4 = 16$.

Expressões Booleanas e Funções Booleanas

- Note que uma função Booleana de grau 2 possui
  - como domínio: um conjunto de quatro elementos:

$$\{ (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) \} ,$$

  - como contra-domínio: um conjunto de dois elementos:

$$\{0,1\} .$$

- Portanto, o número de funções Booleanas distintas de grau 2 é $2^4 = 16$.
  - 2 saídas possíveis pra cada entrada

- Exemplo 12 Enumere todas as 16 possíveis funções Booleanas de grau 2.

Solução. Todas as possíveis funções Booleanas $F_0, F_1, \ldots, F_{15}$ de grau 2 estão representadas na tabela baixo.

x	y	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

x	y	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

- Note que no caso geral, uma função Booleana de grau n possui
  - como domínio: um conjunto de 2^n elementos,
  - como contra-domínio: um conjunto de dois elementos: $\{0, 1\}$.

  Portanto, o número de funções Booleanas distintas de grau n é 2^{2^n}.

- $\boxed{\text{Exemplo 13}}$ Número de funções Booleanas de grau n:

Grau $= n$	Número de funções $= 2^{2^n}$
1	4
2	16
3	256
4	65 536
5	4 294 967 296
6	18 446 744 073 709 551 616

Identidades Booleanas

- Existem muitas **identidades** na álgebra Booleana.

  Essas identidades são úteis na simplificação do projeto de circuitos.

- Identidades Booleanas podem ser verificadas usando tabelas de valores.

- $\boxed{\text{Exemplo 14}}$ Verifique a identidade Booleana de que $x(y+z) = xy + xz$.

Identidades Booleanas

- Existem muitas **identidades** na álgebra Booleana.

  Essas identidades são úteis na simplificação do projeto de circuitos.

- Identidades Booleanas podem ser verificadas usando tabelas de valores.

- $\boxed{\text{Exemplo 14}}$ Verifique a identidade Booleana de que $x(y+z) = xy + xz$.

  Solução. Podemos verificar a identidade usando a tabela abaixo.

x	y	z	$y+z$	$x(y+z)$	xy	xz	$xy+xz$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Note que esta identidade Booleana corresponde à equivalência lógica

$$x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \ ,$$

que é uma das leis de distributividade.

Identidades Booleanas

- Algumas identidades Booleanas importantes:

Nome	Identidade
Lei da dupla complementação	$\overline{\overline{x}} = x$
Leis de idempotência	$x + x = x$ $x \cdot x = x$
Leis de identidade	$x + 0 = x$ $x \cdot 1 = x$
Leis de dominância	$x + 1 = 1$ $x \cdot 0 = 0$
Leis de comutatividade	$x + y = y + x$ $xy = yx$
Leis de associatividade	$x + (y + z) = (x + y) + z$ $x(yz) = (xy)z$
Leis de distributividade	$x + yz = (x + y)(x + z)$ $x(y + z) = xy + xz$
Leis de De Morgan	$\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$ $\overline{x + y} = \overline{x}\,\overline{y}$
Leis de absorção	$x + xy = x$ $x(x + y) = x$
Propriedade da unidade	$x + \overline{x} = 1$
Propriedade do zero	$x \cdot \overline{x} = 0$

Identidades Booleanas

- É possível verificar identidades Booleanas usando identidades já verificadas.
- $\boxed{\text{Exemplo 15}}$ Verifique a lei de absorção $x(x+y) = x$ usando identidades Booleanas dadas na tabela anterior.

Identidades Booleanas

- É possível verificar identidades Booleanas usando identidades já verificadas.

- Exemplo 15 Verifique a lei de absorção $x(x + y) = x$ usando identidades Booleanas dadas na tabela anterior.

  Solução.

  $$x(x + y) \equiv$$

- É possível verificar identidades Booleanas usando identidades já verificadas.
- $\boxed{\text{Exemplo 15}}$ Verifique a lei de absorção $x(x+y) = x$ usando identidades Booleanas dadas na tabela anterior.

  Solução.

  $$x(x+y) \equiv (x+0)(x+y) \qquad \text{(lei de identidade para a soma)}$$

Identidades Booleanas

- É possível verificar identidades Booleanas usando identidades já verificadas.

- $\boxed{\text{Exemplo 15}}$ Verifique a lei de absorção $x(x+y) = x$ usando identidades Booleanas dadas na tabela anterior.

  Solução.

$$\begin{aligned} x(x+y) &\equiv (x+0)(x+y) && \text{(lei de identidade para a soma)} \\ &\equiv x + (0 \cdot y) && \text{(distributividade da soma sobre o produto)} \end{aligned}$$

Identidades Booleanas

- É possível verificar identidades Booleanas usando identidades já verificadas.
- $\boxed{\text{Exemplo 15}}$ Verifique a lei de absorção $x(x+y) = x$ usando identidades Booleanas dadas na tabela anterior.

  Solução.

$$
\begin{aligned}
x(x+y) &\equiv (x+0)(x+y) && \text{(lei de identidade para a soma)} \\
&\equiv x + (0 \cdot y) && \text{(distributividade da soma sobre o produto)} \\
&\equiv x + y \cdot 0 && \text{(comutatividade do produto)}
\end{aligned}
$$

Identidades Booleanas

- É possível verificar identidades Booleanas usando identidades já verificadas.
- $\boxed{\text{Exemplo 15}}$ Verifique a lei de absorção $x(x+y) = x$ usando identidades Booleanas dadas na tabela anterior.

  Solução.

$$\begin{aligned} x(x+y) &\equiv (x+0)(x+y) && \text{(lei de identidade para a soma)} \\ &\equiv x + (0 \cdot y) && \text{(distributividade da soma sobre o produto)} \\ &\equiv x + y \cdot 0 && \text{(comutatividade do produto)} \\ &\equiv x + 0 && \text{(lei de dominância para o produto)} \end{aligned}$$

- É possível verificar identidades Booleanas usando identidades já verificadas.

- $\boxed{\text{Exemplo 15}}$ Verifique a lei de absorção $x(x+y)=x$ usando identidades Booleanas dadas na tabela anterior.

Solução.

$$
\begin{aligned}
x(x+y) &\equiv (x+0)(x+y) && \text{(lei de identidade para a soma)}\\
&\equiv x+(0\cdot y) && \text{(distributividade da soma sobre o produto)}\\
&\equiv x+y\cdot 0 && \text{(comutatividade do produto)}\\
&\equiv x+0 && \text{(lei de dominância para o produto)}\\
&\equiv x && \text{(lei de identidade para a soma)}
\end{aligned}
$$

Dualidade

- As identidades da tabela anterior vêm em pares (exceto pelas leis da dupla complementação, da unidade, e do zero).
- Para explicar a relação entre as duas identidades em cada par nós usamos o conceito **dualidade**.
- O **dual** de uma expressão Booleana é obtido pelo intercâmbio entre:
  - somas Booleanas e produtos Booleanos,
  - valores 0 e valores 1.
- Exemplo 16 Encontre os duais das expressões abaixo.
  - O dual de $x(y+0)$ é: $x+(y\cdot 1)$.
  - O dual de $\overline{x}\cdot 1+(\overline{y}+z)$ é: $(\overline{x}+0)(\overline{y}z)$

Dualidade: O princípio da dualidade

- O **dual de uma função Booleana** F representada por uma expressão Booleana é a função F^d representada pelo dual desta expressão correspondente.

  A função dual F^d não depende da expressão Booleana particular usada para representar F.

- Um resultado importante é o **princípio da dualidade**:

  "Uma identidade entre funções representadas por expressões Booleanas permanece válida quando ambos os lados da igualdade são substituídos por seus duais."

- O princípio da dualidade é particularmente útil para derivar novas identidades.

- $\boxed{\text{Exemplo 17}}$ Construa uma identidade a partir de $x(x+y) = x$ (uma das leis de absorção) usando o princípio da dualidade.

Dualidade: O princípio da dualidade

- O **dual de uma função Booleana** F representada por uma expressão Booleana é a função F^d representada pelo dual desta expressão correspondente.

  A função dual F^d não depende da expressão Booleana particular usada para representar F.

- Um resultado importante é o **princípio da dualidade**:

  "Uma identidade entre funções representadas por expressões Booleanas permanece válida quando ambos os lados da igualdade são substituídos por seus duais."

- O princípio da dualidade é particularmente útil para derivar novas identidades.

- $\boxed{\text{Exemplo 17}}$ Construa uma identidade a partir de $x(x+y) = x$ (uma das leis de absorção) usando o princípio da dualidade.

  Solução. Tomando duais em ambos lados da identidade, chegamos à nova identidade $x + xy = x$ (que é a outra lei de absorção).

Definição abstrata de álgebra Booleana

- Note que os resultados que estabelecemos podem ser traduzidos:
  - em resultados sobre lógica proposicional (onde complemento, $+$, $\cdot$, 0, 1, correspondem a, respectivamente, a negação, $\vee$, $\wedge$, F, T);
  - em resultados sobre teoria de conjuntos (onde complemento, $+$, $\cdot$, 0, 1, correspondem a, respectivamente, a complemento de conjuntos, $\cup$, $\cap$, $\emptyset$, conjunto universo U).

    (Verifique você mesmo(a) que as identidades Booleanas correspondem às identidades de conjuntos!)

- Formalizamos estes princípios como uma **álgebra Booleana abstrata**.

- Ao mostrar que uma estrutura (e.g., lógica proposicional, teoria de conjuntos, etc.) é uma álgebra Booleana, então os resultados estabelecidos sobre álgebras Booleanas em geral podem ser aplicados a esta estrutura particular!

Definição abstrata de álgebra Booleana

- Uma **álgebra Booleana** é um conjunto B com duas operações binárias $\wedge$ e $\vee$, elementos 0 e 1, e uma operação unária $\overline{}$ tais que as seguintes propriedades sejam válidas para todo x, y, e z em B:

$$\text{Leis de identidade}: \begin{cases} x \vee 0 = x \\ x \wedge 1 = x \end{cases}$$

$$\text{Leis de complemento}: \begin{cases} x \vee \overline{x} = 1 \\ x \wedge \overline{x} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Leis de associatividade}: \begin{cases} (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \\ (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) \end{cases}$$

$$\text{Leis de comutatividade}: \begin{cases} x \vee y = y \vee x \\ x \wedge y = y \wedge x \end{cases}$$

$$\text{Leis de distributividade}: \begin{cases} x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \end{cases}$$

Representação de Funções Booleanas

Representação de Funções Booleanas: Introdução

- Aqui vamos atacar dois problemas importantes da álgebra Booleana:
  1. Como encontrar uma expressão Booleana que represente uma função pretendida?
     - Veremos como qualquer função Booleana pode ser representada por expressões apenas com soma, produto, complemento, variáveis e valores Booleanos.
  2. Existe um conjunto menor de operadores que pode ser usado para representar todas as funções Booleanas?
     - Veremos que todas as funções Booleanas podem ser representadas usando apenas um operador!
- Ambos os problemas têm enorme importância prática no design de circuitos.

Forma normal disjuntiva

- Uma maneira de representar qualquer função Booleana
- Facilmente computável a partir da tabela de valores da função
- $\boxed{\text{Exemplo 18}}$ Encontre uma expressão Booleana para a função F dada na tabela abaixo.

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Forma normal disjuntiva

- $\boxed{\text{Exemplo 18}}$ (Continuação)

Solução. Primeiramente, note que para representar a função F precisamos de uma expressão Booleana que:

- assuma o valor 1 quando $x = 1$, $y = 0$, e $z = 1$, e
- assuma o valor 0 em caso contrário.

Esta expressão pode ser formada tomando o produto Booleano de x, $\overline{y}$ e z, pois

$$x\overline{y}z = \begin{cases} 1, & \text{se } x = 1,\ y = 0 \text{ e } z = 1 \\ 0, & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

Assim, chegamos à conclusão de que uma expressão para F é

$$F = x\overline{y}z\ .$$

Forma normal disjuntiva

- $\boxed{\text{Exemplo 19}}$ Encontre uma expressão Booleana para as a função G dada na tabela abaixo.

x	y	z	G
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

- $\boxed{\text{Exemplo 19}}$ Encontre uma expressão Booleana para as a função G dada na tabela abaixo.

x	y	z	G
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Solução. Primeiramente, note que para representar a função G precisamos de uma expressão Booleana que:

- assuma o valor 1 quando: $x = 0$, $y = 1$ e $z = 0$, ou $x = 1$, $y = 1$ e $z = 0$.
- assuma o valor 0 em caso contrário.

Forma normal disjuntiva

- $\boxed{\text{Exemplo 19}}$ (Continuação)

Esta expressão pode ser formada tomando a soma Booleana de dois produtos Booleanos, pois

$$\overline{x}y\overline{z} = \begin{cases} 1, & \text{se } x = z = 1 \text{ e } y = 0 \\ 0, & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

e

$$xy\overline{z} = \begin{cases} 1, & \text{se } x = z = 1 \text{ e } y = 0 \\ 0, & \text{em caso contrário} \end{cases}$$

Assim, chegamos à conclusão de que uma expressão para G é

$$G = \overline{x}y\overline{z} + xy\overline{z}$$

Forma normal disjuntiva

- Cada combinação de valores das variáveis para as quais a função tem o valor 1 leva a um produto Booleano das variáveis ou seus complementos.
  - Como generalizar?
- Um **literal** é uma variável Booleana ou seu complemento.
- Um **mintermo** das variáveis Booleanas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é um produto Booleano $y_1, y_2, \ldots, y_n$ em que para cada i temos $y_i = x_i$ ou $y_i = \overline{x_i}$.

  (Um mintermo é um produto de n literais, com um literal para cada variável.)
- $\boxed{\text{Exemplo 20}}$ Encontre um mintermo que seja igual a 1 se $x_1 = x_3 = 0$ e $x_2 = x_4 = x_5 = 1$.

Forma normal disjuntiva

- Cada combinação de valores das variáveis para as quais a função tem o valor 1 leva a um produto Booleano das variáveis ou seus complementos.
  - Como generalizar?

- Um **literal** é uma variável Booleana ou seu complemento.

- Um **mintermo** das variáveis Booleanas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é um produto Booleano $y_1, y_2, \ldots, y_n$ em que para cada i temos $y_i = x_i$ ou $y_i = \overline{x_i}$.

  (Um mintermo é um produto de *n* literais, com um literal para cada variável.)

- $\boxed{\text{Exemplo 20}}$ Encontre um mintermo que seja igual a 1 se $x_1 = x_3 = 0$ e $x_2 = x_4 = x_5 = 1$.

  Solução. O mintermo é $\overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4x_5$.

Forma normal disjuntiva

- Dada uma tabela de valores para uma função Booleana F de grau n:

  1. Tome o mintermo de cada combinação de variáveis que fazem F igual a 1.
  2. Defina F como a soma Booleana destes mintermos.

  Esta soma dos mintermos é a **forma normal disjuntiva** ou **expansão em soma de produtos** da função Booleana.

- $\boxed{\text{Exemplo 21}}$ Encontre a forma normal disjuntiva da função Booleana $\oplus$ (XOR) definida na tabela abaixo.

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Forma normal disjuntiva

- Dada uma tabela de valores para uma função Booleana F de grau n:
  1. Tome o mintermo de cada combinação de variáveis que fazem F igual a 1.
  2. Defina F como a soma Booleana destes mintermos.

  Esta soma dos mintermos é a **forma normal disjuntiva** ou **expansão em soma de produtos** da função Booleana.

- $\boxed{\text{Exemplo 21}}$ Encontre a forma normal disjuntiva da função Booleana $\oplus$ (XOR) definida na tabela abaixo.

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Solução. A função $x_1 \oplus x_2$ assume valor 1 quando:

- $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$ (mintermo $\overline{x_1}x_2$); ou
- $x_1 = 1$ e $x_2 = 0$ (mintermo $x_1\overline{x_2}$).

Logo $x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1}x_2 + x_1\overline{x_2}$.

Forma normal disjuntiva

- $\boxed{\text{Exemplo 22}}$ Encontre a forma normal disjuntiva da função $F(x, y, z) = (x + y)\bar{z}$.

Forma normal disjuntiva

- $\boxed{\text{Exemplo 22}}$ Encontre a forma normal disjuntiva da função $F(x, y, z) = (x + y)\overline{z}$.

  Solução. Vamos resolver esta questão de duas maneiras.

  A primeira maneira é construir a tabela do comportamento de F e derivar dela a forma normal conjuntiva.

x	y	z	$x + y$	$\overline{z}$	$(x + y)\overline{z}$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Forma normal disjuntiva

- $\boxed{\text{Exemplo 22}}$ Encontre a forma normal disjuntiva da função $F(x, y, z) = (x + y)\overline{z}$.

  Solução. Vamos resolver esta questão de duas maneiras.

  A primeira maneira é construir a tabela do comportamento de F e derivar dela a forma normal conjuntiva.

x	y	z	$x + y$	$\overline{z}$	$(x + y)\overline{z}$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

A função F assume valor 1 quando:

- $x = z = 0$ e $y = 1$ (mintermo $\overline{x}\, y\, \overline{z}$); ou
- $x = 1$ e $y = z = 0$ (mintermo $x\, \overline{y}\, \overline{z}$); ou
- $x = y = 1$ e $z = 0$ (mintermo $x\, y\, \overline{z}$).

Logo $F(x, y, z) = \overline{x}\, y\, \overline{z} + x\, \overline{y}\, \overline{z} + x\, y\, \overline{z}$.

Forma normal disjuntiva

- $\boxed{\text{Exemplo 22}}$ (Continuação)

  A segunda maneira é usar identidades Booleanas para expandir o produto que representa a função F, e depois simplificá-lo.

$$
\begin{aligned}
F(x, y, z) &= (x + y)\,\overline{z} & \\
&= x\,\overline{z} + y\,\overline{z} & \text{(Lei da distributividade)}\\
&= x\,1\,\overline{z} + 1\,y\,\overline{z} & \text{(Lei da identidade)}\\
&= x\,(y + \overline{y})\,\overline{z} + (x + \overline{x})\,y\,\overline{z} & \text{(Lei da unidade)}\\
&= x\,y\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,\overline{z} + x\,y\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,\overline{z} & \text{(Lei da distributividade)}\\
&= x\,y\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,\overline{z} & \text{(Lei de idempotência)}
\end{aligned}
$$

Completude de Operadores

- Toda função Booleana pode ser expressa em forma normal disjuntiva
  - (Como você demonstraria isso?)

- Na forma normal disjuntiva utilizamos os operadores Booleanos de:
  - complemento $\overline{}$,
  - soma $+$, e
  - produto $\cdot$.

- Logo o conjunto $\{\overline{}, +, \cdot\}$ é **funcionalmente completo**.

- Isto leva à pergunta:

  "É possível encontrar um conjunto menor de operadores que seja funcionalmente completo?"

Completude de Operadores

- Podemos eliminar um dos operadores se ele poder ser expresso por outros.
- Em particular, podemos eliminar a soma Booleana, notando que:

$$x + y =$$

Completude de Operadores

- Podemos eliminar um dos operadores se ele poder ser expresso por outros.
- Em particular, podemos eliminar a soma Booleana, notando que:

$$
\begin{aligned}
x + y &= \overline{\overline{x + y}} && \text{(Lei da dupla complementação)} \\
&=
\end{aligned}
$$

Completude de Operadores

- Podemos eliminar um dos operadores se ele poder ser expresso por outros.
- Em particular, podemos eliminar a soma Booleana, notando que:

$$
\begin{aligned}
x + y &= \overline{\overline{x + y}} && \text{(Lei da dupla complementação)} \\
&= \overline{\overline{x}\,\overline{y}} && \text{(De Morgan)}
\end{aligned}
$$

Isso significa que $\{\overline{}, \cdot\}$ também é funcionalmente completo.

Completude de Operadores

- Podemos eliminar um dos operadores se ele poder ser expresso por outros.
- Em particular, podemos eliminar a soma Booleana, notando que:

$$\begin{aligned} x + y &= \overline{\overline{x + y}} && \text{(Lei da dupla complementação)} \\ &= \overline{\overline{x}\,\overline{y}} && \text{(De Morgan)} \end{aligned}$$

  Isso significa que $\{\overline{}, \cdot\}$ também é funcionalmente completo.
- De forma similar, podemos eliminar o produto Booleana, notando que:

$$xy =$$

Completude de Operadores

- Podemos eliminar um dos operadores se ele poder ser expresso por outros.
- Em particular, podemos eliminar a soma Booleana, notando que:

$$
\begin{aligned}
x + y &= \overline{\overline{x + y}} && \text{(Lei da dupla complementação)} \\
&= \overline{\overline{x}\,\overline{y}} && \text{(De Morgan)}
\end{aligned}
$$

  Isso significa que $\{\overline{}, \cdot\}$ também é funcionalmente completo.

- De forma similar, podemos eliminar o produto Booleana, notando que:

$$
\begin{aligned}
xy &= \overline{\overline{xy}} && \text{(Lei da dupla complementação)} \\
&=
\end{aligned}
$$

Completude de Operadores

- Podemos eliminar um dos operadores se ele poder ser expresso por outros.
- Em particular, podemos eliminar a soma Booleana, notando que:

$$\begin{aligned} x + y &= \overline{\overline{x + y}} && \text{(Lei da dupla complementação)} \\ &= \overline{\overline{x}\,\overline{y}} && \text{(De Morgan)} \end{aligned}$$

  Isso significa que $\{\overline{\ },\cdot\}$ também é funcionalmente completo.

- De forma similar, podemos eliminar o produto Booleana, notando que:

$$\begin{aligned} xy &= \overline{\overline{xy}} && \text{(Lei da dupla complementação)} \\ &= \overline{\overline{x} + \overline{y}} && \text{(De Morgan)} \end{aligned}$$

  Isso significa que $\{\overline{\ },+\}$ também é funcionalmente completo.

Completude de Operadores

- O operador **NAND**, denotado por $|$, é definido como

$$0 \mid 0 = 1, \qquad 0 \mid 1 = 1, \qquad 1 \mid 0 = 1, \qquad 1 \mid 1 = 0\ .$$

- O conjunto $\{|\}$ é funcionalmente completo pois $\{\overline{\ \ }, \cdot\}$ também o é e *NAND* pode representar complemento e produtos Booleanos.

  - Primeiro, note que $\overline{x} = x \mid x$, como mostra a tabela abaixo.

x	$\overline{x}$	$x \mid x$
0	1	1
1	0	0

  - Segundo, note que $xy = (x \mid y) \mid (x \mid y)$, como mostra a tabela abaixo.

x	y	xy	$x \mid y$	$(x \mid y) \mid (x \mid y)$
0	0	0	1	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	1