

DCC638 - Introdução à Lógica Computacional  
2025.1

## Estruturas Básicas: Conjuntos

Área de Teoria DCC/UFMG

# Introdução

# Estruturas Básicas: Introdução

- Aqui vamos estudar algumas estruturas básicas da matemática discreta:
  - conjuntos,
  - funções,
  - sequências.

# Conjuntos

# Conjuntos: Introdução

- **Conjuntos** são as estruturas discretas fundamentais sobre as quais todas as demais estruturas discretas podem ser construídas.
- A **Teoria dos Conjuntos** é capaz de representar toda a Matemática.

Conceitos básicos como conjunto, pertinência de elementos a um conjunto, o conjunto vazio, operações sobre conjuntos (união, interseção, complemento, ...) podem capturar conceitos como aritmética, lógica, etc.

- Os conceitos que estudaremos aqui são essenciais para diversas áreas, incluindo algumas que estudaremos neste curso:
  - funções,
  - sequências,
  - análise combinatória,
  - relações.

# Conjuntos

- Um **conjunto** é uma coleção não-ordenada de objetos bem definidos, denominados **elementos** ou **membros** do conjunto.

Escrevemos

$$a \in A$$

para denotar que o elemento  $a$  pertence ao conjunto  $A$ .

Escrevemos

$$a \notin A$$

para denotar que o elemento  $a$  não pertence ao conjunto  $A$ .

- Usamos normalmente letras maiúsculas para denotar conjuntos, e minúsculas para denotar elementos destes conjuntos.

# Formas de se definir um conjunto

- Listar seus elementos entre chaves:

$$\textcircled{1} A = \{\text{Ana}, \text{Bia}, \text{Carlos}\}$$

$$\textcircled{2} B = \{a, e, i, o, u\}$$

$$\textcircled{3} C = \{\text{Júpiter}, 2, \pi, \text{Ana}\}$$

$$\textcircled{4} D = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$$

- Especificar uma propriedade que define um conjunto:

$$S = \{x \mid P(x)\}$$

significa que o conjunto  $S$  consiste em todos os elementos  $x$  que tornem o predicado  $P(x)$  verdadeiro.

$$\textcircled{1} E = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$$

$$\textcircled{2} F = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é primo e } x > 431\}$$

$$\textcircled{3} G = \{x \mid \text{a pessoa } x \text{ mora no Brasil}\}$$

# Formas de se definir um conjunto

- Usar uma definição indutiva:

- 1 O conjunto

$$H = \begin{cases} 1 \in H, \\ \text{se } x \in H \text{ e } x + 2 \leq 10, \text{ então } x + 2 \in H. \end{cases}$$

é o conjunto

$$H = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

(Vamos estudar definições indutivas com muito mais cuidado mais à frente neste curso.)



# Formas de se definir um conjunto

- Especificar uma função característica, que retorna 1 para todo elemento que pertence ao conjunto e 0 em caso contrário:

- ① A função característica

$$\mu_I(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{N} \text{ é primo,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

define o conjunto dos números naturais primos.

- Nem sempre é possível utilizar todos os tipos de definição:

- ① Não é possível definir o conjunto

$$J = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

listando todos os seus elementos.

# Alguns conjuntos importantes

- Alguns conjuntos importantes são:

- 1  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  é o conjunto dos **números naturais**.
- 2  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  é o conjunto dos **números inteiros**.
- 3  $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  é o conjunto dos **números inteiros positivos**.
- 4  $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, \text{ e } q \neq 0\}$  é o conjunto dos **números racionais**.
- 5  $\mathbb{R}$  é o conjunto dos **números reais**.
- 6  $\mathbb{R}^+$  é o conjunto dos **números reais positivos**.
- 7  $\mathbb{C}$  é o conjunto dos **números complexos**.

# Igualdade de conjuntos

- Dois conjuntos são **iguais** sse eles possuem os mesmos elementos.

Formalmente, para todos os conjuntos  $A$  e  $B$ ,

$$A = B \quad \equiv \quad \forall x. (x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

- A definição de igualdade de conjuntos implica que:
  - A ordem na qual os elementos são listados é irrelevante:  
①  $\{a, b, c, d\} = \{d, c, b, a\} = \{c, a, d, b\}$
  - Elementos podem aparecer mais de uma vez no conjunto:  
①  $\{a, a, a, a, b, b, b, c, c, d\} = \{a, b, c, d\}$

# Subconjuntos

- Um conjunto  $A$  é chamado **subconjunto** de um conjunto  $B$  sse cada elemento de  $A$  também é um elemento de  $B$ .

Usamos  $A \subseteq B$  para denotar que  $A$  é subconjunto de  $B$ .

Formalmente:

$$A \subseteq B \quad \equiv \quad \forall x. (x \in A \rightarrow x \in B).$$

- As frases “ $A$  **está contido** em  $B$ ” e “ $B$  **contém**  $A$ ” são formas alternativas de dizer que  $A$  é um subconjunto de  $B$ .
  - 1 O conjunto dos naturais é um subconjunto dos inteiros.
  - 2 O conjunto de brasileiros é um subconjunto do conjunto de brasileiros. (Nada impede que um conjunto seja um subconjunto de si próprio!)
  - 3 O conjunto dos números complexos não é um subconjunto dos números reais.

# Subconjuntos próprios

- Um conjunto  $A$  é **subconjunto próprio** de um conjunto  $B$  sse cada elemento de  $A$  está em  $B$  e existe pelo menos um elemento de  $B$  que não está em  $A$ .

Formalmente:

$$\begin{aligned} A \subset B &\equiv \forall x. (x \in A \rightarrow x \in B) \quad \wedge \quad \exists x. (x \in B \wedge x \notin A) \\ &\equiv A \subseteq B \quad \wedge \quad A \neq B. \end{aligned}$$

- 1 O conjunto dos naturais é um subconjunto próprio do conjunto dos inteiros.
- 2 O conjunto dos brasileiros não é um subconjunto próprio dos brasileiros.

# Diagramas de Venn

- Se os conjuntos  $A$  e  $B$  forem representados por regiões no plano, relações entre  $A$  e  $B$  podem ser representadas por desenhos chamados de **Diagramas de Venn**.
- Exemplo 1  $A \subseteq B$ .
- Exemplo 2  $A \not\subseteq B$ .

# O conjunto vazio

- O **conjunto vazio** ou **conjunto nulo** não contém elementos.  
Denotamos o conjunto vazio por  $\{\}$  ou  $\emptyset$ .
- Note que  $\{\emptyset\}$  não denota o conjunto vazio, mas o conjunto cujo único elemento é o conjunto vazio.
- **Teorema:** O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

**Demonstração.** Seja  $A$  um conjunto qualquer. Queremos mostrar que  $\emptyset \subseteq A$ , o que equivale a mostrar que

$$\forall x. (x \in \emptyset \rightarrow x \in A) .$$

Mas a condicional universal acima é verdade por vacuidade, já que a premissa da implicação é sempre falsa.

Logo  $\emptyset \subseteq A$ .



# A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

a)  $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$ :



# A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.
  - a)  $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.

# A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.
  - a)  $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.
  - b)  $\emptyset \in \{a, b, c\}$ :

# A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.
  - a)  $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.
  - b)  $\emptyset \in \{a, b, c\}$ : Falso:  $\emptyset$  não é um elemento do conjunto  $\{a, b, c\}$ .

# A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.
  - a)  $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.
  - b)  $\emptyset \in \{a, b, c\}$ : Falso:  $\emptyset$  não é um elemento do conjunto  $\{a, b, c\}$ .
  - c)  $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$ :

# A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

a)  $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.

b)  $\emptyset \in \{a, b, c\}$ : Falso:  $\emptyset$  não é um elemento do conjunto  $\{a, b, c\}$ .

c)  $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é um elemento do conjunto  $\{\emptyset, a, b, c\}$ .

# A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

a)  $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.

b)  $\emptyset \in \{a, b, c\}$ : Falso:  $\emptyset$  não é um elemento do conjunto  $\{a, b, c\}$ .

c)  $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é um elemento do conjunto  $\{\emptyset, a, b, c\}$ .

d)  $\emptyset \in \{\emptyset\}$ :

# A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

- a)  $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.
- b)  $\emptyset \in \{a, b, c\}$ : Falso:  $\emptyset$  não é um elemento do conjunto  $\{a, b, c\}$ .
- c)  $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é um elemento do conjunto  $\{\emptyset, a, b, c\}$ .
- d)  $\emptyset \in \{\emptyset\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é um elemento do conjunto  $\{\emptyset\}$ .

# A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

- a)  $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.
- b)  $\emptyset \in \{a, b, c\}$ : Falso:  $\emptyset$  não é um elemento do conjunto  $\{a, b, c\}$ .
- c)  $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é um elemento do conjunto  $\{\emptyset, a, b, c\}$ .
- d)  $\emptyset \in \{\emptyset\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é um elemento do conjunto  $\{\emptyset\}$ .
- e)  $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ :



# A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

- a)  $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.
- b)  $\emptyset \in \{a, b, c\}$ : Falso:  $\emptyset$  não é um elemento do conjunto  $\{a, b, c\}$ .
- c)  $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é um elemento do conjunto  $\{\emptyset, a, b, c\}$ .
- d)  $\emptyset \in \{\emptyset\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é um elemento do conjunto  $\{\emptyset\}$ .
- e)  $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.

# A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

- a)  $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.
- b)  $\emptyset \in \{a, b, c\}$ : Falso:  $\emptyset$  não é um elemento do conjunto  $\{a, b, c\}$ .
- c)  $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é um elemento do conjunto  $\{\emptyset, a, b, c\}$ .
- d)  $\emptyset \in \{\emptyset\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é um elemento do conjunto  $\{\emptyset\}$ .
- e)  $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.
- f)  $42 \in \mathbb{N}$ :

# A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

- a)  $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.
- b)  $\emptyset \in \{a, b, c\}$ : Falso:  $\emptyset$  não é um elemento do conjunto  $\{a, b, c\}$ .
- c)  $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é um elemento do conjunto  $\{\emptyset, a, b, c\}$ .
- d)  $\emptyset \in \{\emptyset\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é um elemento do conjunto  $\{\emptyset\}$ .
- e)  $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.
- f)  $42 \in \mathbb{N}$ : Verdadeiro: 42 é um elemento de  $\mathbb{N}$ .

# A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.

- a)  $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.
- b)  $\emptyset \in \{a, b, c\}$ : Falso:  $\emptyset$  não é um elemento do conjunto  $\{a, b, c\}$ .
- c)  $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é um elemento do conjunto  $\{\emptyset, a, b, c\}$ .
- d)  $\emptyset \in \{\emptyset\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é um elemento do conjunto  $\{\emptyset\}$ .
- e)  $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.
- f)  $42 \in \mathbb{N}$ : Verdadeiro: 42 é um elemento de  $\mathbb{N}$ .
- g)  $42 \in \{\mathbb{N}\}$ :

# A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3

 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.
  - a)  $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.
  - b)  $\emptyset \in \{a, b, c\}$ : Falso:  $\emptyset$  não é um elemento do conjunto  $\{a, b, c\}$ .
  - c)  $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é um elemento do conjunto  $\{\emptyset, a, b, c\}$ .
  - d)  $\emptyset \in \{\emptyset\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é um elemento do conjunto  $\{\emptyset\}$ .
  - e)  $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.
  - f)  $42 \in \mathbb{N}$ : Verdadeiro: 42 é um elemento de  $\mathbb{N}$ .
  - g)  $42 \in \{\mathbb{N}\}$ : Falso: o único elemento do conjunto  $\{\mathbb{N}\}$  é o próprio conjunto  $\mathbb{N}$ .

# A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3

 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.
  - a)  $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.
  - b)  $\emptyset \in \{a, b, c\}$ : Falso:  $\emptyset$  não é um elemento do conjunto  $\{a, b, c\}$ .
  - c)  $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é um elemento do conjunto  $\{\emptyset, a, b, c\}$ .
  - d)  $\emptyset \in \{\emptyset\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é um elemento do conjunto  $\{\emptyset\}$ .
  - e)  $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.
  - f)  $42 \in \mathbb{N}$ : Verdadeiro: 42 é um elemento de  $\mathbb{N}$ .
  - g)  $42 \in \{\mathbb{N}\}$ : Falso: o único elemento do conjunto  $\{\mathbb{N}\}$  é o próprio conjunto  $\mathbb{N}$ .
  - h)  $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\}$ :

# A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3

 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.
  - a)  $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.
  - b)  $\emptyset \in \{a, b, c\}$ : Falso:  $\emptyset$  não é um elemento do conjunto  $\{a, b, c\}$ .
  - c)  $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é um elemento do conjunto  $\{\emptyset, a, b, c\}$ .
  - d)  $\emptyset \in \{\emptyset\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é um elemento do conjunto  $\{\emptyset\}$ .
  - e)  $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.
  - f)  $42 \in \mathbb{N}$ : Verdadeiro: 42 é um elemento de  $\mathbb{N}$ .
  - g)  $42 \in \{\mathbb{N}\}$ : Falso: o único elemento do conjunto  $\{\mathbb{N}\}$  é o próprio conjunto  $\mathbb{N}$ .
  - h)  $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\}$ : Verdadeiro: o conjunto  $\mathbb{N}$  é um elemento de  $\{\mathbb{N}\}$ .

# A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3

 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.
  - a)  $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.
  - b)  $\emptyset \in \{a, b, c\}$ : Falso:  $\emptyset$  não é um elemento do conjunto  $\{a, b, c\}$ .
  - c)  $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é um elemento do conjunto  $\{\emptyset, a, b, c\}$ .
  - d)  $\emptyset \in \{\emptyset\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é um elemento do conjunto  $\{\emptyset\}$ .
  - e)  $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.
  - f)  $42 \in \mathbb{N}$ : Verdadeiro: 42 é um elemento de  $\mathbb{N}$ .
  - g)  $42 \in \{\mathbb{N}\}$ : Falso: o único elemento do conjunto  $\{\mathbb{N}\}$  é o próprio conjunto  $\mathbb{N}$ .
  - h)  $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\}$ : Verdadeiro: o conjunto  $\mathbb{N}$  é um elemento de  $\{\mathbb{N}\}$ .
  - i)  $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$ :



# A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3

 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.
  - a)  $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.
  - b)  $\emptyset \in \{a, b, c\}$ : Falso:  $\emptyset$  não é um elemento do conjunto  $\{a, b, c\}$ .
  - c)  $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é um elemento do conjunto  $\{\emptyset, a, b, c\}$ .
  - d)  $\emptyset \in \{\emptyset\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é um elemento do conjunto  $\{\emptyset\}$ .
  - e)  $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.
  - f)  $42 \in \mathbb{N}$ : Verdadeiro: 42 é um elemento de  $\mathbb{N}$ .
  - g)  $42 \in \{\mathbb{N}\}$ : Falso: o único elemento do conjunto  $\{\mathbb{N}\}$  é o próprio conjunto  $\mathbb{N}$ .
  - h)  $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\}$ : Verdadeiro: o conjunto  $\mathbb{N}$  é um elemento de  $\{\mathbb{N}\}$ .
  - i)  $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$ : Falso: o conjunto  $\mathbb{N}$  não é um elemento de  $\mathbb{Z}$ .

# A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- **Exemplo 3** Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.
  - a)  $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.
  - b)  $\emptyset \in \{a, b, c\}$ : Falso:  $\emptyset$  não é um elemento do conjunto  $\{a, b, c\}$ .
  - c)  $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é um elemento do conjunto  $\{\emptyset, a, b, c\}$ .
  - d)  $\emptyset \in \{\emptyset\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é um elemento do conjunto  $\{\emptyset\}$ .
  - e)  $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.
  - f)  $42 \in \mathbb{N}$ : Verdadeiro: 42 é um elemento de  $\mathbb{N}$ .
  - g)  $42 \in \{\mathbb{N}\}$ : Falso: o único elemento do conjunto  $\{\mathbb{N}\}$  é o próprio conjunto  $\mathbb{N}$ .
  - h)  $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\}$ : Verdadeiro: o conjunto  $\mathbb{N}$  é um elemento de  $\{\mathbb{N}\}$ .
  - i)  $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$ : Falso: o conjunto  $\mathbb{N}$  não é um elemento de  $\mathbb{Z}$ .
  - j)  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ :

# A diferença entre pertinência a conjuntos e subconjuntos

- Exemplo 3

 Diga se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa.
  - a)  $\emptyset \subseteq \{a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.
  - b)  $\emptyset \in \{a, b, c\}$ : Falso:  $\emptyset$  não é um elemento do conjunto  $\{a, b, c\}$ .
  - c)  $\emptyset \in \{\emptyset, a, b, c\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é um elemento do conjunto  $\{\emptyset, a, b, c\}$ .
  - d)  $\emptyset \in \{\emptyset\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é um elemento do conjunto  $\{\emptyset\}$ .
  - e)  $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ : Verdadeiro:  $\emptyset$  é subconjunto de qualquer conjunto.
  - f)  $42 \in \mathbb{N}$ : Verdadeiro: 42 é um elemento de  $\mathbb{N}$ .
  - g)  $42 \in \{\mathbb{N}\}$ : Falso: o único elemento do conjunto  $\{\mathbb{N}\}$  é o próprio conjunto  $\mathbb{N}$ .
  - h)  $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\}$ : Verdadeiro: o conjunto  $\mathbb{N}$  é um elemento de  $\{\mathbb{N}\}$ .
  - i)  $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$ : Falso: o conjunto  $\mathbb{N}$  não é um elemento de  $\mathbb{Z}$ .
  - j)  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ : Verdadeiro: o conjunto  $\mathbb{N}$  é um subconjunto de  $\mathbb{Z}$ .



# Conjunto potência

- Dado um conjunto  $A$ , o **conjunto potência de  $A$**  é o conjunto de todos os subconjuntos de  $A$ .

Denotamos por  $\mathcal{P}(A)$  o conjunto potência de  $A$ .

- Exemplos:

- 1 Dado o conjunto  $S = \{x, y, z\}$ , seu conjunto potência é

$$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}.$$

- 2 Dado o conjunto vazio  $\emptyset$ , seu conjunto potência é

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}.$$

- 3 Dado o conjunto  $\{\emptyset\}$ , seu conjunto potência é

$$\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

# Conjunto potência

- **Teorema:** Se um conjunto finito  $A$  tem  $n$  elementos, então  $\mathcal{P}(A)$  tem  $2^n$  elementos.

**Demonstração.** Para formar um subconjunto  $S$  qualquer de  $A$ , podemos percorrer cada elemento  $a_i \in A$  ( $1 \leq i \leq n$ ), decidindo se  $a_i \in S$  ou se  $a_i \notin S$ .

Como para cada elemento há duas opções (pertence ou não pertence), e há um total de  $n$  elementos em  $A$ , há  $2^n$  maneiras de se formar um subconjunto  $S$  de  $A$ .

Logo,  $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ .



# Tuplas ordenadas

- Uma  **$n$ -tupla ordenada**  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  é uma coleção ordenada de  $n$  elementos, em que  $a_1$  é o primeiro elemento,  $a_2$  é o segundo elemento,  $\dots$ , e  $a_n$  é o  $n$ -ésimo elemento.
- Algumas  $n$ -tuplas ordenadas recebem nomes especiais:
  - Uma 2-tupla ordenada é chamada de **par ordenado**.
  - Uma 3-tupla ordenada é chamada de **tripla ordenada**.
  - Uma 4-tupla ordenada é chamada de **quádrupla ordenada**.
  - $\dots$
- Duas  $n$ -tuplas ordenadas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  são **iguais** sse

$$x_i = y_i, \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

# Produto Cartesiano

- Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos. O **produto cartesiano** de  $A$  e  $B$ , denotado  $A \times B$ , é o conjunto de todos os pares ordenados  $(a, b)$ , onde  $a \in A$  e  $b \in B$ .

Formalmente:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

- Exemplo 4

 Sejam  $A = \{1, 2\}$  e  $B = \{a, b, c\}$ .

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

$$A \times A = A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

Note, em geral, que  $A \times B \neq B \times A$ .



# Produto Cartesiano

- Produtos cartesianos podem ser generalizados para mais de dois conjuntos.
- Sejam  $A_1, A_2, \dots, A_n$  conjuntos.

O **produto cartesiano** de  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , denotado

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n,$$

é o conjunto de todas  $n$ -tuplas ordenadas  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , onde  $a_i \in A_i$  para  $i = 1 \dots n$ .

Formalmente:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ para } i = 1 \dots n\}$$

- Exemplo 5 Sejam  $A = \{0, 1\}$ ,  $B = \{a, b\}$ ,  $C = \{\gamma, \delta\}$ .

$$\begin{aligned} A \times B \times C = \{ & (0, a, \gamma), (0, a, \delta), (0, b, \gamma), (0, b, \delta), \\ & (1, a, \gamma), (1, a, \delta), (1, b, \gamma), (1, b, \delta) \} \end{aligned}$$



# O tamanho de conjuntos finitos

- Seja  $A$  um conjunto finito contendo exatamente  $n$  elementos distintos.  
Dizemos que a **cardinalidade** (ou **tamanho**) de  $A$  é  $n$ .  
A notação  $|A| = n$  indica que o tamanho de  $A$  é  $n$  elementos.
- Estudaremos a cardinalidade de conjuntos infinitos mais adiante.

# Operações em conjuntos

# Operações em conjuntos: Introdução

- Dois ou mais conjuntos podem ser combinados de diferentes maneiras.

Por exemplo, dados o conjunto de estudantes de Lógica Computacional e o conjunto de pessoas nascidas em Minas Gerais, podemos definir:

- 1 o conjunto de mineiros que estudam Lógica Computacional,
  - 2 o conjunto de pessoas que são mineiras ou estudam Lógica Computacional,
  - 3 o conjunto de estudantes de Lógica Computacional que não são mineiros,
  - 4 ...
- Aqui estudaremos **operações em conjuntos** que permitem a criação de conjuntos mais complexos a partir de conjuntos mais simples.

# Operações em conjuntos

- Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos do conjunto universo  $U$ :

<b>União:</b>	$A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \vee x \in B\}$
Alternativamente:	$x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$
Notação:	$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$
<b>Interseção:</b>	$A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$
Alternativamente:	$x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$
Notação:	$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$
<b>Diferença:</b>	$A - B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
Alternativamente:	$x \in A - B \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$
<b>Complemento:</b>	$\bar{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$
Alternativamente:	$x \in \bar{A} \leftrightarrow x \notin A$

# Operações em conjuntos

- **Exemplo 6** Sejam os conjuntos  $A = \{1, 3, 4, 5\}$  e  $B = \{1, 2, 5, 6\}$ .

Considere como conjunto universo  $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- $B - A = \{2, 6\}$

- $A \cap B = \{1, 5\}$

- $\overline{A} = \{0, 2, 6, 7\}$

- $A - B = \{3, 4\}$

- $\overline{B} = \{0, 3, 4, 7\}$



# Operações em conjuntos

- Exemplo 7 Considere uma família de conjuntos definida como

$$A_i = \{0, 1, 2, \dots, i\}$$

para  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

Determine:

a)  $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ .

b)  $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$ .

# Operações em conjuntos

- Exemplo 7 Considere uma família de conjuntos definida como

$$A_i = \{0, 1, 2, \dots, i\}$$

para  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

Determine:

a)  $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ .

b)  $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$ .

**Solução.**

Primeiro, vamos entender quem é cada conjunto  $A_i$  com alguns exemplos.

$$A_0 = \{0\}$$

$$A_1 = \{0, 1\}$$

$$A_2 = \{0, 1, 2\}$$

$$A_3 = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\dots = \dots$$

$$A_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

# Operações em conjuntos

- Exemplo 7 (Continuação)

Agora podemos verificar o seguinte.

a)  $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = \mathbb{N}$

Para ver o porquê, note que  $0 \in A_i$  para todo  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ , logo o número 0 deve estar na união desejada. Além disso, para qualquer inteiro positivo  $n$  temos que  $n \in A_n$ , logo  $n$  também deve estar na união desejada.

Assim temos que a união desejada inclui 0 e todos os inteiros positivos, logo esta união é o próprio conjunto  $\mathbb{N}$  dos naturais.

b)  $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \{0\}$

Para ver o porquê, note que  $0 \in A_i$  para todo  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ , logo o número 0 deve estar na interseção desejada. Além disso, para qualquer inteiro positivo  $n$  temos que  $n \notin A_{n-1}$ , logo  $n$  não pode estar na interseção desejada.

Assim temos que a interseção desejada inclui 0, mas não inclui nenhum inteiro positivo, logo esta interseção é o conjunto  $\{0\}$ .





# Igualdade de conjuntos

- Dois conjuntos  $A$  e  $B$  são iguais se, e somente se, cada elemento de  $A$  está em  $B$ , e cada elemento de  $B$  está em  $A$ .
- Uma maneira conveniente de se mostrar que dois conjuntos são iguais é mostrando que cada conjunto é subconjunto do outro.

Formalmente:

$$A = B \quad \equiv \quad \forall x. (x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

**Teorema:**  $A = B$  sse  $A \subseteq B$  e  $B \subseteq A$ .

**Demonstração.** Escrevendo  $A \subseteq B$  e  $B \subseteq A$  formalmente:

$$\begin{aligned} A &= B \\ \equiv \quad \forall x. (x \in A \leftrightarrow x \in B) & \quad \text{(definição de igualdade)} \\ \equiv \quad \forall x. ((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)) & \quad \text{(definição de } \leftrightarrow \text{)} \\ \equiv \quad (\forall x. (x \in A \rightarrow x \in B)) \wedge (\forall x. (x \in B \rightarrow x \in A)) & \quad \text{(distributividade de } \forall \text{ sobre } \wedge \text{)} \\ \equiv \quad A \subseteq B \wedge B \subseteq A & \quad \text{(definição de } \subseteq \text{)} \end{aligned}$$



# Igualdade de conjuntos

- Exemplo 8 Mostre que  $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$ .

## Solução.

- Método 1: Manipulando a definição dos operadores em conjuntos.

Vamos mostrar que  $x \in \overline{(A \cap B)}$  sse  $x \in (\bar{A} \cup \bar{B})$ :

$$\begin{aligned}x \in \overline{(A \cap B)} &\Leftrightarrow x \notin (A \cap B) && \text{(definição de complemento)} \\&\Leftrightarrow \neg(x \in (A \cap B)) && \text{(definição de } \notin \text{)} \\&\Leftrightarrow \neg((x \in A) \wedge (x \in B)) && \text{(definição de interseção)} \\&\Leftrightarrow \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) && \text{(de Morgan)} \\&\Leftrightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B) && \text{(definição de } \notin \text{)} \\&\Leftrightarrow (x \in \bar{A}) \vee (x \in \bar{B}) && \text{(definição de complemento)} \\&\Leftrightarrow x \in (\bar{A} \cup \bar{B}) && \text{(definição de união)}\end{aligned}$$

# Igualdade de conjuntos

- Exemplo 8 (Continuação)

- Método 2: Usando uma **tabela de pertinência**, em que usamos o símbolo 1 para indicar que um elemento pertence a um conjunto, e o símbolo 0 para indicar que ele não pertence.

A tabela abaixo demonstra que um elemento pertence a  $\overline{(A \cap B)}$  (quarta coluna) sse ele pertence a  $\overline{A} \cup \overline{B}$  (sexta coluna):

$A$	$B$	$A \cap B$	$\overline{(A \cap B)}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cup \overline{B}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1



# Igualdade de conjuntos

- Sejam todos os conjuntos abaixo subconjuntos do conjunto universo  $U$ .

Comutatividade	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Associatividade	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Distributividade	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
União e interseção com $U$	$A \cap U = A$	$A \cup U = U$
Complemento duplo	$\overline{\overline{A}} = A$	
Idempotência	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
De Morgan	$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Absorção	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
Diferença de conjuntos	$A - B = A \cap \overline{B}$	
União e interseção com $\emptyset$	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
União e interseção com o complemento	$A \cup \overline{A} = U$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$
Complementos de $U$ e $\emptyset$	$\overline{U} = \emptyset$	$\overline{\emptyset} = U$

# Conjuntos disjuntos

- Dois conjuntos são chamados **disjuntos** sse eles não têm nenhum elemento em comum.

Formalmente:

$$A \text{ e } B \text{ são disjuntos} \quad \equiv \quad A \cap B = \emptyset.$$

- Proposição:** Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ ,  $(A - B)$  e  $B$  são disjuntos.

**Demonstração.** Por contradição. Suponha que a afirmação seja falsa, ou seja, que existem conjuntos  $A$  e  $B$  tais que  $(A - B) \cap B \neq \emptyset$ . Neste caso existe um elemento  $x$  tal que  $x \in (A - B) \wedge x \in B$ . Note que, em particular, isso significa que  $x \in B$ .

Por outro lado, também teremos  $x \in (A - B)$ , o que, pela definição de diferença, significa que  $x \in A \wedge x \notin B$ . Em particular, isso implica que  $x \notin B$ .

Logo chegamos a uma contradição, uma vez que  $x \in B$  e  $x \notin B$ . Portanto, a proposição deve ser verdadeira. □

# Partições de um conjunto

- Os conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são chamados **mutuamente disjuntos** (ou **disjuntos par-a-par**, ou **sem sobreposição**) sse  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para todos  $i, j = 1, 2, \dots, n$  e  $i \neq j$ .
- Uma coleção de conjuntos não vazios  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  é uma **partição** do conjunto  $A$  sse
  - (i)  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ , e
  - (ii)  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são mutuamente disjuntos.
- Exemplo 9** Dado o conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , algumas partições possíveis são:
  - a)  $\{\{2, 3, 5\}, \{1, 4\}\}$ ,
  - b)  $\{\{1\}, \{2, 4, 5\}, \{3\}\}$ ,
  - c)  $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$ , e
  - d)  $\{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}$ .
- Exemplo 10**  $\mathbb{Z}$  pode ser particionado entre o conjunto dos números pares e o conjunto dos números ímpares.

# O Paradoxo de Russell e a Teoria de Conjuntos “Ingênua”

# O Paradoxo do Barbeiro

- Vimos que um conjunto pode ser especificado através de uma propriedade que define um conjunto, como em  $S = \{x \mid P(x)\}$ :

$$\textcircled{1} \quad \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$$

$$\textcircled{2} \quad \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é primo e } x > 431\}$$

- Entretanto, a propriedade  $P(x)$  não pode ser uma propriedade qualquer.
- **Paradoxo do Barbeiro:** *“O barbeiro é alguém que barbeia todos aqueles, e apenas aqueles, homens que não se barbeiam sozinhos.”*

A pergunta é: o barbeiro barbeia a si mesmo?

Equivalentemente, seja  $b$  o barbeiro e seja  $B$  o conjunto de todas as pessoas que o barbeiro  $b$  barbeia. Então:

$$b \in B?$$

Paradoxo:  $b \in B \leftrightarrow b \notin B$ !



# O Paradoxo de Russell e a Teoria de Conjuntos “Ingênua”

- O Paradoxo do Barbeiro é um caso especial do problema identificado por Bertrand Russell:

**Paradoxo de Russell:** Se definirmos  $S$  como “o conjunto de todos os conjuntos que não têm a si mesmo como elemento”, ou seja,

$$S = \{A \mid A \text{ é um conjunto e } A \notin A\},$$

como decidir se  $S \in S$ ?

Paradoxo:  $S \in S \leftrightarrow S \notin S$ !

- Lições:
  - Teoria de Conjuntos “Ingênua” ( “*Naïve set theory*”) não pode ser usada sem cuidado.
  - Para isso existem **abordagens axiomáticas**, como a de Zermelo-Fraenkel ( “*ZF Set Theory*”).