

DCC638 - Introdução à Lógica Computacional
2025.2

Demonstrações: Dedução Natural

Área de Teoria DCC/UFMG

Dedução Natural

- Anteriormente vimos como utilizar *regras de inferências* para *deduzir* novas fórmulas a partir de outras
- Demonstrações de uma conclusão a partir de premissas é feito com sucessivas deduções até que se deduza a conclusão esperada.
- Um conjunto de regras de inferência estabelece um *sistema dedutivo*
- Apresentaremos agora o sistema dedutivo de *dedução natural*
 - Introduzido nos anos 30 por S. Jaskowski e por G. Gentzen
 - Comumente se representa demonstrações como *árvores de derivação*
 - As folhas são as hipóteses e raiz a conclusão

Exemplo

$$\frac{\frac{(\psi_1)^1 \quad (\psi_1 \rightarrow \psi_2)^2}{\psi_2} \rightarrow_E \quad (\psi_2 \rightarrow (\psi_3 \wedge \psi_4))^3}{\frac{\psi_3 \wedge \psi_4}{\psi_3} \wedge_{E_d}} \rightarrow_E$$

- Conclui-se a fórmula ψ_3 a partir das hipóteses 1, 2 e 3.
- Todas as hipóteses são etiquetadas (algumas regras usarão essas etiquetas).

Regras (do exemplo anterior)

- Regra \rightarrow_E (eliminação da implicação)

Permite concluir ψ a partir de derivações de φ e de $\varphi \rightarrow \psi$.

Note que esta regra corresponde ao raciocínio de *modus ponens*.

$$\frac{\begin{array}{c} \mathcal{D}_1 \\ \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathcal{D}_2 \\ \varphi \rightarrow \psi \end{array}}{\psi} \rightarrow_E$$

- \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 correspondem as derivações que concluem φ e $\varphi \rightarrow \psi$, respectivamente.
- Esta é uma regra binária, que toma duas premissas.
- Regra \wedge_{E_d} (eliminação da conjunção à direita)

Permite concluir φ_1 a partir de uma derivação de $\varphi_1 \wedge \varphi_2$.

$$\frac{\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \varphi_1 \wedge \varphi_2 \end{array}}{\varphi_1} \wedge_{E_d}$$

- Esta é uma regra unária, que toma apenas uma premissa.

- Regra \wedge_{E_e} (eliminação da conjunção à esquerda)

Permite concluir φ_2 a partir de uma derivação de $\varphi_1 \wedge \varphi_2$.

$$\frac{\mathcal{D} \quad \varphi_1 \wedge \varphi_2}{\varphi_2} \wedge_{E_e}$$

Exemplo

- Esta é uma derivação da fórmula $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \rightarrow \varphi_1$ *sem utilizar hipóteses*.
- A regra $\rightarrow_{I,1}$ é uma regra que *introduz* uma hipótese (com a etiqueta 1) e depois a *fecha*.
- A intuição é que uma vez que a hipótese introduzida cumpre seu papel, ela é eliminada e não pode ser usada em outras partes da demonstração.

$$\frac{\frac{(\varphi_1 \wedge \varphi_2)^1}{\varphi_1} \wedge_{E_d}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2 \rightarrow \varphi_1} \rightarrow_{I,1}$$

- Regra $\rightarrow_{I,n}$ (introdução da implicação)

Permite obter uma derivação para $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ dada uma derivação de φ_2 a partir de um conjunto de hipóteses contendo, eventualmente, φ_1 .

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi_1]^n \\ \mathcal{D} \\ \varphi_2 \end{array}}{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2} \rightarrow_{I,n}$$

Exemplo

$$\begin{array}{c}
 \frac{(\psi_1)^1 \quad (\psi_1 \rightarrow (\psi_2 \wedge \psi_3)^2 }{\psi_2 \wedge \psi_3} \rightarrow_E \\
 \frac{\psi_2 \wedge \psi_3}{\psi_2} \wedge_{E_d} \\
 \frac{\psi_2}{\psi_1 \rightarrow \psi_2} \rightarrow_{I,1} \\
 \hline
 (\psi_1 \rightarrow \psi_2) \wedge (\psi_1 \rightarrow \psi_3) \\
 \hline
 (\psi_1 \rightarrow (\psi_2 \wedge \psi_3)) \rightarrow ((\psi_1 \rightarrow \psi_2) \wedge (\psi_1 \rightarrow \psi_3))
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \frac{(\psi_1)^1 \quad (\psi_1 \rightarrow (\psi_2 \wedge \psi_3)^2 }{\psi_2 \wedge \psi_3} \rightarrow_E \\
 \frac{\psi_2 \wedge \psi_3}{\psi_3} \wedge_{E_e} \\
 \frac{\psi_3}{\psi_1 \rightarrow \psi_3} \rightarrow_{I,1} \\
 \hline
 (\psi_1 \rightarrow \psi_2) \wedge (\psi_1 \rightarrow \psi_3) \\
 \hline
 (\psi_1 \rightarrow (\psi_2 \wedge \psi_3)) \rightarrow ((\psi_1 \rightarrow \psi_2) \wedge (\psi_1 \rightarrow \psi_3))
 \end{array}$$

Exemplo

$$\begin{array}{c}
 \frac{(\psi_1)^1 \quad (\psi_1 \rightarrow (\psi_2 \wedge \psi_3)^2 }{\psi_2 \wedge \psi_3} \rightarrow_E \quad \frac{(\psi_1)^1 \quad (\psi_1 \rightarrow (\psi_2 \wedge \psi_3)^2 }{\psi_2 \wedge \psi_3} \rightarrow_E \\
 \frac{\psi_2 \wedge \psi_3}{\psi_2} \wedge_{E_d} \quad \frac{\psi_2 \wedge \psi_3}{\psi_3} \wedge_{E_e} \\
 \frac{\psi_2}{\psi_1 \rightarrow \psi_2} \rightarrow_{I,1} \quad \frac{\psi_3}{\psi_1 \rightarrow \psi_3} \rightarrow_{I,1} \\
 \frac{\psi_1 \rightarrow \psi_2 \quad \psi_1 \rightarrow \psi_3}{(\psi_1 \rightarrow \psi_2) \wedge (\psi_1 \rightarrow \psi_3)} \wedge_I \\
 \frac{(\psi_1 \rightarrow \psi_2) \wedge (\psi_1 \rightarrow \psi_3)}{(\psi_1 \rightarrow (\psi_2 \wedge \psi_3)) \rightarrow ((\psi_1 \rightarrow \psi_2) \wedge (\psi_1 \rightarrow \psi_3))} \rightarrow_{I,2}
 \end{array}$$

- Regra \wedge_I (introdução da conjunção)

Dadas derivações para φ_1 e φ_2 , podemos concluir $\varphi_1 \wedge \varphi_2$.

$$\frac{\mathcal{D}_1 \quad \mathcal{D}_2}{\varphi_1 \quad \varphi_2} \wedge_I \\
 \varphi_1 \wedge \varphi_2$$

Exemplo

$$\frac{\frac{\frac{(\varphi)^1 \quad (\varphi \rightarrow \psi_1)^2}{\rightarrow E} \quad \frac{\psi_1}{\vee I_d}}{\psi_1 \vee \psi_2} \rightarrow I,1}{\varphi \rightarrow (\psi_1 \vee \psi_2)} \rightarrow I,2$$

Exemplo

$$\frac{\frac{\frac{(\varphi)^1 \quad (\varphi \rightarrow \psi_1)^2}{\rightarrow E} \quad \frac{\psi_1}{\vee I_d}}{\psi_1 \vee \psi_2} \rightarrow I,1}{(\varphi \rightarrow \psi_1) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi_1 \vee \psi_2))} \rightarrow I,2$$

- Regras $\vee I_d$ e $\vee I_e$ (introdução da disjunção à direita/esquerda)

Dada a derivação de uma fórmula φ , podemos concluir $\varphi \vee \psi$, para qualquer ψ . Analogamente, podemos concluir $\psi \vee \varphi$

$$\frac{\mathcal{D} \quad \varphi}{\varphi \vee \psi} \vee I_d$$

$$\frac{\mathcal{D} \quad \varphi}{\psi \vee \varphi} \vee I_e$$

Exemplo

$$\frac{\frac{((\psi_1 \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_3))^1}{\frac{\frac{(\psi_1 \wedge \psi_2)^2}{\psi_1} \wedge_{E_d} \quad \frac{(\psi_1 \wedge \psi_3)^3}{\psi_1} \wedge_{E_d}}{\psi_1} \vee_{E,2,3}}{\psi_1} \rightarrow_{I,1} ((\psi_1 \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_3)) \rightarrow \psi_1$$

Exemplo

$$\frac{\frac{((\psi_1 \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_3))^1}{\frac{(\psi_1 \wedge \psi_2)^2}{\psi_1} \wedge_{E_d} \frac{(\psi_1 \wedge \psi_3)^3}{\psi_1} \wedge_{E_d}} \vee_{E,2,3}}{\psi_1} \rightarrow_{I,1} ((\psi_1 \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_3)) \rightarrow \psi_1$$

- Regra \vee_{E,n_1,n_2} (eliminação da disjunção)

Esta regra apresenta um raciocínio *por casos*. Para uma disjunção $\varphi_1 \vee \varphi_2$ ser verdadeira, um dos dois entre φ_1, φ_2 deve ser verdadeiro.

Se tanto quanto φ_1 é verdadeiro como quando φ_2 é verdadeiro conseguimos derivar o mesmo ψ , então ψ é derivável de $\varphi_1 \vee \varphi_2$.

$$\frac{\begin{array}{ccc} [\varphi_1]^{n_1} & [\varphi_2]^{n_2} & \\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 & \mathcal{D}_3 \\ \varphi_1 \vee \varphi_2 & \psi & \psi \end{array}}{\psi} \vee_{E,n_1,n_2}$$

Outras regras

- Regra \neg_E (eliminação da negação)

$$\frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\perp} \neg_E$$

- Regra $\neg_{I,n}$ (introdução da negação)

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi]^n \\ \mathcal{D} \\ \perp \end{array}}{\neg\varphi} \neg_{I,n}$$

- Regra \perp_n (demonstração por redução ao absurdo)

$$\frac{\begin{array}{c} [\neg\varphi]^n \\ \mathcal{D} \\ \perp \end{array}}{\varphi} \perp_n$$