

DCC638 - Introdução à Lógica Computacional  
2025.2

# Informações Gerais Sobre o Curso

## Introdução ao Curso

Área de Teoria DCC/UFMG

# O professor

- **Haniel Barbosa**

hbarbosa@dcc.ufmg.br

<http://hanielbarbosa.com/>

- **Formação:**

- 2017: Doutorado em Ciência da Computação (Université de Lorraine, França)
- 2012: Mestrado em Ciência da Computação (UFRN)
- 2010: Bacharelado em Ciência da Computação (UFRN)

- **Experiência profissional:**

- 2019-...: Professor adjunto (UFMG)
- 2017-2019: Professor substituto (University of Iowa, EUA)
- 2017-2019: Pesquisador pós-doutor (University of Iowa, EUA)
- 2013: Professor substituto (UFRN)
- 2012: Estágio (Clearsy, França)
- 2010: Estágio (AeS - Acesso e Segurança, Brasil)

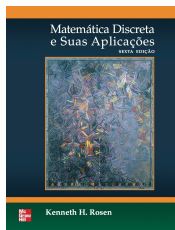
- **Interesses de pesquisa:**

- automatização de raciocínio lógico,
- satisfatibilidade módulo teorias,
- verificação formal,
- assistentes de demonstração

# Bibliografia

- **Livro-texto:**

- Matemática Discreta e Suas Aplicações (6ª Edição)  
Kenneth H. Rosen - McGraw Hill (2009)



- **Bibliografia complementar:**

- Materiais no site do curso
- A Mathematical Introduction to Logic (2<sup>nd</sup> Edition)  
Herbert B. Enderton. Academic Press
- How to Prove It: A Structured Approach (2<sup>nd</sup> Edition)  
Daneiel J. Velleman. Cambridge University Press.

# Métodos de avaliação

- Atividades:
  - **3 Provas:** 90% da nota final.
  - **Listas de exercícios:** 10% da nota final.  
(Haverá cerca de 10 listas de exercícios, aproximadamente 1 a cada semana e meia. Mantenha-se em dia com suas atividades!)
- Haverá uma **prova substitutiva** que:
  - substitui uma *prova perdida* durante o semestre,
  - ocorre ao final do semestre, e
  - cobre toda a matéria lecionada no curso.
- Estudantes com nota final maior ou igual a 40 e menor do que 60 tem direito a fazer o **exame especial**
  - Se nota 60 ou maior, aprovado com 60

- Para material didático, exercícios, e calendários, acesse:

<https://hanielb.github.io/2025.2-ilc/>

e também o Moodle da disciplina:

- 2025\_2 - INTRODUÇÃO À LÓGICA COMPUTACIONAL - TN1-TN2 - METATURMA  
<https://virtual.ufmg.br/20252/course/view.php?id=11645>
- Grupos de discussões e avisos urgentes (como eventuais mudanças no calendário de aulas) também ocorrem no Moodle da disciplina.
- Quem tiver problemas de acesso deve se dirigir ao LCC.

# Objetivos e Programa da Disciplina

*“A lógica é o método de raciocinar de maneira estruturalmente válida.”*

- Ao final deste curso, espera-se que vocês possam responder com propriedade as seguintes perguntas:
  1. O que é a **lógica proposicional**, e como aplicá-la a problemas reais?
  2. O que é a **lógica de predicados**, e como aplicá-la a problemas reais?
  3. A partir de um conjunto de hipóteses, como realizar apenas **deduções válidas**?
  4. Como **demonstrar formalmente a validade** de uma proposição matemática?
  5. O que é o **conceito de recursão**, e como aplicá-lo a problemas reais?
  6. Como a **lógica Booleana** é aplicada à base dos **circuitos digitais** que compõem os **computadores modernos**?

## 1. Fundamentos das lógicas proposicional e de predicados.

- a) Conectivos lógicos (conjunção, disjunções inclusiva e exclusiva, negação, implicação, implicação dupla).
- b) Tabelas da verdade.
- c) Satisfatibilidade, tautologias, contradições.
- d) Consequência lógica, equivalência lógica.
- e) Predicados, quantificadores, e proposições quantificadas.
- f) Regras de inferência.
- g) Expressividade das lógicas proposicional e de predicados.



## 2. Métodos de demonstração.

- a) Demonstração direta, por contra-exemplo e por divisão em casos.
- b) Demonstração por contradição e por implicação contra-positiva.
- c) Demonstrações construtivas e não-construtivas.
- d) Automatização de demonstrações

## 3. Teoria de conjuntos e funções.

- a) Conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais.
- b) Teoria de conjuntos elementar.
- c) Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas.
- d) Conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis.

## 4. Indução e recursão.

- a) Indução matemática fraca e forte.
- b) Princípio da boa ordenação.
- c) Relações de recorrência e recursão.
- d) Indução estrutural.

## 5. Fundamentos de álgebra Booleana e circuitos digitais combinatórios.

- a) Álgebra Booleana e aritmética binária (incluindo leis de De Morgan e representação em complemento de dois).
- b) Portas lógicas.
- c) Formas normais conjuntiva e disjuntiva.
- d) Minimização de circuitos.
- e) Completude de operadores.

# **Apêndice - Um exemplo de uso de lógica: Definindo números**

# O papel da lógica na definição de números

- Começamos com uma motivação natural para a lógica: definir os números.
- Definir números rigorosamente é essencial.

Computadores, por exemplo, manipulam números o tempo todo, seguindo instruções.

Tudo precisa ser rigorosamente definido para computadores funcionarem bem.

- Porém, quando os matemáticos tentaram definir rigorosamente o conceito de “número”, muitas dificuldades surgiram.
  - 1 Como conseguir uma definição finita para um conjunto infinito (como o conjunto dos números naturais, ou o dos números reais)?
  - 2 Como demonstrar que sua definição está correta: que nenhum número “errado” está incluído nela, e que nenhum número “certo” está excluído?
- Para resolver estas dificuldades, muitas técnicas lógicas foram aprimoradas.

# O papel da lógica na definição de números

- Aqui definiremos conjuntos de números importantes:
  - os números naturais  $\mathbb{N}$ ,
  - os números inteiros  $\mathbb{Z}$ ,
  - os números racionais  $\mathbb{Q}$ ,
  - os números irracionais  $\mathbb{I}$ , e
  - os números reais  $\mathbb{R}$ .
- Para isto, vamos usar vários conceitos que veremos com cuidado neste curso:
  - conectivos lógicos para definir conjuntos,
  - definições recursivas,
  - uso de bases diferentes (decimal, binária) para representar números,
  - como representar somas com infinitos termos (somatórios), e
  - como demonstrar a veracidade de uma afirmação matemática.

# Os números naturais

- O conjunto dos **números naturais** é o conjunto

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots\}.$$

# Os números naturais

- O conjunto dos **números naturais** é o conjunto

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots\}.$$

Alguns autores não consideram o número 0 (zero) como um número natural, definindo  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ .

- O conjunto dos números naturais  $\mathbb{N}$  pode ser definido através de duas “observações auto-evidentes”:

$N_1$ : 0 (zero) é um número natural, e

$N_2$ : cada número natural tem um sucessor.

# Os números naturais

- Reescrevendo estas “observações auto-evidentes” de maneira mais formal, obtemos os seguintes **axiomas** para os naturais:

$$N_1': 0 \in \mathbb{N}, \text{ e}$$

$$N_2': \text{ se } k \in \mathbb{N}, \text{ então } s(k) \in \mathbb{N},$$

onde  $s(\cdot)$  é a **função sucessor**:  $s(k) = k + 1$ .

- Exemplos:
  - $0 \in \mathbb{N}$ , por causa de  $(N_1')$ .
  - $s(0) \in \mathbb{N}$ , por causa de  $(N_2')$ . Notação:  $s(0) = 1$ .
  - $s(s(s(s(s(0))))) = 5 \in \mathbb{N}$ .
- Para obter-se o número natural  $n$ , aplica-se  $(N_1')$  uma vez, e depois aplica-se  $(N_2')$   $n$  vezes.



# Números naturais na representação decimal e binária

- Números naturais podem ser escritos em função de potências de 10.

# Números naturais na representação decimal e binária

- Números naturais podem ser escritos em função de potências de 10.

- Exemplo 1

$$237 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$



# Números naturais na representação decimal e binária

- Números naturais podem ser escritos em função de potências de 10.

- Exemplo 1

$$237 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

- Entretanto, não há nada de especial na escolha de potências de 10 para decompor os números naturais.

Podemos representar os números naturais em potências de 2, por exemplo.

- Exemplo 2

$$\begin{aligned} 11101101_2 &= 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 1 \cdot 128 + 1 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ &= 237 \end{aligned}$$

# Os números inteiros

- O conjunto dos **números inteiros** é o conjunto

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

O conjunto

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

é o conjunto dos **números inteiros positivos**.

- O conjunto dos números inteiros  $\mathbb{Z}$  pode ser definido como sendo o conjunto de todos os números naturais e seus negativos:

$$\mathbb{Z} = \{x \mid x \in \mathbb{N} \quad \text{ou} \quad -x \in \mathbb{N}\}.$$

# Os números reais

- Outro conjunto importante é o conjunto dos **números reais**  $\mathbb{R}$ .

- Exemplos:

❶  $\pi = 3.14159265359 \dots$

❸  $2$

❷  $\sqrt{2} = 1.41421356237 \dots$

❹  $-4.5$

- Um **número real** pode ser definido como uma soma ponderada infinita de potências de 10:

$$d_k \quad d_{k-1} \quad \cdots \quad d_1 \quad d_0 \quad . \quad d_{-1} \quad d_{-2} \quad d_{-3} \quad \cdots = \sum_{i=-\infty}^{\infty} d_i \cdot 10^i$$

# Os números reais

- Outro conjunto importante é o conjunto dos **números reais**  $\mathbb{R}$ .

- Exemplos:

❶  $\pi = 3.14159265359 \dots$

❸  $2$

❷  $\sqrt{2} = 1.41421356237 \dots$

❹  $-4.5$

- Um **número real** pode ser definido como uma soma ponderada infinita de potências de 10:

$$d_k \quad d_{k-1} \quad \cdots \quad d_1 \quad d_0 \quad . \quad d_{-1} \quad d_{-2} \quad d_{-3} \quad \cdots = \sum_{i=-\infty}^{\infty} d_i \cdot 10^i$$

## Exemplo 3

$$\begin{aligned}\pi &= 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} + \dots \\ &= 3 + 0.1 + 0.04 + 0.001 + 0.0005 + \dots\end{aligned}$$

# Os números racionais

- O próximo conjunto de interesse é o dos **números racionais**  $\mathbb{Q}$ .
- Um número **racional** é um número real  $x$  tal que existam  $p, q \in \mathbb{Z}$ , com  $q \neq 0$ , tais que

$$x = \frac{p}{q}.$$

Note sempre podemos usar a **representação simplificada** de racional, em que  $\text{mdc}(p, q) = 1$ .

- Exemplos:

$$\textcircled{1} \quad \frac{17}{34} = \frac{-9}{-18} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{-1}{3} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3} = -0.333333 \dots$$

- **Teorema.** Um número real é racional se, e somente se, há periodicidade na sua representação decimal.

Exemplos:

$$\textcircled{1} \quad 1/5 = 0.20000000 \dots$$

$$\textcircled{2} \quad 1/7 = 0.142857142857 \dots$$

# Os números irracionais

- O conjunto dos **números irracionais** são os números reais não-rationais:

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x \notin \mathbb{Q}\}$$

- O seguinte resultado mostra que existe pelo menos um número irracional.
- **Teorema.**  $\sqrt{2}$  não é racional.



# Os números irracionais

- O conjunto dos **números irracionais** são os números reais não-rationais:

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x \notin \mathbb{Q}\}$$

- O seguinte resultado mostra que existe pelo menos um número irracional.
- **Teorema.**  $\sqrt{2}$  não é racional.

## **Demonstração.**

Por contradição: Suponha que  $\sqrt{2}$  é racional.

# Os números irracionais

- O conjunto dos **números irracionais** são os números reais não-rationais:

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x \notin \mathbb{Q}\}$$

- O seguinte resultado mostra que existe pelo menos um número irracional.
- **Teorema.**  $\sqrt{2}$  não é racional.

## Demonstração.

Por contradição: Suponha que  $\sqrt{2}$  é racional.

Neste caso, sabemos que existem números  $p, q \in \mathbb{Z}$ , com  $\text{mdc}(p, q) = 1$ , tais que  $\sqrt{2} = p/q$ .

# Os números irracionais

- O conjunto dos **números irracionais** são os números reais não-rationais:

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x \notin \mathbb{Q}\}$$

- O seguinte resultado mostra que existe pelo menos um número irracional.
- **Teorema.**  $\sqrt{2}$  não é racional.

## Demonstração.

Por contradição: Suponha que  $\sqrt{2}$  é racional.

Neste caso, sabemos que existem números  $p, q \in \mathbb{Z}$ , com  $\text{mdc}(p, q) = 1$ , tais que  $\sqrt{2} = p/q$ .

Elevando os dois lados da equação acima ao quadrado, obtemos  $2 = p^2/q^2$ , ou seja,  $p^2 = 2q^2$ .

# Os números irracionais

- **Demonstração (Continuação).**

Note que  $2q^2$  é par, portanto pela igualdade acima  $p^2$  também tem que ser par. Isto implica que  $p$  deve ser par.

# Os números irracionais

- **Demonstração (Continuação).**

Note que  $2q^2$  é par, portanto pela igualdade acima  $p^2$  também tem que ser par. Isto implica que  $p$  deve ser par.

Agora, já que  $p$  é par, existe algum  $r \in \mathbb{Z}$  tal que  $p = 2r$ . Isso implica que  $2q^2 = p^2 = (2r)^2 = 4r^2$ , o que resulta em  $q^2 = 2r^2$ . Note que então  $q^2$  é par, portanto  $q$  deve ser par.

# Os números irracionais

- **Demonstração (Continuação).**

Note que  $2q^2$  é par, portanto pela igualdade acima  $p^2$  também tem que ser par. Isto implica que  $p$  deve ser par.

Agora, já que  $p$  é par, existe algum  $r \in \mathbb{Z}$  tal que  $p = 2r$ . Isso implica que  $2q^2 = p^2 = (2r)^2 = 4r^2$ , o que resulta em  $q^2 = 2r^2$ . Note que então  $q^2$  é par, portanto  $q$  deve ser par.

Mas se ambos  $p$  e  $q$  são pares, isto contradiz a suposição de que o  $\text{mdc}(p, q) = 1$ : encontramos uma contradição.

Conclusão: não existem  $p, q \in \mathbb{Z}$ , com  $q \neq 0$  e  $\text{mdc}(p, q) = 1$ , tais que  $\sqrt{2} = p/q$ , portanto  $\sqrt{2}$  não é racional.



# Observações sobre os números racionais e irracionais

- Alguns fatos interessantes sobre racionais e irracionais:
  - a) O conjunto dos números reais é a união dos racionais e irracionais:  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ .
  - b) Entre dois números racionais quaisquer sempre existe um número irracional.
  - c) Entre dois números irracionais quaisquer sempre existe um número racional.
  - d) A soma de dois números racionais é sempre um número racional.
  - e) A soma de um racional e um irracional é sempre um número irracional.
  - f) A soma de dois números irracionais é mais complicada: não se sabe se o número  $\pi + e$ , onde  $e$  é a constante de Euler, é racional ou irracional!

# Uma última questão “complicada”

- Vamos fechar com uma questão mais “complicada” sobre os números.

A seguinte afirmação é verdadeira ou é falsa?

*“O conjunto  $\mathbb{Z}$  dos inteiros é “maior” que o conjunto  $\mathbb{N}$  dos naturais.”*



# Uma última questão “complicada”

- Vamos fechar com uma questão mais “complicada” sobre os números.

A seguinte afirmação é verdadeira ou é falsa?

*“O conjunto  $\mathbb{Z}$  dos inteiros é “maior” que o conjunto  $\mathbb{N}$  dos naturais.”*

Há duas possibilidades:

- Se a afirmação for verdadeira, então existe um infinito “maior” que o outro!
- Mas se ela for falsa, então é possível um conjunto ter o mesmo “tamanho” que de um de seus subconjuntos próprios (ou seja,  $\mathbb{Z}$  ter o mesmo “tamanho” que seu subconjunto próprio  $\mathbb{N}$ )!

Dilemas como este, em que nossa intuição não é de muita ajuda, dependem de métodos lógicos cuidadosos para serem resolvidos.