Nama : Muhammad Hanif Hibatullah
NIM : 13220051

Tantangan 2 - PMC

1. $T(n) = 5 = O(1)$

$f(n) = 1$

Akan dicari nilai C dan n_0 sehingga

$$T(n) \le C \cdot f(n) \quad , \text{ untuk } n \ge n_0 \ge 0$$

Jika kita pilih $C = 5$ akan didapat :

$$T(n) \le 5 \quad , \text{ untuk } n \ge 0$$

Sehingga didapat $C = 5$ dan $n_0 = 0$ sehingga :

$$\underline{T(n) = O(f(n)) = O(1)}$$

2. $T(n) = \frac{n(n-1)}{2} + (n-1) = O(n^2)$

$f(n) = \cancel{\ } n^2$

Akan dicari nilai C dan n_0 sehingga

$$T(n) \le C \cdot f(n) \quad , \text{ untuk } n \ge n_0 \ge 0$$

$$-T(n) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + n - 1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 1$$

- Perhatikan bahwa $\frac{n}{2} - 1 \le n^2$ untuk setiap n , sehingga

$$T(n) \le \frac{n^2}{2} + n^2 \quad , n \ge 0$$

$$T(n) \le \frac{3}{2} n^2 \quad , n \ge 0$$

Sehingga didapat $C = \frac{3}{2}$ dan $n_0 = 0$ dan menyebabkan

$$\underline{T(n) = O(f(n)) = O(n^2)}$$

3. $T(n) = 6 \times 2^n + \cancel{\ } 2n^2 = O(2^n)$

$f(n) = 2^n$

Akan dicari nilai C dan n_0 sehingga

$$T(n) \le C \cdot f(n) \quad , \text{ untuk } n \ge n_0 \ge 0$$

- Perhatikan bahwa $2n^2 \le 2^n$ untuk setiap $n > 6$ (tepatnya $n_0 = 6.31972$) maka

$$T(n) \le 6 \cdot 2^n + 2^n \qquad n > 6$$

$$T(n) \le 7 \cdot 2^n \qquad n > 6$$

Sehingga didapat $C = 7$ dengan $n_0 = 6.31972$ maka

$$T(n) = O(f(n)) = O(2^n)$$

4. $T(n) = 1 + 2 + \dots + n = O(n^2)$

$f(n) = n^2$

Akan dicari C dan n_0 sehingga

$$T(n) \leq C \cdot f(n), \quad \text{untuk } n \geq n_0 \geq 0$$

- $T(n) = 1 + 2 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{2}$

Perhatikan bahwa $\dfrac{n}{2} \leq n^2$ untuk setiap $n \geq \dfrac{1}{2}$ sehingga

$$T(n) \leq \frac{n^2}{2} + n^2, \quad n \geq \frac{1}{2}$$

$$T(n) \leq \frac{3}{2} n^2, \quad n \geq \frac{1}{2}$$

Dengan memilih $C = \dfrac{3}{2}$ dan $n_0 = \dfrac{1}{2}$ didapatkan $T(n) = O(f(n)) = O(n^2)$

5. $T(n) = n! = O(n^n)$

$f(n) = n^n$

Akan dicari C dan n_0 sehingga

$$T(n) \leq C \cdot f(n), \quad \text{untuk } n \geq n_0 \geq 0$$

- $T(n) = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \dots$

(karena 0^0 tidak terdefinisi)

∘ Perhatikan bahwa $n > (n-1) > (n-2) > \dots$ untuk setiap $n \geq 1$ sehingga :

$$T(n) \leq \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \dots}_{n \text{ kali}}, \quad \text{untuk } n \geq 1$$

$$T(n) \leq n^n, \quad \text{untuk } n \geq 1$$

Dengan memilih $C = 1$ dan $n_0 = 1$ maka $T(n) = O(f(n)) = O(n^n)$

6. $T(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k = O(n^{k+1})$

$f(n) = n^{k+1}$

Akan dicari C dan n_0 sehingga

$$T(n) \leq C \cdot f(n), \quad \text{untuk } n \geq n_0 \geq 0$$

- $T(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$

∘ Perhatikan bahwa $n^k \geq (n-1)^k \geq (n-2)^k \geq \dots$ untuk setiap $n \geq 1$ (menghindari 0^0) maka

$$T(n) \leq \underbrace{n^k + n^k + n^k + \dots + n^k}_{n \text{ kali}}, \quad n \geq 1$$

$$T(n) \leq n \cdot n^k = n^{k+1}, \quad n \geq 1$$

Dengan memilih $C = 1$ dan $n_0 = 1$ maka $T(n) = O(f(n)) = O(n^{k+1})$

7. $T(n) = 5 \log(3^n) = O(n)$

$f(n) = n$

• Dengan Asumsi log = basis 10

Akan dicari C dan n_0 sehingga

$$T(n) \le C \cdot f(n) \quad \text{untuk } n \ge n_0 \ge 0$$

- $T(n) = 5 \log(3^n)$

  ○ $Cn = 5 \log(3^n)$

  $\frac{Cn}{5} = \log(3^n) \rightarrow 10^{\frac{Cn}{5}} = 3^n \rightarrow 10^{\frac{Cn}{5}} \ge 3^n$ dengan $\frac{Cn}{5} \ge n$

Dengan memilih $C = 5$ maka 10^n akan selalu lebih besar dari 3^n sehingga

$$T(n) \le 5n \quad , \text{ untuk } n \ge 0$$

Sehingga $T(n) = O(f(n)) = O(n)$

8. $T(n) = \log(n!) = O(n \log(n))$

$f(n) = n \log(n)$

Akan dicari C dan n_0 sehingga

$$T(n) \le C \cdot f(n) \quad \text{untuk } n \ge n_0 \ge 0$$

- $\log(n!) = \log(n \cdot (n-1) \ldots) = \log(n) + \log(n-1) + \log(n-2) + \ldots$

dan perhatikan bahwa $\log(n) \ge \log(n-1)$ untuk $n \ge 1$ sehingga

$$T(n) \le \log(n) + \log(n) + \ldots \quad , n \ge 1$$

$$T(n) \le n \log(n) \quad , n \ge 1$$

Dengan memilih $C = 1$ dan $n_0 = 1$ didapat $T(n) = O(f(n)) = O(n \log n)$

9. $T(1) = 0$

$T(2) = 1$

$T(3) = 3$

$T(4) = 6$

Akan dicari $T(n) = an^2 + bn + C$

$T(n) = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 0$

$T(n) = \frac{n(n-1)}{2}$

sehingga $T(n) = \frac{n^2}{2} \cancel{+} - \frac{n}{2}$

dengan $a = \frac{1}{2}$ dan $b = -\frac{1}{2}$, $c = 0$