

Nama : HANIFAH ALIFIA
NIM : A22100058
Kelas : TI – 3B
Matkul : Matematika Diskrit

UTS Matematika Diskrit

1. Buktikan dengan menggunakan induksi matematika bahwa :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Jawab:

$$p(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

➤ $n = 1 \rightarrow p(1) \text{ benar}$

$$1^2 = \frac{(1+1)(2+1)}{6}$$

$$1^2 = \frac{(1+1)(2+1)}{6}$$

$$1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1 \text{ (benar)}$$

➤ Anggap $n = k \rightarrow p(k) \text{ benar}$

$$p(k) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

➤ Akan dibuktikan $p(k+1) \text{ benar}$, $n = k+1$

$$\begin{aligned}
 p(k+1) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6} \\
 &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow p(k+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= (k+1) \left(\frac{k(2k+1) + 6(k+1)}{6} \right)$$

$$= (k+1) \left(\frac{2k^2 + k + 6k + 6}{6} \right)$$

$$= (k+1) \left(\frac{2k^2 + 7k + 6}{6} \right)$$

$$= (k+1) \left(\frac{(2k+3) + (k+2)}{6} \right) = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \text{ Terbukti}$$

2. Berapa banyak cara membentuk sebuah panitia yang beranggotakan 5 orang yang dipilih dari 7 orang pria dan 5 orang wanita, jika di dalam panitia tersebut paling sedikit beranggotakan 2 orang wanita?

Jawab :

Pria $p=7$

Wanita $w=5$

Paling sedikit $a=2$

$$C_3^7 \cdot C_2^5 + C_2^7 \cdot C_3^5 + C_1^7 \cdot C_4^5 + C_0^7 \cdot C_5^5$$

$$\frac{7!}{3!4!} \cdot \frac{5!}{2!3!} + \frac{7!}{2!5!} \cdot \frac{5!}{3!2!} + \frac{7!}{1!6!} \cdot \frac{5!}{4!1!} + \frac{7!}{7!0!} \cdot \frac{5!}{5!0!}$$

$$350 + 210 + 35 + 1 = 596$$

Jadi ada 596 cara untuk membentuk panitia yang beranggotakan 5 orang dari 7 orang pria dan 5 orang wanita dengan syarat minimal 2 orang anggota wanita.

3. Misalkan fungsi-fungsi f dan g pada bilangan-bilangan riil (R) didefinisikan oleh :

Diketahui :

$$f(x) = 2x^2 + x - 3$$

$$g(x) = 5x - 2$$

Ditanyakan :

a. $f \circ g$

b. $(f \circ g)(3)$

Jawab :

$$\begin{aligned} \text{a. } (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(5x - 2) \\ &= 2(5x - 2)^2 + (5x - 2) - 3 \\ &= 2(25x^2 - 20x + 4) + 5x - 5 \\ &= 50x^2 - 40x + 8 + 5x - 5 \\ &= 50x^2 - 35x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } (f \circ g)(3) &= 50(3)^2 - 35(3) + 3 \\ &= 450 - 105 + 3 \\ &= 348 \end{aligned}$$

4. Sebuah kotak berisi 10 kelereng merah, 18 hitam dan 22 putih. Kelereng diaduk baik-baik lalu diambil sebuah secara random. Berapakah probabilitas akan terambil kelereng merah atau hitam ?

Jawab :

$$\begin{aligned} p (Merah \cup Hitam) &= \frac{n(a)Merah}{n(s)} + \frac{n(a)Hitam}{n(s)} \\ &= \frac{10}{50} + \frac{18}{50} \\ &= 0,2 + 0,36 = 0,56 \end{aligned}$$

Jadi probabilitas akan terambilnya kelereng merah atau hitam adalah 0,56%.