

## حل عددی معادله واپاشی رادیواکتیو

نام و نام خانوداگی: حانیه کاظمیان



استاد مربوطه: آقای دکتر نعیم آبادی

یک مسئله واپاشی رادیواکتیو شامل دو نوع هسته،  $A$  و  $B$ ، با جمعیت های  $N_A(t)$  و  $N_B(t)$  را در نظر بگیرید. فرض کنید که هسته های نوع  $A$  به هسته های نوع  $B$  تجزیه می شوند، همچنین هسته های نوع  $B$  به هسته های نوع  $A$  تجزیه می شوند. معادلات مربوط به آهنگ تغییرات جمعیت این دو هسته بصورت زیر است:

$$\begin{aligned}\frac{dN_A}{dt} &= \frac{N_B}{\tau} - \frac{N_A}{\tau} \\ \frac{dN_B}{dt} &= \frac{N_A}{\tau} - \frac{N_B}{\tau}\end{aligned}$$

برای سادگی فرض کرده ایم که دو نوع فروپاشی با ثابت زمانی یکسان،  $\tau$  رخ می دهند، و  $\tau = 1s$  در نظر بگیرید.

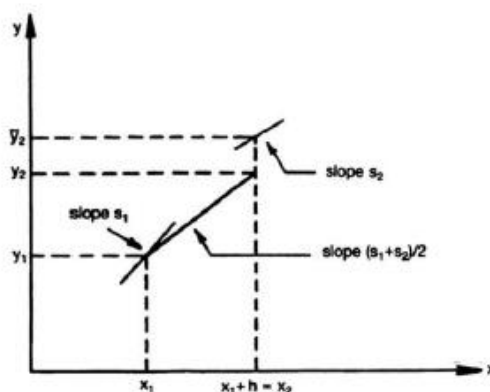
شرایط اولیه مختلفی مانند  $N_A(t=0) = 100$ ،  $N_B(t=0) = 0$  و غیره را در نظر بگیرید. این سیستم معادلات را برای تعداد هسته های  $A$  و  $B$  به عنوان تابعی از زمان حل کنید.. نشان دهید که نتایج عددی شما با این ایده مطابقت دارد که سیستم به حالت ثابتی می رسد که در آن  $N_A(t)$  و  $N_B(t)$  ثابت هستند.

معادله واپاشی هسته های  $A, B$  دو معادله کوپل شده هستند برای حل عددی این مسئله از روش رانگ کوتا مرتبه دوم استفاده شده است زیرا نتایج حاصل از این روش دقت و همخوانی کافی با حل تحلیلی را دارد.

روش رانگ کوتا مرتبه دوم:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad y(x_1) = y_1 \rightarrow s_1 = f(x_1, y_1) \rightarrow s_2 = f(x_2, y_2)$$

$$y_2 = y_1 + h \frac{(s_1 + s_2)}{2}$$



خطای روش رانگ کوتاه مرتبه دوم از رابطه زیر بدست می آید:

$$y_2 = y_1 + h(s_1 + s_2)/2$$

$$= y_1 + h[ f(x_1, y_1) + f(x_1 + h, y_1 + s_1 h) ]$$

تابع  $f(x_1 + h, y_1 + s_1 h)$  را به صورت سری تیلور بسط می دهیم و از جملات سری فقط تا مرتبه  $h^2$  نگه میداریم:

$$y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1)/2 + h [f(x_1, y_1) + h f_x + h s_1 f_y]/2$$

$$= y_1 + h f(x_1, y_1)/2 + h^2 f_x/2 + h^2 f(x_1, y_1) f_y$$

بنابراین خطای این روش از مرتبه  $h^3$  است.

شرط پایداری برای رانگ کوتاه مرتبه دوم به رفتار سیستم های خطی و همچنین اندازه گام زمانی ( $h$ ) بستگی دارد. برای یک

$$y' = \lambda y \quad \text{معادله دیفرانسیل خطی از نوع:}$$

که در آن  $\lambda$  یک عدد مختلط است، روش رانگ کوتاه می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$Y_{n+1}^{(0)} = y_n + h f(x_n, y_n)$$

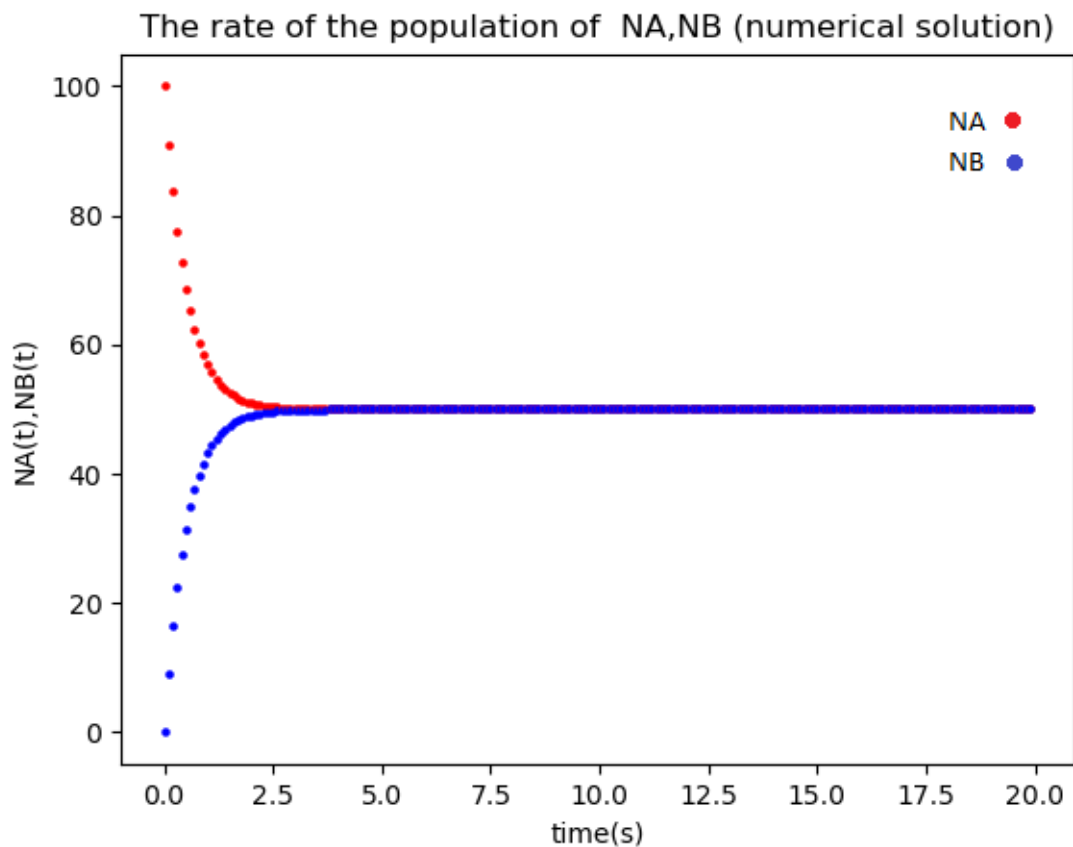
$$Y_{n+1} = y_n + h ((f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, Y_{n+1}^{(0)}))/2$$

شرط پایداری عبارت است از ؛

$$|1 + h/(2\lambda)| < 1$$

این شرط تضمین می کند که خطاها در طول محاسبات تجمع نمی یابند و روش پایدار باقی می ماند. با توجه به این شرط، ما می توانیم مقدار  $h$  را به گونه ای انتخاب کنیم که پایداری حفظ شود.

با استفاده از روش رانگ کوتا مرتبه دوم معادله واپاشی رادیواکتیو با شرایط اولیه و گام های زمانی  $h=0.1$  به صورت عددی حل شده است.

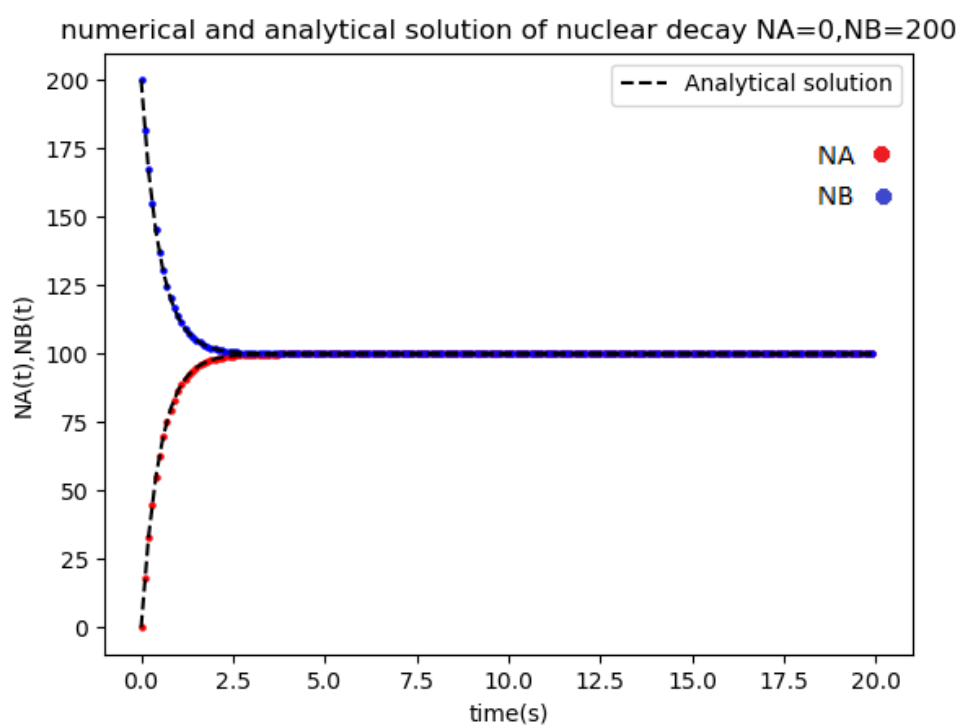
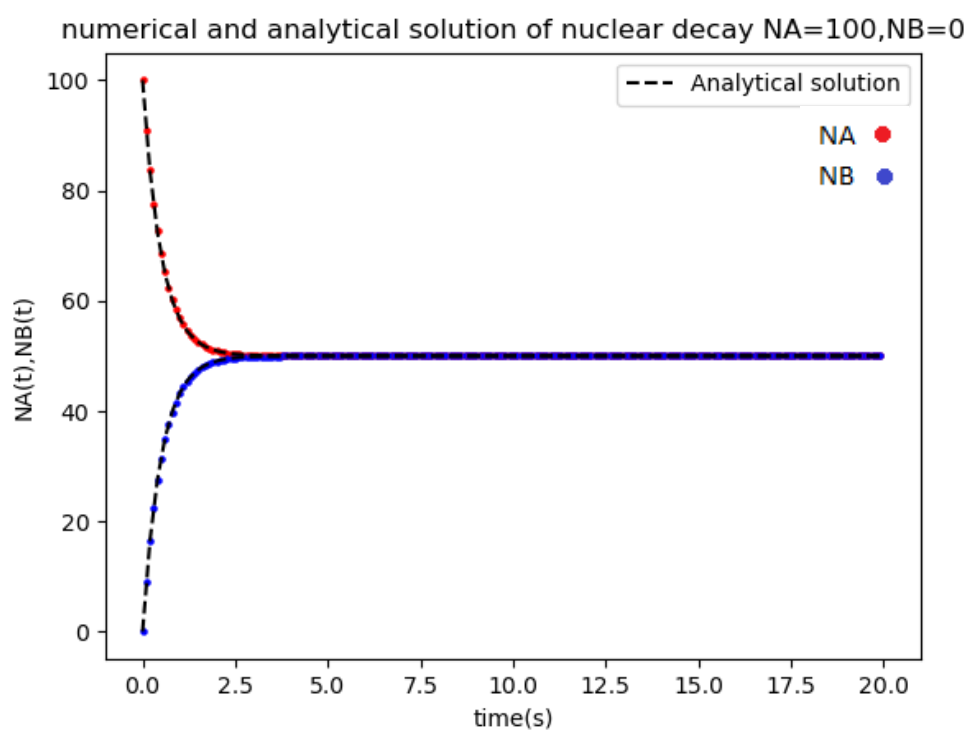


نمودار به دست آمده از حل عددی معادله واپاشی رادیواکتیو نشان می دهد که ابتدا تعداد هسته A با سرعت زیادی کاهش می یابد و هسته B با سرعت زیادی افزایش می کند. سپس با گذشت زمان، سرعت تغییرات تعداد هر دو هسته کاهش پیدا می کند تا جایی که سرعت به صفر می رسد و تعداد هر دو هسته برابر شده و ثابت می ماند.

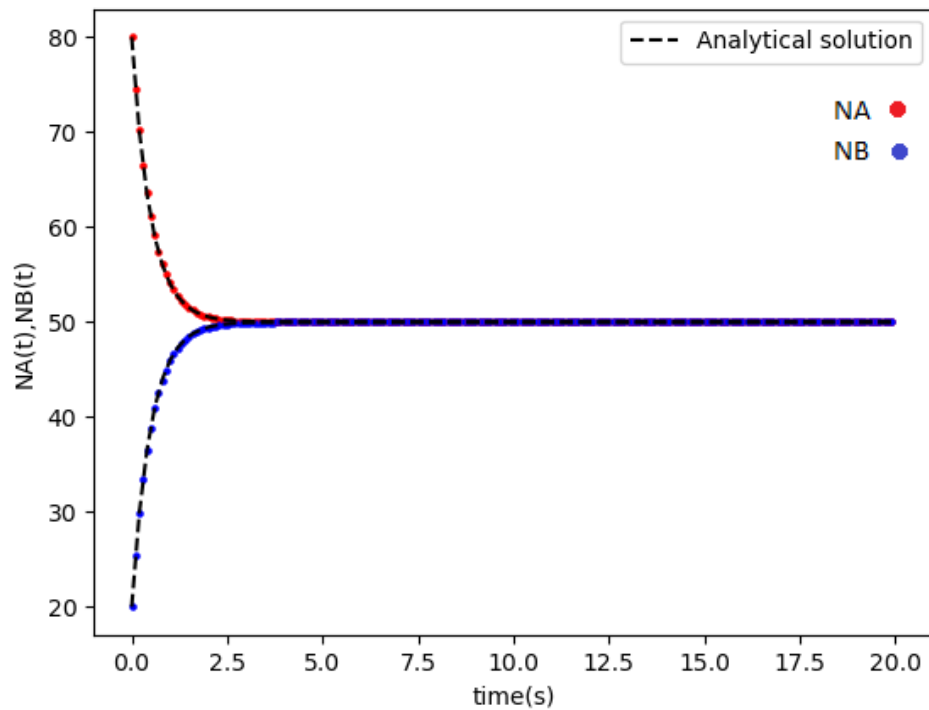
برای اطمینان از حل عددی ، معادله واپاشی رادیواکتیو با روش تحلیلی حل شد و سپس نمودار حل تحلیلی و حل عددی را باهم مقایسه میکنیم

$$NAT=(NA0+NB0+(NA0-NB0)*exp((-2*t)/tau))/2$$

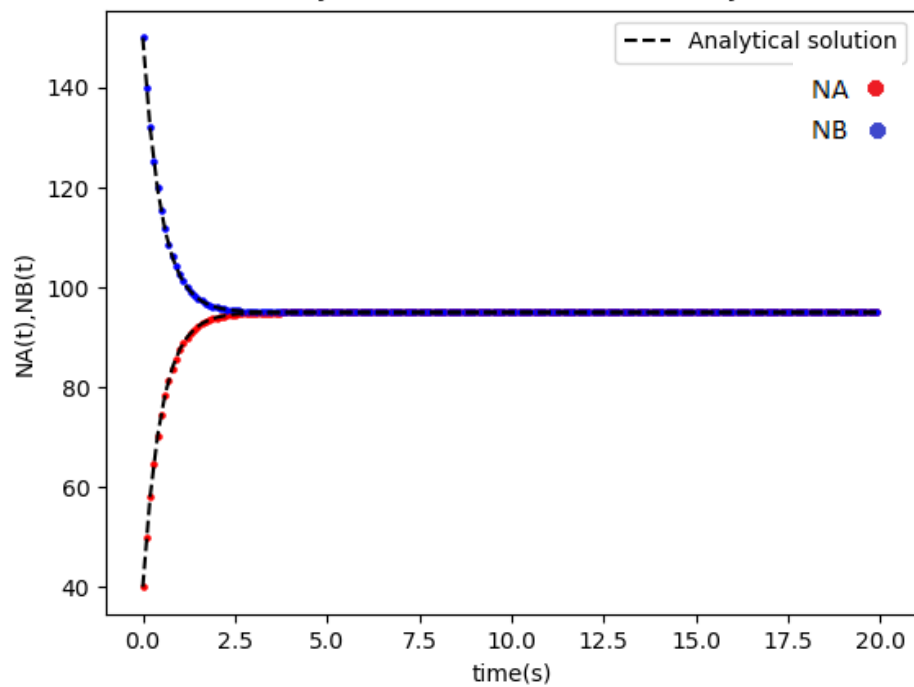
$$NBT=(NA0+NB0-(NA0-NB0)*exp((-2*t)/tau))/2$$



numerical and analytical solution of nuclear decay NA=80,NB=20



numerical and analytical solution of nuclear decay NA=40,NB=150



با مقایسه‌ی نتایج حاصل از حل عددی و حل تحلیلی معادله واپاشی، به وضوح مشاهده می‌شود که روش رانگ-کوتا به عنوان یک روش عددی تقریباً دقیق عمل می‌کند. نمودارهای حاصل از هر دو نوع حل تقریباً بر روی یکدیگر قرار گرفته‌اند، که نشان‌دهنده‌ی هم‌خوانی بالای نتایج است. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که روش رانگ-کوتا مرتبه دوم یک روش مؤثر و دارای دقت کافی برای حل مسائل معادلات دیفرانسیل است و می‌تواند به عنوان ابزاری معتبر در تحلیل‌های عددی مورد استفاده قرار گیرد. این دقت و کارایی، رانگ-کوتا را به گزینه‌ای مناسب برای حل مسائل پیچیده‌تر تبدیل می‌کند.