یک مسئله واپاشی رادیواکتیو شامل دو نوع هسته،$A$ و $B$ ، با جمعیت های $N_A(t)$ و $N_B(t)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید که هسته‌های نوع $A$ به هسته‌های نوع $B$ تجزیه می‌شوند، همچنین هسته‌های نوع $B$ به هسته‌های نوع $A$ تجزیه می‌شوند. معادلات مربوط به آهنگ تغییرات جمعیت این دو هسته بصورت زیر است:

$$\frac{dN_A}{dt} = \frac{N_B}{\tau} - \frac{N_A}{\tau}$$
$$\frac{dN_B}{dt} = \frac{N_A}{\tau} - \frac{N_B}{\tau}$$

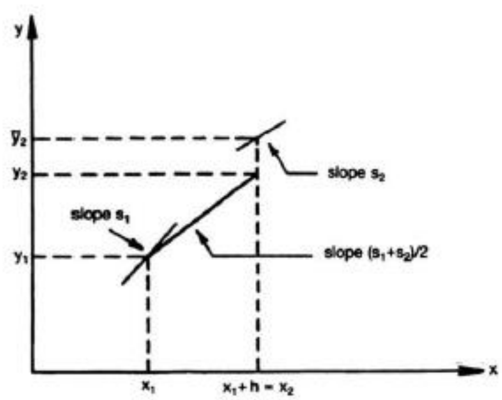
برای سادگی فرض کرده‌ایم که دو نوع فروپاشی با ثابت زمانی یکسان، $\tau$ رخ می دهند، و $\tau = 1s$ در نظر بگیرید.

شرایط اولیه مختلفی مانند$N_A(t=0) = 100$ ، $N_B(t=0) = 0$ و غیره را در نظر بگیرید. این سیستم معادلات را برای تعداد هسته های $A$ و $B$ به عنوان تابعی از زمان حل کنید.. نشان دهید که نتایج عددی شما با این ایده مطابقت دارد که سیستم به حالت ثابتی می رسد که در آن $N_A(t)$ و $N_B(t)$ ثابت هستند.

معادله واپاشی هسته های A,B دو معادله کوپل شده هستند برای حل عددی این مسئله از روش رانگ کوتا مرتبه دوم استفاده شده است زیرا نتایج حاصل از این روش دقت و همخوانی کافی با حل تحلیلی را دارد.

روش رانگ کوتا مرتبه دوم:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad y(x_1) = y_1 \quad \rightarrow \quad s_1 = f(x_1, y_1) \quad \rightarrow \quad s_2 = f(x_2, y_2)$$
$$y_2 = y_1 + h\frac{(s_1 + s_2)}{2}$$



**خطای روش رانگ کوتا مرتبه دوم** از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$y2=y1+h(s1+s2)/2$$

$$=y1 + h[ f(x1,y1) + f(x1 + h, y1 + s1h)]$$

تابع $f(x1 + h, y1 + s1h)$ را به صورت سری تیلور بسط می‌دهیم و از جملات سری فقط تا مرتبه $h^2$ نگه میداریم:

$$y2=y1+ h f(x1,y1)/2 + h [f(x1,y1) + h f_x +hs1f_y]/2$$

$$= y1+ h f(x1,y1)/2 + h^2 f_x/2 + + h^2 f(x1,y1)f_y$$

بنابراین خطای این روش از مرتبه $h^3$ است.

**شرط پایداری برای رانگ کوتا مرتبه دوم** به رفتار سیستم‌های خطی و همچنین اندازه گام زمانی $(h)$بستگی دارد. برای یک معادله دیفرانسیل خطی از نوع: $y' = \lambda y$

که در آن $\lambda$ یک عدد مختلط است، روش رانگ کوتا می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$Y_{n+1}^{(0)}= y_n +h f(x_n,y_n)$$

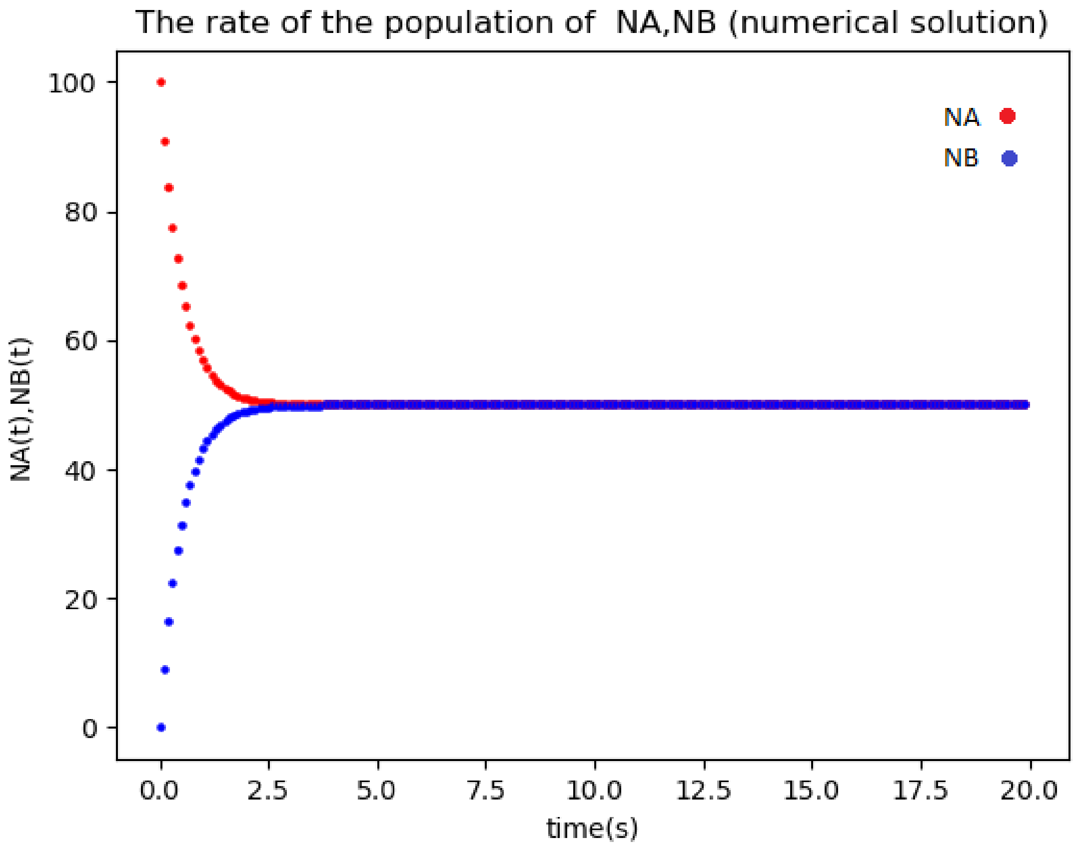
$$Y_{n+1}=y_n + h ((f(x_n,y_n) + f(x_{n+1},y_{n+1}^{(0)})))/2$$

شرط پایداری عبارت است از ؛

$$|1+ h/(2 \lambda) | <1$$

این شرط تضمین می‌کند که خطاها در طول محاسبات تجمع نمی‌یابند و روش پایدار باقی می‌ماند. با توجه به این شرط، ما می‌توانیم مقدار $h$ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که پایداری حفظ شود.

با استفاده از روش رانگ کوتا مرتبه دوم معادله واپاشی رادیواکتیو با شرایط اولیه و گام های زمانی h =0.1 به صورت عددی حل شده است.

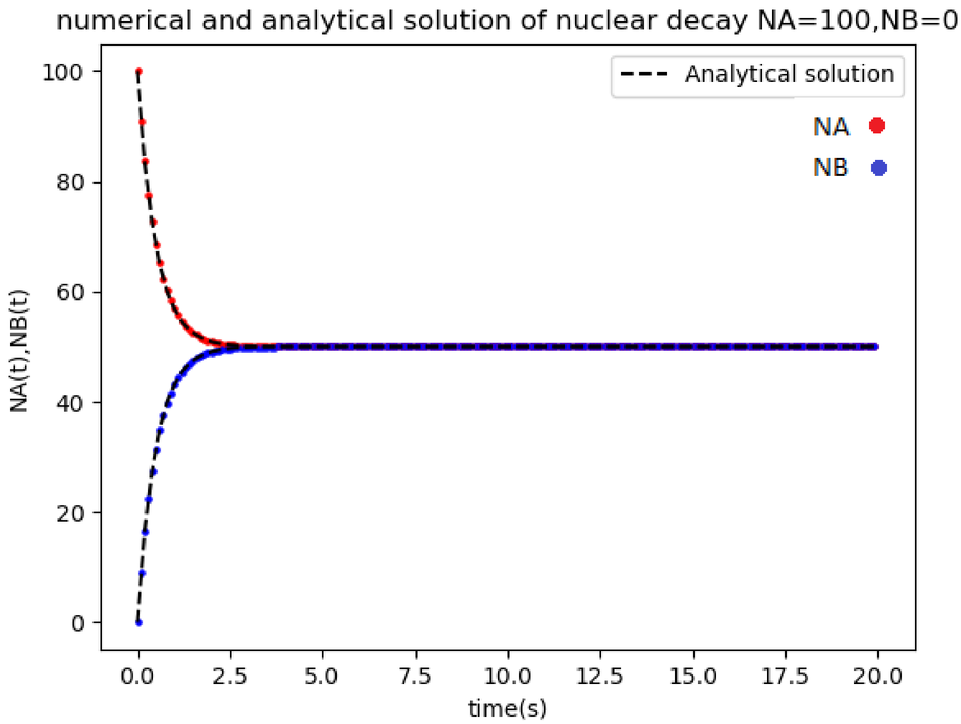


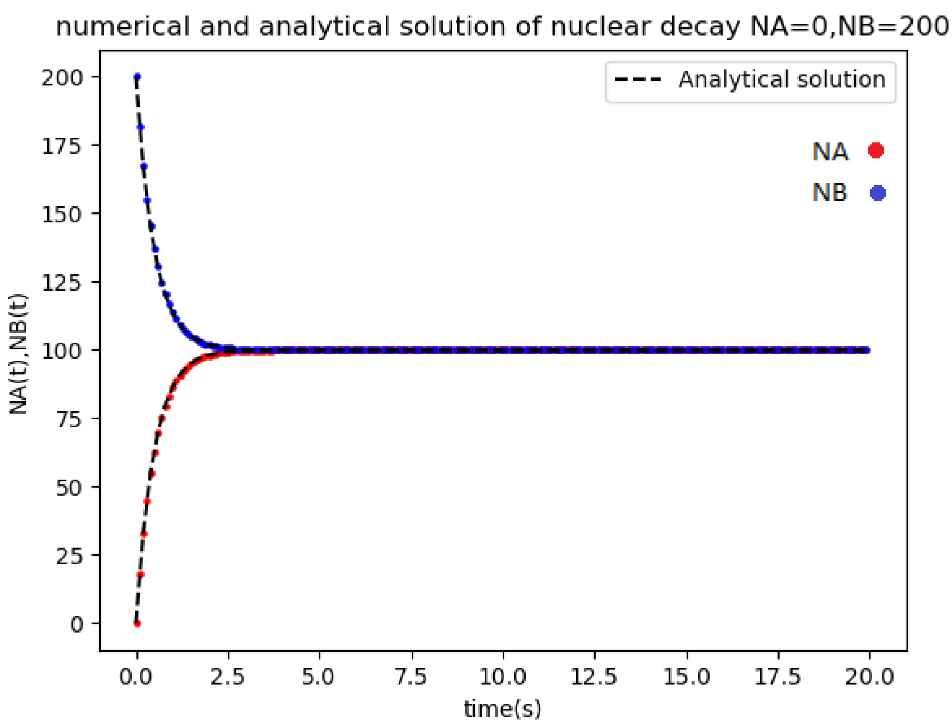

نمودار به‌دست‌آمده از حل عددی معادله واپاشی رادیواکتیو نشان می‌دهد که ابتدا تعداد هسته A با سرعت زیادی کاهش می‌یابد و هسته B با سرعت زیادی افزایش می‌کند. سپس با گذشت زمان، سرعت تغییرات تعداد هر دو هسته کاهش پیدا می‌کند تا جایی که سرعت به صفر می‌رسد و تعداد هر دو هسته برابر شده و ثابت می‌ماند.

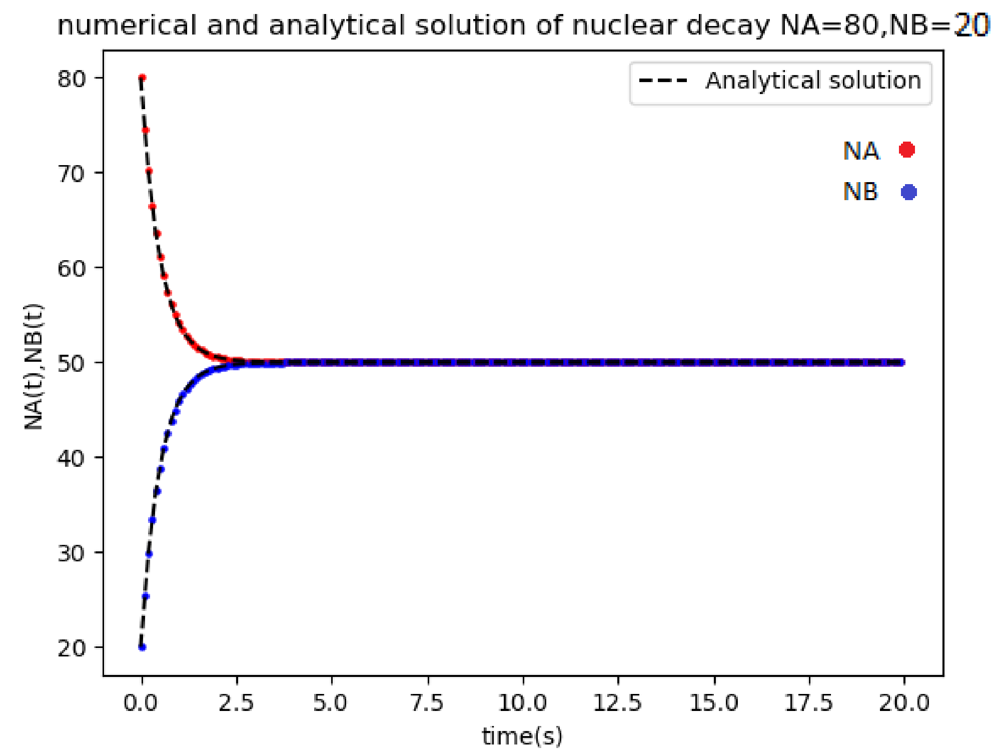
برای اطمینان از حل عددی ، معادله واپاشی رادیواکتیو با روش تحلیلی حل شد و سپس نمودار حل تحلیلی و حل عددی را باهم مقایسه میکنیم

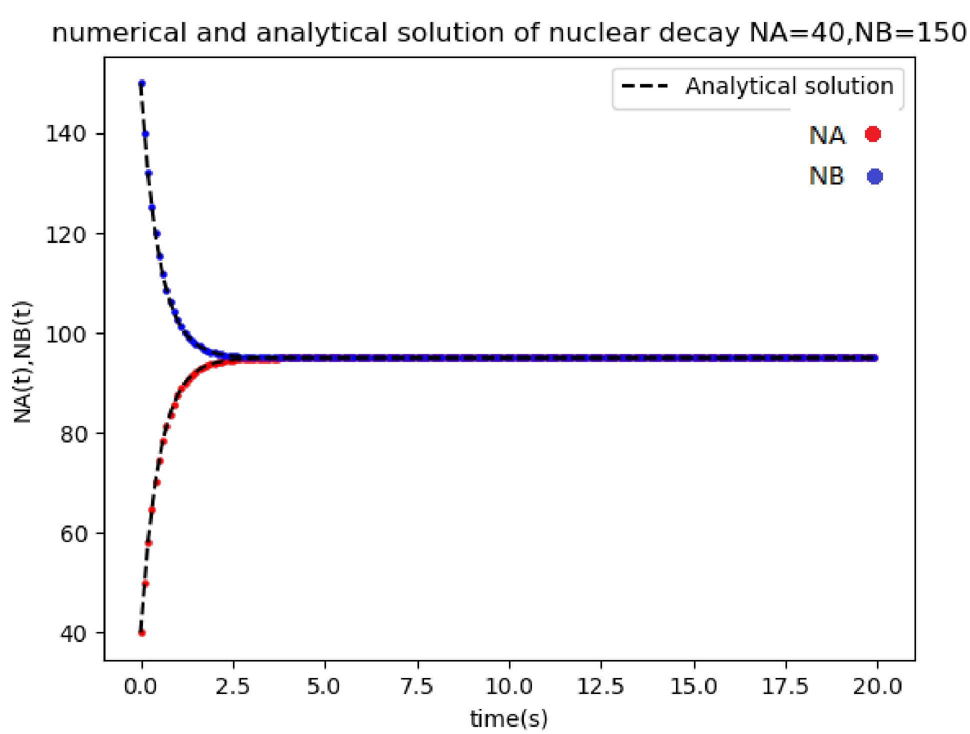
NAT=(NA0+NB0+(NA0-NB0)*exp((-2*t)/tau))/2

NBT=(NA0+NB0-(NA0-NB0)*exp((-2*t)/tau))/2




numerical and analytical solution of nuclear decay NA=80,NB=20
Analytical solution
NA
NB
NA(t),NB(t)
time(s)


numerical and analytical solution of nuclear decay NA=40,NB=150
Analytical solution
NA
NB
NA(t),NB(t)
time(s)

با مقایسه‌ی نتایج حاصل از حل عددی و حل تحلیلی معادله واپاشی، به وضوح مشاهده می‌شود که روش رانگ-کوتا به عنوان یک روش عددی تقریباً دقیق عمل می‌کند. نمودارهای حاصل از هر دو نوع حل تقریباً بر روی یکدیگر قرار گرفته‌اند، که نشان‌دهنده‌ی هم‌خوانی بالای نتایج است. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که روش رانگ-کوتا مرتبه دوم یک روش مؤثر و دارای دقت کافی برای حل مسائل معادلات دیفرانسیل است و می‌تواند به عنوان ابزاری معتبر در تحلیل‌های عددی مورد استفاده قرار گیرد. این دقت و کارایی، رانگ-کوتا را به گزینه‌ای مناسب برای حل مسائل پیچیده‌تر تبدیل می‌کند.