

简单多边形核求解新算法

王洪艳¹, 刘润涛², 王 三¹

WANG Hong-yan¹, LIU Run-tao², WANG San¹

1. 哈尔滨理工大学 应用科学学院, 哈尔滨 150080

2. 哈尔滨理工大学 信息与科学计算技术研究所, 哈尔滨 150080

1. College of Applied Sciences, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China

2. Institute of Information and Scientific Computing Technology, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China

E-mail: why19830419@163.com

WANG Hong-yan, LIU Run-tao, WANG San. New algorithm to calculate kernel of simple polygon. Computer Engineering and Applications, 2010, 46(17): 166-168.

Abstract: The kernel of a simple polygon is a point set in the interior of this polygon, and the line from any point in the point set to any point on the boundary of the polygon is completely located inside the polygon. This property of kernel finds its application in such fields as the positioning of the monitor. This paper inspects the properties in constitution of kernel of simple polygon, and a new algorithm for calculating the kernel of a simple polygon is proposed combined with the existing achievement. This algorithm can quickly report if kernel of simple polygon is empty, and can quickly get the point list of the kernel when the kernel exists. The new algorithm is easy to understand and realize, and can be widely applied in the practical problems.

Key words: simple polygon; kernel; computational geometry; clip

摘 要: 简单多边形的核是位于多边形内部的一个点集, 而且这个点集中的任意一点与多边形边界上的任意点的连线都属于这个多边形的内部。核的这一性质在监视器安放等问题上得到了应用。考察了简单多边形的核在构成方面的性质, 结合已有的成果, 提出了一种求简单多边形核的新算法。该算法可以较快地对多边形的核为空的情况加以报告, 而且在有核的情况下快速求解到核多边形的顶点序列。新的求核算法容易理解, 而且易于实现, 可以广泛地应用于实际问题。

关键词: 简单多边形; 核; 计算几何; 裁剪

DOI: 10.3778/j.issn.1002-8331.2010.17.047 文章编号: 1002-8331(2010)17-0166-03 文献标识码: A 中图分类号: TP391

1 引言

简单多边形是指非相邻的边不相交的多边形。而核是位于多边形内部的一个点集, 且其内的任意一点与多边形边界上的任意点的连线都处于这个多边形的内部。求解简单多边形的核是计算几何的基本技术, 构造多边形的核不仅是解决某些几何问题(比如包含问题)所需要的预处理步骤, 而且是某些工程设计、计算机图形学等领域中不可回避的问题。在文献[1-2]中 Preparata 和 Lee 提出了通过依次扫描多边形的顶点来构造核的算法。文献[3]提出只扫描处理多边形的凹顶点的求核算法, 其算法复杂度为 $O(ln)$, 当 $l=n/2$ 时其时间复杂度为 n^2 级的(其中 n 为多边形的顶点个数, l 为凹顶点个数)。文献[4]提出求解平面简单多边形的一种简单算法, 该算法是利用多边形边依次剖分多边形的最小包围矩形来实现, 方法简单明了, 但是其算法复杂性为 $O(n^2)$, 还是很高。理想的求核算法要求在核为空集的情况下能够尽早发现, 而在核存在的情况下又能尽快求得

核。在总结前面的相关研究, 尤其是在文献[4]的基础上, 利用多边形核与凹凸顶点的关系, 提出用简单多边形的凹顶点的关联边依次剖分多边形的最小包围矩形的思想, 不用像文献[4]那样对所有多边形边都要处理, 进而降低了时间复杂度, 更好地接近理想算法的两方面要求。

2 算法思想

2.1 定义及记法

定义 1 若 $p_i, i=1, 2, \dots, n$ 是给定多边形的 n 个顶点, i, j ($i \neq j$), $i, j=1, 2, \dots, n$, 线段 $\overline{p_i p_{i+1}}$ 与 $\overline{p_j p_{j+1}}$ 或是相邻且相交于一端点或不相交, 则称该多边形为简单多边形。

定义 2 给定任意简单多边形 P , 若 P 内存在点 z , 使得对于 P 内的所有点 p , 线段 \overline{zp} 完全位于 P 内, 具有上述性质的点 z 的轨迹称为多边形 P 的可见核。

定义 3 若 p_i 是给定多边形的顶点, 则称 $\overline{p_{i-1} p_i}, \overline{p_i p_{i+1}}$ 是与 p_i

基金项目: 国家自然科学基金(the National Natural Science Foundation of China under Grant No.10571037); 黑龙江省教育厅项目(the Project of Education Department of Heilongjiang Province of China under Grant No.11511027)。

作者简介: 王洪艳(1984-), 女, 硕士研究生, 主要研究领域: 计算几何; 刘润涛(1961-), 男, 教授, 主要研究领域: 空间数据库, 计算几何。

收稿日期: 2008-11-28 **修回日期:** 2009-02-02

关联的两条边, 其中称 $\overline{p_{i-1}p_i}$ 为点 p_i 的入边, $\overline{p_i p_{i+1}}$ 为点 p_i 的出边。

定义 4 若在多边形内存在一个区域, 其内任意一点与该多边形的某一顶点的连线在简单多边形的内部, 称该区域为该顶点的可见区。

定义 5 从当前顶点出发, 沿着两邻边向前、后顶点方向延长的射线, 称为该顶点两邻边的正向延长线; 反之, 称为该顶点两邻边的反向延长线。

定义 6 求出简单多边形顶点中 X 坐标、 Y 坐标的最大值最小值对应的顶点, 过这些点的矩形中, 称边界平行坐标轴的矩形为最小外包矩形。

定义 7 如果 p_i 是多边形 P 的凹顶点, $\overline{p_{i-1}p_i}$, $\overline{p_i p_{i+1}}$ 是与 p_i 关联的两条边, $\overline{p_{i-1}p_i}$ ($\overline{p_i p_{i+1}}$) 的延长线与 $\overline{p_{i-1}p_{i+1}}$ ($\overline{p_i p_{i+1}}$) 所夹的角域称为 p_i 的 $A(C)$ 域; p_i 的反向延长线所夹的角域称为 p_i 的 B 域。如图 1 所示。

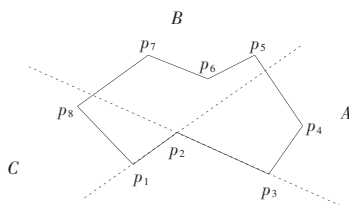


图 1 凹顶点 p_2 的 A 、 B 、 C 域

2.2 简单多边形的核与顶点凸凹性的关系

如果简单多边形不是凸多边形, 那么需要将简单多边形的凸顶点和凹顶点进行分离, 顶点与简单多边形核的位置关系不妨从多边形上连续 3 个顶点的可见区来分析。

对于简单多边形连续的 3 个凸顶点, 则其所对应的可见区是各自相邻两边正向延长线所围区域与简单多边形的交集, 这个可见区域包含了简单多边形的核, 如图 2(a) 所示。在简单多边形的 3 个相邻顶点中, 中间顶点为凹顶点的分布情况有 3 种情形: (1) 相邻的两个顶点中一个是凸顶点, 另一个是凹顶点如图 2(b); (2) 前后两个顶点都是凸顶点如图 2(c); (3) 前后两个顶点都是凹顶点如图 2(d)。这 3 种情形的凹顶点可见区总是处在简单多边形内侧的该凹顶点两邻边的反向延长线所夹的区域内。

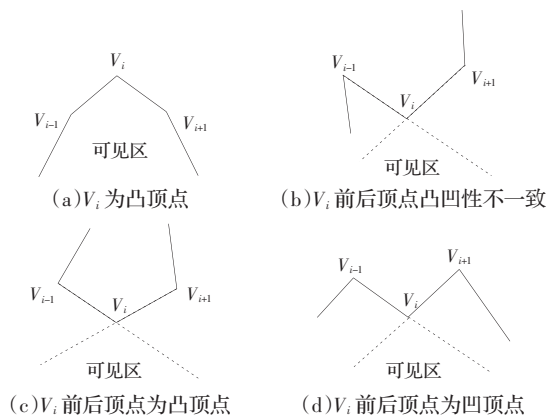


图 2 各类型顶点的可见区

可见, 简单多边形核的形成与凹顶点有直接的关系。因此, 可以对文献[4]的算法进行如下改进。

2.3 算法原理

核的一个重要特征是: 从核内任意一点都可以看见多边形

的全部边界。直观地讲, 如果把多边形边看成逆时针方向的环, 则核区域即为每个凹顶点的关联边切分整个平面而得到的左半平面的交集。一般而言, 凸多边形的核就是它本身, 而凹多边形的核可能是其内部的一部分, 也可能不存在。这样, 多边形的核可以按照以下思路求出: 逆时针依次用多边形凹顶点关联的边剖分多边形的最小外包矩形, 留下其 B 域部分, 最后剩下的部分与多边形的交即为所求的核。按照这种思路求核每次分割后得到的区域都是凸多边形, 逐渐逼近所求解的核多边形。最后检测最后两个凹顶点之间的凸顶点, 用落在最后的核多边形内的凸顶点的关联边分割该核多边形得所要求的简单多边形的核。将多边形的最小外包矩形作为初始核多边形, 依次用多边形凹顶点关联边所在的直线与核多边形的边进行求交, 于是可以得到一系列核多边形列 kp_1, kp_2, \dots, kp_l , 最后再用与核形成有关的凸顶点关联的多边形的边与 kp_l 的边求交得 kp 。显然, kp 就是该多边形的核。求核过程如图 3 所示。

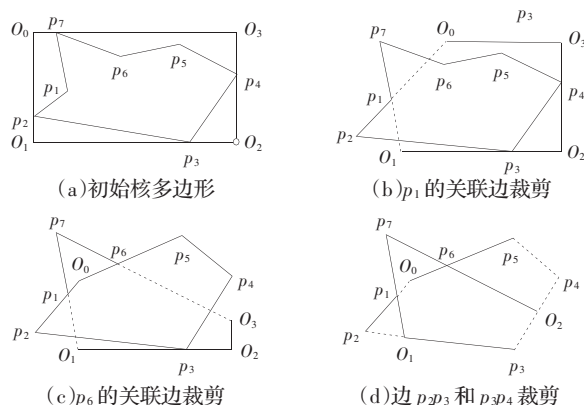


图 3 求核过程示意图

3 算法描述

算法 1 求简单多边形核

输入 多边形 P 的顶点序列 p_1, p_2, \dots, p_n , (按逆时针方向排列)

输出 多边形的核 kp 的顶点序列

步骤 1 判断各顶点的凸凹性, 将凸凹顶点分离^[5]。

步骤 2 if $p_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是凸顶点 then $kp=P$

else 设 $p_1, \dots, p_i, \dots, p_j, \dots, p_m$ 是凹顶点, 重新编码凹顶点为 $Q=\{q_1, q_2, \dots, q_l\}$, 顺序记录 q_{l-1}, q_1 之间的 m 个凸顶点为 $R=\{p_1', p_2', \dots, p_m'\}$, 当 $l=1$ 时 $m=n-1$ 。

步骤 3 求出包含多边形 P 的最小包矩形域, 作为初始核多边形 kp_1 。

步骤 4 $i \leftarrow 1, R \leftarrow \emptyset$ 。

步骤 5 if $kp_i \cap q_i$ 的 B 域 $= \emptyset$ then $kp = \emptyset$, (如图 4 所示, 凹顶点 q_2 的 B 域与核多边形 $Q_0 Q_1 Q_2 Q_3$ 的交为空, 此时简单多边形无核), 终止。

if $kp_i \subset q_i$ 的 B 域 then $kp_{i+1} = kp_i$, (如图 5 所示, 凹顶点 q_2 的 B 域与核多边形 $q_1 Q_0 Q_1 Q_2$ 的交为核多边形本身, 此时简单多边形核不变)。

else 求 q_i 两关联边的反向延长线与 kp_i 的交点, 调用算法 2 交点替换顶点得 kp_{i+1} , 在 Q 中删去 $q_i, i \leftarrow i+1$, 直至 $Q = \emptyset$, 得 kp_l 。

步骤 6 if $(p_j' \in R \cap p_j' \notin kp_l \wedge p_{j+1}' \in kp_l) \wedge (p_j'' \in R \cap p_j'' \in$

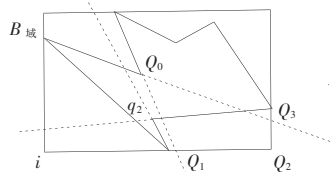
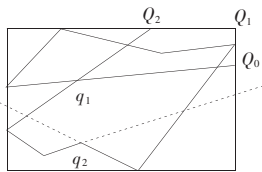


图4 多边形核不存在

图5 $k_{p_i} = k_{p_{i+1}}$

$k_{p_i} \wedge p_{j+1}'' \notin k_{p_i}$) then 将 p_j' 与 p_{j+1}'' 之间的凸顶点按原有顺序重新记录为 R_1 , goto 步骤 7。

步骤 7 求 R_1 中顶点之间的多边形边与 k_{p_i} 的交点, 调用算法 2 其代替 k_{p_i} 的顶点得 k_p , 终止。

算法 2 用交点代替 k_{p_i} 的顶点构成 $k_{p_{i+1}}$

步骤 1 设与 q_i 关联的两条边入边为 l_1 , 出边为 l_2 。

步骤 2 若 $q_i \in k_{p_i}$, 此时 l_1, l_2 与 k_{p_i} 的边有两个交点, 相应地设为 I_1, I_2 , then q_i, I_1, I_1 与 I_2 之间的 k_{p_i} 的顶点, I_2 构成 $k_{p_{i+1}}$ 。

步骤 3 若 $q_i \notin k_{p_i}$, 分以下几种情况: 当 l_1, l_2 与 k_{p_i} 的边的交点为原来顶点时 $k_{p_{i+1}} = k_{p_i}$ 。

当 l_1, l_2 与 k_{p_i} 的边有 4 个交点时, 设 l_1 与 k_{p_i} 的交点依次为 I_1, I_2, l_2 与 k_{p_i} 的交点依次为 I_3, I_4 , 此时 I_1, I_2, I_2 与 I_3 之间的 k_{p_i} 的顶点, I_3, I_4 构成 $k_{p_{i+1}}$;

当 l_1, l_2 与 k_{p_i} 的边有两个交点 (依次设为 I_1, I_2) $\wedge l_2$ (l_1) 与 k_{p_i} 的边无交点或有一个交点, 那么 I_1, I_1 与 I_2 之间 k_{p_i} 的顶点, I_2 构成 $k_{p_{i+1}}$ 。

4 算法时间复杂度分析

此算法中第 1 步只要用线性次乘法便可以确定多边形 P 各顶点的凸凹性, 并记住其凸凹性; 而第 2 步不需要另耗费时

间; 第 3 步通过线性次比较即可求出最小外包矩形; 第 4 步需要常数时间; 第 5 步循环 l 次, 每次循环需要的时间复杂度不超过 $\log n$, 则第 5 步的时间复杂度不会超过 $O(l \log n)$; 第 6 步不超过 $O(m(2l+3))$, 可以证明其不超过线性时间; 第 7 步经过有限步计算便可得到 k_p ; 所以该算法的时间复杂度不会超过 $O(l \log n)$ (其中 n 为简单多边形顶点个数, l 为凹顶点个数, m 为 q_{l-1}, q_l 之间的凸顶点个数)。

5 结束语

提出的简单多边形的求核算法具有以下特点: 充分利用简单多边形顶点的凸凹性和核构成的关系, 尽可能提前判断是否有核的问题, 并且减少了对与核形成无关的凸顶点的处理, 从而降低了算法的复杂度。

参考文献:

- [1] Preparata P F, Shamos I M. Computational geometry: An introduction[M]. New York: Springer-Verlag, 1985.
- [2] Lee T D, Preparata P F. An optimal algorithm for finding the kernel of a polygon[J]. Journal of the ACM, 1979, 26(3): 415-421.
- [3] 周培德. 确定任意多边形的核的算法[J]. 工程图学学报, 1995(2): 28-30.
- [4] 柳伟, 何援军, 李震霄. 一种平面简单多边形核的求解算法[J]. 中国图象图形学报, 2007, 12(6): 1098-1102.
- [5] Chen Bing-fa, Qian Zhi-feng, Li Zhen-xiao. An algorithm for identifying convexity-concavity of a simple polygon[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2002, 14(3): 214-217.
- [6] Wang Zheng-xuan, Pang Yun-jie. An algorithm to find intersections of line and convex polygon using dichotomy[J]. Computer Engineering, 1994(S1): 450-454.
- [7] 王树文, 闫成新, 张天序, 等. 数学形态学在图像处理中的应用[J]. 计算机工程与应用, 2004, 40(32): 89-92.
- [8] 侯志强, 韩崇昭, 左东广, 等. 基于局部多结构元素数学形态学的灰度图像边缘检测算法[J]. 西安交通大学学报, 2003, 37(4): 439-440.
- [9] Song J, Delp E J. The analysis of morphological filters with multiple structuring elements[J]. Computer Vision Graphics and Image Processing, 1990, 50: 308-328.
- [10] 卢官明. 一种计算图像形态梯度的多尺度算法[J]. 中国图象图形学报, 2001, 6(3): 214-218.
- [11] Kuntal G, Sandip S, Kamales B. A theory of "fuzzy" edge detection in the light of human visual system[J]. Journal of Intelligent Systems, 2008, 17(1): 229-246.
- [12] 赵于前. 基于数学形态学的医学图像处理理论与方法研究[D]. 长沙: 中南大学, 2006.
- [13] 杨述斌, 彭复员. 噪声污染图像中的广义形态边缘检测器[J]. 计算机工程与应用, 2002, 38(17): 91-92.
- [14] 杨述斌, 彭复员, 张增常. 多尺度自适应加权形态边缘检测器[J]. 华中科技大学学报, 2002, 30(10): 107-111.
- [15] 陈虎, 周朝晖. 基于数学形态学的图像去噪方法研究[J]. 工程图学学报, 2004, 25(2): 116-119.
- [16] 亢洁, 史忠科, 杨刚. 新颖的 CB 形态学串并复合散斑噪声滤波器[J]. 光电工程, 2008, 35(2): 85-89.

参考文献:

- [1] Canny J F. A computational approach to edge detection[J]. IEEE Trans on PAMI, 1985, 18(6): 679-698.
- [2] Gonzalez R C, Woods R E. 数字图像处理[M]. 阮秋琦, 阮宇智, 译. 2版. 北京: 电子工业出版社, 2003: 243-305.
- [3] Serra J. Introduction to mathematical morphology[J]. Computer Vision, Graphics and Image Processing, 1986, 35(1): 283-305.

(上接 165 页)

4 结束语

提出了一种自适应权重的多尺度形态学边缘检测算法, 该算法首先在同一尺度下用多个结构元素分别进行边缘检测, 并得到该尺度下的边缘图像, 利用形态学结构元素“探针”原理, 在腐蚀过程当中, 根据结构元素可填入次数, 以及不同尺度结构元素的抗噪性能, 来确定加权值的大小, 然后对不同尺度下的边缘图像进行加权求和, 再经过二值化、去噪等处理, 最后得到用自适应权重的多尺度形态学边缘检测算法检测的边缘图像。通过对光学图像和含有斑点噪声的 SAR 图像仿真表明, 该文算法对图像中的噪声有一定抑制作用, 并保留了原图像的边缘特征, 结果优于传统的 Canny 算子得到的边缘检测结果, 而且算法编程简单, 易于实现。