

# 殺人問題

# Josephus Problem

Guan-Yu Chen, 陳冠宇

Mar 7, 2013

1

# 問題簡介

- $n$  個人圍成一圈，分別編號  $0 \sim n-1$ ，接著從編號  $0$  的人開始數，數到第  $m$  個人後殺掉這個人，並從下一個人開始繼續數，直到殺到剩下一個人為止

# 問題簡介

- $n$  個人圍成一圈，分別編號  $0 \sim n-1$ ，接著從編號  $0$  的人開始數，數到第  $m$  個人後殺掉這個人，並從下一個人開始繼續數，直到殺到剩下一個人為止
- 如果已經被殺掉的，則跳過不數

# 問題簡介

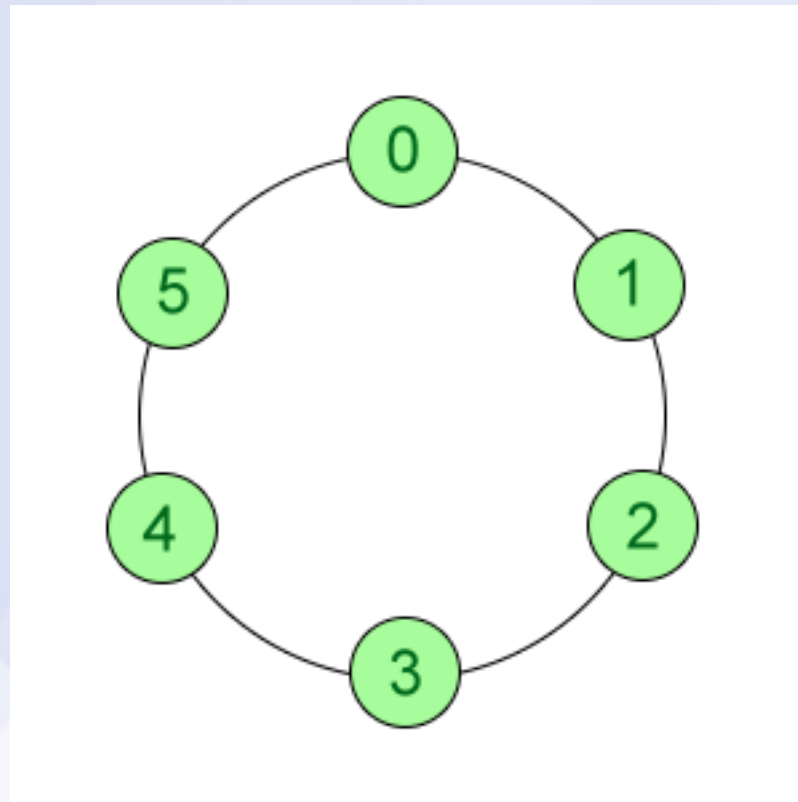
- $n$  個人圍成一圈，分別編號  $0 \sim n-1$ ，接著從編號  $0$  的人開始數，數到第  $m$  個人後殺掉這個人，並從下一個人開始繼續數，直到殺到剩下一個人為止
- 如果已經被殺掉的，則跳過不數
- 如果數到結尾，接下來從開頭繼續數

# 問題簡介

- $n$  個人圍成一圈，分別編號  $0 \sim n-1$ ，接著從編號  $0$  的人開始數，數到第  $m$  個人後殺掉這個人，並從下一個人開始繼續數，直到殺到剩下一個人為止
- 如果已經被殺掉的，則跳過不數
- 如果數到結尾，接下來從開頭繼續數
- 問：最後一個剩下的人編號為多少？

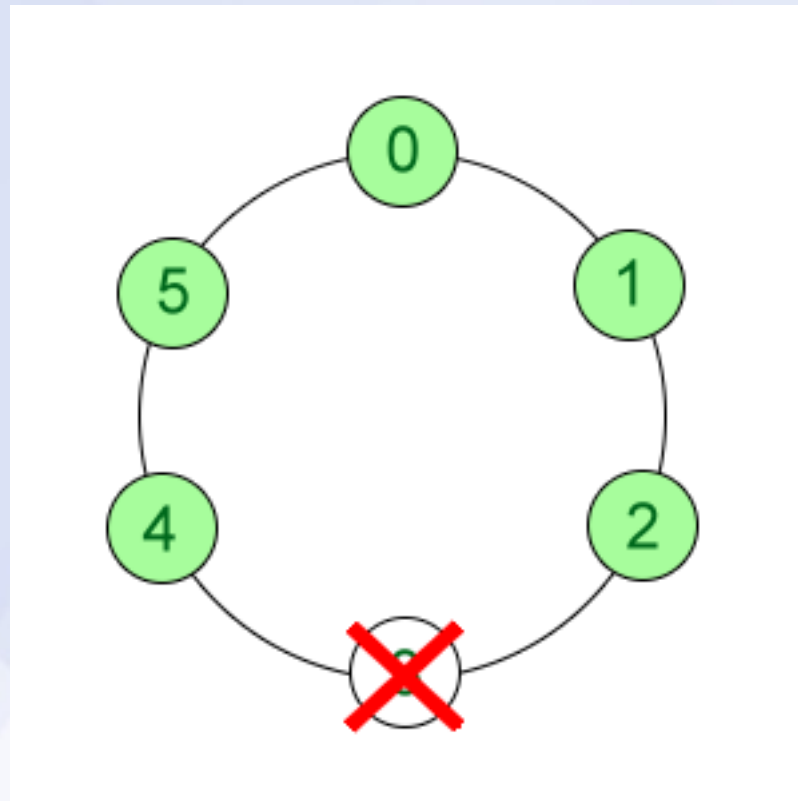
# 問題簡介

- $n=6, m=4$



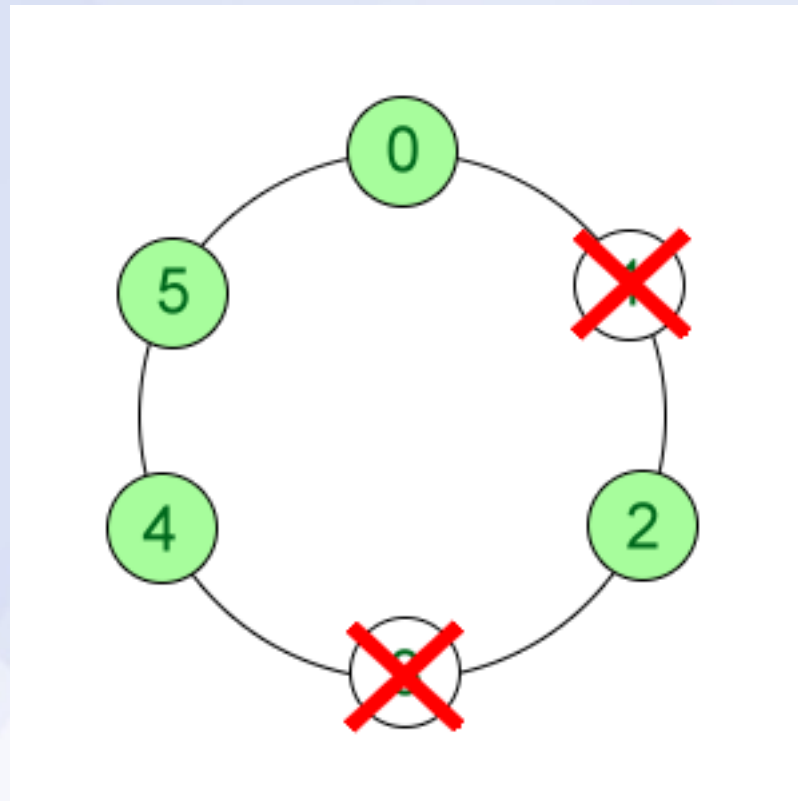
# 問題簡介

- $n=6, m=4$



# 問題簡介

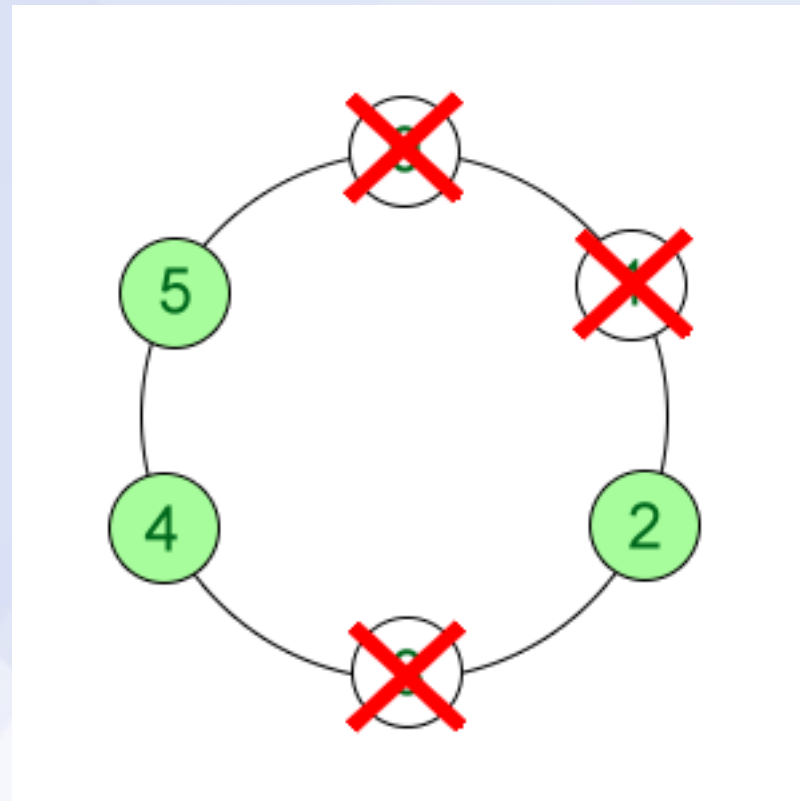
- $n=6, m=4$





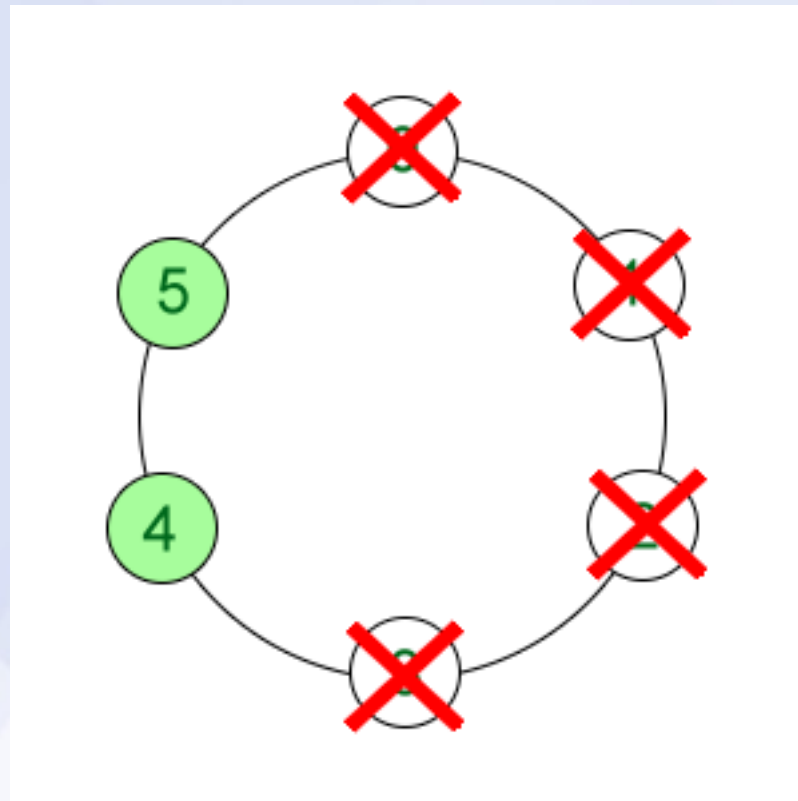
# 問題簡介

- $n=6, m=4$



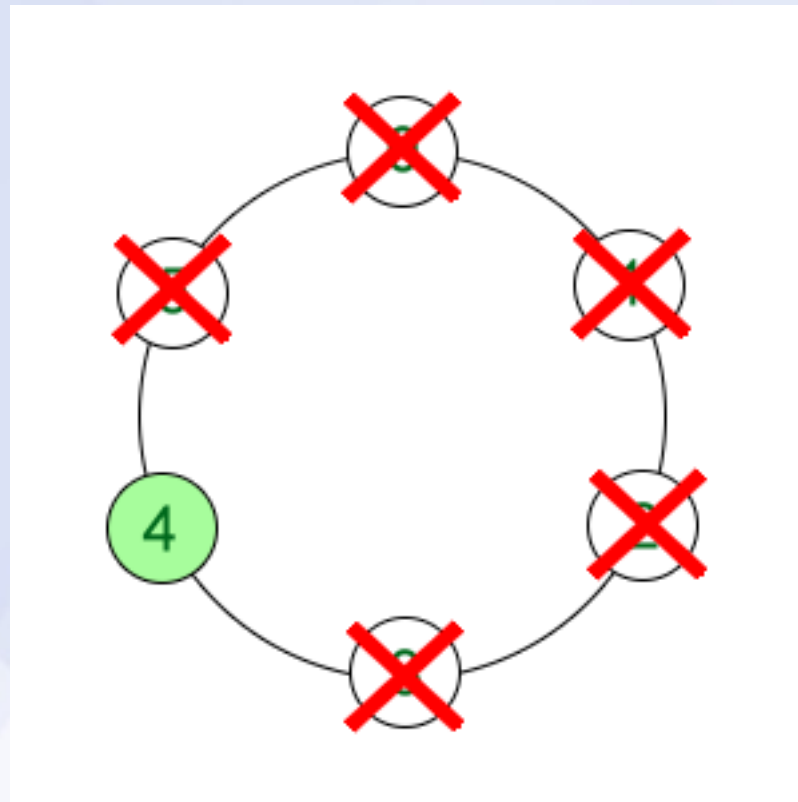
# 問題簡介

- $n=6, m=4$



# 問題簡介

- $n=6, m=4$



# Naïve Method

- 法 1:

使用 bool 陣列紀錄第  $i$  個人是否被殺，直接 simulation，時間複雜度  $O(NM)$

- 法 2:

使用 vector 或 Linked-List，直接 simulation，時間複雜度  $O(NM)$ ，但比法 1 快一點點

- 法 3:

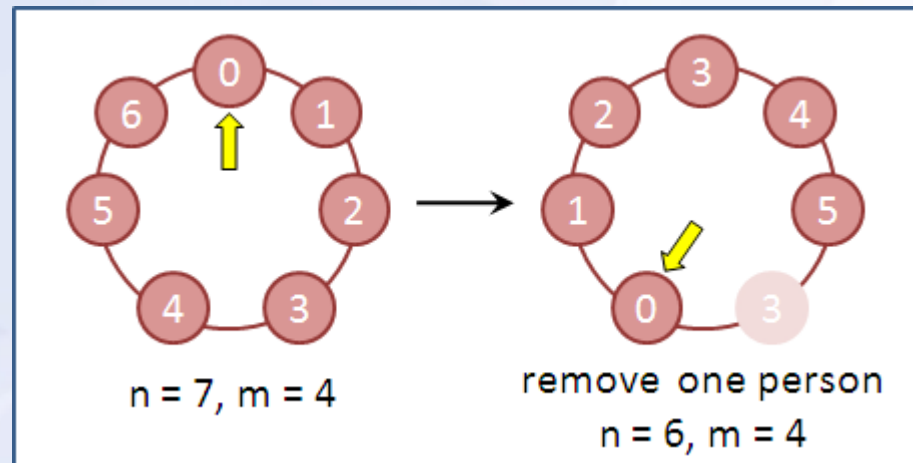
使用 Queue 邊 Pop 邊 Push， $O(NM)$

# 遞迴 - 轉換成子問題

- 定義  $f(n,m)$  : 目前有  $n$  個人, 每數  $m$  個殺掉一人其最後剩下的人的編號
- 遞迴公式 : ( 見下一頁解釋 )  
$$f(1,m)=0$$
$$f(n,m) = ( f(n-1,m) + m ) \% n$$
- 時間複雜度  $O(N)$

# 遞迴 - 轉換成子問題 (cont')

- $f(1, m) = 0$
- $f(n, m) = (f(n-1, m) + m) \% n$



- 當殺掉一個人時，問題變成  $n-1$  個人，維持每次數  $m$  個人，但因為編號是由 0 開始，所以加回  $m$  (平移)
- 為了保持  $0 \sim n-1$ ，加  $m$  之後  $\%n$

# Sample Code

- Sample Code

```
1 int killer(int n,int m)
2 {
3     // 1 Person
4     if(n==1) return 0;
5     return (killer(n-1,m)+m)%n;
6 }
```

# 變形？

- 如果編號從 1 開始怎辦？
- 如果每次數的人數有所變動？
- 如果  $^{\circ}\%&*^{\#}^*&$  怎辦？



# 變形？

- 如果編號從 1 開始怎辦？

答案 +1 就好了 .....

- 如果每次數的人數有所變動？

- 如果 ^%&\*#^\*& 怎辦？

# 變形？

- 如果編號從 1 開始怎辦？

答案 +1 就好了 .....

- 如果每次數的人數有所變動？

變成  $(f(n-1, k) + m) \% n$ ,  $k$  是下一次數的人數

// 加  $m$  不變是為了平移

- 如果  $^{\circ}\&*\#^{*}\&$  怎辦？

# 變形？

- 如果編號從 1 開始怎辦？

答案 +1 就好了 .....

- 如果每次數的人數有所變動？

變成  $(f(n-1, k) + m) \% n$ ,  $k$  是下一次數的人數

// 加  $m$  不變是為了平移

- 如果  $\wedge \% \& * \# \wedge * \&$  怎辦？其實主要就這幾種類型

但不是所有殺人問題都能用此法解決！

# 例題

- Uva:  
10015, 151, 440, 10940, 11351, 180

# **The End**

Mar 7, 2013

21