第10讲 恒定激励下一阶动态电路的求解

1　方程的列写　　已预习

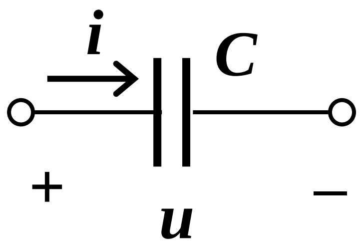
2　初值的获得　　← 重点

3　经典解法

4　直觉解法　　← 重点

5　从另一个角度观察解　　← 隐性重点

C和L的特性



$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

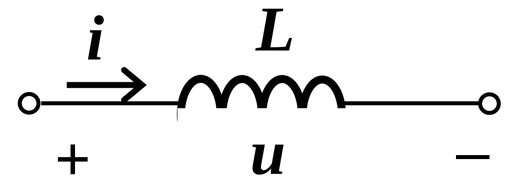
直流U作用→开路

$$u(t)=u(0)+\frac{1}{C}\int_0^t i\,\mathrm{d}\tau$$

$$w_C=\frac{1}{2}Cu^2$$

串并特性与电导相同

对偶



$$u=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

直流I作用→短路

$$i(t)=i(0)+\frac{1}{L}\int_0^t u\,\mathrm{d}\tau$$

$$w_L=\frac{1}{2}Li^2$$

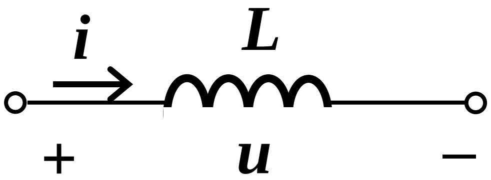
串并特性与电阻相同

单选题 1分

设置

对1mH电感来说，$i(0)=1\text{A}$，

u从0时刻起为$u=t$ (V)，求$i(1\text{s})=$____A。



A 500

B 1.5

C 501

D 1001

提交

常系数线性微分方程的求解过程

$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S \\ u_C(0)=U_0 \end{cases}$$

线性
常系数
常微分方程
非齐次
初值问题

特征方程 $RCp+1=0$

特征根 $p=-1/RC$

齐次通解 $u''_C=Ae^{-t/RC}$

非齐次特解 $u'_C=U_S$

全解(非齐次通解) $u_C=Ae^{-t/RC}+U_S$

$u_C(0)=U_0$

$A=U_0-U_S$

$$\boxed{u_C=U_S+(U_0-U_S)e^{-t/RC}\quad t\geq 0}$$

单选题 1分

设置

$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+5u_C=10$ 的特征根是________。

A 2

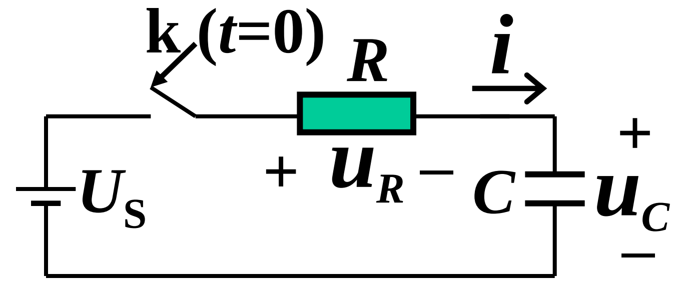
B -2

C 5

D -5

提交

电路过渡过程分析的关键问题



换路前$u_C=U_0$

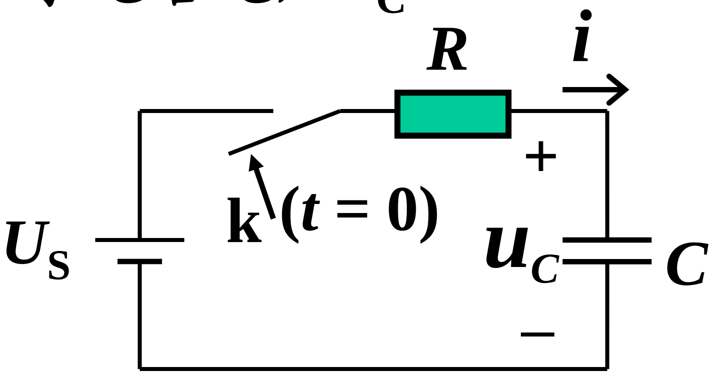
求：换路后电容电压$u_C(t)$。

- 如何根据电路列写ODE?
  - KCL+KVL+RLC的元件特性
- 如何获得ODE的初值?
  - 换路定理
- 如何求非齐次ODE的特解?
  - 对于直流和正弦激励，直接求其稳态解
  - 对于其他常见激励，查表寻找特解的函数类型
    - 将查表所得代入方程求出待定系数
  - 对于一般激励，利用卷积积分 → 第13讲

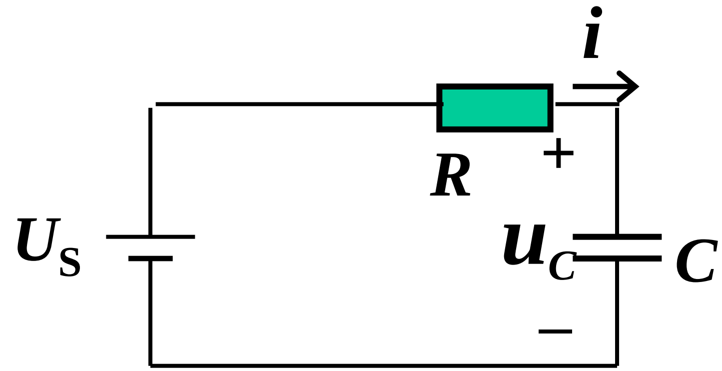
1　方程的列写

已预习

求电容电压u_C



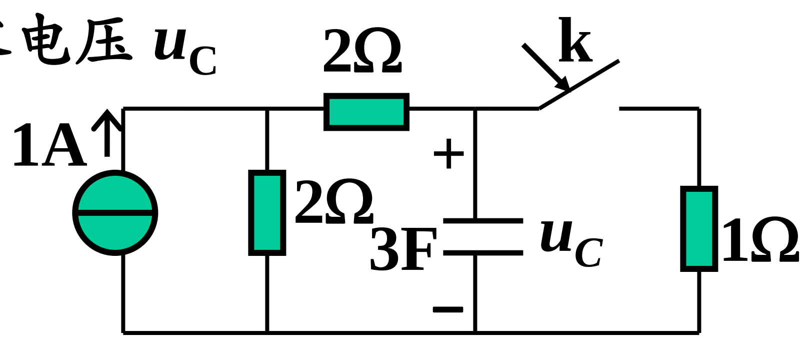
换路以后



$$U_S = u_C + Ri = u_C + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

其他电路怎么办?

求电容电压 u_C



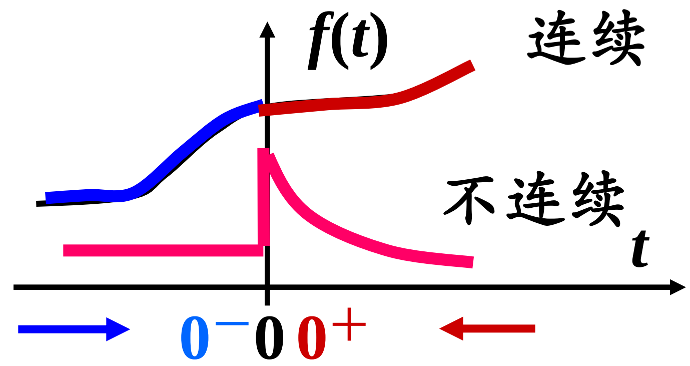
法1：戴维南等效

法2：不列方程
直觉求解

2 初值的获得

（1） $t=0^+$ 和 $t=0^-$ 的概念

设换路发生在 $t=0$ 时刻



0^- 换路的前一瞬间

0^+ 换路的后一瞬间

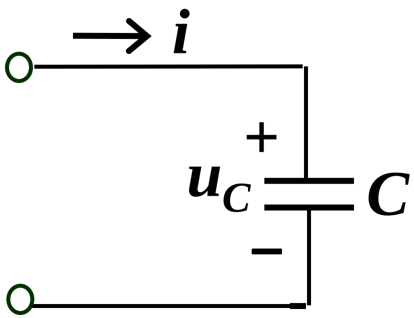
$$f(0^-)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} f(t) \qquad f(0^+)=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t)$$

希望获得 $t=0^+$ 时刻支路电压（电流）的初值和导数的初值。

本讲 L12

（2）换路定理

1)



$$u_C(t) = u_C(0^-) + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{t} i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$t = 0^+$

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

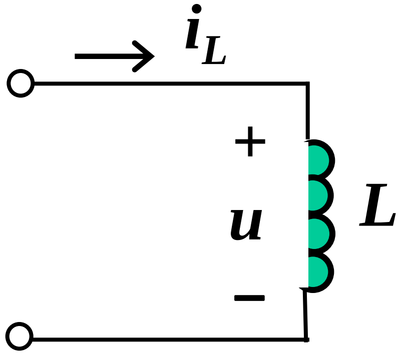
如果 $i(\tau)$ 为有限值

$$\int_{0^-}^{0^+} i(\tau)\mathrm{d}\tau \to 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{u_C(0^+) = u_C(0^-)}$$

$$q = C u_C \qquad q(0^+) = q(0^-) + \int_{0^-}^{0^+} i(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad \boxed{q(0^+) = q(0^-)}$$

电荷守恒

2)



$$i_L(t) = i_L(0^-) + \frac{1}{L}\int_{0^-}^{t} u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$t = 0^+$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) + \frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+} u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

如果 $u(\tau)$ 为有限值

$$\int_{0^-}^{0^+} u(\tau)\mathrm{d}\tau \to 0 \longrightarrow \boxed{i_L(0^+) = i_L(0^-)}$$

$$\psi = L i_L \quad \psi(0^+) = \psi(0^-) + \int_{0^-}^{0^+} u(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad \boxed{\psi(0^+) = \psi(0^-)}$$

磁链守恒

换路定理

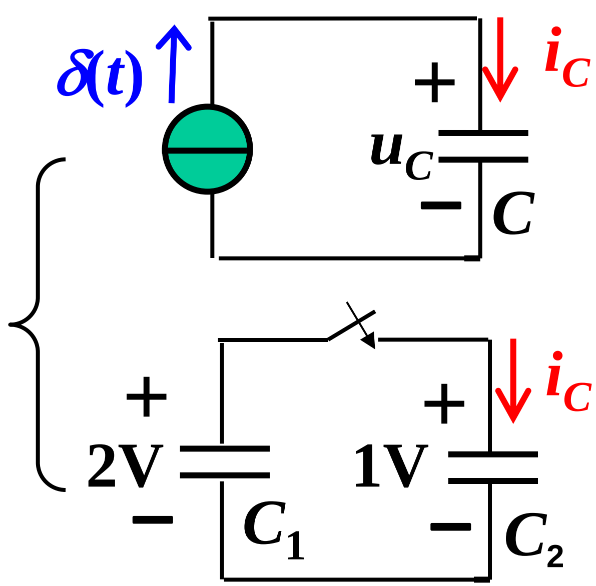
$$\begin{cases} q(0^+) = q(0^-) \\ u_C(0^+) = u_C(0^-) \end{cases}$$

条件：换路时流经电容的电流为有限值

$$\begin{cases} \psi(0^+) = \psi(0^-) \\ i_L(0^+) = i_L(0^-) \end{cases}$$

条件：换路时电感上的电压为有限值

什么时候i_C、u_L为无穷值?



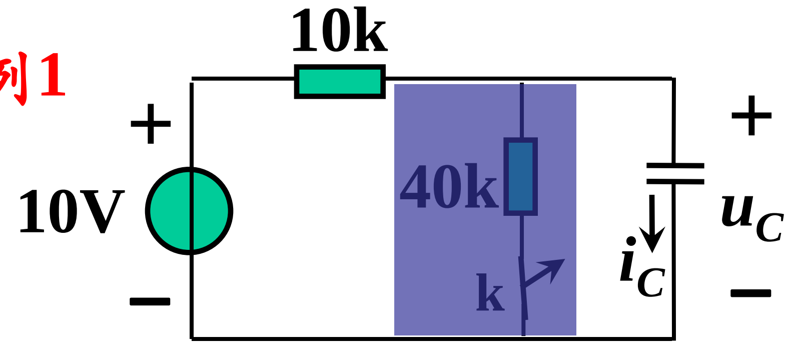
激励为
冲激电流/电压

L12、L13

强制换路
电荷/磁链守恒

(3) 确定电路的初值

例1



求电容电流初值$i_C(0^+)$。

换路前　$u_C(0^-)= 8\text{V}$

根据换路定理 $u_C(0^+) = u_C(0^-)=8\text{V}$

如何求 i_C 在(0^+) 时刻的值?

KVL　$10\text{k}i_C(0^+) + u_C(0^+) = 10$

$$i_C(0^+) = \frac{10-8}{10\text{k}} = 0.2\text{mA}$$

替代定理

结论1:　i_C随便跳

$i_C(0^-)=0 \neq i_C(0^+)$

结论2:

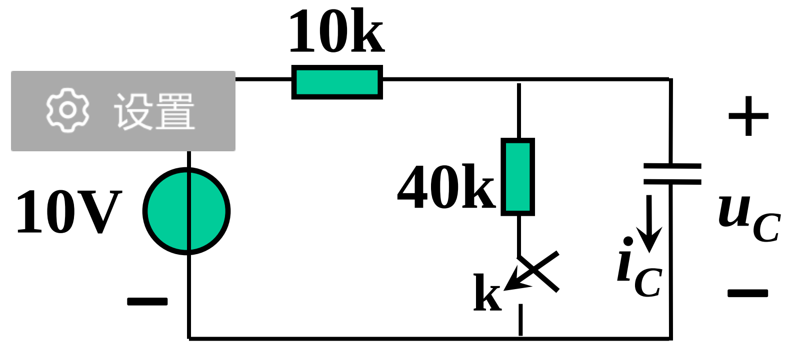
求初值时电容C可看作独立电压源

电感L可看作独立电流源

单选题 1分

求电容电流初值$i_C(0^+)$。

开关状态和前页不同



A 0.2mA

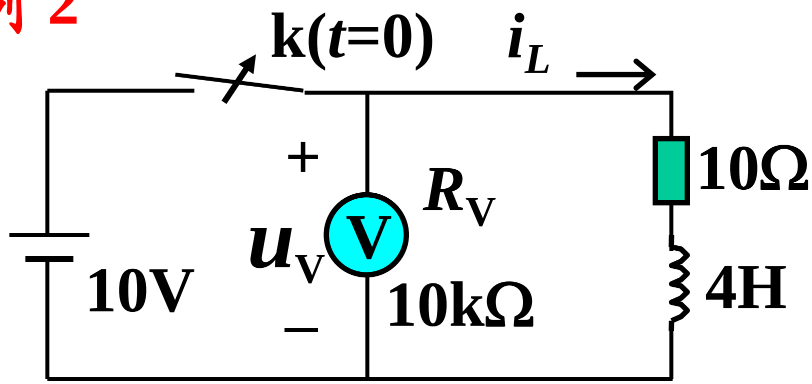
B 0.25mA

C −0.25mA

D −0.2mA

提交

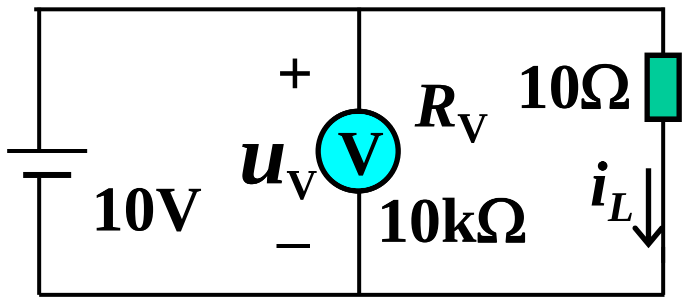
例 2



电压表量程为 50V。

t=0 时刻 k 打开，求电压 u_V 。

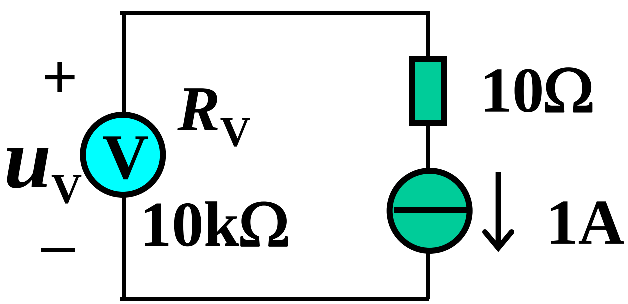
换路前稳态电路



求0^-值（电阻电路）

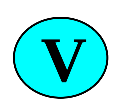
$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1\ \text{A}$$

0^+时刻电路

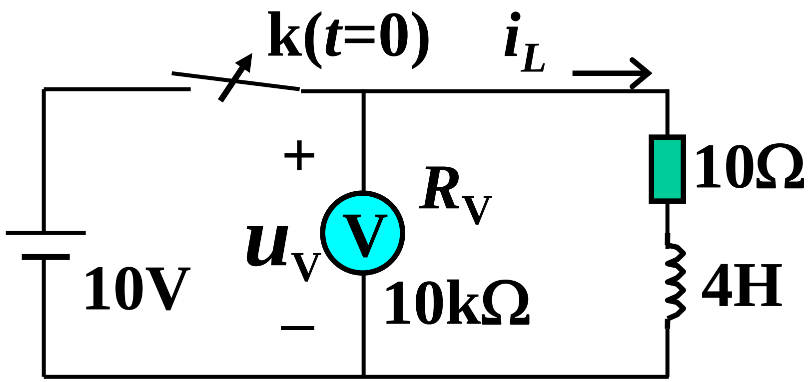


求0^+值（电阻电路）

$$u_V(0^+) = -10000\text{V}$$



坏了！



怎么办?

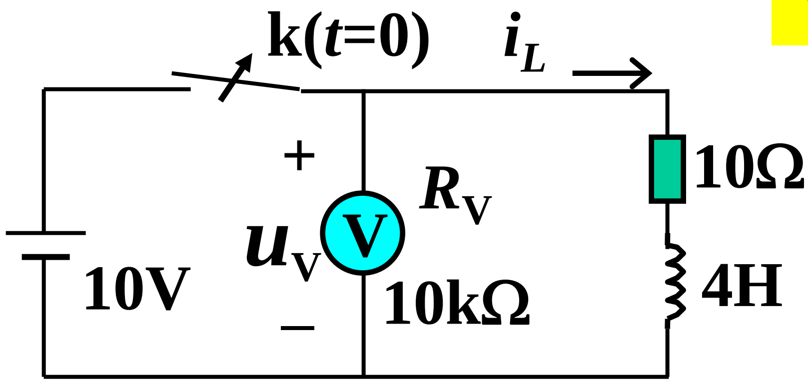
利用什么已知元件能搞定这件事

$$u_V(0^+) = -10000\text{V}$$

坏了!

此处可以有弹幕

电感线圈突然开路一定是副作用吗?

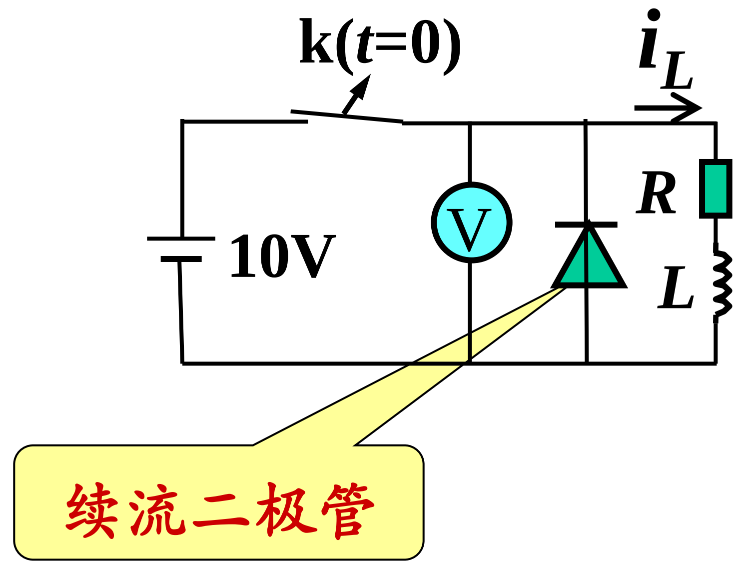


汽车的点火系统

L11继续讨论

$u_V(0^+) = -10000V$

V 坏了！



小结：求电路初值的步骤

(a) 由换路前的稳态电路求 $u_C(0^-)$ 和 $i_L(0^-)$

0^- 电路（电阻电路）（电容C开路、电感L短路）

(b) 应用换路定理求 $u_C(0^+)$ 和 $i_L(0^+)$

$$u_C(0^+) = u_C(0^-)$$

(c) 画 0^+ 时刻的等效电阻电路

$$i_L(0^+) = i_L(0^-)$$

* 保留电路拓扑结构

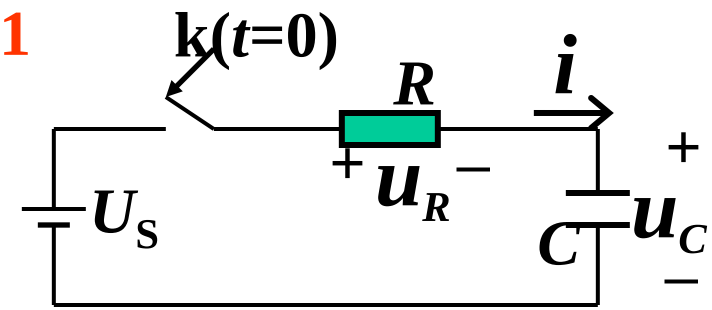
** 用独立电压源替代电容C、用独立电流源替代电感L

*** 独立电压源值为$u_C(0^+)$、独立电流源值为$i_L(0^+)$

(d) 由0^+电路（电阻电路）求电路中其余支路量 0^+ 时刻的值

3 经典解法

例 1

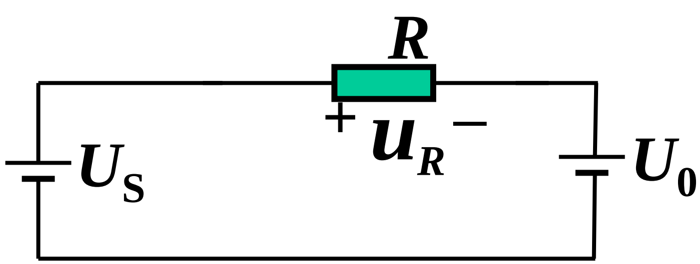


已知： $u_C(0^-)=U_0$

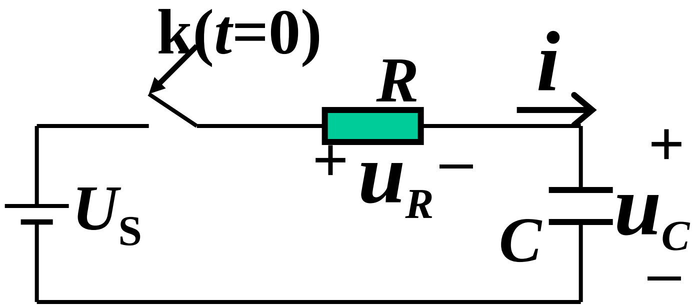
求： 电阻电压$u_R(t)$。

$$
\begin{cases}
u_R + u_C = U_S \\
i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\
u_R = iR
\end{cases}
\Rightarrow u_R + \frac{1}{C}\int \frac{u_R}{R}\mathrm{d}t = U_S \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}u_R = 0}
$$

0^+ 电路



$$\boxed{u_R(0^+) = U_S - U_0}$$



已知： $u_C(0^-)=U_0$

求： 电阻电压$u_R(t)$。

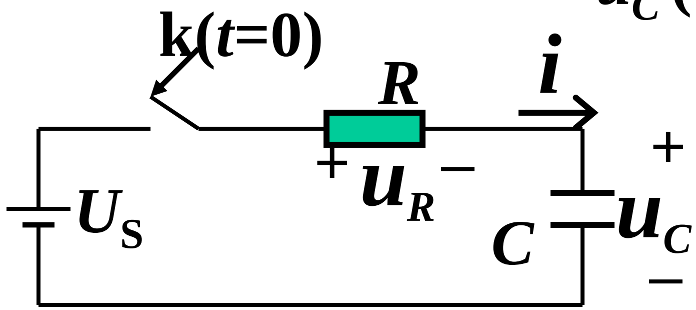
$$\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{RC}u_R=0 \longrightarrow p+\frac{1}{RC}=0 \longrightarrow p=-\frac{1}{RC}$$

$$u_R = A\mathrm{e}^{-t/RC} \quad t>0$$

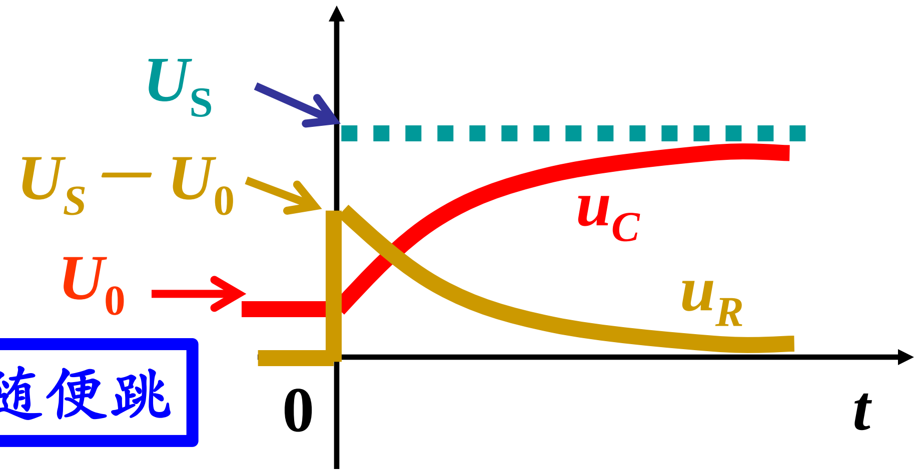
$$u_R(0^+)=U_S-U_0$$

$$A=U_S-U_0$$

$$\boxed{u_R=(U_S-U_0)\mathrm{e}^{-t/RC} \quad t>0}$$



$u_C(0^-)=U_0$



$\boxed{u_R\text{随便跳}}$

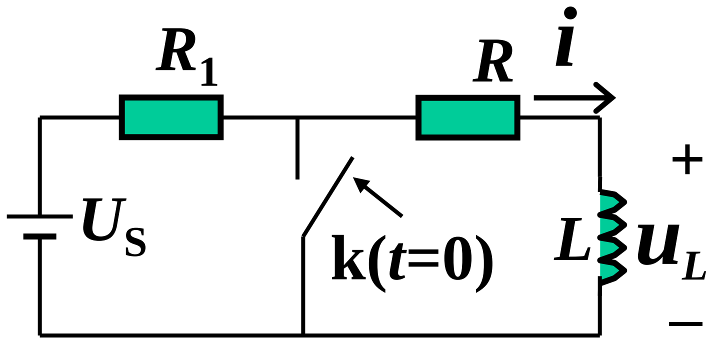
$$\frac{du_R}{dt}+\frac{1}{RC}u_R=0 \longrightarrow p=-\frac{1}{RC} \longrightarrow u_R=(U_S-U_0)e^{-t/RC}\quad t>0$$

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U_S \longrightarrow p=-\frac{1}{RC} \longrightarrow u_C=U_S+(U_0-U_S)e^{-t/RC}\quad t\geq 0$$

令 $\tau=-1/p=RC>0$， 一阶RC电路的时间常数(time constant)

$$[\tau]=[RC]=[\text{欧}][\text{法}]=[\text{欧}]\left[\frac{\text{库}}{\text{伏}}\right]=[\text{欧}]\left[\frac{\text{安秒}}{\text{伏}}\right]=[\text{秒}]$$

例 2　求图示电路中电流i。



$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=0$$

$$i(0^-)=\frac{U_S}{R_1+R}$$

$$i(0^+)=i(0^-)=\frac{U_S}{R_1+R}=I_0$$

特征方程　$Lp+R=0$

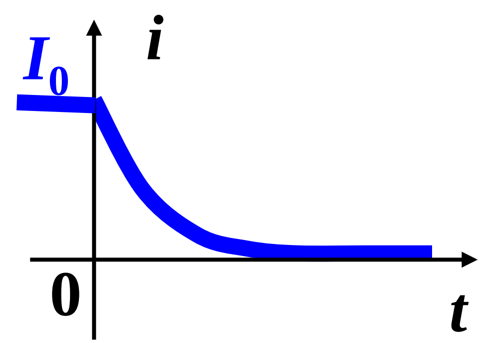
特征根 $p=-\frac{R}{L}$

令 $\tau=-1/p=L/R>0$ 为一阶RL电路的时间常数　$[\tau]=[\frac{L}{R}]=[秒]$

全解　$i(t)=0+Ae^{-t/\tau}$

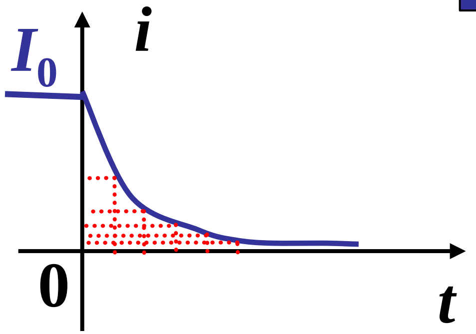
由初值确定A　$A=i(0^+)=I_0$

$$i=I_0e^{-\frac{t}{L/R}}\quad t\geq 0$$



关于 τ 的讨论

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0$$



t	0	τ	2τ	3τ	5τ
$i = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$	I_0	$I_0 e^{-1}$	$I_0 e^{-2}$	$I_0 e^{-3}$	$I_0 e^{-5}$
	$\boxed{I_0}$	$\boxed{0.368\, I_0}$	$\boxed{0.135\, I_0}$	$\boxed{0.05\, I_0}$	$\boxed{0.007\, I_0}$

工程上通常认为 $3\,\tau \sim 5\,\tau$ 后过渡过程结束。

τ越小，电压/电流变化越快。

记忆方法

单选题 1分

设置

对于$1-e^{-\frac{t}{\tau}}$来说，从0时刻起，τ时间后，上升到____。

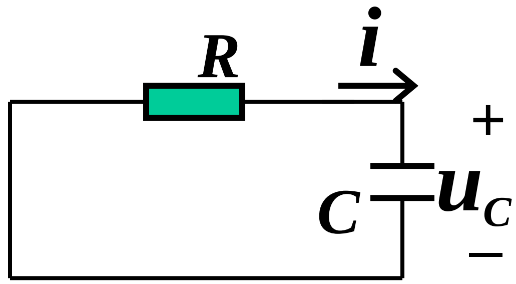
A 0

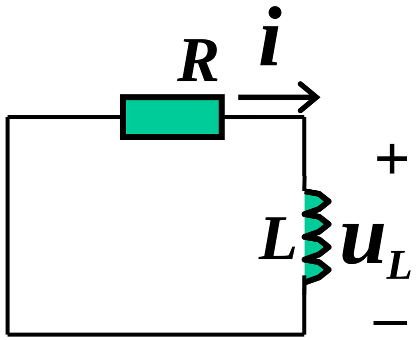
B 0.368

C 0.632

D 1

提交





$\tau = RC > 0$　　　　$\tau = L/R > 0$

工程上通常认为 $3\tau \sim 5\tau$ 后过渡过程结束。

τ越小，电压/电流变化越快。

同样是电阻*R*，为什么在RC电路中就是越大越慢，在RL电路中就是越大越快?

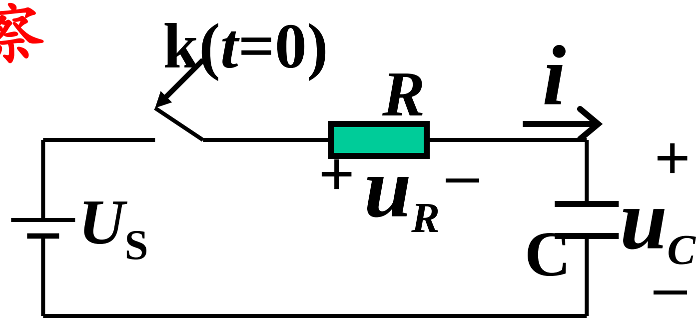
此处可以有弹幕

动态电路的经典解法

- 列（有关待求支路量的）微分方程。
- 由换路前0^-电阻电路求$u_C(0^-)$和$i_L(0^-)$的值。
- 应用换路定理画 0^+电阻电路，求待求支路量的0^+时刻值。
- 求微分方程对应的特征方程，得到齐次通解。
- 求出非齐次微分方程的1个特解，得到非齐次微分方程的全解。全解＝齐次解＋特解
- 由0^+时刻的值确定全解中的待定系数。

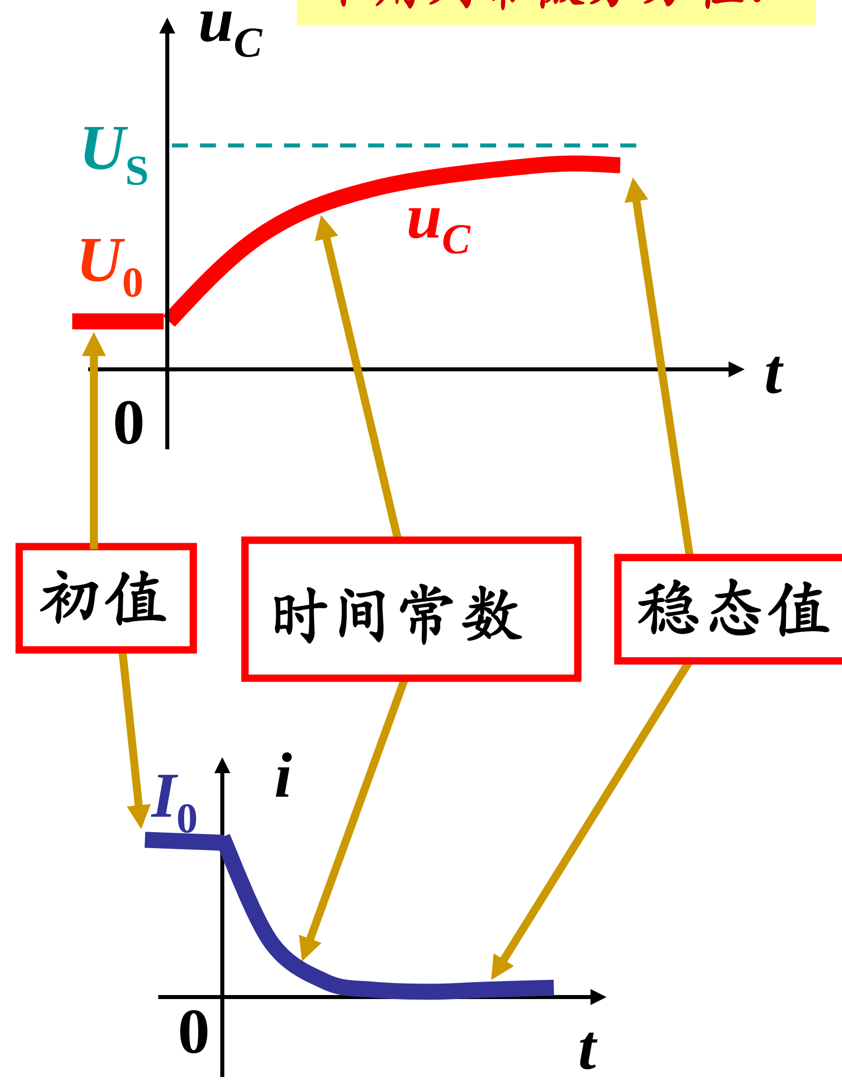
4 一阶电路的直觉解法（三要素法）

观察



如果能够方便地求得这3个值?

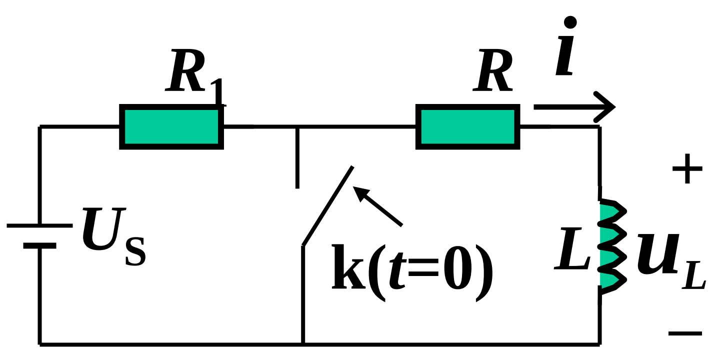
不用列常微分方程!



$$u_C = U_S + (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{RC}} \qquad t \geq 0$$

时间常数>0 → 特解=稳态解

$$i = I_0 e^{-\frac{t}{L/R}} \qquad t \geq 0$$



讨论一阶电路的一般情况

一阶常系数微分方程

任意支路量 f 的方程

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}+af(t)=u(t)$$

$$a>0$$

$\boxed{\text{时间常数}>0}$

待定系数

$$f(t)=\text{特解}+Ae^{-\frac{t}{\tau}} \xrightarrow{t\to\infty} \text{特解}=f(\infty)$$

$$f(t)=f(\infty)+Ae^{-\frac{t}{\tau}} \xrightarrow{f(0^+)=f(\infty)+A} A=f(0^+)-f(\infty)$$

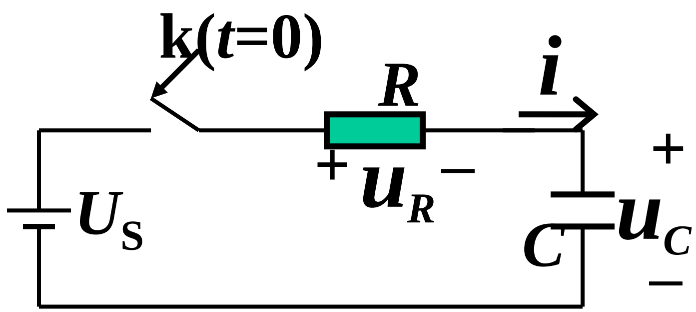
$$\boxed{f(t)=f(\infty)+[f(0^+)-f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

三要素
- $f(\infty)$ 稳态解
- $f(0^+)$ 初值
- τ 时间常数

优点1：可适用于各支路量

优点2：不列写方程直接获得解

用直觉解法重做前面例



已知：$u_C(0^-)=U_0$

求：电压$u_C(t)$，$u_R(t)$

$$f(t)=f(\infty)+[f(0^+)-f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t>0$$

$u_C(0^+)=u_C(0^-)=U_0$ $\xleftrightarrow{\text{电阻电路}}$ $u_R(0^+)=U_S-U_0$

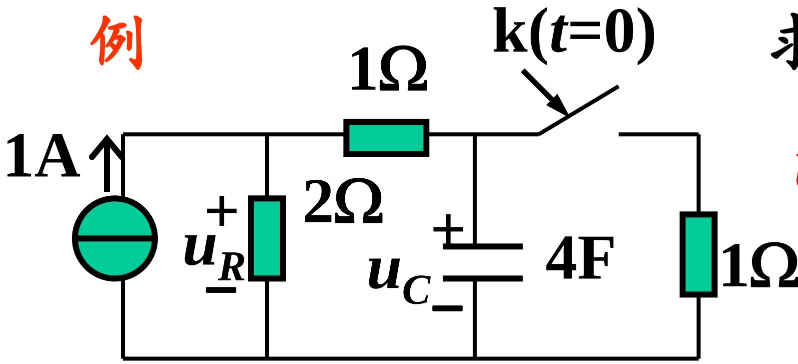
$u_C(\infty)=U_S$ $\xleftrightarrow{\text{电阻电路}}$ $u_R(\infty)=0$

$\tau=RC$ $\xleftrightarrow{\text{电阻电路}}$ $\tau=RC$

$$u_C=U_S+(U_0-U_S)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t\geq 0$$

$$u_R=(U_S-U_0)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t>0$$

例



求图示电路中电压$u_R(t)$。

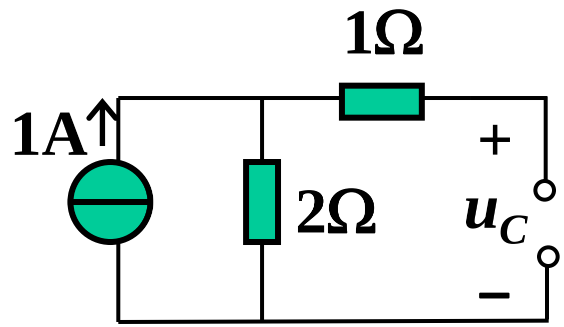
$$u_R(t)=u_R(\infty)+[u_R(0^+)-u_R(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

解

0^- 电路

（换路前稳态电路）

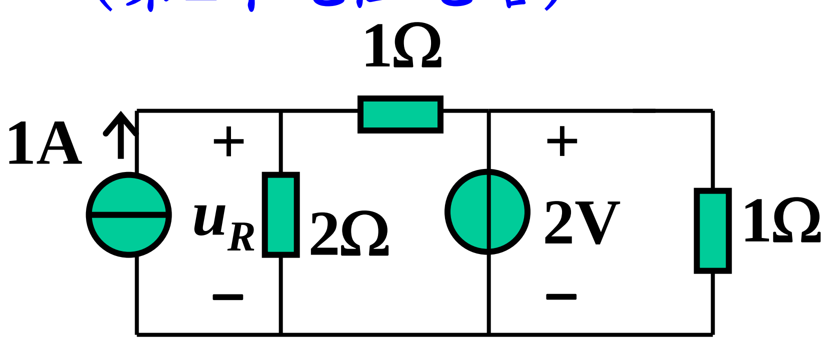
（第1个电阻电路）



$$u_C(0^-)=2\text{V}$$

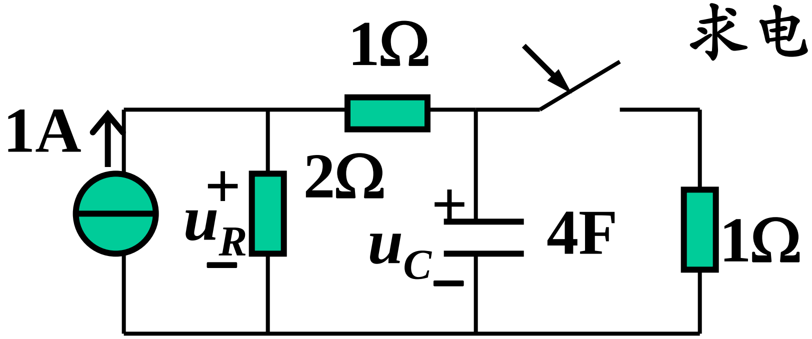
0^+ 电路

（第2个电阻电路）



$$\frac{u_R(0^+)-2}{1}+\frac{u_R(0^+)}{2}=1$$

$$\boxed{u_R(0^+)=2\text{V}}$$

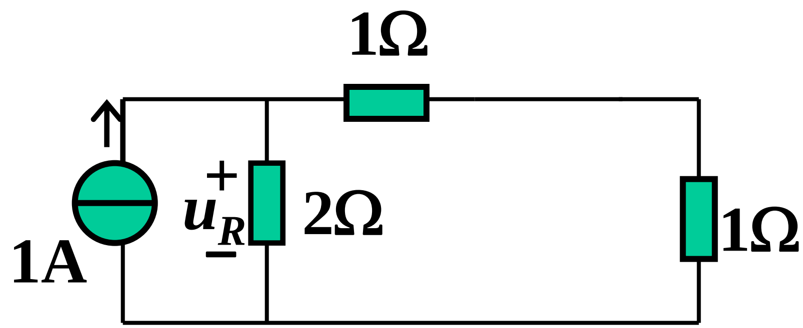


求电压$u_R(t)$。

$$\boxed{u_R(0^+) = 2\text{V}}$$

换路后稳态电路

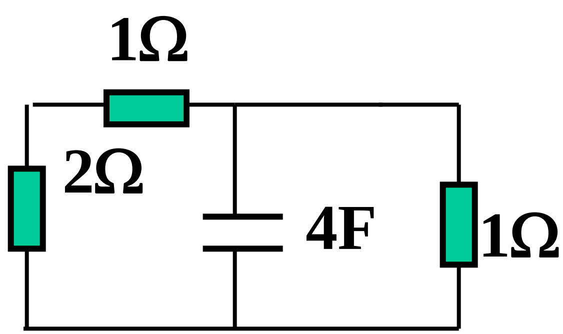
（第3个电阻电路）



$$\boxed{u_R(\infty) = 1\text{V}}$$

求时间常数电路

（第4个电阻电路）



$$\boxed{\tau = \frac{3}{4} \times 4 = 3\,\text{s}}$$

$$u_R(t) = u_R(\infty) + [u_R(0^+) - u_R(\infty)]\text{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 1 + \text{e}^{-\frac{t}{3}}\ \text{V} \qquad t > 0$$

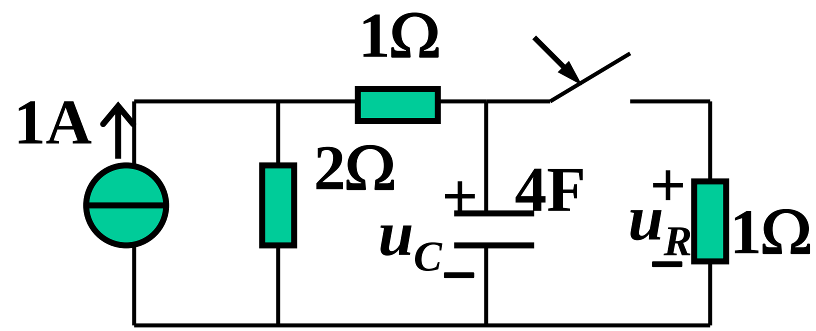
关于直觉解法的讨论

- 适用于: $f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t > 0$
  - 时间常数、初值、终值比较容易求的场合
    - 直流激励或正弦激励 → L15
  - 可用于求电路任意支路的电压或电流
- 仅对1阶电路适用
- 时间常数的概念仅对1阶电路适用

单选题 1分

⚙ 设置

题图中$u_R(\infty)$= ____V



A 0

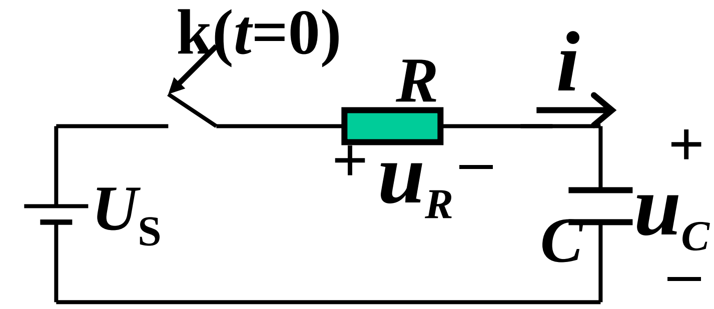
B 0.5

C 1

D 2

提交

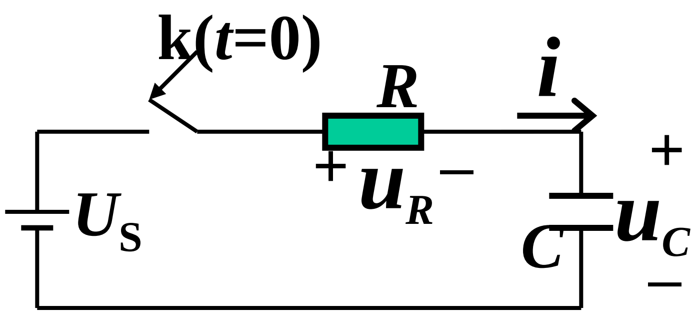
5 从另一个角度观察解



$u_C(0^-)=U_0$ 求：电容电压$u_C(t)$。

$$u_C=U_S+(U_0-U_S)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t\geq 0$$

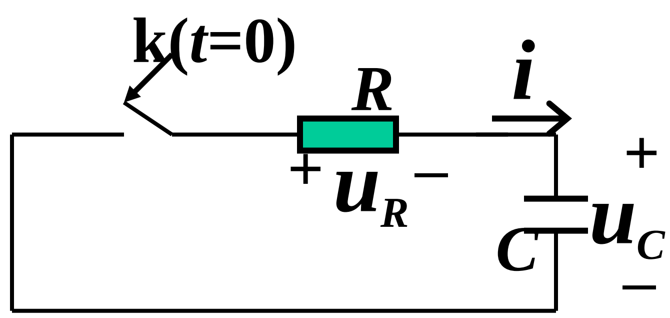
全响应



$u_C(0^-)=0$ 零状态(储能元件无初始储能)

$u_C(0^+)=0$ $u_C(\infty)=U_S$ $\tau=RC$

$$u_C=U_S+(0-U_S)e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t\geq 0$$



$u_C(0^-)=U_0$ 零输入(没有外加电源)

$u_C(0^+)=U_0$ $u_C(\infty)=0$ $\tau=RC$

$$u_C=U_0e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad t\geq 0$$

零输入响应(zero-input response) (ZIR)：没有外加激励，由L、C初始储能引起的响应

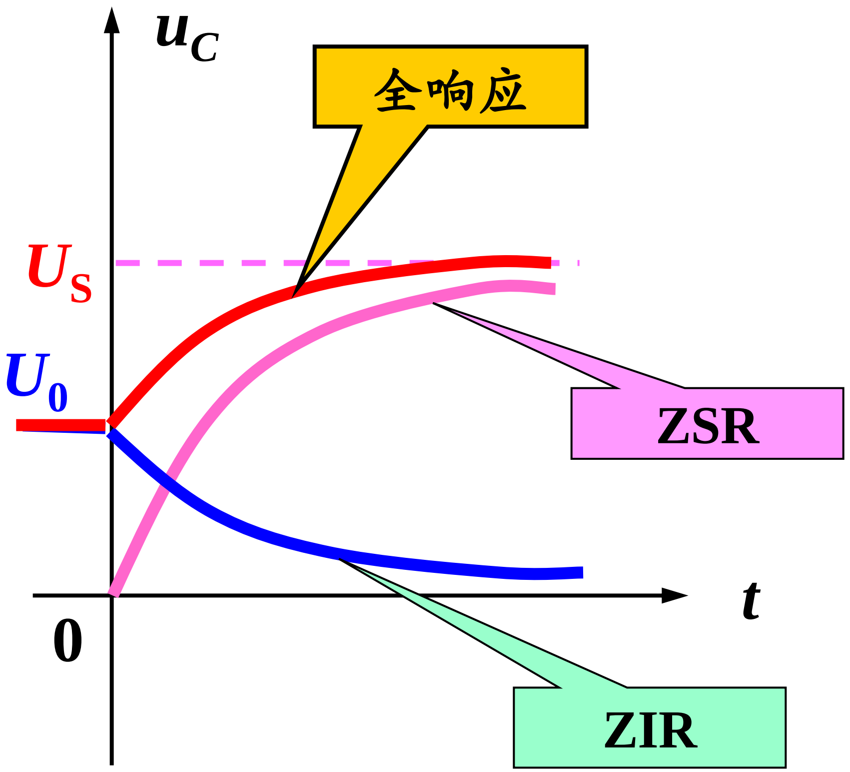
零状态响应(zero-state response) (ZSR)：L、C没有初始储能，由外加激励引起的响应

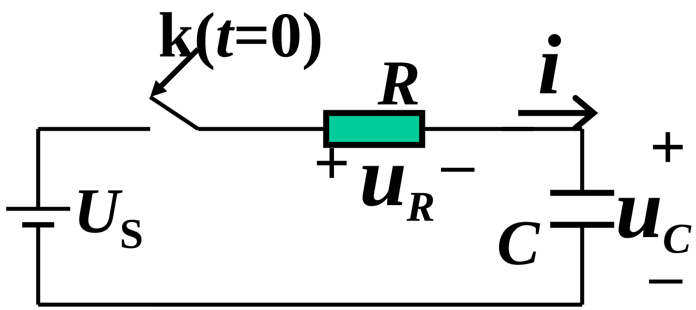
$$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (t \geq 0)$$

$$\begin{cases} u_C(0^-)=0 \\ i_L(0^-)=0 \end{cases}$$

ZSR

ZIR





$u_C(0^-)=U_0$

电阻电压$u_R(t)$的零状态响应是

"红包"

A $-U_0\,e^{-\frac{t}{\tau}}$

B $U_S+(U_0-U_S)e^{-\frac{t}{\tau}}$

C $U_S\,e^{-\frac{t}{\tau}}$

D $(U_S-U_0)\,e^{-\frac{t}{\tau}}$

提交

$$u_C(t) = \underbrace{u_C(\infty)}_{\text{强制分量/非齐次特解}} + \underbrace{[u_C(0^+) - u_C(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{自由分量/齐次通解}}$$

数学视角
方程视角

$$= \underbrace{\left[u_C(\infty) - u_C(\infty)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \right]}_{\text{零状态响应}} + \underbrace{u_C(0^+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{零输入响应}}$$

电路视角
能量视角

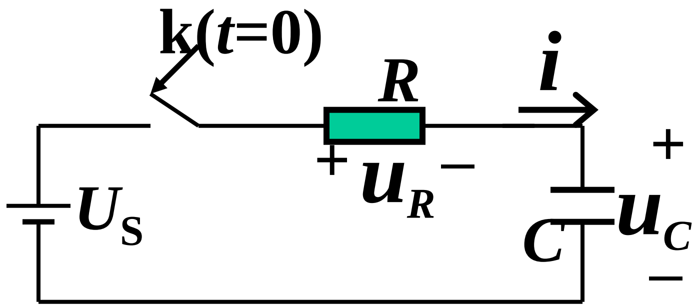
全响应 = 强制分量 + 自由分量
= 零输入响应 + 零状态响应

为什么要这样划分?

原因1：ZIR 和 ZSR 都是可能出现的过渡过程

原因2：ZSR 对于分析一般激励的响应非常重要

激励—响应线性关系



$u_C(0^-)=0$ 零状态

$$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$$

激励	响应
U_S	$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$
$2U_S$	$u_C = 2U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$
$U_{S1}+U_{S2}$	$u_C = (U_{S1}+U_{S2})(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$

第13讲 利用这个性质求任意激励下电路的ZSR

→进而求任意激励作用下电路的响应