5.3.6

(1)

◀ $\begin{bmatrix} L_{n+1} \\ L_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_n \\ L_{n-1} \end{bmatrix}$. 对 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 进行谱分解 (设两个特征值为 $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$), 我们得到 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} & -\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} \\ -\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} & \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} \end{bmatrix}$, 故 $\begin{bmatrix} L_n \\ L_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \begin{bmatrix} L_2 \\ L_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-2} & \\ & \lambda_2^{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} & -\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} \\ -\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} & \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_2 \\ L_1 \end{bmatrix}$. 解得 $L_n = \frac{3(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1})-\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{n-2}-\lambda_2^{n-2})}{\lambda_1-\lambda_2}$. ▶

其余小题可参考上述做法

具体计算可参考之后魏元昶同学的做法

5.3.15

1. 如果 A 所有的特征向量是 $k\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $k \neq 0$, 则 A 一定有不单的特征值.

◀ 正确. 由于每个特征值给出的特征子空间线性无关, 2 阶方阵 A 仅有一个特征值. ▶

2. 如果 A 所有的特征向量是 $k\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $k \neq 0$, 则 A 一定不可对角化.

◀ 正确. 由上一问即得. ▶

3. 如果 A 是上三角矩阵但不是对角矩阵, 则 A 不可对角化.

◀ 错误. 反例: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 0 \end{bmatrix}$. ▶

第四个命题正确，证明方法参考之后魏元昶同学的做法

5. 如果 A 可以被对角矩阵对角化, 则 A 也是对角矩阵.

◀ 正确. 直接计算. ▶

清華大學 TSINGHUA UNIVERSITY 数学作业纸

班级：[redacted] 姓名：魏之永 编号：[redacted] 科目：线性代数， 第 页

练习 5.3

1. (1) $\begin{bmatrix} L_{n+2} \\ L_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L_{n+1} \\ L_n \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt5}{2} & \frac{1-\sqrt5}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt5}{2} & \\ & \frac{1-\sqrt5}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{1-\sqrt5}{2\sqrt5} \\ -\frac{1}{\sqrt5} & \frac{1+\sqrt5}{2\sqrt5} \end{bmatrix}$

$\therefore L_n = \frac{1}{\sqrt5}\times\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n-1}\times\left(3-\frac{1-\sqrt5}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt5}\times\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n-1}\times\left(-3+\frac{1+\sqrt5}{2}\right) = \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n$

∴ 综上，$L_n = \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n$ 为发散数列.

(2) $\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac12 & \frac12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \frac12 & \frac12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \\ & -\frac12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac23 & \frac13 \\ \frac13 & -\frac13 \end{bmatrix}$

$\therefore a_n = \frac23 - \frac23\times\left(-\frac12\right)^n$ $\qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \frac23$.

(3) $\begin{bmatrix} a_{n+3} \\ a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac12 & \frac14 & \frac14 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1-\sqrt3 i}{8} & \frac{-1+\sqrt3 i}{8} \\ 1 & \frac{-1+\sqrt3 i}{4} & \frac{-1-\sqrt3 i}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \frac{-1+\sqrt3 i}{4} & \\ & & \frac{-1-\sqrt3 i}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1-\sqrt3 i}{8} & \frac{-1+\sqrt3 i}{8} \\ 1 & \frac{\sqrt3 i-1}{4} & \frac{-1-\sqrt3 i}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

则知 a_n 形式满足 $a_n = c_1\cdot 1^n + c_2\left(\frac{-1+\sqrt3 i}{4}\right)^n + c_3\left(\frac{-1-\sqrt3 i}{4}\right)^n$.

$\therefore \begin{cases} c_1+c_2+c_3=0 \\ c_1+\left(\frac{-1+\sqrt3 i}{4}\right)c_2+\left(\frac{-1-\sqrt3 i}{4}\right)c_3=0 \\ c_1+\left(\frac{-1+\sqrt3 i}{4}\right)^2c_2+\left(\frac{-1-\sqrt3 i}{4}\right)^2c_3=0 \end{cases}$ $\qquad c_1=\frac47 \quad c_2=-\frac27+\frac{10\sqrt3}{21}i \quad c_3=-\frac27-\frac{10\sqrt3}{21}i$

$\therefore a_n = \left(-\frac27+\frac{10\sqrt3}{21}i\right)\left(-\frac14+\frac{\sqrt3 i}{4}\right)^n+\left(-\frac27-\frac{10\sqrt3}{21}i\right)\left(-\frac14-\frac{\sqrt3 i}{4}\right)^n+\frac47$

且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac47$.

(4) $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ 3^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ 3^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \\ & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ 3^n \end{bmatrix}$

则 $\begin{bmatrix} a_n \\ 3^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1^n & \\ & 3^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \therefore a_n = 3^n$ 为发散数列.

(5) $\begin{bmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&\\&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix}a_n\\b_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4^n&\\&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ $\therefore$ $a_n=4^{n-1}$. $(n=1,2,3\ldots)$ 为等比数列.

$b_n=3\times4^{n-1}$. $(n=1,2,3\ldots)$

15. (1) 正确.

证明: A的特征多项式 $\det(\lambda I-A)$ 为关于λ的二次多项式.

因此在复数域内必有两个不同解或唯一解.

Case ①: 若有两解. 则属于两特征根的特征向量线性无关. 矛盾!

Case ②: 若有唯一解. 则 λ_i 代数重数为2. 由题意其几何重数为1. ∴ λ_i 为亏损特征值.

证毕.

(2) 正确 由(1)知. A一定有不单特征值 不满足A可对角化的充要条件. 证毕.

(3) 错误. 如 $A=\begin{bmatrix}1&1\\&2\end{bmatrix}$. 则 $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\\&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\&1\end{bmatrix}$ 可对角化.

(4) 正确. 对于严格上三角矩阵且非对角矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$

令 $D=\mathrm{diag}\{a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}\}$ 即D为A的对角元素组成的对角矩阵.

∵A非对角阵. ∴ $D-A\neq0$. ∴ $\mathrm{rank}(D-A)\geq1$

则 $(D-A)$ 为上三角矩阵. 对角线元素均为0. 特征值仅有0. 代数重数为n.

而 $\dim N(D-A)=n-\mathrm{rank}(D-A)\leq n-1$. ∴ $(D-A)$的特征值0 几何重数不大于$n-1$.

∴ 0为$(D-A)$亏损特征值. ∴ $(D-A)$不可对角化. 证毕.

(5) 正确. $A=\mathrm{diag}\{a_1,\cdots a_n\}\,\mathrm{diag}\{\lambda_1\cdots\lambda_n\}\,\mathrm{diag}\{\frac{1}{a_1},\cdots,\frac{1}{a_n}\}$

∵A可对角化. ∴ $\forall 1\leq i\leq n$ $a_i\neq0$. 计算可知 A也为对角阵. 证毕.

5.3.20

1. 设 A 为对角矩阵, 证明 $p_A(A)=0$.

◀ 设 m 阶方阵 A 的全部特征值为 $a_1,\cdots,a_m$, f 为多项式, 则 $f(A)$ 的全部特征值为 $f(a_1),\cdots,f(a_m)$.
▶

2. 设 A 为可对角化的矩阵, 证明 $p_A(A)=0$.

◀ 将 A 对角化即得 $p_A(A)=0$. (注意 $p_A(x)$ 在 A 的相似下不变.) ▶

3. 设 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$, 它是否可对角化? 是否满足 $p_A(A)=0$?

◀ 否. 是. ▶

5.4.1

1. 证明, 若 A 有 n 个不同的特征值, 则 B 可对角化.

◀ 由 A 有 n 个不同的特征值, A 可对角化. 设 $P^{-1}AP=A'=diag(a_1,\cdots,a_n)$ 并记 $P^{-1}BP=B'=\begin{bmatrix}b_{ij}\end{bmatrix}_{ij}=\begin{bmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}$. $AB=BA$ 等价于 $(P^{-1}AP)(P^{-1}BP)=(P^{-1}BP)(P^{-1}AP)$ 或等价于 $A'B'=B'A'$, 即 $\begin{bmatrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n\end{bmatrix}$ 或等价于 $\begin{bmatrix}a_1b_{11} & \cdots & a_1b_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_nb_{n1} & \cdots & a_nb_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}a_1 & \cdots & b_{1n}a_n\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{n1}a_1 & \cdots & b_{nn}a_n\end{bmatrix}$. 考虑两边 (i,j) 位置的元素相等知 $a_ib_{ij}=b_{ij}a_j$. 对于两个不同下标 $i\neq j$, 由 $a_i\neq a_j$, 我们有 $b_{ij}=0$. 故 $B'=diag(b_{11},\cdots,b_{nn})$. ▶

2. 若 A 有代数重数大于 1 的特征值, B 是否一定可对角化?

◀ 否. B 的 Jordan 块的阶数可能大于 1. 例如 $A=B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ & 0\end{bmatrix}$. ▶

5.4.2

1. $A=MN, B=NM$, 其中 M,N 为方阵, 且 M 可逆.

◀ M. ▶

2. $A=\begin{bmatrix}MN & 0\\ N & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ N & NM\end{bmatrix}$, 其中 M,N 不必是方阵.

◀ $\begin{bmatrix}I & M\\ & I\end{bmatrix}$. ▶

3. $A=\begin{bmatrix} M & -N \\ N & M \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} M+iN & 0 \\ 0 & M-iN \end{bmatrix}$, 其中 M,N 是方阵.

◀ $\begin{bmatrix} I & I \\ -iI & iI \end{bmatrix}$. ▶

5.4.3

给定 n 阶方阵 A,B 满足 $AB=BA$.

1. 证明, 若 A 有 n 个不同的特征值, 则存在次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$, 使得 $B=f(A)$.

参考解答: 由练习 5.4.1.1, A,B 可以同时对角化, 故不妨设 A,B 已是对角阵. 由 A 的特征值互不相同, 可对 A 的对角元 Lagrange 插值得到所需多项式.

(详细过程: 将 A,B 同时对角化. 设 $P^{-1}AP=\operatorname{diag}(a_1,\cdots,a_n), P^{-1}BP=\operatorname{diag}(b_1,\cdots,b_n)$, 其中 $a_1,\cdots,a_n$ 互不相同. 取 $f(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\prod_{i\neq j}(a_j-a_i)}\prod_{i\neq j}(x-a_i)$, 我们有 $f(a_j)=b_j$, 故 $P^{-1}f(A)P=f(P^{-1}AP)=P^{-1}BP$, 从而有 $B=f(A)$.)

2. 证明, 若 $A=J_n(\lambda)$, 则存在次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$, 使得 $B=f(A)$.

参考解答: 条件等价于 B 与 $J_n(0)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}=A-\lambda I_n$ 交换. 记 $B=(b_{ij})$. 考虑方程 $J_n(0)B=BJ_n(0)$. 记 i 或 j 大于 n 或小于 0 时 $b_{ij}=0$, 则两边的 (i,j) 元分别为 $b_{i+1,j}$ 和 $b_{i,j-1}$. 由两边相等, 解得

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{11} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & b_{12} \\ & & & b_{11} \end{bmatrix}=b_{11}I+b_{12}J_n(0)+\cdots+b_{1n}J_n(0)^{n-1}=b_{11}I+b_{12}(J_n(\lambda)-\lambda I_n)+\cdots$$

故 $f(x)=\sum_{i=1}^{n}b_{1i}(x-\lambda)^{i-1}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1}b_{1i}\begin{pmatrix} i-1 \\ j \end{pmatrix}\lambda^{i-j-1}x^j=\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{i=j+1}^{n}b_{1i}\begin{pmatrix} i-1 \\ j \end{pmatrix}\lambda^{i-j-1}\right)x^j$.

3. 举例说明, 存在 A,B 满足 $AB=BA$, 但不存在多项式 $f(x)$, 使得 $B=f(A)$.

参考解答:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & \\ & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{bmatrix}$$

5.4.5

1. $x_1, \cdots, x_s$ 线性无关.

◀ 设 $x_1, \cdots, x_s$ 有非平凡的线性组合 $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = 0$, 其中 $a_k \neq 0$ 为线性组合的最后一个非零系数. 以 $(A - \lambda I)$ 作用 $k-1$ 次知 $a_kx_1 = 0$, 矛盾. ▶

2. 令 $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_s \end{bmatrix}$, 则 $AX_1 = X_1J_s(\lambda)$.

◀ 直接验证. ▶

3. 若 A 只有一个特征值 1, 且其几何重数为 1, 则 A 有一个关于 λ 的长度为 n 的 Jordan 链 $x_1, \cdots, x_n$, 且 A 相似于 $J_n(\lambda)$.

◀ 对于每个 s, 我们有 $dim(N((A-\lambda I)^s)) - dim(N((A-\lambda I)^{s-1})) \leq 1$, 否则以 $(A-\lambda I)^{s-1}$ 作用即有 $dim(N(A-\lambda I)) > 1$. 由 $dim(N((A-\lambda I)^s)) \geq dim(N((A-\lambda I)^{s-1}))$, 有 $dim(N((A-\lambda I)^n)) - dim(N((A-\lambda I)^{n-1})) = 1$. 取 $x_n \in N((A-\lambda I)^n)\backslash N((A-\lambda I)^{n-1})$ 以及 $x_i = (A-\lambda I)x_{i+1}$. 由 $X = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$ 可逆, $X^{-1}AX = J_n(\lambda)$.