第十次习题课题目

习题 1. 构造一个三阶实对称矩阵，使得其特征值为 1,1,−1, 属于特征值 1 的线性无关的特征向量有 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ 和 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T$.

习题 2. 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶实对称矩阵, 其特征值是 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$.

(1) 证明对于任意 n 维列向量 $\alpha \in \mathbb{R}^n$, 均有

$$\lambda_1 \alpha^T \alpha \le \alpha^T A \alpha \le \lambda_n \alpha^T \alpha.$$

(2) 展示 $\lambda_1 \le a_{11} \le \lambda_n$.

(3) 假设 $A=(a_{ij})$ 是一个 2 阶实对称阵. 求 a_{12} 可能的最大值和最小值.

习题 3. 设 A,B 是 n 阶实对称矩阵, 其特征值分别是 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$ 和 $\mu_1 \le \mu_2 \le \cdots \le \mu_n$. 求证：$A+B$ 的特征值全部落在区间 $[\lambda_1+\mu_1, \lambda_n+\mu_n]$.

习题 4 (♡). 若 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶实方阵，且 A 的秩小于 n，则 A 的伴随矩阵的特征值包含至少 $n-1$ 个 0, 若存在非零特征值，则它是 $\sum_{i=1}^n C_{ii}$.

习题 5 (♡). 设 A 是一个 n 阶反对称矩阵, 即 $A^T=-A$ 且 A 是实矩阵. 证明：

(1) I_n+A 可逆且 $(I_n-A)(I_n+A)^{-1}$ 是正交阵.

(2) 假设 $n=3$，则存在正交阵 Q 和向量 $b\in\mathbb{R}$，使得 $Q^TAQ=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix}$.

习题 6 (练习 6.1.16). 设实对称矩阵 $S=\begin{bmatrix} O & A \\ A^{\mathrm{T}} & O \end{bmatrix}$.

1. 证明, $S\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$, 当且仅当 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ z \end{bmatrix}$, 满足 $A\boldsymbol{z}=\lambda\boldsymbol{y}, A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\lambda\boldsymbol{z}$.
2. 证明, 如果 λ 是 S 的特征值, 则 $-\lambda$ 也是 S 的特征值.
3. 证明, 如果 $\lambda\neq 0$ 是 S 的特征值, 则 λ^2 是 $A^{\mathrm{T}}A$ 的特征值, 也是 AA^{T} 的特征值.

4. 证明, AA^{T} 和 $A^{\mathrm{T}}A$ 的非零特征值相同, 且有相同的重数.
5. 分别取 $A=I_2$ 或 $A=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, 求对应 S 的谱分解.

习题 7 (练习 6.1.17). 构造一个实方阵 A, 满足 $AA^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}A$ 但 $A\neq A^{\mathrm{T}}$, 并验证 A 和 A^{T} 具有相同的特征值和特征向量. 注意, 这里相同的特征向量不意味着对应的特征值相同.

注意: 事实上, 对实方阵 A, 如果 $AA^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}A$, 则 A 和 A^{T} 具有相同的特征值和特征向量.

习题 8 (练习 6.2.7). (Hadamard 不等式) 给定对称正定矩阵 A, 求证:

1. 对任意 $\boldsymbol{y}$,$\det\left(\begin{bmatrix}A & \boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} & 0\end{bmatrix}\right)\leqslant 0$;
2. 记 $A=[a_{ij}]$, 则 $\det(A)\leqslant a_{nn}A_{n-1}$, 其中 A_{n-1} 是 A 的 $n-1$ 阶顺序主子式;
3. $\det(A)\leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

利用上述结论证明: 如果实矩阵 $T=[t_{ij}]$ 可逆, 那么 $\det(T)^2\leqslant\prod\limits_{i=1}^{n}(t_{1i}^2+t_{2i}^2+\cdots+t_{ni}^2)$.

注意: 练习 4.2.27 用不同方法证明了相同结论.

习题 9 (练习 6.2.8). 证明 $A=\left[\dfrac{1}{i+j}\right]_{n\times n}$ 正定.

习题 10 (练习 6.2.19). 设 A,B 是 n 阶实对称矩阵, A 正定. 证明, 存在可逆矩阵 T, 使得 $T^{\mathrm{T}}AT$ 和 $T^{\mathrm{T}}BT$ 同时是对角矩阵.