期末考试样题二参考解答

1. (10 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. 分别计算以下 4 项并提供计算过程.

   (1) $|A|$.　　(2) $|-2A^T|$.　　(3) $|A^{-1}|$.

   (4) A^{-1} 的 (1,4) 元 (即 A^{-1} 第 1 行第 4 列的元素).

   答案　(1)(3 分)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & -9 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -37/3 \end{vmatrix} = 74.$$

(2)(2 分)$|-2A^T| = (-2)^4|A^T| = (-2)^4|A| = 1184.$

(3)(2 分)$|A^{-1}| = 1/|A| = 1/74.$

(4)(3 分)A^{-1} 的(1,4)元为

$$(A^{-1})_{1,4} = \frac{C_{4,1}}{|A|} = \frac{(-1)^5}{74} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{74} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -7 \end{vmatrix} = \frac{17}{74}.$$

注：计算过程不唯一，只要计算合理且结果正确都得分．对于任一小题，计算过程 1 分．

2. (10 分) 设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，我们称 n 阶实矩阵 P 是 V 上的正交投影矩阵，如果 $P^2 = P, P^T = P$ 且 P 的列空间等于 V. 这个定义等价于说 P 满足: 若 $v \in V$，则 $Pv = v$, 若 $w \in V^{\perp}$, 则 $Pw = 0$.

   (1) 假设 $V = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$. 它是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间. 问:V 上的

正交投影矩阵是否等于

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}?$$

(2) 求 $w \in V$, 使得 $\| w - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \| = \min_{v\in V} \| v - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \|$.

答案

(1) 本问 5 分，回答“是”得 2 分．验证过程 3 分．

验证方法 1：令题目中矩阵是 P. 矩阵 P 等于

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

验证 $P^2 = P, P^T = P$ 和 P 的列空间等于 V.

验证方法 2：按等价定义,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

因此，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

由此得 $P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $P\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, 且 $V^\perp = \{c\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R}\}$. 这展示 P 是正交投影阵.

(2) 本问 5 分. 方法 1：因为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-\frac{1}{3})\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以

$$w = P\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

按第一问验证方法 1，本问也可以直接计算 $w = P\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

方法 2：令 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 A 的列空间是 V，计算正交投影矩阵是 $A(A^TA)^{-1}A^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 得到 $w = P\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

3. (20 分) 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(1) 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 但 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.

(2) 按 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 顺序写出 Gram-Schmidt 标准正交化的向量 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

(3) 记 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ 和 $Q = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$, 求矩阵 C 满足 $A = QC$.

(4) 求 $\mathbb{R}^4$ 到 A 的列空间的正交投影矩阵.

(5) 记 $B = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 求 $Bx = b$ 的最小二乘解, 即求 $x^* \in \mathbb{R}^3$ 使得 $\|Bx^* - b\| = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^3} \|Bx - b\|$.

答案 (1) (4 分) 利用

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得到 (1) 结论.

也可以先判断 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 再通过解方程组将 α_4 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

(2) (4 分) $\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)^T, \beta_2 = \alpha_2 = (0, 1, 0, 0)^T, \beta_3 = \alpha_3 - \alpha_2 = (0, 0, 1, 0)^T$.

(3) (6 分) 从 (2) 或一个向量在正交基向量的表示公式得到 $\alpha_1 = \sqrt{2}\beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \alpha_3 = \beta_2 + \beta_3, \alpha_4 = \sqrt{2}\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$, 得到

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) (3 分)

$$P = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)(\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(5) (3 分) 由公式

$$x^* = (B^TB)^{-1}B^Tb = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} B^Tb = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} B^Tb = (\frac{1}{2}, 0, 0)^T.$$

也可以直接用 (4) 的结论, b 在 $R(A)$ 的投影向量为 $Pb = \frac{1}{2}(1,0,0,1)^T = \frac{1}{2}\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3$ 得到结论.

4. (10 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(1) 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

(2) 求 A^n.

答案 (1) 先求 A 的特征值. 令 $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-1) = 0$, 得到 $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 1$. .... (**1 分**)

再求特征向量.

当 $\lambda_1 = 2$ 时，由 $(A-2I)x = 0$，即 $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

求得无关的解, $\alpha_1 = (1,0,0)$, $\alpha_2 = (0,0,1)$. .... (**2 分**)

当 $\lambda_2 = 1$ 时，由 $(A-I)x = 0$, 即 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

得到解，$\alpha_3 = (-3,1,0)$. .... (**2 分**)

令 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \Lambda$. .... (**1 分**)

(2) 由 (1)$A = P\Lambda P^{-1}$，$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 于是

$$A^n = P\Lambda^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^n & 3(2^n-1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}. \text{......................} \ (\textbf{4 分})$$

或者由 A 为准对角，直接计算 $A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 3(2^n-1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$.

5. (10 分) 设 T 为 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换，且满足

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -10 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

(1) 求 T 在基 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 下的矩阵 A.

(2) 计算 $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$.

(3) 阐明理由: 能够找到 A 的特征向量构成 $\mathbb{R}^2$ 一组基. 并求 T 在这组基下的矩阵.

答案 （1）（4 分）$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) - T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \end{bmatrix}$.（2 分）

所以 T 在基 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 下的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. （2 分）

（2）（3 分）$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -26 \\ 21 \end{bmatrix}$. （计算步骤 1 分，答案 2 分.）

或者 $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = 2T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + 3T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -26 \\ 21 \end{bmatrix}$.

（3）（4 分）可求得 A 的特征值为 2 和 -1.（1 分）

A 有两个互异的特征值，故可找到两个线性无关的特征向量构成 $\mathbb{R}^2$ 一组基.（1 分）

T 在这组基下的矩阵即为以 A 特征值为对角元的对角阵 $\begin{bmatrix} 2 & \\ & -1 \end{bmatrix}$ 或者 $\begin{bmatrix} -1 & \\ & 2 \end{bmatrix}$. 两种对角阵写出其一即可.（2 分）

6. (20 分) 令 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

(1) 求 A 的奇异值分解.

(2) 分别给出 A 的行空间和列空间的一组标准正交基.

答案 （1）（16 分）方法一：直接计算. $A^TA = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 6 & 8 & 6 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$（1 分）.$A^TA$ 特征多项式 $|A^TA - \lambda I| = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-17)$(2 分), 得到 A^TA 的特征值为 $\lambda_1 = 17$, $\lambda_2 = 1$, 所以两个非零奇异值为 $\sigma_1 = \sqrt{17}$, $\sigma_2 = 1$（2 分）.

求得右奇异向量为 $v_1 = \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix}$（2 分），$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$（2 分）；以及 A 的零空间的一组标准正交基 $v_3 = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix}$（2 分）. 注：这里的 v_1, v_2, v_3 有乘以 -1 的自由，相应 u_1, u_2 也要进行符号变化.

再根据 $u_j = \frac{Av_j}{\sigma_j}$, $j = 1, 2$ 求得左奇异向量为 $u_1 = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$（2 分），$u_2 = \begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$（2 分）.

故 A 的奇异值分解如下

$$A = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{17} & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{34}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{17}}\\\frac{4}{\sqrt{34}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{17}}\\\frac{3}{\sqrt{34}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-3}{\sqrt{17}}\end{bmatrix}^T .\text{(1 分)}$$

方法二: 先给 A^T 做奇异值分解后再转置. $AA^T = \begin{bmatrix}9 & 8\\8 & 9\end{bmatrix}$（1 分), AA^T 特征多项式为 $(1-\lambda)(17-\lambda)$,（2 分）解得 AA^T 的两个特征值为 $\lambda_1 = 17$, $\lambda_2 = 1$，所以两个奇异值为 $\sigma_1 = \sqrt{17}$, $\sigma_2 = 1$（2 分).

解得 A^T 的右奇异向量为 $u_1 = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$（2 分），$u_2 = \begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$（2 分）.

注：这里的 u_1, u_2 有乘以 -1 的自由，相应 v_1, v_2 也要进行符号变化,v_3 有乘以 -1 的自由.

再根据 $v_j = \frac{A^T u_j}{\sigma_j}$, $j = 1, 2$ 求得 A^T 的左奇异向量为 $v_1 = \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix}$（2 分），$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$（2 分）；以及 A^T 的左零空间的一组标准正交基 $v_3 = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix}$(或者 v_3 可取 $-\frac{1}{\sqrt{17}}\begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix}$).（2 分）

最后将所得的 A^T 的奇异值分解转置后得到 A 的奇异值分解如下：

$$A = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{17} & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{34}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{17}}\\\frac{4}{\sqrt{34}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{17}}\\\frac{3}{\sqrt{34}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-3}{\sqrt{17}}\end{bmatrix}^T .\text{(1 分)}$$

（2）(4 分)

方法一：根据奇异值分解有 $A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T$，所以 u_1, u_2 给出了 A 的列空间的一组标准正交基，所以 v_1^T, v_2^T 给出了 A 的行空间的一组标准正交基.（4 分）

方法二：直接将 A 的行向量进行正交化得行空间的一组标准正交基为

$$\frac{1}{3}(2, 2, 1),\ \frac{1}{\sqrt{153}}(-7, 2, 10) 2\text{ 分}.$$

矩阵 A 是列满秩的，所以 $\mathbb{R}^2$ 的任一组标准正交基都是 A 列空间的一组标准正交基（2 分).

7. (7 分) 设 A 和 B 均为 n 阶方阵，且满足 $A + B + AB = O$. 证明：

(1) -1 不是 B 的特征值.

(2) B 的任一特征向量都是 A 的特征向量.

(3) A 的任一特征向量都是 B 的特征向量.

答案 (1)(2 分). 如果 $(-1,x)$ 为 B 的特征对，那么由 $Bx=-x$ 可知

$$Ax+Bx+ABx=Ax-x-Ax=-x=0,$$

这与 x 是非零向量矛盾.

(2)(2 分). 设 (λ,x) 为 B 的特征对（$\lambda\neq-1$），即 $Bx=\lambda x$. 于是 $Ax+Bx+ABx=0$，即

$$Ax+\lambda x+A(\lambda x)=0, i.e., (\lambda+1)Ax=-\lambda x.$$

所以，

$$Ax=-\frac{\lambda}{\lambda+1}x.$$

(3)(3 分). 注意到 $I+A+B+AB=(I+A)(I+B)=I$，于是

i）利用 $(B+I)(A+I)=I$，得到 $AB=-A-B=BA$，同上证明；

或者

ii) 由 $(B+I)(A+I)=I$ 说明 -1 不是 A 的特征值. 设 (μ,y) 为 A 的特征对，即 $Ay=\mu y$. 构造向量

$$z=By+\frac{\mu}{\mu+1}y,$$

则 $Az=ABy+\frac{\mu}{\mu+1}Ay=-Ay-By+\frac{\mu}{\mu+1}Ay=-\mu y-By+\frac{\mu^2}{\mu+1}y=-By-\frac{\mu}{\mu+1}y=-z$. 注意到 z 不是特征向量，所以 $z=0$，即 $By=-\frac{\mu}{\mu+1}y$.

8. (5 分) 设 e_1,e_2,e_3 是 $\mathbb{R}^{10}$ 中一组标准正交的向量. 记 $V\subseteq\mathbb{R}^{10}$ 为 e_1,e_2,e_3 生成的子空间. 设 $v\in\mathbb{R}^{10}$. 证明：$v\in V$ 当且仅当 $\|v\|^2=(e_1^Tv)^2+(e_2^Tv)^2+(e_3^Tv)^2$.

答案 设 $e_1,e_2,e_3,\cdots,e_{10}$ 是由 e_1,e_2,e_3 扩充的 $\mathbb{R}^{10}$ 的一组标准正交基. 令

$$v=c_1e_1+\cdots+c_{10}e_{10}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{1 分}$$

由定义，$v\in V$ 当且仅当 $c_4=\cdots=c_{10}=0$. ....（**1 分**）

容易验证 $c_i=e_i^Tv$(或 v^Te_i), 其中 $i=1,\cdots,10$. ....（**1 分**）和

$\|v\|^2=v^Tv=c_1^2+\cdots+c_{10}^2$. ....（**1 分**）

所以，若 $v\in V$, 则 $c_4=\cdots=c_{10}=0$ 从而 $\|v\|^2=(e_1^Tv)^2+(e_2^Tv)^2+(e_3^Tv)^2$.

反之，若 $\|v\|^2=(e_1^Tv)^2+(e_2^Tv)^2+(e_3^Tv)^2$, 则 $c_4^2+\cdots+c_{10}^2=0$. 所以，$c_4=\cdots=c_{10}=0$. 得到 $v\in V$. ....(**1 分**)

9. (8 分) 给定实对称正定矩阵 A 和实对称矩阵 B，求证：

(1) 关于矩阵 X 的方程 $AX+XA=O$ 只有平凡解 $X=O$.

(2) 关于矩阵 X 的方程 $AX+XA=B$ 存在唯一的解 X_0.

(3) X_0 是对称矩阵.

答案

(1) (3 分)

i. 法一：

- (1 分) A 的谱分解 $A=U\Lambda U^T$，其中 Λ 正定对角，U 正交.
- (1 分)$AX+XA=O \Leftrightarrow \Lambda\widetilde{X}+\widetilde{X}\Lambda=O, \widetilde{X}=U^TXU$.
- (1 分)$\Leftrightarrow (\lambda_i+\lambda_j)\widetilde{x}_{ij}=0 \Leftrightarrow \widetilde{x}_{ij}=0 \Leftrightarrow \widetilde{X}=O \Leftrightarrow X=O$.

ii. 法二：

- 记 $A=\begin{bmatrix}a_{ij}\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}b_{ij}\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{bmatrix}$.
- (2 分) 则 $AX+XA=O$ 等价于

$$My:=\left(\begin{bmatrix}A & & \\ & \ddots & \\ & & A\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_{11}I & \cdots & a_{1n}I\\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n}I & \cdots & a_{nn}I\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=0.$$

- (1 分) 说明 M 正定，因此 M 可逆，只有平凡解.

(2) (3 分)

i. 法一：

- (1 分)（第一问没做出可给 2 分）$AX+XA=B \Leftrightarrow \Lambda\widetilde{X}+\widetilde{X}\Lambda=\widetilde{B}, \widetilde{B}=U^TBU$.
- (1 分)$\Leftrightarrow \widetilde{x}_{ij}=\frac{\widetilde{b}_{ij}}{\lambda_i+\lambda_j}$，解为 $X=U^T\widetilde{X}U$.
- (1 分) 上述计算全部是等价的，因此解唯一.

ii. 法二：

- (1 分)（第一问没做出可给 2 分）$AX+XA=B$ 类似得到 $My=n$.
- (2 分) M 可逆，故解存在且唯一.

iii. 唯一性，法三：

- (1 分) 若有两解 X_1, X_2，则 $A(X_1-X_2)+(X_1-X_2)A=0$，得 $X_1=X_2$.

(3) (2 分)

i. 法一：

- B 对称，$\widetilde{B}$ 对称，$\widetilde{X}$ 对称，X 对称.

ii. 法二：

- (2 分) 任意矩阵 X 可以写成对称与非对称矩阵的和：$X=S+N$. 若 X 是解，则 $AS+SA-B=-(AN+NA)$ 既对称又反对称，利用 (1) 知 $N=O$.