线性代数 第10讲

10月13日

第二章第2讲　　基和维数

上一讲要点回顾

极大线性无关部分组

向量组的秩

子空间的基和维数

线性子空间

定义 2.1.4 (子空间) 设 $\mathcal{M}$ 是线性空间 $\mathbb{R}^m$ 的非空子集，如果对任意 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathcal{M}, k \in \mathbb{R}$，都满足如下两个条件：

1. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$；

2. $k\boldsymbol{a} \in \mathcal{M}$；

则称 $\mathcal{M}$ 为 $\mathbb{R}^m$ 的一个**子空间**.

注意，定义 2.1.4 中的两个条件可以合并成一个条件：对任意 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathcal{M}, k, l \in \mathbb{R}$，都有 $k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$.

特别地，$\mathbb{R}^m$ 有两个**平凡**子空间，即 $\{\mathbf{0}\}$ 和 $\mathbb{R}^m$ 自身. 直观来看，二者分别是"最小"和"最大"的子空间. 二者之外的子空间，称为**非平凡**子空间. 由于 $\mathbf{0} = 0\boldsymbol{a}$，$\mathbb{R}^m$ 的**任意子空间都包含零向量**. 注意，空集**不是**子空间.

线性生成、线性相关与线性无关

定义 2.1.7 (线性生成) 设 $S : \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的向量组，其线性组合的全体构成 $\mathbb{R}^m$ 的一个子集，记作

$$\mathrm{span}(S) = \mathrm{span}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) := \{k_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{a}_n \mid k_1, \cdots, k_n \in \mathbb{R}\},$$

称为由向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ （**线性**）**生成**的子集，而 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 称为该集合的一组**生成向量**.

定义2.1.10 给定向量空间 R^m 中的向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，如果存在不全为零的一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_n \in R$, 使得 $k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_na_n = 0$, 则称向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性相关。

否则，若 $k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_na_n = 0$, 必然给出 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$, 则称向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性无关。

几条基本性质

- m 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\ (n \geq 2)$ 线性相关
  $\Leftrightarrow$ 其中有一个向量可由其余的向量线性表示.

- m 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\ (n \geq 2)$ 线性无关
  $\Leftrightarrow$ 其中任何向量都不能由其余向量线性表示.

- m 维向量组 $a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \cdots, a_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $AX = 0$ 有非零解。

- R^m 中任意 $m+1$ 个向量必定线性相关.

子空间的基

定义 2.1.13 (子空间的基) 给定 $\mathbb{R}^m$ 的子空间 $\mathcal{M}$，若 $\mathcal{M}$ 中存在有限个向量 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 满足：

1. $\mathcal{M}$ 中的任意向量都可以被该向量组线性表示，即 $\mathcal{M} = \mathrm{span}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$；
2. 该向量组线性无关；

则称向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 是子空间 $\mathcal{M}$ 的一组**基**.

命题 2.1.17 给定 $\mathbb{R}^m$ 的子空间 $\mathcal{M}$，则 $\mathcal{M}$ 中的向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$，是 $\mathcal{M}$ 的一组基，当且仅当该向量组满足：

1. $\mathcal{M}$ 中的任意向量都可以被 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性表示，即 $\mathcal{M} = \mathrm{span}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$；
2. 而且表示法唯一.

极大线性无关部分组

定义 2.2.1 (极大线性无关部分组) 给定 $\mathbb{R}^m$ 中的向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，设 $\boldsymbol{a}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{a}_{i_r}$ 是它的一个部分组，且满足：

1. $\boldsymbol{a}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{a}_{i_r}$ 线性无关；
2. $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 可以被 $\boldsymbol{a}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{a}_{i_r}$ 线性表示；

则称 $\boldsymbol{a}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{a}_{i_r}$ 是 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的一个**极大线性无关部分组**.

$a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_r}$ 是向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的极大线性无关部分组，

$$\Leftrightarrow$$

$a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_r}$ 是 $span\left(a_1,a_2,\cdots,a_n\right)$ 的一组基。

1. $\mathcal{M}$ 中的任意向量都可以被该向量组线性表示，即 $\mathcal{M}=\operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$；
2. 该向量组线性无关；

求极大线性无关部分组的筛选法

例 2.2.2 求向量组 $S: \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 的极大线性无关部分组.

命题 2.2.3 如果向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关，那么对任意向量 $\boldsymbol{b}$，有

1. $\boldsymbol{b}$ 可以被向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性表示，当且仅当向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}$ 线性相关；
2. $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b}$ 线性无关，当且仅当 $\boldsymbol{b}$ 不能被向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性表示.

筛选法：利用命题2.2.3的结论，逐步扩充，生成极大线性无关部分组。

命题2.2.4 任意不全为0的向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 都存在极大线性无关部分组。

向量组之间的线性表示关系

设 S 和 T 是 R^m 的两个向量组，如果 S 中的每一个向量都可以被 T 线性表示，则称向量组 S 可以被 T 线性表示。

命题 2.2.5 设 $S: \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n, T: \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_p$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的两个向量组，以下叙述等价：

1. S 可以被 T 线性表示；
2. 存在 $p \times n$ 矩阵 U 满足 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_p\end{bmatrix} U$；
3. 线性生成的子空间满足 $\operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \subseteq \operatorname{span}(\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_p)$.

命题 2.2.6 给定 $\mathbb{R}^m$ 中的三个向量组 $S: \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n, T: \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_p, R: \boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_q$. 若向量组 S 可以被 T 线性表示，T 可以被 R 线性表示，则 S 可以被 R 线性表示. 这称为向量组之间线性表示的传递性.

如果两个向量组可以互相线性表示，则称二者**线性等价**.

例 2.2.7 以下的向量组都和向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 线性等价：

1. 向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$；
2. 向量组 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1$；
3. 向量组 $c\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$，这里 $c \neq 0$；
4. 向量组 $\boldsymbol{a}_1 + k\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2$：这两个向量都可以被 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 表示，而反过来，$\boldsymbol{a}_1 = (\boldsymbol{a}_1 + k\boldsymbol{a}_2) - k\boldsymbol{a}_2$，因此 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ 也可以被这两个向量表示.

后三种情形分别对应右乘三种初等矩阵：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} c\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 + k\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}.$$

线性等价

命题 2.2.8 设 S, T 是 $\mathbb{R}^m$ 中的两个向量组，则 S 与 T 线性等价当且仅当 $\text{span}(S) = \text{span}(T)$.

命题 2.2.9 向量组的线性等价是等价关系.

定义 1.5.18 (等价关系) 如果非空集合 S 的元素之间定义了一种二元关系 "$\sim$"，满足：

1. 反身性：对任意 $a \in S$，$a \sim a$;
2. 对称性：如果 $a \sim b$，那么 $b \sim a$;
3. 传递性：如果 $a \sim b, b \sim c$，那么 $a \sim c$,

则称此关系为 S 上的一个**等价关系**.

向量组的秩

命题 2.2.10 设向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 可以被 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_p$ 线性表示.

1. 如果 $n > p$，则 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关；

2. 如果 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关，则 $n \leqslant p$.

推论2.2.11 设向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 和 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_p$ 线性等价，如果两个向量组都线性无关，则 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}$.

由此立得，一个向量组的任意两个极大线性无关部分组中向量个数都相同.

定义 2.2.12 (秩) 一个向量组 S 的任意一个极大线性无关部分组中向量的个数称为这个向量组的**秩**，记为 $\mathrm{rank}(S)$. 一个只包含零向量的向量组的秩定义为零.

这说明向量组的秩也是向量组之间线性等价这一等价关系中的不变量.

例题

练习 2.2.1 求下列向量组的极大线性无关部分组和秩.

1. $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}2\\3\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}4\\6\\2\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_4=\begin{bmatrix}2\\4\\3\\2\end{bmatrix}$;

练习 2.2.2 在下列向量组中，除去哪个向量，得到的向量组和原向量组线性等价?

1. $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$.

练习 2.2.9 举例说明秩相等的向量组未必线性等价.

例 设 $A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 4\\ 1 & 3 & 0 & 2\end{bmatrix}$，求矩阵 A 列向量组的一个极大无关组和秩，

并把其余列向量用所求出的极大无关组表示出来：

解 通过初等行变换把 A 化为阶梯形：$A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 4\\ 1 & 3 & 0 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$

$$\to\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -3 & -4\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=U$$

✓ 列向量组的秩 = 2;

✓ A 的第1, 2列是极大无关组;

✓ 第3列 = 第2列 – 3×第1列;

✓ 第4列 = 2×第2列 – 4×第1列.

基和维数

定理 2.2.13 (基存在定理) 给定 $\mathbb{R}^m$ 的子空间 $\mathcal{M}$，如果 $\mathcal{M} \neq \{\mathbf{0}\}$，则 $\mathcal{M}$ 存在一组基，且基中向量个数不大于 m.

定理 2.2.14 (基扩充定理) 设 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间，且 $\mathcal{M} \neq \{\mathbf{0}\}$. 如果 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$，则 $\mathcal{M}$ 的任意一组基都能扩充成 $\mathcal{N}$ 的一组基. 特别地，当 $\mathcal{N} = \mathbb{R}^m$ 时，子空间 $\mathcal{M}$ 的任意一组基都能扩充成 $\mathbb{R}^m$ 的一组基.

练习 2.2.5 证明，一个向量组的任意线性无关的部分组都可以扩充成它的一个极大线性无关部分组.

定义 2.2.15 (维数) 一个子空间 $\mathcal{M}$ 的任意一组基中向量的个数称为这个子空间的**维数**，记为 $\dim \mathcal{M}$. 平凡子空间 $\{\mathbf{0}\}$ 的维数定义为零.

维数是 r 的子空间，常称为 r 维子空间.

线性空间的维数与基

定理 2.2.16

1. 线性空间 $\mathbb{R}^m$ 的维数是 m;
2. 设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间，则 $\dim\mathcal{M}\leqslant m$;
3. 设 $\mathcal{M},\mathcal{N}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的两个子空间，且 $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{N}$，则 $\dim\mathcal{M}\leqslant\dim\mathcal{N}$.

在维数已知的情况下，可以更简单地判定一个向量组是否为基.

命题 2.2.17 设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的 r 维子空间, 给定 $\mathcal{M}$ 中含有 r 个向量的向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$.

1. 如果 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性无关，则 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 是 $\mathcal{M}$ 的一组基;
2. 如果 $\mathcal{M}=\operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r)$，则 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 是 $\mathcal{M}$ 的一组基.

命题 2.2.18 设 $\mathcal{M},\mathcal{N}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的两个子空间，且 $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{N}$. 如果 $\dim\mathcal{M}=\dim\mathcal{N}$，则 $\mathcal{M}=\mathcal{N}$.

判断方阵是否可逆的方法

命题 2.2.19 给定 n 阶方阵 A，$\boldsymbol{A}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ 是其诱导的线性变换，以下叙述等价：

1. A 可逆，即存在 m 阶方阵 B，满足 $AB = BA = I_m$；
2. 存在 m 阶方阵 B，满足 $BA = I_m$；
3. 存在 m 阶方阵 B，满足 $AB = I_m$；
4. $\boldsymbol{A}$ 是双射；
5. $\boldsymbol{A}$ 是单射；
6. $\boldsymbol{A}$ 是满射.

练习2.2.15　给定 r 阶方阵 P 和子空间 M 的一组基 $a_1,a_2,\cdots,a_r$，

令 $\begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_r \end{bmatrix}P$,

证明：$b_1,b_2,\cdots,b_r$ 是 M 的一组基当且仅当矩阵 P 可逆。

作 业（10月13日）

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

练习2.2

1(2)，2(3,4)，3，4，6，8，10，11

10月18日提交

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~