第13讲

任意激励作用下动态电路的求解（2）

1 单位冲激响应

2 求任意激励作用下的零状态响应
——卷积积分

1 单位冲激响应

单位冲激响应：单位冲激激励在电路中产生的零状态响应。

方法1　由单位阶跃响应求单位冲激响应

推导见
课前推送

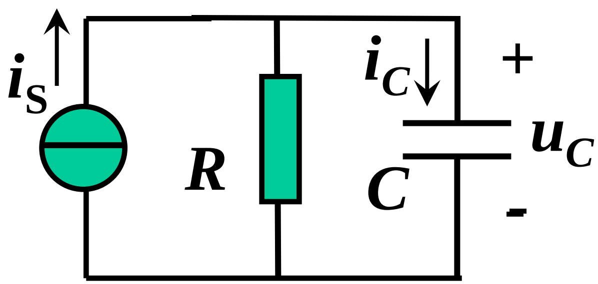
单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$ → 单位阶跃响应 $s(t)$

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{h(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}s(t)}$$

单位冲激函数 $\delta(t)$ → 单位冲激响应 $h(t)$

例1



已知： $u_C(0^-)=0$

求： 当$i_S(t)$为单位冲激时，电路响应$u_C(t)$和$i_C(t)$。

先求单位阶跃响应　令 $i_S(t)=\varepsilon(t)$

$u_C(0^+)=0$　　$u_C(\infty)=R$　　$\tau=RC$

$i_C(0^+)=1$　　$i_C(\infty)=0$

$$u_C(t)=R(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

$$i_C=\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

单位阶跃响应

$$u_C(t) = R(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t) \qquad i_C = \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

再求单位冲激响应　令 $i_S(t) = \delta(t)$

$$u_C(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)\right] = \underbrace{R(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})\delta(t)}_{0} + \frac{1}{C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$$= \frac{1}{C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$

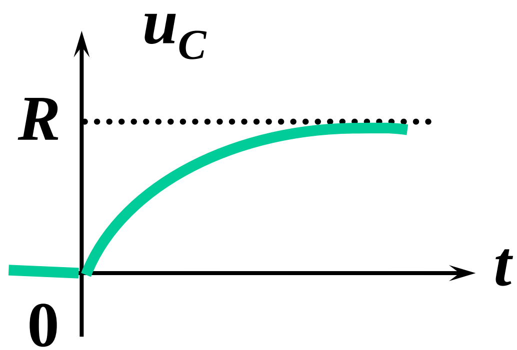
$$i_C(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)] = \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\delta(t) - \frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

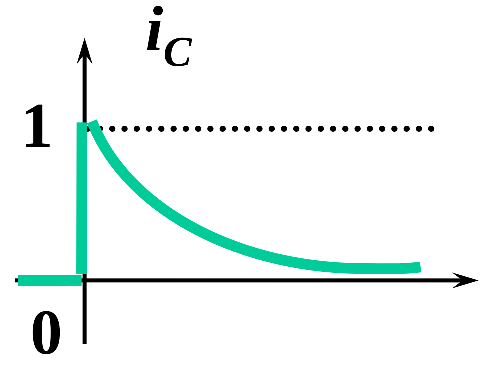
$$= \delta(t) - \frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

必须对表示为全时间轴（-∞，∞）形式的单位阶跃响应求导

单位阶跃响应

$$u_C(t) = R(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t) \qquad i_C = \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

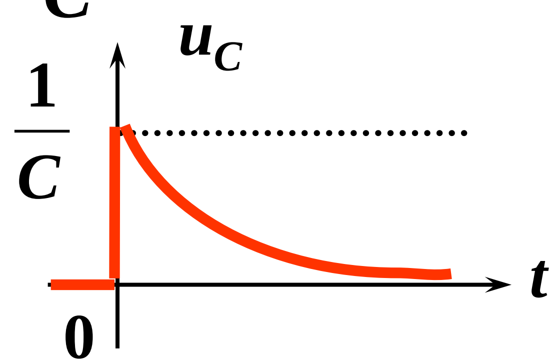


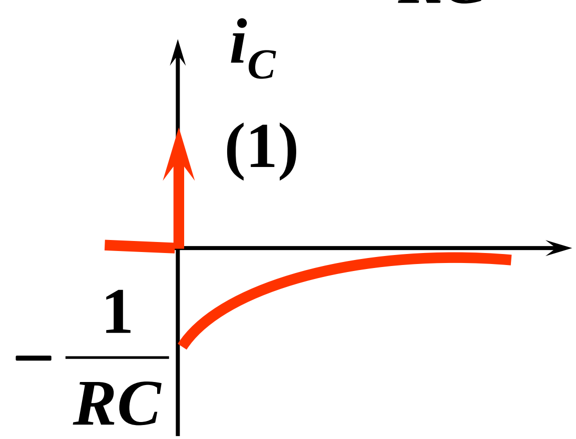


单位冲激响应

$$u_C = \frac{1}{C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t) \qquad i_C = \delta(t) - \frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

电路中，允许储能元件瞬时获得有限能量



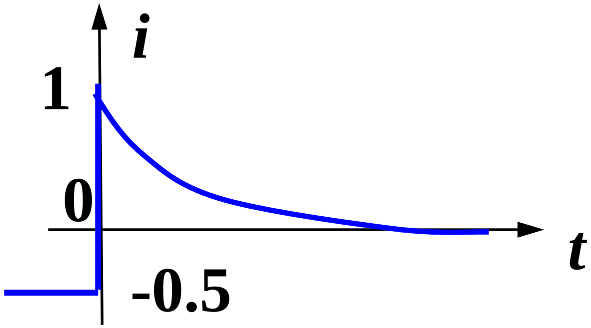


法1的关键是：支路量的单位阶跃响应在t=0时刻跳了多少

单选题 1分

设置

图示波形在求导时，
t=0时刻会出现____$\delta(t)$



A 0.5

B 1.5

C 1

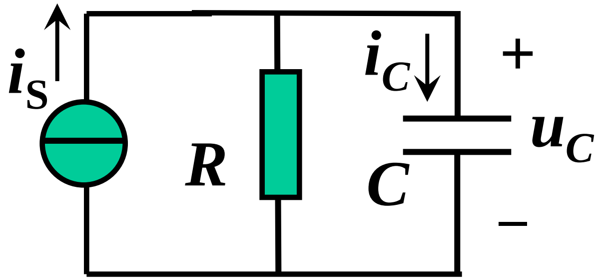
D -0.5

提交

方法2/3　分二个时间段来考虑冲激响应

$$t\begin{cases} 0^- \longrightarrow 0^+ & \text{冲激源作用使电容/电感瞬时获得能量} \\ \\ 0^+ \longrightarrow \infty & \text{零输入响应} \end{cases}$$

难点在于求 $u_C(0^+)$, $i_L(0^+)$ ！



$$u_C(0^+) = u_C(0^-) + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} i(\tau)\mathrm{d}\tau$$

求$u_C(0^+)$的关键是：0^-~0^+中i_C有没有冲激

因此关键是：外加的冲激源是否会在i_C上产生冲激

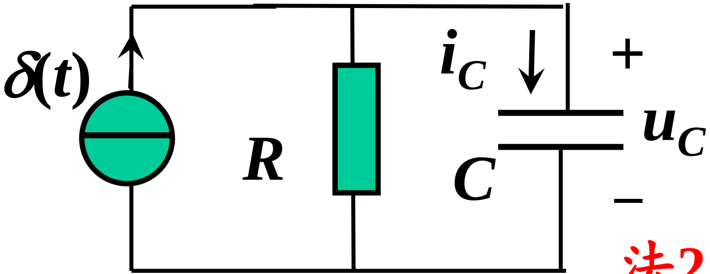
冲激源作用时，怎么看待C？

方法2　$\delta(t)$作用的那个瞬间，C视作某个有限值（比如0值）电压源（替代定理），看C上是否有冲激电流

u_C可能跳，但不会是冲激

0^-~0^+时有限值u_C产生有限值i_C，对$u_C(0^+)$无影响

例1

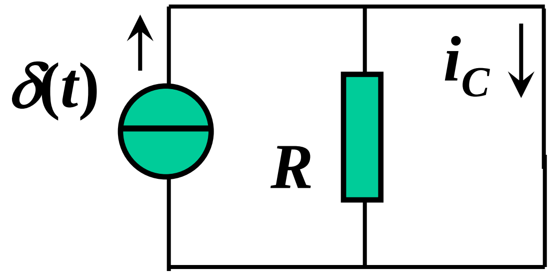


$u_C(0^-)=0$

已知如图（零状态）。
求响应$u_C(t)$、$i_C(t)$。

法2：$\delta(t)$作用的那个瞬间，C视作0值电压源

1. t 在 $0^- \longrightarrow 0^+$ 间



$i_C(0)=\delta(t)$

$$u_C(0^+)=u_C(0^-)+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} i_C\,\mathrm{d}t=0+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{C}$$

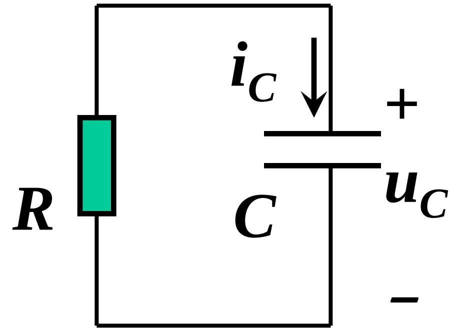
不等

$$u_C(0^-)=0$$

法2步骤：
(1) 画$\delta(t)$作用时电路(C短路)
(2) 求 i_C
(3) 积分关系求 u_C

电容电压
发生跳变

2. $t > 0^+$ 零输入响应 （*RC*放电）



$$u_C(0^+) = \frac{1}{C}$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \qquad t \geq 0^+$$

$$i_C(t) = -\frac{u_C}{R} = -\frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \qquad t \geq 0^+$$

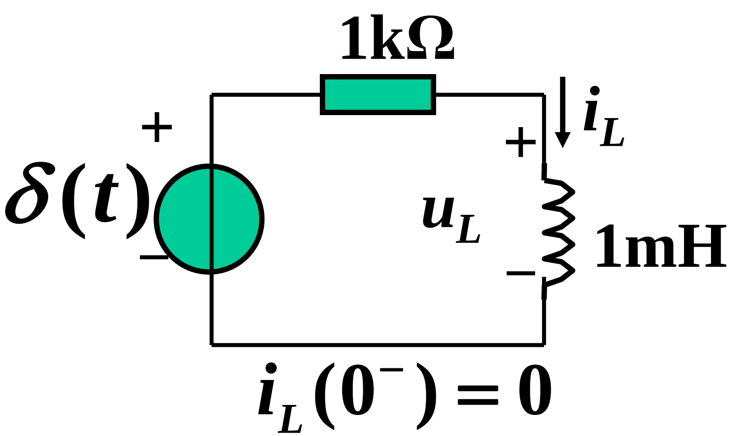
$$\begin{cases} u_C(t) = \dfrac{1}{C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t) \\ i_C(t) = \delta(t) - \dfrac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t) \end{cases}$$

单选题 1分

设置

$i_L(0^+)=$______A

"红包"



A 0

B 1

C 100

D 1000

提交

方法2/3　分二个时间段来考虑冲激响应

$$t\begin{cases} 0^- \longrightarrow 0^+ & \text{冲激电流（冲激电压）作用(可能)使电容（电感）瞬间获得能量} \\ \\ 0^+ \longrightarrow \infty & \text{零输入响应} \end{cases}$$

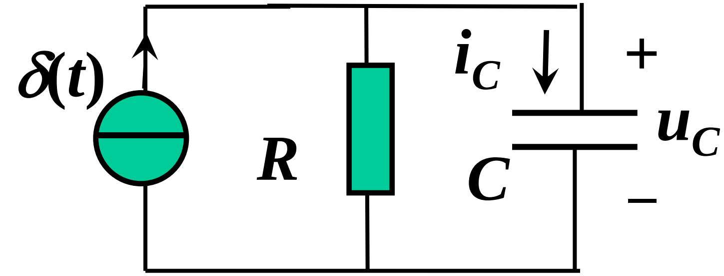
难点在于求 $u_C(0^+)$, $i_L(0^+)$ ！

方法3　列写方程，把冲激源的作用表现在方程里

从0^-~0^+范围求积分

1. t 在 $0^- \longrightarrow 0^+$间

法3： 列方程分析



$u_C(0^-)=0$

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\frac{u_C}{R}=\delta(t)$$

u_C 不可能是冲激函数，否则KCL不成立

$$\int_{0^-}^{0^+} C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+\underbrace{\int_{0^-}^{0^+}\frac{u_C}{R}\mathrm{d}t}_{=0}=\underbrace{\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\mathrm{d}t}_{=1}$$

$$C[u_C(0^+)-u_C(0^-)]=1$$

$$u_C(0^+)=\frac{1}{C}\neq u_C(0^-)$$

法3步骤：

(1)列写$0^-\sim 0^+$的方程

(2) $0^-\sim 0^+$积分求$u_C(0^+)$

(3)微分关系求i_C

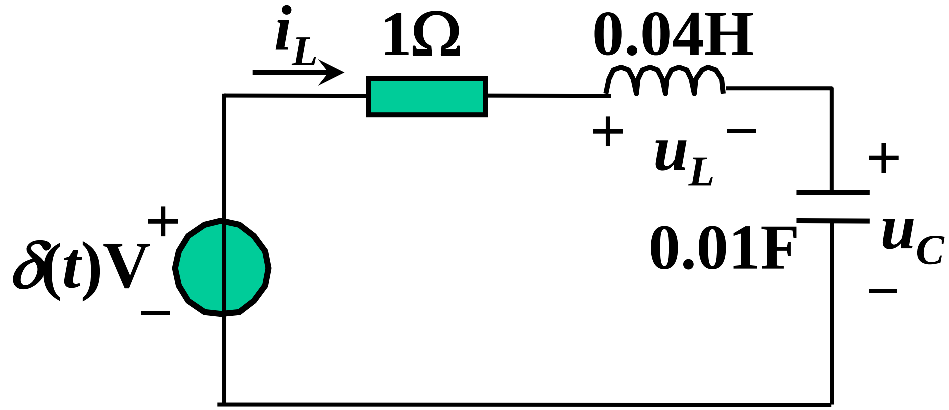
电容中的冲激电流使电容电压发生跳变

$$i_C=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=\delta(t)$$

例2：二阶冲激响应

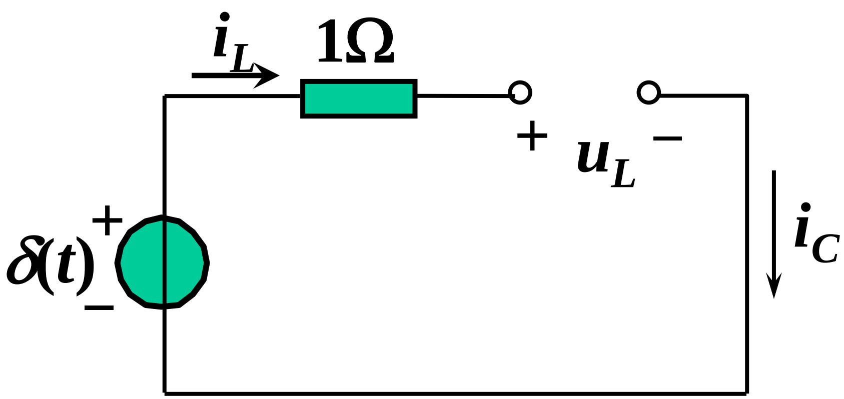
求图示电路中电压u_C。

$u_C(0^-)=0$ $\qquad$ $i_L(0^-)=0$



第1步 t 在 $0^- \longrightarrow 0^+$间

在0^-~0^+期间C为0值电压源，L为0值电流源



$$\boxed{i_C = 0}$$

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) + \frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} i_C \mathrm{d}t = 0$$

$$\boxed{u_L = \delta(t)\mathrm{V}} \qquad i_L(0^+) = i_L(0^-) + \frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+} u_L \mathrm{d}t = 25\ \mathrm{A}$$

第2步 $t > 0^+$ $\qquad$ 求二阶电路的零输入响应(略)

小结

单位冲激响应

$$h(t)=\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$$

$s(t)$： $t\in(-\infty,+\infty)$

分两个时间段:

$0^- \to 0^+$：确定初值 $\longrightarrow$

列方程分析

0^-~0^+积分

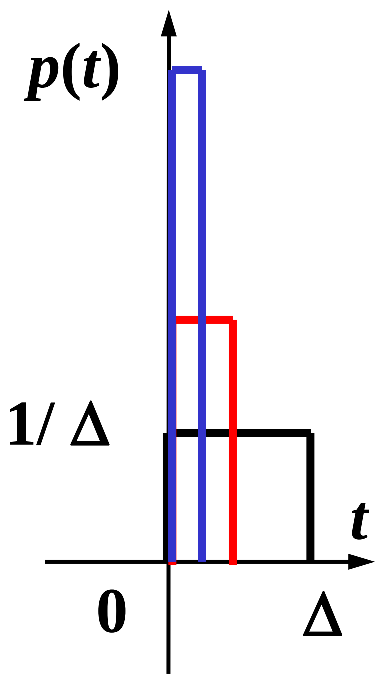
简便解法:

电容短路

电感开路

$0^+ \to +\infty$：零输入响应

复习一下表达式



单位脉冲函数

$$p(t)=\frac{1}{\Delta}\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\Delta)\right] \xrightarrow{\text{响应}} h_p(t)$$

单位脉冲响应

取极限 $\Delta \to 0$　$\frac{1}{\Delta} \to \infty$

$$\lim_{\Delta \to 0} p(t) = \delta(t) \xrightarrow[\text{响应}]{} h(t)$$

单位冲激函数

单位冲激响应

2　求任意激励下的零状态响应
——卷积积分

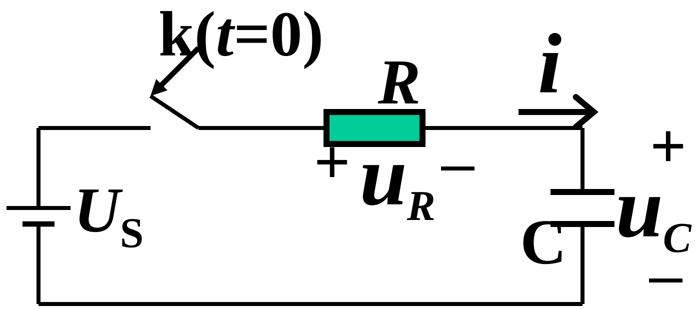
为什么要研究单位冲激响应?

- 求任意激励作用下动态电路零状态响应的需要。

  ——卷积积分

- 获取系统自身性质的需要。
  - 自动控制原理、信号与系统、数字信号处理等课程

（1）卷积积分的由来



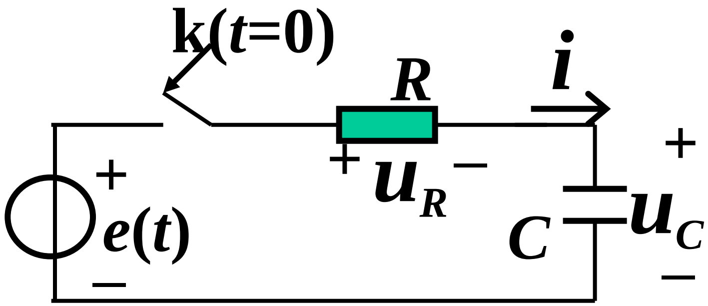
激励—响应线性关系

$u_C(0^-)=0$ 零状态

$$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \ge 0$$

激励	响应
U_S	$u_C = U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \ge 0$
$2U_S$	$u_C = 2U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \ge 0$
$U_{S1}+U_{S2}$	$u_C = (U_{S1}+U_{S2})(1-e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \ge 0$

利用这个性质求任意激励下电路的ZSR



求任意激励下电路的ZSR

2个基本观点：

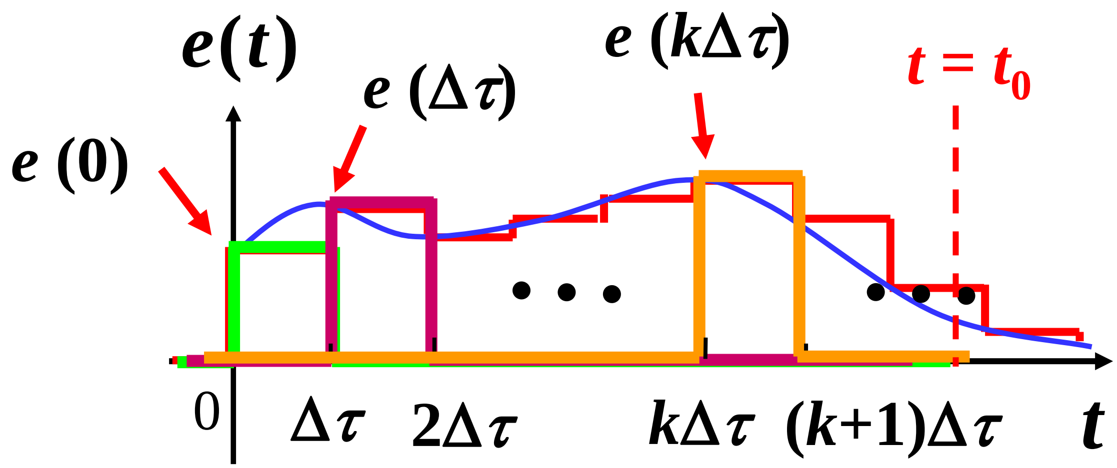
（1） 电路零状态，而且激励从0时刻施加，因此$t = t_0$时刻的响应是由$0 < t < t_0$时段的激励决定的

（2）t_0 时刻观察到的响应，应为 $0 \sim t_0$时间内所有激励产生的在t_0时刻响应之和

接下来，我们分别用叠加的思想来处理激励和响应求任意t_0时刻的响应

$0 < t < t_0$时段时间上分割

任意激励 ⟶ 若干脉冲函数(延时)之和



$$e(t) \approx e(0)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\Delta\tau)]+e(\Delta\tau)[\varepsilon(t-\Delta\tau)-\varepsilon(t-2\Delta\tau)]$$

$$\cdots+e(k\Delta\tau)[\varepsilon(t-k\Delta\tau)-\varepsilon(t-(k+1)\Delta\tau)]+\cdots$$

在$0 < t < t_0$时段将激励 $e(t)$看成一系列 (N个) 宽度为$\Delta\tau$，高度为 $e(k\Delta\tau)$矩形脉冲的和。

建立这个表达式和单位脉冲函数之间的关系

$$e(t) \approx e(0)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\Delta\tau)]+e(\Delta\tau)[\varepsilon(t-\Delta\tau)-\varepsilon(t-2\Delta\tau)]$$

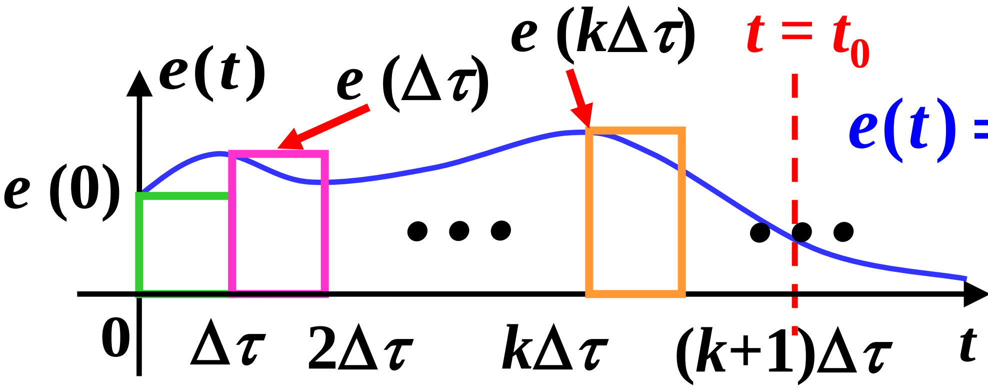
$$\cdots+e(k\Delta\tau)[\varepsilon(t-k\Delta\tau)-\varepsilon(t-\left(k+1\right)\Delta\tau)]+\cdots$$

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N-1} e(k\Delta\tau)[\varepsilon(t-k\Delta\tau)-\varepsilon(t-(k+1)\Delta\tau)]$$

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N-1} e(k\Delta\tau)\frac{1}{\Delta\tau}[\varepsilon(t-k\Delta\tau)-\varepsilon(t-(k+1)\Delta\tau)]\Delta\tau$$

单位脉冲函数的延时

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N-1} e(k\Delta\tau)p(t-k\Delta\tau)\Delta\tau \qquad 0<t<t_0$$



$$e(t)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N-1} e(k\Delta\tau)p(t-k\Delta\tau)\Delta\tau$$

若单位脉冲函数 $p(t)$ 的响应为 $h_p(t)$

第1个矩形脉冲 $e(0)p(t)\Delta\tau \quad \rightarrow e(0)h_p(t)\Delta\tau$

⋮

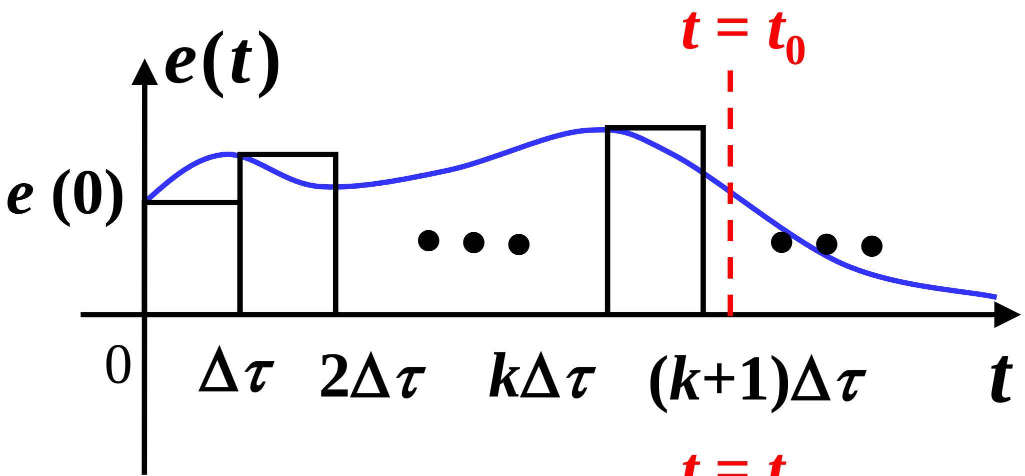
第k个矩形脉冲

$$e(k\Delta\tau)p(t-k\Delta\tau)\Delta\tau \quad \rightarrow e(k\Delta\tau)h_p(t-k\Delta\tau)\Delta\tau$$

齐性

非时变性

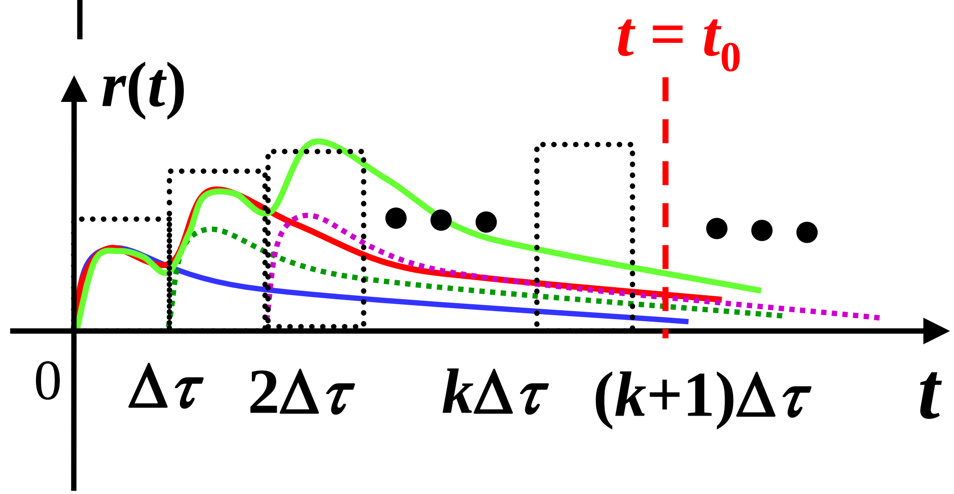
⋮



$k\Delta\tau$：脉冲作用时刻

t_0：观察响应时刻

假设在t_0时刻以前有N个脉冲的作用



t_0时刻观察到的响应应为$0 \sim t_0$时间内所有激励产生的在t_0时刻响应之和

响应 $$r(t_0) = \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} e(k\Delta\tau)\, h_p(t - k\Delta\tau)\Delta\tau \right)\Bigg|_{t=t_0}$$

可加性

响应

$$r(t_0)=\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N-1}e(k\Delta\tau)\,\underbrace{h_p(t-k\Delta\tau)}_{\text{单位脉冲响应}}\Delta\tau\right)\Bigg|_{t=t_0}$$

积分

$h(t-\tau)$

单位冲激响应

当$N\to\infty$时，$\Delta\tau\to\mathrm{d}\tau, k\Delta\tau\to\tau, \Sigma\to\int$

$$r(t_0)=\left(\int_0^{t_0}e(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right)\Bigg|_{t=t_0}$$

t 参变量

τ 积分变量

由t_0的任意性，得 $r(t)=\int_0^t e(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau=e(t)*h(t)$

在单位冲激响应$h(t)$帮助下，可求任意激励$e(t)$作用下电路的零状态响应

$$r(t)=\int_0^t e(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau = e(t)*h(t)$$

（2）卷积积分定义

定义 设 $f_1(t)$ ， $f_2(t)$ $t<0$ 均为零

$$\boxed{f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau}$$

（3）卷积积分性质

令 $\xi = t - \tau$

τ： 0 t

ξ： t 0

性质1 $$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

证明 $$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_t^0 f_1(t-\xi) f_2(\xi)(-\mathrm{d}\xi)$$

$$= \int_0^t f_1(t-\xi) f_2(\xi)\mathrm{d}\xi = f_2(t) * f_1(t)$$

性质2

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$$

性质3 $[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$

性质4 $f(t)*\delta(t)=\delta(t)*f(t)=\int_{0^-}^{t}\delta(\tau)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau=f(t)$

筛分性

上节课练习

$$f(t)*\delta(t-t_0)=\delta(t-t_0)*f(t)$$

$$=\int_{0^-}^{t}\delta(\tau-t_0)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau\overset{t>t_0}{=}f(t-t_0)$$

单选题 1分

设置

$$\left(t^2+2\right) * \delta(t-2) \overset{t>2}{=}$$

A $\left(t^2+2\right)$

B **2**

C **6**

D $\left((t-2)^2+2\right)$

提交

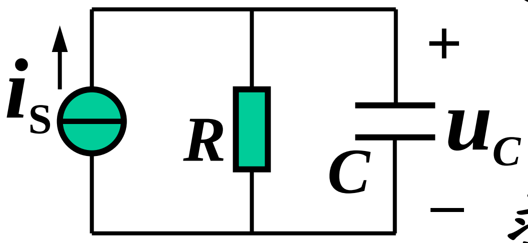
（3） 卷积积分的应用

$$r(t)=e(t)*h(t)$$

即 $$r(t)=\int_0^t e(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

单位冲激响应+卷积积分可求任意激励作用下电路的零状态响应

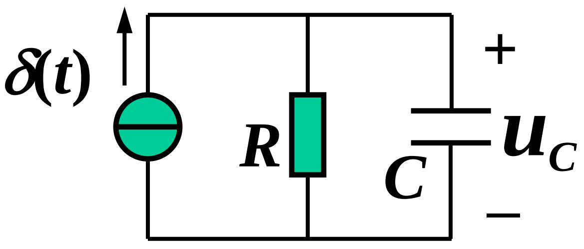
例3



已知：R=500 kΩ , C=1 μF , $u_C(0^-)=0$

$$i_S = 2e^{-t}\varepsilon(t)\mu A$$

求：电容电压$u_C(t)$。



解　先求该电路的单位冲激响应 $h(t)$

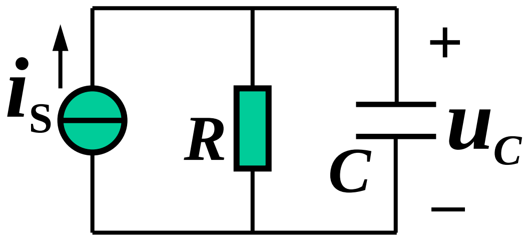
设　$i_S = \delta(t)\mu A$

$$u_C\left(0^+\right) = \frac{1}{C}\mu V=1V$$

$u_C(\infty)=0$

$$\tau = RC = 500\times10^3\times10^{-6} = 0.5\ s$$

$$\therefore h(t) = e^{-2t}\varepsilon(t)V$$



单位冲激响应

$$h(t) = \mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)\,\mathrm{V}$$

用卷积积分计算 $i_S = 2\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)\,\mu\mathrm{A}$ 作用下的响应 $u_C(t)$

$$u_C(t) = i_S(t) * h(t) = \int_0^t i_S(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_0^t 2\mathrm{e}^{-\tau} \times \mathrm{e}^{-2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau$$

$$= 2\mathrm{e}^{-2t}\int_0^t \mathrm{e}^{\tau}\mathrm{d}\tau = 2\mathrm{e}^{-2t}(\mathrm{e}^{t} - 1)$$

$$= (2\mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)\,\mathrm{V}$$

（4） 仅在有限时段存在非零函数的卷积积分

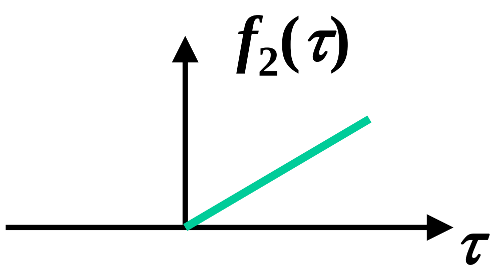
例4　已知 $f_1(t) = 2[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)]$　　$f_2(t) = \mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$

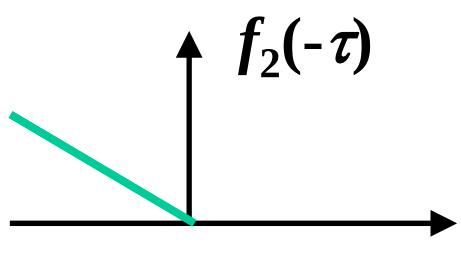
求　$f_1(t) * f_2(t)$

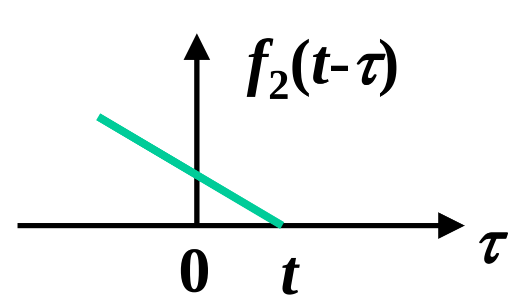
参变量(可视为常量)

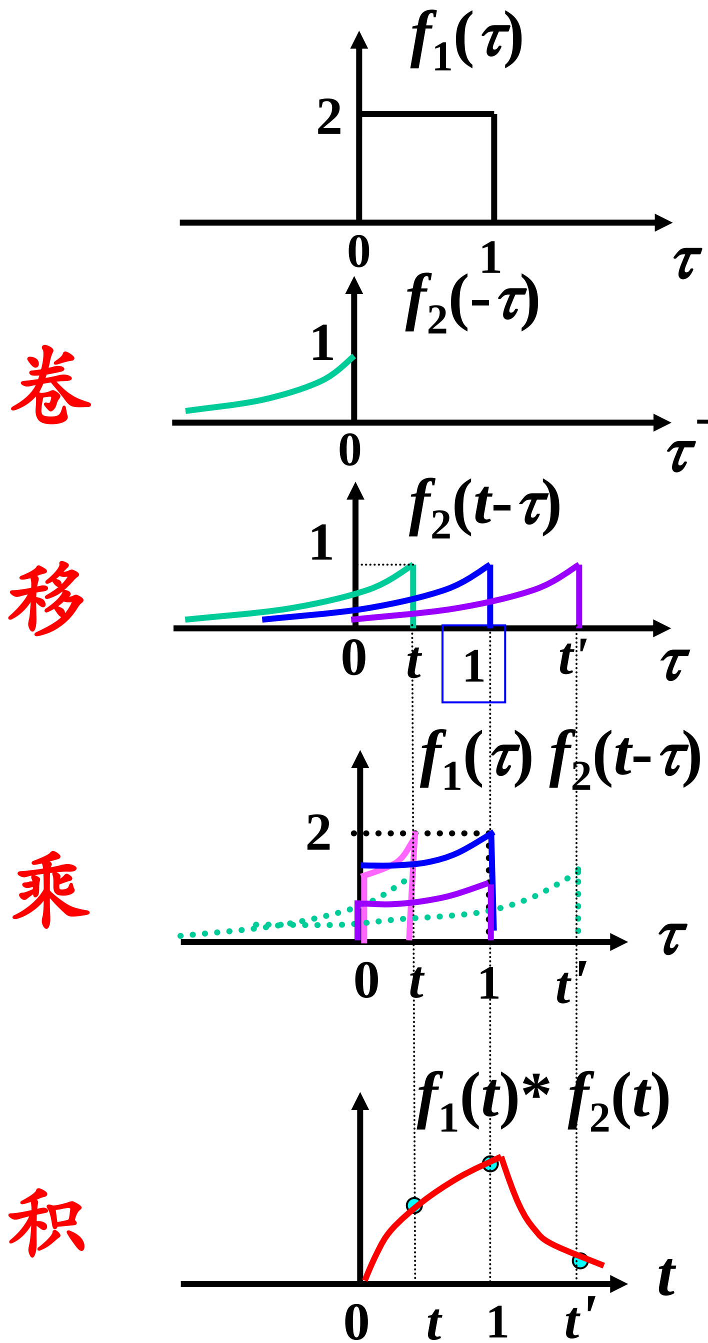
解　$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t \underbrace{f_1(\tau) f_2(t-\tau)}_{\text{被积函数}} \mathrm{d}\tau$　积分变量

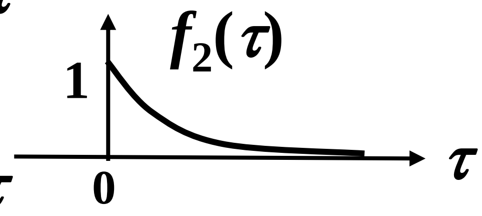
图解说明 $f_2(t\text{-}\tau)$　　　困难在于：$f_1(\tau)$的表达式是什么？











$$f_1(t) = 2[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)]$$

$$f_2(t) = \mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$$

$$f_1(t) * f_2(t)$$

$$= \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

卷积的几何意义：

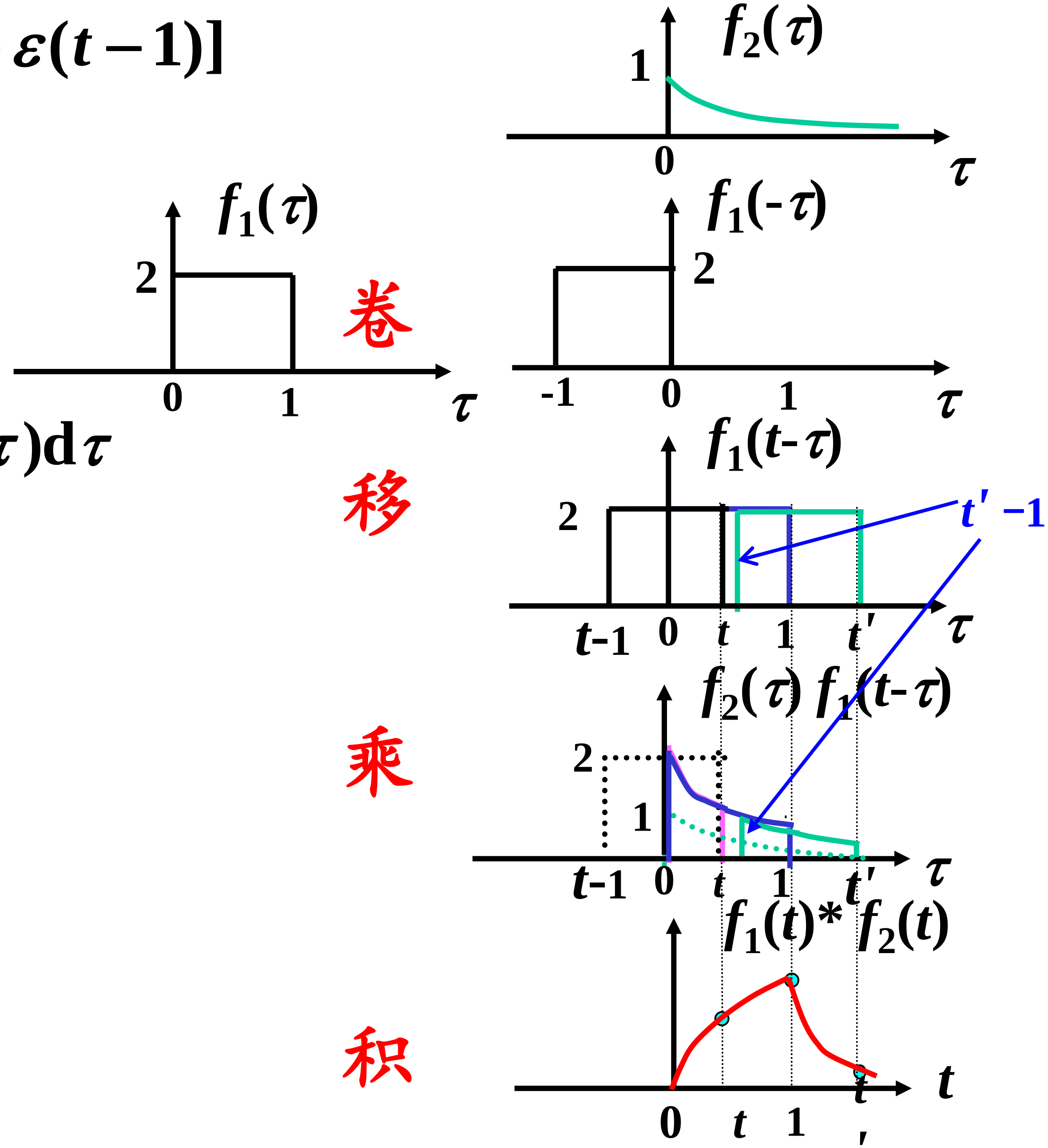
$f_2(t)$反褶的图形$f_2(-\tau)$在移动过程中$f_2(t-\tau)$不断与$f_1(\tau)$相乘得到的乘积图形的面积。

$$f_1(t) = 2[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)]$$

$$f_2(t) = \mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$$

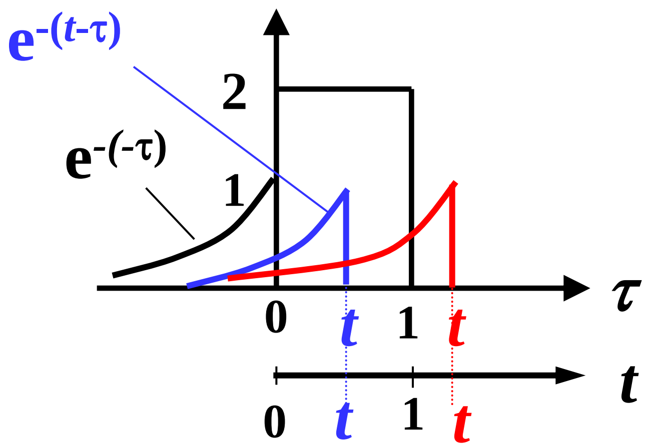
$$f_2(t) * f_1(t)$$

$$= \int_0^t f_2(\tau) f_1(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$



由图解过程确定时段划分(t轴)和积分上下限(τ轴，考虑t坐标)

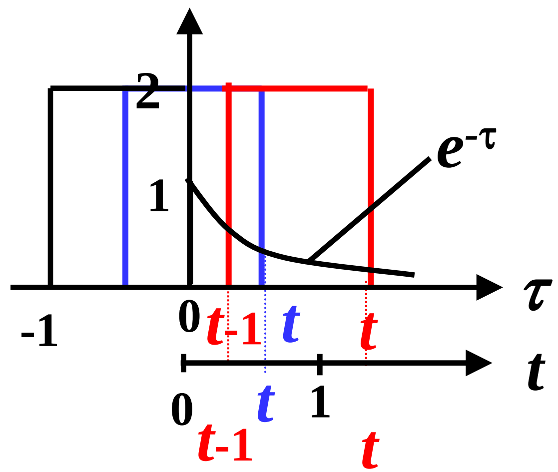
$$f_1(t) * f_2(t) = 2[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] * \mathrm{e}^{-t}$$



$t < 0 \qquad f(t) = 0$

$0 \le t \le 1 \qquad f(t) = \int_0^t 2\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau = 2 - 2\mathrm{e}^{-t}$

$t \ge 1 \quad f(t) = \int_0^1 2\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau = 2\mathrm{e}^{-(t-1)} - 2\mathrm{e}^{-t}$



$t < 0 \qquad f(t) = 0$

$0 \le t \le 1 \qquad f(t) = \int_0^t 2\mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{d}\tau = 2 - 2\mathrm{e}^{-t}$

$t \ge 1 \quad f(t) = \int_{t-1}^t 2\mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{d}\tau = 2\mathrm{e}^{-(t-1)} - 2\mathrm{e}^{-t}$

单选题 1分

设置

$f(1)=$____.

$t<0 \qquad f(t)=0$

$0\le t\le 1 \qquad f(t)=\int_0^t 2e^{-(t-\tau)}d\tau = 2-2e^{-t}$

$t\ge 1 \qquad f(t)=\int_0^1 2e^{-(t-\tau)}d\tau = 2e^{-(t-1)}-2e^{-t}$

A 0

B 1.26

C 2

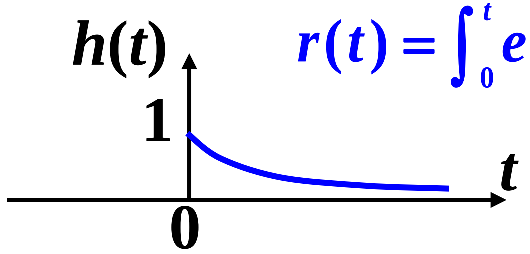
$e^{-1}=0.368$

提交

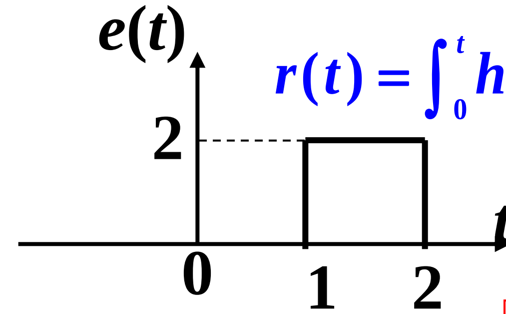
关键：$t=0$时$f(t-\tau)$在τ轴的什么位置?

这个怎么办?

从而确定 t 与 τ 的关系。

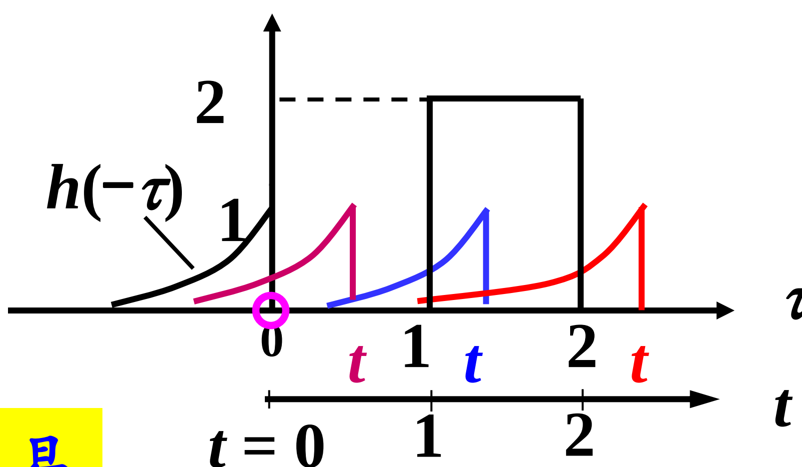


$$r(t)=\int_0^t e(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$



$$r(t)=\int_0^t h(\tau)e(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

思路1：$t=0 \rightarrow \tau=0$



易

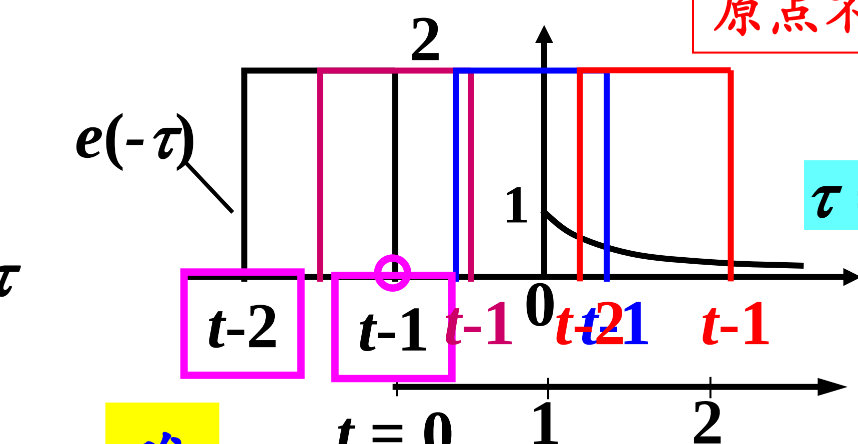
$0<t<1$ → 0

$1<t<2$ → $\int_1^t 2\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau = 2(1-\mathrm{e}^{1-t})$

$t>2$ → $\int_1^2 2\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau = 9.34\mathrm{e}^{-t}$

思路2：$t=0 \rightarrow \tau=-1$

t 轴与 τ 轴的原点不重合



$\tau=t-1$

难

$0<t<1$ → 0

$1<t<2$ → $\int_0^{t-1} 2\mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{d}\tau = 2(1-\mathrm{e}^{1-t})$

$t>2$ → $\int_{t-2}^{t-1} 2\mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{d}\tau = 9.34\mathrm{e}^{-t}$

卷积图解法总结

- 什么时候用
  - 被积函数仅在有限时段内有非零函数
- 怎么用
  - 卷、移、乘、积
  - t轴0点在卷后函数图形的右下角
    - 根据t轴定时段
  - t轴0点和τ轴0点定$\tau\sim t$关系
    - 随着t值增加，根据t值在τ轴上的位置定积分上下限
  - 卷无限时段有非零值的函数相对容易
  - 卷紧贴纵轴的函数相对较容易