(1) $\int_1^{+\infty} x^s e^{-x} dx \quad (a \le s \le b)$ 一致收敛，这是因为：

$x^s e^{-x} \le x^b e^{-x}, \forall x \ge 1, \forall s \in [a,b]$; 且 $\int_1^{+\infty} x^b e^{-x} dx$ 收敛; Weirstrass判别法.

(2) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos yx}{1+x^2} dx \quad (-\infty < y < +\infty)$ 一致收敛，这是因为：

$$\left|\frac{\cos yx}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{1+x^2}, \forall x \ge 1, \forall y \in \mathbb{R}; \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$ 收敛; Weirstrass判别法.

以 (1) 为例, 部分同学仔细说明了 $\int_1^{+\infty} x^b e^{-x} \mathrm{d}x$ 是收敛的, 但是却是这样证明的

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^b e^{-x}}{\frac{1}{x}} = 0$$

所以这个广义积分是收敛的. 这种证明方法是错误的, 因为 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$ 是发散的, 和 $\frac{1}{x}$ 做比的极限是 0 不能够推出无穷积分收敛, 典型的例子是 $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} \mathrm{d}x$ 是发散的.

(4) $\int_1^{+\infty} e^{-tx} \sin x dx \quad (0 < t_0 \le t < +\infty)$ 一致收敛，这是因为：

$\left|e^{-tx} \sin x\right| \le e^{-t_0 x}, \forall x \ge 1, \forall t \ge t_0 > 0; \int_1^{+\infty} e^{-t_0 x} dx$ 收敛; Weirstrass判别法.

（也可以用 Dirichlet 判别法）

$(10)\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x^p}dx\quad(0\le p<3)$ 非一致收敛 $\left(p\ge 3\text{时},\int_0^1\frac{\sin x^2}{x^p}dx\text{发散}\right)$，这是因为:

$$\forall p\ge 0,\frac{1}{x^{p+1}}\text{关于}x\text{单调};$$

$$\text{当}x\to+\infty\text{时},\frac{1}{x^{p+1}}(\le\frac{1}{x})\text{关于}p\ge 0\text{一致收敛到}0;$$

$$\left|\int_1^A x\sin x^2dx\right|\le 2;$$

由 Dirichlet 判别法，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x^p}\mathrm{d}x$ 对 $0\le p<3$ 一致收敛。因此，要证 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x^p}\mathrm{d}x(0\le p<3)$ 非一致收敛，只要证 $\int_0^1\frac{\sin x^2}{x^p}\mathrm{d}x(0\le p<3)$ 非一致收敛。后者可用以下两种方法证明:

法一：一致收敛的定义（或 Cauchy 准则）。

$$\exists\varepsilon=\frac{1}{\pi},\forall 0<\delta<\frac{1}{2},\exists p\in(2,3),s.t.\delta^{3-p}=\frac{1}{2}.\text{于是}$$

$$\int_0^\delta\frac{\sin x^2}{x^p}dx=\int_0^\delta\frac{\sin x^2}{x^2}x^{2-p}dx\ge\frac{2}{\pi}\int_0^\delta x^{2-p}dx=\frac{2}{\pi(3-p)}\delta^{3-p}>\frac{1}{\pi}.$$

法二：利用第 6 题结论。

$$p=3\text{时},\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\sin x^2}{x^p}}{\frac{1}{x}}=1,\int_0^1\frac{1}{x}dx\text{发散},\text{则}\int_0^1\frac{\sin x^2}{x^3}dx\text{发散}.$$

注: 这个题目本身是对 $0\le p<+\infty$ 讨论一致收敛性. 这个积分本身可以拆成一个瑕积分和一个无穷积分, 我们容易知道,$p\ge 3$ 时, 瑕积分是发散的. 所以如果仅仅针对这个题目而言, 我们可以说 $p\ge 3$ 时这个积分不收敛, 更谈不上在 $0\le p<+\infty$ 上一致收敛, 这样直接做完这个题目是没问题的. 但解答中讨论 $p\in[0,3)$ 时的一致收敛性的方法也值得学习.

另外这个题目实际还告诉我们了一个结论就是

$$\int_1^\infty\sin(x^2)\mathrm{d}x$$

这个无穷积分是收敛的. 这是无穷积分收敛但无穷远处的极限不为 0 的一个例子.

5. 证明$\int_0^{+\infty} e^{-tx}\dfrac{\sin 3x}{x+t}\,dx \quad (0\le t<+\infty)$一致收敛。

证明： $\forall t\ge 0, \dfrac{e^{-tx}}{x+t}$在$x\in(0,+\infty)$上单调；

$x\to+\infty$时，$\dfrac{e^{-tx}}{x+t}\left(\le\dfrac{1}{x}\right)$关于$t\in[0,+\infty)$一致收敛到$0$；

$\left|\int_0^{\mathrm{A}}\sin 3x\,dx\right|\le\dfrac{2}{3},\forall \mathrm{A}>0.$

由 Dirichelt 判别法，$\int_0^{+\infty} e^{-tx}\dfrac{\sin 3x}{x+t}\,dx \quad (0\le t<+\infty)$一致收敛。

8. 证明: 积分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin tx}{x}\mathrm{d}x$ 在包含 $t=0$ 的区间上不一致收敛.

证明: 区间 I 是包含 $t=0$ 的区间, 则至少 $t=0$ 的一侧有正的长度包含在 I 中, 不妨设某个 $\delta>0$ 使得 $[0,\delta]\subset I$. 设 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{10}$, 对任意的 $M>0$, 我们取 $0<t_0<\min\{\delta,\dfrac{\pi}{4M}\}$, 以及 $A'=\dfrac{\pi}{4t_0}$,$A''=\dfrac{3\pi}{4t_0}$, 此时有 $t_0\in I$,$A''>A'>M$, 以及

$$\int_{A'}^{A''}\frac{\sin(tx)}{x}\mathrm{d}x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{A'}^{A''}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(\frac{A''}{A'})=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 3.$$

而 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln 3\approx 0.7768>\varepsilon_0$. 所以该积分不一致收敛.

(1) $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

解答. 注意到

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{1}{1+x^2y^2}\,\mathrm{d}y\\ =&\frac{1}{x}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2y^2}\,\mathrm{d}(xy)\\ =&\frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ =&\frac{\arctan x}{x},\end{aligned}$$

我们有原式

$$\begin{aligned}&=\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^2y^2}\,\mathrm{d}y\right)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\\ &=\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^2y^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中由

$$\int_0^1\left|\frac{1}{1+x^2y^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right|\mathrm{d}x\le\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

由 Weierstrass 判别法知一致收敛, 故累次积分可交换次序.

作换元 $x=\sin t$, 有

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{1}{1+x^2y^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\\ =&\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{1+y^2\sin^2 t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\int_0^{\pi/2}\frac{-\mathrm{d}(\cot t)}{\csc^2 t+y^2}\\ &=\int_0^{\pi/2}\frac{-\mathrm{d}(\cot t)}{\cot^2 t+1+y^2}\\ &=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+1+y^2}\\ &=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1+y^2}}\right)\Bigg|_0^{+\infty}\\ &=\frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}},\end{aligned}$$

进而有原式

$$\begin{aligned}&=\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\,\mathrm{d}y\\ &=\frac{\pi}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1\\ &=\frac{\pi\ln(1+\sqrt{2})}{2}.\end{aligned}$$

注:此方法来自于交叉信息院李白天同学.

方法二:

解：（1） 令$I(t)=\int_0^1 \frac{\arctan(tx)}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$, 则$I(0)=0$,欲求$I(1)$.

$$\forall t\in[0,1], \lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan(tx)}{x\sqrt{1-x^2}}=t;\quad \forall t\in(0,1], \lim_{x\to 1^-}\frac{\arctan(tx)}{x\sqrt{1-x^2}}=+\infty.$$

因此 0 不是积分的瑕点，1 是瑕点。

$$0\le \frac{\arctan(tx)}{x\sqrt{1-x^2}}\le \frac{tx}{x\sqrt{1-x^2}}\le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad \forall t\in[0,1], \forall x\in(0,1).$$

由Weirstrass判别法,$\int_0^1 \frac{\arctan(tx)}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ 关于$t\in[0,1]$一致收敛. 又由 Able 判别法可知，

$\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2x^2)\sqrt{1-x^2}}dx$ 关于$t\in[0,1]$一致收敛。因此

$$I'(t)=\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2x^2)\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{1+t^2\sin^2\theta}=\int_0^{\pi/2}\frac{\csc^2\theta d\theta}{\csc^2\theta+t^2}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{-d\cot\theta}{1+t^2+\cot^2\theta}=\frac{-1}{\sqrt{1+t^2}}\arctan\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+t^2}}\bigg|_{\theta=0}^{\pi/2}=\frac{\pi}{2\sqrt{1+t^2}}.$$

$$I(1)=\int_0^1 \frac{\pi}{2\sqrt{1+t^2}}dt=\frac{\pi}{2}\ln(t+\sqrt{1+t^2})\bigg|_{t=0}^{1}=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

$(2)\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin yx dx \ \ (a>0)$

(2) $a>0$, 令 $I(t)=\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin tx dx \ (t\in\mathbb{R})$. 因为

$$\left|xe^{-ax^2}\sin tx\right|\le xe^{-ax^2},\quad \forall x\ge 0,\forall t\in\mathbb{R},$$

$I(t)=\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin tx dx$ 关于 $t\in\mathbb{R}$ 一致收敛(Weirstrass). 于是,

$$J(y)=\int_0^y I(t)dt=\int_0^y dt\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin tx dx=\int_0^{+\infty} dx\int_0^y xe^{-ax^2}\sin tx dt$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}(1-\cos yx)dx=\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx-\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos yx dx$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}-\frac{1}{y}e^{-ax^2}\sin yx\bigg|_{x=0}^{+\infty}-\frac{1}{y}\int_0^{+\infty} 2axe^{-ax^2}\sin yx dx$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}-\frac{2a}{y}I(y)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}-\frac{2a}{y}J'(y),\qquad \forall y\ne 0.$$

于是

$$J(y)-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}=-\frac{2a}{y}\left(J(y)-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)',\qquad J(y)-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}=ce^{\frac{-y^2}{4a}}.$$

由 $J(0)=0$, 得

$$c=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},\quad J(y)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{-y^2}{4a}},\qquad I(y)=J'(y)=\frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}ye^{\frac{-y^2}{4a}}.$$

(1) $\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}x^{2n}dx \ (t>0, n$ 为非负整数),

解：(1) 任意给定 $b>a>0$, 有

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}dx=\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}t^{-\frac{1}{2}},\qquad \forall t\in[a,b].$$

由Weirstrass判别法, 对非负整数 m, $\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}x^m dx$ 关于 $t\in[a,b]$ 一致收敛。因此上式左端对 t 求导可与积分运算交换次序。左右两端对 t 求 n 次导，得

$$\int_0^{+\infty}(-x^2)^n e^{-tx^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2n-1}{2})t^{-\frac{2n+1}{2}},\qquad \forall t\in[a,b].$$

即 $$\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-tx^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}(2n-1)!!}{2^{n+1}}t^{-\frac{2n+1}{2}},\qquad \forall t\in[a,b].$$

由 $b>a>0$ 的任意性得 $$\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-tx^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}(2n-1)!!}{2^{n+1}}t^{-\frac{2n+1}{2}},\qquad \forall t>0.$$