



# Review

- 极限与连续
- 判断函数在一点没有极限的方法
- 连续函数在有界闭集上的性质
- ( $n$ 重)极限与累次极限
- $o(\|x - x_0\|^k)$  与  $O(\|x - x_0\|^k)$ ,  $x \rightarrow x_0$  时.



## § 4. 多元函数的偏导数与全微分

### 1. 偏导数

**Def.**  $u = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  在  $x_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$  的某个邻域中有定义, 若极限

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(i-1)}, \mathbf{x}_0^{(i)} + \Delta x_i, x_0^{(i+1)}, \dots, x_0^{(n)}) - f(x_0)}{\Delta x_i}$$

存在, 则称之为  $f(x, y)$  在  $x_0$  关于  $x_i$  的偏导数, 记作  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0), \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x_0}, \left. \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{x_0}, u'_{x_i}(x_0) \text{ 或 } f'_{x_i}(x_0).$$



**Remark:** 二元函数 $f(x, y)$ 偏导数的几何意义.

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

**Remark:** 1) 对某个变量求偏导数时, 视其余变量为常数, 按一元函数求导法则和公式去求.

2) 求分段函数的偏导函数时, 用定义求分界点处的偏导数, 用1) 中方法求其它点处的偏导数. 一般地, 分段函数的偏导函数仍为分段函数.

**Remark:** 视 $x_0$ 为变量, 得偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x), i = 1, 2, \dots, n.$



例. 设  $f(x, y) = \begin{cases} (x+y)^2 \sin \frac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ , 求  $f'_x(x, y)$ .

解:  $f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x^2}}{x} = 0.$

$x^2 + y^2 \neq 0$  时,

$$f'_x(x, y) = 2(x+y) \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x(x+y)^2}{(x^2+y^2)^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}. \quad \square$$



例.  $f(x, y) = x^2 e^y + (x-1) \arctan \frac{y}{x}$ , 求  $f'_x(1, 0)$ .

解法一:  $f(x, 0) = x^2$ , 所以  $f'_x(1, 0) = 2$ .

解法二:

$$f'_x(x, y) = 2xe^y + \arctan \frac{y}{x} + (x-1) \cdot \frac{\frac{-y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$
$$= 2xe^y + \arctan \frac{y}{x} + \frac{y(1-x)}{x^2 + y^2}.$$

所以  $f'_x(1, 0) = 2$ .  $\square$

Remark: 求具体点处的偏导数时, 第一种方法较好.



**Remark:** 多元函数偏导数存在与连续性互不蕴含.

例: 设  $f(x, y) = \begin{cases} 1 & y = x^2, x > 0 \\ 0 & \text{其它情形} \end{cases}$ , 则  $f(x, 0) \equiv f(0, y) \equiv 0$ ,

$f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ , 但  $f$  在  $(0, 0)$  不连续.

例:  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  在原点连续, 但  $f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)$

都不存在. 事实上,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$  与

$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{y^2}}{y}$  都不存在.  $\square$



例.  $z = f(x, y), \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y, f(x, x^2) = 1$ , 求  $f(x, y)$ .

解: 由  $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$ , 将  $x$  看成常数, 两边对  $y$  积分, 得

$$z = f(x, y) = \int (x^2 + 2y) dy = x^2 y + y^2 + g(x),$$

其中  $g(x)$  为待定函数. 由  $f(x, x^2) = 1$ , 有

$$g(x) = 1 - 2x^4,$$

$$f(x, y) = 1 + x^2 y + y^2 - 2x^4. \square$$



## 2. 全微分

### 1) 一元函数的微分

以直代曲  
近似计算

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0) &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \\ &= f'(x_0)\Delta x + \alpha,\end{aligned}$$

其中  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\Delta x} = 0$ , 即  $\alpha = o(\Delta x)$ , 当  $\Delta x \rightarrow 0$  时. 记

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx.$$





## 2) 二元函数的微分

推广一元微分的概念, 形式上应该有,

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= (a, b) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + \alpha,\end{aligned}$$

几何直观?

其中  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$ , 即

$$\alpha = o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right), \quad \Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0 \text{ 时.}$$

这里的  $a, b$  应该与  $f$  在  $(x_0, y_0)$  的两个一阶偏导数有关.



### 3) $n$ 元函数的微分

**Def.**  $u = f(x)$  在  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  的某邻域中定义, 若存在常数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , s.t. 当  $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n) \rightarrow 0$  时,

$$\begin{aligned}\Delta u(x_0) = \Delta f(x_0) &\triangleq f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \\ &= a_1 \Delta x_1 + a_2 \Delta x_2 + \dots + a_n \Delta x_n + o(\|\Delta x\|),\end{aligned}$$

则称  $u = f(x)$  在点  $x_0$  **可微**, 称  $a_1 \Delta x_1 + a_2 \Delta x_2 + \dots + a_n \Delta x_n$  为  $f$  在  $x_0$  的**(全)微分**, 记作

$$du(x_0) = df(x_0) = a_1 \Delta x_1 + a_2 \Delta x_2 + \dots + a_n \Delta x_n,$$

或

$$du(x_0) = df(x_0) = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \dots + a_n dx_n.$$



**Remark:**  $f$  在  $x_0$  可微  $\Leftrightarrow \exists$  常数  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}, s.t.$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a_1 \Delta x_1 - a_2 \Delta x_2 - \dots - a_n \Delta x_n}{\|x - x_0\|} = 0.$$

**例.**  $f$  为有界函数, 即  $\exists M > 0$ , 使得  $|f(x, y)| \leq M, \forall (x, y)$ , 则

$g(x, y) = (x^2 + y^2)^{3/2} f(x, y)$  在  $(0, 0)$  可微.

**Proof.** 
$$\frac{|g(x, y) - g(0, 0)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|(x^2 + y^2)^{3/2} f(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= (x^2 + y^2) |f(x, y)| \leq M(x^2 + y^2) \rightarrow 0, \text{ 当 } (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ 时. } \square$$



**Thm.**  $u = f(x)$  在  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  可微, 则

1)  $f$  在  $x_0$  连续,

2)  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$  存在,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 且  $f$  在  $x_0$  的全微分为

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)dx_n.$$

**Proof:** 记  $f$  在  $x_0$  的全微分为  $du = a_1dx_1 + a_2dx_2 + \dots + a_ndx_n$ .

$$1) f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = a_1\Delta x_1 + a_2\Delta x_2 + \dots + a_n\Delta x_n + o(\|\Delta x\|) \\ \rightarrow 0, \text{ 当 } \Delta x \rightarrow 0 \text{ 时.}$$

故  $f$  在  $x_0$  连续.



2) 当 $\Delta x = (\Delta x_1, 0, 0, \dots, 0)$ 时, 由可微的定义,

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = a_1 \Delta x_1 + a_2 \Delta x_2 + \dots + a_n \Delta x_n + o(\|\Delta x\|)$$

$$\Delta_{x_1} f(x_0) = a_1 \Delta x_1 + o(|\Delta x_1|),$$

于是, 
$$f'_{x_1}(x_0) = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_1} f(x_0)}{\Delta x_1} = a_1.$$

同理, 
$$f'_{x_i}(x_0) = a_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

故 $f$ 在 $x_0$ 的全微分为

$$du(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) dx_n. \square$$



**Remark:** 函数的连续性与偏导数的存在性不蕴含函数的可微性.

**例.** 讨论  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  在原点的

连续性、可微性、偏导数的存在性与连续性.

**解:** 1)  $f$  在  $(0, 0)$  连续.

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq |x| \rightarrow 0 = f(0, 0), \quad (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ 时.}$$



$$2) \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \begin{cases} \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

$f'_x$  在  $(0, 0)$  存在但不连续. 同理,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \begin{cases} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

$f'_y$  在  $(0, 0)$  存在但不连续.



3)  $f$  在  $(0,0)$  不可微. 若可微, 则

$$\begin{aligned}\Delta f(0,0) &= \frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \\ &= 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right), \Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0 \text{ 时.}\end{aligned}$$

$$\text{故 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0.$$

$$\text{这与 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y = \Delta x} \frac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \frac{1}{2} \text{ 矛盾. } \square$$





例.  $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$  在原点的

连续性、可微性、偏导数的存在性与偏导函数的连续性.

解: 1)  $f$  在  $(0, 0)$  连续.

$$2) f(x, 0) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x^2} = 0;$$



当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时,

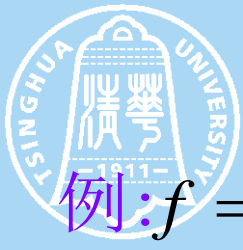
$$f'_x(x, y) = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f'_x(x, y)$  不存在, 故 $f'_x(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 不连续.

同理 $f'_y(0, 0) = 0$ , 但 $f'_y$ 在 $(0, 0)$ 不连续.

3)  $f$ 在 $(0, 0)$ 可微. 事实上,

$$\begin{aligned} \Delta f(0, 0) - f'_x(0, 0)\Delta x - f'_y(0, 0)\Delta y \\ &= ((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) \sin \frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ &= o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right), \Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0 \text{ 时. } \square \end{aligned}$$



例:  $f = \sqrt{\sin|xy|}$  在原点的连续性、偏导数与可微性.

解:  $f$  在原点连续.

• 因  $f(x, 0) \equiv 0, f(0, y) \equiv 0$ , 故  $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ .

• 若  $f$  在原点可微, 则  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{\sin|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{而 } \lim_{\substack{y=kx \\ x \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{\sin|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{\substack{y=kx \\ x \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{\sin|xy|}}{\sqrt{|xy|}} \lim_{\substack{y=kx \\ x \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \sqrt{|k|} / \sqrt{1 + k^2}, \end{aligned}$$

矛盾, 故  $f$  在原点不可微.  $\square$



### 3. 函数在一点可微的充要条件

**Thm.**  $n$ 元函数  $f(x)$  在  $x_0 \in \mathbb{R}$  可微的充要条件是

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(x_0) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \Delta x_i,$$

其中  $\varepsilon_i$  为  $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$  的  $n$  元函数,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 且

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

**Proof:** (必要性) 若  $f(x)$  在  $x_0$  可微, 则

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(x_0) \Delta x_i + \alpha,$$

其中  $\alpha = o(\|\Delta x\|)$ , 当  $\Delta x \rightarrow 0$  时.



则

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha \cdot \operatorname{sgn}(\Delta x_i)}{|\Delta x_1| + \cdots + |\Delta x_n|} \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \Delta x_i,$$

$$\text{其中 } \varepsilon_i = \frac{\alpha \cdot \operatorname{sgn}(\Delta x_i)}{|\Delta x_1| + \cdots + |\Delta x_n|}, i = 1, 2, \cdots, n.$$

$$\begin{aligned} |\varepsilon_i| &= \frac{|\alpha|}{|\Delta x_1| + \cdots + |\Delta x_n|} \\ &= \frac{|\alpha|}{\|\Delta x\|} \cdot \frac{\|\Delta x\|}{|\Delta x_1| + \cdots + |\Delta x_n|} \leq \frac{|\alpha|}{\|\Delta x\|} \end{aligned}$$

$$\text{故 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\varepsilon_i| = 0, \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_i = 0, i = 1, 2, \cdots, n.$$



(充分性) 设

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(x_0) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \Delta x_i,$$

其中  $\varepsilon_i$  为  $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$  的  $n$  元函数,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 且

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \Delta x_i \right|}{\|\Delta x\|} &\leq \frac{(|\varepsilon_1| + \dots + |\varepsilon_n|)(|\Delta x_1| + \dots + |\Delta x_n|)}{\|\Delta x\|} \\ &\leq n(|\varepsilon_1| + \dots + |\varepsilon_n|), \quad \rightarrow 0, \text{ 当 } \Delta x \rightarrow 0 \text{ 时.} \end{aligned}$$

故  $f(x)$  在  $x_0$  可微.  $\square$



**Thm.**  $f'_{x_i}$  在  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  连续,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 则  $f$  在  $x_0$  可微.

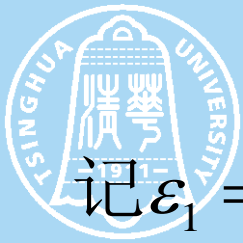
**Proof:** 记  $e_i, i = 1, \dots, n$ , 为  $\mathbb{R}^n$  的自然基,  $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$ ,

则

$$\begin{aligned} & f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \\ &= f(x_0 + \Delta x_1 e_1) - f(x_0) \\ &\quad + f(x_0 + \Delta x_1 e_1 + \Delta x_2 e_2) - f(x_0 + \Delta x_1 e_1) \\ &\quad + \dots + f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 + \Delta x_1 e_1 + \dots + \Delta x_{n-1} e_{n-1}) \end{aligned}$$

由一元函数的微分中值定理,  $\exists \theta_i \in (0, 1), i = 1, 2, \dots, n, s.t.$

$$\begin{aligned} & f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \\ &= f'_{x_1}(x_0 + \theta_1 \Delta x_1 e_1) \Delta x_1 + f'_{x_2}(x_0 + \Delta x_1 e_1 + \theta_2 \Delta x_2 e_2) \Delta x_2 \\ &\quad + \dots + f'_{x_n}(x_0 + \Delta x_1 e_1 + \dots + \Delta x_{n-1} e_{n-1} + \theta_n \Delta x_n e_n) \Delta x_n \end{aligned}$$



$$\text{记 } \varepsilon_1 = f'_{x_1}(x_0 + \theta_1 \Delta x_1 e_1) - f'_{x_1}(x_0),$$

$$\varepsilon_2 = f'_{x_2}(x_0 + \Delta x_1 e_1 + \theta_2 \Delta x_2 e_2) - f'_{x_2}(x_0),$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon_n = f'_{x_n}(x_0 + \Delta x_1 e_1 + \cdots + \Delta x_{n-1} e_{n-1} + \theta_n \Delta x_n e_n) - f'_{x_n}(x_0),$$

$$\text{则 } f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(x_0) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \Delta x_i,$$

其中  $\varepsilon_i$  为  $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n)$  的  $n$  元函数,  $i = 1, 2, \cdots, n$ .

由  $f'_{x_i}$  在  $x_0$  的连续性,

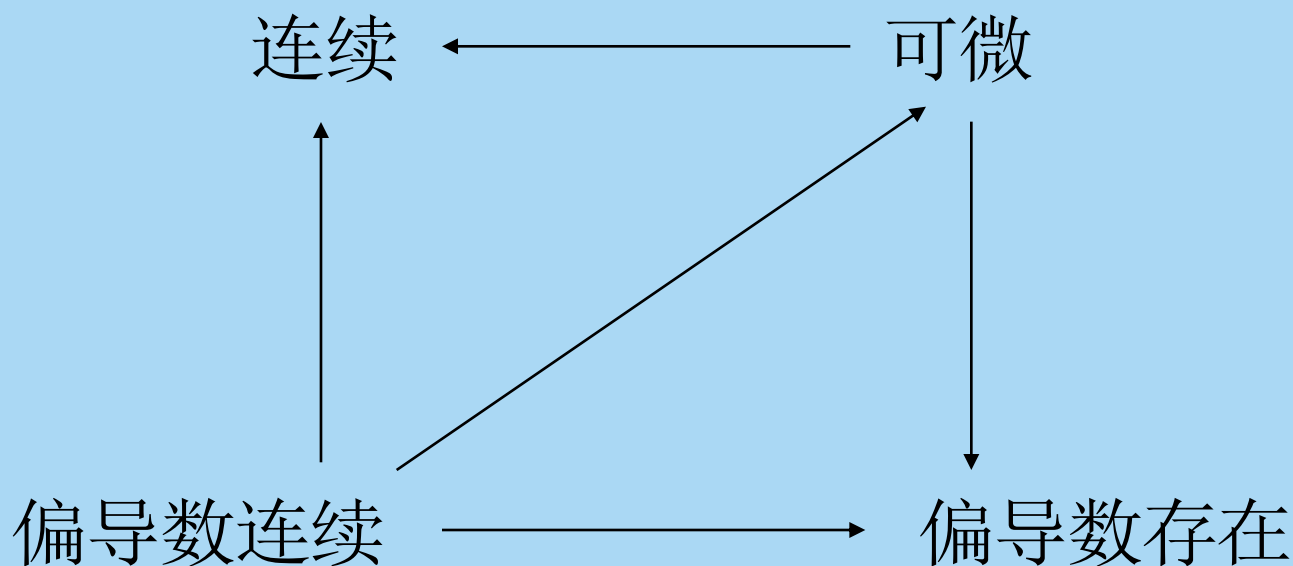
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_i = 0, i = 1, 2, \cdots, n.$$

因此  $f$  在  $x_0$  可微.  $\square$





**Remark:** 函数的连续性、可微性、偏导数存在性与偏导数连续性之间的蕴含关系图.





## 4. 高阶偏导数

视 $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ 为 $x, y$ 的二元函数, 有时也记为 $f'_1, f'_2$ , 考虑它们的偏导数, 即高阶偏导数. 例如,

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

分别为 $f$ 关于 $x$ 和关于 $y$ 的二阶偏导数, 也记为 $f''_{11}, f''_{22}$ . 而

$$f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

为 $f$ 关于 $x, y$ 的二阶混合偏导数, 也记为 $f''_{12}, f''_{21}$ .



例.  $z = \frac{1}{x} f(xy) + yf(x+y)$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

解:  $\frac{\partial z}{\partial y} = f'(xy) + f(x+y) + yf'(x+y)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

$$= yf''(xy) + f'(x+y) + yf''(x+y). \square$$



例.  $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases},$

求  $f''_{xy}(0, 0)$  和  $f''_{yx}(0, 0)$ .

解:  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \begin{cases} y \frac{x^4 - y^4 + 4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

$$f''_{yx}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, y) - f'_x(0, 0)}{y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = -1.$$



$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \begin{cases} x \frac{x^4 - y^4 - 4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'_y(x, 0) - f'_y(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1. \square$$

**Question:** 要求  $f''_{xx}(0, 0)$ , 是否必须计算出  $f'_x(x, y)$ ?

$$f''_{xx}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'_x(x, 0) - f'_x(0, 0)}{x}, \text{ 只需计算出 } f'_x(x, 0).$$

**Remark:** 混合偏导数一般情况下与求导顺序有关.



**Thm.** 若  $f''_{xy}, f''_{yx}$  都在  $(x_0, y_0)$  连续, 则  $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ .

**Proof.** 令  $\Delta = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)$   
 $- f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0),$

$$\varphi(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + t\Delta x, y_0),$$

则  $\varphi'(t) = f'_x(x_0 + t\Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x - f'_x(x_0 + t\Delta x, y_0)\Delta x,$

$$\Delta = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta_1)$$

$$= (f'_x(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0))\Delta x$$

$$= f''_{yx}(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0 + \theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y, \quad \text{其中 } \theta_1, \theta_2 \in (0, 1).$$



同理, 令  $\psi(t) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + t\Delta y) - f(x_0, y_0 + t\Delta y)$ , 则

$$\psi'(t) = f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta y - f'_y(x_0, y_0 + t\Delta y)\Delta y,$$

$$\Delta = \psi(1) - \psi(0) = \psi'(\theta_3)$$

$$= (f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_3\Delta y) - f'_y(x_0, y_0 + \theta_3\Delta y))\Delta y$$

$$= f''_{xy}(x_0 + \theta_4\Delta x, y_0 + \theta_3\Delta y)\Delta x\Delta y, \quad \theta_3, \theta_4 \in (0, 1).$$

$$\text{于是 } f''_{yx}(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0 + \theta_2\Delta y) = f''_{xy}(x_0 + \theta_4\Delta x, y_0 + \theta_3\Delta y),$$

由于  $f''_{xy}, f''_{yx}$  在  $(x_0, y_0)$  连续, 上式中令  $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ , 得

$$f''_{yx}(x_0, y_0) = f''_{xy}(x_0, y_0). \quad \square$$



## 5. 方向导数、梯度

**Question:** 用过点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 且平行于OZ轴的平面去截曲面 $z = f(x, y)$ , 所得的交线在点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处的斜率如何刻画?

点 $(x_0, y_0)$ 及单位向量 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2$ 确定直线

$$\ell = \{(x, y) \mid x = x_0 + v_1 t, y = y_0 + v_2 t\}.$$

其中 $t$ 表示点 $(x_0, y_0)$ 沿方向 $\boldsymbol{v}$ 到点 $(x, y)$ 的有向距离. 把直线 $\ell$ 类比为 $x$ 轴, 方向 $\boldsymbol{v}$ 类比为 $x$ 轴正向. 则可以得到方向导数的定义.





**Def.**  $f$  在  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  的邻域中有定义,  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  为非零向量,  $l$  为过  $x_0$  沿  $v$  方向的射线, 若  $t$  的函数

$$g(t) = f\left(x_0 + \frac{v}{\|v\|} t\right) = f\left(x_0^{(1)} + \frac{v_1}{\|v\|} t, \dots, x_0^{(n)} + \frac{v_n}{\|v\|} t\right)$$

在  $t = 0$  存在右导数, 即极限

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in l}} \frac{f(x) - f(x_0)}{\|x - x_0\|} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(t) - g(0)}{t}$$

存在, 则称该极限为  $f(x)$  在  $x_0$  沿方向  $v$  的方向导数, 记作

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial v}, \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{x_0} \text{ 或 } f'_v(x_0).$$



**Remark.**  $\frac{\partial f(x_0)}{\partial v}$  是函数  $f(x)$  在点  $x_0$  沿方向  $v$  的变化率.

**Remark.**  $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}$  为  $f$  在  $x_0$  沿  $e_i = (0, \dots, 0, \overset{\text{第 } i \text{ 个分量}}{\downarrow} 1, 0, \dots, 0)$  的方向导数.

**Thm.** 设  $f$  在  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  可微,  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  为非零向量, 则方向导数  $\frac{\partial f(x_0)}{\partial v}$  存在, 且

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial v} = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} \frac{v_1}{\|v\|} + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2} \frac{v_2}{\|v\|} + \dots + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} \frac{v_n}{\|v\|}.$$



**Proof.**  $f$  在  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  可微, 则

$$f(x_0 + \frac{v}{\|v\|}t) - f(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} \frac{v_i}{\|v\|} t + o(t).$$

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial v} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \frac{v}{\|v\|}t) - f(x_0)}{t}$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} \frac{v_i}{\|v\|} + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{o(t)}{t}$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} \frac{v_i}{\|v\|}. \quad \square$$



例. 求  $f = x^2 + y^2$  在  $M_0(2,1)$  沿  $w = (3, -4)$  的方向导数.

解法一.  $v = w / \|w\| = (3/5, -4/5)^T$ ,

$$g(t) = f\left(2 + \frac{3}{5}t, 1 - \frac{4}{5}t\right) = \left(2 + \frac{3}{5}t\right)^2 + \left(1 - \frac{4}{5}t\right)^2,$$

$$\frac{\partial f(2,1)}{\partial v} = g'(0) = \frac{4}{5}.$$

解法二.  $v = w / \|w\| = (3/5, -4/5)^T$ ,  $f'_x(2,1) = 4$ ,  $f'_y(2,1) = 2$ .

$$\frac{\partial f(2,1)}{\partial v} = f'_x(2,1) \cdot \frac{3}{5} + f'_y(2,1) \cdot \frac{-4}{5} = \frac{4}{5}. \square$$



**Remark:** 即使 $f(x, y)$ 在某点存在所有的方向导数, 也不能推断 $f$ 在该点连续.

例.  $f(x, y) = \begin{cases} 1, & y = x^2, x > 0, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$  在原点不连续, 但沿任何

非零向量 $v \in \mathbb{R}^2$ ,  $\frac{\partial f(0,0)}{\partial v} = 0$ .

**Def.**  $n$ 元函数 $f$ 在 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 可微, 称

$$\text{grad} f(x_0) \triangleq \left( \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} \right)$$

为数量场 $u = f(x)$ 在点 $x_0$ 的梯度.



**Thm.**  $f$  在  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  可微, 记  $w = \text{grad}f(x_0)$  则

$$\max_{v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0} \frac{\partial f(x_0)}{\partial v} = \frac{\partial f(x_0)}{\partial w} = \|\text{grad}f(x_0)\|,$$

即  $f$  在  $x_0$  沿梯度方向的方向导数最大, 且最大方向导数的值为梯度的模.

**Proof.**  $f$  在  $x_0$  可微, 则

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_0)}{\partial v} &= \text{grad}f(x_0) \cdot \frac{v}{\|v\|} \\ &= \|\text{grad}f(x_0)\| \cdot \cos \langle \text{grad}f(x_0), v \rangle \\ &\leq \|\text{grad}f(x_0)\| \end{aligned}$$

当且仅当  $v = k \cdot \text{grad}f(x_0), k > 0$  时 " $=$ " 成立.



**Remark.**  $n$ 元函数 $f$ 在 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 可微, 则 $f$ 在 $x_0$ 沿负梯度方向 $-\text{grad}f(x_0)$ 的方向导数最小, 且最小方向导数的值为梯度的模的 $-1$ 倍. (优化中有一种算法叫最速下降法.)



**作业： 习题1.4**  
**No. 1(单),2(单),**  
**8,11(单) ,12 (单),15 (单)**