Review

•Gauss公式 $$\iint_{\partial\Omega} \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_{\Omega} \nabla\cdot\vec{v}\,dxdydz.$$

Green公式 $$\int_{\partial D} \vec{v}\cdot\vec{n}\,dl = \iint_{D} (P'_x + Q'_y)\,dxdy$$

Remark: Gauss公式成立的条件.

•Stokes公式 $$\oint_{\partial S} \vec{v}\cdot\vec{\tau}\,dl = \iint_{S} (\nabla\times\vec{v})\cdot\vec{n}\,dS$$

Green公式 $$\int_{\partial D} \vec{v}\cdot\vec{\tau}\,dl = \iint_{D} (Q'_x - P'_y)\,dxdy$$

Remark: 曲面S的选取及定向.

Chap5. 常数项级数

§1. 无穷级数的敛散性

级数: $$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots,$$

部分和: $$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Def.若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛,记为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = S$;

若数列 $\{S_n\}$ 发散,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.

Remark. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$收敛.

Question. $\{S_n\}$收敛的必要条件、充分条件、充要条件?

Thm.(级数收敛的必要条件) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

Proof $a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0.\square$

Thm.(级数收敛的Cauchy准则) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛的充要条件是:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t.$$

$$\left| a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} \right| < \varepsilon, \quad \forall n > N, p \geq 1.$$

Proof. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t.$

$$\left| a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} \right| =$$

$$\left| S_{n+p} - S_n \right| < \varepsilon, \quad \forall n > N, p \geq 1. \square$$

Thm. 改变有限项的值, 级数$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$的敛散性不变.

Thm. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B, \lambda \in \mathbb{R}$, 则

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda a_n = \lambda A,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = A + B.$$

Corollary. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$发散, 则$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$发散.

例 $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n.$ （求出S_n）

解：当$|r| \geq 1$时，$a_n \not\to 0$，发散.

当$|r| < 1$时，$S_n = r + r^2 + \cdots + r^n = \dfrac{r - r^{n+1}}{1-r}.$

结论：当$|r| < 1$时，$\sum_{n=1}^{+\infty} r^n = \dfrac{r}{1-r}$，当$|r| \geq 1$时，发散.□

例 $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1.$ （裂项法）

解：$S_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1.$□

例. 求$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^{2^{n-1}}}{1-a^{2^n}}=\frac{a}{1-a^2}+\frac{a^2}{1-a^4}+\frac{a^4}{1-a^8}+\cdots.$ (归纳法)

解: $S_2=\frac{a}{1-a^2}+\frac{a^2}{1-a^4}=\frac{a(1+a^2)}{1-a^4}+\frac{a^2}{1-a^4}=\frac{a+a^2+a^3}{1-a^4}$

可归纳证明 $S_n=\frac{a+a^2+\cdots+a^{2^n-1}}{1-a^{2^n}}=\frac{a(1-a^{2^n-1})}{(1-a^{2^n})(1-a)}$

$$=\frac{a}{1-a}\cdot\frac{(1/a^{2^n-1}-1)}{1/a^{2^n-1}-a}$$

故$|a|<1$时, $S_n\to\frac{a}{1-a}$; $|a|>1$时, $S_n\to\frac{1}{1-a}$. □

例. 求$S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n}$.　　　　(方程法)

解: $a_n=\frac{n}{2^n}$,

$$a_{n+1}=\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{n}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}.$$

$$S-\frac{1}{2}=\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}S+\frac{1}{2},$$

$S=2.$ □

§2. 非负项级数

非负项级数: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$ $S_n \uparrow$

1.非负项级数的收敛原理

Thm 非负项级数收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和序列有上界.

例 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$ 解: $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot N = \sqrt{N} \to +\infty.$

S_N无上界, 故$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$发散.$\square$

例. 调和级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$发散.

Proof. $S_{2^N}=\sum_{n=1}^{2^N}\frac{1}{n}$

$$=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{N-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^N}\right)$$

$$\geq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{8}\times 4+\cdots+\frac{1}{2^N}\times 2^{N-1}=1+\frac{N}{2}.$$

$\lim\limits_{N\to\infty}S_{2^N}=+\infty$, 故$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$发散.□

例 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

解: $S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\le 1+\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n(n-1)}$

$$=1+\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{N}\le 2.$$

故$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,且$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\le 2.\square$

2.非负项级数的比较判别法

要判断一个级数的收敛性, 可以考虑将其与另一个已经知道收敛性的级数(尺子)做比较.

Thm (比较判别法-普通形式)

$$1)0\le a_n\le b_n,\forall n\in\mathbb{N},\text{且}\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\text{收敛}\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\text{收敛.}$$

$$2)a_n\ge b_n\ge 0,\forall n\in\mathbb{N},\text{且}\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\text{发散}\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\text{发散.}$$

Proof. 比较两级数的前n项和数列.□

清華大學

例 $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{n^2}$

解：$0 \le \sin \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$. 而$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$收敛,故$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{n^2}$收敛.□

例 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4n-3}}$发散.

解：$\frac{1}{\sqrt{4n-3}} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4n-3}}$发散.□

Thm (比较判别法-极限形式)

$$a_n > 0, b_n > 0, \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lambda, 0 \le \lambda \le +\infty, \text{则}$$

$$1)\lambda < \infty, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{收敛}.$$

$$2)\lambda > 0, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{发散}.$$

Proof. 2)是1)的推论, 下证1).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lambda,\text{则}\exists N_1\in\mathbb{N},s.t.$$

$$a_n<(\lambda+1)b_n,\ \forall n>N_1.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\text{收敛,则}\exists N>N_1,s.t.$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}b_k\right|<\frac{\varepsilon}{\lambda+1},\forall n>N,\forall p\geq 1.$$

$$\text{于是}\forall n>N,\forall p\geq 1,\text{有}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|<(\lambda+1)\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}b_k\right|<\varepsilon,$$

故$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛.□

例 $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+1/n)$.

解：$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+1/n)}{1/n} = 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$发散.□

例. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^p} \quad (p>1)$.

以$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^q}$为标尺！

解:取$q\in(1,p)$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{n^p}}{\frac{1}{n^q}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{p-q}} = 0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^q}$ 收敛,

故$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$收敛.□

清華大學

例 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)$.

解: $a_n \triangleq \sqrt[n]{a}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln a}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\sim 1+\frac{1}{n}\ln a+\frac{(\ln a)^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-\left[1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$=\left(\ln a-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n}+\left(\frac{(\ln a)^2}{2}+\frac{1}{8}\right)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),\quad n\to\infty\text{时}.$$

$n>>1$时, a_n不变号.可用正项级数判敛法.

当$a \neq \sqrt{e}$时，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \Big/ \dfrac{1}{n} = \ln a - \dfrac{1}{2} \neq 0$，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$级数发散；

当$a = \sqrt{e}$时，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \Big/ \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{4} \neq 0$，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$级数收敛.□

Remark. $o(\cdot)$记号的运用有时很方便！

Thm (比较判别法-上下极限形式) $a_n > 0, b_n > 0.$

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$收敛，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_n}{b_n} < +\infty \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛.

2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$发散，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{a_n}{b_n} > 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$发散.

Thm (Cauchy根式判别法-普通形式)

设$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$为非负项级数, 则

1) $\sqrt[n]{a_n} < r < 1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛. $\left(a_n \le r^n\right)$

2) 有无穷多个$n, s.t.\ \sqrt[n]{a_n} \ge 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$发散. $\left(a_n \not\to 0\right)$

Thm (Cauchy根式判别法-极限形式)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{为非负项级数, 且} \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q, \text{则}$$

$$1)\ q<1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{收敛. } 2)\ q>1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{发散.}$$

Proof. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$, 则$\exists N, s.t. \forall n>N$, 有$\left|\sqrt[n]{a_n}-q\right|<\dfrac{|1-q|}{2}$.

$$1)\text{若} q<1, \text{则} \forall n>N, \sqrt[n]{a_n}<q+\frac{|1-q|}{2}<1, \text{从而} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{收敛.}$$

$$2)\text{若} q>1, \text{则} \forall n>N, \sqrt[n]{a_n}>q-\frac{|1-q|}{2}>1, \text{故} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{发散.} \square$$

例 $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2/2^n.$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2/2^n}=1/2<1,\ \sum_{n=1}^{+\infty} n^2/2^n\text{收敛.}$$

例. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-(-1)^n}}.$

解: $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^{n-(-1)^n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{1-(-1)^n/n}}=\frac{1}{2}<1,\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-(-1)^n}}\text{ 收敛.}\square$$

Thm (Cauchy根式判别法-上下极限形式) $a_n \geq 0$,则

$$1)\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{收敛}.$$

$$2)\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{发散}.$$

Remark 当$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$时,不能利用Cauchy根式判别法判断$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$的收敛性. 例如

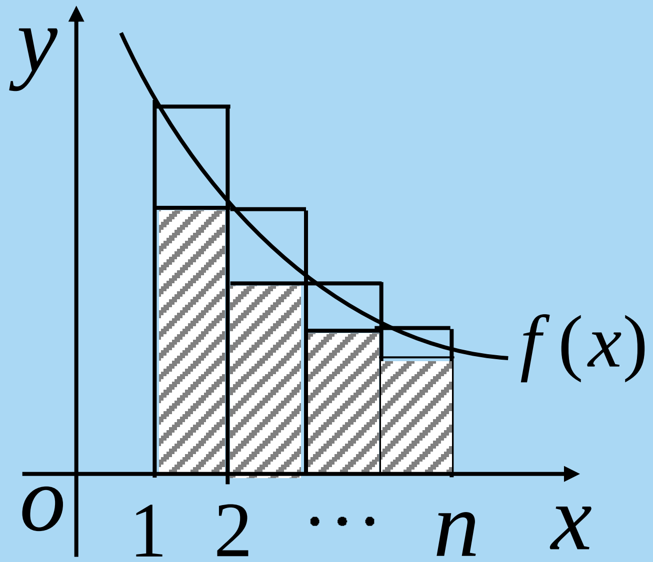
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/n}=1,\ \sum_{n=1}^{+\infty}1/n\text{发散}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/n^2}=1,\ \sum_{n=1}^{+\infty}1/n^2\text{收敛}.$$

因此我们需要更精细的判别法(或标尺).

3.非负项级数的积分判别法

Thm (Cauchy积分判别法)设 $f(x)$在$[1,+\infty)$上单调下降且非负,则$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$与$\int_1^{+\infty} f(x)dx$同时收敛或同时发散.



Proof

$$\int_1^N f(x)dx$$

$$\|$$

$$\sum_{n=1}^{N-1} f(n+1) \le \sum_{n=1}^{N-1}\int_n^{n+1} f(x)dx \le \sum_{n=1}^{N-1} f(n).\square$$

例 p-级数：$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$.

解：
$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\begin{cases}\ln x\Big|_{x=1}^{+\infty}, & p=1\\ \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_{x=1}^{+\infty}, & p\neq 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}+\infty, & p\le 1\\ \frac{1}{p-1}, & p>1\end{cases}$$

故 $p>1$时，$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$收敛，$p\le 1$时，$\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$发散.□

例 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$.

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \begin{cases} \ln(\ln x)\Big|_{x=2}^{+\infty}, & p=1, \\ \dfrac{1}{(1-p)(\ln x)^{p-1}}\Bigg|_{x=2}^{+\infty}, & p \neq 1. \end{cases}$$

$p>1$时, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$收敛.

$p\le 1$时, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$发散.□

Question. $\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$ 的敛散性?

Remark. $a_n>0$,利用比较判别法(上极限形式)可知

- $a_n=O\left(\frac{1}{n^p}\right), p>1, \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛
- $a_n=O\left(\frac{1}{n(\ln n)^p}\right), p>1, \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛
- $a_n=O\left(\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}\right), p>1, \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛

例. $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^p}\quad (p>1).$

以$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^q}$为标尺!

解: $p>1$, 则$(p+1)/2>1, (p-1)/2>0.$

$$\frac{\ln n}{n^p}=\frac{1}{n^{(p+1)/2}}\cdot\frac{\ln n}{n^{(p-1)/2}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{(p-1)/2}}=0$, 因此$\exists N, s.t. \frac{\ln n}{n^{(p-1)/2}}<\frac{1}{2}, \forall n>N.$ 于是,

$$\frac{\ln n}{n^p}<\frac{1}{2n^{(p+1)/2}},\quad \forall n>N,$$

从而$p>1$时$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^p}$收敛.□

例. $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\ln\ln n}}}$.

以$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$为标尺!

解: $n^{\frac{1}{\ln\ln n}} = e^{\frac{\ln n}{\ln\ln n}} = e^{\frac{\ln n\cdot\ln\ln n}{(\ln\ln n)^2}} = \left(e^{\ln(\ln n)}\right)^{\frac{\ln n}{(\ln\ln n)^2}} = (\ln n)^{\frac{\ln n}{(\ln\ln n)^2}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{(\ln\ln n)^2} = +\infty$, 于是$\exists N_0$, $s.t. \frac{\ln n}{(\ln\ln n)^2} > 2, \forall n > N_0$.

继而有$\frac{1}{n^{1+\frac{1}{\ln\ln n}}} = \frac{1}{n\cdot n^{\frac{1}{\ln\ln n}}} < \frac{1}{n(\ln n)^2}, \forall n > N_0$.

故$\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$收敛.□

4.正项级数的比值判别法

要判断一个级数的收敛性, 也可以从其通项的增长速度方面着手考虑.

Thm (比值判别法) 设$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$都是严格正项级数,

即$\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0, b_n > 0$.则

$$\left.\begin{array}{l} 1)\quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \dfrac{b_{n+1}}{b_n}, \forall n \in \mathbb{N}(或\forall n > N_0), \\ \qquad\quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n 收敛 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 收敛.$$

$$\left.\begin{array}{l} 2)\quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}, \forall n \in \mathbb{N}(\text{或}\forall n > N_0), \\ \qquad\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{发散} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{发散.}$$

Proof. 1) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$, 则

$$a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \cdots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq a_1 \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdot \cdots \cdot \frac{b_n}{b_{n-1}} \leq \frac{a_1}{b_1} b_n.$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$收敛, 则$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛. 同理可证2).□

Question. 比值判别法的极限形式和上下极限形式?

在比值判别法中取$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$为等比级数$\sum_{n=1}^{+\infty} r^n$,则有

Thm (D′Alembert判别法-普通形式) 设$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$为严格正项级数,则

1) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le r < 1, \forall n \ge n_0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛.

2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1, \forall n \ge n_0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$发散.

Thm (D′Alembert判别法-极限形式) 设$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$为严格正项级数, $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = q$. 则

$$1)\, q<1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{收敛.} \qquad 2)\, q>1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{发散.}$$

Remark 当$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$时, D′Alembert判别法失效.

例如 $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2$收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n$ 发散, 而 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)}{1/n} = 1. \square$$

清華大學

Thm (D′Alembert判别法-上下极限形式) $a_n > 0$, 则

$$1)\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{收敛.}$$

$$2)\ \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{发散.}$$

例. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{2^n}$

解：$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\ln(n+1)}{2\ln n}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}<1,\text{故}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{2^n}\text{收敛.}\square$$

例. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n!}\cdot 2^n}{n^{n/2}}$

解： $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2\sqrt{n+1}\cdot\frac{n^{n/2}}{(n+1)^{(n+1)/2}}$

$$= \frac{2n^{n/2}}{(n+1)^{n/2}} = \frac{2}{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{\sqrt{e}} > 1$, 故级数发散.□

Remark D′Alembert判别法失效时, 需要更精细的尺度, 如:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p},\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p},\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p},\cdots$$

分别取$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$和$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$作为比值比较的尺度, 得到 Raabe判别法和Gauss判别法.

Thm (Raabe判别法-普通形式) $a_n > 0$, 则

1)若$\exists q>1, N_0\in\mathbb{N}, s.t.$

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\geq q>1, \forall n>N_0,$$

则$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛.

2)若$\exists N_0\in\mathbb{N}, s.t.$

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leq 1, \forall n>N_0,$$

则$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$发散.

Proof. 1)所给条件等价于$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\geq 1+\dfrac{q}{n}, \ \forall n>N_0.$

选取$p\in(1,q)$, 取级数$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^p}$, 则对充分大的$n$, 有

$$\frac{b_n}{b_{n+1}}=\frac{(n+1)^p}{n^p}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^p$$

$$=1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\le 1+\frac{q}{n}=\frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

而$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$收敛$(p>1)$,由比值判别法,$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛.

2)所给条件等价于 $\frac{a_n}{a_{n+1}}\le 1+\frac{1}{n}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}},\quad \forall n>N_0.$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$发散,因此$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$发散.□

Thm (Raabe-极限形式) $a_n > 0, \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = q$, 则

1)若$q>1$, 则$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛; 2)若$q<1$, 则$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$发散.

Thm (Raabe判别法-上下极限形式) $a_n > 0$, 则

1) $\varliminf\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛;

2) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$发散.

例. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

解: $$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!}=\frac{2n+2}{2n+1}=1+\frac{1}{2n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1,$$

由Raabe判别法, 级数发散.□

例. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^{\ln n}}\quad (a>0).$ $\left(a^{\ln n}=n^{\ln a},\text{故此级数为}p-\text{级数.}\right)$

解: $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left(a^{\ln(n+1)-\ln n}-1\right)=\frac{a^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-1}{1/n}.$

$$\lim_{x\to0}\frac{a^{\ln(1+x)}-1}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{a^{\ln(1+x)}-1}{\ln(1+x)}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\right)=\ln a,$$

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\ln a.$$

由Raabe判别法, $a>e$时, 级数收敛; $a<e$时, 级数发散.

此外, $a=e$时, $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=\sum_{n=1}^{+\infty}1/n$, 发散.□

清华大学

Question. 比值判别法中, 选$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^{\ln n}}$为标尺,还有何结论?

分析: $\frac{b_n}{b_{n+1}}=a^{\ln(n+1)-\ln n}=a^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$, $\ln\frac{b_n}{b_{n+1}}=\ln a\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$,

$$n\ln\frac{b_n}{b_{n+1}}=\ln a\cdot n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\to\ln a.$$

结论: Thm.(对数比值型判别法) 设$\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}=l$,则

$$l>1\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\text{收敛};\quad l<1\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\text{发散}.$$

Question.请写出对数比值型判别法的一般形式和上下极限形式.

Question. 比较判别法中, 选用$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^{\ln n}}$为标尺,有何结论?

分析: $a_n \ge \frac{1}{a^{\ln n}} \Leftrightarrow \sqrt[\ln n]{a_n} \ge a^{-1}.$

结论: Thm.(对数根式型判别法) 设$\lim_{n\to\infty}\sqrt[\ln n]{a_n}=l$,则

$$l<\frac{1}{e}\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\text{收敛};\quad l>\frac{1}{e}\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\text{发散}.$$

Question.请写出对数根式型判别法的一般形式和上下极限形式.

Question. 比较判别法中, 选用$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$为标尺,还有何结论?

分析: $a_n \le \frac{1}{n^p} \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} \ge n^p \Leftrightarrow \frac{\ln 1/a_n}{\ln n^p} \ge 1 \Leftrightarrow \frac{\ln 1/a_n}{\ln n} \ge p.$

结论: Thm.(对数判别法) 设$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln 1/a_n}{\ln n}=l$,则

$$l>1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}a_n\text{收敛};\quad l<1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}a_n\text{发散}.$$

清華大學

Question.请写出对数判别法的一般形式和上下极限形式.

Remark. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=1$,Raabe判别法失效.利用更精细的标尺$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^p}$,得到如下Gauss判别法.

Thm (Gauss判别法) 设$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$为严格正项级数, 并设

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\upsilon}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right), n \to \infty \text{时}.$$

1)若$\lambda > 1$,则$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛, 若$\lambda < 1$,则$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$发散.(D′Alembert)

2)设$\lambda = 1$.若$\mu > 1$,则$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛, 若$\mu < 1$,则$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$发散.(Raabe)

3)设$\lambda = \mu = 1$.若$\upsilon > 1$,则$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$收敛, 若$\upsilon < 1$,则$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$发散.

Proof. 3)取$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$,当$n$充分大时,有

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(n+1)(\ln(n+1))^p}{n(\ln n)^p} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln n}{\ln n}\right)^p$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^p = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)^p$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{p}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)=1+\frac{1}{n}+\frac{p}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$

……$\square$

作业：习题5.1 No.2,5-7

习题5.2 No.1-3,5,8-11