

微积分A (2)

教师：晏平

email: pyan@math.tsinghua.edu.cn

office: 数学系荷二办公室219

Tel: 62798584, 13521977278



◆ 教材:

《微积分》（下册），章纪民、闫浩、刘智新编，清华大学数学科学系。

◆ 考核方式:

作业**20%** + 期中**30%** + 期末**50%**

◆ 答疑：周一**13:00-15:00** ,荷二**219**

◆ 收发作业

◆ 习题课



第一章 多元函数及其微分学

§ 1. n 维Euclid空间 \mathbb{R}^n

1. n 维实线性空间

集合 $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$

实数域 \mathbb{R} 两种运算：加法、数乘

加法： $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$\triangleq (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

数乘： $\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) \triangleq (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$

结论：集合 \mathbb{R}^n 是数域 \mathbb{R} 上的 (n 维) 线性空间



2. n 维Euclid空间

Def. 设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, x 与 y

之间的Euclid距离定义为 $\|x - y\| \triangleq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$. 带有

Euclid距离的 n 维线性空间 \mathbb{R}^n 称为 n 维Euclid空间.

Prop. \mathbb{R}^n 中的Euclid距离满足以下性质:

- 1) 正定性: $\|x - y\| \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$; 且 $\|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- 2) 对称性: $\|x - y\| = \|y - x\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$;
- 3) 三角不等式: $\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|y - z\|, \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$.



Remark. n 维线性空间 \mathbb{R}^n 上的运算 $d(x, y)$ 满足正定性、对称性和三角不等式, 则称 d 为 \mathbb{R}^n 上的距离.

Question1. 试定义 n 维线性空间 \mathbb{R}^n 上的其它距离.

Question2. 为什么要定义 n 维线性空间 \mathbb{R}^n 上的距离?

3. n 维Euclid空间中的开集和闭集

Def. 设 $x \in \mathbb{R}^n, \delta > 0$.

点 x 的 δ 邻域: $B(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < \delta\};$

点 x 的去心 δ 邻域: $B_0(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : 0 < \|x - y\| < \delta\}.$

Remark. 邻域的几何意义.



Def. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$.

(1) 称 x 为 Ω 的一个 **内点**, 若存在 $\delta > 0, s.t. B(x, \delta) \subset \Omega$;

(2) 称 x 为 Ω 的一个 **边界点**, 若 $\forall \delta > 0$,

$$B(x, \delta) \cap \Omega \neq \emptyset \text{ 且 } B(x, \delta) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \neq \emptyset;$$

(3) 若 Ω 中每一点均为内点, 则称 Ω 为 **开集**;

(4) 若 Ω 的余集 $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ 为开集, 则称 Ω 为 **闭集**;

(5) 由 Ω 的所有内点构成的集合称为 Ω 的 **内部**, 记作 $\mathring{\Omega}$;

(6) Ω 的所有边界点构成的集合称为 Ω 的 **边界**, 记作 $\partial\Omega$;

(7) 称集合 $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ 为集合 Ω 的 **闭包**.



Remark. (1)全集 \mathbb{R}^n 和空集 \emptyset 既是开集又是闭集.

(2)任意多个开集之并仍为开集;有限个开集之交仍为开集.

(3)任意多个闭集之交仍为闭集;有限个闭集之并仍为闭集.

(4) $\overset{\circ}{\Omega}$ 是开集, $\bar{\Omega}$ 是闭集.

Question3. 任意多个开集之交是否仍为开集?

$$\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

Question4. 任意多个闭集之并是否仍为闭集?

$$\left[\frac{1}{n}, 1\right]$$

Def. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.若存在 $M > 0, s.t.$

$$\|x\| < M, \quad \forall x \in \Omega,$$

则称 Ω 为有界集合.



例. $B(x, \delta)$ 是 有界开 集, $B_0(x, \delta)$ 是 有界开 集.

$\partial B(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| = \delta\}$, 这是一个 有界闭 集.

$\partial B_0(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| = \delta\} \cup \{x\}$, 这是一个 有界闭 集.

$\bar{B}(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq \delta\}$, 这是一个 有界闭 集.

$\overline{B_0}(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq \delta\}$, 这是一个 有界闭 集.

$\mathring{B}(x, \delta) = \underline{B(x, \delta)}.$

$\mathring{B}_0(x, \delta) = \underline{B_0(x, \delta)}.$



4. \mathbb{R}^n 中集合的连通性

Def. 集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 称为(道路)连通的, 如果对 Ω 中的任意两点 x, y , 都存在 Ω 中的一条折线将两点连接起来, 否则, 称 Ω 为非(道路)连通集.

Def. \mathbb{R}^n 中非空的连通开集称为开区域, 开区域的闭包称为闭区域.

例. $B(x, \delta)$ 与 $B_0(x, \delta)$ 都是 \mathbb{R}^n 中的开区域.

例. $\{(x, y) : |x| < 1, |y| < 2\}$ 是 \mathbb{R}^2 中的开区域.

例. $\{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$ 是 \mathbb{R}^3 中的闭区域.



5. \mathbb{R}^n 中点列

\mathbb{R}^n 中点列 $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$ 也记作 $\{x_k\}$.

$$x_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \dots, x_k^{(n)}) \in \mathbb{R}^n, \quad k = 1, 2, \dots, \infty.$$

Def. $A = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}) \in \mathbb{R}^n, \{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$. 称点列 $\{x_k\}$ 收敛于 A , 或点列 $\{x_k\}$ 以 A 为极限, 记作 $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = A$, 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, s.t.$

$$\|x_k - A\| < \varepsilon, \quad \forall k > N.$$

Remark. (1) $n=1$ 时与实数列的极限定义一致.

(2) $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = A$ 的几何意义.



Thm. 设 $x_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \dots, x_k^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots, \infty$.

$A = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$, 则

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = A \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k^{(i)} = a^{(i)}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Proof.

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| x_k^{(i)} - a^{(i)} \right| \right\} \leq \|x_k - A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(x_k^{(i)} - a^{(i)} \right)^2} \leq \sum_{i=1}^n \left| x_k^{(i)} - a^{(i)} \right|$$

若 $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = A$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, s.t. \|x_k - A\| < \varepsilon, \forall k > N$.

于是, 对任意 $1 \leq i \leq n$, 有

$$\left| x_k^{(i)} - a^{(i)} \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left| x_k^{(i)} - a^{(i)} \right| \right\} \leq \|x_k - A\| < \varepsilon, \forall k > N.$$

故 $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k^{(i)} = a^{(i)}, i = 1, 2, \dots, n$.



反之, 若 $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k^{(i)} = a^{(i)}, i = 1, 2, \dots, n$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_i \in \mathbb{N}^+, i = 1, 2, \dots, n, s.t.$

$$\left| x_k^{(i)} - a^{(i)} \right| < \frac{\varepsilon}{n}, \forall k > N_i.$$

令 $N = \max_{1 \leq i \leq n} \{N_i\}, \forall k > N \geq N_i$, 有

$$\|x_k - A\| \leq \sum_{i=1}^n \left| x_k^{(i)} - a^{(i)} \right| < n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

故 $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = A. \square$

Def. 称 $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ 为Cauchy列, 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, s.t.$

$$\|x_l - x_m\| < \varepsilon, \quad \forall l, m > N.$$

Thm. \mathbb{R}^n 中收敛列必为Cauchy列.



Thm. $x_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \dots, x_k^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots, \infty$. 则

$\{x_k\}$ 为Cauchy列 $\Leftrightarrow \{x_k^{(i)}\}$ 为Cauchy列, $i = 1, 2, \dots, n$.

Thm. Euclid空间 \mathbb{R}^n 是完备的, 即 \mathbb{R}^n 中的Cauchy列必收敛于 \mathbb{R}^n 中的点.

Thm. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为闭集, $\{x_k\} \subset \Omega$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = A$, 则 $A \in \Omega$.

Proof. 因为 $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = A$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+, s.t. \forall k > N$, 有 $\|x_k - A\| < \varepsilon$, 也即 $x_k \in B(A, \varepsilon)$. 又 $\{x_k\} \subset \Omega$, 故 $B(A, \varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset$.

假设 $A \notin \Omega$, 则 $A \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. 因 Ω 为闭集, 则 $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ 为开集.

于是 $\exists \delta > 0, s.t. B(A, \delta) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, 也即 $B(A, \delta) \cap \Omega = \emptyset$. 矛盾. \square



6. \mathbb{R}^n 的重要性质

Thm.(Weierstrass) \mathbb{R}^n 中有界列必有收敛子列.

Proof. 设 $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ 有界列, 即 $\exists M > 0, s.t. \|x_k\| < M, \forall k \in \mathbb{N}^+$.

$$\|x_k\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_k^{(i)})^2} \geq |x_k^{(i)}|, \text{ 则 } \{x_k^{(i)}\} \text{ 均为有界实数列, } i = 1, 2, \dots, n.$$

下面我们分 n 步抽取 $\{x_k\}$ 的收敛子列.

Step1. 由 \mathbb{R} 中的 Weierstrass 定理, $\{x_k^{(1)}\}$ 有收敛子列 $\{x_{k_l}^{(1)}\}_{l=1}^{+\infty}$,
 $s.t. \lim_{l \rightarrow +\infty} x_{k_l}^{(1)} = a^{(1)}$. 于是, 我们抽出了 $\{x_k\}$ 的一个子列 $\{x_{k_l}\}_{l=1}^{+\infty}$,
它的第一个分量构成的实数列收敛到 $a^{(1)}$.



Step2.对Step1中抽出的子列 $\{x_{k_l}\}_{l=1}^{+\infty}$, 利用Step1中方法, 可抽出一个子子列 $\{x_{k_{l_m}}\}_{m=1}^{+\infty}$, $s.t. \lim_{m \rightarrow +\infty} x_{k_{l_m}}^{(2)} = a^{(2)}$. 由于 $\{x_{k_{l_m}}^{(1)}\}_{m=1}^{+\infty}$ 也是 $\{x_{k_l}^{(1)}\}_{l=1}^{+\infty}$ 的子列, 所以 $\lim_{m \rightarrow +\infty} x_{k_{l_m}}^{(1)} = \lim_{l \rightarrow +\infty} x_{k_l}^{(1)} = a^{(1)}$. 至此, 我们抽出了 $\{x_k\}$ 的一个子列 $\{x_{k_{l_m}}\}_{m=1}^{+\infty}$, 不妨仍记为 $\{x_{k_l}\}_{l=1}^{+\infty}$, 它的第 i 个分量构成的实数列收敛到 $a^{(i)}, i = 1, 2$.

依次类推, 到Step n , 可抽出 $\{x_k\}$ 的一个子列, 不妨仍记为 $\{x_{k_l}\}_{l=1}^{+\infty}$, 其第 i 个分量构成的实数列收敛到 $a^{(i)}, i = 1, 2, \dots, n$.

此时有 $\lim_{l \rightarrow +\infty} x_{k_l} = A = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)})$. \square



Def.(集合的直径) 设 $F \subset \mathbb{R}^n$, 若 $F \neq \emptyset$, 定义 F 的直径为

$$d(F) = \sup \{ \|x - y\| : x, y \in F \}.$$

若 $F = \emptyset$, 则定义 F 的直径为 $d(F) = 0$.

Thm.(闭集套定理) 设 $F_k \subset \mathbb{R}^n$ 为非空闭集, $k = 1, 2, \dots$, 且

$$F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_k \supset F_{k+1} \dots$$

若 $\lim_{k \rightarrow +\infty} d(F_k) = 0$, 则集合 $\bigcap_{k=1}^{+\infty} F_k$ 中有且仅有一点.



Def. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\{G_\alpha\}$, $\alpha \in I$ 为开集族, 若 $\Omega \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$, 则称 $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 为 Ω 的一个开覆盖.

Thm. (有限覆盖定理) 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界闭集, $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 为 Ω 的一个开覆盖, 则 \exists 有限个开集 G_{α_i} , $\alpha_i \in I$, $i = 1, 2, \dots, N$, s.t., $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^N G_{\alpha_i}$.



作业：

习题1.1 No. 3(3),4(4),5(4)