Review

含参广义积分的性质

$$I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx, \quad D=[a,+\infty)\times[\alpha,\beta].$$

$$\bullet\begin{cases} f(x,y),\ f_y'(x,y)\in C(D); \\ \forall y\in[\alpha,\beta], I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx \text{ 收敛}; \\ \int_a^{+\infty} f_y'(x,y)dx \text{ 关于} y\in[\alpha,\beta]\text{一致收敛}; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \in C^1[\alpha,\beta], \text{且} I'(y)=\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty} f(x,y)dx=\int_a^{+\infty} f_y'(x,y)dx.$$

$$\bullet \begin{cases} f(x,y) \in C(D); \\ \int_a^{+\infty} f(x,y)dx \text{关于} y \in [\alpha,\beta] \text{一致收敛}; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I(y) \in C[\alpha,\beta], \text{即} \\ \qquad \lim_{y\to y_0} \int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx. \\ I(y) \in R[\alpha,\beta], \\ \qquad \text{且} \int_\alpha^\beta dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} \int_\alpha^\beta f(x,y)dy. \end{cases}$$

Chap3 重积分

§1. 二重积分的概念和性质

二重积分是三重积分的基础. 只有掌握好了二重积分才能学好三重积分. 而且, 二重积分完全体现了重积分的所有思想.

- 二重积分的几何与物理背景
  - 曲顶柱体的体积
  - 平板质量
- 二重积分的概念
- 二重积分的性质

1. 二重积分的几何与物理背景

(1) 曲顶柱体的体积

设曲面$S: z = f(x, y), (x, y) \in D$.求以$D$为下底,以曲面$S$为上顶的曲顶柱体$\Omega$的体积V($\Omega$).

•Step1.对D进行分划: 将D分成n个小区域ΔD_1, $\Delta D_2, \cdots, \Delta D_n$,称之为$D$的一个分划$T = \{\Delta D_i\}_{i=1}^{n}$.

相应地,Ω被分成了曲顶柱体$\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \cdots, \Delta\Omega_n$.

称$\lambda(T) = \max\limits_{1 \le i \le n} \{d(\Delta D_i)\}$为分划$T$的直径. 其中,

$$d(\Delta D_i) \triangleq \sup\{d(P, Q) \mid P, Q \in \Delta D_i\}.$$

- Step2.取标志点　在ΔD_i中任取一点$P_i(\xi_i,\eta_i)$.
- Step3.求近似和　以$\Delta\sigma_i$表示ΔD_i的面积, 则

$$\mathrm{V}(\Delta\Omega_i)\approx f(P_i)\Delta\sigma_i,$$

$$\mathrm{V}(\Omega)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{V}(\Delta\Omega_i)\approx\sum_{i=1}^{n}f(P_i)\Delta\sigma_i.$$

- Step4.取极限

直观上,当D的分划越来越细,即$\lambda(T)\to 0$时,

$$\sum_{i=1}^{n}f(P_i)\Delta\sigma_i\to \mathrm{V}(\Omega).$$

(2) 平板质量

薄板D上点(x,y)处的密度为$m(x,y)$，求薄板质量.

- Step1.分划：将D分成n个小区域$\Delta D_i\ (i=1,2,\cdots,n)$
- Step2.取标志点：在ΔD_i中任取一点$P_i(\xi_i,\eta_i)$.
- Step3.求近似和：用$\Delta\sigma_i$表示ΔD_i的面积，薄板质量

$$m(D)=\sum_{i=1}^{n} m(\Delta D_i)\approx\sum_{i=1}^{n} m(P_i)\Delta\sigma_i.$$

- Step4.取极限：

当D的分割越来越细时，$\sum_{i=1}^{n} m(P_i)\Delta\sigma_i\to m(D)$.

2. 二重积分的概念

Def. $f(x,y)$在有界闭区域$D\subset\mathbb{R}^2$上有定义,对D的任意分划$T=\{\Delta D_i\}_{i=1}^{n}$,以及任意的点$P_i(\xi_i,\eta_i)\in\Delta D_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$,若Riemann和$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$的极限

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

都存在,则称f在D上(Riemann)可积,记作$f\in R(D)$,并称该极限为f在D上的二重积分,记作

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i,$$

其中$\iint$是二重积分号, D是积分域, f是被积函数, $d\sigma$是面积元.

Remark: 定义中, $Riemann$和的极限与对D的分划无关, 与标志点$\{(\xi_i,\eta_i)\}$的选取无关. 因此也可以用$\varepsilon-\delta$语言定义二重积分:

Def. f在有界闭区域$D\subset\mathbb{R}^2$上有定义, $\mathrm{A}\in\mathbb{R}$.若$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, s.t.对$D$的任意分划$T=\{\Delta D_i\}_{i=1}^n$,以及任意$(\xi_i,\eta_i)\in\Delta D_i\,(i=1,2,\cdots,n)$,只要$\lambda(T)<\delta$,就有

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i-\mathrm{A}\right|<\varepsilon,$$

则称f在D上(*Riemann*)可积,称A为f在D上的二重积分, 记为$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\mathrm{A}$.

Remark: $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$只与被积函数$f$和积分区域有关,而与自变量的记号$x,y$无关. 故有时$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$也简记为$\iint\limits_D f$.

Remark: 设$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$存在. 用平行于坐标轴的网格对$D$作分划,则面积微元为$\Delta x_i \Delta y_j$.

因此$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$也记为$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Thm. 设$D\subset\mathbb{R}^2$为有界闭区域,则

(可积的必要条件)$f\in R(D)\Rightarrow f$在D上有界.

(可积的充分条件)$f\in C(D)\Rightarrow f\in R(D)$.

Question1. $D\subset\mathbb{R}^2$为有界闭区域,若f在D上有瑕点(瑕点的邻域中f无界),如何拓展f在D上的Riemann可积性?(类比一元函数的瑕积分)

Question2. $D\subset\mathbb{R}^2$为无界闭区域,如何讨论f在D上的可积性?(类比一元函数的广义积分)

3. 用Darboux上、下和研究Riemann可积

$D \subset \mathbb{R}^2$有界. 设$f \in B(D)$,即f在D上有界.

- 对D进行分划: $T = \{\Delta D_i\}_{i=1}^n$.
- $m_i = \inf\limits_{(x,y)\in D_i} \{f(x,y)\}, M_i = \sup\limits_{(x,y)\in D_i} \{f(x,y)\}$.
- 构造Darboux上、下和:

$$L(f,T) = \sum_{i=1}^n m_i \sigma(D_i), \quad U(f,T) = \sum_{i=1}^n M_i \sigma(D_i).$$

Thm. $D \subset \mathbb{R}^2$有界, $f \in B(D)$,则$f \in R(D)$的充分必要条件是: $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} L(f,T)$与$\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} U(f,T)$存在且相等, 此时

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

$$= \lim_{\lambda(T)\to 0} L(f,T) = \lim_{\lambda(T)\to 0} U(f,T).$$

Thm. $D \subset \mathbb{R}^2$为有界闭区域,若f在D上的间断点构成的集合面积为零, 则$f \in R(D)$.

例. $f(x,y)=\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 在$[-1,1]\times[-1,1]$上Riemann可积.因为f仅有一个间断点$(0,0)$.

例. Dirichlet函数$D(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in\mathbb{Q}^2\\ 0 & (x,y)\notin\mathbb{Q}^2\end{cases}$ 在$\mathbb{R}^2$中任一有界区域E上均不可积.因为对E的任意分划,

$$L(f,T)=0<\sigma(E)=U(f,T).$$

4. 二重积分的性质

1)(线性性质) $f,g\in R(D)$,则$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\alpha f+\beta g\in R(D)$,且

$$\iint\limits_D(\alpha f+\beta g)d\sigma=\alpha\iint\limits_D fd\sigma+\beta\iint\limits_D gd\sigma.$$

2)(区域可加性)$D=D_1\bigcup D_2\bigcup\cdots\bigcup D_n$,且$D_1,D_2,\cdots,D_n$中任意两区域无公共内点,则

$$f\in R(D)\Leftrightarrow f\in R(D_i),i=1,2,\cdots,n.$$

且 $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{D_i} f(x,y)dxdy.$$

3)(保序性) $f, g \in R(D), f \geq g$,则

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

特别地, $f \in R(D), f \geq 0$,则$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq 0.$

Proof: $f, g \in R(D), f \geq g$.由二重积分的线性性质,

$0 \leq f - g \in R(D)$.由二重积分的定义,

$$\iint\limits_D (f-g)dxdy \geq 0,$$

再由线性性质得$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq \iint\limits_D g(x,y)dxdy$.□

4) $f\in R(D)$, 则 $\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right|\le\iint\limits_D |f(x,y)|dxdy.$

Proof: $\pm f\le|f|$, 由线性性质和保序性,

$$\pm\iint\limits_D f(x,y)dxdy\le\iint\limits_D |f(x,y)|dxdy. \square$$

5)(估值定理) $f\in R(D), m\le f(x,y)\le M$. 记 $\sigma(D)$ 为 D 的面积, 则

$$m\sigma(D)\le\iint\limits_D f(x,y)dxdy\le M\sigma(D).$$

6)(积分中值定理) $D \subset \mathbb{R}^2$连通、有界闭, $f \in C(D)$,

则存在$(\xi,\eta) \in D$, $s.t.$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)\sigma(D).$$

7)(对称性)设$f \in R(D)$, D关于OX轴对称,

- 若$f(x,y)$关于y为奇函数, 则 $\iint_D f(x,y)dxdy = 0$;
- 若$f(x,y)$关于y为偶函数, 记D_1为D位于OX轴上

方的部分, 则$\iint_D f(x,y)dxdy = 2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy.$

例. $D\subset\mathbb{R}^2$为连通有界闭集, $f,g\in C(D)$, g不变号. 则存在$(\xi,\eta)\in D$, s.t.

$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)dxdy=f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

解: $f,g\in C(D)$, 则$fg\in C(D)$, 从而$fg\in R(D)$. g不变号, 不妨设$g\geq 0$.记

$$m=\min_{(x,y)\in D} f(x,y), M=\max_{(x,y)\in D} f(x,y),$$

则 $$mg(x,y)\leq f(x,y)g(x,y)\leq Mg(x,y).$$

由二重积分的保序性,

$$m\iint_D g(x,y)dxdy \le \iint_D f(x,y)g(x,y)dxdy$$

$$\le M\iint_D g(x,y)dxdy.$$

• 若$\iint_D g(x,y)dxdy \ne 0$,则

$$m \le \mu \triangleq \frac{\iint_D f(x,y)g(x,y)dxdy}{\iint_D g(x,y)dxdy} \le M,$$

由连续函数的介值定理,$\exists(\xi,\eta)\in D, s.t. f(\xi,\eta)=\mu$,

此时,$\iint_D f(x,y)g(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)d\sigma.$

•若$\iint\limits_D g(x,y)dxdy=0$, 则$g(x,y)\equiv 0.\forall(\xi,\eta)\in D$,

$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)dxdy$$

$$= f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)dxdy = 0. \quad \square$$

Remark: g变号时, 结论不一定成立.

例如, $D=[-1,1]\times[-1,1]$, $f(x,y)=g(x,y)=x$.则

$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)dxdy = \iint\limits_D x^2 dxdy > 0.$$

事实上,

$$\iint_D x^2 dxdy \geq \iint_{\frac{1}{2}\leq x,y\leq 1} x^2 dxdy \geq \iint_{\frac{1}{2}\leq x,y\leq 1} \frac{1}{4} dxdy = \frac{1}{16} > 0.$$

而区域D关于y轴对称, $g(x,y)=x$关于x为奇函数,

所以$\iint_D g(x,y)dxdy = \iint_D xdxdy = 0.$

故$\forall(\xi,\eta)\in D$,

$$0 < \iint_D f(x,y)g(x,y)dxdy$$

$$\neq f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)dxdy = 0. \square$$

例. 求 $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} e^{x^2-y^2}\cos(x+y)dxdy.$

分析: 将被积函数看成薄板点密度,则所求为原点处的点密度,即被积函数在点$(0,0)$的值,结果应为1.

解:由积分中值定理,$\exists(\xi_r,\eta_r)$, s.t. $\xi_r^2+\eta_r^2\le r^2$, s.t.

$$\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} e^{x^2-y^2}\cos(x+y)dxdy$$

$$=e^{\xi_r^2-\eta_r^2}\cos(\xi_r+\eta_r)\to 1,\text{当} r\to 0\text{时}. \square$$

基本的二重积分的计算很重要, 大家要熟练掌握

- 二重积分的基本性质
- 二重积分化累次积分
- 交换积分次序
- 由累次积分给出积分区域
- 极坐标下二重积分的计算
- 二重积分的变量替换方法

作业:

习题3.1 No.3,4,10

习题3.2 No.4.