第十一次习题课题目

一 求以下矩阵的奇异值分解:

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(2) $A = uv^T$, 其中 $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| = \|v\| = 1$;

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

(5) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

参考答案:(1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

.

(2) $A^TA = vu^Tuv^T = u^Tu\cdot vv^T$

$$|\lambda I - A^TA| = \lambda^n\left|I - \frac{1}{\lambda}u^Tu\cdot vv^T\right| = \lambda^n\cdot\left(1-\frac{1}{\lambda}u^Tu\cdot v^Tv\right)$$

$$= \lambda^{n-1}(\lambda - \|u\|\cdot\|v\|)$$

$$= \lambda^{n-1}(\lambda - 1)$$

$$\therefore\ \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

令 $\underline{U=(u,u_2,\cdots,u_n)}$ $\qquad V=(v,v_2,\cdots,v_n)$

将 $\{u\}$ 扩充成单位正交基 $\{u,u_2,\cdots,u_n\}$

则 $A=U\Sigma V^T$

(3) $A = I_3AI_2$

(4) $A=\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&1\\1&\end{pmatrix}$

(5) $A=\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&1\\1&\end{pmatrix}$

图 1: 习题一参考答案

注记:

对于实对称阵，注意特征值和奇异值的关系 (特征值的绝对值是奇异值).

设 A 是 n 阶实对称阵, 满足 $Q^TAQ = diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_s,\lambda_{s+1},\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)$, 其中 $r = rank(A)$, $Q = (q_1,\cdots,q_n)$ 是正交阵，$\lambda_1,\cdots,\lambda_s > 0$, $\lambda_{s+1},\cdots,\lambda_r < 0$, 则 $A = U\Sigma V^T$, 其中

$$U = Q, \Sigma = diag(|\lambda_1|,\cdots,|\lambda_r|,0,\cdots,0), V = (q_1,\cdots,q_s,-q_{s+1},\cdots,-q_r,q_{r+1},\cdots,q_n).$$

二 设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 的奇异值分解是 $A = U\Sigma V^T$，满足 $U = (u_1, \cdots, u_m)$ 是 m 阶正交矩阵，$V = (v_1, \cdots, v_n)$ 是 n 阶正交矩阵，$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & \end{bmatrix}_{m\times n}$，$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$, 其中 $r = rank(A)$.

(1) 证明 $\|Av_1\| = \sigma_1 = max_{\|v\|=1}\|Av\|$.

(2) 证明 $\|Av_2\| = \sigma_2 = max_{v\perp v_1, \|v\|=1}\|Av\|$.

二、(1) $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad \|v\|=1$

$v = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = Vc \qquad c = (c_1, \cdots, c_n)^T \qquad v^Tv = c^Tc = \|v\|^2$

$A^TA = V\Sigma^2V^T$

$\|Av\|^2 = v^TA^TAv = c^TV^TV\Sigma^2V^TVc = c^T\Sigma^2c$

$= c_1^2\sigma_1^2 + \cdots + c_r^2\sigma_r^2 \leq \sigma_1^2(c_1^2 + \cdots + c_r^2) \leq \sigma_1^2\|v\|^2$

$v = v_1$ 时等号成立

(2) $v = c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = Vc \qquad c = (0, c_2, \cdots, c_n)^T \qquad c^Tc = v^Tv = \|v\|^2$

$\|Av\|^2 = c^T\Sigma^2c = c_2^2\sigma_2^2 + \cdots + c_r^2\sigma_r^2 \leq \sigma_2^2(c_2^2 + \cdots + c_r^2) \leq \sigma_2^2\|v\|^2$

$v = v_2$ 时等号成立

图 2: 习题二参考答案

三 讨论特征值与奇异值的差异：

(1) 特征值适用的矩阵？

(2) 奇异值适用的矩阵？

(3) 对给定的一个 n 阶方阵，其对应的特征值和奇异值相同吗？

(4) 对给定的一个实对称矩阵, 其对应的特征值和奇异值相同吗？

(5) 对给定的一个 n 阶方阵，对应的特征值和奇异值的共性？

参考答案:

(1) 方阵,

(2) 任何矩阵,

(3) 不相同,

(4) 奇异值是特征值的绝对值,

(5) 满秩时非零特征值的个数等于非零奇异值的个数.

三. (3) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 特征值: 1, 0

奇异值: 1, 0

(4) 谱分解 $A = V\Lambda V^T$ $\quad \Lambda = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda_r & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \; 0\end{pmatrix}$ $\quad |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_r| > 0$

$|\lambda_i| = \mathrm{sgn}(\lambda_i)$

令 $D = \begin{pmatrix}\mathrm{sgn}(\lambda_1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \mathrm{sgn}(\lambda_r) & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \; 0\end{pmatrix}$ $\quad \Lambda' = \begin{pmatrix}|\lambda_1| & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & |\lambda_r| & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \; 0\end{pmatrix}$

$A = VD\Lambda' V^T$

$= V'\Lambda' V^T$ 是奇异值分解， $V' = VD$

(5) 非零奇异值个数 $= \mathrm{rank}(A) = n -$ 0的几何重数

$\geq n -$ 0的代数重数 $=$ 非零特征值个数

图 3: 习题三参考答案

四 (1) 设 $A,B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $A,B,A+B$ 的最大奇异值分别是 r,s,t. 证明 $r+s \geq t$..

(2) 设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, A,B,AB 的最大奇异值分别是 r,s,t. 证明 $rs \geq t$.

(3) 设 $A \in M_n(\mathbb{R}), \sigma_1$ 是 A 的最大奇异值，σ_r 是最小 (正) 奇异值，λ 是 A 的任意实特征值。证明 $\sigma_r \leq |\lambda| \leq \sigma_1$.

参考答案:

(1) 由习题二，存在单位向量 $v \in \mathbb{R}^n$, 使得 $\|(A+B)v\| = t$，则 $\|(A+B)v\| \leq \|Av\| + \|Bv\| \leq r+s$.

(2) 若 $AB \neq 0$, 存在单位向量 $w \in \mathbb{R}^n$, 使得 $\|ABw\| = t \neq 0$. 则 $\|ABw\| = \|A(\frac{Bw}{\|Bw\|})\|\|Bw\| \leq rs$.

(3) 取 $x \neq 0$ s.t. $Ax = \lambda x$

令 $y = \frac{x}{\|x\|}$ $Ay = \lambda y$ $\|y\| = 0$

根据习题二(1), $\|Ay\| = |\lambda| \leq \sigma_1$

同理可证: $\|Ay\| = |\lambda| \geq \sigma_r$

图 4: 习题四参考答案

五 设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 的奇异值分解是 $A = U\Sigma V^T$, 满足 $U = (u_1, \cdots, u_m)$ 是 m 阶正交矩阵, $V = (v_1, \cdots, v_n)$ 是 n 阶正交矩阵, $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & \end{bmatrix}_{m\times n}$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$, 其中 $r = rank(A)$. 求 $A - \sigma_1 u_1 v_1^T$ 的奇异值分解.

参考答案:

$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \cdots + \sigma_r u_r v_r^T$.

$A - \sigma_1 u_1 v_1^T =$

$$(u_2, u_3, \cdots, u_m, u_1) \begin{bmatrix} \sigma_2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & \end{bmatrix}_{m\times n} \begin{bmatrix} v_2^T \\ v_3^T \\ \vdots \\ v_n^T \\ v_1^T \end{bmatrix}$$

六 [♡] 设 A 是 n 阶非零实矩阵. 证明：A 的奇异值与 A 的特征值相同当且仅当 A 是正定阵或半正定阵.

参考答案:

假设 A 是正定阵或半正定阵. 设 A 的非零特征值是 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$, 则 $A^TA = A^2$ 的非零特征值是 $\lambda_1^2 \geq \lambda_2^2 \geq \cdots \geq \lambda_r^2 > 0$. 从而 A 的 (正) 奇异值是 $\sqrt{\lambda_1^2} \geq \sqrt{\lambda_2^2} \geq \cdots \geq \sqrt{\lambda_r^2} > 0$. 而且，$A$ 的零特征值和零奇异值均为 $n-r$ 重.

反之, 我们关于 A 的秩做归纳. 若 A 的秩是 1, 则存在非零向量 $u, v \in \mathbb{R}^n$, $A = uv^T$. A 的唯一正奇异值是 $\|u\|\|v\|$, 若它是 A 的特征值, 则它等于 v^Tu. 应用内积不等式 $|v^Tu| \leq \|u\|\|v\|$, 等式成立当且仅当 $u = cv$，$c > 0$. 此时 $A = cv^Tv$ 是一个半正定阵 (若 $n > 1$).

假设题目结论对于秩小于 r 的实矩阵均成立. 现在假设 A 的秩等于 r 且它的奇异值分解是 $A = U\Sigma V^T$, 满足 $U = (u_1, \cdots, u_m)$ 是 m 阶正交矩阵，$V = (v_1, \cdots, v_n)$ 是 n 阶正交矩阵，$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & \end{bmatrix}_{m\times n}$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$, 其中 $r = rank(A)$. 所以，A 的非零特征值就是 $\sigma_1, \cdots, \sigma_r$. 设 $\sigma_1 = \cdots = \sigma_k > \sigma_{k+1} \geq \cdots \geq \sigma_r > 0, k \geq 1$. 令 $A\eta_1 = \sigma_1\eta_1$ 且 $\|\eta_1\| = 1$. 则 $\eta_1 = c_1v_1 + \cdots + c_kv_k + c_{k+1}v_{k+1} + \cdots + c_nv_n$. 从而

$$\sigma_1^2 = \|A\eta_1\|^2 = \eta_1^TA^TA\eta_1 = (c_1v_1 + \cdots + c_nv_n)^T(c_1\sigma_1^2v_1 + \cdots + c_r\sigma_r^2v_r) = c_1^2\sigma_1^2 + \cdots + c_r^2\sigma_r^2.$$

因为 $\|\eta_1\| = 1$, 所以 $c_1^2 + \cdots + c_n^2 = 1$. 因此, $\eta_1 = c_1v_1 + \cdots + c_kv_k$. 因为 $v_1, \cdots, v_k$ 均是 A^TA 的特征向量，所以 η_1 是 A^TA 的单位特征向量. 因为 $A^TA\eta_1 = \lambda_1\eta_1$ 且 $A\eta_1 = \sigma_1\eta_1$, 我们有 $A^T\eta_1 = \sigma_1\eta_1$. 存在 n 阶正交阵 V_1, 满足 V_1 的第一列是 η_1, 且

$$V_1^T(A^TA)V_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r^2 & \\ & & & \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

且因为 $A^T\eta_1 = A\eta_1 = \sigma_1\eta_1$,

$$V_1^TAV_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0^T \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}.$$

注记 $V_1^TAV_1$ 和 A 有相同的奇异值和特征值. 这暗示 A_1 的奇异值和特征值相同，且 $rank(A_1) < r$. 我们应用关于 A 的秩的归纳假设就可以证明结论.

七 设 A 是一个 $m\times n$ 阶实数矩阵. 令 $\tilde{A}=\begin{bmatrix}0 & A\\ A^T & 0\end{bmatrix}$. 证明:

(1) $|\lambda I_{m+n}-\tilde{A}|=\lambda^{m-n}|\lambda^2 I_n-A^TA|$.

(2) 设 A 的奇异值分解是 $A=U\Sigma V^T$, 满足 $U=(u_1,\cdots,u_m)$ 是 m 阶正交矩阵, $V=(v_1,\cdots,v_n)$ 是 n 阶正交矩阵, $\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}_{m\times n}$, $\sigma_1\geq\sigma_2\geq\cdots\geq\sigma_r>0$, 其中 $r=rank(A)$. 令 U_1,V_1 分别是 U,V 的前 r 列构成矩阵, U_2 是 U 的后 $m-r$ 列构成矩阵, V_2 是 V 的后 $n-r$ 列构成矩阵令

$$W=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}U_1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}U_1 & U_2 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}V_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}V_1 & 0 & V_2\end{bmatrix}.$$

则

$$W^T\tilde{A}W=\begin{bmatrix}\sigma_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \sigma_r & & & & & & \\ & & & -\sigma_1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -\sigma_r & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0\end{bmatrix}$$

参考答案:

七、(1)
$$|\lambda I_{m+n} - \tilde{A}| = \begin{vmatrix} \lambda I_m & -A \\ -A^T & \lambda I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_m & 0 \\ \frac{1}{\lambda}A^T & I_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda I_m & -A \\ -A^T & \lambda I_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_m & \frac{1}{\lambda}A \\ 0 & I_n \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \lambda I_m & -A \\ 0 & -\frac{1}{\lambda}A^TA+\lambda I_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_m & \frac{1}{\lambda}A \\ 0 & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda I_m & \\ & -\frac{1}{\lambda}A^TA+\lambda I_n \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^m \left| -\frac{1}{\lambda}A^TA+\lambda I_n \right| = \lambda^{m-n} \left| \lambda^2 I_n - A^TA \right|$$

(2) W $(m+n)$阶方阵

$$A = U\Sigma V^T = (U_1\ \ U_2)\begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} = U_1 \Sigma_r V_1^T$$

$$W^T\hat{A}W = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}U_1^T & \frac{1}{\sqrt{2}}V_1^T \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}U_1^T & \frac{1}{\sqrt{2}}V_1^T \\ U_2^T & 0 \\ 0 & V_2^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}U_1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}U_1 & U_2 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}V_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}V_1 & 0 & V_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}V_1^TA^T & \frac{1}{\sqrt{2}}U_1^TA \\ \frac{1}{\sqrt{2}}V_1^TA^T & -\frac{1}{\sqrt{2}}U_1^TA \\ 0 & U_2^TA \\ V_2^TA^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}U_1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}U_1 & U_2 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}V_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}V_1 & 0 & V_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \Sigma_r & & \\ & -\Sigma_r & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

图 5: 习题七参考答案

注：本题展示一般实对称阵特征值拥有的性质可以转换到任何实矩阵的奇异值上，例如：两实对称阵和的特征值的范围（见习题课九第八题）

八 设 A 是一个 $m\times n$ 阶实矩阵，$b\in\mathbb{R}^m$. 证明：$Ax=b$ 的全部最小二乘解的集合是

$$\{A^+b+(I_n-A^+A)y \mid y\in\mathbb{R}^n\}.$$

展示 A^+b 是长度最小的最小二乘解.

参考答案:

八、注意 x 是 $Ax=b$ 的最小二乘解 $\Leftrightarrow$ $A^TAx=A^Tb$

又 A^TA 的秩为 r

要证 $S=\{A^+b+(I_n-A^+A)y \mid y\in\mathbb{R}^n\}$ 是 $A^TAx=A^Tb$ 的全部解

只需证明 $\begin{cases} A^+b \text{ 是 } A^TAx=A^Tb \text{ 的特解} \\ (I_n-A^+A)y \text{ 是 } A^TAx=0 \text{ 的零解} \\ I_n-A^+A \text{ 的秩为 } n-r \end{cases}$

① $A=U_r\Sigma_rV_r^T \qquad A^+=V_r\Sigma_r^{-1}U_r^T$

$A^TA=V_r\Sigma_rU_r^TU_r\Sigma_rV_r^T=V_r\Sigma_r^2V_r^T$

$A^TAA^+b=V_r\Sigma_r^2V_r^TV_r\Sigma_r^{-1}U_r^Tb=V_r\Sigma_rU_r^Tb=A^Tb$

② $A^+A=V_rV_r^T \qquad AA^+=U_rU_r^T$

$A^TA(I_n-A^+A)=V_r\Sigma_r^2V_r^T-V_r\Sigma_r^2V_r^TV_rV_r^T=0$

③ $|\lambda I_n-V_rV_r^T|=\lambda^n|I_r-\frac{1}{\lambda}V_r^TV_r|=\lambda^n|I_r-\frac{1}{\lambda}I_r|$

$=\lambda^n(1-\frac{1}{\lambda})^r=\lambda^{n-r}(\lambda-1)^r$

$\therefore$ 存在正交阵 Q，使得 $Q^TV_rV_r^TQ=\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore$ $I_n-A^+A=Q^TQ-Q^TV_rV_r^TQ=Q^T\begin{pmatrix} 0 & \\ & -I_{n-r} \end{pmatrix}Q$

I_n-A^+A 的秩为 $n-r$

$(A^+)^T(I_n-A^+A)=U_r\Sigma_r^{-1}V_r^T-U_r\Sigma_r^{-1}V_r^TV_rV_r^T=0$

$\therefore$ $(I_n-A^+A)y\perp A^+b$

$\therefore$ $\|A^+b+(I_n-A^+A)y\|^2=\|A^+b\|^2+\|(I_n-A^+A)y\|^2\geq\|A^+b\|^2$

图 6: 习题八参考答案

九 [♡] 设 A 是 $m\times n$ 阶阵，B 是 $p\times q$ 阶阵，C 是 $m\times q$ 阶阵. 考虑矩阵方程 $AXB=C$，其中 X 是 $n\times p$ 阶未知矩阵. 假设 $rank(A,C)=rank(A)$ 且 $rank\begin{bmatrix}B\\C\end{bmatrix}=rank(B)$. 证明：给定任意 $n\times p$ 阶矩阵 W，$A^+CB^++W-A^+AWBB^+$ 是 $AXB=C$ 的解.

参考答案:

因为题目秩的关系, 存在矩阵 Y,Z，使得 $AY=C,ZB=C$. 因而

$$C=AY=AA^+AY=AA^+C.$$

同理,

$$C=ZB=ZBB^+B=CB^+B.$$

(注记：以上讨论可以简化：C 的列和行分别属于 $C(A)$ 和 $C(B)$ 且 AA^+,B^+B 分别是这两个空间上投影矩阵.)

我们有 $C=AA^+CB^+B$，即 A^+CB^+ 是 $AXB=C$ 的解. 因为 I_n-A^+A 是 $N(A)$ 上的投影矩阵，所以

$$A(W-A^+AWBB^+)B=A(WB-A^+AWB)=A(I_n-A^+A)WB=0.$$

实际上，$A^+CB^++W-A^+AWBB^+$ 给出了 $AXB=C$ 的全部解.

设 M 是 $AXB=C$ 的任意一个解, 则 $A(M-A^+CB^+)C=0$. 令 $W=M-A^+CB^+$, 则 $M=A^+CB^++W=A^+CB^++W-A^+AWBB^+$.

十 Moore-Penrose(M-P) 广义逆的定义：设 $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$，若存在 $M \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ 满足 (1) $AMA = A$, (2) $MAM = M$, (3) AM 与 MA 均为对称矩阵, 则称 M 为 A 的 M-P 广义逆, 记成 A^+.

(1) M-P 广义逆存在性. 对奇异值分解 $AV = U\Sigma$, $V = (V_1, V_2)$ 和 $U = (U_1, U_2)$ 为正交矩阵, $\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, Σ_r 所有正奇异值, 且 $A = U_1\Sigma_r V_1^T$, 证明: $V_1\Sigma_r^{-1}U_1^T$ 是一个 M-P 广义逆.

(2) (♡) 证明: A^+ 唯一.

(3) 证明: $x = V_1\Sigma_r^{-1}U_1^T b$ 为 $Ax = b$ 的一个解, 由此得到满足 M-P 的广义逆 A^+ 对应的 $x = A^+b$ 为 $Ax = b$ 的一个解.

(4) 一般的广义逆 A^- 定义为满足 $AA^-A = A$, 谈谈你的认识.

证明:

(1) 直接验证,

(2) 设广义逆 A_1^+ 和 A_2^+.

$$A_1^+ = A_1^+AA_1^+ = A_1^+(AA_2^+A)A_1^+ = (A_1^+A)^T(A_2^+A)^TA_1^+ = (A_2^+AA_1^+A)^TA_1^+ = (A_2^+A)^TA_1^+ = A_2^+AA_1^+,$$

同理

$$A_2^+AA_1^+ = A_2^+(AA_2^+A)A_1^+ = A_2^+(AA_1^+AA_2^+)^T = A_2^+(AA_2^+)^T = A_2^+AA_2^+ = A_2^+.$$

由此得到 $A_1^+ = A_2^+$.

(3) 直接验证并利用 (2) 得唯一性.

(4) 广义逆 A^- 一般不唯一，例如 A 列满秩，A 的左逆一般不唯一.

若 $Ax = b$ 有解，则 A^-b 是一个特解，因为 $AA^-b = AA^-Ax = Ax = b$.

AA^- 是 $C(A)$ 上投影矩阵.