



清华大学  
Tsinghua University



# 第二讲 几何元素的投影

**(一) 平面的投影**

**(二) 直线与平面及两平面的相对位置**

横看成岭侧成峰，

远近高低各不同。



**已学：投影、点、直线**

**问题：平面的投影？**

**平面与直线的位置关系？**

**平面与平面的位置关系？**



## 几何元素的投影

### (一) 平面的投影

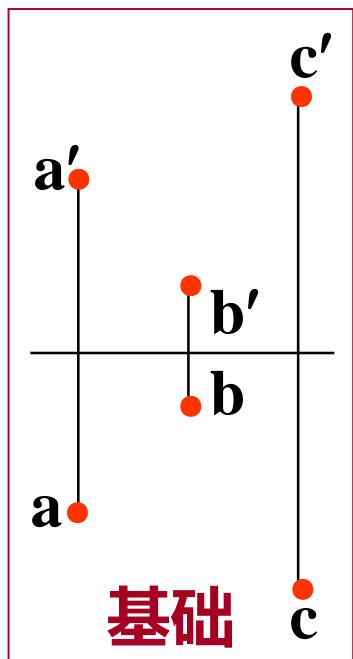
- 平面的投影特性
- 平面上的直线和点

### (二) 直线与平面及两平面的相对位置

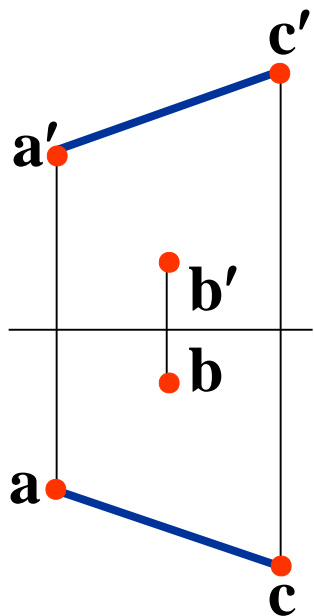
# (一) 平面的投影

## 一、平面的表示法

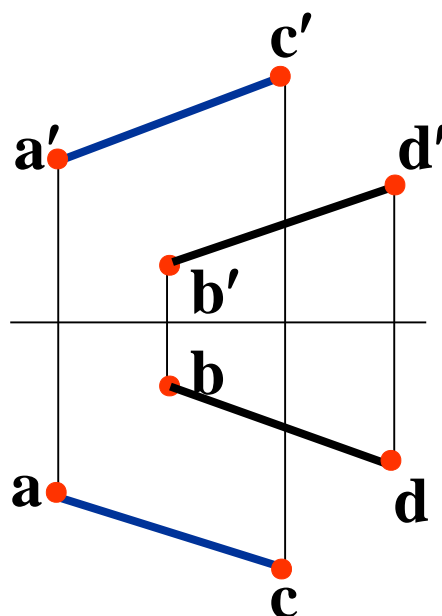
用哪些几何元素可以表示平面？



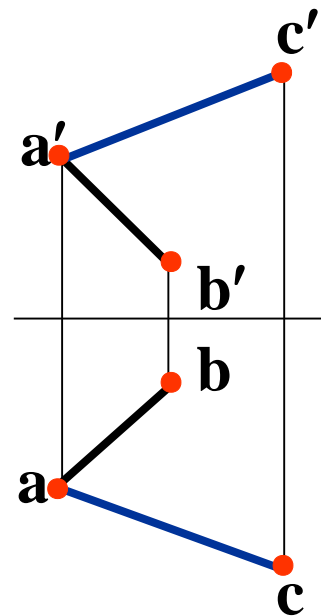
不在同一直线  
上的三个点



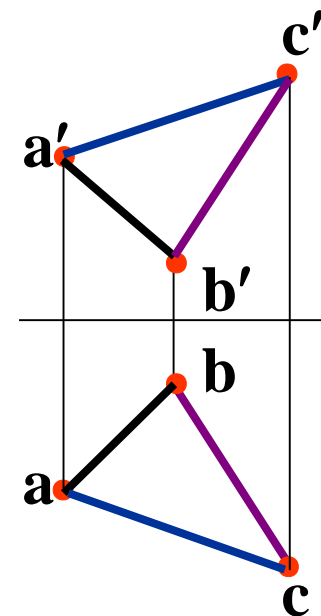
直线及线  
外一点



两平行  
直线



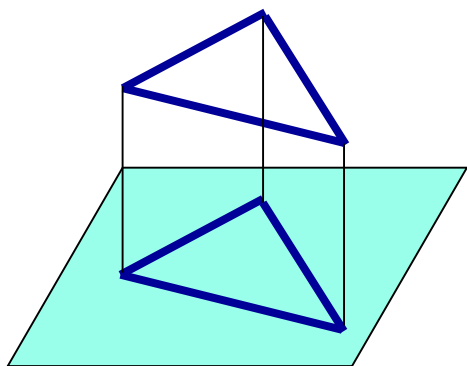
两相交  
直线



任意平面  
图形

## 二、平面的投影特性

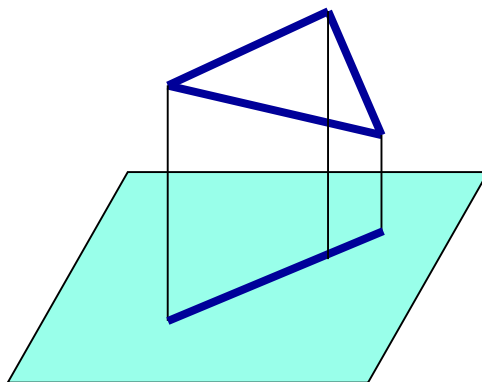
### 1. 平面对一个投影面的投影特性



**平行**

**反映实形**

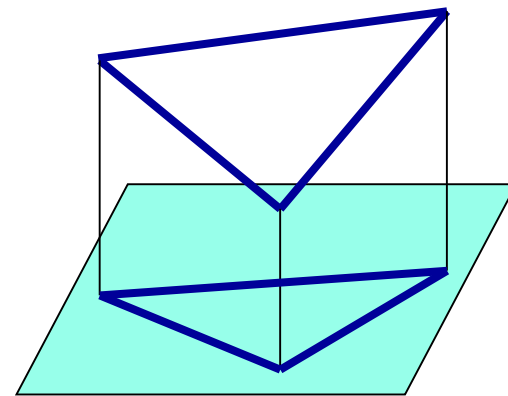
**实形性**



**垂直**

**积聚成直线**

**积聚性**

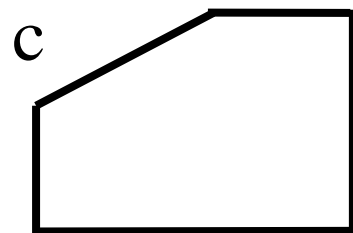
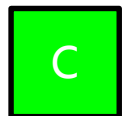
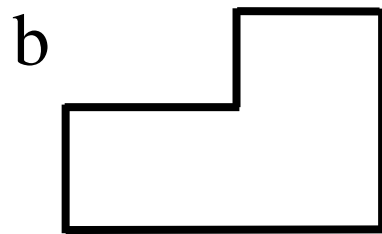
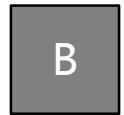
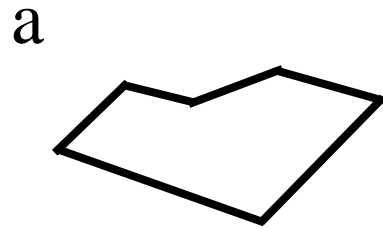
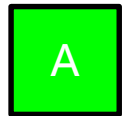
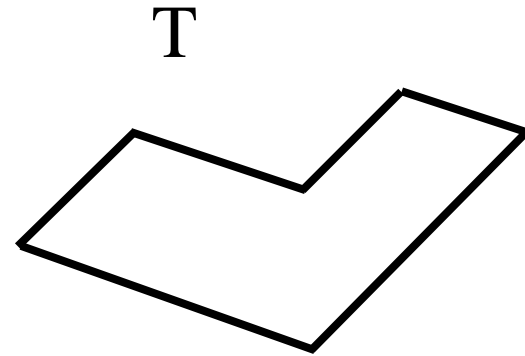


**倾斜**

**类似图形**

**类似性**

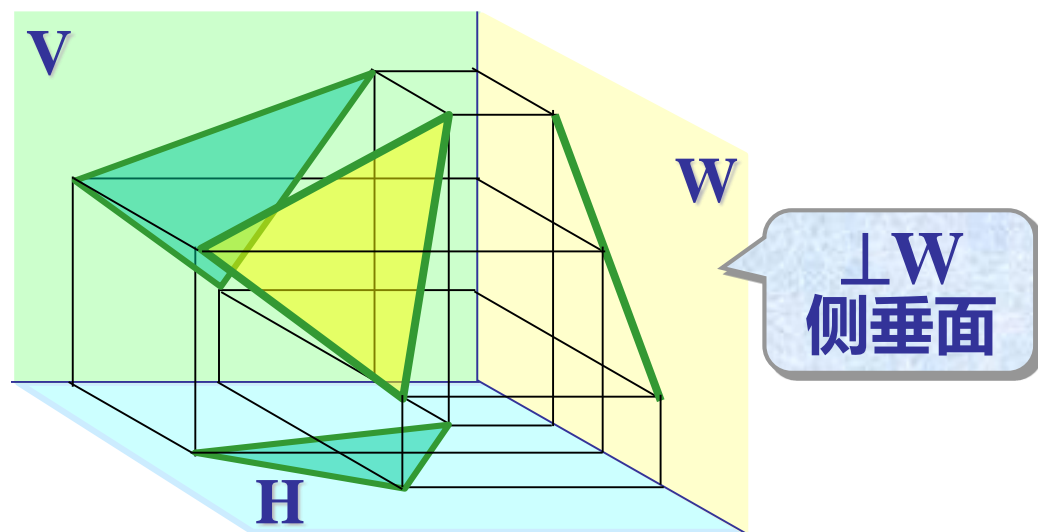
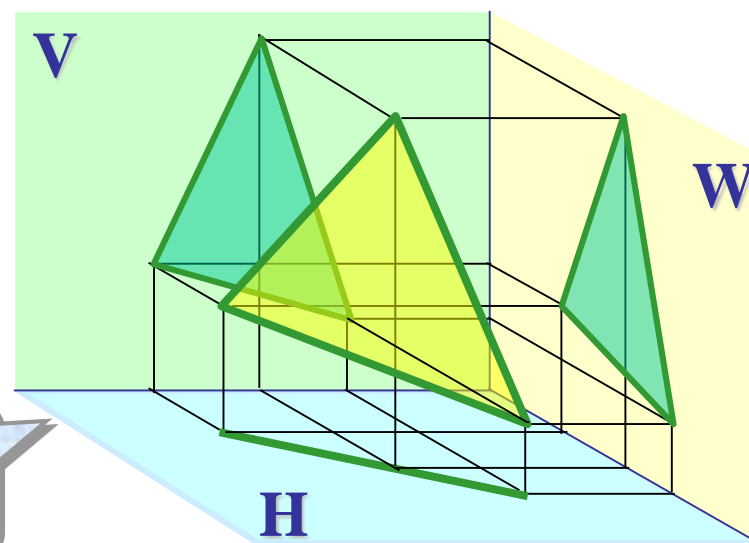
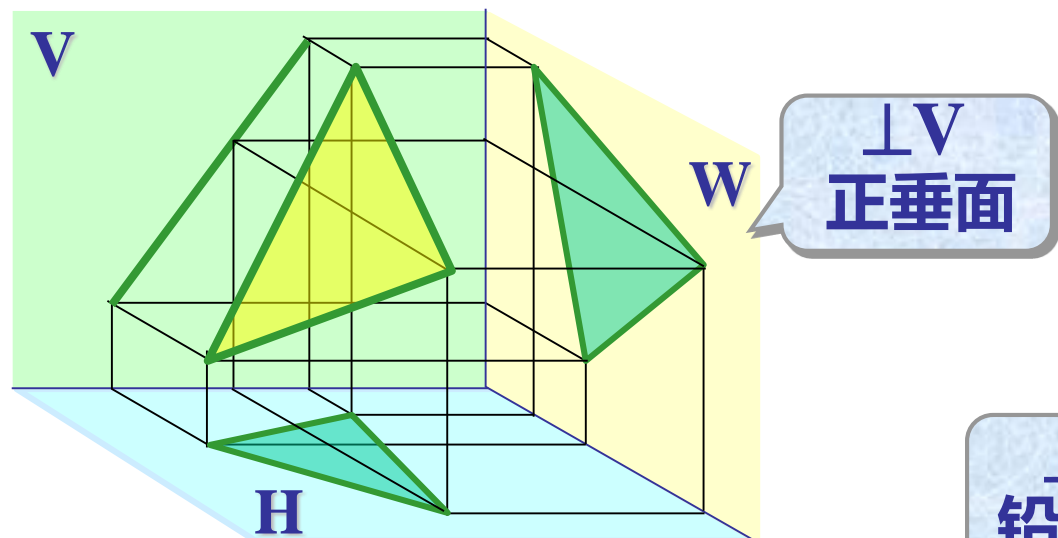
平面多边形T的投影**不可能**是



提交

## 2. 平面在三投影面体系中的投影特性

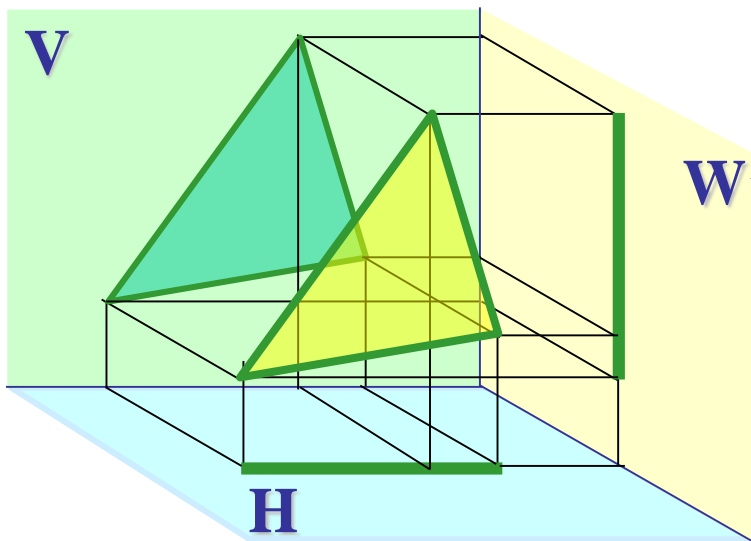
### 平面相对于三投影面的位置：



**投影面垂直面**  
垂直于某一投影面，  
与另两个投影面倾斜

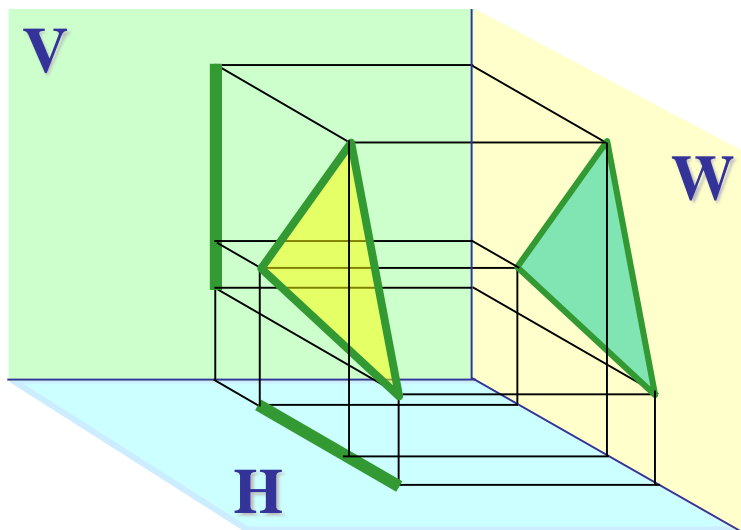
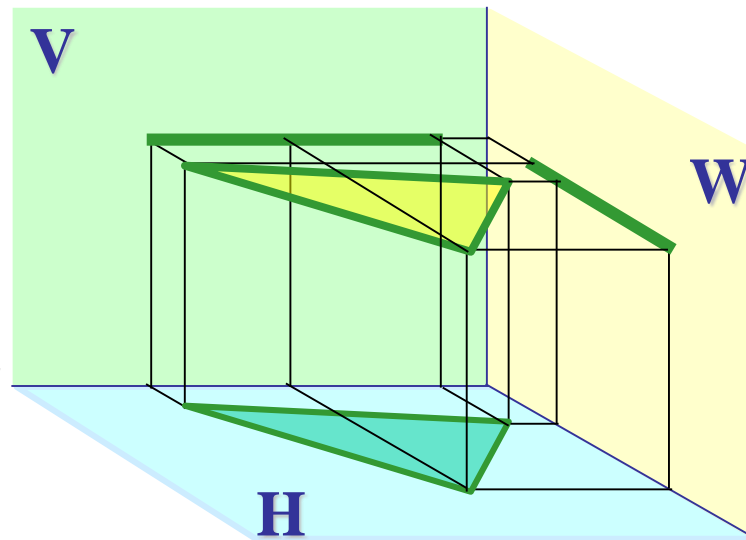


## 平面相对于三投影面的位置：



//V  
正平面

//H  
水平面

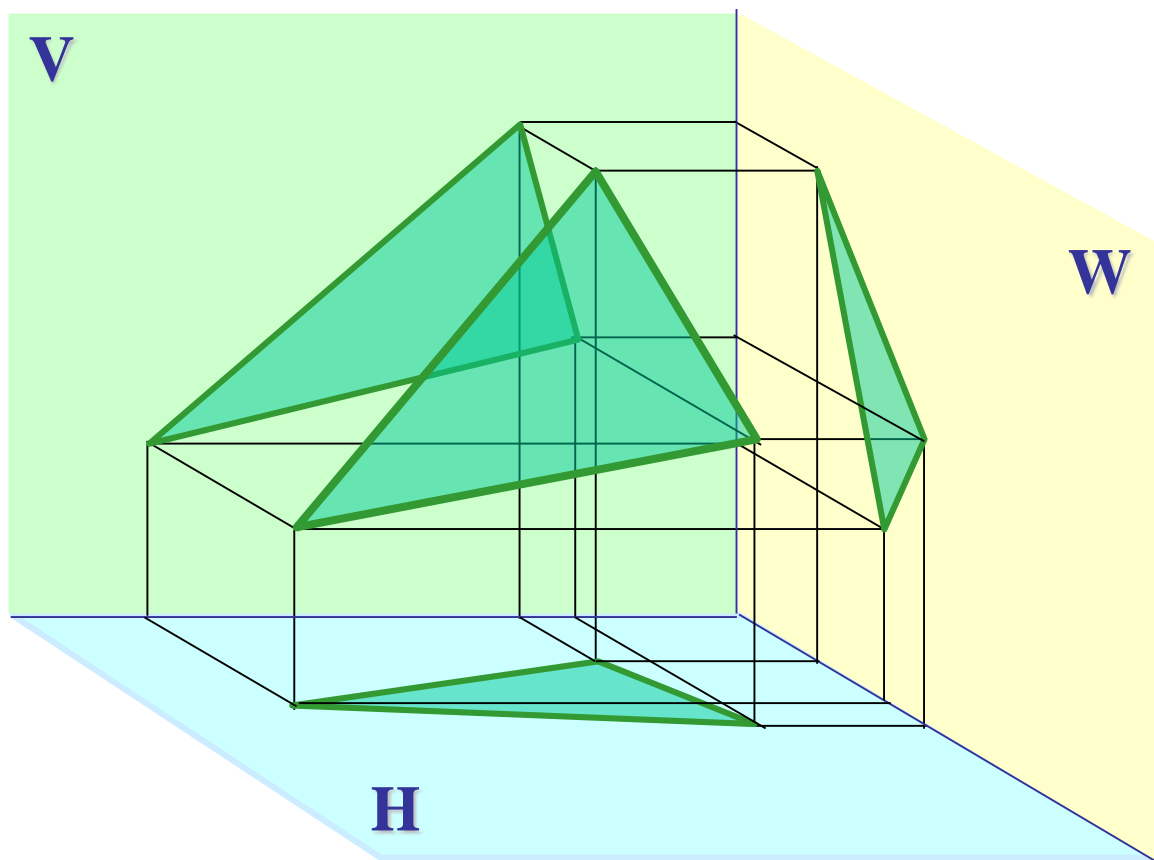


//W  
侧平面

**投影面平行面**

**平行于某一投影面，并  
垂直于另两个投影面**

## 平面相对于三投影面的位置：



**一般位置平面**  
平面对三投影面均倾斜

# 归纳

## 平面相对于投影面的位置

### ■ 投影面垂直面

铅垂面： $\perp$  H 面

正垂面： $\perp$  V 面

侧垂面： $\perp$  W 面

### ■ 投影面平行面

水平面： $//$  H 面

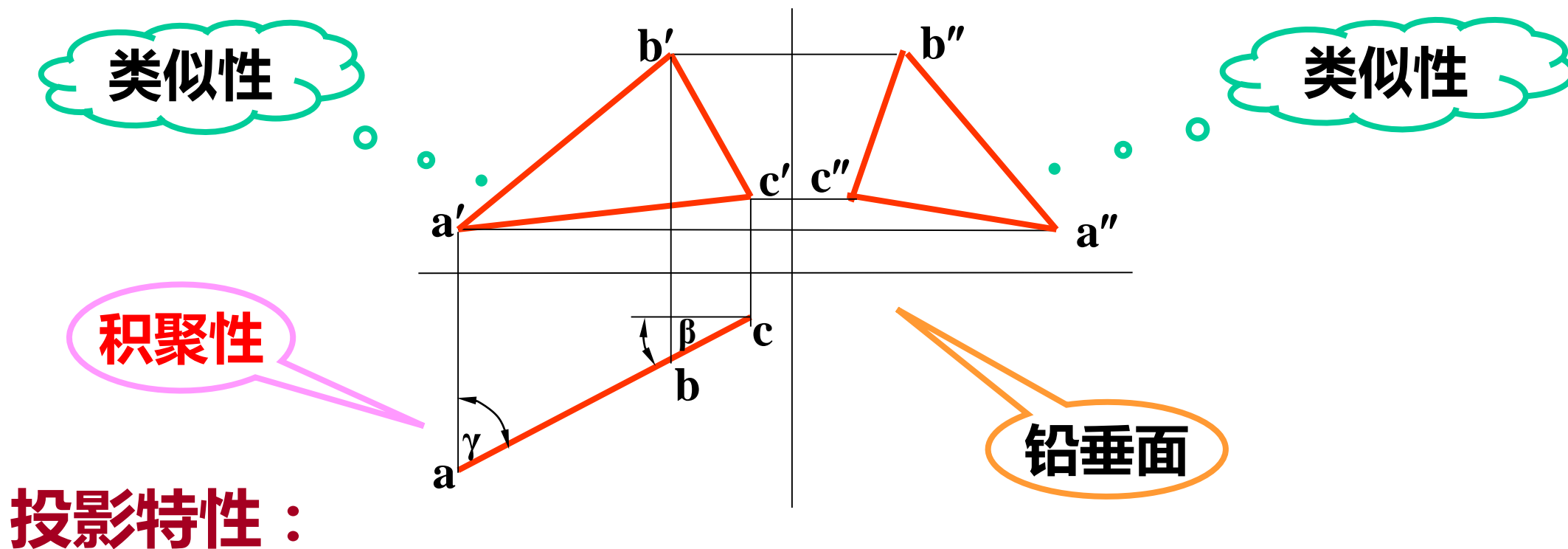
正平面： $//$  V 面

侧平面： $//$  W 面

特殊位置平面

### ■ 一般位置平面

## 1) 投影面垂直面



投影特性：

- 在它垂直的投影面上的投影积聚成直线。且反映空间平面与另外两投影面夹角的大小。
- 另外两个投影面上的投影是类似形。

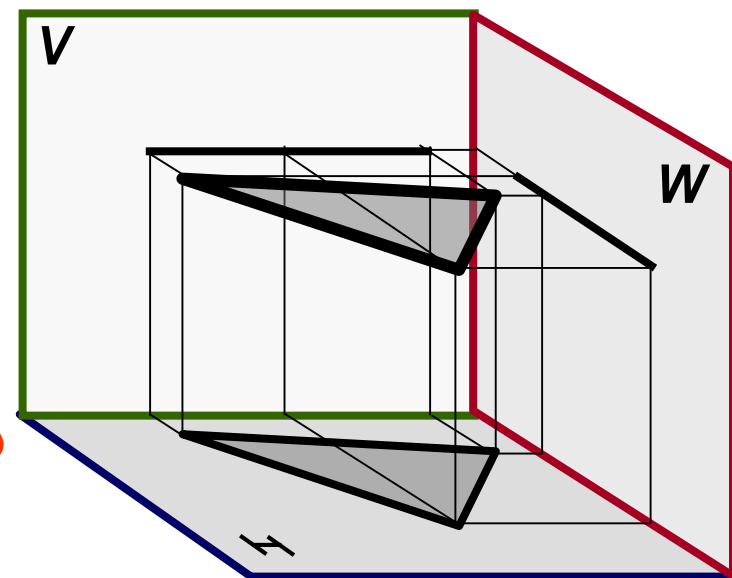
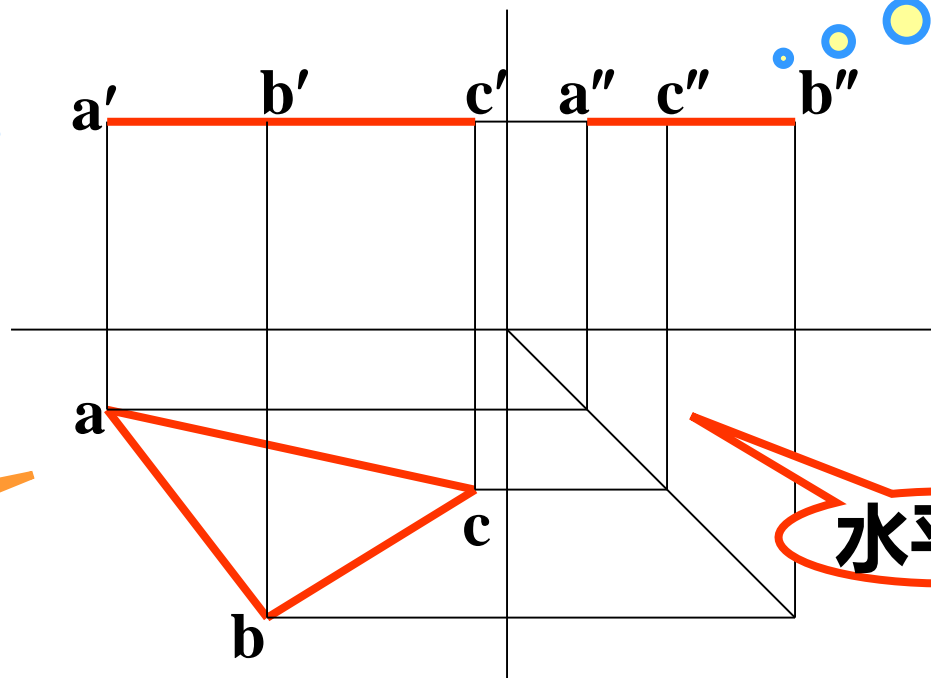
## 2) 投影面平行面

积聚性

积聚性

实形性

水平面



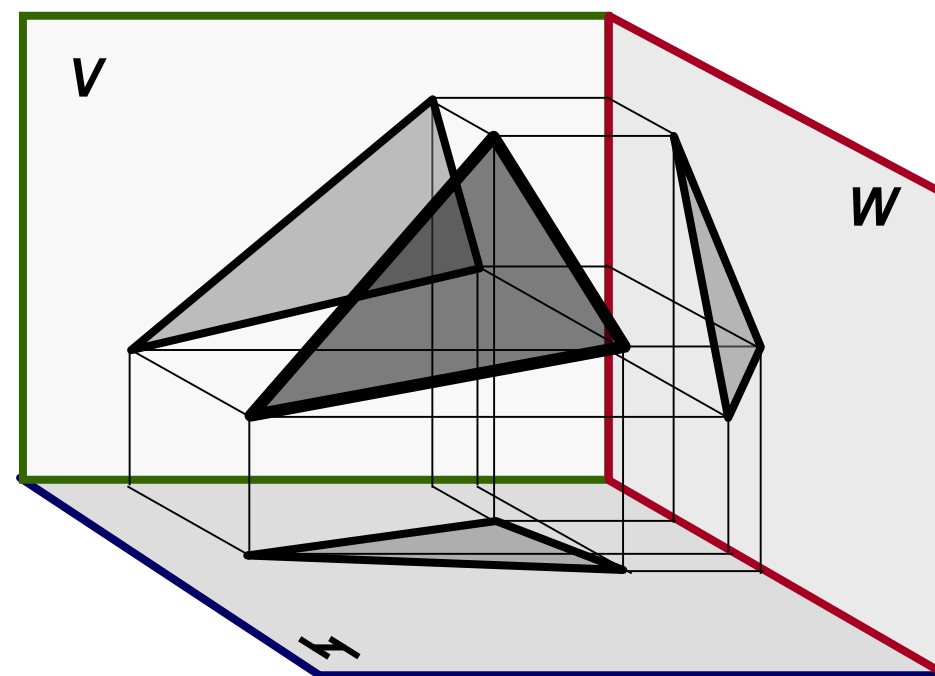
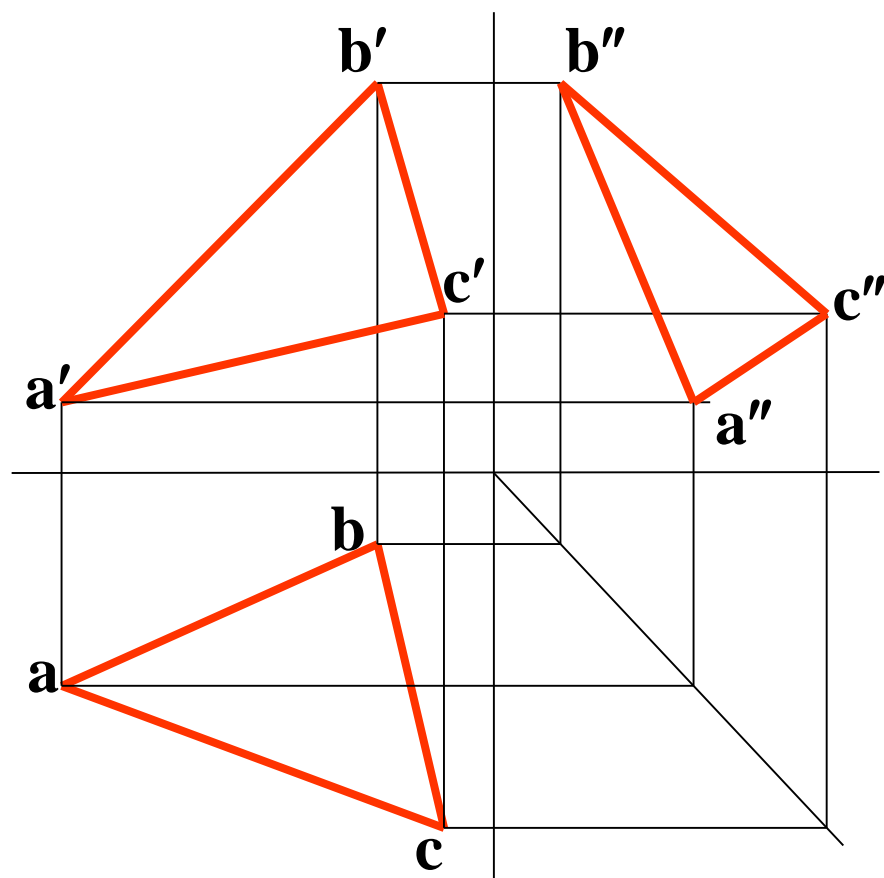
**投影特性：**

- 在它所平行的投影面上的投影反映实形。
- 另两个投影面上的投影积聚成直线，并且与相应的投影轴平行。

### 3) 一般位置平面 对H、V、W 均倾斜的平面

**投影特性：**

■ 三个投影都是空间图形的类似形。



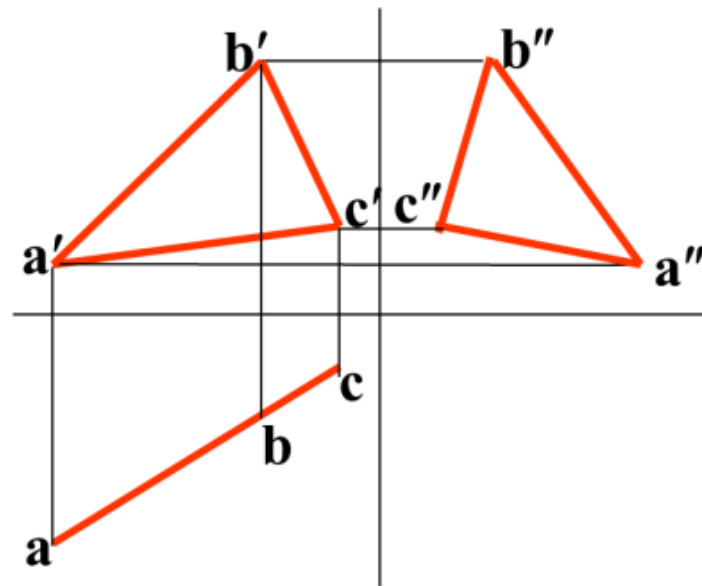
## 归纳

### 平面的投影特性：

#### ■ 投影面垂直面

一个投影积聚成直线（ $\perp$  投影轴）

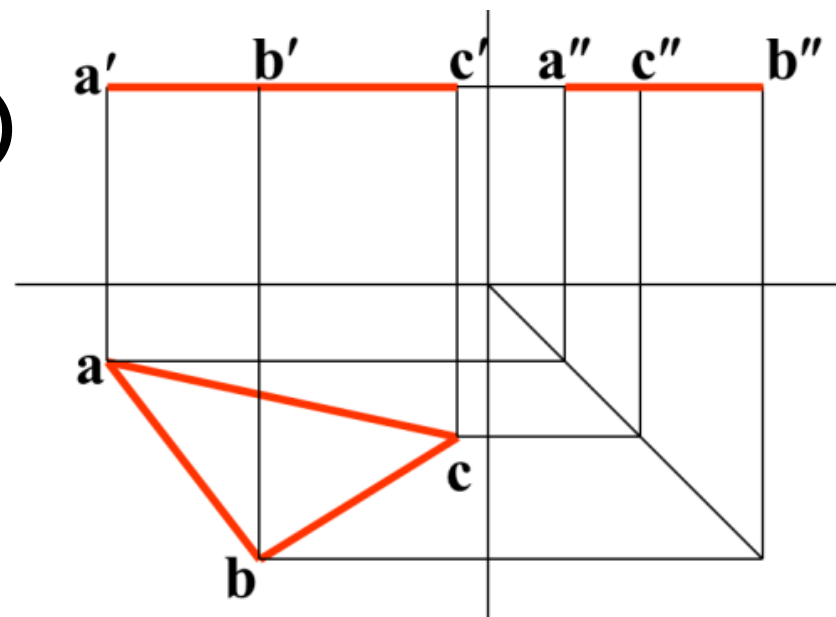
两个投影为类似形



#### ■ 投影面平行面

两个投影积聚成直线（ $\parallel$  投影轴）

一个为实形



#### ■ 一般位置平面

三个投影都为类似形

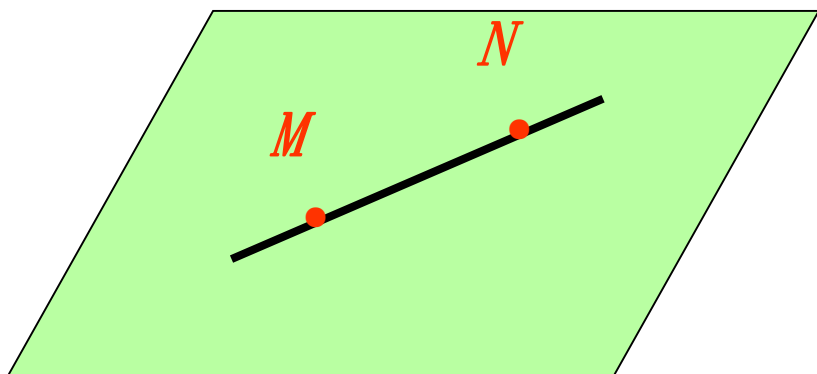
### 3 平面上的直线和点

#### 1) 平面上的直线

#### 判断直线在平面内的方法

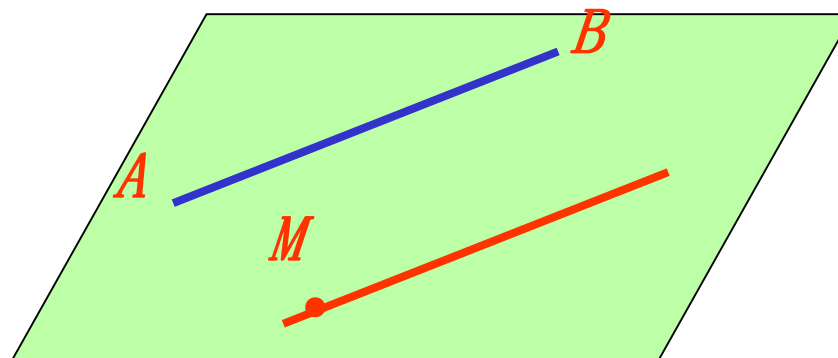
##### 定理一

若一直线过平面上的两点，则此直线必在该平面内



##### 定理二

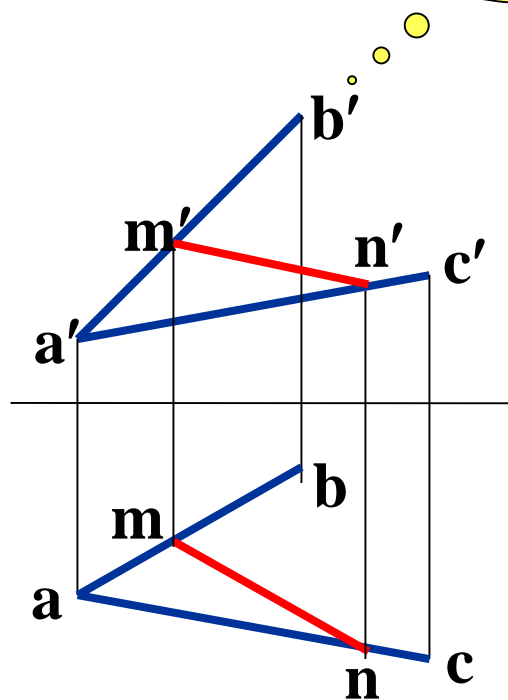
若一直线过平面上的点，且平行于该平面上的另一直线，则此直线在该平面内。



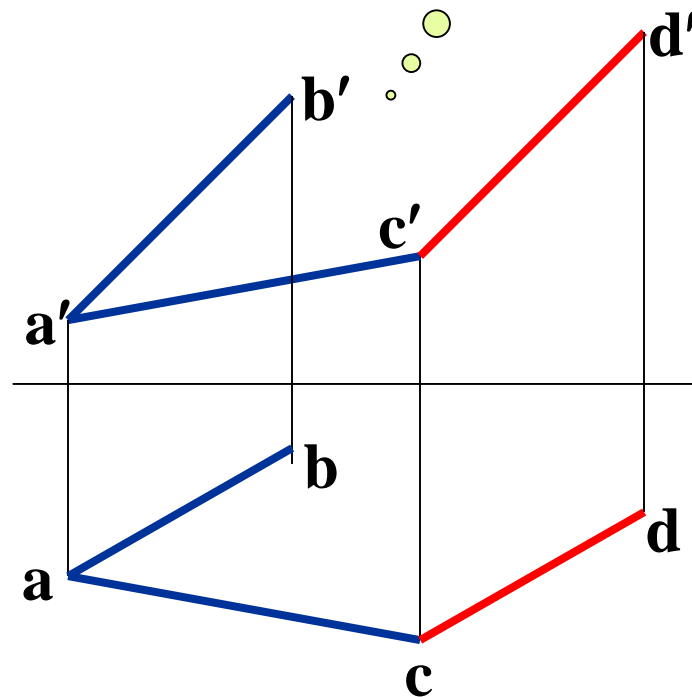


**例1：已知平面由直线AB、AC所确定，试在平面内任作一条直线。**

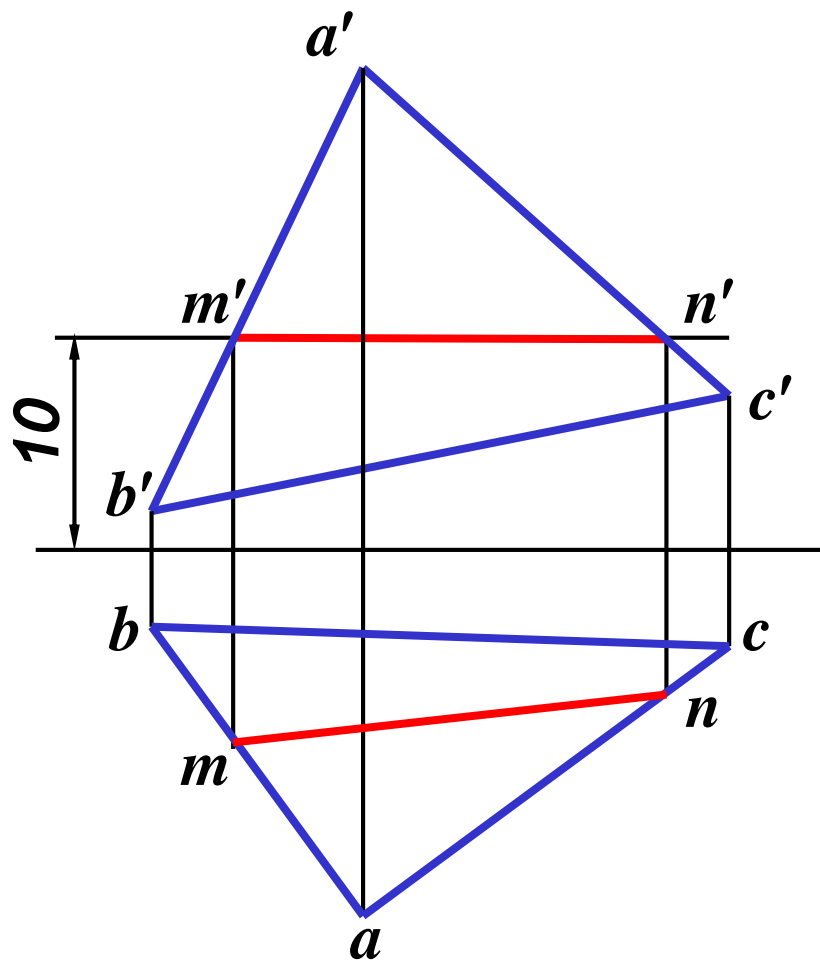
**根据定理一**



**根据定理二**

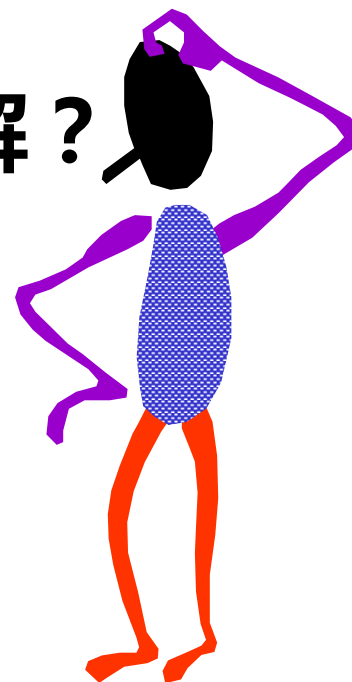


**例2：在平面ABC内作一条水平线，使其到H面的距离为10mm。**



有多少解？

唯一解！



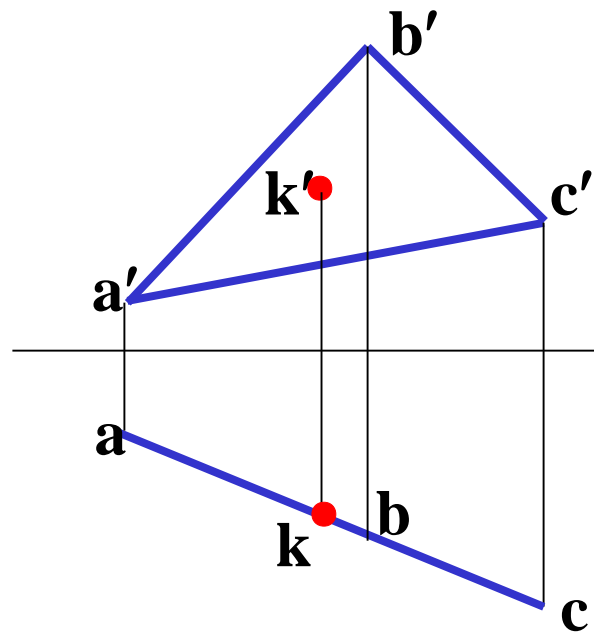
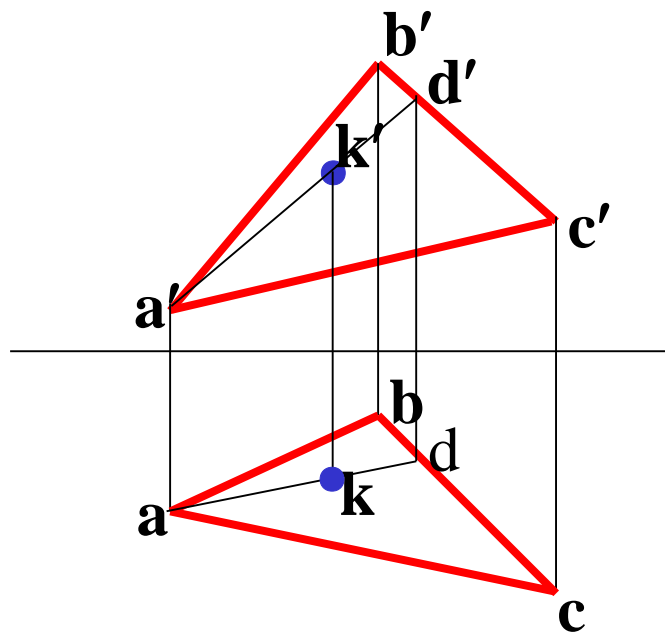
## 2) 平面上的点

**几何定理：若点在平面内，则该点必属于平面内一直线。**

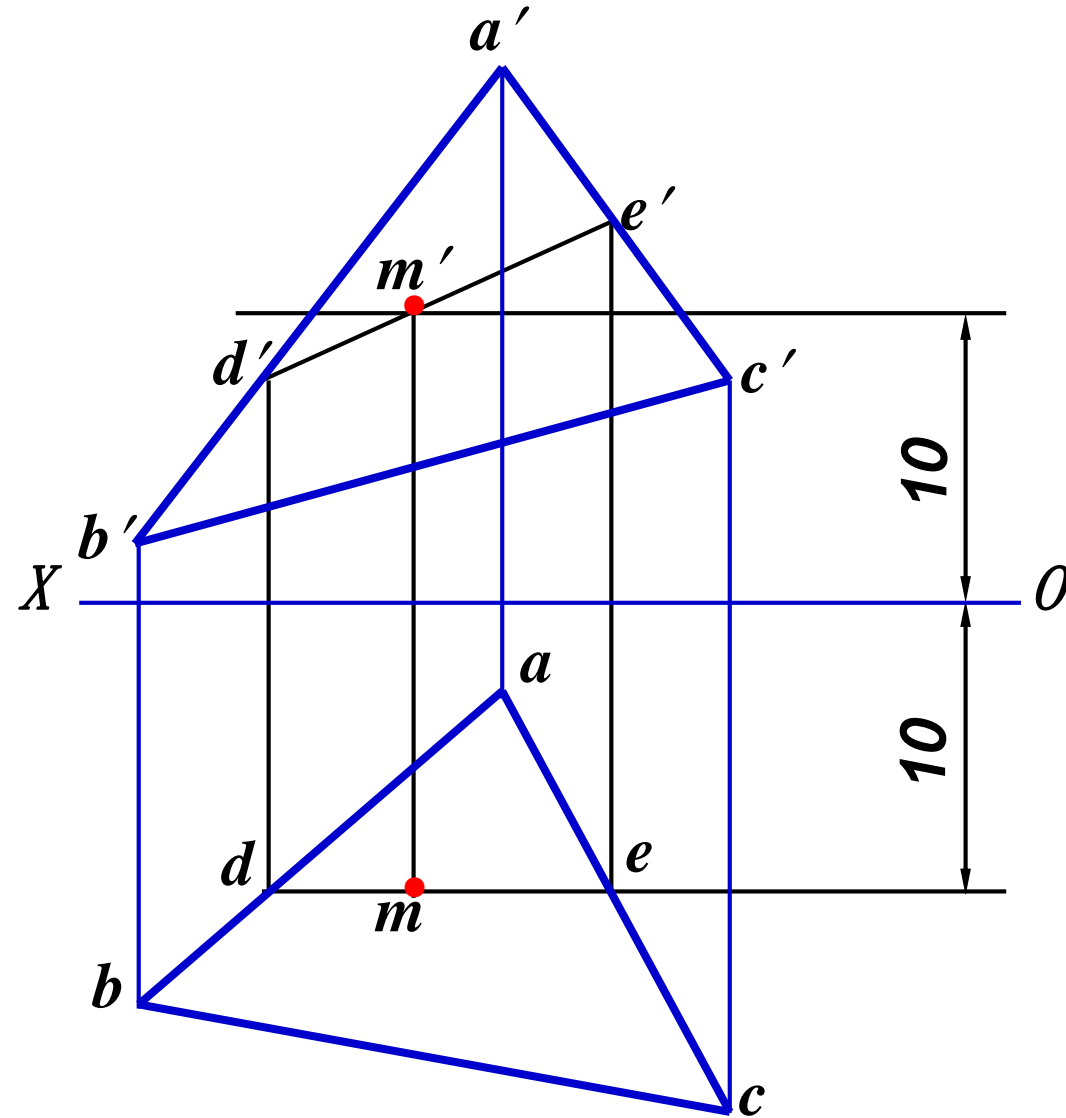
**面上取点的方法：**

**面上取线，线上定点**

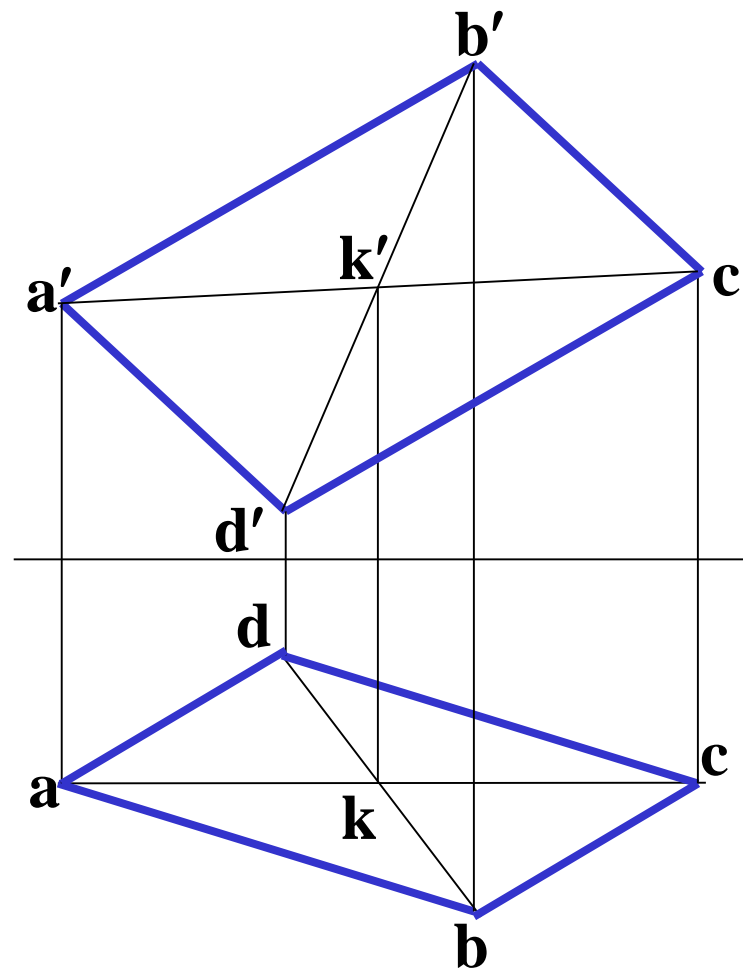
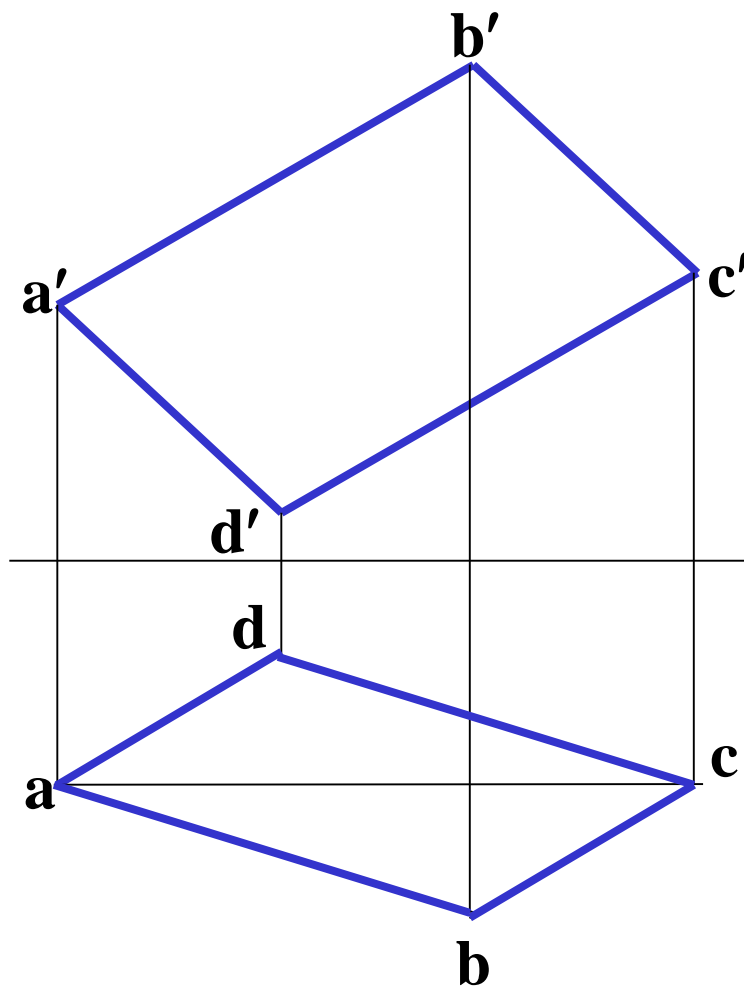
**例：已知K点在平面ABC上，求K点的水平投影。**



例3：在 $\triangle ABC$ 内取一点 $M$ ，并使其到 $V$ 面和 $H$ 面的距离均为10mm。



**例4：已知AC为正平线，补全平行四边形 ABCD的水平投影。**





# 几何元素的投影

## (一) 平面的投影

## (二) 直线与平面及两平面的相对位置

# 点、直线、平面之间的相对位置

## 从属关系

属于直线的点  
属于平面的点  
属于平面的直线

## 相交关系

直线与直线相交  
直线与平面相交  
平面与平面相交

## 平行关系

直线与直线平行  
直线与平面平行  
平面与平面平行

## 垂直关系

直线与直线垂直  
直线与平面垂直  
平面与平面垂直

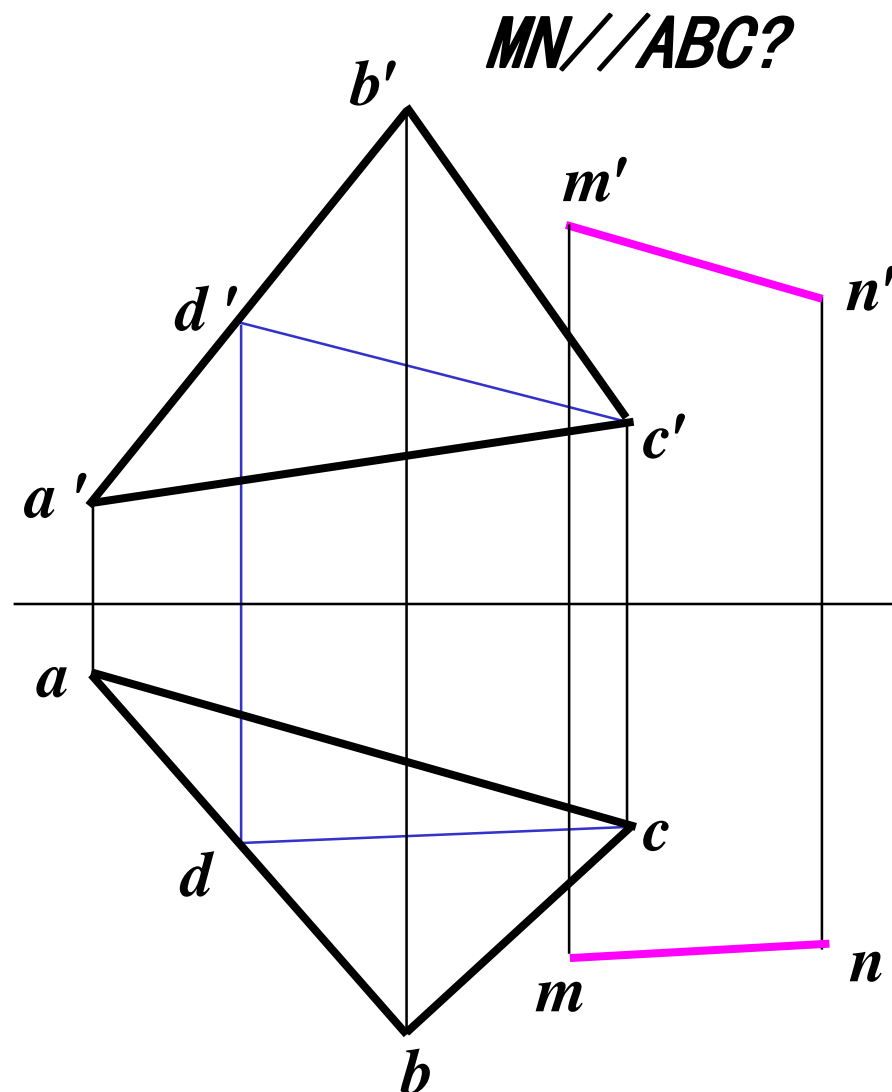
# 一、平行问题

## 1. 直线与平面平行

### 定 理

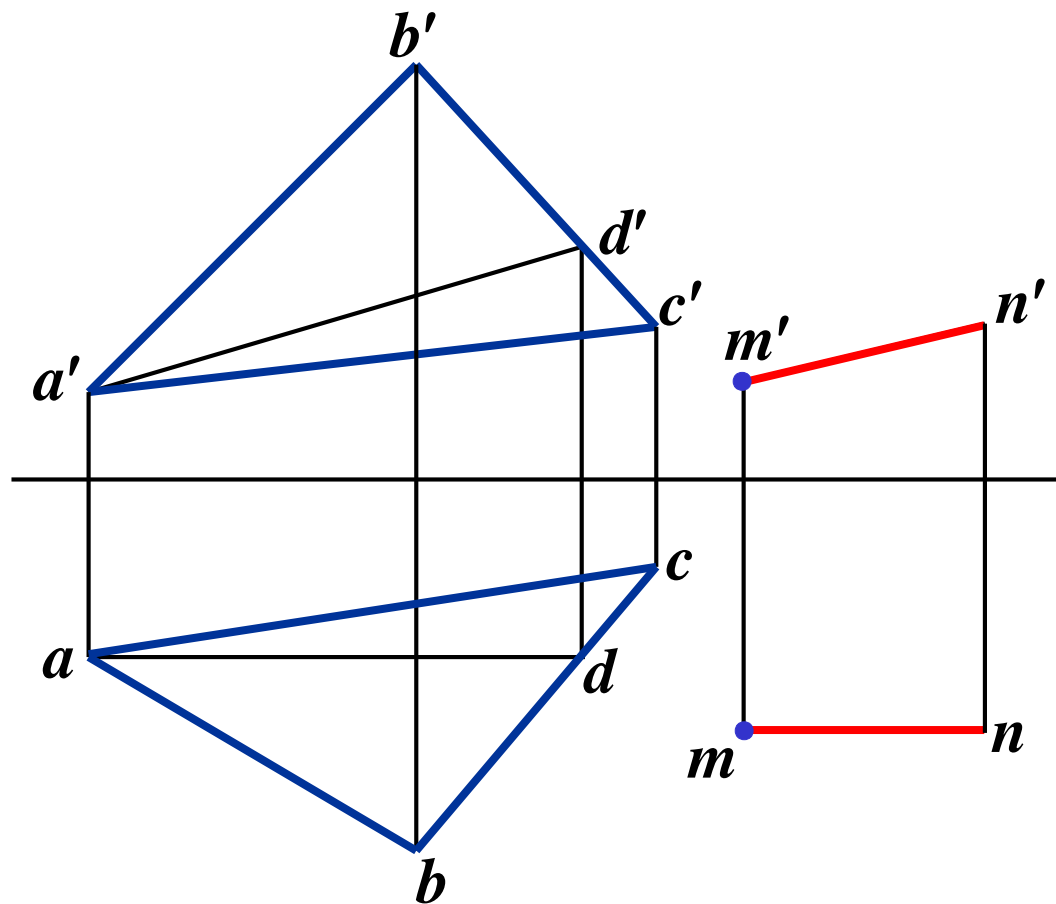
若直线平行于平面内一直线，则该直线平行于平面。

反之，若直线平行于平面，则在平面内必可作一直线与该直线平行。





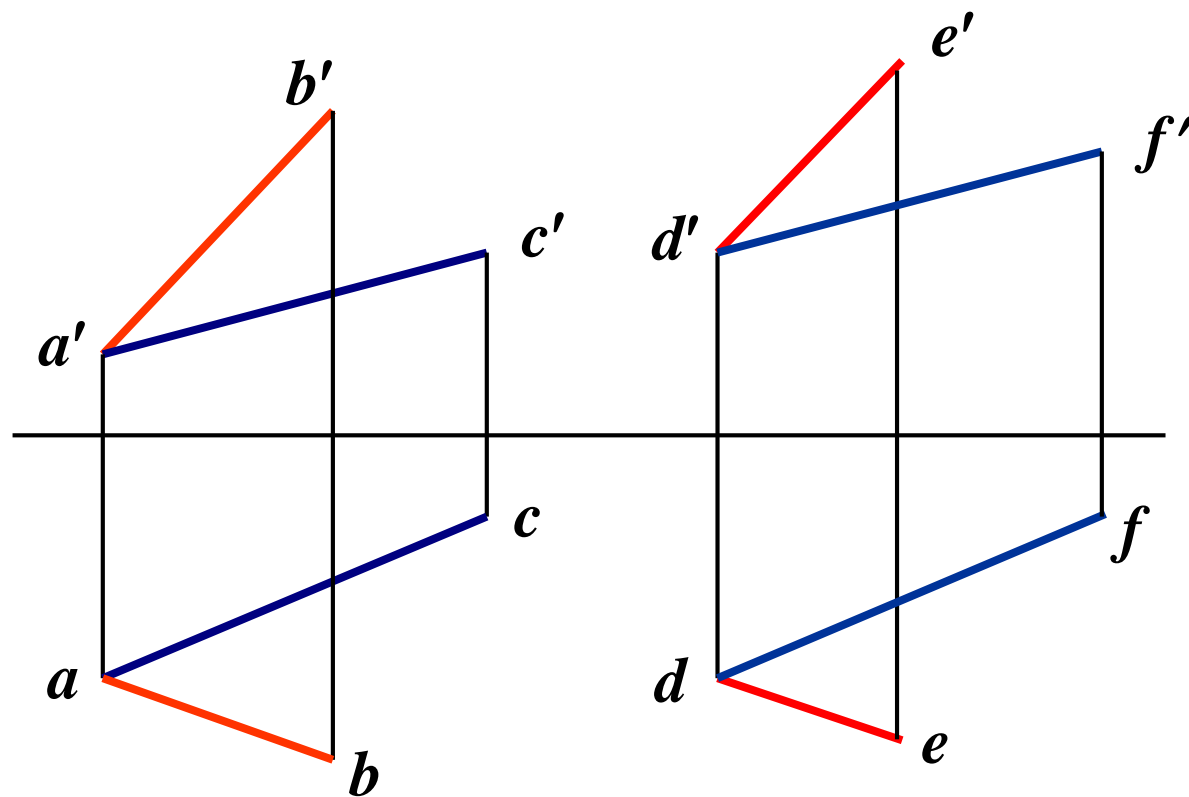
例：过 $M$ 点作直线  $MN$  平行于 $V$ 面和平面 $ABC$ 。



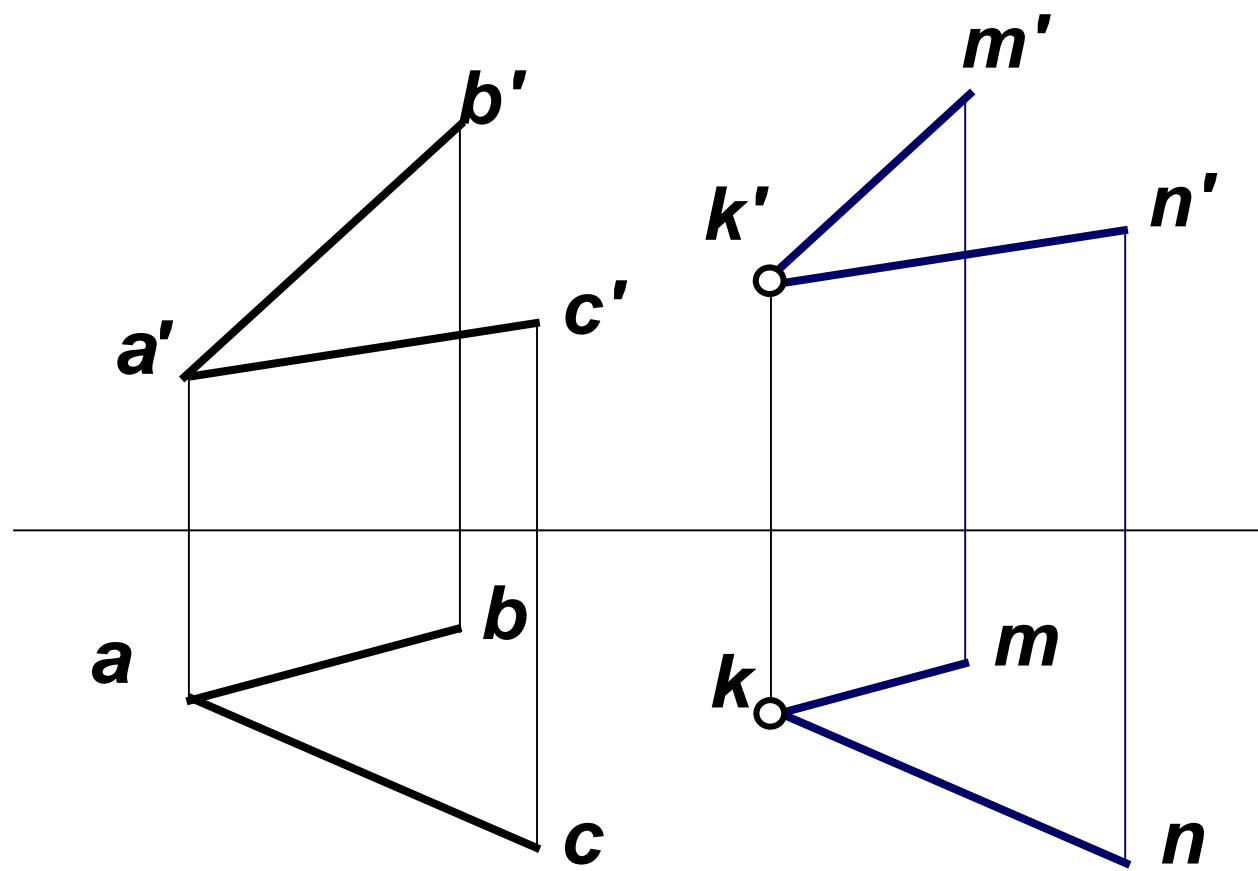
## 2. 两平面平行

### 定 理

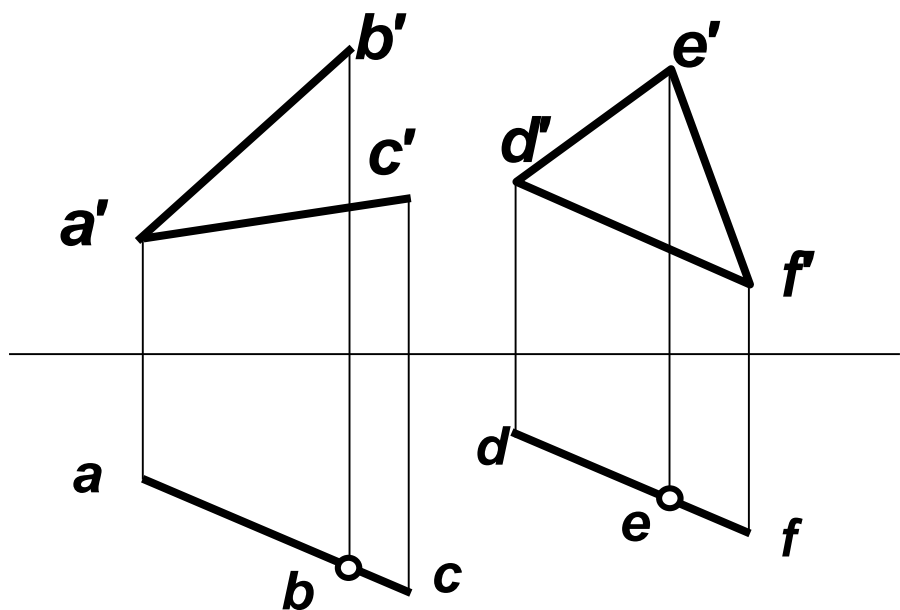
若两平面内有一对  
**相交直线**对应平行，  
则该两平面平行。



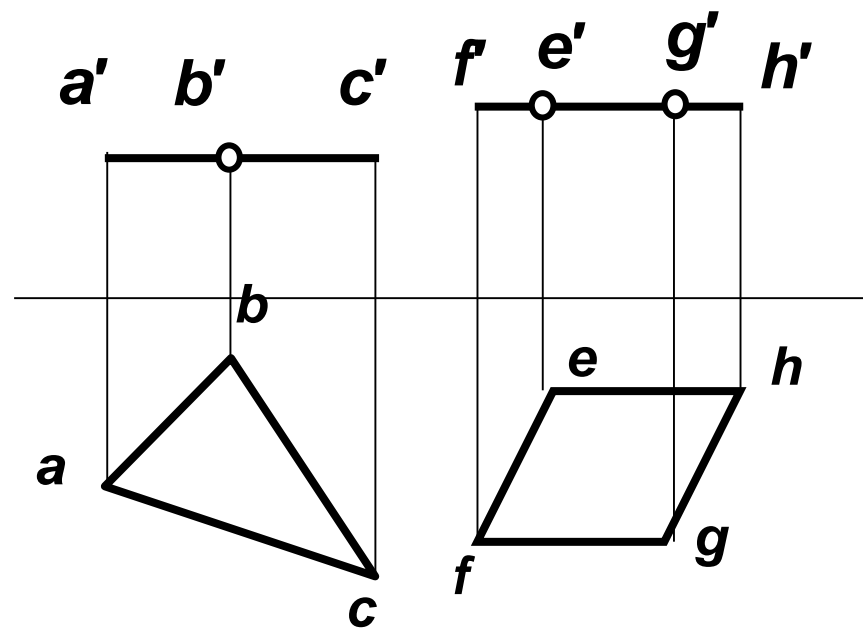
例5：已知平面P ( BAC ) 及点K，过点K作平面Q ( MKN )，使 $Q \parallel P$ 。



**【讨论】** 当相互平行的两个平面垂直于同一投影面时，投影有何特征？



两铅垂面相互平行



两水平面相互平行

**结论：具有积聚性的投影相互平行**

## 二、相交问题

直线与平面相交——交点为共有点

平面与平面相交——交线为共有线

求交问题的本质是求共有点

几何元素相对  
投影面的位置



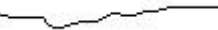
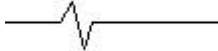



均不具  
有积聚  
性投影

至少其一  
具有积聚  
性投影

一般位置的相交问题

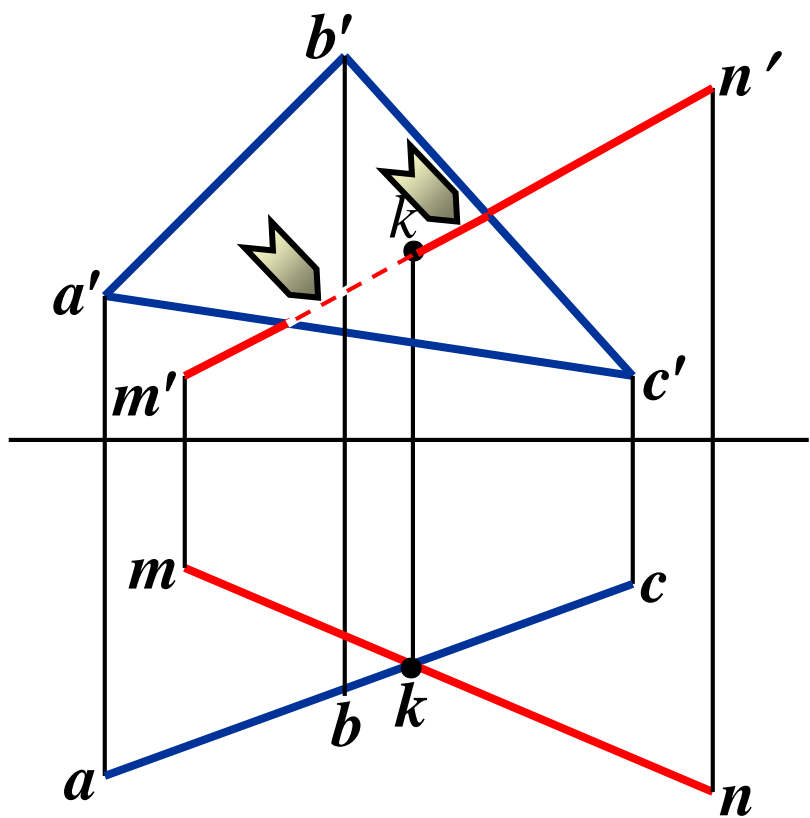
特殊位置的相交问题

## 线型及应用：

图线名称	图线型式	图线宽度	一般应用
粗实线		d	可见轮廓线、可见过渡线
细实线		0.5d	尺寸线及尺寸界线、剖面线、重合断面的轮廓线、螺纹的牙底线及齿轮的齿根线、引出线、分界线及范围线、弯折线、辅助线、不连续的同一表面的连线、成规律分布的相同要素的连线
波浪线		0.5d	断裂处的边界线、视图和剖视的分界线
双折线		0.5d	断裂处的边界线、视图和剖视的分界线
虚线		0.5d	不可见轮廓线、不可见过渡线
点画线		0.5d	轴线、对称中心线、轨迹线、节圆及节线
双点画线		0.5d	相邻辅助零件的轮廓线、极限位置的轮廓线、坯料的轮廓线或毛坯图中制成品的轮廓线、假想投影轮廓线、试验或工艺用结构（成品上不存在）的轮廓线、中断线

## ■ 特殊位置的相交问题

### 例6：求直线与平面的交点K



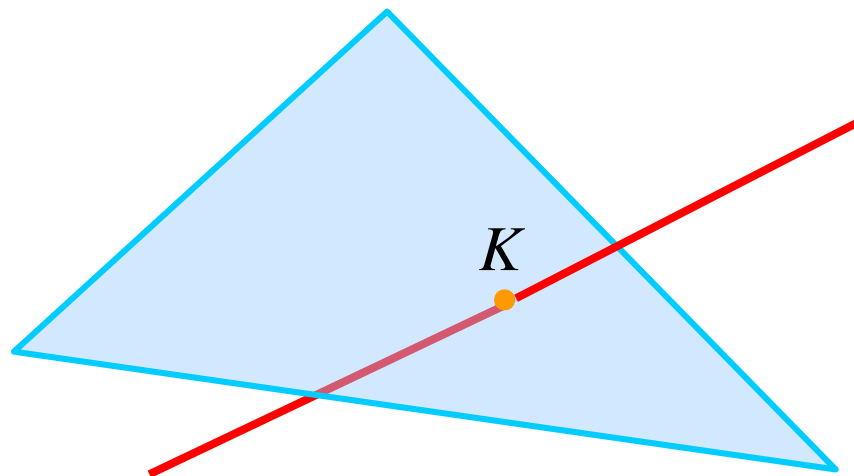
• 分析

• 作图

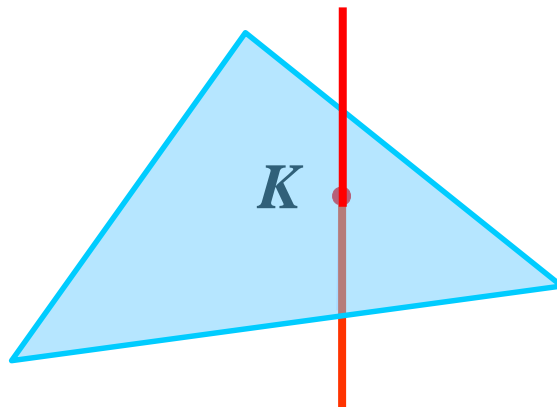
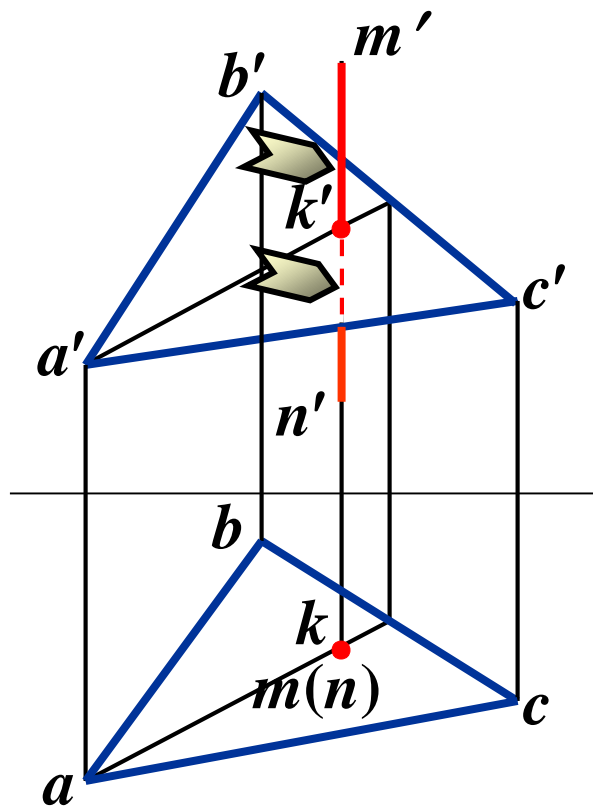
① 求交点

② 判别可见性

V面可见性看H面前后位置  
H面可见性看V面上下位置



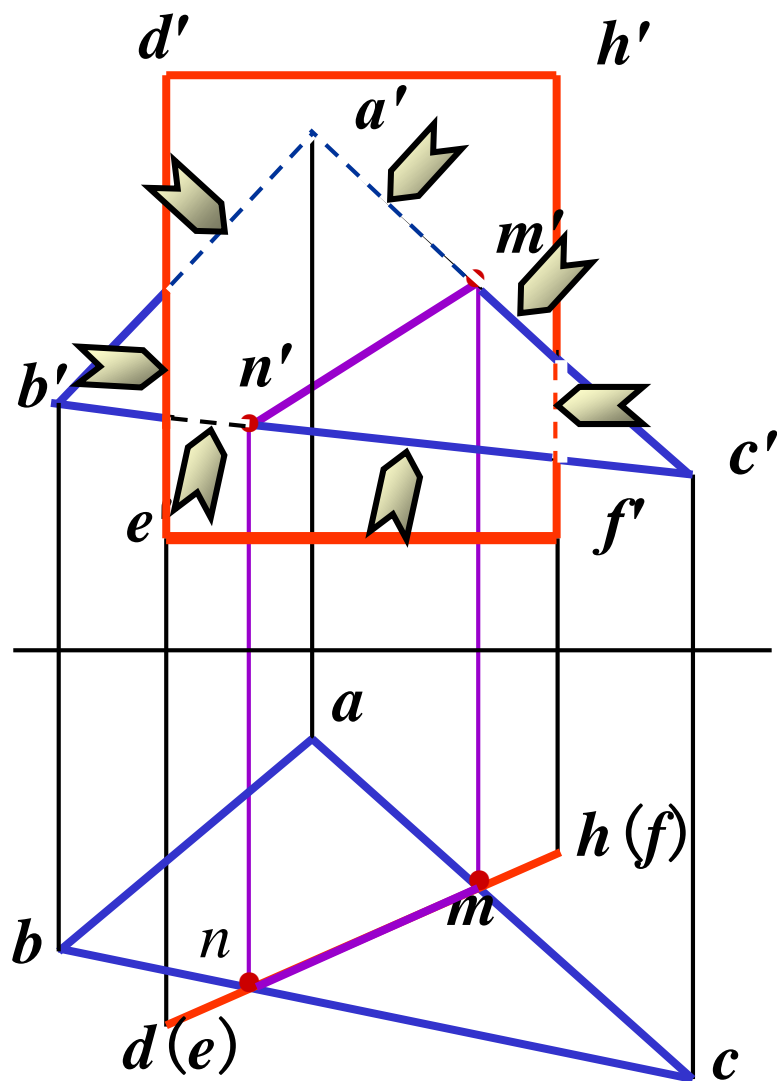
## 例7：求直线与平面的交点 $K$



- 分析
- 作图
  - ① 求交点
  - ② 判别可见性



## 例8：求两平面的交线 $MN$ ，并判别可见性。

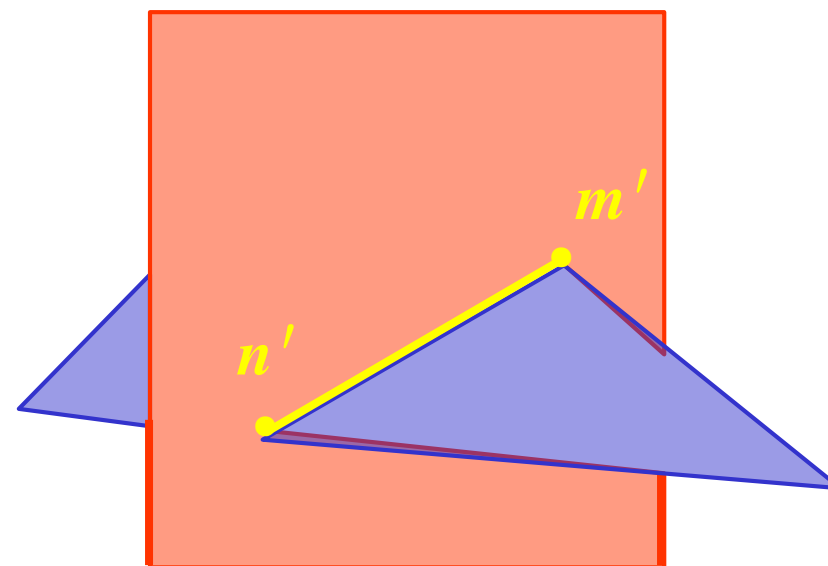


- 分析

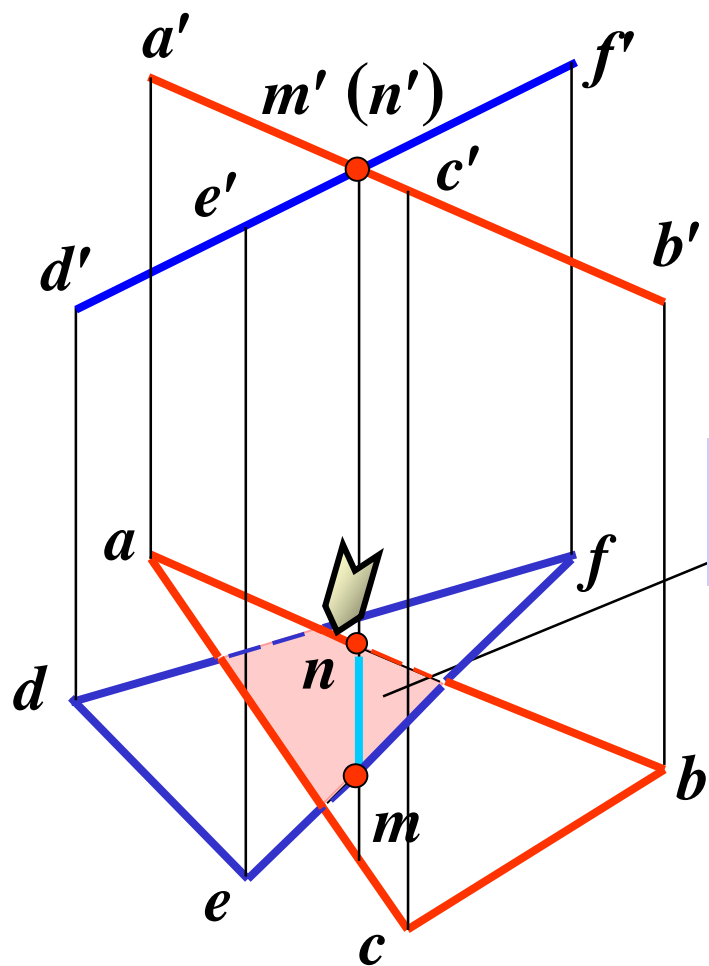
- 作图

- ① 求交线

- ② 判别可见性

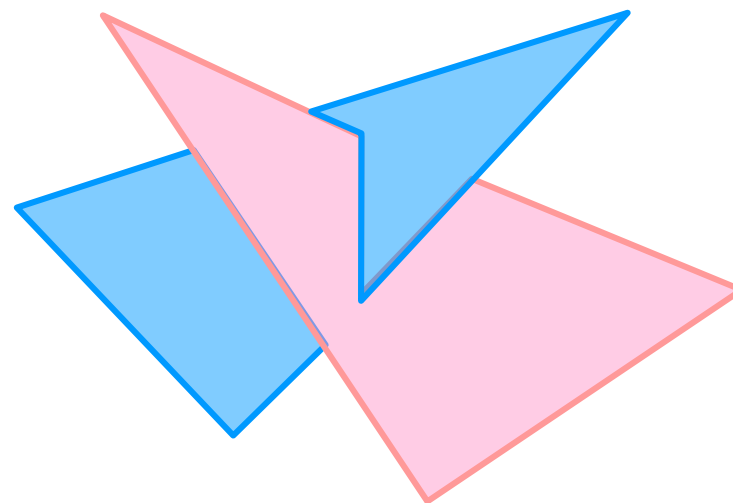


请同学们想一想：  
若两个正垂面相交，其交线是什么线？



只有共有部分  
才会产生交线

交线为正垂线  
判别可见性



## 归纳

**特殊位置相交问题的特点：**

**由于至少相交两元素之一具有积聚性投影，因此交点或交线的一个投影可直接确定。**

**解题要点：**

**利用积聚性投影，将求交问题转化成线上取点或面内取点、线问题。**

# 小 结

## ◆ 平面的投影

平面的表示法  
平面的投影特性

实形性、积聚性、类似性  
特殊位置平面的判别方法

## ◆ 平面内的直线与点

平面内取直线  
平面内取点

两个定理  
过点作线，线上取点

## ◆ 直线与平面及两平面的相对位置

直线与平面平行  
平面与平面平行

定理

直线与平面相交  
平面与平面相交

积聚性、  
可见性判别

直线与平面垂直  
平面与平面垂直

定理

## 本周作业

P14 : 5 ,

P16 : 12 ,

P17 : 2 ,

P18 : 3 ,

P19 : 6 ,

P21 : 9 ,

补 : 2

要求：整齐裁剪并装订，**每页填写**姓名、班级、学号。

**周日下午2点前**课代表交到李兆基A803-3房间交给助教

## 下次讲:

基本体的三投影



清华大学  
Tsinghua University



横看成岭侧成峰，  
远近高低各不同。

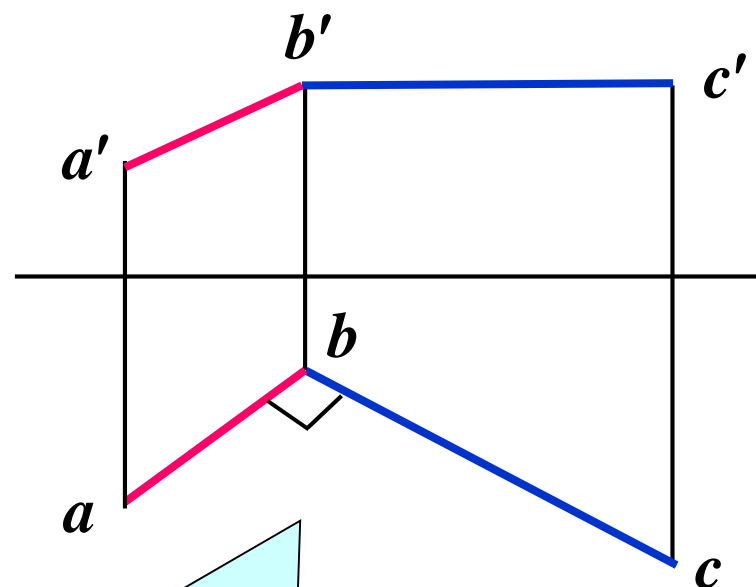
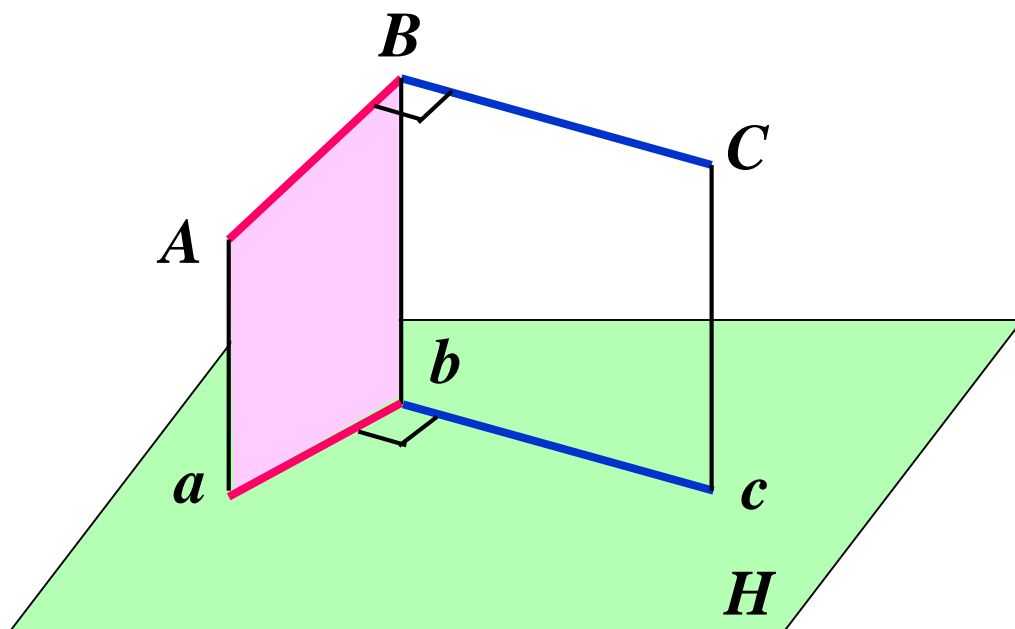


**本次授课结束，  
谢谢大家！**

### 三、垂直问题（不作要求）

#### 直角定理：

若直角有一边平行于投影面，则它在该投影面上的投影仍为直角。反之亦然。



直线在 $H$ 面上的  
投影互相垂直

# 1. 直线与平面垂直

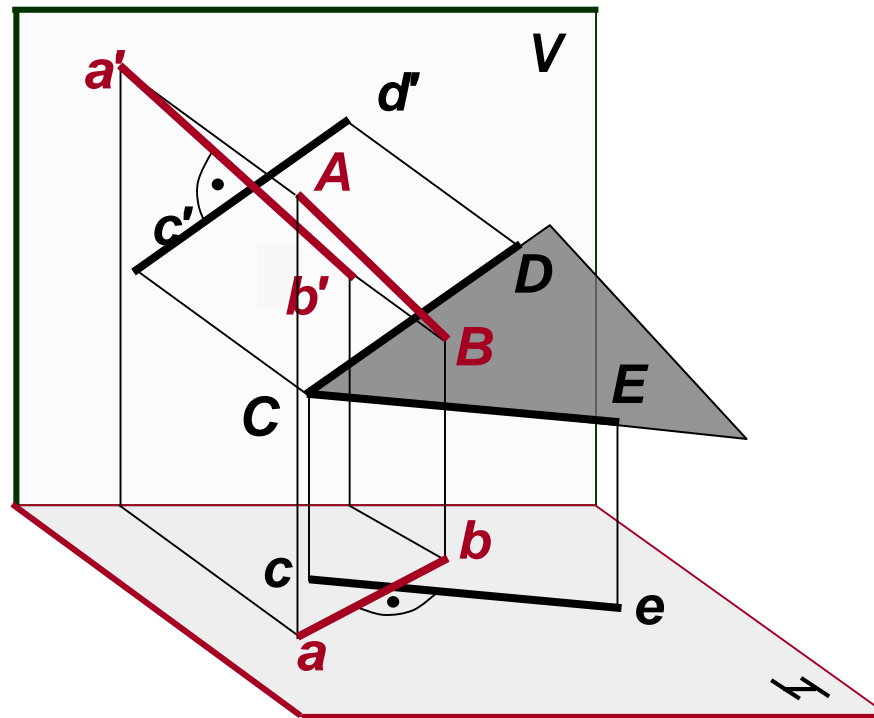
## 几何定理

若一直线垂直于某平面，则此直线必垂直于该平面内的所有直线。

反之，若一直线垂直于某平面内二相交直线，则此直线必垂直于该平面。



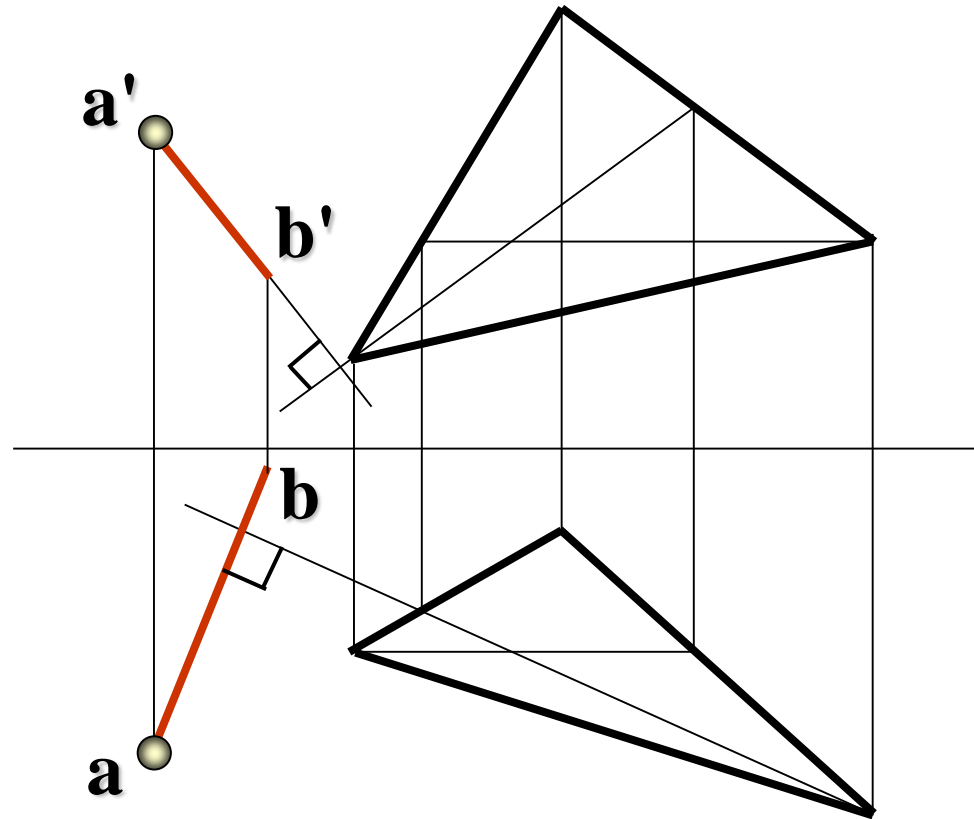
若直线垂直于平面，则直线的水平投影垂直于平面内水平线的水平投影；  
直线的正面投影垂直于平面内正平线的正面投影。



$$\begin{aligned} CE // H, \quad a \ b \perp c \ e \\ CD // V, \quad a' \ b' \perp c' \ d' \end{aligned}$$



## 例9: 过点A作直线垂直于平面



## 2.平面与平面垂直

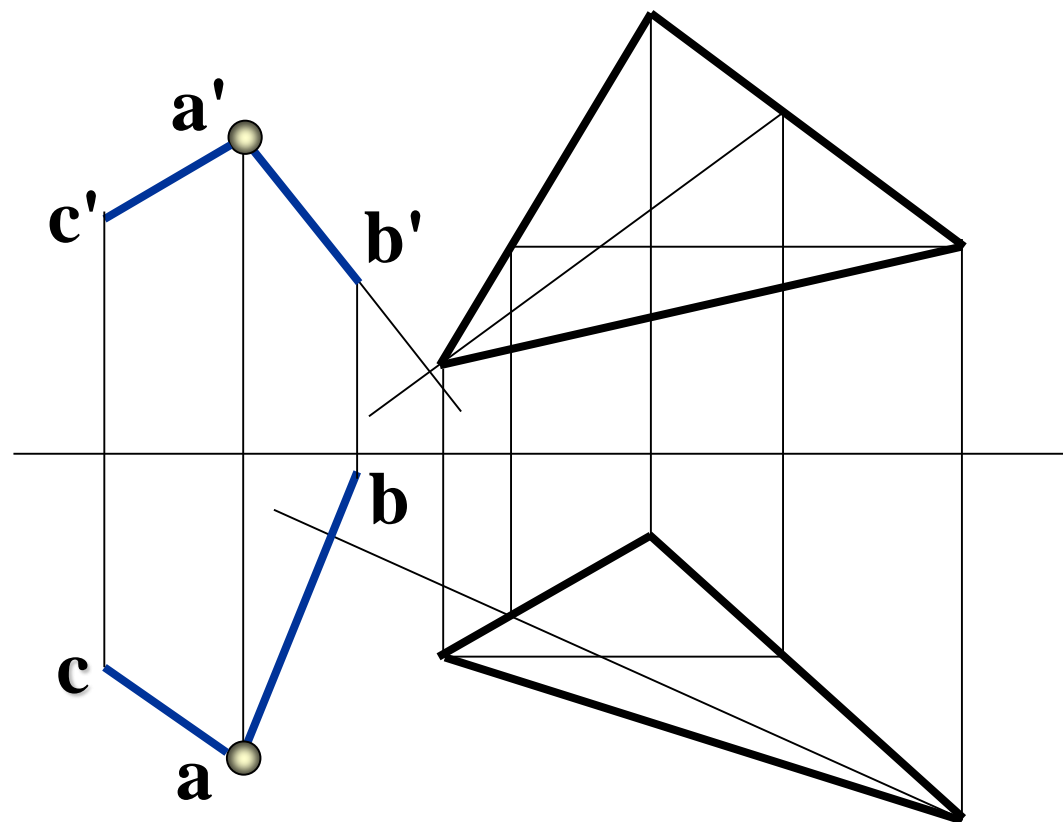
### 几何定理

若一个平面通过另一平面的垂线，则这两个平面垂直。

### 作法

- (1)使一平面经过另一平面的垂线
- (2)使一平面垂直于另一平面上的一条直线

## 例10 : 过点A作平面垂直于平面



平面ABC为所求

**分析** 包含已知平面的垂线的平面 $\perp$ 已知平面

**作图步骤**

- ✧ 过点A作直线 $\perp$ 已知平面
- ✧ 包含该垂线作平面