线性代数 第19讲

11月15日

第五章第1讲　特征值和特征向量

上一讲内容回顾

特征值和特征向量的概念

特征多项式

代数重数与几何重数

定义 4.2.1 (行列式) 定义在全体 n 阶方阵上的函数 δ，如果满足如下性质：

1. 列多线性性：对每个列向量都满足线性性，即对任意 $1 \leqslant i \leqslant n$，都有 $\delta(\cdots, k\boldsymbol{a}_i + k'\boldsymbol{a}_i', \cdots) = k\delta(\cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots) + k'\delta(\cdots, \boldsymbol{a}_i', \cdots)$；
2. 列反对称性：对任意 $1 \leqslant i < j \leqslant n$，都有 $\delta(\cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots) = -\delta(\cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots)$；
3. 单位化条件：$\delta(I_n) = 1$；

则 δ 就称为一个 n 阶**行列式函数**.

$$det(A) \text{ 或 } |A| \text{ 或 } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

命题 4.2.3 1. 如果方阵 A 有两列相等，则 $\det(A) = 0$；

2. 如果方阵 A 不满秩，即不可逆，则 $\det(A) = 0$；

3. 如果方阵 A 有一列为零或有一行为零，则 $\det(A) = 0$.

行列式函数的几个重要性质和消去算法

定理4.2.6 行列式函数有如下性质：

1. 对初等矩阵E，则 $\det(AE) = \det(A)\det(E)$；
2. 设可逆矩阵 $A = E_1 \cdots E_m$，其中 E_i 为初等矩阵，则 $\det(A) = \det(E_1) \cdots \det(E_m)$；
3. $\det(A) \neq 0$ 当且仅当 A 可逆；
4. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$；
5. $\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A)$.

消去法计算行列式

1. 把 A 的某行的倍数加到另一行，或某列的倍数加到另一列，其行列式不变；
2. 把 A 的两行或两列对调，其行列式变为原来的相反数；
3. 把 A 的某行或某列乘以 k，其行列式变为原来的 k 倍.

行列式的（Laplace）展开

例 4.3.1 (三阶行列式) 根据列线性性和行反对称性，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} 1 & a_{32} & a_{33} \\ 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

定义 4.3.2 (代数余子式) 给定 n 阶方阵 A，令 $A\left(\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}\right)$ 表示从 A 划去第 i 行和第 j 列得到的 $n-1$ 阶方阵，则 $M_{ij} = \det\left(A\left(\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}\right)\right)$，称为元素 a_{ij} 的**余子式**；而 $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij} = (-1)^{i+j}\det\left(A\left(\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}\right)\right)$，称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

定理 4.3.3 给定 n 阶方阵 $A=[a_{ij}]$，则函数 $a_{11}C_{11}+\cdots+a_{n1}C_{n1}$ 是行列式函数，即

$$\det(A)=a_{11}C_{11}+\cdots+a_{n1}C_{n1},$$

这称为行列式按第一列的展开式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\cdot\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{21}\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + a_{n1}\cdot(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\cdot C_{11} + a_{21}\cdot C_{21} + \cdots + a_{n1}\cdot C_{n1}$$

命题 4.3.6 令 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$，再记第 j 列元素的代数余子式组成的向量为 $\boldsymbol{c}_j = \begin{bmatrix} C_{1j} \\ \vdots \\ C_{nj} \end{bmatrix}$. 则当 $j' \neq j$ 时，$\boldsymbol{a}_{j'}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{c}_j = 0$；当 $j' = j$ 时，有 $\boldsymbol{a}_{j'}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{c}_j = \det(A)$.

$$\boldsymbol{a}_{j'}^T \boldsymbol{c}_j = a_{j'1} C_{j1} + a_{j'2} C_{j2} + \cdots + a_{j'n} C_{jn}$$

$$\boldsymbol{a}_{j'}^T \boldsymbol{c}_j = \begin{array}{c} \\ \left| \begin{matrix} \cdots & a_{1j'} & \cdots & a_{1j'} & \cdots \\ \cdots & a_{2j'} & \cdots & a_{2j'} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{nj'} & \cdots & a_{nj'} & \cdots \end{matrix} \right| \\ \begin{matrix} \quad & j'\text{ 列} & \quad & j\text{ 列} & \quad \end{matrix} \end{array}, \quad \boldsymbol{a}_j^T \boldsymbol{c}_j = |A| = \begin{array}{c} \\ \left| \begin{matrix} \cdots & a_{1j'} & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \cdots & a_{2j'} & \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{nj'} & \cdots & a_{nj} & \cdots \end{matrix} \right| \\ \begin{matrix} \quad & j'\text{ 列} & \quad & j\text{ 列} & \quad \end{matrix} \end{array}$$

$$\boldsymbol{b}^T \boldsymbol{c}_j = b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \cdots + b_n C_{nj} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,j-1} & b_{n-1} & a_{n-1,j+1} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对矩阵 $A = [a_{ij}]$，记 $C = [C_{ij}]_{n\times n}$，即 C 的 (i,j) 元素是 a_{ij} 的代数余子式，矩阵 C^{T} 常称为 A 的**伴随矩阵**.

推论 4.3.7 (逆矩阵公式) 对可逆矩阵 A，$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}C^{\mathrm{T}}$.

证. 命题 4.3.6 说明 $C^{\mathrm{T}}A = \det(A)I_n$. 立得. □

矩阵 A 的伴随矩阵 $$A^* = C^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

$$AA^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix} = |A|I$$

当 $|A| \neq 0$ 时，A 和 A^* 可逆，$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^*$，$(A^*)^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A$

考虑线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

$$AX = b \Rightarrow A^*AX = A^*b$$

当 $|A| \neq 0$ 时，

$$AA^* = A^*A = |A|I$$

$$|A|X = A^*b = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1C_{11} + b_2C_{21} + \cdots + b_nC_{n1} \\ b_1C_{12} + b_2C_{22} + \cdots + b_nC_{n2} \\ \vdots \\ b_1C_{1n} + b_2C_{2n} + \cdots + b_nC_{nn} \end{bmatrix},$$

Cramer法则

$$b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \cdots + b_nC_{nj} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |B_j|, \quad X = \frac{1}{|A|}A^*b = \begin{bmatrix} |B_1|/|A| \\ |B_2|/|A| \\ \vdots \\ |B_n|/|A| \end{bmatrix}$$

推论 4.3.8 (Cramer 法则) 给定方阵 A，线性方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解，当且仅当 $\det(A) \neq 0$，且有唯一解时，唯一解为

$$x_1 = \frac{\det(B_1)}{\det(A)}, \cdots, x_n = \frac{\det(B_n)}{\det(A)},$$

其中 B_j 是把 A 的第 j 列换成 $\boldsymbol{b}$ 得到的矩阵.

命题 4.3.11 (行列式完全展开) 如下等式成立：

1. $\det(A) = \sum\limits_{\text{排列 } \sigma} \operatorname{sign}(\sigma) a_{\sigma_1 1} \cdots a_{\sigma_n n}$.

2. $\det(A) = \sum\limits_{\text{排列 } \sigma} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma_1} \cdots a_{n\sigma_n}$.

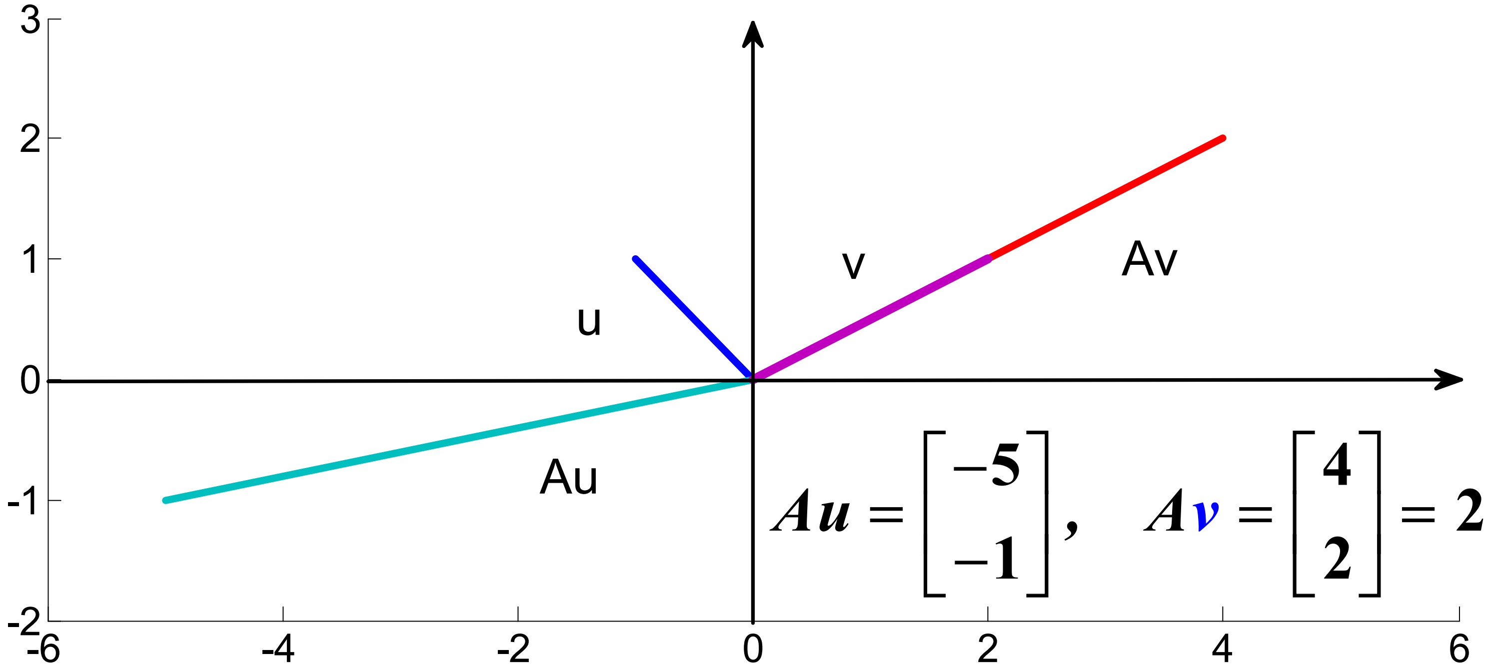
练习 4.3.3 计算 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

练习 4.3.20 由 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$，证明，$1, \cdots, n$ 的所有排列中，奇、偶排列各占一半.

$$Ax = \lambda x$$

特征值和特征向量

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$Au = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad Av = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

矩阵的特征值和特征向量

定义5.2.1 (特征值) 给定 n 阶方阵 A，如果对 $\lambda \in \mathbb{C}$，存在非零向量 $x \in \mathbb{C}^n$，使得 $Ax = \lambda x$，则称数 λ 为方阵 A（在 $\mathbb{C}$ 上）的一个特征值，而称非零向量 x 为方阵 A（在 $\mathbb{C}$ 上）的一个属于特征值 λ 的特征向量.

1. 只有方阵才有特征值和特征向量；
2. 零向量**不是**特征向量；
3. 如果 x 是特征向量，则对任意 $k \neq 0$，kx 都是特征向量.

二元组 (λ, x) 常称为方阵 A 的一个特征对.

特别地，对实方阵 A，如果特征对 (λ, x) 满足 $\lambda \in \mathbb{R}$，$x \in \mathbb{R}^n$，

则分别称二者为 A 在 $\mathbb{R}$ 上的特征值和特征向量，

称该二元组为 A 在 $\mathbb{R}$ 上的特征对.

练习 5.2.11 设 n 阶实方阵 A 满足 $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$，其中 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n, \boldsymbol{v}\neq\mathbf{0}$.

1. 设 $A\boldsymbol{w}=\mu\boldsymbol{w}$，且 $\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^n, \lambda\neq\mu$，证明 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 正交.
2. 证明，实对称矩阵的属于不同特征值的实特征向量正交.

证明：

(1) $v^T Aw = v^T \mu w = \mu v^T w$,

$$v^T Aw = \left(A^T v\right)^T w = w^T A^T v = w^T \lambda v = \lambda w^T v = \lambda v^T w$$

$$\mu v^T w = \lambda v^T w \Rightarrow (\mu-\lambda) v^T w = 0 \ \Rightarrow v^T w = 0.$$

(2) 设 μ 和 λ 是对称矩阵 A 的两个互不相等的特征值 w 和 v 分别是属于特征值 μ 和 λ 的特征向量，

即 $Aw=\mu w,\quad Av=\lambda v$

$$\mu v^T w = v^T Aw = \left(A^T v\right)^T w = w^T Av = w^T \lambda v = \lambda v^T w$$

$$\mu v^T w = \lambda v^T w \Rightarrow (\mu-\lambda) v^T w = 0 \ \Rightarrow v^T w = 0.$$

练习 5.2.6 给定向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$，计算 $A=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$ 的所有特征对.

如何计算矩阵的特征值和特征向量

(λ_0, x_0) 是一个特征对，当且仅当 $Ax_0 = \lambda_0 x_0$，即 $(\lambda_0 I - A)x_0 = 0$，
注意到，特征向量 $x_0 \neq 0$，齐次线性方程组有非零解，
因此 λ_0 是 A 的特征值当且仅当 $(\lambda_0 I - A)$ 不可逆，
也等价于其行列式 $\det(\lambda_0 I - A) = 0$.

由此我们首先得到如下结论.

命题5.2.3　数 λ_0 是 A 的特征值，当且仅当 $\det(\lambda_0 I_n - A) = 0$.
特别地，0 是 A 的特征值当且仅当 A 不可逆.

矩阵A的特征多项式

$$p_A(\lambda) := \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为矩阵 A 的**特征多项式**.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

$$(\lambda_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x}_1 = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_2 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x}_2 = k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

定理 5.2.4 设 n 阶方阵 A 的特征多项式为 $p_A(\lambda)$，那么

1. 数 λ_0 是 A 的特征值，当且仅当 $p_A(\lambda_0)=0$，即 λ_0 是特征多项式 $p_A(\lambda)$ 的根.

2. 向量 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{C}^n$ 是 A 的属于 λ_0 的特征向量，当且仅当 $\boldsymbol{x}_0\in\mathcal{N}(\lambda_0 I_n-A)$ 且 $\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $\lambda_0 I_n-A$ 的零空间中的非零向量.

解空间 $\mathcal{N}(\lambda_0 I_n-A)$ 称为 A 的属于 λ_0 的**特征子空间**. 注意到特征向量不为零，

$$\{A\text{ 的属于 }\lambda_0\text{ 的特征向量}\}=\mathcal{N}(\lambda_0 I_n-A)\backslash\{\boldsymbol{0}\}.$$

定理 5.2.4 给出了求解矩阵的特征值、特征子空间和特征向量的方法：

1. 先计算 A 的特征多项式 $p_A(\lambda)$；

2. 然后计算 $p_A(\lambda)$ 的所有根，即为 A 的全部特征值；

3. 如果有特征值，则对每个特征值 λ_i，计算其特征子空间 $\mathcal{N}(\lambda_i I_n-A)$ 的一组基 $\boldsymbol{x}_{i,1},\cdots,\boldsymbol{x}_{i,r_i}$，则属于 λ_i 的全部特征向量就是

$$\mathcal{N}(\lambda_i I_n-A)\backslash\{\boldsymbol{0}\}=\left\{k_1\boldsymbol{x}_{i,1}+\cdots+k_{r_i}\boldsymbol{x}_{i,r_i}\,\middle|\,k_1,\cdots,k_{r_i}\text{ 不全为 }0\right\}.$$

例 5.2.8 设 $A = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 5 \\ -2 & 3 & -2 \\ -10 & 10 & -8 \end{bmatrix}$. 求 A 在 $\mathbb{C}$ 上和在 $\mathbb{R}$ 上的特征值和特征向量.

先计算特征多项式

$$
\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\
&= \begin{vmatrix} \lambda-7 & 5 & -5 \\ 2 & \lambda-3 & 2 \\ 10 & -10 & \lambda+8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 5 & -5 \\ \lambda-1 & \lambda-3 & 2 \\ 0 & -10 & \lambda+8 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-3 & 2 \\ -10 & \lambda+8 \end{vmatrix} - (\lambda-1)\begin{vmatrix} 5 & -5 \\ -10 & \lambda+8 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-2)\left((\lambda-3)(\lambda+8)-2(-10)\right) - (\lambda-1)\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -10 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-2)(\lambda^2+1).
\end{aligned}
$$

矩阵 A 只有三个特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \mathrm{i}, \lambda_3 = -\mathrm{i}$，其中 λ_1 是实特征值.

例 5.2.8 设 $A = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 5 \\ -2 & 3 & -2 \\ -10 & 10 & -8 \end{bmatrix}$. 求 A 在 $\mathbb{C}$ 上和在 $\mathbb{R}$ 上的特征值和特征向量.

矩阵 A 只有三个特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \mathrm{i}, \lambda_3 = -\mathrm{i}$，其中 λ_1 是实特征值.

再来计算特征向量. 当 $\lambda_1 = 2$ 时，$\lambda_1 I_3 - A = \begin{bmatrix} -5 & 5 & -5 \\ 2 & -1 & 2 \\ 10 & -10 & 10 \end{bmatrix}$，特征子空间

$\mathcal{N}(\lambda_1 I_3 - A)$ 的一组基 $\boldsymbol{x}_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

当 $\lambda_2 = \mathrm{i}$ 时，$\lambda_2 I_3 - A = \begin{bmatrix} -7+\mathrm{i} & 5 & -5 \\ 2 & -3+\mathrm{i} & 2 \\ 10 & -10 & 8+\mathrm{i} \end{bmatrix}$，特征子空间 $\mathcal{N}(\lambda_2 I_3 - A)$ 的一组基 $\boldsymbol{x}_{2,1} = \begin{bmatrix} 1-2\mathrm{i} \\ -1+\mathrm{i} \\ -2+4\mathrm{i} \end{bmatrix}$.

当 $\lambda_3 = -\mathrm{i}$ 时，$\lambda_3 I_3 - A = \begin{bmatrix} -7-\mathrm{i} & 5 & -5 \\ 2 & -3-\mathrm{i} & 2 \\ 10 & -10 & 8-\mathrm{i} \end{bmatrix}$，特征子空间 $\mathcal{N}(\lambda_2 I_3 - A)$ 的一组基 $\boldsymbol{x}_{3,1} = \begin{bmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ -1-\mathrm{i} \\ -2-4\mathrm{i} \end{bmatrix}$.

定理 5.1.3 (代数学基本定理) 复系数一元 n 次多项式在 $\mathbb{C}$ 上至少有一个根.

该定理十分重要，但不能通过纯粹的代数方法证明，这里仅仅列出结论. 容易由此得到如下推论.

推论 5.1.4 复系数一元 n 次多项式 $p(x)$，在 $\mathbb{C}$ 上恰好有 n 个根（可能相同），即存在因式分解 $p(x) = a_0(x - x_1)^{n_1} \cdots (x - x_s)^{n_s}$，其中 $n_1 + \cdots + n_s = n$.

证. 根据代数学基本定理，$p(x)$ 总存在一个复根 x_1，即 $p(x_1) = 0$. 记 $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$，则 $p(x_1) = a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x_1 + a_n$. 因此

$$p(x) - p(x_1) = a_0(x^n - x_1^n) + a_1(x^{n-1} - x_1^{n-1}) + \cdots + a_{n-1}(x - x_1).$$

注意到

$$x^k - x_1^k = (x - x_1)(x^{k-1} + x^{k-2}x_1 + \cdots + xx_1^{k-2} + x_1^{k-1}),$$

因此存在 $n-1$ 次多项式 $q(x)$，使得 $p(x) - p(x_1) = q(x)(x - x_1)$. 而 $p(x_1) = 0$，于是 $p(x) = q(x)(x - x_1)$. 对 $n-1$ 次多项式 $q(x)$ 重复上述步骤，类似进行下去，即得结论. □

在上述因式分解中，n_i 称为复根 x_i 的**重数**，x_i 称为 $p(x)$ 的 n_i 重根.

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix},\quad \text{其特征值为}\lambda_1=2,\lambda_2=3$$

$$(\lambda_1 I-A)=0\Rightarrow\begin{bmatrix}0&-1\\0&-1\end{bmatrix}x=0,\quad x_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$(\lambda_2 I-A)=0\Rightarrow\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}x=0,\quad x_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix},\quad \text{其特征值为}\lambda_1=2,\lambda_2=2$$

$$(\lambda_1 I-A)=0\Rightarrow\begin{bmatrix}0&-1\\0&0\end{bmatrix}x=0,\quad x_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

命题 5.2.5 上（下）三角矩阵的全部特征值就是其所有对角元素.

例 5.2.6 观察二阶上三角矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ & a_{22} \end{bmatrix}$. 显然, A 的特征多项式是 $(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})$.

当 $a_{11} \neq a_{22}$ 时，A 的全部特征值是 a_{11}, a_{22}，二者对应的特征子空间分别为

$$\mathcal{N}(a_{11}I_2 - A) = \operatorname{span}(\boldsymbol{e}_1), \quad \mathcal{N}(a_{22}I_2 - A) = \operatorname{span}((a_{11} - a_{22})\boldsymbol{e}_2 + k\boldsymbol{e}_1).$$

特别地，A 有两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{e}_1, (a_{22} - a_{11})\boldsymbol{e}_2 + a_{12}\boldsymbol{e}_1$.

当 $a_{11} = a_{22}$ 时，A 的全部特征值是 a_{11}. 如果 $a_{12} = 0$，则其对应的特征子空间为 $\mathcal{N}(a_{11}I_2 - A) = \mathbb{R}^2$. 特别地，$A$ 有两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$.

如果 $a_{12} \neq 0$，则其对应的特征子空间为 $\mathcal{N}(a_{11}I_2 - A) = \operatorname{span}(\boldsymbol{e}_1)$. A 只有一个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{e}_1$.

可以看到，对对角矩阵和上三角矩阵，尽管特征值都是对角元素，但对角元素是否相等对特征子空间的影响很大. 对角元素从不等到相等，对对角矩阵，特征子空间从两个一维子空间变成一个二维子空间；而对非对角的上三角矩阵，特征子空间从两个一维子空间变成一个一维子空间. ☺

特征值的代数重数与几何重数

定义 5.2.10 (代数重数) 给定 n 阶方阵 A 及 A 的一个特征值 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$，如果 λ_0 是特征多项式 $p_A(\lambda)$ 的 n_0 重根，则称 n_0 为 λ_0 作为 A 的特征值的**代数重数**（简称**重数**），称 λ_0 是 A 的一个 n_0 重特征值.

一个 1 重特征值，又称为**单**特征值.

定义 5.3.6 (几何重数) 给定 n 阶方阵 A 及其特征值 λ_0，称特征子空间 $\mathcal{N}(\lambda_0 I_n - A)$ 的维数为 λ_0 作为 A 的特征值的**几何重数**.

任意特征值的几何重数都不小于 1，因此特征值至少对应一个特征向量.

命题 5.2.11 给定 n 阶实方阵 A，如果 λ_0 是它的一个非实数特征值，则 $\overline{\lambda}_0$ 也是它的特征值，且其代数重数和 λ_0 的代数重数相等. 进一步地，如果复向量 $\boldsymbol{x}_0$ 是属于 λ_0 的特征向量，则 $\overline{\boldsymbol{x}}_0$ 是属于 $\overline{\lambda}_0$ 的特征向量.

证. 关于特征值的结论显然. 对特征向量，因为 $\overline{A} = A$，而共轭保持加法和乘法运算，因此 $A\boldsymbol{x}_0 = \lambda_0\boldsymbol{x}_0$ 当且仅当 $A\overline{\boldsymbol{x}}_0 = \overline{\lambda}_0\overline{\boldsymbol{x}}_0$. □

命题 5.2.12 给定 n 阶方阵 A，其特征多项式具有如下形式：

$$p_A(\lambda) = \lambda^n - \operatorname{trace}(A)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A),$$

其中 $\operatorname{trace}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ 是方阵 A 的对角元素的和，称为方阵 A 的**迹**.

$$p_A(\lambda) := \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & \lambda - a_{mn} \end{vmatrix}.$$

n 阶方阵有且只有 n 个特征值（计重数）. $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{trace}(A)$, $\lambda_1 \cdots \lambda_n = \det(A)$.

多项式的零点与矩阵特征值

对任意首项系数为 1 的多项式

$$p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1} x^{n-1} + x^n,$$

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -c_0 & \cdots & -c_{n-2} & -c_{n-1} \end{bmatrix}, \quad C_p \text{ 的特征多项式是 } p(x)$$

矩阵 C_p 称为多项式 $p(x)$ 的友矩阵．因此在实践中，任意多项式的根的近似值，就可以通过求解其友矩阵的特征值来得到．

练习 5.2.2 构造符合要求的矩阵 A.

1. A 的特征多项式为 $\lambda^2 - 9\lambda + 20$，构造三个不同的 A.
2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ * & * \end{bmatrix}$，且 A 的特征值为 $4, 7$.
3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ * & * & * \end{bmatrix}$，且 A 的特征值为 $1, 2, 3$.

作 业（11月15日）

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

练习5.2

1(1,3,4)， 3， 4， 5， 8， 9， 10， 12， 14， 16

11月22日提交

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~