习题 6.2

4. 判断下列积分的敛散性

(3) $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x^2+1}} dx$

解: $\left|\frac{\sin x}{x\sqrt{x^2+1}}\right| \le \frac{1}{x^2}$. 而 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{A\to+\infty} \int_2^A \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2}$，因此绝对收敛 □

(4) $\int_1^{\infty} \frac{\cos x^2}{x} dx$

解: 令 $t = x^2$，因此只需考查 $\int_1^{\infty} \frac{\cos t}{2t} dt$

记 $F(y) = \int_1^y \cos t\, dt = \sin y - \sin 1$ $\quad |F(y)| \le 2$

$\frac{1}{2t}$ 单调且 $\to 0$，因此由狄利克雷判别法，知 $\int_1^{\infty} \frac{\cos t}{2t} dt$ 收敛 □

5. 讨论下列积分的敛散性 ($p>0$ $q>0$ $r>0$)

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{p_0}|x-1|^{p_1}|x-2|^{p_2}} dx$

解: 有瑕点 0, 1, 2，记函数为 $f(x)$，分段考虑，主要使用比较判别法

① $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$. 令 $g_1(x) = \frac{1}{x^{p_0}}$ 则 $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g_1(x)} = \frac{1}{2^{p_2}}$，故 $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$ 与 $\int_0^{\frac{1}{2}} g_1(x)dx$ 同敛散

而 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^{p_0}} dx$ 收敛 $\iff p_0 < 1$

② $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$ 令 $g_2(x) = \frac{1}{|x-1|^{p_1}}$ 则 $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g_2(x)} = 1$，$\int_{\frac{1}{2}}^1 f\,dx$ 与 $\int_{\frac{1}{2}}^1 g_2\,dx$ 同敛散

而 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{|x-1|^{p_1}} dx$ 收敛 $\iff p_1 < 1$

③ $\int_1^{\frac{3}{2}} f(x)dx$ 与②类似，收敛 $\iff p_1 < 1$.

④ $\int_{\frac{3}{2}}^2 f(x)dx$，令 $g_3(x) = \frac{1}{|x-2|^{p_2}}$，与①,②类似得 收敛 $\iff p_2 < 1$

⑤ $\int_2^3 f(x)dx$ 与④类似，收敛 $\iff p_2 < 1$

⑥ $\int_{\frac{5}{2}}^{+\infty} f(x)dx$ 令 $g_4(x) = \frac{1}{x^{p_0+p_1+p_2}}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g_4(x)} = 1$ 部分同学漏了这一部分

而 $\int_{\frac{5}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^{p_0+p_1+p_2}} dx$ 收敛 $\iff p_0+p_1+p_2 > 1$

综上，$0 < p_0, p_1, p_2 < 1$ 且 $p_0+p_1+p_2 > 1$ 时 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{p_0}|x-1|^{p_1}|x-2|^{p_2}} dx$ 收敛 □

(15) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\ln x\,dx$

解: 0和1是(可能的)瑕点. 记函数为$f(x)$.

① $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$ 对于 $p>0$, 可以取 $p'\in(0,p)$ 有 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{p-p'}\ln x = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{t\ln t}{p-p'} = 0$

令 $g(x) = x^{p'-1}$

由比较判别法 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

而 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p'-1}dx$ 收敛 故 $p>0$ 时 $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$ 收敛

(如果 $p\le 0$, 由 $x^{p-1}(1-x)^{q-1}\ln x \le x^{p-1}(1-x)^{q-1}(x-1) = -x^{p-1}(1-x)^{q}$

而 $\int_0^{\frac{1}{2}} -x^{p-1}(1-x)^{q}dx$ 与 $\int_0^{\frac{1}{2}} -x^{p-1}dx$ 同敛散, 而后者 $\to -\infty$, 故 $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)$ 发散)

② $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx$ 由 $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}\ln x}{(1-x)^{q}} = -1$

故只要看 $\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{q}dx$ 当 $q>-1$ 时 该积分收敛

综上 $p>0$. $q>-1$ 时 $\int_0^1 f(x)\,dx$ 收敛 □

8 证明 记 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = C$, 如果 $C\neq 0$ 不妨 $C>0$ (否则考虑 $-f(x)$)

取 $0<\varepsilon<C$. 则 $\exists A$ $\forall x>A$. $|f(x)-C|<\varepsilon$

而 $\forall t>A$ 有 $\int_A^t (C+\varepsilon)dx \geq \int_A^t f(x)\,dx \geq \int_A^t (C-\varepsilon)dx$

$\Rightarrow \int_A^t f(x)\,dx \geq (C-\varepsilon)(t-A)$

$t\to\infty$ 时. $(C-\varepsilon)(t-A)\to+\infty$, $\Rightarrow \int_A^t f(x)\,dx \to +\infty$

与 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛矛盾. 因此只有 $C=0$ □

9.(4) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin x}{x+1}dx$

解: 由 $\left|\int_0^A \sin x\,dx\right| = |\cos A - \cos 0| \le 2$ 有界 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1} = 0$ 且 $\frac{\sqrt{x}}{x+1} = \frac{1}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}$

在 $x>1$ 时单调 由狄利克雷判别法 $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin x}{x+1}dx$ 条件收敛, 即 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin x}{x+1}dx$ 条件收敛

下面说明不是绝对收敛.

由 $\int_1^{+\infty}\frac{|\sqrt{x}\sin x|}{x+1}dx \geqslant \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx \geqslant \frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx = \frac{1}{4}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx - \frac{1}{4}\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ 发散 而 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$ 条件收敛 (狄利克雷判别法)

故 $\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}|\sin x|}{x+1}dx$ 发散 $\square$

习题 7.1

2 证明 记 $h=k_1y_1+k_2y_2$

$$h''+a_1(x)h'+a_2h=k_1(y_1''+a_1(x)y_1'+a_2y_1)+k_2(y_2''+a_1(x)y_2'+a_2y_2)$$
$$=k_1f(x)+k_2g(x)$$

因此 h 是方程 $y''+a_1(x)y'+a_2y=k_1f(x)+k_2g(x)$ 的解. $\square$

5.解. $y=Cx^3$ 则 $y'=3Cx^2$

$$3y-xy'=3Cx^3-x\cdot(3Cx^2)=0$$

如果过 $A(1,1)$, $\Rightarrow C=1$. 即得积分曲线 $y=x^3$

如果过 $B(1,\frac{-1}{3})$, $\Rightarrow C=\frac{-1}{3}$, 得积分曲线 $y=\frac{-1}{3}x^3$ $\square$