线性代数 第22讲

11月24日

阶段复习

第五章要点总结与上一讲内容回顾

特征值、特征向量练习

第三、四章要点总结

第五章主要概念

- （矩阵A的）特征值、特征向量和特征多项式
- 特征子空间
- （特征值的）代数重数与几何重数，半单的概念
- 相似矩阵，相似变换，相似标准型
- 相似对角化，谱分解
- 若当标准型，化零多项式

重要结论和运算

- 特征多项式系数与矩阵元素的关系，迹与行列式
- 属于不同特征值的特征向量线性无关
- 矩阵可对角化的充分必要条件
- 特征值、特征向量、相似对角化的计算
- 几何重数小于等于代数重数
- 相似矩阵的特征值、特征值对应的几何重数均相同
- 任何方阵都可以相似变换为上三角矩阵（若当标准型）
- Hamilton-Cayley定理

命题5.4.11 对可对角化的 n 阶方阵 A，B，以下叙述等价：

1. A，B 可以同时对角化；

（即存在可逆矩阵X，使得$X^{-1}AX = \Lambda_1$ 和 $X^{-1}BX = \Lambda_2$ 都是对角矩阵）

2. 存在 n 个线性无关的向量，同时是 A，B 的特征向量；

3. A，B 可交换，即 $AB = BA$.

证. 因为矩阵 X 的列向量是矩阵 A、B 的特征向量，所以 1 和 2 等价.

“$1 \Rightarrow 3$”，设 $X^{-1}AX = \Lambda_1, X^{-1}BX = \Lambda_2$

$$\Lambda_1\Lambda_2 = X^{-1}AX \cdot X^{-1}BX = X^{-1}ABX$$

$$\Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_2\Lambda_1 = X^{-1}BX \cdot X^{-1}AX = X^{-1}BAX = X^{-1}ABX \Rightarrow AB = BA$$

“$3 \Rightarrow 1$”，

即证明：若 A、B 都可对角化，如果 $AB = BA$,

则存在可逆矩阵 X,使得 $X^{-1}ABX$ 与 $X^{-1}BAX$ 均为对角矩阵。

"3 ⇒ 1"，

即证明：若 A、B 都可对角化，如果 $AB=BA$，则存在可逆矩阵 X，使得 $X^{-1}ABX$ 与 $X^{-1}BAX$ 均为对角矩阵。

$$X_1^{-1}AX_1=\Lambda_1,\quad P^{-1}\Lambda_1 P=P^{-1}X_1^{-1}AX_1P=\begin{bmatrix}\lambda_1 I_{n_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r I_{n_r}\end{bmatrix}$$

设 $P^{-1}X_1^{-1}BX_1P=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r}\\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rr}\end{bmatrix}$，$P^{-1}X_1^{-1}BX_1P\cdot P^{-1}X_1^{-1}AX_1P=P^{-1}X_1^{-1}AX_1P\cdot P^{-1}X_1^{-1}BX_1P$

$$\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r}\\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rr}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 I_{n_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r I_{n_r}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 I_{n_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r I_{n_r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r}\\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rr}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 B_{11} & \lambda_1 B_{12} & \cdots & \lambda_1 B_{1r}\\ \lambda_2 B_{21} & \lambda_2 B_{22} & \cdots & \lambda_2 B_{2r}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_r B_{r1} & \lambda_r B_{r2} & \cdots & \lambda_r B_{rr}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 B_{11} & \lambda_2 B_{12} & \cdots & \lambda_r B_{1r}\\ \lambda_1 B_{21} & \lambda_2 B_{22} & \cdots & \lambda_r B_{2r}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1 B_{r1} & \lambda_2 B_{r2} & \cdots & \lambda_r B_{rr}\end{bmatrix}\Rightarrow P^{-1}X_1^{-1}BX_1P=\begin{bmatrix}B_{11} & & & \\ & B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{rr}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}X_{11}^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & X_{rr}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{rr}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & X_{rr}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_{11}^{-1}B_{11}X_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & X_{rr}^{-1}B_{rr}X_{rr}\end{bmatrix}=\Lambda_2$$

$$\begin{bmatrix}X_{11}^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & X_{rr}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r I_{n_r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & X_{rr}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_{11}^{-1}\lambda_1 I_{n_1}X_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & X_{rr}^{-1}\lambda_r I_{n_r}X_{rr}\end{bmatrix}=\Lambda_1$$

相似

定义5.4.1（相似）对方阵 A，B，如果存在可逆矩阵 X 使得 $X^{-1}AX = B$，则称 A 和 B 相似，或 A 相似于 B，$A \backsim B$.

一个矩阵可对角化（$X^{-1}AX = \Lambda$）当且仅当它相似于对角矩阵.

例5.4.2 数量矩阵只与自己相似：$X^{-1}(kI_n)X = kI_n$.

对角矩阵 $\begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} \lambda_2 & \\ & \lambda_1 \end{bmatrix}$ 相似：$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_2 & \\ & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}$

命题 5.4.4 方阵的相似关系有如下不变量：

1. 秩；
2. 特征多项式、特征值、特征值的代数重数、迹、行列式；
3. 特征值的几何重数.

命题5.4.4 方阵的相似关系有如下不变量：

1. 秩；　2. 特征多项式、特征值、特征值的代数重数、迹、行列式；

3. 特征值的几何重数.

证. 1. 显然 $\mathrm{rank}(X^{-1}AX) = \mathrm{rank}(A)$，秩是不变量.

2. $\det(\lambda I_n - X^{-1}AX) = \det(\lambda I_n - A)$，特征多项式是不变量.

特征多项式决定了特征值、特征值的代数重数、迹、行列式，因此它们都是不变量.

3. 考虑几何重数. 如果 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ 是 A 的属于 λ_0 的特征子空间的一组基，

则 $X^{-1}\boldsymbol{u}_1, \cdots, X^{-1}\boldsymbol{u}_r$ 就是 $X^{-1}AX$ 的属于 λ_0 的 r 个线性无关的特征向量.

事实上，容易验证 $X^{-1}AX(X^{-1}\boldsymbol{u}_i) = X^{-1}(\lambda_0\boldsymbol{u}_i) = \lambda_0(X^{-1}\boldsymbol{u}_i)$，$i = 1, \cdots, r$,

即它们是属于 λ_0 的特征向量.

另一方面，由于 $X^{-1}\ [\boldsymbol{u}_1 \cdots \boldsymbol{u}_r] = [X^{-1}\boldsymbol{u}_1 \cdots X^{-1}\boldsymbol{u}_r]$，

而 X^{-1} 可逆，因此 $[\boldsymbol{u}_1 \cdots \boldsymbol{u}_r]$ 和 $[X^{-1}\boldsymbol{u}_1 \cdots X^{-1}\boldsymbol{u}_r]$ 这两个矩阵的秩相等，

因此 $X^{-1}\boldsymbol{u}_1, \cdots, X^{-1}\boldsymbol{u}_r$ 线性无关.

于是 λ_0 作为 A 的特征值的几何重数不大于 λ_0 作为 $X^{-1}AX$ 的特征值的几何重数。

相似变换

命题5.4.3 方阵的相似关系是等价关系. 满足：反身性，对称性，传递性

等价关系：向量组的线性表示（生成子空间），矩阵相抵（秩）

矩阵相似（特征值，几何重数，即是否可对角化）

对应于相似关系的等价变换称为**相似变换**，即 $\boldsymbol{T}: A \mapsto X^{-1}AX$.

如果 A 可对角化，则称对角化得到的对角矩阵为 A 的相似标准形.

在 A 可对角化时，
它的相似标准形在对角元素相差一个排列次序的意义下唯一.

$$\begin{bmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&0&&1&\\&&&\ddots&&\\&&1&&0&\\&&&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&\lambda_i&&&&\\&&&\ddots&&&\\&&&&\lambda_j&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&\lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&0&&1&&\\&&&\ddots&&&\\&&1&&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&\lambda_j&&&&\\&&&\ddots&&&\\&&&&\lambda_i&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&\lambda_n\end{bmatrix}$$

任何方阵一定可以相似变换为上三角矩阵

命题5.4.6 对 n 阶方阵 A，存在可逆矩阵 X，使得 $X^{-1}AX = T$，
T 是上三角矩阵，且 T 的对角元素是 A 的 n 个特征值（计重数）.
进一步地，通过选择特定的 X，能够令 T 的对角元素是 A 的特征值的任意排列.

定理 5.4.8 (Jordan 分解) 对 n 阶方阵 A，存在可逆矩阵 X，使得

$$X^{-1}AX = J = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_r}(\lambda_r) \end{bmatrix},$$

其中 $J_{n_i}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}$ 是 n_i 阶 Jordan 块，而 $n_1 + \cdots + n_r = n$，且除了这些 Jordan 块的排列次序外，J 被 A 唯一确定. J 称为 A 的 Jordan标准形型

定理5.4.7 (Hamilton-Cayley 定理)

设方阵 A 的特征多项式为 $p_A(\lambda)$，则 $p_A(A) = O$.

证. 设 A 有分解 $A = XTX^{-1}$，其中 T 是上三角矩阵.

而 $p_A(A) = Xp_A(T)X^{-1}$，只需证明 $p_A(T) = O$.

若 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值，则 $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$，

于是 $p_A(T) = (T - \lambda_1 I_n) \cdots (T - \lambda_n I_n)$.

注意 $T - \lambda_i I_n$ 的第 i 个对角元素是零，逐步计算矩阵乘法就得到 $p_A(T) = O$.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_r & \boldsymbol{a}_{r\times 1} & \boldsymbol{b}_{r\times(n-r-1)} \\ & \boldsymbol{u}_{r+1} & \boldsymbol{c}_{1\times(n-r-1)} \\ & & \boldsymbol{U}_{n-r-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_r & \boldsymbol{a}'_{r\times 1} & \boldsymbol{b}'_{r\times(n-r-1)} \\ & 0 & \boldsymbol{c}'_{1\times(n-r-1)} \\ & & \boldsymbol{U}'_{n-r-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_r & \boldsymbol{O}_{r\times 1} & \boldsymbol{a}_{r\times 1}\boldsymbol{c}'_{1\times(n-r-1)} + \boldsymbol{b}_{r\times(n-r-1)}\boldsymbol{U}'_{n-r-1} \\ & 0 & \boldsymbol{u}_{r+1}\boldsymbol{c}'_{1\times(n-r-1)} + \boldsymbol{c}_{1\times(n-r-1)}\boldsymbol{U}'_{n-r-1} \\ & & \boldsymbol{U}_{n-r-1}\boldsymbol{U}'_{n-r-1} \end{bmatrix}$$

Hamilton - Cayley定理证法2

设 $p_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^n+c_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+c_1\lambda+c_0$,

则 $p_A(A)=A^n+c_{n-1}A^{n-1}+\cdots+c_1A+c_0I=\mathbf{0}.$

证明 设 $B(\lambda)=(\lambda I-A)^*$, 则有 $B(\lambda)(\lambda I-A)=|\lambda I-A|I=p_A(\lambda)I.$

记 $B(\lambda)=\lambda^{n-1}B_{n-1}+\lambda^{n-2}B_{n-2}+\cdots+B_{0,}$

因为 $p_A(\lambda)=\lambda^n+c_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+c_1\lambda+c_0$,

所以 $\left(\lambda^{n-1}B_{n-1}+\lambda^{n-2}B_{n-2}+\cdots+B_0\right)(\lambda I-A)$

$$=\left(\lambda^n+c_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+c_1\lambda+c_0\right)I$$

$$\left(\lambda^{n-1}B_{n-1}+\lambda^{n-2}B_{n-2}+\cdots+B_0\right)(\lambda I-A)=\left(\lambda^n+c_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+c_1\lambda+c_0\right)I$$

展开比较两边同次项系数得

$$\begin{cases} B_{n-1}=I \\ B_{n-2}-B_{n-1}A=a_{n-1}I \\ \vdots \\ B_0-B_1A=a_1I \\ -B_0A=a_0I \end{cases}$$

所以
$$\begin{cases} B_{n-1}A^n=A^n \\ B_{n-2}A^{n-1}-B_{n-1}AA^{n-1}=c_{n-1}A^{n-1} \\ \vdots \\ B_0A-B_1AA=c_1A \\ -B_0A=c_0I \end{cases}$$

所以 $\mathbf{0}=A^n+c_{n-1}A^{n-1}+\cdots+c_1A+c_0=p_A(A)$.

设 A 为 n 阶矩阵， $p(A)=c_mA^m+\cdots+c_1A+c_0$ 也为 n 阶矩阵，
$p(A)=c_mA^m+\cdots+c_1A+c_0I=0$,则称 $p(x)$ 是 A 的化零多项式。

特征多项式是化零多项式.

单选题 1分

设置

判断下面3个叙述的对错，

1. 如果A，B 具有相同的特征值、代数重数和特征向量，则 $A = B$.
2. 如果A，B 有相同的特征值和代数重数，则 $A - B$ 所有特征值之和为零.
3. 如果 A 的特征值全为零，则 A 是零矩阵.

A 对，错，对

B 对，对，对

C 错，对，错

D 错，错，错

提交

单选题 1分

设置

判断下面叙述的对错，

1. $A+B$ 的特征值之和等于 A 的特征值之和与 B 的特征值之和的和.
2. $A+B$ 的特征值之积等于 A 的特征值之积与 B 的特征值之积的积.

A 对，对

B 对，错

C 错，对

D 错，错

提交

多选题 1分

设置

判断下面叙述的对错，

1. AB 的特征值之积等于 A 的特征值之积与 B 的特征值之积的积.
2. AB 和 BA 具有相同的特征值和代数重数.

A 对，对

B 对，错

C 错，对

D 错，错

提交

单选题 1分

设置

判断下面3个叙述的对错，

1. 将 A 的第 i 行加到第 j 行上，再将第 i 列从第 j 列中减去，得到的矩阵 B 和 A 有相同的特征值．若正确，则对应的特征向量有何联系？
2. 将 A 的第 i 行加到第 j 行上，再将第 j 列从第 i 列中减去，得到的矩阵 B 和 A 有相同的特征值．若正确，则对应的特征向量有何联系？
3. 将 A 的第 i，j 行交换，再将第 i，j 列交换，得到的矩阵 B 和 A 有相同的特征值．若正确，则对应的特征向量有何联系？

A 对，错，错

B 对，对，错

C 错，对，对

D 错，错，对

提交

单选题 1分

设置

判断下面3个叙述的对错，

1. 对角阵的特征向量一定是标准坐标向量.
2. 正交矩阵的特征值都是绝对值等于 1 的复数.
3. 所有 n 阶置换矩阵都有一个共同的特征向量.

A 对，错，错

B 对，对，错

C 错，对，对

D 错，错，对

提交

填空题 1分

设置

[填空1]

A 是 3 阶矩阵，其特征值为 $1,2,-1$，$B = A^3 - 5A^2$，则 $|B| =$

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

填空题 1分

设置

[填空1]

$A=\begin{bmatrix}1&0&2&5\\3&2&1&1\\2&1&3&0\\0&2&1&4\end{bmatrix}$，其特征多项式为 $p_A(\lambda)$，则 $\left.\dfrac{d^2 p_A(\lambda)}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=0}=$

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 $\boldsymbol{n}$ 阶矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=0$, 则 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 有公共的特征向量？

设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$，若 $(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0$, 且 $\lambda_1\neq\lambda_2$,

证明：$\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵 $\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_2\end{bmatrix}$.

第三章主要概念

- 内积，夹角，长度与距离，正交
- 向量 b 向直线的正交投影
- 正交向量组，标准正交基，向量组的正交化
- 正交矩阵，QR 分解，简化 QR 分解
- 子空间正交，正交补（空间）
- 正交投影（变换），正交投影矩阵

第三章重要结论和运算

- Cauchy-Schwarz不等式
- R^n中三角形的三角不等式、勾股定理
- 正交向量组线性无关
- 任何线性无关的向量组可以改造为正交向量组，

  Gram-Schmidt正交化、QR分解
- 正交变换：保距离、保内积
- M 为 R^n 中的子空间，R^n 中任意向量可以唯一的分解为M及其正交补中的向量和

  （会计算一个向量在给定子空间的正交投影，$\min\limits_{x\in R^n}\|Ax-b\|$ ）
- 矩阵 A、A^T 的列空间和它们零空间的关系
- n 阶方阵 P，P是正交投影矩阵，当且仅当 $P^2 = P^T = P$

第四章主要概念

- 行列式函数
- Vandermonde行列式
- 余子式，代数余子式
- 伴随矩阵
- 行列式的几何意义
- 奇排列和偶排列

第四章重要结论和运算

- 矩阵可逆与行列式非零等价
- 行列式的消去法
- 行列式的（Laplace）展开
- $|AB|=|A||B|$
- 伴随矩阵的运算性质，伴随矩阵的秩
- Cramer法则
- 行列式的完全展开式