线性代数 第3讲

9月18日

第一章第2讲 线性映射的表示矩阵

上一讲要点回顾

线性映射的一个存在唯一性定理

线性映射的表示矩阵

线性方程组的矩阵表示及几种特殊结构的矩阵（方程组）

什么是“线性”

若 $f(x)=x$，则 $f(x+y)=x+y=f(x)+f(y)$

$$f(kx)=kx=kf(x)$$

若 $f(x)=c$，则 $f(x+y)=c\neq f(x)+f(y)$

$$f(kx)=c\neq kf(x)$$

若 $f(x)=x^2$，则 $f(x+y)=(x+y)^2\neq x^2+y^2=f(x)+f(y)$

$$f(kx)=k^2x^2\neq kf(x)$$

线性就是1次，保持加法和数乘的运算关系

定义 1.1.7 (线性映射) 映射 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，如果满足

1. 任取 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n$，都有 $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}')$;
2. 任取 $\boldsymbol{x}, \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$，都有 $f(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})$,

则称 f 为从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的**线性映射**.

定义域上的加法映射成陪域上的加法

定义域上的数乘映射成陪域上的数乘

$$f(ax+bx') = af(x) + bf(x')$$

简单来说：线性映射保持线性运算

线性映射一定把零向量映射为零向量：$f(\mathbf{0}_n) = \mathbf{0}_m$

定义 1.1.9 (线性变换) 从 $\mathbb{R}^n$ 到自身的线性映射称为 $\mathbb{R}^n$ 上的**线性变换**.

特别地，$\mathbb{R}^n$ 上的 **恒同变换**

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I} = \mathrm{id}\colon \quad \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ \boldsymbol{x} &\mapsto \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

是线性变换.

线性运算与线性(向量)空间

定义 1.1.4 (线性运算) 为 $\mathbb{R}^m$ 中的向量定义两种运算[2]

1. 两个 m 维向量的**向量加法**: $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_m + b_m \end{bmatrix}$;

2. 一个 m 维向量与一个数的**数乘**: $k \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} ka_1 \\ \vdots \\ ka_m \end{bmatrix}$;

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

向量的加法和数乘统称向量的**线性运算**.

带有线性运算的集合 $\mathbb{R}^m$, 称为**向量空间** $\mathbb{R}^m$ 或**线性空间** $\mathbb{R}^m$.

空间=集合+运算

m维向量空间=m维向量+加法与数乘运算

$$
\begin{array}{rccc}
f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\
& \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} & \mapsto & \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}
\end{array} \tag{1.1.1}
$$

线性变换是不是一定为1.1.1这样的形式呢？

$$
f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') = \begin{bmatrix} a_{11}(x_1+x_1') + \cdots + a_{1n}(x_n+x_n') \\ \vdots \\ a_{m1}(x_1+x_1') + \cdots + a_{mn}(x_n+x_n') \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}x_1' + \cdots + a_{1n}x_n' \\ \vdots \\ a_{m1}x_1' + \cdots + a_{mn}x_n' \end{bmatrix} = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}'),
$$

$$
f(k\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} a_{11}kx_1 + \cdots + a_{1n}kx_n \\ \vdots \\ a_{m1}kx_1 + \cdots + a_{mn}kx_n \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = kf(\boldsymbol{x}),
$$

其中[3]，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$. 由观察可知，等式左边的 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}', k\boldsymbol{x}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的线性运算，而等式右边的 $f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{x}'), kf(\boldsymbol{x})$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的线性运算.

一般n维向量的表示

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{1.2.1}$$

一组向量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$
称为向量组
一般用黑体字母表示

这组向量称为 $\mathbb{R}^n$ 的**标准坐标向量组**，其中 $\boldsymbol{e}_i$ 称为第 i 个**标准坐标向量**. 这组向量的特殊之处在于，$\mathbb{R}^n$ 中的任意向量 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ 都可以轻易地由它们做线性运算得到：

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n.$$

由于线性映射保持线性运算，因此有

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{e}_n). \tag{1.2.2}$$

线性组合与线性表示

定义 1.2.1 (线性组合与线性表示) 给定 $\mathbb{R}^m$ 中向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 和一组数 $k_1,\cdots,k_n\in\mathbb{R}$，称向量 $k_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{a}_n$ 是向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的一个**线性组合**.

设 $\boldsymbol{b}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的向量，如果存在一组数 $k_1,\cdots,k_n\in\mathbb{R}$，使得 $\boldsymbol{b}=k_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{a}_n$，则称 $\boldsymbol{b}$ 可以被向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ **线性表示**.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \qquad x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}+\cdots+x_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b},$

求解线性方程组本质上就是：$\boldsymbol{b}$是否可以用向量组$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$线性表示？如何表示？

线性映射的等价

任意向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 都可以被 $\mathbb{R}^n$ 的标准坐标向量组 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 线性表示，而 $f(\boldsymbol{x})$ 也以同样方式被它们在 f 下的像 $f(\boldsymbol{e}_1), \cdots, f(\boldsymbol{e}_n)$ 线性表示．可以说明，线性映射 f 由 n 个特殊的像 $f(\boldsymbol{e}_1), \cdots, f(\boldsymbol{e}_n)$ 所决定．

命题1.2.2 设 $f, g: R^n \to R^m$ 是两个线性映射，如果 $f(e_i) = g(e_i), i = 1, 2, \cdots, n$ 则 $f = g$.

证明. 如果 $f(e_i) = g(e_i), i = 1, 2, \cdots, n$, 则对任意 $x \in R^n$，$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$

$$f(x) = f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n) = x_1 g(e_1) + \cdots + x_n g(e_n) = g(x)$$

对任意 $x \in R^n$，都有 $f(x) = g(x)$，这意味着两个映射相等。

一个线性映射 $f: R^n \to R^m$ 完全由 $f(e_1),\cdots,f(e_n)$ 决定。

那么 $f(e_1),\cdots,f(e_n)$ 是否能够取到 R^m 中的任意向量呢？

也就是说，对 R^m 中的任意向量组 $a_1,\cdots,a_n$，

是否存在线性映射 $f: R^n \to R^m$，满足 $f(e_1)=a_1,\cdots,f(e_n)=a_n$.

命题1.2.3，任取 R^m 中的 n 个向量 $a_1,\cdots,a_n$,都存在唯一的线性映射 $f: R^n \to R^m$，满足 $f(e_1)=a_1,\cdots,f(e_n)=a_n$.

给出一个构造性的证明

首先定义映射

$$f: \quad \mathbb{R}^n \quad \to \quad \mathbb{R}^m$$
$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto x_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n.$$

下面根据定义验证它是线性映射：

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') &= (x_1+x_1')\boldsymbol{a}_1+\cdots+(x_n+x_n')\boldsymbol{a}_n \\ &= (x_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n)+(x_1'\boldsymbol{a}_1+\cdots+x_n'\boldsymbol{a}_n) \\ &= f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{x}'), \end{aligned}$$

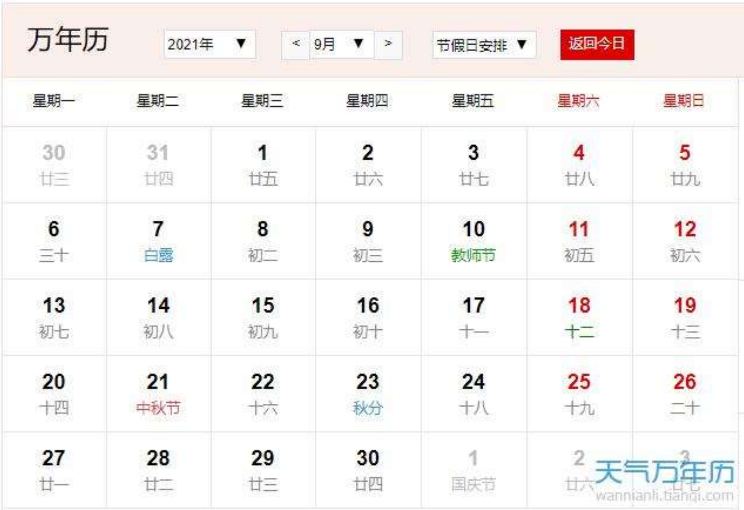
其中，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}.$

$$f(k\boldsymbol{x})=kx_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+kx_n\boldsymbol{a}_n=k(x_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n)=kf(\boldsymbol{x}),$$

矩阵

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 5y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2} \qquad \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}_{2\times 1}$$



学生代码	数学	物理	化学	语文	历史	英语
1	65	61	72	84	81	79
2	77	77	76	64	70	55
3	67	63	49	65	67	57
4	80	69	75	74	74	63
5	74	70	80	84	81	74
6	78	84	75	62	71	64
7	66	71	67	52	65	57
8	77	71	57	72	86	71
9	83	100	79	41	67	50
...	...	...	...	...	...	...

$$\begin{bmatrix} 30 & 31 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 27 & 28 & 29 & 30 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 65 & 61 & 72 & 84 & 81 & 79 \\ 77 & 77 & 76 & 64 & 70 & 55 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 98 & 96 & 93 & 89 & 98 & 90 \end{bmatrix}_{100\times 6}$$

$$A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} \quad 或 \quad A_{m\times n}$$

矩阵乘向量的运算

$$\begin{cases} 2x & + & 3y & = & 5 \\ 4x & + & 5y & = & 9 \end{cases} \qquad x \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+3y \\ 4x+5y \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n \\ a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \cdots + a_{mn}b_n \end{bmatrix}$$

命题1.2.2 设 $f,g:R^n\to R^m$ 是两个线性映射，如果 $f(e_i)=g(e_i), i=1,2,\cdots,n$ 则 $f=g$.

一个线性映射 $f:R^n\to R^m$ 完全由 $f(e_1),\cdots,f(e_n)$决定。

定义 1.2.4 (线性映射的表示矩阵) 设线性映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{e}_i$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的标准坐标向量，若 $\boldsymbol{a}_i=f(\boldsymbol{e}_i)$，则称矩阵 $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}$ 为线性映射 f 在标准坐标向量下的**表示矩阵**.

$$a_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix}, a_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix},\cdots,a_n=\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

$$f(x)=x_1a_1+x_2a_2+x_na_n=\begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=Ax$$

以后我们用 A 表示这个线性映射，$A(x)=x_1a_1+x_2a_2+x_na_n$

$$A(x)=Ax$$

例 1.2.8 对例 1.1.8 中的线性映射，我们计算其表示矩阵.

1. 结账是一个从 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}$ 的线性映射，其中定义域 $\mathbb{R}^3$ 的标准坐标向量分别是一千克苹果、一千克香蕉和一千克樱桃，它们对应的单价分别是 12.98、9.98 和 129.98 元. 因此结账作为线性映射，它的表示矩阵是

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \text{结账(一千克苹果)} & \text{结账(一千克香蕉)} & \text{结账(一千克樱桃)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 12.98 & 9.98 & 129.98 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

   其表达式可以由矩阵和向量乘法给出：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 12.98 & 9.98 & 129.98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 12.98x_1 + 9.98x_2 + 129.98x_3.$$

2. 营养是一个从 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的线性映射. 它的表示矩阵为

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \text{营养(一千克苹果)} & \text{营养(一千克香蕉)} & \text{营养(一千克樱桃)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 12 & 12 & 3 \\ 135 & 208 & 99 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

   其表达式为：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 12 & 12 & 3 \\ 135 & 208 & 99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x_1 + 12x_2 + 3x_3 \\ 135x_1 + 208x_2 + 99x_3 \end{bmatrix}. \qquad ☺$$

例 1.2.9 考虑例 1.1.10 中平面向量构成的线性空间 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换的表示矩阵.

1. 旋转变换 $\boldsymbol{R}_\theta$ 的表示矩阵为

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

其表达式为:

$$\boldsymbol{R}_\theta(\boldsymbol{x}) = R_\theta \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1\cos\theta - x_2\sin\theta \\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{R}_\theta\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R}_\theta\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta+\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_\theta\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \boldsymbol{R}_\theta\left(x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = x_1\boldsymbol{R}_\theta\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_2\boldsymbol{R}_\theta\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= x_1\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1\cos\theta - x_2\sin\theta \\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta \end{bmatrix}.$$

2. 反射变换 $\boldsymbol{H}_\theta$ 的表示矩阵为

$$H_\theta = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}.$$

其表达式为:

$$\boldsymbol{H}_\theta(\boldsymbol{x}) = H_\theta \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cos 2\theta + x_2 \sin 2\theta \\ x_1 \sin 2\theta - x_2 \cos 2\theta \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{H}_\theta\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_\theta\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(2\theta - \frac{\pi}{2}) \\ \sin(2\theta - \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}_\theta\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1 \begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} \sin 2\theta \\ -\cos 2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \cos 2\theta + x_2 \sin 2\theta \\ x_1 \sin 2\theta - x_2 \cos 2\theta \end{bmatrix}.$$

3. 对换变换 $\boldsymbol{P}$ 的表示矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

其表达式为:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = P\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

对换变换: 对换 $\mathbb{R}^2$ 中向量的两个分量 x_1, x_2 也构成一个线性变换:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}\colon \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

可以看到, 其实 $\boldsymbol{P}$ 也是关于直线 $x_2 - x_1 = 0$ 的反射.

4. 伸缩变换 $\boldsymbol{C}_k$ 的表示矩阵为

$$C_k = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

其表达式为:

$$\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{x}) = C_k\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

伸缩变换: 设 $k \in \mathbb{R}$, 定义一个 $\mathbb{R}^2$ 上的变换 $\boldsymbol{C}_k$, 它把向量在 x_1 方向拉伸 k 倍, x_2 方向保持不变, 其表达式为:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}_k\colon\quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} kx_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

计算下面线性映射的表示矩阵

$$f: R^4 \to R^4,\ f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 + x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$f: R^4 \to R^4,\ f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

容易得到，(1.1.2) 中 $\mathbb{R}^n$ 上的恒同变换的表示矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

即对角元素（对角线上的元素，或者所在行数和所在列数相等的元素）都是 1，非对角元素都是 0. 这个矩阵称为 n 阶**恒同矩阵**或 n 阶**单位矩阵**，记为 I_n. 它还可以用标准坐标向量组表示：$I_n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$. 对 $\mathbb{R}^n$ 中任意向量 $\boldsymbol{x}$，容易验证 $I_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$. 这意味着，它对应的线性映射 $\boldsymbol{I}$ 能够很容易地由像求出原像（二者相等）.

一般线性方程的矩阵表达形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

最好解的线性方程组

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
\qquad
\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{22}x_2 = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{nn}x_2 = b_n \end{cases}
$$

一般地，非对角元素全为零的方阵称为**对角矩阵**，而其中为零的元素往往省略不写：

$$
D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} =: \operatorname{diag}(d_i).
$$

如果对角元素依次为 $d_1, \cdots, d_n$，那么这个对角矩阵常用 $\operatorname{diag}(d_i)$ 表示.

上三角和下三角矩阵

形如 $U = \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & u_{nn} \end{bmatrix}$ 的方阵称为 n 阶**上三角矩阵**，形如 $L = \begin{bmatrix} l_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$ 的方阵称为 n 阶**下三角矩阵**．如果上（下）三角矩阵的对角元素都是 0，则称为**严格上（下）三角矩阵**．如果上（下）三角矩阵的对角元素都是 1，则称为**单位上（下）三角矩阵**．

如果上三角矩阵的对角元素都不为零，那么给定向量 $\boldsymbol{b}$，它在对应线性映射 $\boldsymbol{U}$ 下的原像 $\boldsymbol{x}$ 也容易求得．事实上，观察

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1n}x_n \\ u_{22}x_2 + \cdots + u_{2n}x_n \\ \vdots \\ u_{nn}x_n \end{bmatrix},$$

回代

类似地，如果下三角矩阵的对角元素都不为零，那么给定向量 $\boldsymbol{b}$，它在对应线性映射 $\boldsymbol{L}$ 下的原像 $\boldsymbol{x}$ 也容易求得. 事实上，观察

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}x_1 \\ l_{21}x_1 + l_{22}x_2 \\ \vdots \\ l_{n1}x_1 + l_{n2}x_2 + \cdots + l_{nn}x_n \end{bmatrix},$$

即可从第 1 个分量相等关系开始计算，从 x_1 到 x_n 逐个得出 $\boldsymbol{x}$ 的所有元素. 这种自上而下逐个代入从而求出每一个分量的方法，称为**前代法**.

利用回代法或前代法可以求出向量在表示矩阵是对角元素都不为零的三角矩阵的线性映射下的原像. 那么对任意线性映射，有何方法来求解向量的原像呢? 这将在下节详细阐述.

作 业（9月18日）

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

练习1.2

1.（2，4），2（3，6），4，5(1,2,3,6)

9月22日提交

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~