第五次习题课题目

注释:

对于矩阵 A, 它的四个基本子空间是列空间 $C(A)$, 零空间 $N(A)$, 行空间 $C(A^T)$ 和 A^T 的零空间 $N(A^T)$。

$rref(A)$ 指的是矩阵 A 的行简化阶梯形矩阵 (reduced row echelon form), 详细定义可见教材 P36。

如不加说明, 我们只考虑实矩阵。

习题 1. $R=\begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵。

1. 求 R 的各子块的大小。
2. 如果 $r=m$, 求一个 B 使得 $RB=I$。
3. 如果 $r=n$, 求一个 C 使得 $CR=I$。
4. 在上述两小问中, 求所有满足条件的 B,C。
5. 求 $rref(R^T)$。
6. 求 $rref(R^TR)$。

习题 2. $B=\begin{bmatrix} 1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} r&n&b&q&k&b&n&r \\ p&p&p&p&p&p&p&p \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ p&p&p&p&p&p&p&p \\ r&n&b&q&k&b&n&r \end{bmatrix}$。求二者的四个子空间的基。这里, r,n,b,q,k,p 为各不相同的实数。

习题 3. $A=\begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} I & G \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 都是 $m\times n$ 矩阵, 且具有相同的四个子空间。证明 $F=G$。

习题 4. 设 A,B 为同型矩阵，且 $N(A)=N(B)$. 试说明 $rref(A)=rref(B)$.

习题 5. 设 $(1,0,0,0,0)^T,(0,1,1,0,0)^T$ 和 $(0,1,1,1,0)^T$ 构成了 $N(A)$ 的一组基，而 A 为五阶方阵，求 $rref(A)$。是否可求出 $C(A)$, $C(A^T)$ 和 $N(A^T)$ 的一组基？

习题 6. 1. 设 A 是一个 $m\times n$ 的实矩阵，证明 $N(A^TA)=N(A)$。

2. A 如上。证明 $C(A^TA)=C(A^T)$。

3. 证明 A^TA 可逆当且仅当 A 为列满秩矩阵。

4. 如果 A 是一个 $m\times n$ 的复矩阵，上述命题是否成立？

习题 7. 设 A 是 n 阶方阵且 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 为 $\mathbb{R}$ 上一多项式，则定义 $f(A)=a_0I_n+a_1A+\cdots+a_nA^n$。已知多项式 f 满足 $f(0)=0$，证明对任意方阵 A，$\operatorname{rank}f(A)\le\operatorname{rank}(A)$。

习题 8. 证明：$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A & b\\ b^T & 0\end{bmatrix}=\operatorname{rank}(A)$ 是 $Ax=b$ 有解的充分不必要条件。

习题 9. 证明：反对称矩阵的秩是偶数。

习题 10. 练习 2.3.23 (满秩分解)

1. 求向量 u,v, 估得 $uv^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}3 & 6 & 6\\ 1 & 2 & 2\\ 4 & 8 & 8\end{bmatrix}$.

2. 设 A 是秩为 $r>$c 的 $m\times n$ 的矩阵, 令 C 为 A 的主列按顺序组成的矩阵, 则 C 有几行几列? 令 R 为 A 的行简化阶梯形的非零行按顺序组成的矩阵, 则 R 有几行几列? 求证 $A=CR$.

3. 求证: 任意秩为 $r>0$ 的 $m\times n$ 矩阵 A 可以分解成列满秩矩阵和行满秩矩阵的乘积, 即分别存在 $m\times r,r\times n$ 矩阵 C,R, 且 $\operatorname{rank}(C)=\operatorname{rank}(R)=r$, 使得 $A=CR$.

4. 证明, 任意线性映射 f 都存在分解 $f=g\circ h$, 其中 h 是线性满射, g 是线性单射. 注意: 对一般的映射, 也有类似的结论, 见练习 0.3.8 .

习题 11. 练习 2.3.24 (秩一分解) 证明, 任意秩为 $r>0$ 的矩阵 A 可以分解成 r 个秩为 1 的矩阵的和.