第六次习题课参考解答

注释:

对于矩阵 A, 它的四个基本子空间是列空间 $C(A)$, 零空间 $N(A)$, 行空间 $C(A^T)$ 和 A^T 的零空间 $N(A^T)$.

习题 1. 对以下矩阵进行 QR 分解:

1. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$; 2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; 3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; 4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; 5. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

参考解答

1. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$. 注意到该矩阵除以向量长度后即为正交矩阵.

2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{4}{\sqrt{30}} & -\frac{12}{3\sqrt{70}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{13}{3\sqrt{70}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{14}{3\sqrt{70}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{30}} & \frac{11}{3\sqrt{70}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{6}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{10}{\sqrt{30}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} \\ 0 & 0 & \frac{63}{3\sqrt{70}} \end{bmatrix}$.

5. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{21}} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{30}} & -\frac{3}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{21}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{6}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{15}{\sqrt{30}} & \frac{15}{\sqrt{30}} \\ 0 & 0 & \frac{7}{\sqrt{21}} \end{bmatrix}$.

习题 2. 我们有矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. 求四维空间中超平面 $C(A)$ 的一个单位法向量（即求一个单位向量, 其与 A 所有的列向量都正交）.

参考解答

注意该题目可以有两种解法.

高斯消元求解 $A^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 然后将长度调成 1 即可.

另一种思路是随便加一个线性无关的第四列, 比如 $\boldsymbol{e}_1$, 然后正交化即可.

求得单位法向量为 $\dfrac{1}{\sqrt{26}}\begin{bmatrix}4\\0\\1\\-3\end{bmatrix}$.

习题 3 (练习 3.1.14). 令 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5$ 为 $\mathbb{R}^5$ 的一组标准正交基.

1. 证明 $\frac{1}{3}(2\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3),\frac{1}{3}(2\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2+2\boldsymbol{a}_3),\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3)$ 为两两正交的单位向量；
2. 给以下向量生成的子空间找一组正交基：$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_5,\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_4,2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$；
3. 考虑向 $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_5$ 生成的子空间进行投影的正交投影矩阵, 用我们的向量 $\boldsymbol{a}_i$ 表示出来.

参考解答

1. 直接计算.
2. 直接正交化即可. 此外还有另一种思路, 进行 QR 分解 $B=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&-1&1\\0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=QR$. 令 $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1&\dots&\boldsymbol{a}_5\end{bmatrix}$, 我们想要对 AB 进行 QR 分解, 而 $AB=A(QR)=(AQ)R$, 且 A 已经是正交矩阵, 因此这就是 QR 分解. 正交基为 AQ 的列向量.

   一组正交基为 $a_1+a_5,a_1-2a_2+2a_4-a_5,a_1+a_2+a_3-a_5$.
3. $\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_2^T+\boldsymbol{a}_5\boldsymbol{a}_5^T$.

习题 4 (练习 3.2.4). 1. 对任意正交矩阵 Q, 证明分块矩阵 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}Q&Q\\Q&-Q\end{bmatrix}$ 仍旧是正交矩阵；

2. 令 $H_1=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$. 令 $H_{2n}=\begin{bmatrix}H_n&H_n\\H_n&-H_n\end{bmatrix}$. 证明 H_{2^n} 是对称矩阵, 它的列两两正交, 且所有元素都是 ±1.（该矩阵称为 Hadamard 矩阵, 其列向量（或者行向量）即为高维的小波基.）

注记: 这里 H_{2^n} 的列向量组成了一组（非标准）正交基, 其中每个向量的分量都是 ±1, 称为 Haar 小波基. 它在图像处理, 信息压缩等方面经常用到. 给定 n 阶矩阵 A, 如果 A 的元素都是 1 或 -1, 且 $A^TA=nI_n$, 则称 A 是一个 n 阶 Hadamard 矩阵. 显然 Hadamard 是所有元素绝对值相同的正交矩阵的倍数.

3. 列举所有的 1, 2 阶 Hadamard 矩阵.
4. 说明不存在 3 阶 Hadamard 矩阵.
5. 找出一个 4 阶 Hadamard 矩阵.

参考解答

1. 题中分块矩阵记为 M, 只需直接验证 $M^TM=I$.

2. 直接验证.

3. $\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&-1\end{bmatrix}$.

4. 两个元素均为 ±1 的奇数维向量不可能正交.

5. $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\end{bmatrix}$.

习题 5 (练习 3.3.12). 请将以下向量 $\boldsymbol{x}$ 分解成在 $N(A)$ 中的部分与在 $C(A^T)$ 中的部分的和, 然后点积验证它们确实垂直.

1. $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$. 2. $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$. 3. $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}5\\5\\9\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2&4\\2&3&5\end{bmatrix}$.

参考解答

1. $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$. 2. $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

3. 注意到 $q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$ 是 $N(A)$ 的一组标准正交基, 所以 $N(A)$ 的正交投影矩阵为 $P_{N(A)}=qq^T=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\-1&-1&1\end{bmatrix}$.
则 $P_{N(A)}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$, 从而 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{14}{3}\\\frac{14}{3}\\\frac{28}{3}\end{bmatrix}$.

习题 6 (练习 3.3.17). 考虑矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&6&6\\4&8&8\end{bmatrix}$.

1. 求向 $\begin{bmatrix}3&6&6\\4&8&8\end{bmatrix}$ 的列空间的正交投影矩阵 P_1;

2. 求向 $\begin{bmatrix}3&6&6\\4&8&8\end{bmatrix}$ 的行空间的正交投影矩阵 P_2;

3. 计算 P_1AP_2. 为什么会有如此结果?

参考解答

1. 列空间的一组标准正交基为 $\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{bmatrix}$. $P_1=\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\end{bmatrix}^T$.

2. 行空间的一组标准正交基为 $\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$. $P_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}^T$.

3. 注意 $A = 15 \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}^T$. $P_1AP_2 = 15 \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = A$. (注意向 A 的列空间投影的矩阵 P_1 作用在 A 的列空间上自然是恒等映射, 同理 P_2 也是.)

习题 7. 考虑 $\mathbb{R}^n$ 中两个子空间 $\mathscr{M},\mathscr{N}$. 通过把对应的一组基当成列向量, 不妨假设可以找到列满秩矩阵 A,B, 使得 $C(A)=\mathscr{M},C(B)=\mathscr{N}$.

1. 证明 $\mathscr{M}\subseteq\mathscr{N}$ 当且仅当存在矩阵 X 使得 $A=BX$;
2. 仿照集合论中补集的性质, 我们期待正交补有类似的性质. 假设 $\mathscr{M}\subseteq\mathscr{N}$, 请证明 $\mathscr{N}^\perp\subseteq\mathscr{M}^\perp$. (能否从前一小问, 看出一个矩阵角度的证明?)

参考解答

证明. 1. 必要性显然. 只证充分性. 假设 $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_k\end{bmatrix}$, 那么所有 $\boldsymbol{a}_i$ 都在 $C(B)$ 中, 因此存在 $\boldsymbol{x}_i$ 满足 $\boldsymbol{a}_i=B\boldsymbol{x}_i$. 令 $X=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \dots & \boldsymbol{x}_k\end{bmatrix}$ 即可.

2. 由于 $A=BX$, 我们有 $A^T=X^TB^T$. 所以 $B^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 意味着 $A^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 所以 $N(B^T)\subseteq N(A^T)$. 即 $R(B)^\perp\subseteq R(A)^\perp$. 即 $\mathscr{N}^\perp\subseteq\mathscr{M}^\perp$.

□

习题 8 (练习 3.3.8). 考虑 $\mathbb{R}^n$ 中两个子空间 $\mathscr{M},\mathscr{N}$. 通过把对应的一组基当成列向量, 不妨假设可以找到列满秩矩阵 A,B, 使得 $C(A)=\mathscr{M},C(B)=\mathscr{N}$.

1. $\mathscr{M}+\mathscr{N}$ 是哪个由 A,B 构造出的矩阵的列空间? 这意味着 $(\mathscr{M}+\mathscr{N})^\perp$ 是该矩阵的什么空间?
2. $\mathscr{M}^\perp,\mathscr{N}^\perp$ 分别是哪个由 A,B 构造出的矩阵的零空间? 这意味着 $\mathscr{M}^\perp\cap\mathscr{N}^\perp$ 是哪个由 A,B 构造出的矩阵的零空间?
3. 证明子空间版本的 De Morgan 定律: $(\mathscr{M}+\mathscr{N})^\perp=\mathscr{M}^\perp\cap\mathscr{N}^\perp,(\mathscr{M}\cap\mathscr{N})^\perp=\mathscr{M}^\perp+\mathscr{N}^\perp$.

注记: 集合论中有 De Morgan 定律, 它说对于两个子集 X,Y, $X\cap Y$ 的补集等于 X 的补集并上 Y 的补集, 且 $X\cup Y$ 的补集等于 X 的补集交上 Y 的补集. 对于子空间来说, 正交补也有类似的性质.

参考解答

1. 对应着矩阵 $\begin{bmatrix}A & B\end{bmatrix}$ 的列空间. 所以正交补是它的左零空间, 即 $\begin{bmatrix}A^T \\ B^T\end{bmatrix}$ 的零空间.
2. 分别是 A^T 和 B^T 的零空间, 所以交集是 $\begin{bmatrix}A^T \\ B^T\end{bmatrix}$ 的零空间.
3. 由 1, 2 我们有 $(\mathscr{M}+\mathscr{N})^\perp=\mathscr{M}^\perp\cap\mathscr{N}^\perp$. 现在, 对 $\mathscr{M}^\perp,\mathscr{N}^\perp$ 应用这个公式, 再取正交补, 就得到 $(\mathscr{M}\cap\mathscr{N})^\perp=\mathscr{M}^\perp+\mathscr{N}^\perp$.

习题 9 (练习 3.3.21). 任取 $\mathbb{R}^m$ 中的子空间 $\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2$, 与 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间 $\mathscr{N}_1,\mathscr{N}_2$, 是否一定存在一个矩阵 A, 使得 $C(A)=\mathscr{M}_1,N(A^T)=\mathscr{M}_2,C(A^T)=\mathscr{N}_1,N(A)=\mathscr{N}_2$? 如果并不一定存在, 请给四个子空间加上尽量少的条件, 使得这样的矩阵一定存在.

参考解答

不一定, 因为未必满足线代基本定理要求的子空间关系.

假设 $\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2$ 互为正交补, $\mathscr{N}_1,\mathscr{N}_2$ 互为正交补, 且 $\dim\mathscr{M}=\dim\mathscr{N}$, 则一定存在.

为 $\mathscr{M}_1$ 挑一组基 $\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_r$, 作为列向量构成矩阵 A. 为 $\mathscr{N}_1$ 挑一组基 $\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_r$, 作为列向量构成矩阵 B.

从而有 $\mathscr{M}_1=C(A),\mathscr{M}_2=N(A^T),\mathscr{N}_1=C(B),\mathscr{N}_2=N(B^T)$.

我们断言 AB^T 即为所求.

若 $B^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 显然有 $AB^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 若 $AB^T\boldsymbol{x}=A(B^T\boldsymbol{x})\boldsymbol{0}$, 由于 A 列无关, 方程组只有零解, 因此有 $B^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 所以 $AB^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\iff B^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 所以 AB^T 的零空间就是 B^T 的零空间 $\mathscr{N}_2$.

同理观察 BA^T, 可得 AB^T 的左零空间就是 $\mathscr{M}_2$. 根据线代基本定理, AB^T 的列空间和行空间也都正确.

习题 10. 设 A 为列满秩矩阵.

1. 假设 $\boldsymbol{v}=A\boldsymbol{x}$, 我们希望找到 $\boldsymbol{y}$ 使得 $\boldsymbol{v}=AA^T\boldsymbol{y}$. 请找到一个矩阵 C（使用 A 来构造）使得 $C\boldsymbol{x}$ 就是这里所需要的 $\boldsymbol{y}$;（提示：A^T 未必可逆, 但是利用可逆矩阵 A^TA, 可以给它找一个右逆.）

2. 证明 $C(AA^T)=C(A)$.

参考解答

1. 令 $C=A(A^TA)^{-1}$, 此时 $AA^TC\boldsymbol{x}=AA^TA(A^TA)^{-1}\boldsymbol{x}=A(A^TA)(A^TA)^{-1}\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}$ 即为所求.（注意 $A^TC=I$, 而 CA^T 则是正交投影矩阵.）

2. 上一小问证明了 $C(A)\subseteq C(AA^T)$, 而另一方面 $C(AA^T)\subseteq C(A)$ 是显然的, 因此二者相等.