第十五周作业 参考解答

练习7.5

1, 2, 3, 4, 5, 8, 11, 14, 15, 16

练习 7.5.1. 设 A 是 $\mathbb{F}^3$ 上的一个线性变换: $A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+2x_2\\x_3-x_2\\x_2-x_3\end{bmatrix}$. 求 A 在标准基下的矩阵, 并分别求 $N(A)$ 和 $R(A)$ 的一组基和维数.

◀ $A(e_1,e_2,e_3)=(Ae_1,Ae_2,Ae_3)=(e_1,2e_1-e_2+e_3,e_2-e_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{bmatrix}1&2&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$.

$N(A)$ 的一组基为 $\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}$, 维数为 1. $R(A)$ 的一组基为 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$, 维数为 2. ▶

练习 7.5.2. 设 $V = span(f_1, f_2)$ 是函数空间的子空间, 其中 $f_1 = e^{ax}cosbx, f_2 = e^{ax}sinbx$. 证明求导算子 D 是 V 上的线性变换, 并求其在基 f_1, f_2 下的矩阵.

◀ 之前已证明过 D 是函数空间上的线性变换, 只需说明 $DV \subset V$. $D(f_1, f_2) = (Df_1, Df_2) = (ae^{ax}cosbx - be^{ax}sinbx, ae^{ax}sinbx + be^{ax}cosbx) = (f_1, f_2)\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. ▶

练习 7.5.3. 设 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 上的线性变换 $L_A : X \mapsto AX$, 其中 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. 求 L_A 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵.

$$◀\, L_A(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})\begin{bmatrix} a & & b & \\ & a & & b \\ c & & d & \\ & c & & d \end{bmatrix}. ▶$$

练习 7.5.4. 设 V 是所有 2 阶对称矩阵构成的线性空间, f 是其上的线性变换: $f(X) = A^T XA$, 其中 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. 求 f 在基 $E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21}$ 下的矩阵.

◀ $f(E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21}) = (E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21}) \begin{bmatrix} a^2 & c^2 & 2ac \\ b^2 & d^2 & 2bd \\ ab & cd & ad + bc \end{bmatrix}$. ▶

练习 7.5.5. 设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间 V 上的一个线性变换, 证明, 存在 $\mathbb{F}[x]$ 中一个次数不超过 n^2 的多项式 $f(x)$, 使得 $f(A) = 0$.

◀ 这是由于 $I, A, \cdots, A^{n^2}$ 是维数为 n^2 的线性空间 $End(V)$ 中的 $n^2 + 1$ 个向量, 从而线性相关. ▶

练习 7.5.8. 求导算子 D 定义了多项式空间 $\mathbb{F}[x]_n$ 上的线性变换, 给定 $\mathbb{F}[x]_n$ 的两组基 $1, x, \cdots, x^{n-1}$ 和 $1, x, \cdots, \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}$.

1. 求两组基之间的过渡矩阵.

$$\blacktriangleleft\ (1, x, \cdots, \tfrac{1}{(n-1)!}x^{n-1}) = (1, x, \cdots, x^{n-1})\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{(n-1)!} \end{bmatrix}.\ \blacktriangleright$$

2. 求 D 在两组基下的矩阵.

$$\blacktriangleleft\ D(1, x, \cdots, \tfrac{1}{(n-1)!}x^{n-1}) = (0, 1, x, \cdots, \tfrac{1}{(n-2)!}x^{n-2}) = (1, x, \cdots, \tfrac{1}{(n-1)!}x^{n-1})\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

$$D(1, x, \cdots, x^{n-1}) = (0, 1, x, \cdots, (n-1)x^{n-2}) = (1, x, \cdots, x^{n-1})\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & n-1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}.\ \blacktriangleright$$

3. 通过过渡矩阵验证两个表示矩阵是相似的.

$$\blacktriangleleft\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & n-1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{(n-1)!} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{(n-1)!} \end{bmatrix}^{-1}.\ \blacktriangleright$$

4. 是否存在一组基, 使得 D 在该组基下的矩阵是对角矩阵?

◀ 否. ▶

练习 7.5.11. 已知 $\mathbb{F}^3$ 上的线性变换 f 在标准基 e_1, e_2, e_3 下的矩阵是 $A = \begin{bmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{bmatrix}$. 设 $t_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, t_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, t_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ 是 $\mathbb{F}^3$ 的另一组基, 求 f 在这组基下的矩阵.

$$◀ (t_1, t_2, t_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}. ▶$$

练习 7.5.14. 设 3 维线性空间 V 有一组基 e_1, e_2, e_3,其上的线性变换 f 在该组基下的矩阵是 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{bmatrix}$.

1. 求 f 的全部特征值和特征向量.

◀ f 的 (即 A 的) 特征多项式为 $det(\lambda I - A) = (\lambda-3)^2(\lambda-1)$, 故 f 的 (即 A 的) 特征值为 $3, 3, 1$. 解得 A 的特征值 3 的一组线性无关的特征向量为 $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, 特征值 1 的一组线性无关的特征向量为 $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. 故得 f 的特征对 $(3, e_1 - e_2 + 2e_3)$, $(1, 2e_1 - e_3)$. ▶

2. 判断是否存在一组基, 使得 f 在该组基下的表示矩阵是对角矩阵. 如果存在, 写出这组基及对应的对角矩阵.

◀ 否. 特征值 3 的几何重数小于代数重数. ▶

练习 7.5.15. 设 4 维线性空间 V 有一组基 e_1, e_2, e_3, e_4，其上的线性变换 f 在该组基下的矩阵是 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1. 求 f 的全部特征值和特征向量.

◀ 计算得 A 的特征值为 $0, 0, 1, 1$, 以及特征值 0 的特征向量 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 和特征值 1 的特征向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. 故 f 有特征对 $(0, e_2), (0, e_3), (1, e_1 + e_3), (1, e_4)$. ▶

2. 判断是否存在一组基, 使得 f 在该组基下的表示矩阵是对角矩阵. 如果存在, 写出这组基及对应的对角矩阵.

◀ 是的. 取基为 $(e_2, e_3, e_1 + e_3, e_4)$, 则 $f(e_2, e_3, e_1 + e_3, e_4) = (e_2, e_3, e_1 + e_3, e_4) \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$. ▶

练习 7.5.16. 设 $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, 在 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 中定义如下变换: $f(X) = B^{-1}XB, \forall X \in \mathbb{F}^{2\times 2}$.

1. 证明 f 是线性变换.

◀ 这是由于左乘和右乘某个给定矩阵都是线性的. ▶

2. 求 f 的全部特征值和特征向量.

◀ $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$. 在 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 的基 $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ 下 f 的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

解得 A 的特征值为 $1, 1, -1, -1$ 以及特征值 1 的特征向量 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 和特征值 -1 的特征向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. 故 f 有特征对 $(1, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}), (1, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}), (-1, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}), (-1, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix})$. ▶