Review

Thm. (Cauchy-Picard)设$f(x, y)$在矩形

$$D=\{(x,y):|x-x_0|\le a, |y-y_0|\le b\}$$

中连续,并且关于变元 y 满足 Lipschitz 条件,则存在正数 h,使得一阶常微分方程的初值问题

$$y'(x)=f(x,y),\ \ y(x_0)=y_0$$

在$[x_0-h, x_0+h]$上存在唯一的解. 其中,

$$h=\min\{a, b/\mathrm{M}\}, |f(x,y)|\le \mathrm{M}, \forall (x,y)\in D.$$

- 解的存在唯一性定理的几何解释

Thm. 设$p(x), q(x)$在区间I上连续, $x_0 \in I$, 则对任意$y_0 \in \mathbb{R}$, 一阶线性常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = p(x)y + q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

在整个区间I上存在唯一解.

Thm. 设函数$a_k(t)(k=1,2,\cdots,n)$和$f(t)$都在区间I上连续,$t_0\in I$,则对任意实数$\xi_k(k=0,1,\cdots,n-1)$,定解问题

$$\begin{cases} x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x=f(t) \\ x(t_0)=\xi_0, x'(t_0)=\xi_1,\cdots,x^{(n-1)}(t_0)=\xi_{n-1} \end{cases}$$

在区间I上存在唯一解$x(t)$.

§2. 一阶ODE的初等解法

Leibnitz曾经专门从事利用变量替换的办法来解决一阶微分方程的求解问题, 而Euler则试图利用积分因子的办法统一处理这一问题. 但实践证明,单纯采用一种方法各有其不便和困难. 因此必须对具体问题具体分析.

有初等解法的微分方程是很有限的, 例如形式上很简单的Riccati方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y^2+q(x)y+r(x)$ 一般就没有初等解法.法国数学家Liouville在1841年证明了这一事实, 这就促使人们寻求别的方法来研究微分方程的求解问题.

目的与要求

- 熟悉各种类型方程的解法,正确而又敏捷地判断一个给定的方程属于何种类型,从而循法求解.
- 学习解题技巧,总结经验,培养机智与灵活性.
- 善于根据方程的特点,引进适宜的变换,将方程化为能求解的新类型.

1.变量分离方程 ---------形如$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x,\quad \int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x+c.$$

此外, 若$g(c)=0$,方程还有常数解 $y\equiv c$.

Question. 若 f,g' 连续,是否存在这样的解,s.t.

$$y(x_0)=c,\ y\not\equiv c,\ g(c)=0?$$

不存在! 由解的存在唯一性定理可证.

Ex. 求解初值问题 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2\cos x,\ y(0)=1.$

解:分离变量, 得 $\dfrac{1}{y^2}\mathrm{d}y=\cos x\mathrm{d}x.$

两边积分, 得 $-\dfrac{1}{y}=\sin x+c.$ 通解为$y=-\dfrac{1}{\sin x+c}.$

令$x=0,\ y=1$得$c=-1$.故所求特解为$y=1/(1-\sin x)$.

此外, 方程还有解$y\equiv 0$, 但不满足初值条件. □

2.可化为变量分离方程的类型

1)齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g\left(\dfrac{y}{x}\right)$

令$u=\dfrac{y}{x}$,

则$y=ux,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,

代入原方程得 $u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=g(u)$

即 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{g(u)-u}{x}$

例: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}.$

解: 令$u=\dfrac{y}{x}$,代入原方程得 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\tan u.$

分离变量得 $$\frac{\cos u\,\mathrm{d}u}{\sin u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

两边积分得 $$\ln|\sin u|=\ln|x|+c_1.$$

$$\sin u=cx,c=\pm e^{c_1}\neq 0.$$

此外, 方程还有解$\sin u=0.$ 故通解中允许$c=0.$

原方程的通解为 $\sin\dfrac{y}{x}=cx,c\in\mathbb{R}.$□

2)形如$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$的方程

Case1. $c_1=c_2=0$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}=\frac{a_1+b_1\dfrac{y}{x}}{a_2+b_2\dfrac{y}{x}}=g\left(\frac{y}{x}\right)$$

Case2. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0$,即$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=k$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}=f(a_2x+b_2y)$$

令$u=a_2x+b_2y$,则方程化为$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a_2+b_2f(u)$.

Case3. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 且 $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$

两直线 $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$ 相交于一点 $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$

即 $\begin{cases} a_1(x-\alpha) + b_1(y-\beta) = 0 \\ a_2(x-\alpha) + b_2(y-\beta) = 0 \end{cases}$

令 $X = x - \alpha, Y = y - \beta$, 则

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y} = g\left(\frac{Y}{X}\right)$$

例: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-y+1}{x+y-3}$

解: 由 $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$ 得 $x=1, y=2$. 令 $\begin{cases} X=x-1 \\ Y=y-2 \end{cases}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\dfrac{X-Y}{X+Y}$.

令 $u=\dfrac{Y}{X}$, 即 $Y=uX$, 则 $\quad X\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}=\dfrac{1-2u-u^2}{1+u} \quad (*)$,

分离变量得 $\quad \dfrac{\mathrm{d}X}{X}=\dfrac{1+u}{1-2u-u^2}\mathrm{d}u$

两边积分得 $\quad \ln X^2=-\ln\left|u^2+2u-1\right|+c_1$,

$$X^2(u^2+2u-1)=c, c=\pm e^{c_1}\neq 0.$$

此外, 容易验证 $u^2+2u-1=0$, 也是 $(*)$ 的解. 故通解中 c 可取任意常数. 代回原变量得原方程的通解

$$y^2+2xy-x^2-6y-2x=c, c\in\mathbb{R}.\square$$

3.一阶隐方程

1) $y=f(x,y')$ 2) $x=f(y,y')$

3) $F(x,y')=0$ 4) $F(y,y')=0$

1) $y=f(x,y')$(微分法)

令$p=y'$,则 $y=f(x,p)$

两边对 x 求导,得到关于 $p'(x),p,x$ 的方程.

若求得其通解 $p=u(x,c)$,

则原方程的通解为

$$y=f(x,u(x,c)).$$

例: $x(y')^2-2yy'+9x=0$

解: 令$p=y'$,则 $$y=\frac{9x}{2p}+\frac{xp}{2} \qquad (*)$$

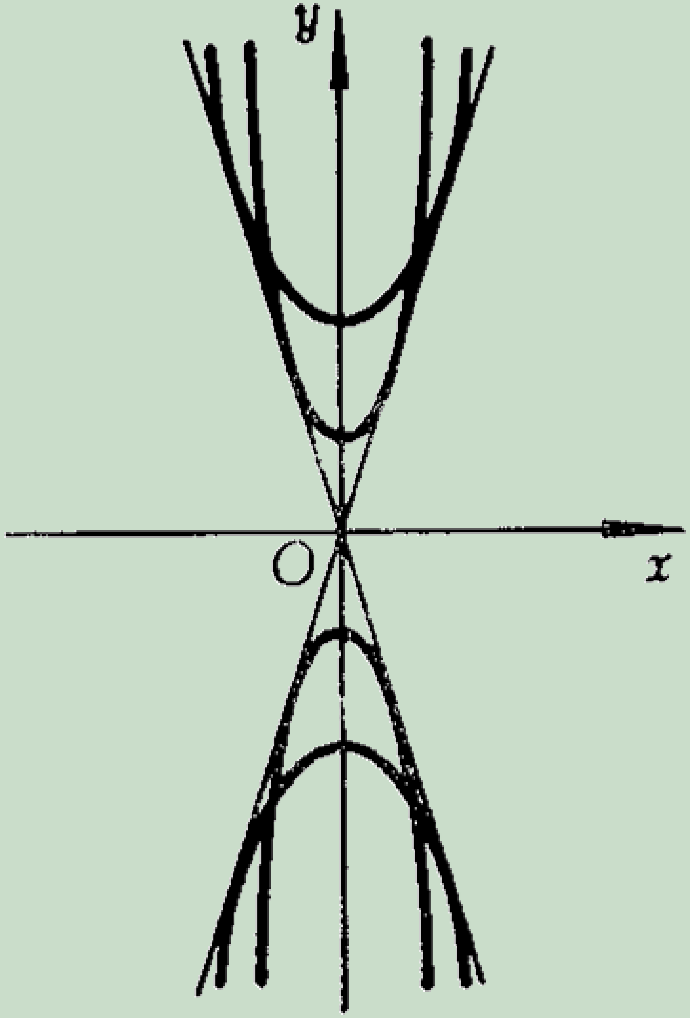
两边对x求导,得 $$\left(\frac{1}{2}-\frac{9}{2p^2}\right)\left(p-x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)=0 \qquad (**)$$

它蕴含 $$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{p}{x} \quad 或 \quad p^2=9$$

由此得(**)的通解 $p=cx$和两个特解$p=3, p=-3.$

代入(*)得原方程的特解 $y=3x, y=-3x,$ 及通解

$$y=\frac{9x}{2p}+\frac{xp}{2}=\frac{9}{2c}+\frac{c}{2}x^2, \qquad 0\neq c\in\mathbb{R}.\square$$



$$y=\frac{9}{2c}+\frac{c}{2}x^2,$$

$$y=3x,$$

$$y=-3x,$$

包络

2)$x = f(y, y')$(微分法)

令$p = y'$,则

$$x = f(y, p)$$

两边对y求微分,得到关于$p'(y), y, p$的方程.

若求得其通解

$$p = u(y, c),$$

则原方程的通解为

$$x = f(y, u(y, c)).$$

$3)F(x,y')=0$(参数法)

令$p=y'$,则$F(x,p)=0$. 令 $x=g(t),p=h(t)$,则

$$\mathrm{d}y=p\mathrm{d}x=h(t)g'(t)\mathrm{d}t$$

因此原方程有通解

$$\begin{cases} x=g(t) \\ y=\int h(t)g'(t)\mathrm{d}t+C, \quad C\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

$4)F(y,y')=0$(参数法) 处理方法同 3)

例: $y^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=1$

解: 设$y=\cos t,\ p=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin t, (-\infty<t<\infty)$.则

$$\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\mathrm{d}y=\frac{1}{\sin t}\mathrm{d}\cos t=-\mathrm{d}t \qquad (*)$$

因此, $x=-t+c, y=\cos t.$

消去t,得原方程通解 $y=\cos(c-x), c\in\mathbb{R}.$

此外,原方程还有两个特解$y=\pm1.$ □

Remark:此方程满足初值条件$y(0)=1$的解不唯一,为$y=1$或$y=\cos x$.是否与解的存在唯一性定理矛盾?

4.恰当方程

例: $y\cos x\mathrm{d}x+\sin x\mathrm{d}y=0$

解: 视$y=y(x)$,则

$$y\mathrm{d}\sin x+\sin x\mathrm{d}y=0.$$

$$\mathrm{d}(y\sin x)=0.$$

通解为: $y\sin x=C, C\in\mathbb{R}.$ □

Remark.

$$y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = \mathrm{d}(xy) \qquad \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{xy} = \mathrm{d}\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right) \qquad \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2} = \mathrm{d}\left(\arctan\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\right)$$

Remark. 分项组合.

例: $\left(\cos x+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y=0$

解: 把方程分项组合, 得 $\cos x\mathrm{d}x+\frac{1}{y}\mathrm{d}y+\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}=0.$

即 $$\mathrm{d}\sin x+\mathrm{d}\ln|y|+\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)=0,$$

$$\mathrm{d}\left(\sin x+\ln|y|+\frac{x}{y}\right)=0.$$

于是方程的通解为 $\sin x+\ln|y|+\frac{x}{y}=c, c\in\mathbb{R}.$□

5.积分因子

例: $(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=0$

解: 原方程等价于 $(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)+(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)=0.$

同乘(积分因子)$\dfrac{1}{x^2+y^2}$,得 $\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=0.$

即 $$\frac{1}{2}\mathrm{d}\ln(x^2+y^2)+\mathrm{d}\arctan\frac{x}{y}=0.$$

原方程的通解为 $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\arctan\dfrac{x}{y}=C, C\in\mathbb{R}.\square$

Remark: 先分组, 再找公共的积分因子, 往往能简化计算.

例: $(3x^3+y)\mathrm{d}x+(2x^2y-x)\mathrm{d}y=0$

解: 分组得 $(3x^3\mathrm{d}x+2x^2y\mathrm{d}y)+(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)=0.$

第二组有积分因子 $\dfrac{1}{x^2},\dfrac{1}{y^2},\dfrac{1}{x^2+y^2}$.如果同时照顾到第一组, 则$\dfrac{1}{x^2}$是两组公共的积分因子,从而

$$(3x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y)+\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2}=0.$$

即 $$\mathrm{d}\left(\frac{3}{2}x^2+y^2\right)-\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)=0.$$

于是原方程的通积分为 $\dfrac{3}{2}x^2+y^2-\dfrac{y}{x}=C, C\in\mathbb{R}.\square$

6.常数变易法

$$y' = p(x)y + q(x) \qquad (1)$$

用分离变量法求得 $y' = p(x)y$ 的解为 $y(x) = Ce^{\int p(x)\mathrm{d}x}$.

设(1)的解为 $y(x) = C(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$,

代入(1)得 $C'(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x} = q(x)$.

因此(1)的通解为 $y = e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int q(x)e^{\int -p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)$. □

Remark.本质上是变量替换 $C(x) = y(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$.

Remark.积分因子法求解 $y' = p(x)y + q(x)$ 更直接.

例: $y\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=0$

解法一: 将方程改写为 $y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=-y\mathrm{d}y.$

左端有积分因子 $\dfrac{1}{y^2},\dfrac{1}{x^2},\dfrac{1}{xy},\dfrac{1}{x^2\pm y^2}$, 但考虑到右端只与

y有关, 故取$\mu=\dfrac{1}{y^2}$. 方程两边同乘$\dfrac{1}{y^2}$, 得

$$\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}+\frac{\mathrm{d}y}{y}=0.$$

因而原方程的通解为 $\dfrac{x}{y}+\ln|y|=c,c\in\mathbb{R}.$

此外方程有特解 $y\equiv 0.$

解法二: 将方程改写为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x-y}$，这是齐次方程.

令$u=\frac{y}{x}$，得 $$\frac{1-u}{u^2}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

通解为 $$-\frac{1}{u}-\ln|u|=\ln|x|-c, c\in\mathbb{R}.$$

代回原来的变量即得 $$\frac{x}{y}+\ln|y|=c, c\in\mathbb{R}.$$

此外方程有特解 $$y\equiv 0.$$

解法三(常数变易法): 将方程改写为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{x}{y}-1.$

齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{x}{y}$ 的通解为 $x=cy.$

设非齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{x}{y}-1$ 的通解为 $x=c(y)y$, 代入得

$$c'(y)y+c(y)=c(y)-1,\quad c'(y)=\frac{-1}{y},$$

$$c(y)=-\ln|y|+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

故原方程的通解为 $\quad x=y(-\ln|y|+c),\quad c\in\mathbb{R}.$

此外方程有特解 $\quad y\equiv 0.$ □

7.Bernoulli方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y+q(x)y^n, n\neq 0,1$

方程两边同乘y^{-n}, 得

$$y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y^{1-n}+q(x),$$

令$z=y^{1-n}$,则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)p(x)z+(1-n)q(x),$$

这是关于z的一阶线性ODE,求出z,从而得 y.

此外, 若$n>0$, Bernoulli方程还有特解 $y=0$.

例: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=6\dfrac{y}{x}-xy^2$

解: 令$z=y^{-1}$,则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}(y^{-1})}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{1}{y^2}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$

代入原方程, 得 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{6}{x}z+x.$

这是线性方程, 其通解为 $z=\dfrac{c}{x^6}+\dfrac{x^2}{8},c\in\mathbb{R}.$

原方程的通解为 $\dfrac{1}{y}=\dfrac{c}{x^6}+\dfrac{x^2}{8},c\in\mathbb{R}.$

此外, $y=0$ 也是原方程的解.□

8.Riccati方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y^2+q(x)y+r(x)$

若我们有办法找到Riccati方程的一个特解$\varphi(x)$,则经过变换$y=z+\varphi(x)$后,方程就变为Bernoulli方程,因而可解. 事实上, 将$y=z+\varphi(x)$带入方程,得

$$z'+\varphi'=pz^2+2p\varphi z+p\varphi^2(x)+qz+q\varphi+r.$$

由于$\varphi'=p\varphi^2(x)+q\varphi+r$,我们得到$z$的Bernoulli方程

$$z'=pz^2+(2p\varphi+q)z.$$

求出z,即得Riccati方程的通解$y=z+\varphi(x)$.

找Riccati方程的特解时,通常尝试指数函数, 幂函数, 三角函数, 常数函数等简单函数.

例: $y' + y^2 - 2y\sin x = \cos x - \sin^2 x$

解: 方程有特解$y = \sin x$. 令$y = z + \sin x$, 代入方程, 得

$$z' + z^2 = 0.$$

解得 $z = \dfrac{1}{x+c}, c \in \mathbb{R}$, 或 $z = 0$.

于是原方程的通解为 $y = \sin x + \dfrac{1}{x+c}, c \in \mathbb{R}$.

另有特解 $y = \sin x$. □

9.变量替换法

例*: $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1+xy^3}{1+x^3y}=0$$

解: 令$u=x+y, v=xy$,则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x}=\frac{1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\frac{uv}{v^2-1}$$

$$\frac{2\mathrm{d}u}{u}=\frac{2v\mathrm{d}v}{v^2-1}=\frac{\mathrm{d}(v^2-1)}{v^2-1},\quad u^2=c(v^2-1), c\neq 0.$$

此外, $u=0$也是解. 故原方程的通解为

$$(x+y)^2=c(x^2y^2-1), c\in\mathbb{R}.\square$$

例: $x''(t)+x(t)=0$

解: 令$y(t)=-x'(t)$,则原方程化为方程组$\begin{cases} x'=-y \\ y'=x \end{cases}$.

令$x=r(t)\cos\theta(t), y=r(t)\sin\theta(t)$.则

$$\begin{cases} r'\cos\theta-r\theta'\sin\theta=-r\sin\theta & (1) \\ r'\sin\theta+r\theta'\cos\theta=r\cos\theta & (2) \end{cases}$$

$(1)\times\cos\theta+(2)\sin\theta$,得 $\qquad r'=0,$

$(2)\times\cos\theta-(1)\sin\theta$,得 $\qquad r\theta'=r.$

于是, $r=c_1\neq 0, \theta=t+c_2$,或 $r=0, \theta=c.$

故原方程的通解为 $\quad x=c_1\cos(t+c_2), c_1, c_2\in\mathbb{R},$

也即 $\quad x=c_1\cos t+c_2\sin t, c_1, c_2\in\mathbb{R}.\square$

10.综合例题

例. $f \in C^1[0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=0$, 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

解法一: 令 $g(x)=f(x)+f'(x)$, 则

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0, \text{且 } f(x)=e^{-x}\left(c+\int_0^x g(t)e^t\mathrm{d}t\right).$$

由L'Hosptial法则

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{c+\int_0^x g(t)e^t\mathrm{d}t}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)e^x}{e^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} g(x)=0.$$

解法二:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x f(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x(f(x)+f'(x))}{e^x}=0. \square$$

例:设$f(x),g(x)$和$y(x)$为$[a,b]$上的连续函数, $f(x)>0$,且

$$y(x)\le g(x)+\int_a^x f(t)y(t)\mathrm{d}t,\quad \forall x\in[a,b]. \qquad (1)$$

证明: $y(x)\le g(x)+\int_a^x f(t)g(t)e^{\int_t^x f(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t, \forall x\in[a,b].$

解: 令$h(x)=\int_a^x f(t)y(t)\mathrm{d}t$, 则$h(a)=0, h'(x)=f(x)y(x)$.

再由(1)及$f(x)>0$得, $h'(x)\le f(x)g(x)+f(x)h(x)$.即

$$h'(x)-f(x)h(x)\le f(x)g(x).$$

两边同乘非负函数$e^{\int_a^x -f(s)\mathrm{d}s}$,得

$$\left(h(x)e^{\int_a^x -f(s)\mathrm{d}s}\right)'\le f(x)g(x)e^{\int_a^x -f(s)\mathrm{d}s}.$$

$$\left(h(t)e^{\int_a^t -f(s)\mathrm{d}s}\right)' \le f(t)g(t)e^{\int_a^t -f(s)\mathrm{d}s}.$$

两边在$[a,x]$上积分, 并利用$h(a)=0$,得

$$h(x)e^{\int_a^x -f(s)\mathrm{d}s} \le \int_a^x f(t)g(t)e^{\int_a^t -f(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t,$$

即
$$h(x) \le \int_a^x f(t)g(t)e^{\int_t^x f(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t.$$

于是
$$y(x) \le g(t)+h(t)$$

$$\le g(t)+\int_a^x f(t)g(t)e^{\int_t^x f(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t.$$ □

例.（Gronwall不等式）已知$\alpha(t)\ge 0$及$u(t)$在$[t_0,t_1]$上连续, C,K为非负实数,且

$$u(t)\le C+\int_{t_0}^{t}\left[\alpha(s)u(s)+K\right]\mathrm{d}s,\quad \forall t\in[t_0,t_1].$$

证明： $u(t)\le[C+K(t-t_0)]e^{\int_{t_0}^{t}\alpha(s)\mathrm{d}s},\quad \forall t\in[t_0,t_1].$

Hint: Let $h(t)=C+\int_{t_0}^{t}\left[\alpha(s)u(s)+K\right]\mathrm{d}s$, then

$$h'(t)=\alpha(t)u(t)+K\le\alpha(t)h(t)+K.$$

作业：习题7.2

No.1(10),2(4),

3(1,2,7,12,13,14)

补充题(不交):

$$1.(3x^2+6xy^2)\mathrm{d}x+(6x^2y+4y^3)\mathrm{d}y=0$$

$$2.(e^x+3y^2)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y=0$$

$$3.x(4y\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y)+y^3(3y\mathrm{d}x+5x\mathrm{d}y)=0$$

$$4.(y-1-xy)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$$

$$5.y'=(x-1)y^2+(1-2x)y+x$$

$$6.x^2y'+(xy-2)^2=0$$

$$7.y^2(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)+x(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)=0$$

(提示:令$x=r(t)\cos\theta(t), y=r(t)\sin\theta(t)$)

答案:

1. $x^3+y^4+3x^2y^2=C;$

2. $(x^2-2x+2)e^x+x^3y^2=C;$

3. $x^4y^2+x^3y^5=C;$

4. $(xy+1)e^{-x}=C;$

5. $y=\dfrac{1}{x+Ce^x}+1, y=1;$

6. $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{3x^2}{x^3+C}, y=\dfrac{1}{x};$

7. $1+\dfrac{1}{y}+\dfrac{C}{\sqrt{x^2+y^2}}=0, y=0.$