第十二次习题课题目

习题 1 (练习 7.3.8). 记实数域 $\mathbb{R}$ 上的全体一元可导函数组成的集合为 $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, 定义 $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ 上的变换：$\boldsymbol{A}\big(f(x)\big)=xf(x) \quad \forall f(x)\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

(1) 证明 $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ 上的一个线性变换.

(2) 设 $\boldsymbol{D}$ 是求导算子, 证明 $\boldsymbol{DA}-\boldsymbol{AD}=\boldsymbol{I}$.

参考解答:

(1) 按照定义证明：$\boldsymbol{A}\big(f(x)\big)\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}), \boldsymbol{A}\big(f(x)+g(x)\big)=\boldsymbol{A}\big(f(x)\big)+\boldsymbol{A}\big(g(x)\big), \boldsymbol{A}\big(kf(x)\big)=k\boldsymbol{A}\big(f(x)\big)$

(2)$(DA-AD)f=DAf-ADf=D(xf)-Af'=xf'+f-xf'=f$

习题 2 (练习 7.3.9). 令 $\mathscr{V}$ 为全体实数数列组成的线性空间, 其中元素记为 $(a_0,a_1,\cdots)$. 定义其上变换

$$\boldsymbol{D}\left((a_0,a_1,\cdots)\right)=(0,a_0,a_1,\cdots),\quad \boldsymbol{M}\left((a_0,a_1,\cdots)\right)=(a_1,2a_2,3a_3,\cdots)$$

(1) 证明 D,M 都是线性变换.

(2) 证明 $MD-DM=I$.

(3) 对于任意 n 阶方阵 A,B, 证明 $AB-BA\neq I_n$.

参考解答:

(1) 按照定义证明即可。

(2) 直接计算即可。注意这是无限维空间，线性变换不能用矩阵表示，因此与下一问不矛盾。

(3)$trace(AB-BA)=0\neq trace(I_n)$

习题 3 (练习 7.3.13). 设线性空间 $\mathscr{V}$ 有直和分解：$\mathscr{V} = \mathscr{M}_1 \bigoplus \mathscr{M}_2$（即 $\mathscr{V} = \mathscr{M}_1 + \mathscr{M}_2$ 且满足 $\mathscr{M}_1 \cap \mathscr{M}_2 = \{\mathbf{0}\}$), 则任取 $\boldsymbol{a} \in \mathscr{V}$, 都有唯一的分解式：$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$, 其中 $\boldsymbol{a}_1 \in \mathscr{M}_1, \boldsymbol{a}_2 \in \mathscr{M}_2$. 定义 $\mathscr{V}$ 上的变换：

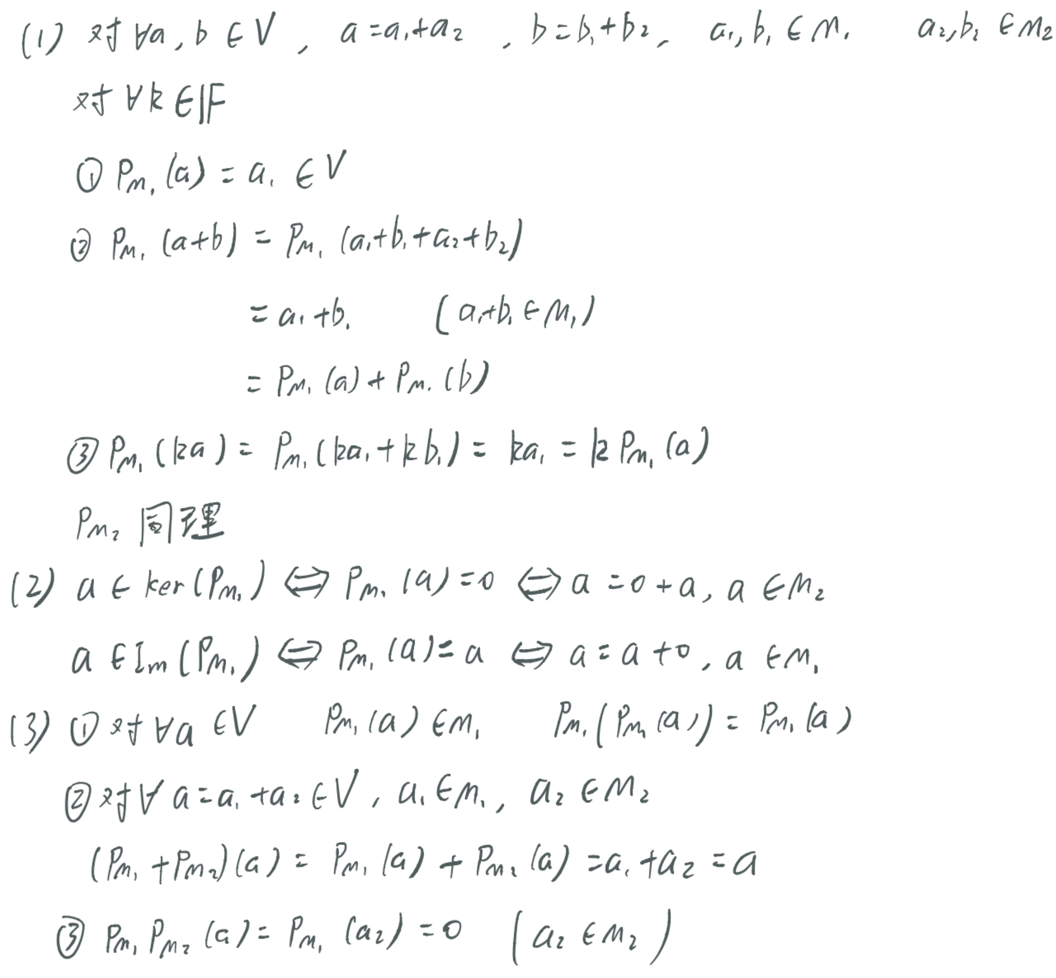
$$\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_1}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}_1, \qquad \boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_2}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}_2.$$

(1) 证明, $\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_1}, \boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_2}$ 都是 $\mathscr{V}$ 上的线性变换.

(2) 证明, $\ker(\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_1}) = \mathscr{M}_2, Im(\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_1}) = \mathscr{M}_1$.

(3) 证明, $\boldsymbol{P}^2_{\mathscr{M}_1} = \boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_1}$, $\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_1} + \boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_2} = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_1}\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_2} = \boldsymbol{O}$.

(4) 分别求 $\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_1}, \boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_2}$ 的特征值和特征向量.



(1) 对 $\forall a, b \in V$, $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$, $a_1, b_1 \in M_1$ $a_2, b_2 \in M_2$

对 $\forall k \in \mathbb{F}$

① $P_{M_1}(a) = a_1 \in V$

② $P_{M_1}(a+b) = P_{M_1}(a_1+b_1+a_2+b_2)$

$= a_1 + b_1$ $(a_1+b_1 \in M_1)$

$= P_{M_1}(a) + P_{M_1}(b)$

③ $P_{M_1}(ka) = P_{M_1}(ka_1 + kb_1) = ka_1 = k P_{M_1}(a)$

P_{M_2} 同理

(2) $a \in \ker(P_{M_1}) \Leftrightarrow P_{M_1}(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0 + a, a \in M_2$

$a \in Im(P_{M_1}) \Leftrightarrow P_{M_1}(a) = a \Leftrightarrow a = a + 0, a \in M_1$

(3) ① 对 $\forall a \in V$ $P_{M_1}(a) \in M_1$ $P_{M_1}(P_{M_1}(a)) = P_{M_1}(a)$

② 对 $\forall a = a_1 + a_2 \in V$, $a_1 \in M_1$, $a_2 \in M_2$

$(P_{M_1} + P_{M_2})(a) = P_{M_1}(a) + P_{M_2}(a) = a_1 + a_2 = a$

③ $P_{M_1}P_{M_2}(a) = P_{M_1}(a_2) = 0$ $(a_2 \in M_2)$

图 1: 习题三参考答案其一

(4) 若 $P_{M_1}(a)=ka$, $a\neq 0$

则 $a_1=k(a_1+a_2) \Leftrightarrow (k-1)a_1+ka_2=0$

分两类情况讨论:

① 若 $a_1\neq 0$, 则 $k=1$, $a_2=0$

此时 $a=a_1\in M_1$ $P_{M_1}(a)=a$

② 若 $a_2\neq 0$ 则 $k=0$, $a_1=0$

此时 $a=a_2\in M_2$ $P_{M_2}(a)=0$

③ 若 $a_1\neq 0$ 且 $a_2\neq 0$ 则 $\begin{cases} k=1 \\ k=0 \end{cases}$ 矛盾

∴ P_{M_1} 的特征值为 1 和 0, 特征子空间分别为 M_1 和 M_2。

P_{M_2} 类似

图 2: 习题三参考答案其二

习题 4. 考虑 xy 平面, 设 T 为关于 x 轴的反射变换, S 为关于 y 轴的反射变换. 对于任意向量 $\mathbf{v}=(x,y)$, 写出 $S(T(\mathbf{v}))$, 并给出线性变换 ST 的更简单的描述.

参考答案:

$S(T(\mathbf{v}))=(-x,-y)$ 是 (x,y) 关于原点的对称点。

习题 5 (练习 7.4.3). 考虑函数空间的子空间 $\mathrm{span}(\sin^2 x, \cos^2 x)$.

(1) 证明 $\sin^2 x, \cos^2 x$ 和 $1, \cos 2x$ 分别是子空间的一组基.

(2) 分别求从 $\sin^2 x, \cos^2 x$ 到 $1, \cos 2x$, 和从 $1, \cos 2x$ 到 $\sin^2 x, \cos^2 x$ 的过渡矩阵.

(3) 分别求 1 和 $\sin^2 x$ 在两组基下的坐标.

参考解答:

(1) 对于 $\sin^2 x, \cos^2 x$ ，检验其线性无关，对函数在某些点处赋值即得。

对于 $1, \cos 2x$ ，先证其可被 $\sin^2 x, \cos^2 x$ 线性表示，再检验其线性无关。

(2)$(1, \cos 2x) = \left(\sin^2 x, \cos^2 x\right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\left(\sin^2 x, \cos^2 x\right) = (1, \cos 2x) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = (1, \cos 2x) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$

(3)

$$1 = (1, \cos 2x) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\sin^2 x, \cos^2 x\right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\sin^2 x, \cos^2 x\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\sin^2 x = \left(\sin^2 x, \cos^2 x\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (1, \cos 2x) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (1, \cos 2x) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{-}$$

习题 6. 考虑线性空间 $P_2[x] := \{y(x) | y(x) = a + bx + cx^2, a, b, c \in \mathbb{R}\}$. 已知 $w_1(x), w_2(x), w_3(x) \in P_2[x]$ 且满足 $w_1(-1) = 1, w_1(0) = 0, w_1(1) = 0$, $w_2(-1) = 0, w_2(0) = 1, w_2(1) = 0$, $w_3(-1) = 0, w_3(0) = 0, w_3(1) = 1$.

（1）证明：$w_1(x), w_2(x), w_3(x)$ 构成 $P_2[x]$ 的一组基.

（2）取 $v_1(x) = 1, v_2(x) = x, v_3(x) = x^2$, 分别求从 v_1, v_2, v_3 到 w_1, w_2, w_3 的过渡矩阵和从 w_1, w_2, w_3 到 v_1, v_2, v_3 的过渡矩阵.

(1) 若 $f = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = 0$

则 $\begin{cases} f(-1) = \lambda_1 = 0 \\ f(0) = \lambda_2 = 0 \\ f(1) = \lambda_3 = 0 \end{cases}$

$\therefore$ w_1 w_2 w_3 线性无关

(2)

$$(v_1, v_2, v_3) = (w_1, w_2, w_3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(w_1, w_2, w_3) = (v_1, v_2, v_3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

图 3: 习题五参考答案

习题 7. 考虑二阶矩阵空间 $M_2(\mathbb{R})$ 上的线性变换 $T(M)=AMB$, 其中 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$. 描述 $\ker(T)$ 及 ImT.

参考答案:

设 $M=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$, 则 $T(M)=AMB=\begin{bmatrix}0&b\\0&0\end{bmatrix}$

所以 $\ker(T)=\{\begin{bmatrix}a&0\\c&d\end{bmatrix}\mid a,c,d\in\mathbb{R}\}$。

$Im(T)=\{\begin{bmatrix}0&b\\0&0\end{bmatrix}\mid b\in\mathbb{R}\}$。

可验证 $\dim\ker(T)+\dim Im(T)=\dim M_2(\mathbb{R})$。

习题 8 (练习 7.4.9). 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是线性空间 $\mathscr{V}$ 的一组基.

1. 判断 $\boldsymbol{t}_1=\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{t}_2=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{t}_n=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\cdots+\boldsymbol{e}_n$ 是否也是 $\mathscr{V}$ 的一组基.
2. 判断 $\boldsymbol{t}_1=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{t}_2=\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3,\cdots,\boldsymbol{t}_n=\boldsymbol{e}_n+\boldsymbol{e}_1$ 是否也是 $\mathscr{V}$ 的一组基.

参考答案:

1. $(t_1,t_2,\cdots,t_n)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\&1&\cdots&1\\&&\ddots&\vdots\\&&&1\end{bmatrix}$. 过渡矩阵 $\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\&1&\cdots&1\\&&\ddots&\vdots\\&&&1\end{bmatrix}$ 可逆, 故 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 是 V 的一组基.

2. $(t_1,t_2,\cdots,t_n)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)\begin{bmatrix}1&&&1\\1&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&1&1\end{bmatrix}$. 过渡矩阵 $\begin{bmatrix}1&&&1\\1&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&1&1\end{bmatrix}$ 可逆当且仅当 n 是奇数，参见习题四第五题。

习题 9 (练习 7.4.10). 设 $a_1,\cdots,a_n$ 是 $\mathbb{F}$ 中两两不等的数, $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是线性空间 $\mathscr{V}$ 的一组基, 令 $\boldsymbol{t}_i=\boldsymbol{e}_1+a_i\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_i^{n-1}\boldsymbol{e}_n, i=1,\cdots,n$. 证明 $\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\cdots,\boldsymbol{t}_n$ 也是 $\mathscr{V}$ 的一组基.

参考答案:

过渡矩阵的行列式为 $a_1,...,a_n$ 的 Vandermonde 行列式, 故不为 0.

习题 10 (练习 7.4.11). 设 (I): $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n(\mathrm{II}):\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n$ 和 (III): $\boldsymbol{s}_1,\cdots,\boldsymbol{s}_n$ 是线性空间 $\mathscr{V}$ 的三组基, 如果从 (I) 到 (II) 的过渡矩阵是 P, 从 (II) 到 (III) 的过渡矩阵是 Q, 证明,

1. 从 (II) 到 (I) 的过渡矩阵是 P^{-1}.
2. 从 (I) 到 (III) 的过渡矩阵是 PQ.

参考答案:

1. 设 $(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=(\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n)A$, 则计算可得 $(\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n)=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)P=(\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n)AP$ (用到了矩阵乘法的结合律)。则 $AP=I$, 即 $A=P^{-1}$

2. 类似计算可得