第九次习题课参考答案

习题 1. 练习 5.2.19

如果复矩阵 A,B 可交换, 证明 A,B 至少有一个公共的特征向量.

参考解答:

设 λ 是 A 的一个特征值, V_λ 是 A 的特征值为 λ 的特征子空间. 由练习 5.2.14, 对任意 $x \in V_\lambda$, 都有 $Bx \in V_\lambda$, 故 B 限制到 V_λ 上给出了 V_λ 上的一个线性变换, 这说明 V_λ 包含 B 的某个特征向量.

习题 2. 练习 5.2.22

回顾例 5.1.1 中的矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0.4 & 0.9 \end{bmatrix}$, 以及稳定状态对应的矩阵 $A^\infty = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.8 & 0.8 \end{bmatrix}$.

1. 如果 A^n 和 A^∞ 中对应的元素相差不超过 0.01, 那么 n 至少是多少?

2. 交换 A 的两行, 特征值是否不变?

参考解答:

$A^n = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot 0.5^n & \frac{1}{5}-\frac{1}{5}\cdot 0.5^n \\ \frac{4}{5}-\frac{4}{5}\cdot 0.5^n & \frac{4}{5}+\frac{4}{5}\cdot 0.5^n \end{bmatrix}$. 则 $\dfrac{4}{5}\cdot 0.5^n < 0.01$, 取对数得 $n > \log(0.0125)/\log(0.5) \approx 6.32$, n 至少为 7.

交换后特征值由 $1, 0.5$ 变为 $1, -0.5$.

习题 3. 练习 5.2.23

给定 m 阶矩阵 A_1, n 阶上三角矩阵 A_2 和 $m \times n$ 矩阵 B。证明如果 A_1 和 A_2 没有相同的特征值, 关于 $m \times n$ 矩阵 X 的矩阵方程 $A_1X - XA_2 = B$ 有唯一解.

矩阵方程 $A_1X - XA_2 = B$ 称为 Sylvester 方程, 在控制论中有不少应用.

$A_1X - XA_2 = B$ 有唯一解

$\Leftrightarrow$ 线性变换 $X \mapsto A_1X - XA_2$ 可逆

$\Leftrightarrow$ $A_1X - XA_2 = 0$ 只有零解

下面证明 $A_1X - XA_2 = 0$ 只有零解

令 $X = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)$，则 $A_1X = XA_2$

令 $A_2 = (a_{ij})$，A_2 的对角元均为特征值

$\because$ A_2 上三角 $\therefore$ $A_1x_1 = a_{11}x_1$

$\because$ a_{11} 不是 A_1 的特征值 $\therefore$ $x_1 = 0$

假设 X 的前 $r-1$ 列均为 0，则

$A_1x_r = \sum_{i=1}^{r} a_{ir}x_i = a_{rr}x_r \Rightarrow x_r = 0$

数学归纳得: $X = 0$

图 1: 习题三参考解答

习题 4. 练习 5.3.14

证明,

1. 若 $A^2 = A$, 则 A 可对角化.

参考解答:

令 $A = X^{-1}JX$，J 为 A 的 Jordan 标准形，则 $J^2 = J$，根据 Jordan 块的形状可知每个 Jordan 块的阶数都为 1，则 J 即对角阵。

2. 若 $A^2 = O$, 且 $A \neq O$, 则 A 不可对角化.

参考解答: 否则, 由 A 的特征值全为 0, A 相似于对角阵 0, 这蕴涵 A = 0.

3. $A^2 + A + I_n = O$, 则 A 在 $\mathbb{R}$ 上不可对角化.

参考解答: 否则, 实方阵 A 实相似于一个复方阵.

1. $A = X^{-1}JX$ $\quad J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{pmatrix}$ $\quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}$

$A^2 = A \Rightarrow J^2 = J \Rightarrow J_i^2 = J_i$

若 J_i 的阶数 ≥ 2, 有:

$$\begin{pmatrix} \lambda_i^2 & 2\lambda_i & & * \\ & \lambda_i^2 & \ddots & \\ & & \ddots & 2\lambda_i \\ & & & \lambda_i^2 \end{pmatrix} = J_i \Rightarrow \begin{cases} \lambda_i^2 = \lambda_i \\ 2\lambda_i = 1 \end{cases} \text{矛盾}$$

∴ J_i 的阶数为1

2. $Ax = \lambda x \Rightarrow 0 = A^2x = AAx = \lambda Ax = \lambda^2 x$

$x \neq 0 \Rightarrow \lambda = 0$ $\quad$ ∴ A 的特征值全为0

3. 若 $A = X^{-1}DX$, D 为对角阵, $D = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n)$

$A^2 + A + I_n = 0 \Rightarrow D^2 + D + I_n = 0 \Rightarrow d_i^2 + d_i + 1 = 0$ (不存在实数解)

图 2: 习题四参考解答

习题 5. 练习 5.4.3

给定 n 阶方阵 A, B 满足 $AB = BA$.

1. 证明, 若 A 有 n 个不同的特征值, 则存在次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$, 使得 $B = f(A)$.

参考解答: 由练习 5.4.1.1, A, B 可以同时对角化, 故不妨设 A, B 已是对角阵. 由 A 的特征值互不相同, 可对 A 的对角元 Lagrange 插值得到所需多项式.

(详细过程: 将 A, B 同时对角化. 设 $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(a_1, \cdots, a_n), P^{-1}BP = \operatorname{diag}(b_1, \cdots, b_n)$, 其中 $a_1, \cdots, a_n$ 互不相同. 取 $f(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\prod_{i \neq j}(a_j - a_i)} \prod_{i \neq j}(x - a_i)$, 我们有 $f(a_j) = b_j$, 故 $P^{-1}f(A)P = f(P^{-1}AP) = P^{-1}BP$, 从而有 $B = f(A)$.)

2. 证明, 若 $A = J_n(\lambda)$, 则存在次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$, 使得 $B = f(A)$.

参考解答: 条件等价于 B 与 $J_n(0)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}=A-\lambda I_n$ 交换. 记 $B=(b_{ij})$. 考虑方程 $J_n(0)B=BJ_n(0)$. 记 i 或 j 大于 n 或小于 0 时 $b_{ij}=0$, 则两边的 (i,j) 元分别为 $b_{i+1,j}$ 和 $b_{i,j-1}$. 由两边相等, 解得

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{11} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & b_{12} \\ & & & b_{11} \end{bmatrix}=b_{11}I+b_{12}J_n(0)+\cdots+b_{1n}J_n(0)^{n-1}=b_{11}I+b_{12}\left(J_n(\lambda)-\lambda I_n\right)+\cdots$$

故 $f(x)=\sum_{i=1}^n b_{1i}(x-\lambda)^{i-1}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=0}^{i-1}b_{1i}\begin{pmatrix} i-1 \\ j \end{pmatrix}\lambda^{i-j-1}x^j=\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{i=j+1}^n b_{1i}\begin{pmatrix} i-1 \\ j \end{pmatrix}\lambda^{i-j-1}\right)x^j.$

3. 举例说明, 存在 A,B 满足 $AB=BA$, 但不存在多项式 $f(x)$, 使得 $B=f(A)$.

参考解答:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & \\ & 0 \end{bmatrix},B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{bmatrix}$$

习题 6. 练习 5.4.6

给定 m 阶方阵 A_1,n 阶方阵 A_2 和 $m\times n$ 矩阵 B. 证明:

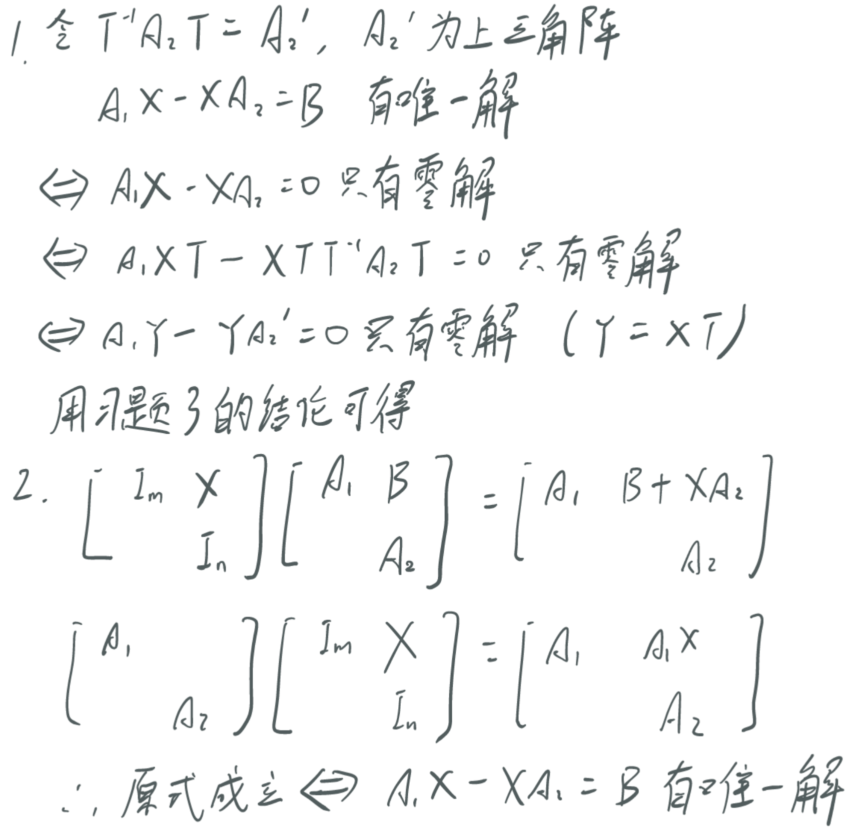
1. 如果 A_1 和 A_2 没有相同的特征值, 关于 $m\times n$ 矩阵 X 的 Sylvester 方程 $A_1X-XA_2=B$ 有唯一解.

2. 如果 A_1 和 A_2 没有相同的特征值, 则存在唯一的矩阵 X 满足

$$\begin{bmatrix} I_m & X \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & X \\ 0 & I_n \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

3 . 对 n 阶方阵 A, 存在可逆矩阵 X, 使得

$$X^{-1}AX=\begin{bmatrix} \lambda_1 I+N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s I+N_s \end{bmatrix}$$



1. 令 $T^{-1}A_2T = A_2'$, A_2' 为上三角阵

$A_1X - XA_2 = B$ 有唯一解

$\Leftrightarrow A_1X - XA_2 = 0$ 只有零解

$\Leftrightarrow A_1XT - XTT^{-1}A_2T = 0$ 只有零解

$\Leftrightarrow A_1Y - YA_2' = 0$ 只有零解 $(Y = XT)$

用习题3的结论可得

2. $$\begin{bmatrix} I_m & X \\ & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & B \\ & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B + XA_2 \\ & A_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & X \\ & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_1X \\ & A_2 \end{bmatrix}$$

∴ 原式成立 $\Leftrightarrow A_1X - XA_2 = B$ 有唯一解

图 3: 习题六的（1）、（2）参考解答

其中 $N_1,\cdots,N_s$ 是严格上三角矩阵.

6.3 参考解答:

审视归纳过程易见将 A 相似到上三角阵时可以额外要求其对角线上的特征值按任意顺序排列. 故我们可以设 A 被相似到 $\begin{bmatrix} \lambda_1 I + N_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 I + N_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_s I + N_s \end{bmatrix}$, 其中 λ_i 互不相同, $N_1,\cdots,N_s$ 是严格上三角矩阵. 现在用第二问的结果将所有 $*$ 通过相似消去.

习题 7. 设 $A^2=A$, 在 A 的四个子空间中, 哪个包含特征值 $\lambda=1$ 的特征向量? 哪个包含特征值 $\lambda=0$ 的特征向量? 从这些信息如何推出 A 可以对角化?

参考解答:

$C(A)$ 包含 A 的特征值 $\lambda=1$ 的特征向量, $N(A)$ 包含 A 的特征值 $\lambda=0$ 的特征向量。

由 $C(A)\cap N(A)=\mathbf{0}$ 和 $\dim(C(A))+\dim(N(A))=n$ 得 $\mathbb{R}^n=C(A)+N(A)$, 则 A 有 n 个线性无关的特征向量, 所以 A 可以对角化。

习题 8. 设 A,B 为 n 阶方阵, 且均可对角化。证明 $AB=BA$ 当且仅当它们有 n 个公共的线性无关的特征向量。

参考解答:

若 A,B 有 n 个公共的线性无关的特征向量 $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$, 令 $X=[\mathbf{x}_1\cdots\mathbf{x}_n]$, 则 $A=X\Lambda_A X^{-1}$, $B=X\Lambda_B X^{-1}$, 从而 $AB=BA$ 。

反过来先证块对角矩阵可对角化 $\Leftrightarrow$ 所有块可对角化 (利用几何重数 = 代数重数), 然后设 $AB=BA$, 证明它们有 n 个公共的线性无关的特征向量。不妨假设存在可逆矩阵 X 使得 $AX=X\operatorname{diag}(\lambda_1 I_1,\ldots,\lambda_s I_s)$ 。由 $AB=BA$ 知 $X^{-1}AX\left(X^{-1}BX\right)=X^{-1}BX\left(X^{-1}AX\right)$, 这说明 $X^{-1}BX=\operatorname{diag}(B_1,\ldots,B_s)$ 。由 B 可对角化知每个 B_i 可对角化。于是有可逆矩阵 $Y=\operatorname{diag}(X_1,\ldots,X_s)$ 使得

$$\operatorname{diag}(B_1,\ldots,B_s)\,Y=Y\Lambda$$

由此不难验证

$$(XY)^{-1}AXY=\operatorname{diag}(\lambda_1 I_1,\ldots,\lambda_s I_s),\quad (XY)^{-1}BXY=\Lambda$$

因此 XY 的列向量组即为所求的公共特征向量组。

习题 9.

$$\text{设}M=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) 证明 M 的特征值为纯虚数, 且 $|\lambda|=1$.

参考解答:

$M^T M=I, M$ 为正交矩阵. 设 λ 为 M 的复特征值,ξ 为对应的复特征向量, 则 $|\xi|=|M\xi|=|\lambda\xi|=|\lambda||\xi|$, 故 $|\lambda|=1$. 又由于 $M^T=-M$, 即 M 反对称, 则

$$\bar{\xi}^T M\xi=\lambda\bar{\xi}^T\xi=\left(\bar{\xi}^T M\xi\right)^T=\xi^T M^T\bar{\xi}=-\xi^T M\bar{\xi}=-\xi^T\overline{M\xi}=-\xi^T\overline{\lambda\xi}=-\bar{\lambda}\bar{\xi}^T\xi$$

因此 $\bar{\lambda}=-\lambda$, 即 λ 为纯虚数.

(2) 通过 M 的 Trace 确定 M 的所有特征值.

参考解答:

由 (1) M 的特征值为纯虚数, 且模为 1 , 故 M 的特征值只能为 $i,-i$. 又由于 $\operatorname{Tr}(M)=0$, 故 M 的 4 个特征值为 $i,i,-i,-i$ 。

习题 10. 练习 4.2.25

对函数 $f(t)=\det(I_n+tA)$ 在 $t=0$ 处求导. 设 $A=\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$, 则 I_n+tA 的第 i 列是 e_i+ta_i.

1. 当 $n=1,2,3$ 时, 用 A 的元素表示 $f'(0)$; 分析其规律, 求 $f'(0)$ 的一般表达式.

参考解答:

$$f'(0)=\sum_{i=1}^{n}\det\left(\begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_{i-1} & a_i & e_{i+1} & \cdots & e_n \end{bmatrix}\right)=\operatorname{trace}(A)$$

2. 利用 $\det(I_n+AB)=\det(I_m+BA)$, 证明 $\operatorname{trace}(AB)=\operatorname{trace}(BA)$ (trace 的定义见练习 1.4.22).

参考解答:

考虑 $\det(I_m+tAB)=\det(I_n+tBA)$.