线性代数 第20讲

11月17日

第五章第2讲　对角化和谱分解

上一讲内容回顾

对角化与谱分解的概念

应用实例

矩阵可对角化的条件

矩阵的特征值和特征向量

定义5.2.1（特征值） 给定 n 阶方阵 A，如果对 $\lambda \in \mathbb{C}$，存在非零向量 $x \in \mathbb{C}^n$，使得 $Ax = \lambda x$，则称数 λ 为方阵 A（在 $\mathbb{C}$ 上）的一个特征值，而称非零向量 x 为方阵 A（在 $\mathbb{C}$ 上）的一个属于特征值 λ 的特征向量.

1. 只有方阵才有特征值和特征向量；
2. 零向量**不是**特征向量；
3. 如果 x 是特征向量，则对任意 $k \neq 0$，kx 都是特征向量.

二元组 (λ, x) 常称为方阵 A 的一个特征对.

特别地，对实方阵 A，如果特征对 (λ, x) 满足 $\lambda \in \mathbb{R}$，$x \in \mathbb{R}^n$，则分别称二者为 A 在 $\mathbb{R}$ 上的特征值和特征向量，称该二元组为 A 在 $\mathbb{R}$ 上的特征对.

矩阵的特征值和特征向量的计算

(λ_0, x_0) 是一个特征对，当且仅当 $Ax_0 = \lambda_0 x_0$，即 $(\lambda_0 I - A) x_0 = 0$，
注意到，特征向量 $x_0 \neq 0$，齐次线性方程组有非零解，
因此 λ_0 是 A 的特征值当且仅当 $(\lambda_0 I - A)$ 不可逆，
也等价于其行列式 $\det(\lambda_0 I - A) = 0$.

由此我们首先得到如下结论.

命题5.2.3 数 λ_0 是A 的特征值，当且仅当 $\det(\lambda_0 I_n - A) = 0$.
特别地，0 是 A 的特征值当且仅当 A 不可逆.

矩阵A的特征多项式

$$p_A(\lambda) := \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$ 称为矩阵 A 的**特征多项式**.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

$$(\lambda_1 I - A)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x = 0 \Rightarrow x_1 = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda_2 I - A)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x = 0 \Rightarrow x_2 = k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

特征多项式和特征子空间

$$p_A(\lambda) := \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$ 称为矩阵 A 的**特征多项式**.

定理 5.2.4 设 n 阶方阵 A 的特征多项式为 $p_A(\lambda)$，那么

1. 数 λ_0 是 A 的特征值，当且仅当 $p_A(\lambda_0) = 0$，即 λ_0 是特征多项式 $p_A(\lambda)$ 的根.
2. 向量 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ 是 A 的属于 λ_0 的特征向量，当且仅当 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{N}(\lambda_0 I_n - A)$ 且 $\boldsymbol{x}_0 \neq \mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $\lambda_0 I_n - A$ 的零空间中的非零向量.

解空间 $\mathcal{N}(\lambda_0 I_n - A)$ 称为 A 的属于 λ_0 的**特征子空间**. 注意到特征向量不为零，

$$\{A \text{ 的属于 } \lambda_0 \text{ 的特征向量}\} = \mathcal{N}(\lambda_0 I_n - A) \backslash \{\mathbf{0}\}.$$

特征值的代数重数与几何重数

定义 5.2.10 (代数重数) 给定 n 阶方阵 A 及 A 的一个特征值 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$，如果 λ_0 是特征多项式 $p_A(\lambda)$ 的 n_0 重根，则称 n_0 为 λ_0 作为 A 的特征值的**代数重数**（简称**重数**），称 λ_0 是 A 的一个 n_0 重特征值.

一个 1 重特征值，又称为**单**特征值.

命题 5.2.11 给定 n 阶实方阵 A，如果 λ_0 是它的一个非实数特征值，则 $\overline{\lambda}_0$ 也是它的特征值，且其代数重数和 λ_0 的代数重数相等. 进一步地，如果复向量 $\boldsymbol{x}_0$ 是属于 λ_0 的特征向量，则 $\overline{\boldsymbol{x}}_0$ 是属于 $\overline{\lambda}_0$ 的特征向量.

定义 5.3.6 (几何重数) 给定 n 阶方阵 A 及其特征值 λ_0，称特征子空间 $\mathcal{N}(\lambda_0 I_n - A)$ 的维数为 λ_0 作为 A 的特征值的**几何重数**.

任意特征值的几何重数都不小于 1，因此特征值至少对应一个特征向量.

定理 5.1.5 (Vieta 定理) 复系数一元 n 次多项式 $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ 的 n 个根（计重数）$x_1, \cdots, x_n$ 满足:

$$-\frac{a_1}{a_0} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

$$\vdots$$

$$(-1)^k \frac{a_k}{a_0} = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k},$$

$$\vdots$$

$$(-1)^n \frac{a_n}{a_0} = x_1 x_2 \cdots x_n.$$

命题 5.2.12 给定 n 阶方阵 A，其特征多项式具有如下形式:

$$p_A(\lambda) = \lambda^n - \operatorname{trace}(A)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A),$$

其中 $\operatorname{trace}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ 是方阵 A 的对角元素的和，称为方阵 A 的**迹**.

$$p_A(\lambda) := \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & \lambda - a_{mn} \end{vmatrix}.$$

$\lambda = 0$ 时

$det(\lambda I_n - A) = (-1)^n |A|$

n 阶方阵有且只有 n 个特征值（计重数）. $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{trace}(A)$, $\lambda_1 \cdots \lambda_n = \det(A)$.

多项式的零点与矩阵特征值

对任意首项系数为 1 的多项式

$$p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1} + x^n,$$

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -c_0 & \cdots & -c_{n-2} & -c_{n-1} \end{bmatrix}, \quad C_p \text{ 的特征多项式是 } p(x)$$

矩阵 C_p 称为多项式 $p(x)$ 的友矩阵. 因此在实践中, 任意多项式的根的近似值, 就可以通过求解其友矩阵的特征值来得到.

练习 5.2.2 构造符合要求的矩阵 A.

1. A 的特征多项式为 $\lambda^2 - 9\lambda + 20$, 构造三个不同的 A.
2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ * & * \end{bmatrix}$, 且 A 的特征值为 $4, 7$.
3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ * & * & * \end{bmatrix}$, 且 A 的特征值为 $1, 2, 3$.

练习 5.2.11 设 n 阶实方阵 A 满足 $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$，其中 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n,\boldsymbol{v}\neq\mathbf{0}$.

1. 设 $A\boldsymbol{w}=\mu\boldsymbol{w}$，且 $\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^n,\lambda\neq\mu$，证明 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 正交.
2. 证明，实对称矩阵的属于不同特征值的实特征向量正交.

命题5.3.3　方阵的属于不同特征值的特征向量线性无关.

证. 设方阵 A 有特征向量 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r$，分别属于特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$，

且 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 两两不同.

采用数学归纳法. 当 $r=1$ 时，因为特征向量不为零，因此线性无关.

现假设任意 $r-1$ 个不同特征值的特征向量都线性无关，

观察方程 $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{x}_r=\mathbf{0}$. 等式两边左乘 A，则有

$\mathbf{0}=A(k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{x}_r)=k_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1+k_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r\lambda_r\boldsymbol{x}_r.$

再减去原方程的 λ_1 倍，$k_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1+k_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r\lambda_r\boldsymbol{x}_r-\lambda_1(k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{x}_r)$

就有 $k_2(\lambda_2-\lambda_1)\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r(\lambda_r-\lambda_1)\boldsymbol{x}_r=\mathbf{0}.$

根据归纳假设，$\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ 线性无关，于是 $k_i(\lambda_i-\lambda_1)=0$，$i=2,\cdots,r$.

由于 λ_1 和 $\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 不同，因此 $k_i=0$，$i=2,\cdots,r$.

又得 $k_1\boldsymbol{x}_1=\mathbf{0}$，由特征向量不为零得 $k_1=0$. 故 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ 线性无关.

可对角化与谱分解

定义5.3.1（谱分解） 对方阵 A，如果存在可逆矩阵 X 使得

$X^{-1}AX = \Lambda$ 是对角矩阵，则称 A 是（在$\mathbb{C}$ 上）可对角化的，

X 把 A 对角化，或 X 对角化 A.

如果方阵 A，X，Λ 都是实矩阵，则称A 在 $\mathbb{R}$ 上可对角化.

当 A 可对角化时，分解 $A = X\Lambda X^{-1}$ 称为 A 的谱分解。

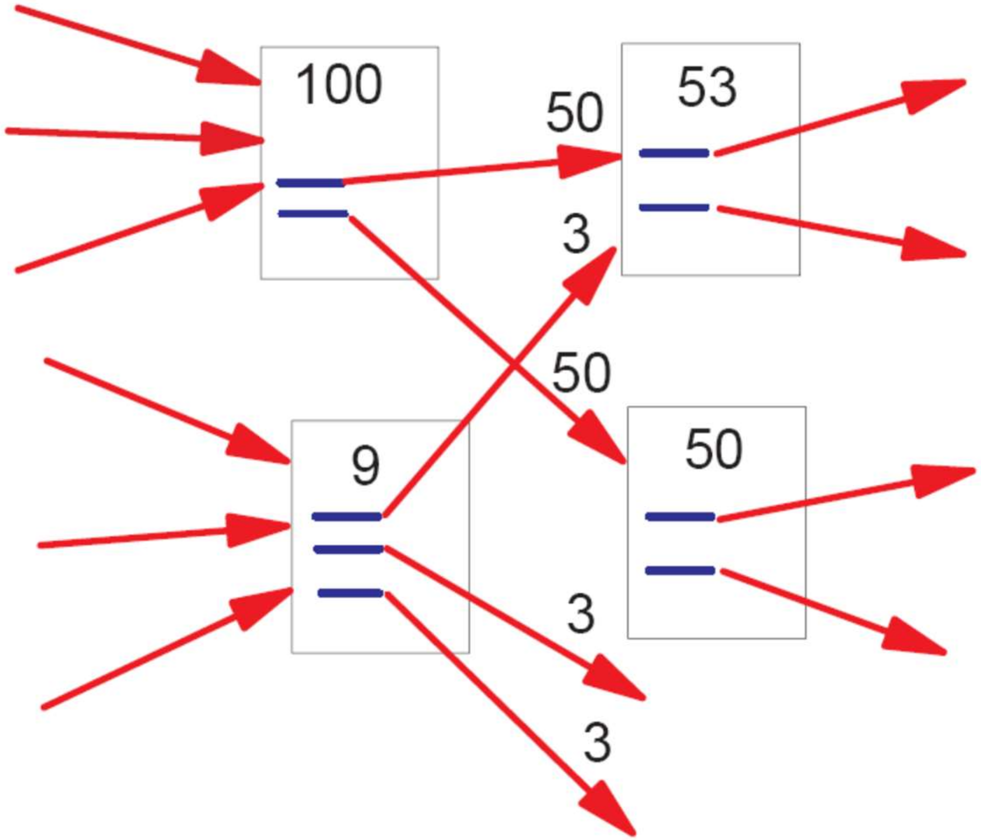
之所以称为谱分解，是因为特征值也称为谱.

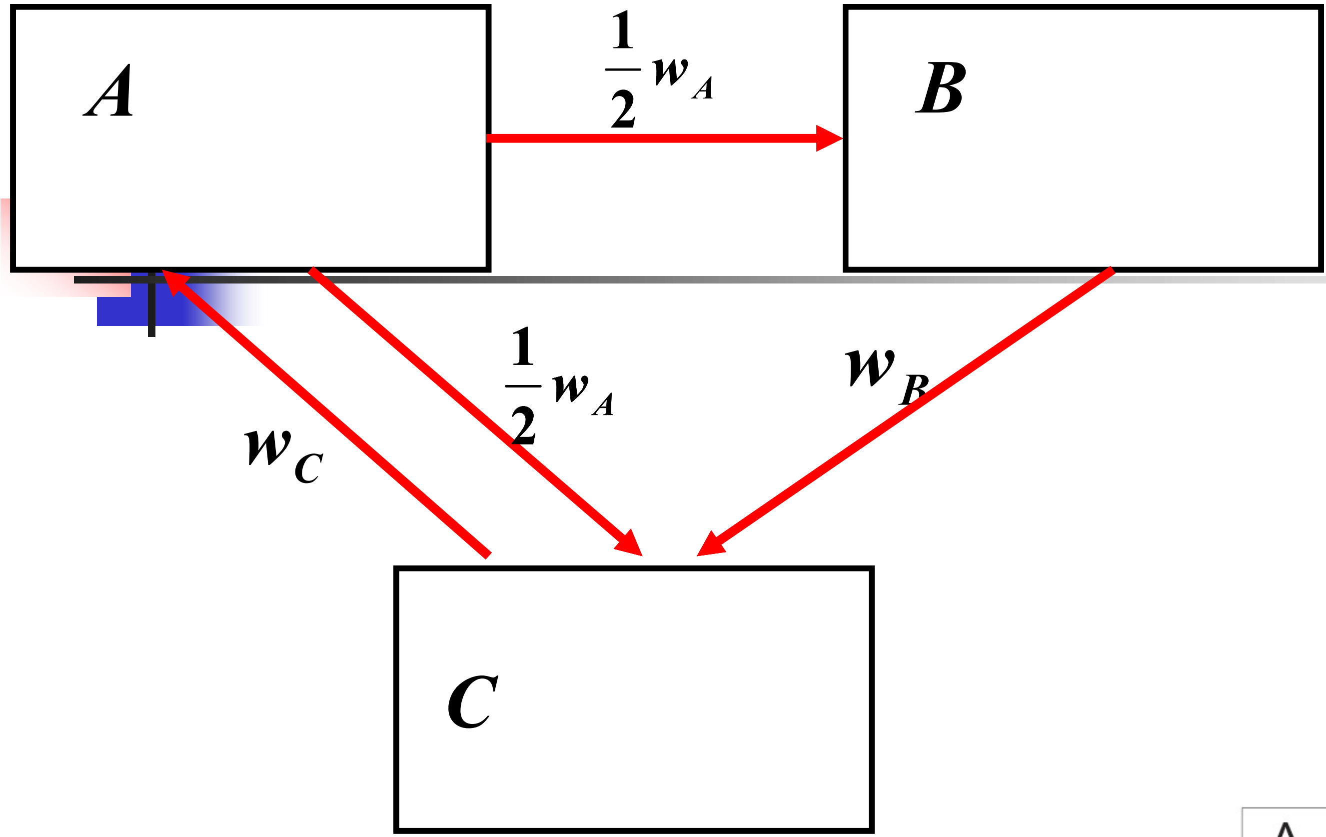
如果矩阵 A 是可对角化的，即 $A = X\Lambda X^{-1}$,则 $A^n = X\Lambda^n X^{-1}$

PageRank: Ranking Web Pages

PageRank模型的原始思想：
依赖于网页的拓扑结构
—网页间的相互链接关系

Cartoon illustrating basic principle of PageRank.
The size of each face is proportional to the total
size of the other faces which are pointing to it.

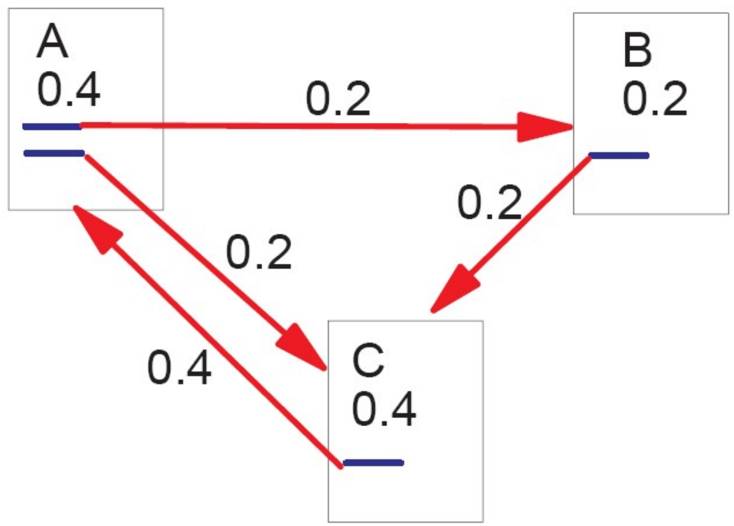


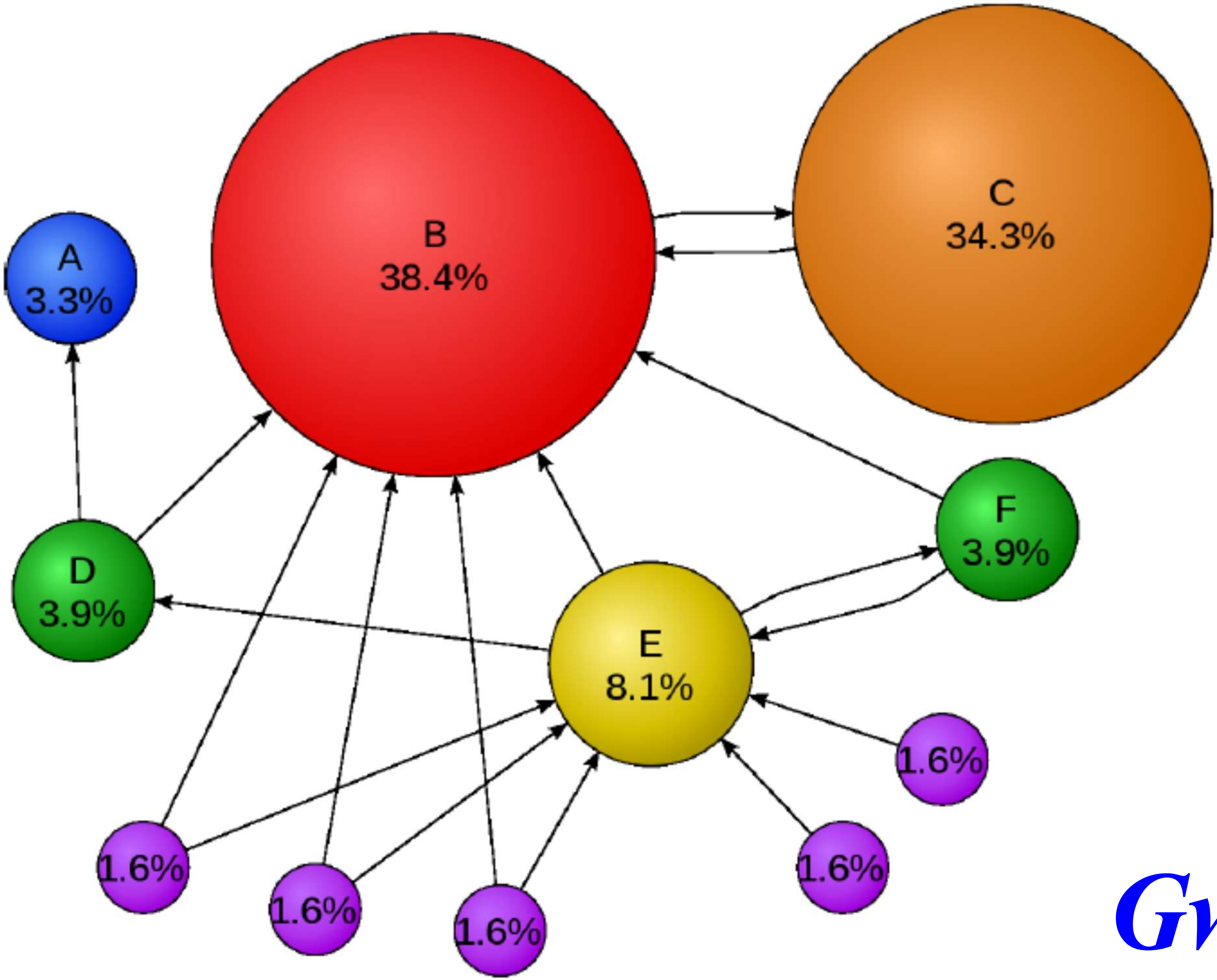


(1)	1/3	1/3	1/3
(2)	1/3	1/6	1/2
(3)	1/2	1/6	1/3
(4)	1/3	1/4	5/12
(5)	5/12	1/6	5/12
(6)	5/12	5/24	3/8

……

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_A \\ w_B \\ w_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_A \\ w_B \\ w_C \end{bmatrix} \Rightarrow$$





$$Gw = w$$

$A \in R^{n\times n}$, 假设其特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 满足 $|\lambda_1| > |\lambda_2| \ge \cdots \ge |\lambda_n|$,
且对应的特征向量为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, $\quad Ax_k = \lambda x_k \ (k = 1, 2, \cdots, n)$

任取非零向量 $u \in R^n$, $\quad u = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$

$$Au = A(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n) = c_1 \lambda_1 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 + \cdots + c_n \lambda_n x_n$$

$$A^2 u = A \cdot Au = A(c_1 \lambda_1 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 + \cdots + c_n \lambda_n x_n) = c_1 \lambda_1^2 x_1 + c_2 \lambda_2^2 x_2 + \cdots + c_n \lambda_n^2 x_n$$

$\cdots$

$$A^n u = c_1 \lambda_1{}^n u_1 + c_2 \lambda_2{}^n u_2 + \cdots + c_n \lambda_n{}^n u_n$$

设 $c_1 \ne 0$, 则 $A^n u = \lambda_1{}^n \left(c_1 u_1 + c_2 \dfrac{\lambda_2{}^n}{\lambda_1{}^n} u_2 + \cdots + c_n \dfrac{\lambda_n{}^n}{\lambda_1{}^n} u_n \right) \to \lambda_1{}^n c_1 u_1$

矩阵可对角化的条件

如果矩阵 A 是可对角化的，即 $A = X\Lambda X^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix}^{-1}$$

$$A\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} AX_1 & AX_2 & \cdots & AX_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 X_1 & \lambda_2 X_2 & \cdots & \lambda_n X_n \end{bmatrix}$$

命题5.3.2 对 n 阶方阵 A，A 可对角化，当且仅当 A 有 n 个线性无关的特征向量.

矩阵可对角化的一个充分条件

命题 5.3.3 方阵的属于不同特征值的特征向量线性无关.

矩阵可对角化的一个充分条件

推论5.3.4 有 n 个不同特征值的 n 阶方阵，即特征值都是单特征值的方阵，可对角化.

定义 5.3.6 (几何重数) 给定 n 阶方阵 A 及其特征值 λ_0，称特征子空间 $\mathcal{N}(\lambda_0 I_n - A)$ 的维数为 λ_0 作为 A 的特征值的**几何重数**.

任意特征值的几何重数都不小于 1，因此特征值至少对应一个特征向量.

命题 5.3.7 方阵的特征值的几何重数不大于其代数重数.

命题 5.3.7 方阵的特征值的几何重数不大于其代数重数.

证. 设 λ_0 是 n 阶方阵 A 的几何重数是 r 的一个特征值，那么存在 r 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r$，使得 $A\boldsymbol{x}_i=\lambda_0\boldsymbol{x}_i, i=1,\cdots,r$. 则 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r$ 可以扩充成 $\mathbb{C}^n$ 的一组基 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r,\boldsymbol{y}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{y}_n$.

记 $X_{\lambda_0}:=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_r\end{bmatrix}, Y:=\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_{r+1} & \cdots & \boldsymbol{y}_n\end{bmatrix}, X:=\begin{bmatrix}X_{\lambda_0} & Y\end{bmatrix}$，而 X 可逆. 由于 X 的列是一组基，AX 的列能被其线性表示，于是存在方阵 M，使得 $AX=XM$. 由于 X_{λ_0} 的列是 A 的属于 λ_0 的特征向量，所以 M 具有如下分块形式:

$$AX=A\begin{bmatrix}X_{\lambda_0} & Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_{\lambda_0} & Y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_0 I_r & M_{12}\\ O & M_{22}\end{bmatrix}=XM.$$

而 A 和 $M=X^{-1}AX$ 具有相同的特征多项式，因为

$$\det(\lambda I_n-A)=\det(X^{-1}(\lambda I_n-A)X)=\det(\lambda I_n-M).$$

另一方面，

$$\det(\lambda I_n-M)=\det\left(\begin{bmatrix}\lambda I_r-\lambda_0 I_r & -M_{12}\\ \mathbf{0} & \lambda I_{n-r}-M_{22}\end{bmatrix}\right)=(\lambda-\lambda_0)^r\det(\lambda I_{n-r}-M_{22}).$$

这说明 λ_0 是 A 的一个代数重数至少 r 的特征值. □

定义5.3.8 几何重数和代数重数相等的特征值，称为半单特征值. 几何重数小于代数重数的特征值，称为亏损特征值.

如果一个特征值的代数重数是1，那么由几何重数不小于1。
可知，它是半单特征值，即单特征值是半单特征值.

定理5.3.9

1. $\boldsymbol{n}$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，当且仅当其特征值都半单(几何重数和代数重数相等).
2. $\boldsymbol{n}$ 阶实方阵 $\boldsymbol{A}$ 在 $\mathbb{R}$ 上可对角化，当且仅当其特征多项式的根都是实根，且其特征值都半单.

证. 第 1 条: "$\Rightarrow$": 如果 A 可对角化，设 $\boldsymbol{x}_{1,1},\cdots\boldsymbol{x}_{1,k_1},\cdots,\boldsymbol{x}_{s,1},\cdots\boldsymbol{x}_{s,k_s}$ 是 n 个线性无关的特征向量，满足 $A\boldsymbol{x}_{i,j}=\lambda_i\boldsymbol{x}_{i,j}$. 因此，$\boldsymbol{x}_{i,1},\cdots\boldsymbol{x}_{i,k_i}$ 是特征子空间 $\mathcal{N}(\lambda_iI_n-A)$ 中一个线性无关的向量组，于是 k_i 小于等于 λ_i 的几何重数 m_i，且 $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant s}k_i=n$. 设 n_i 是 λ_i 的代数重数，则 $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant s}n_i=n$. 由命题 5.3.7 可知，$k_i\leqslant m_i\leqslant n_i$. 比较两个和式可知 $k_i=m_i=n_i$，即任意特征值半单.

"$\Leftarrow$": 如果 A 的特征值都半单，设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是所有特征值，则几何重数 m_i 等于代数重数 n_i，因此 $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant s}m_i=n$. 取每个特征子空间 $\mathcal{N}(\lambda_iI_n-A)$ 的一组基 $\boldsymbol{x}_{i,1},\cdots\boldsymbol{x}_{i,m_i}$，合并起来的向量组 $\boldsymbol{x}_{1,1},\cdots\boldsymbol{x}_{1,m_1},\cdots,\boldsymbol{x}_{s,1},\cdots\boldsymbol{x}_{s,m_s}$ 仍旧线性无关，证明与命题 5.3.3 的证明类似. 而合并得到的向量组中有 $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant s}m_i=n$ 个向量，即 A 有 n 个线性无关的特征向量，因此可对角化.

不可对角化矩阵的例子

矩阵 $S_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ $(k \neq 0)$，只有一个特征值 1，其代数重数是 2，几何重数是 1，

该矩阵不可对角化.

矩阵 $J_n(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}_{n\times n}$ 只有一个特征值 λ，其代数重数是 n，几何重数是 1，当 $n > 1$ 时 λ 是亏损特征值. 形如 $J_n(\lambda)$ 的矩阵称为关于 λ 的 n 阶 **Jordan 块**.

当 $n > 1$ 时，它不可对角化. ☺

设 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$, 求 A^n

解：

(1)求矩阵 A 的特征值 $|\lambda I-A|=\left(\lambda-1-\sqrt{-2}\right)\left(\lambda-1+\sqrt{-2}\right)$,

$\lambda_1=1+\sqrt{-2}$, $\lambda_2=1-\sqrt{-2}$,

(2) 求属于不同特征值的特征向量.

由 $(\lambda_1 I-A)X=0$ 解得 $X_1=\left(1,-\sqrt{-2}\right)^T$, 故 $AX_1=\left(1+\sqrt{-2}\right)X_1$,

由 $(\lambda_2 I-A)X=0$ 解得 $X_2=\left(1,\sqrt{-2}\right)^T$, 故 $AX_2=\left(1-\sqrt{-2}\right)X_2$,

$$\therefore A\left(X_1,X_2\right)=\left(X_1,X_2\right)\begin{bmatrix}1+\sqrt{-2} & \\ & 1-\sqrt{-2}\end{bmatrix},$$

(3) 令 $X=(X_1,X_2)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -\sqrt{-2} & \sqrt{-2}\end{bmatrix}$，则有 $A=X\begin{bmatrix}1+\sqrt{-2} & \\ & 1-\sqrt{-2}\end{bmatrix}X^{-1}$，其中 $X^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{-2}}{4}\\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{-2}}{4}\end{bmatrix}$，

$$\therefore A^n=P\begin{bmatrix}1+\sqrt{-2} & \\ & 1-\sqrt{-2}\end{bmatrix}^n P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -\sqrt{-2} & \sqrt{-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\left(1+\sqrt{-2}\right)^n & \\ & \left(1-\sqrt{-2}\right)^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{-2}}{4}\\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{-2}}{4}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\left(1+\sqrt{-2}\right)^n & \left(1-\sqrt{-2}\right)^n\\ -\sqrt{-2}\left(1+\sqrt{-2}\right)^n & \sqrt{-2}\left(1-\sqrt{-2}\right)^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{-2}}{4}\\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{-2}}{4}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\left[\left(1+\sqrt{-2}\right)^n+\left(1-\sqrt{-2}\right)^n\right] & \frac{\sqrt{-2}}{4}\left[\left(1+\sqrt{-2}\right)^n-\left(1-\sqrt{-2}\right)^n\right]\\ -\frac{\sqrt{-2}}{2}\left[\left(1+\sqrt{-2}\right)^n+\left(1-\sqrt{-2}\right)^n\right] & \frac{1}{2}\left[\left(1+\sqrt{-2}\right)^n+\left(1-\sqrt{-2}\right)^n\right]\end{bmatrix}$$

设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\a&b&c\\d&e&f\end{bmatrix}$, 且 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$ 是 A 的特征向量，求 a,b,c,d,e,f.

解：因为三个特征向量 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$ 线性无关，所以矩阵 A 可对角化，

设特征向量 $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$ 对应的特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

则由 $\begin{bmatrix}1&1&1\\a&b&c\\d&e&f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，解得 $\lambda_1=3$, 同理解得 $\lambda_2=0$，$\lambda_3=0$

所以 $\begin{bmatrix}1&1&1\\a&b&c\\d&e&f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$

作 业（11月17日）

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

练习5.3.

1，2，3，4，7(1，4)，8，10，12，13

11月22日提交

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~