线性代数 第4讲

9月27日

第一章第4讲　　线性映射的运算

上一讲要点回顾

矩阵的加法和数乘运算（线性映射的线性运算）

矩阵乘法（线性映射的复合运算）

矩阵乘法的运算性质举例

线性方程组的表达形式

(1) 普通形式：$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

(2) 矩阵形式：$Ax = b$, 其中 $A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

(3) 向量形式：$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = b$, $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = A$

增广矩阵的形式求解线性方程组 $Ax=b$，A 称为系数矩阵，b 称为右端项

$$[A \quad \boldsymbol{b}] \equiv [A \mid \boldsymbol{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

其中矩阵 $[A \quad \boldsymbol{b}]$ 称为方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的**增广矩阵**.

例 1.3.6 求解

$$\begin{cases} 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

在增广矩阵上计算:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{第 1,2 行}]{\text{对换变换}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{第 2 行}]{\text{倍乘变换}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[\text{第 1,2 行}]{\text{倍加变换}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \quad - 2x_4 = -2, \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

通解（一般解）：
$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 + 2x_4 - 2 \\ x_3 &= -\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

x_1, x_3：主变量，x_2, x_4：自由变量

通解的另一种表达形式：

$$\begin{bmatrix} -2 + x_2 + 2x_4 \\ x_2 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

定义 1.3.3 (初等变换) 对方程组施加的如下三类变换的每一类都称为方程组的**初等变换**:

1. **对换变换**: 互换两个方程的位置;
2. **倍乘变换**: 把某个方程两边同乘一个非零常数 k;
3. **倍加变换**: 把某个方程的 k 倍加到另一个方程上.

容易看到, 初等变换可逆:

1. 对换变换的逆变换是它本身;
2. 参数为 k 的倍乘变换的逆变换也是倍乘变换, 参数为 $\frac{1}{k}$;
3. 参数为 k 的倍加变换的逆变换也是倍加变换, 参数为 $-k$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{对换第 } 1,2 \text{ 行}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{加到第 } 3 \text{ 行}]{\text{第 } 1 \text{ 行的 } -2 \text{ 倍}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

定理 1.3.4 线性方程组经某个初等变换后得到的新方程组与原方程组同解.

$$
\begin{bmatrix}
\bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & \cdots\cdots & * & * & \cdots & * \\
 & & & & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & \cdots\cdots & * & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & \bullet & * & \cdots & * & \cdots\cdots & * & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & & * & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & \bullet & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & & & &
\end{bmatrix},
$$

阶梯形矩阵
高斯消去法
主列
自由列

其中 “$*$” 表示可能不为 0 的数，“$\bullet$” 表示一定不为 0 的数，即 “$\bullet$” 处元素是主元.

行简化阶梯形矩阵

1. 每个非零行的主元都是 1;
2. 每个主列除主元外的其他元素都是 0.

$$
\begin{bmatrix}
1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \cdots\cdots & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \cdots\cdots & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * & \cdots\cdots & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & & & &
\end{bmatrix}.
$$

高斯-若当
消去法
(Gauss-Jordan)

例　设方程组AX=b的增广矩阵为: $(A,b)=\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & a & t & t-3 \\ 1 & 1 & 2 & t-2 & t+3 \end{array}\right]$

问: a, t取何值时, 方程组无解,有唯一解, 无穷多解? 有无穷多解时，求通解.

解　用初等行变换化增广矩阵为阶梯形: $(A,b)\to\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & a & t & t-3 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 & t+2 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 & t-3 & t-2 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 & t+2 \end{array}\right]$

（1） 当a≠2， t≠1时， 解唯一

（2） 当t=1时， 无解；

(3) 当a=2, 而 $\dfrac{t-3}{t-1}=\dfrac{t-2}{t+2}$, 即t=4时,有无穷多解. 此时,

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases} x_1=10 \\ x_2=-7-2x_3, \\ x_4=2 \end{cases}$$

(4) a=2, t≠ 4时无解.

定义 1.3.5 (初等行（列）变换) 对矩阵施加的如下三类变换的每一类都称为矩阵的**初等行（列）变换**：

1. **对换变换**：互换两行（列）的位置；
2. **倍乘变换**：某一行（列）乘以非零常数 k;
3. **倍加变换**：把某个行（列）的 k 倍加到另一个行（列）上.

练习 1.3.17 (初等列变换在方程组上的含义) 考虑方程组 $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 6\end{bmatrix}$. 进行下列换元，写出 x', y' 满足的方程组. 对比原方程组，其系数矩阵做了哪种初等变换?

1. $x'=y, y'=x$.
2. $x'=2x, y'=y$.
3. $x'=x, y'=x+y$.
4. $x'=x+1, y'=y$.

映射的线性运算

定义 1.4.1 (映射的线性运算) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是两个线性映射, $k \in \mathbb{R}$，定义两个新的映射:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\colon \quad \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ \boldsymbol{x} &\mapsto \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}), \\ k\boldsymbol{A}\colon \quad \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ \boldsymbol{x} &\mapsto k\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

称 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，$k\boldsymbol{A}$ 为数 k 与 $\boldsymbol{A}$ 的数乘.

注意，定义中涉及的运算是陪域 $\mathbb{R}^m$ 中的线性运算. 特别地，由于向量之间不能做乘除法，两个映射之间也没有乘除运算.

命题 1.4.2 映射 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 和 $k\boldsymbol{A}$ 都是线性映射.

证. 根据定义，这里只验证 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的情形:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}')+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}')+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}') \\ &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}')+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}') = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{x}'), \\ (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(k\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{x})+\boldsymbol{B}(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})+k(\boldsymbol{x}) = k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$. $\square$

矩阵的线性运算

定义 1.4.3 (矩阵的线性运算) 设 $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}, B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ 是两个 $m\times n$ 矩阵，$k\in\mathbb{R}$，定义

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix};$$

$$kA=k\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}.$$

1. 加法结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$；
2. 加法交换律：$A+B=B+A$；
3. 零矩阵：$A+O_{m\times n}=A$，其中 $O_{m\times n}$ 是所有元素全为 0 的矩阵，称为 $m\times n$ **零矩阵**，简记为 O；
4. 负矩阵：对任意 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$，记 $-A=\begin{bmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}$，它满足 $A+(-A)=O$，称它为 A 的**负矩阵**；
5. 单位数：$1A=A$；
6. 数乘结合律：$(kl)A=k(lA)$；
7. 数乘对数的分配律：$(k+l)A=kA+lA$；
8. 数乘对矩阵的分配律：$k(A+B)=kA+kB$.

命题 1.4.5 矩阵和向量的乘积对矩阵的线性运算满足分配律:

$$(k_1 A_1 + k_2 A_2)\boldsymbol{x} = k_1(A_1\boldsymbol{x}) + k_2(A_2\boldsymbol{x}).$$

定义 1.4.7 (转置) 定义 $m \times n$ 矩阵 A 的**转置**:

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 18 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}^T = \begin{bmatrix} 18 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

即, A^{T} 是由对调 A 的行和列得到的 $n \times m$ 矩阵.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{7} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{9} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{9} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{9} \end{bmatrix}$$

定义1.4.9(对称矩阵):$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$

反对称矩阵(或斜对称矩阵):$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^T$

复合映射

在实践中，常常需要考虑多个系统的叠加，例如

$$\text{输入} \xrightarrow{\text{系统 } 1} \text{中间输出} \xrightarrow{\text{系统 } 2} \text{输出}.$$

这显然对应于映射的复合.

例 1.4.10 考虑例 1.2.9 中平面向量构成的线性空间 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换的复合.

1. 旋转变换的复合还是旋转变换: $\boldsymbol{R}_{\theta_1} \circ \boldsymbol{R}_{\theta_2} = \boldsymbol{R}_{\theta_1+\theta_2} = \boldsymbol{R}_{\theta_2} \circ \boldsymbol{R}_{\theta_1}$. 特别地, $\boldsymbol{R}_{\theta} \circ \boldsymbol{R}_{-\theta} = \boldsymbol{R}_{-\theta} \circ \boldsymbol{R}_{\theta} = \boldsymbol{R}_0 = \boldsymbol{I}$.

2. 反射变换与自己的复合是恒同变换: $\boldsymbol{H}_{\theta} \circ \boldsymbol{H}_{\theta} = \boldsymbol{I}$.

线性映射的复合还是线性映射

命题 1.4.11 设 $\boldsymbol{B}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \boldsymbol{A}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ 是两个线性映射，则二者的复合映射 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ 也是一个线性映射.

证. 根据定义，直接验证复合映射保持线性运算，即对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$,

$$(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}')) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}')) = (\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})(\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})(\boldsymbol{x}'),$$

$$(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})(k\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}(k\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})) = k\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})) = k(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})(\boldsymbol{x}). \qquad \square$$

设线性映射 A、B 的表示矩阵分别为：$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\end{bmatrix}$,

$$A\circ B\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = A\left(B\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)\right) = A\left(\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}\right), \quad A\circ B\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = A\left(B\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\right) = A\left(\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}\right)$$

$A\circ B$ 的表示矩阵 $\left[A\left(\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}\right) \quad A\left(\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}\right)\right]$，定义 $AB=\left[A\left(\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}\right) \quad A\left(\begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}\right)\right]=\begin{bmatrix}6 & 17\\ 23 & 37\end{bmatrix}$

矩阵乘法

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的表示矩阵分别为 $l \times m$ 矩阵 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_m \end{bmatrix}$ 和 $m \times n$ 矩阵 $B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$，那么根据定义，线性映射 $\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B}$ 的表示矩阵 C 可以计算出来：

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{e}_1)) & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{e}_2)) & \cdots & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{e}_n)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_1) & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_2) & \cdots & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_n) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A\boldsymbol{b}_1 & A\boldsymbol{b}_2 & \cdots & A\boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

这启发我们给出如下对矩阵乘法的定义.

定义 1.4.12 (矩阵乘法) 给定 $l \times m$ 矩阵 A 和 $m \times n$ 矩阵 $B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$，定义二者乘积 AB 是如下 $l \times n$ 矩阵：

$$AB = A \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A\boldsymbol{b}_1 & \cdots & A\boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}. \tag{1.4.5}$$

$$\begin{cases} z_1 = a_{11}y_1 + \cdots + a_{1s}y_s \\ z_2 = a_{21}y_1 + \cdots + a_{2s}y_s \\ \vdots \\ z_m = a_{m1}y_1 + \cdots + a_{ms}y_s \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n \\ y_2 = b_{21}x_1 + \cdots + b_{2n}x_n \\ \vdots \\ y_s = b_{s1}x_1 + \cdots + b_{sn}x_n \end{cases}$$

$$Z_{m\times 1} = A_{m\times s}Y_{s\times 1}, \qquad Y_{s\times 1} = B_{s\times n}X_{n\times 1}$$

$$Z_{m\times 1} = A_{m\times s}Y_{s\times 1} = A_{m\times s}B_{s\times n}X_{n\times 1}$$

$$\boxed{z_i = \sum_{t=1}^{s} a_{it}y_t = \sum_{t=1}^{s} a_{it}\sum_{k=1}^{n} b_{tk}x_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{t=1}^{s} a_{it}b_{tk}\right)x_k}$$

$$Z = C_{m\times n}X \Rightarrow z_i = c_{i1}x_1 + \cdots + c_{ij}x_j + \cdots + c_{in}x_n$$

$$= \left(\sum_{t=1}^{s} a_{it}b_{t1}\right)x_1 + \cdots + \left(\sum_{t=1}^{s} a_{it}b_{tj}\right)x_j + \cdots + \left(\sum_{t=1}^{s} a_{it}b_{tn}\right)x_n$$

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{is}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots & \boxed{\begin{matrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{matrix}} & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} \\ &= \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj},\ i = 1,\cdots,m;\ j = 1,\cdots,n. \end{aligned}}$$

例 1.4.15 考虑例 1.4.10 中线性变换的复合对应的矩阵乘法.

1. 旋转变换的复合还是旋转变换：$\boldsymbol{R}_{\theta_1} \circ \boldsymbol{R}_{\theta_2} = \boldsymbol{R}_{\theta_1+\theta_2} = \boldsymbol{R}_{\theta_2} \circ \boldsymbol{R}_{\theta_1}$. 对应的矩阵乘法是：

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}.$$

2. 反射变换与自己的复合是恒同变换：$\boldsymbol{H}_\theta \circ \boldsymbol{H}_\theta = \boldsymbol{I}$. 对应的矩阵乘法是：

$$\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

3. 对换变换与旋转变换的复合：先计算 $\boldsymbol{P} \circ \boldsymbol{R}_\theta$ 和 $\boldsymbol{R}_\theta \circ \boldsymbol{P}$. 我们直接计算对应的矩阵乘法，

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}.$$

4. 伸缩变换的复合还是伸缩变换：$\boldsymbol{C}_{k_1} \circ \boldsymbol{C}_{k_2} = \boldsymbol{C}_{k_1k_2} = \boldsymbol{C}_{k_2} \circ \boldsymbol{C}_{k_1}$，对应的矩阵乘法是：

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1k_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. 错切变换的复合还是错切变换：$\boldsymbol{S}_{k_1} \circ \boldsymbol{S}_{k_2} = \boldsymbol{S}_{k_1+k_2} = \boldsymbol{S}_{k_2} \circ \boldsymbol{S}_{k_1}$. 对应的矩阵乘法是：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k_1+k_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- 学习矩阵运算，尤其要注意其不具备什么熟知的运算规律．特别是乘法运算.

例1 设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$， $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$，求 AB.

解

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\times1+3\times0+1\times2 \\ 1\times1+2\times0+(-1)\times2 \\ 0\times1+3\times0+1\times2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\times1+3\times0+1\times2 & 3 \\ 1\times1+2\times0+(-1)\times2 & 2 \\ 0\times1+3\times0+1\times2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{注意　在这个例子中 } BA \text{ 无意义.}}$

例2 设 $A=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_1 & b_2\end{pmatrix}$ 则 $AB=\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2\\a_2b_1 & a_2b_2\end{bmatrix}$, $BA=b_1a_1+b_2a_2$.

注意 在这个例子中, 虽然 AB 与 BA 均有意义，但是 AB 是 2×2 矩阵，而 BA 是 1×1 矩阵.

例3 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$,

则 $AB=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$, $BA=\begin{bmatrix}2 & 2\\-2 & -2\end{bmatrix}$.

注意 (1) AB 与 BA 是同阶方阵，但 AB 不等于 BA.

(2) 虽然 A, B 都是非零矩阵，但是 $AB=0$.

例4 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -2 & 1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-7 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, 求 *AB* 及 *AC*.

解

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 5\\ -10 & 10\end{bmatrix},$$

$$AC=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 5\\ -10 & 10\end{bmatrix}.$$

注意 虽然 A 不是零矩阵, 而且 AB = AC, 但是 B 不等于 C.
这说明消去律不成立!

总结一下矩阵乘法的一些反常性质:

- 不满足交换律: $AB \neq BA$
- 不满足消去律: $AB = AC \not\Rightarrow B = C$
- 可能有零因子: $\boldsymbol{AB = 0 \not\Rightarrow A = 0}$ **或** $\boldsymbol{B = 0}$, $A \neq 0$ 且 $B \neq 0 \not\Rightarrow AB \neq 0$

如果 $AB = BA$, 则称 A 与 B 可交换.

学习矩阵理论, 尤其要注意反常性质!

- 因为矩阵乘法不满足交换律，所以对于同阶方阵 *A* 与 *B*，

  一般 $(AB)^k \neq A^k B^k$.

例如，设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}, \boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}, \boldsymbol{B}^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \qquad (\boldsymbol{AB})^2=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix},$$

- 转置矩阵的运算性质

$(A^T)^T = A$, $(A+B)^T = A^T+B^T$, $(\lambda A)^T = \lambda A^T$,

$$(AB)^T = B^T A^T$$

例5 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{bmatrix}$，求 $(\boldsymbol{AB})^T$.

解法1 $\because \boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&14&-3\\17&13&10\end{bmatrix}$ $\therefore (\boldsymbol{AB})^T=\begin{bmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{bmatrix}$.

解法2 $(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T=\begin{bmatrix}1&4&2\\7&2&0\\-1&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\0&3\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{bmatrix}$.

设 $B=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_n\end{bmatrix}$，则

$$(AB)^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}A\boldsymbol{b}_1 & \cdots & A\boldsymbol{b}_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}(A\boldsymbol{b}_1)^{\mathrm{T}}\\ \vdots \\ (A\boldsymbol{b}_n)^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}.$$

注意　两个对称矩阵的乘积不一定是对称矩阵.

例如 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 均为对称矩阵,

但 $AB=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ 不是对称矩阵.

注意　两个反对称矩阵的乘积不一定是反对称矩阵.

例如 $A=B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ 均为反对称矩阵,

但 $AB=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ 不是反对称矩阵.

矩阵的乘幂运算与性质

$$A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix},\ 求A^k,\ k=1,2,\cdots,n.$$

- AA 有意义当且仅当 A 为方阵.

- 若 f(x) 是 x 的 n 次多项式: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$,

- 对于方阵 A 可以定义: $f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n$,

  这里 $A^k = \underbrace{A\cdots A}_{k},\ k=1,2,\cdots,n.$

- 易证若方阵 A 和 B 可以交换，且 f(x), g(x) 为多项式，
  则方阵 f(A) 和 g(B) 可以交换.

作　业（9月27日）

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

练习1.4

2，5，6(1,4,6,8,9)，10，13，18，21

10月4日提交

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~