7.2.1.(10)

由 $y\frac{dy}{dx}=\frac{e^x}{1+e^x}$ 可解得

$$\frac{1}{2}y^2=\ln(1+e^x)+C, \quad C\in\mathbb{R}.$$

因为 $y(1)=1$，所以 $C=\frac{1}{2}-\ln(1+e)$.

所以 $y=\sqrt{2\ln\frac{1+e^x}{1+e}+1}$

7.2.2.

(4) 先解齐次方程 $y'+xy=0$.

可得 $y=Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$, $C\in\mathbb{R}$.

令 $C=u(x)$，代入原方程有

$$u'e^{-\frac{1}{2}x^2}=x^3.$$

所以 $u=\int x^3e^{\frac{1}{2}x^2}dx=x^2e^{\frac{1}{2}x^2}-2e^{\frac{1}{2}x^2}+C$.

$C\in\mathbb{R}$.

所以 $y = x^2 - 2 + \frac{C}{e^{\frac{1}{2}x^2}}$，$C \in \mathbb{R}$.

因为 $y(0) = 0$，所以 $C = 2$.

所以 $y = x^2 - 2 + \frac{2}{e^{\frac{1}{2}x^2}}$.

7.2.3

(1) 令 $u = -x + y$，则 $y = u + x$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + 1.$$

所以原方程可改写为：

$$\frac{du}{dx} + 1 = (2+u)^2.$$

即 $\frac{du}{dx} = (u+1)(u+3)$ $\cdots$ ①

易知 $u = -1$ 和 $u = -3$ 是 ① 的特解.

所以 $y = x - 1$ 和 $y = x - 3$ 是原方程特解.

当 u 不恒为 -1 或 -3 时，解①可得，

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+1}{u+3}\right| = x + C \quad , C \in \mathbb{R}.$$

所以 $\left|\frac{u+1}{u+3}\right| = e^{2C}e^{2x}$ ， $C \in \mathbb{R}$.

即 $$\frac{-x+y+1}{-x+y+3} = Ce^{2x} \quad , C \in \mathbb{R}.$$

综上： $y = x-1$ 或 $y = x-3$ 或

$$\frac{-x+y+1}{-x+y+3} = Ce^{2x} \quad , C \in \mathbb{R}.$$

(2) 因为 $y\,dx - x\,dy + \ln x\,dx = 0$.

所以 $x > 0$.

所以 $$\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}dx = 0.$$

所以 $$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\ln x}{x^2}dx$$

所以 $\frac{y}{x}=\int \frac{\ln x}{x^2}dx$

$=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C,\quad C\in\mathbb{R}.$

所以 $y=-\ln x-1+Cx,\ C\in\mathbb{R}.$

(7). 令 $u=\frac{y}{x}$, 则 $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}x+u.$

因为 $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2x^2}$. 所以 $\frac{dy}{dx}=\frac{1+(\frac{y}{x})^2}{2}$

所以 $\frac{du}{dx}\cdot x+u=\frac{1+u^2}{2}$

即 $\frac{du}{dx}\cdot x=\frac{(u-1)^2}{2}$ -- ①

易知 $u=1$ 是①的特解.

当 u 不为 1 时. $\frac{du}{(u-1)^2}=2\frac{1}{x}dx.$

可得 $-\frac{1}{(u-1)}=2\ln|x|+C,\ C\in\mathbb{R}.$

即 $-\frac{1}{\frac{y}{x}-1}=2\ln|x|+C,\ C\in\mathbb{R}.$

即：$y = x - \frac{2x}{\ln|x| + C}$，$C \in \mathbb{R}$.

综上：$y = x - \frac{2x}{\ln|x| + C}$ 或 $y = x$.

(12) 因为 $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$.

所以 $x^2 dx + y^2 dx + x dy^2 = 0$.

所以 $x^2 dx + d(xy^2) = 0$.

所以 $\frac{1}{3}x^3 + xy^2 = C$，$C \in \mathbb{R}$.

(13). 当 $x = \frac{3}{2}$ 时，$y = -\frac{5}{4}$.

当 $x \neq \frac{3}{2}$ 时，$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y + 1}{2x - 3}$

令 $u = x - \frac{3}{2}$，$v = y + \frac{5}{4}$.

则 $\frac{du}{dv} = \frac{1 + 2\frac{u}{v}}{2}$

令 $w=\frac{u}{v}$，则 $u=wv$.

$$\frac{du}{dv}=\frac{dw}{dv}v+w.$$

所以 $\frac{dw}{dv}v+w=\frac{1+2w}{2}$

即 $\frac{dw}{dv}v=\frac{1}{2}$

所以 $w=\frac{1}{2}\ln|v|+C$ ，$C\in\mathbb{R}$.

所以 $y=\frac{1}{2}(x-\frac{3}{2})\ln|x-\frac{3}{2}|+C(x-\frac{3}{2})-\frac{5}{4}$.

$C\in\mathbb{R}$.

易知 $x\to\frac{3}{2}$ 时，$y\to-\frac{5}{4}$.

但是 y 在 $x=\frac{3}{2}$ 处，没有导数.

综上 $y=\frac{1}{2}(x-\frac{3}{2})\ln|x-\frac{3}{2}|+C(x-\frac{3}{2})-\frac{5}{4}$.

$C\in\mathbb{R}$，$x\neq\frac{3}{2}$.

(14) 方法一：

易知 $y \equiv 0$ 是一个特解，

当 $y \neq 0$ 时，$\frac{y'}{y^2} + 2\frac{x}{y} = 2x^3$

所以 $\left(\frac{y'}{y^2} + 2\frac{x}{y}\right)e^{-x^2} = 2x^3 e^{-x^2}$

所以 $\left(-\frac{1}{y}e^{-x^2}\right)' = 2x^3 e^{-x^2}$.

所以 $-\frac{1}{y}e^{-x^2} = -(x^2+1)e^{-x^2} + C$.

$C \in \mathbb{R}$.

所以 $y = \frac{1}{x^2+1+Ce^{x^2}}$，$C \in \mathbb{R}$.

综上：$y \equiv 0$ 或 $y = \frac{1}{x^2+1+Ce^{x^2}}$，$C \in \mathbb{R}$.

方法二：

易知 $y \equiv 0$ 为特解.

当 $y \neq 0$ 时，$\frac{y'}{y^2} + \frac{2x}{y^{-1}} = 2x^3$

令 $z = y^{-1}$，则有 $z' - 2xz = -2x^3$.

解 $z'-2xz=0$ 可得. $z=Ce^{x^2}$. $C\in\mathbb{R}$.

令 $z=c(x)e^{x^2}$, 代入 $z'-2xz=-2x^3$.

可得: $c'(x)=-2x^3e^{-x^2}$.

所以 $c(x)=\frac{x^2+1}{e^{x^2}}+C$, $C\in\mathbb{R}$.

所以 $y=\frac{1}{x^2+1+Ce^{x^2}}$, $C\in\mathbb{R}$.

综上 $y\equiv 0$ 或 $y=\frac{1}{x^2+1+Ce^{x^2}}$, $C\in\mathbb{R}$.

7.3

(2) 令 $p=y'$. 则 $y''=p'$.

所以 $\frac{dp}{dx}x=p-p^2$. -- ①

易知 ① 有特解 $p=0$ 和 $p=1$. 但均不满足 $y'(1)=p(1)=\frac{1}{2}$. 舍去.

当 $p \neq 0$ 或 1 时，可解①得：

$$\frac{p}{1-p} = C_1 x \quad , C_1 \in \mathbb{R}. \quad C_1 \neq 0.$$

所以 $p = \dfrac{C_1 x}{1+C_1 x}$，即 $y' = \dfrac{C_1 x}{1+C_1 x}$.

所以 $y = x - \dfrac{\ln|1+C_1 x|}{C_1} + C_2$

$C_1 \in \mathbb{R}$，$C_1 \neq 0$，$C_2 \in \mathbb{R}$

由 $p(1) = y'(1) = \frac{1}{2}$，可得 $C_1 = 1$

再由 $y(1) = 1 - \ln 2$，可得 $C_2 = 0$.

所以 $y = x - \ln(1+x)$，$x > -1$.

(3) 令 $y'(x) = p(y(x))$，

则 $y''(x) = p\dfrac{dp}{dy}$

于是原方程可改写为：

$$p\frac{dp}{dy} = 3\sqrt{y}.$$

可解得: $\frac{1}{2}p^2 = 2y^{\frac{3}{2}} + C_1$

即 $y'^2(x) = 4y^{\frac{3}{2}} + C_1$.

由 $y'(0) = 2$. 与 $y(0) = 1$ 可解得.

$C_1 = 0$.

所以 $y'^2(x) = 4y^{\frac{3}{2}}$

所以 $y'(x) = \pm 2y^{\frac{3}{4}}$.

可解得: $y(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2}x + C_1)^4, & y \geq 0 \text{时}, C_1 \in \mathbb{R}. \\ (-\frac{1}{2}x + C_2)^4, & y \leq 0 \text{时}, C_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$

所以 $y(x) = (\frac{1}{2}x + C_3)^4 \quad C_3 \in \mathbb{R}$.

由 $y(0) = 1$, 可得 $C_3 = 1$.

所以 $y(x) = (1 + \frac{1}{2}x)^4$.

(6). 令 $p=y''$，则有 $(p')^2+p^2=1$. -- ①

$p\equiv\pm1$ 是 ① 的特解.

当 p 不恒为 ±1 时.

$$p'=\pm\sqrt{1-p^2}.$$

$$p(x)=\begin{cases}\sin(x+\tilde{C}_1), & p\geq0\text{时}, \ \tilde{C}_1\in\mathbb{R}\\ -\sin(x+\tilde{C}_2), & p\leq0\text{时}, \ \tilde{C}_2\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

所以 $p(x)=\sin(x+C_1)$，$C_1\in\mathbb{R}$.

综上：特解 $p\equiv\pm1$，即 $y''(x)=\pm1$，

$y(x)=\pm\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2$，$C_1, C_2\in\mathbb{R}$.

通解：$p(x)=\sin(x+C_1)$. 即 $y''(x)=\sin(x+C_1)$

$y(x)=-\sin(x+C_1)+C_2x+C_3$,

$C_1, C_2, C_3\in\mathbb{R}$.

(9). 令 $p = y'$，则 $(p')^2 - p = 0$.

有特解 $p \equiv 0$.

当 $p \neq 0$ 时，$p' = \pm\sqrt{p}$.

解之得：
$$p = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}x + C_1\right)^2, & p \geq 0 \text{ 时}. \\ \left(-\frac{1}{2}x + C_2\right)^2, & p \leq 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

其中 $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

所以
$$p(x) = \left(\frac{1}{2}x + \tilde{C}\right)^2 = \frac{1}{4}(x + C)^2,$$

$\tilde{C} \in \mathbb{R}$，$C = 2\tilde{C} \in \mathbb{R}$.

即 $y'(x) = \frac{1}{4}(x + C)^2$.

所以原方程通解为
$$y(x) = \frac{1}{12}(x + C)^3 + C_0, \quad C, C_0 \in \mathbb{R}.$$

特解为 $y(x) = C_3$，$C_3 \in \mathbb{R}$. $\square$