期末考试样题二

1. (10 分) 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&2\\1&1&3&1\\1&4&1&1\\5&1&1&1\end{bmatrix}$. 分别计算以下 4 项并提供计算过程.

   (1) $|A|$.　　(2) $|-2A^T|$.　　(3) $|A^{-1}|$.

   (4) A^{-1} 的 (1,4) 元 (即 A^{-1} 第 1 行第 4 列的元素).

2. (10 分) 设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，我们称 n 阶实矩阵 P 是 V 上的正交投影矩阵，如果 $P^2=P, P^T=P$ 且 P 的列空间等于 V. 这个定义等价于说 P 满足: 若 $v\in V$，则 $Pv=v$, 若 $w\in V^{\perp}$, 则 $Pw=0$.

   (1) 假设 $V=\left\{c_1\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\}$. 它是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间. 问:V 上的正交投影矩阵是否等于

$$\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&-1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&-1\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1}?$$

   (2) 求 $w\in V$, 使得 $\| w-\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}\|=\min_{v\in V}\| v-\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}\|$.

3. (20 分) 设 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\alpha_4=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$.

   (1) 证明: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 但 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.

   (2) 按 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 顺序写出 Gram-Schmidt 标准正交化的向量 β_1,β_2,β_3.

   (3) 记 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$ 和 $Q=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$, 求矩阵 C 满足 $A=QC$.

   (4) 求 $\mathbb{R}^4$ 到 A 的列空间的正交投影矩阵.

(5) 记 $B=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$, $b=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$, 求 $Bx=b$ 的最小二乘解, 即求 $x^*\in\mathbb{R}^3$ 使得 $\|Bx^*-b\|=\min\limits_{x\in\mathbb{R}^3}\|Bx-b\|$.

4. (10 分) 设 $A=\begin{bmatrix}2&3&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.

(1) 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

(2) 求 A^n.

5. (10 分) 设 T 为 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换，且满足

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix},\qquad T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-10\\8\end{bmatrix}.$$

(1) 求 T 在基 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 下的矩阵 A.

(2) 计算 $T\left(\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right)$.

(3) 阐明理由: 能够找到 A 的特征向量构成 $\mathbb{R}^2$ 一组基. 并求 T 在这组基下的矩阵.

6. (20 分) 令 $A=\begin{bmatrix}2&2&1\\1&2&2\end{bmatrix}$.

(1) 求 A 的奇异值分解.

(2) 分别给出 A 的行空间和列空间的一组标准正交基.

7. (7 分) 设 A 和 B 均为 n 阶方阵，且满足 $A+B+AB=O$. 证明：

(1) -1 不是 B 的特征值.

(2) B 的任一特征向量都是 A 的特征向量.

(3) A 的任一特征向量都是 B 的特征向量.

8. (5 分) 设 e_1,e_2,e_3 是 $\mathbb{R}^{10}$ 中一组标准正交的向量. 记 $V\subseteq\mathbb{R}^{10}$ 为 e_1,e_2,e_3 生成的子空间. 设 $v\in\mathbb{R}^{10}$. 证明：$v\in V$ 当且仅当 $\|v\|^2=(e_1^Tv)^2+(e_2^Tv)^2+(e_3^Tv)^2$.

9. (8 分) 给定实对称正定矩阵 A 和实对称矩阵 B，求证：

(1) 关于矩阵 X 的方程 $AX+XA=O$ 只有平凡解 $X=O$.

(2) 关于矩阵 X 的方程 $AX+XA=B$ 存在唯一的解 X_0.

(3) X_0 是对称矩阵.