6.3.1.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} n4^{n-1}x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}(n4^{n-1})(x^2)^n$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n4^{n-1}} = 4$，从而，收敛半径为 $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

从而：收敛半径为 $\frac{1}{2}$，收敛域为 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

(5) 注意到，$x=1$ 时 $\frac{\ln n}{n}$ 有界 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ 发散

且当 $x>1$ 时，$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}(x^n) = +\infty$，

从而：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}x^n$ 在 $(-1, 1)$ 上收敛

从而：收敛半径为 1，收敛域为 $(-1, 1)$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{2})^n + \sum_{n=1}^{\infty}(4x)^n$

设 $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{2})^n$，$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty}(4x)^n$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{2})^n$ 的收敛域为 $(-2, 2)$

$\sum_{n=1}^{\infty}(4x)^n$ 的收敛域为 $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

从而在 $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ 上，S_1 与 S_2 均收敛

从而：$\sum_{n=1}^{\infty}[(\frac{x}{2})^n + (4x)^n]$ 的收敛域为 $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

(9) 设 $y = x-1$，原级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}y^n$

注意到：$y=1$ 时 $\frac{1}{n^p}$ 有界，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}y^n$ 在 $(-1, 1)$ 上收敛

$y=-1$ 时，由 $\frac{1}{n^p}$ 单调下降，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}(-1)^n$ 收敛

$y=1$ 时 $\quad p>1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}y^n$ 收敛

$0<p\leq 1$ 时 $\quad$ 发散

从而： $0<p\leq 1$ 时，收敛半径为 1，收敛域为 $[0, 2)$

$p>1$ 时，收敛半径为 1，收敛域为 $[0, 2]$

2 (1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

易知：收敛半径 $R=1$，且收敛域为 $[-1, 1]$

$x\neq 1$ 时

设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n+1}$

$x^2 S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$(x^2 S'(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} = -\left(\frac{1-x}{1-x} - \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x} - 1$

$x^2 S'(x) = -x - \ln(1-x)$

$S'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x^2} - \frac{1}{x}$

$S(x) = \int_0^x S'(t)\,dt = \frac{\ln(1-x)}{x} - \ln(1-x) + 1$

从而 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} = \ln(1-x) - x\ln(1-x) + x$ $(x\neq 1)$

$x=1$ 时

$S(x) = 1$

(5) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1} = S(x)$

$\int_0^x S(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2} x^n = F(x)$

$\int_0^x F(t)\,dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{2}\cdot\frac{x}{1-x} = \frac{x^2}{2(1-x)}$

$F(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x(1-x)-(-1)x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x-x^2}{2(1-x)^2}$ $\quad 2(x^2-2x+1)$

$S(x) = \frac{2(2-2x)(1-x)^2 + 4(2x-x^2)(x+1)}{4(1-x)^4} = \frac{1}{1-x} + \frac{(2x-x^2)}{(1-x)^3} = \frac{1}{(1-x)^3}$

3.(1) $x_0 = 0$

设 $S(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

$$S'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$$

$$S(x) = \int_0^x S'(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n} x^{2n+1}$$

5. $f(x) = \frac{x^2 - x}{x+2}$ $\qquad g(x) = \frac{x}{(x-1)(x+2)}$

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 6 + 6}{x+2} = (x-3) + \frac{6}{x+2} \qquad \frac{x}{x+2}$$

$$f^{(n)}(0) = \left(\frac{6}{x+2}\right)^{(n)}\Big|_{x=0} \qquad 1 - \frac{2}{x+2}$$

$$g(x) = \frac{1}{3}x\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{x-1} - 1 + \frac{2}{x+2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2}\right)$$

$$f^{(n)}(0) = 6(-1)^n n!\,(2)^{-(n+1)}$$

$$g^{(n)}(0) = \frac{1}{3}(-1)^n n!\,(-1)^{-(n+1)} + \frac{2}{3}(-1)^n n!\,(2)^{-(n+1)}$$

$$= -\frac{1}{3}n! + \frac{2}{3}\frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}$$

从而 $f^{(n)}(0) = 6(-1)^n n!/2^{n+1}$ $\qquad g^{(n)}(0) = -\frac{1}{3}n! + \frac{2}{3}\frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}$