第十二次习题课题目

习题 1 (练习 7.3.8). 记实数域 $\mathbb{R}$ 上的全体一元可导函数组成的集合为 $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$, 定义 $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ 上的变换：$\boldsymbol{A}\big(f(x)\big) = xf(x) \quad \forall f(x) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$.

(1) 证明 $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ 上的一个线性变换.

(2) 设 $\boldsymbol{D}$ 是求导算子, 证明 $\boldsymbol{DA} - \boldsymbol{AD} = \boldsymbol{I}$.

习题 2 (练习 7.3.9). 令 $\mathscr{V}$ 为全体实数数列组成的线性空间, 其中元素记为 $(a_0, a_1, \cdots)$. 定义其上变换

$$\boldsymbol{D}((a_0,a_1,\cdots)) = (0,a_0,a_1,\cdots), \quad \boldsymbol{M}((a_0,a_1,\cdots)) = (a_1,2a_2,3a_3,\cdots)$$

(1) 证明 D, M 都是线性变换.

(2) 证明 $MD - DM = I$.

(3) 对于任意 n 阶方阵 A, B, 证明 $AB - BA \neq I_n$.

习题 3 (练习 7.3.13). 设线性空间 $\mathscr{V}$ 有直和分解：$\mathscr{V} = \mathscr{M}_1 \bigoplus \mathscr{M}_2$ (即 $\mathscr{V} = \mathscr{M}_1 + \mathscr{M}_2$ 且满足 $\mathscr{M}_1 \cap \mathscr{M}_2 = \{\boldsymbol{0}\}$), 则任取 $\boldsymbol{a} \in \mathscr{V}$, 都有唯一的分解式：$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$, 其中 $\boldsymbol{a}_1 \in \mathscr{M}_1, \boldsymbol{a}_2 \in \mathscr{M}_2$. 定义 $\mathscr{V}$ 上的变换：

$$\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_1}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}_1, \qquad \boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_2}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}_2.$$

(1) 证明, $\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_1}, \boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_2}$ 都是 $\mathscr{V}$ 上的线性变换.

(2) 证明, $\ker(\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_1}) = \mathscr{M}_2, Im(\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_1}) = \mathscr{M}_1$.

(3) 证明, $\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_1}^2 = \boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_1}$, $\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_1} + \boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_2} = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_1}\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_2} = \boldsymbol{O}$.

(4) 分别求 $\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_1}, \boldsymbol{P}_{\mathscr{M}_2}$ 的特征值和特征向量.

习题 4. 考虑 xy 平面, 设 T 为关于 x 轴的反射变换, S 为关于 y 轴的反射变换. 对于任意向量 $\mathbf{v} = (x, y)$, 写出 $S(T(\mathbf{v}))$, 并给出线性变换 ST 的更简单的描述.

习题 5 (练习 7.4.3). 考虑函数空间的子空间 $\operatorname{span}(\sin^2 x, \cos^2 x)$.

(1) 证明 $\sin^2 x, \cos^2 x$ 和 $1, \cos 2x$ 分别是子空间的一组基.

(2) 分别求从 $\sin^2 x, \cos^2 x$ 到 $1, \cos 2x$, 和从 $1, \cos 2x$ 到 $\sin^2 x, \cos^2 x$ 的过渡矩阵.

(3) 分别求 1 和 $\sin^2 x$ 在两组基下的坐标.

习题 6. 考虑线性空间 $P_2[x] := \{y(x)|y(x) = a+bx+cx^2, a,b,c \in \mathbb{R}\}$. 已知 $w_1(x), w_2(x), w_3(x) \in P_2[x]$ 且满足 $w_1(-1) = 1, w_1(0) = 0, w_1(1) = 0$, $w_2(-1) = 0, w_2(0) = 1, w_2(1) = 0$, $w_3(-1) = 0, w_3(0) = 0, w_3(1) = 1$.

(1) 证明: $w_1(x), w_2(x), w_3(x)$ 构成 $P_2[x]$ 的一组基.

(2) 取 $v_1(x) = 1, v_2(x) = x, v_3(x) = x^2$, 分别求从 v_1, v_2, v_3 到 w_1, w_2, w_3 的过渡矩阵和从 w_1, w_2, w_3 到 v_1, v_2, v_3 的过渡矩阵.

习题 7. 考虑二阶矩阵空间 $M_2(\mathbb{R})$ 上的线性变换 $T(M) = AMB$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. 描述 $\ker(T)$ 及 ImT.

习题 8 (练习 7.4.9). 设 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 是线性空间 $\mathscr{V}$ 的一组基.

1. 判断 $\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{t}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{t}_n = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \boldsymbol{e}_n$ 是否也是 $\mathscr{V}$ 的一组基.
2. 判断 $\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{t}_2 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \cdots, \boldsymbol{t}_n = \boldsymbol{e}_n + \boldsymbol{e}_1$ 是否也是 $\mathscr{V}$ 的一组基.

习题 9 (练习 7.4.10). 设 $a_1, \cdots, a_n$ 是 $\mathbb{F}$ 中两两不等的数, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 是线性空间 $\mathscr{V}$ 的一组基, 令 $\boldsymbol{t}_i = \boldsymbol{e}_1 + a_i\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_i^{n-1}\boldsymbol{e}_n, i = 1, \cdots, n$. 证明 $\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \cdots, \boldsymbol{t}_n$ 也是 $\mathscr{V}$ 的一组基.

习题 10 (练习 7.4.11). 设 (I): $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n(\mathrm{II}) : \boldsymbol{t}_1, \cdots, \boldsymbol{t}_n$ 和 (III): $\boldsymbol{s}_1, \cdots, \boldsymbol{s}_n$ 是线性空间 $\mathscr{V}$ 的三组基, 如果从 (I) 到 (II) 的过渡矩阵是 P, 从 (II) 到 (III) 的过渡矩阵是 Q, 证明,

1. 从 (II) 到 (I) 的过渡矩阵是 P^{-1}.
2. 从 (I) 到 (III) 的过渡矩阵是 PQ.