Review

- 常系数齐次线性ODE的特征解法

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = 0$$

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

特征根	重数	线性无关解
λ(实)	1	$e^{\lambda t}$
λ(实)	k	$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \cdots, t^{k-1}e^{\lambda t}$
$\alpha \pm \mathrm{i}\beta$	1	$e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t$
$\alpha \pm \mathrm{i}\beta$	k	$e^{\alpha t}\cos\beta t, te^{\alpha t}\cos\beta t, \cdots, t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t,$ $e^{\alpha t}\sin\beta t,\ te^{\alpha t}\sin\beta t, \cdots, t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t$

- 常系数非齐次线性ODE的待定系数法

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=f(t)$$

$f(t)$	special solution $x(t)$
$p(t)e^{\lambda t}, \lambda\in\mathbb{R}$ p real polynomial,	$q(t)t^ke^{\lambda t}$, q real polynomial, $\deg(q)\le\deg(p)$, k : multiplicity of λ as an eigenvalue
$p(t)e^{\lambda t}$, $\lambda\in\mathbb{C}$, p real	$q(t)t^ke^{\lambda t}$, q complex, $\deg(q)\le\deg(p), k=$ multiplicity of λ
$p(t)e^{\alpha t}\cos\beta t$ or $p(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$ $p(t),\alpha,\beta$ real	$t^k[P(t)\cos\beta t+Q(t)\sin\beta t]e^{\alpha t}$, k : multiplicity of $\lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta$, P,Q real, $\deg(P)\le\deg(p),\deg(Q)\le\deg(p)$,

§6. 线性常微分方程组

1.解的叠加原理及存在唯一性定理

矩阵函数$\mathrm{A}(t)=\left(a_{ij}(t)\right)_{m\times n}$的导数和积分分别

定义为

$$\frac{\mathrm{dA}(t)}{\mathrm{d}t}\triangleq \mathrm{A}'(t)\triangleq\left(a'_{ij}(t)\right)_{m\times n},$$

$$\int_{t_0}^{t}\mathrm{A}(s)\mathrm{d}s\triangleq\left(\int_{t_0}^{t}a_{ij}(s)\mathrm{d}s\right)_{m\times n}.$$

$$
\begin{cases}
x_1'(t) = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\
x_2'(t) = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)
\end{cases}
$$

可以记作

$$x'(t) = \mathrm{A}(t)x(t) + f(t), \tag{1}$$

其中$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^{\mathrm{T}}, \mathrm{A}(t) = \left(a_{ij}(t)\right)_{n\times n}$,

$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t))^{\mathrm{T}}$.

若$f(t) = 0$,则得到齐次线性方程组

$$x'(t) = \mathrm{A}(t)x(t). \tag{2}$$

$$x'(t)=\mathrm{A}(t)x(t)+f(t), \qquad (1)$$

$$x'(t)=\mathrm{A}(t)x(t). \qquad (2)$$

Thm.(解的叠加原理)

(I)若$\varphi(t),\psi(t)$为齐次线性方程组(2)的解,则

$\alpha\varphi(t)+\beta\psi(t)$也为(2)的解, 其中$\alpha,\beta$为任意常数.

(II)若$\varphi^*(t)$为非齐次线性方程组(1)的特解, 则(1)的任意一个解$x(t)$可以表示为

$$x(t)=\varphi^*(t)+\psi(t),$$

其中$\psi(t)$为(2)的一个解.□

Thm.(解的存在唯一性定理)

设矩阵函数$\mathrm{A}(t)$和向量值函数$f(t)$在区间I上连续, $t_0 \in I$.则$\forall \xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$,初值问题

$$x'(t) = \mathrm{A}(t)x + f(t), \quad x(t_0) = \xi$$

在区间I上存在唯一解.

2. 线性方程组解的结构

由解的叠加原理,齐次线性方程组(2)的解集合是一个线性空间.我们需要知道这个解空间的维数, 并求出一组基. 为此, 需要引入向量值函数线性无关的概念.

Def. 称向量值函数

$$\varphi_1(t)=(\varphi_{11}(t),\varphi_{21}(t),\cdots,\varphi_{n1}(t))^{\mathrm{T}},$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n(t)=(\varphi_{1n}(t),\varphi_{2n}(t),\cdots,\varphi_{nn}(t))^{T},$$

在区间I上线性相关,若存在不全为零的常数 $c_1,\cdots,c_n$,
使得$\forall t\in I$,

$$c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t)\equiv 0.$$

否则,称$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$在$I$上线性无关.

Def.设区间I上有向量值函数

$$\varphi_k(t)=(\varphi_{1k}(t),\varphi_{2k}(t),\cdots,\varphi_{nk}(t))^{\mathrm{T}},\ (k=1,2,\cdots,n).$$

称以这些向量值函数为列的行列式

$$\det\begin{pmatrix}\varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t)\\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & \cdots & \varphi_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t)\end{pmatrix}$$

为向量值函数$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$的Wronsky行列式, 记作

$$\mathrm{W}(t)=\mathrm{W}[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n](t).$$

Thm. 若向量值函数$\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$在区间$I$上线性相关,则Wronsky行列式$W[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n](t)\equiv 0,\forall t\in I.$

Proof:$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$在$I$上线性相关,则存在不全为零的常数$c_1,c_2,\cdots,c_n$, $s.t.$ $c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t)\equiv 0.$

$$\text{即}\begin{cases} c_1\varphi_{11}(t)+c_2\varphi_{12}(t)+\cdots+c_n\varphi_{1n}(t)=0 \\ c_1\varphi_{21}(t)+c_2\varphi_{22}(t)+\cdots+c_n\varphi_{2n}(t)=0 \\ \quad\vdots \\ c_1\varphi_{n1}(t)+c_2\varphi_{n2}(t)+\cdots+c_n\varphi_{nn}(t)=0 \end{cases}\text{有非零解.}$$

故系数矩阵$W[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n](t)\equiv 0,\forall t\in I.$□

Thm. 设齐次线性方程组$x'(t)=\mathrm{A}(t)x(t)$有n个解

$$\varphi_k(t)=(\varphi_{1k}(t),\varphi_{2k}(t),\cdots,\varphi_{nk}(t))^{\mathrm{T}},(k=1,2,\cdots,n.)$$

则以下条件等价:

I) $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$在区间$I$上线性相关.

II) $\mathrm{W}[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n](t)\equiv 0,\forall t\in I.$

III)存在$t_0\in I$,使得$\mathrm{W}[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n](t_0)=0.$

Proof: (I) $\Rightarrow$ (II)即上一定理,(II) $\Rightarrow$ (III)显然. 只要证 (III) $\Rightarrow$ (I).

设存在$t_0 \in I$，使得$W[\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n](t_0) = 0$. 则方程组

$$c_1\varphi_1(t_0) + c_2\varphi_2(t_0) + \cdots + c_n\varphi_n(t_0) = 0$$

有非零解$c_1, c_2, \cdots c_n$. 令

$$x(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t),$$

由解的叠加原理, $x(t)$为齐次方程组的解, 且满足初值条件$x(t_0) = 0$. 由解的存在唯一性定理, $x(t) \equiv 0$, 即

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t) \equiv 0 (t \in I). \square$$

Remark: 设$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n \in C^n(I)$为$n$次齐次线性常微分方程组的$n$个解,$t_0 \in I$. 则

(1) $\quad W[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n](t_0)=0$

$\Leftrightarrow W[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n](t)=0, \forall t \in I.$

$\Leftrightarrow \varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$在$I$上线性相关.

(2) $\quad W[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n](t_0)\neq 0$

$\Leftrightarrow W[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n](t)\neq 0, \forall t \in I.$

$\Leftrightarrow \varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$在$I$上线性无关.$\square$

Thm. $\mathrm{A}(t)$为区间I上连续的$n\times n$矩阵函数, 则齐次线性常微分方程组

$$x'(t)=\mathrm{A}(t)x(t),\qquad t\in I \tag{2}$$

的解集合是一个n维线性空间.

Proof. 设$\varphi_k(t)$是初值问题$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mathrm{A}(t)x, x(t_0)=e_k$的唯一解,

其中e_k为$\mathbb{R}^n$中列向量,第k个分量为1,其它分量都为0.则

$$\mathrm{W}[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n](t_0)=1.$$

由上一定理, $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$在区间$I$上线性无关.

一方面,由解的叠加原理,$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 的任意线性组合都是(2)的解. 另一方面, 设$x(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))$是(2)的一个解. 令$y(t)=x_1(t_0)\varphi_1(t)+\cdots+x_n(t_0)\varphi_n(t)$,

则$y(t)$是方程组(2)的解, 且满足初值条件

$$y(t_0)=(x_1(t_0),x_2(t_0),\cdots,x_n(t_0)).$$

由解的存在唯一性定理,

$$x(t)=y(t)=x_1(t_0)\varphi_1(t)+\cdots+x_n(t_0)\varphi_n(t),$$

即$x(t)$可以由$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$线性表出.□

Def.齐次线性常微分方程组 (2) 的 n 个线性无关解

$$\varphi_k(t)=(\varphi_{1k}(t),\varphi_{2k}(t),\cdots,\varphi_{nk}(t))^{\mathrm{T}},\ (k=1,2,\cdots,n)$$

称为 (2) 的一个基本解组. 称矩阵

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & \cdots & \varphi_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

为齐次方程组 (2) 的一个基本解矩阵.

Remark:已知(2)的一个基本解矩阵$\Phi(t)$,则(2)的通解可以表示为$x(t)=\Phi(t)c$.其中$c\in\mathbb{R}^n$为常向量.

例. $\Phi(t)=\begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$和$\Psi(t)=\begin{pmatrix} e^t+te^t & te^t \\ e^t & e^t \end{pmatrix}$都是方程组$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}x$的基本解矩阵. 事实上,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} te^t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^t + e^t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} te^t \\ e^t \end{pmatrix},$$

即$\Phi(t)$的列向量都是方程组的解. 而$\Psi(t)$的列向量都是$\Phi(t)$的列向量的线性组合, 因而也都是的解. 又

$$\det\Phi(0)=1\neq 0, \det\Psi(0)=1\neq 0,$$

故$\Phi(t)$和$\Psi(t)$的列向量都构成基本解组, 而$\Phi(t)$和$\Psi(t)$都是基本解矩阵.□

Remark: 齐次方程组

$$x'(t) = \mathrm{A}(t)x(t) \qquad (2)$$

的基本解组和基本解矩阵都不唯一. 这是因为基本解组实际上是(2)的解空间的一组基, 而线性空间有不同的基. 事实上, 设$\Phi(t)$是(2)的一个基本解矩阵, T为任意一个$n\times n$可逆矩阵, 则$\Phi(t)\mathrm{T}$也是(2)的一个基本解矩阵. 反之, 任给(2)的两个基本解矩阵$\Phi(t), \Psi(t)$, 必存在可逆矩阵T(T由Φ, Ψ唯一确定), $s.t, \Psi(t) = \Phi(t)\mathrm{T}$.□

Remark: $\Phi(t)$是$x'(t) = \mathrm{A}(t)x(t)$的基本解组矩阵, 则

$$\Phi'(t) = \mathrm{A}(t)\Phi(t).$$

3.常数变易法

$$x'(t) = \mathrm{A}(t)x(t) \qquad (2)$$

有基本解矩阵 $\Phi(t)$, 则 (2) 的通解为 $x(t) = \Phi(t)u$, 其中 u 为 $\mathbb{R}^n$ 中任意常向量. 假设

$$x'(t) = \mathrm{A}(t)x(t) + f(t) \qquad (1)$$

的通解为

$$x(t) = \Phi(t)u(t),$$

其中 $u(t)$ 为 n 维向量值函数,待定. 将该通解代入(1),得

$$\Phi'(t)u(t) + \Phi(t)u'(t) = \mathrm{A}(t)\Phi(t)u(t) + f(t).$$

注意到$\Phi(t)$是(2)的基本解矩阵,即$\Phi'(t)=A(t)\Phi(t)$,

有
$$\Phi(t)u'(t)=f(t),$$

即
$$u'(t)=\Phi^{-1}(t)f(t), \tag{3}$$

其中$\Phi^{-1}(t)$是$\Phi(t)$的逆矩阵.于是,

$$u(t)=c+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s,$$

其中$c\in\mathbb{R}^n$为任意常向量. 因此(1)的通解为

$$x(t)=\Phi(t)u(t)=\Phi(t)c+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s.$$

Thm. 设$\Phi(t)$是齐次方程组 $x'(t)=\mathrm{A}(t)x(t)$的一个基本解矩阵,则非齐次方程组$x'(t)=\mathrm{A}(t)x(t)+f(t)$的通解为

$$x(t)=\Phi(t)c+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s,$$

其中$c\in\mathbb{R}^n$为任意常向量; 且初值问题

$$x'(t)=A(t)x(t)+f(t),x(t_0)=\xi\in\mathbb{R}^n$$

的解为

$$x(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\xi+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s.\square$$

例：求解初值问题 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}e^{-t}\\ 0\end{pmatrix}, x(0)=(-1,1)^{\mathrm{T}}$.

解：前面的例子已验证 $\Phi(t)=\begin{pmatrix}e^t & te^t\\ 0 & e^t\end{pmatrix}$ 是 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}x$ 的一个基本解矩阵. 由常数变易法得初值问题的解

$$x(t)=\Phi(t)\Phi^{-1}(0)\xi+\Phi(t)\int_0^t\Phi^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s$$

$$=\begin{pmatrix}e^t & te^t\\ 0 & e^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e^t & te^t\\ 0 & e^t\end{pmatrix}\int_0^t e^{-s}\begin{pmatrix}1 & -s\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-s}\\ 0\end{pmatrix}\mathrm{d}s$$

$$=\begin{pmatrix}-e^t+te^t\\ e^t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e^t & te^t\\ 0 & e^t\end{pmatrix}\int_0^t\begin{pmatrix}e^{-2s}\\ 0\end{pmatrix}\mathrm{d}s=\left(te^t-(e^t+e^{-t})/2, e^t\right).\square$$

4. 常微分方程组的幂级数解法.

$$x'(t)=ax(t), a\in\mathbb{R} \quad \Rightarrow x(t)=ce^{at}$$

$$e^{at}=1+at+\frac{1}{2!}a^2t^2+\cdots+\frac{1}{n!}a^nt^n+\cdots$$

推广:对方阵A,定义$e^{\mathrm{A}}=\mathrm{I}+\mathrm{A}+\frac{\mathrm{A}^2}{2!}+\cdots+\frac{\mathrm{A}^n}{n!}+\cdots,$

则 $$(e^{t\mathrm{A}})'=\left(\mathrm{I}+t\mathrm{A}+\frac{t^2\mathrm{A}^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n\mathrm{A}^n}{n!}+\cdots\right)'$$

$$\overset{?}{=}\mathrm{A}+t\mathrm{A}^2+\frac{t^2\mathrm{A}^3}{2!}+\cdots+\frac{t^{n-1}\mathrm{A}^n}{(n-1)!}+\cdots=\mathrm{A}e^{t\mathrm{A}}$$

Thm. 常系数齐次线性常微分方程组 $x' = \mathrm{A}x$ 有基本解矩阵

$$e^{t\mathrm{A}} = \mathrm{I} + t\mathrm{A} + \frac{t^2\mathrm{A}^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n\mathrm{A}^n}{n!} + \cdots.$$

Remark. $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n$，若 $(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I})\vec{r} = 0$，则 $x' = \mathrm{A}x$ 有解

$$e^{t\mathrm{A}}\vec{r} = \left(\mathrm{I} + t\mathrm{A} + \frac{t^2\mathrm{A}^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n\mathrm{A}^n}{n!} + \cdots\right)\vec{r}$$

$$= \left(1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\lambda^n t^n}{n!} + \cdots\right)\vec{r} = e^{\lambda t}\vec{r}$$

若 A 有 n 个线性无关的实特征向量 $\vec{r}_i$，$\mathrm{A}\vec{r}_i = \lambda_i \vec{r}_i$，$\lambda_i \in \mathbb{R}$，$i = 1, \cdots, n$，则 $x' = \mathrm{A}x$ 有 n 个线性无关的解 $e^{\lambda_i t}\vec{r}_i$，$i = 1, \cdots, n$.

$$\forall a,b\in\mathbb{R}, e^{a+b}=e^{a}e^{b}=e^{b}e^{a}.$$

Prop.若$\mathrm{AB}=\mathrm{BA}$,则$e^{\mathrm{A}}e^{\mathrm{B}}=e^{\mathrm{B}}e^{\mathrm{A}}=e^{\mathrm{A}+\mathrm{B}}$.

Remark.λ为A的特征值,若$\exists k\in\mathbb{N}, (\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I})^{k}\vec{r}=0$ (此时称$\vec{r}$为A的属于特征值λ的根向量),则$x'=\mathrm{A}x$有解

$$e^{t\mathrm{A}}\vec{r}=e^{\lambda t\,\mathrm{I}}e^{t(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I})}\vec{r}$$

$$=e^{\lambda t}\left(\mathrm{I}+t(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I})+\cdots+\frac{t^{n}}{n!}(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I})^{n}+\cdots\right)\vec{r}$$

$$=e^{\lambda t}\left(\mathrm{I}+t(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I})+\cdots+\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I})^{k-1}\right)\vec{r}$$

λ 为 n 阶方阵A的k重特征值,则

$$\mathrm{V}_{\lambda}=\left\{\vec{r}\in\mathbb{R}^{n}:\exists m\in\mathbb{N}, s.t. (\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I})^{m}\vec{r}=0\right\}$$

$$=\left\{\vec{r}\in\mathbb{R}^{n}:(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I})^{k}\vec{r}=0\right\}$$

是$\mathbb{R}^{n}$的k维线性子空间,称为A的属于特征值λ的根子空间.

若A有m个相异实特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$,其重数分别为$k_1,k_2,\cdots,k_m$,且$k_1+k_2+\cdots+k_m=n$,则由$(\mathrm{A}-\lambda_i\mathrm{I})^{k_i}\vec{r}=0$得到$n$个线性无关的根向量,进而得到 $x'=\mathrm{A}x$ 的n 个线性无关的解.

Question.若A有复特征值,如何寻找 $x' = \mathrm{A}x$ 的n个线性无关的解?

$$\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta, \beta \neq 0, (\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I})^k \vec{r} = 0, \vec{r} = \vec{r}_1 + \mathrm{i}\vec{r}_2 \neq 0,\text{则}$$

$$x(t) = e^{t\mathrm{A}}\vec{r} = \vec{u}(t) + \mathrm{i}\vec{v}(t)$$

为 $x' = \mathrm{A}x$ 的复解,由此得到$x' = \mathrm{A}x$ 的线性无关的实解 $\vec{u}(t), \vec{v}(t)$.

Question.如何计算e^{tA}？

设Λ为A的Jordan标准型, $A = P\Lambda P^{-1}$, 则$A^n = P\Lambda^n P^{-1}$,

$$e^{tA} = I + tP\Lambda P^{-1} + \frac{t^2 P\Lambda^2 P^{-1}}{2!} + \cdots + \frac{t^n P\Lambda^n P^{-1}}{n!} + \cdots$$

$$= P\left(I + t\Lambda + \frac{t^2\Lambda^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n\Lambda^n}{n!} + \cdots \right) P^{-1}$$

$$= Pe^{t\Lambda}P^{-1}.$$

- $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \Rightarrow e^{t\Lambda} = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, \cdots, e^{\lambda_n t})$

- $J=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{pmatrix}_n$, $J^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0\end{pmatrix}_n$

$$J^{n-1}=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1 \\ & 0 & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0\end{pmatrix}_n, \qquad J^n=0,$$

$$\Rightarrow e^{tJ} = \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \dfrac{t^{n-2}}{(n-2)!} & \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \dfrac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + J,$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^{t\Lambda} &= e^{\lambda t I} e^{tJ} \\ &= e^{\lambda t} e^{tJ} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\bullet \Lambda = diag(\Lambda_1, \Lambda_2, \cdots, \Lambda_m),$

$$其中\Lambda_i = \lambda_i I_{k_i} + J_{k_i},\ \ k_1 + \cdots + k_m = n.$$

$$\Rightarrow e^{t\Lambda} = diag(e^{t\Lambda_1}, e^{t\Lambda_2}, \cdots, e^{t\Lambda_m}).$$

例. $$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}3&&&&&\\1&3&&&&\\&1&3&&&\\&&&2&1&\\&&&&2&\\&&&&&1\end{pmatrix},\quad x'=\mathrm{A}x \text{ 的通解为}$$

$$x(t)=e^{t\mathrm{A}}C=\begin{pmatrix}e^{3t}&&&&&\\te^{3t}&e^{3t}&&&&\\\frac{1}{2}t^2e^{3t}&te^{3t}&e^{3t}&&&\\&&&e^{2t}&te^{2t}&\\&&&&e^{2t}&\\&&&&&e^{t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\\c_5\\c_6\end{pmatrix}.$$

5. 常系数齐次线性常微分方程组的特征法.

设常系数齐次线性常微分方程组

$$x' = \mathrm{A}x \qquad (9)$$

(A为$n\times n$矩阵) 有非平凡解形如

$$x(t) = e^{\lambda t}\vec{r},$$

其中$\lambda \in \mathbb{R}, \vec{r} \in \mathbb{R}^n$为常向量, $\vec{r} \neq 0$. 代入方程组(9)得

$$\lambda e^{\lambda t}\vec{r} = \mathrm{A}e^{\lambda t}\vec{r}$$

消去$e^{\lambda t}$得, $$\lambda\vec{r} = \mathrm{A}\vec{r}.$$

因为$\vec{r} \neq 0$,所以λ为矩阵A的特征值, 而$\vec{r}$为A的对应于特征值λ的特征向量.

反之, 若λ为矩阵A的特征值, $\vec{r}$为A的对应于特征值λ的特征向量, 则$x(t)=e^{\lambda t}\vec{r}$是方程组$x'=\mathrm{A}x$的解. 因此, 求解方程组$x'=\mathrm{A}x$, 矩阵A的特征值至关重要.

Def. 称$\det(\lambda I-\mathrm{A})=0$为$x'=\mathrm{A}x$的特征方程, 它的根称为方程组的特征根.

Thm. 若$n\times n$实矩阵A有n个线性无关的实特征向量$\vec{r}_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$, 分别对应于A的(不同或相同的)实特征值$\lambda_k\,(k=1,2,\cdots,n)$. 则$x'=\mathrm{A}x$有基本解组

$$\varphi_k(t)=e^{\lambda_k t}\vec{r}_k,\quad k=1,2,\cdots,n.$$

Proof: $\varphi_k(t)=e^{\lambda_k t}\vec{r}_k(k=1,2,\cdots,n)$是$x'=\mathrm{A}x$的$n$个解,要证它是基本解组,只要证Wronsky行列式

$$\mathrm{W}[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n](t)$$

在$t=0$处不等于0. 因$\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_n$线性无关,有

$$\mathrm{W}[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n](0)=\det(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_n)\neq 0.\square$$

Remark: 设λ是系数矩阵A的重根, 而$\vec{r}_k(k=1,2,\cdots,m)$是与$\lambda$对应的$m$个线性无关的特征向量. 则

$$e^{\lambda t}\vec{r}_k,(k=1,2,\cdots,m)$$

是$x'=\mathrm{A}x$的m个线性无关的解. 这一点与单个齐次线性微分方程的情况有很大区别.

Question. $n\times n$实矩阵A没有n个线性无关的实特征向量, 如何寻找 $x'=\mathrm{A}x$的基本解组?

A为n阶实矩阵,$\lambda_0\in\mathbb{R}$是$\det(\lambda\mathrm{I}-\mathrm{A})=0$的$k$重根,则

$$(\lambda_0\mathrm{I}-\mathrm{A})\vec{r}=0$$

的解集合是$\mathbb{R}^n$的m维子空间,且$m\le k$. 称k为λ_0的代数重数,m为λ_0的几何重数.

$$(\lambda_0\mathrm{I}-\mathrm{A})^k\vec{r}=0$$

的解集合V_{λ_0}是$\mathbb{R}^n$的k维子空间, 称为λ_0的根子空间.

设$\vec{r}\in\mathrm{V}_{\lambda_0}$,令

$$x(t)=e^{\lambda_0 t}\left(\mathrm{I}+t(\mathrm{A}-\lambda_0\mathrm{I})+\cdots+\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}(\mathrm{A}-\lambda_0\mathrm{I})^{k-1}\right)\vec{r},$$

则

$$x'(t)=\lambda_0 e^{\lambda_0 t}\left(\mathrm{I}+t(\mathrm{A}-\lambda_0\mathrm{I})+\cdots+\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}(\mathrm{A}-\lambda_0\mathrm{I})^{k-1}\right)\vec{r}$$

$$+e^{\lambda_0 t}\left((\mathrm{A}-\lambda_0\mathrm{I})+t(\mathrm{A}-\lambda_0\mathrm{I})^2\cdots+\frac{t^{k-2}}{(k-2)!}(\mathrm{A}-\lambda_0\mathrm{I})^{k-1}\right)\vec{r}$$

$$+e^{\lambda_0 t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}(\mathrm{A}-\lambda_0\mathrm{I})^{k}\vec{r}\quad=\mathrm{A}x(t).$$

Thm. 若$n\times n$实矩阵A有m个相异实特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，其重数分别为$k_1,k_2,\cdots,k_m$，且$k_1+k_2+\cdots+k_m=n$.记$V_j$为$\lambda_j$的根子空间$\left(\text{即}(\lambda_j I-A)^{k_j}\vec{r}=0\text{的解空间}\right)$，则

$$\mathbb{R}^n=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_m.$$

设$\vec{r}_{j,1},\vec{r}_{j,2},\ldots,\vec{r}_{j,k_j}$，$V_j$的一组基$(j=1,2,\cdots,m)$，则

$$\varphi_{j,i}=e^{\lambda_j t}\left(I+t(A-\lambda_j I)+\cdots+\frac{t^{k_j-1}}{(k_j-1)!}(A-\lambda_j I)^{k_j-1}\right)\vec{r}_{j,i}$$

$$(j=1,2,\cdots,m;\quad i=1,2,\cdots,k_j)$$

为$x'(t)=Ax(t)$的一个基本解组.

Remark: 若$\lambda_{\pm}=\alpha\pm \mathrm{i}\beta$是实系数矩阵A的一对共轭复根,

$\vec{r}_{\pm}=\vec{r}_1\pm \mathrm{i}\,\vec{r}_2$是对应的特征向量(这里$\vec{r}_1,\vec{r}_2$为实向量),则

$$e^{\lambda_+ t}\vec{r}_+=e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t}(\vec{r}_1+\mathrm{i}\vec{r}_2)$$

$$=e^{\alpha t}(\vec{r}_1\cos\beta t-\vec{r}_2\sin\beta t)+\mathrm{i}e^{\alpha t}(\vec{r}_1\sin\beta t+\vec{r}_2\cos\beta t),$$

$$e^{\lambda_- t}\vec{r}_-=e^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)t}(\vec{r}_1-\mathrm{i}\vec{r}_2)$$

$$=e^{\alpha t}(\vec{r}_1\cos\beta t-\vec{r}_2\sin\beta t)-\mathrm{i}e^{\alpha t}(\vec{r}_1\sin\beta t+\vec{r}_2\cos\beta t)$$

是方程组(9)的两个线性无关的复解. 由解的叠加原理,

$$\mathrm{Re}(e^{\lambda_+ t}\vec{r}_+)=e^{\alpha t}(\vec{r}_1\cos\beta t-\vec{r}_2\sin\beta t),$$

$$\mathrm{Im}(e^{\lambda_+ t}\vec{r}_+)=e^{\alpha t}(\vec{r}_1\sin\beta t+\vec{r}_2\cos\beta t)$$

是方程(9)的两个线性无关的实解.□

例: 求解$x' = \mathrm{A}x$, 其中$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

解: A有复特征根$\lambda_{\pm} = 3 \pm 5i$. 对应的特征向量$\vec{r}_{\pm} = (1, \pm i)^{\mathrm{T}}$.

$$e^{\lambda_+ t}\vec{r}_+ = e^{(3+5\mathrm{i})t}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^{3t}(\cos 5t + \mathrm{i}\sin 5t)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$= e^{3t}\begin{pmatrix} \cos 5t \\ -\sin 5t \end{pmatrix} + \mathrm{i}e^{3t}\begin{pmatrix} \sin 5t \\ \cos 5t \end{pmatrix}$$

通解为$x(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} c_1\cos 5t + c_2\sin 5t \\ -c_1\sin 5t + c_2\cos 5t \end{pmatrix}$.□

例：求微分方程组$\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = z + x, \\ z' = x + y, \end{cases}$满足初值条件$x(0)=1,$ $y(0)=0, z(0)=5$的特解.

解：方程组的系数矩阵为$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. A有特征值$\lambda_1$ $=2,\ \lambda_2=-1$(二重). 与λ_1对应的特征向量为$\vec{r}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},$ 与λ_2对应的两个线性无关的特征向量为$\vec{r}_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}},$ $\vec{r}_3=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}$. 因此方程组的通解为

$$\varphi(t)=c_1e^{2t}\vec{r}_1+c_2e^{-t}\vec{r}_2+c_3e^{-t}\vec{r}_3.$$

解满足初值条件$\varphi(0)=(1,0,5)^{\mathrm{T}}$,则

$$c_1\vec{r}_1+c_2\vec{r}_2+c_3\vec{r}_3=(1,0,5)^{\mathrm{T}}.$$

即 $$(c_1+c_2,c_1+c_3,c_1-c_2-c_3)^{\mathrm{T}}=(1,0,5)^{\mathrm{T}}.$$

解得 $$c_1=2,c_2=-1,c_3=-2.$$

所求特解为$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2e^{2t}-e^{-t} \\ 2e^{2t}-2e^{-t} \\ 2e^{2t}+3e^{-t} \end{pmatrix}$.□

除了特征法,求解线性常微分方程组还常用消元法.下面举例说明.

例:求解微分方程组$\begin{cases} x'(t) = -3x - y, \\ y'(t) = x - y. \end{cases}$

解:由第一个方程得 $y = -3x - x'.$

两边对 t 求导得 $y' = -3x' - x''.$

上面两式代入方程组的第二个方程得 $x'' + 4x' + 4x = 0.$

$\lambda = -2$ 为特征方程为 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ 的 2 重根,因而

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t},\ y = -3x - x' = -(c_1 + c_2 + c_2 t)e^{-2t}.$$

原方程组通解为$\begin{cases} x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t} \\ y(t) = -(c_1 + c_2 + c_2 t)e^{-2t} \end{cases}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ □

6. 以方程组的观点看n阶线性ODE

记$y_1 = x, y_2 = x', \cdots, y_n = x^{(n-1)}$,则$n$阶线性方程

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0 \qquad (4)$$

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t) \qquad (5)$$

可以化为

$$y' = \mathrm{A}(t)y \qquad (6)$$

$$y' = \mathrm{A}(t)y + g(t). \qquad (7)$$

其中 $\mathrm{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots & -a_1(t) \end{pmatrix}$,

$$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}, \quad g(t) = (0, 0, \cdots 0, f(t))^{\mathrm{T}}.$$

Remark: 若$A(t)=A$为常系数矩阵时,

$$\det(\lambda I-A)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n.$$

也就是说$\det(\lambda I-A)=0$就是原n阶常系数线性ODE

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+a_2x^{(n-2)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=0$$

的特征方程.

Remark: $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$是(4)的解空间的一组基

$$\Leftrightarrow \Phi(t)=\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \cdots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$是(6)的基解矩阵.

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x=0 \qquad (4)$$

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x=f(t) \qquad (5)$$

Thm. 设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 是齐次方程(4)在区间I上的一组基,则非齐次方程(5)的通解为

$$x(t)=c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_n\varphi_n(t)+x_0(t),$$

其中$c_1,c_2,\cdots,c_n$为任意常数,而

$$x_0(t)=\sum_{k=1}^{n}\left[\varphi_k(t)\cdot\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{W}_k(s)}{\mathrm{W}(s)}f(s)\mathrm{d}s\right]$$

是(5)的一个特解.这里,W(s)为$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$的Wronsky行列式,$\mathrm{W}_k(s)$是W($s$)的第$n$行第$k$列元素的代数余子式.

Proof:令$y_1 = x, y_2 = x', \cdots, y_n = x^{(n-1)}$,则(4) $\Leftrightarrow$ $y' = \mathrm{A}(t)y$,
(5) $\Leftrightarrow y' = \mathrm{A}(t)y + g(t)$. $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$为(4)的基本解组,则

$$\Phi(t) \triangleq \begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

是$y' = \mathrm{A}(t)y$的基本解矩阵. $y' = \mathrm{A}(t)y + g(t)$的通解为

$$y(t) = \Phi(t)c + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)g(s)\mathrm{d}s,$$

其中$c \in \mathbb{R}^n$为任意常向量. 上式中取第一个分量, 得

$$x(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t) + x_0(t),$$

其中$c_1, c_2, \cdots, c_n$为任意常数, $x_0(t)$为

$$\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)g(s)\mathrm{d}s$$

$$=\int_{t_0}^{t}\frac{\Phi(t)}{\mathrm{W}(s)}\begin{pmatrix} * & \cdots & * & \mathrm{W}_1(s) \\ * & \cdots & * & \mathrm{W}_2(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & \mathrm{W}_n(s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(s) \end{pmatrix}\mathrm{d}s$$

$$=\int_{t_0}^{t}\frac{\Phi(t)}{\mathrm{W}(s)}(\mathrm{W}_1(s),\mathrm{W}_2(s),\cdots,\mathrm{W}_n(s))^{\mathrm{T}}f(s)\mathrm{d}s$$

的第一个分量, 即

$$x_0(t)=\sum_{k=1}^{n}\left[\varphi_k(t)\cdot\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{W}_k(s)}{\mathrm{W}(s)}f(s)\mathrm{d}s\right].\square$$

Remark: 令$y_1 = x, y_2 = x', \cdots, y_n = x^{(n-1)}$, 化$n$次微分方程(4)(5)为方程组(6)(7).设$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$为(4)的基本解组, 则

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \cdots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

是方程组(6)的基本解矩阵.而(7)的通解必定形如

$$y(t) = \Phi(t)u(t),$$

其中$u(t) = (u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t))^{\mathrm{T}}$.代入方程组(7)得:

$$\Phi(t)u'(t) = g(t).$$

将上式按分量写出来, 即

$$\begin{cases} \varphi_1 u_1' + \varphi_2 u_2' + \cdots + \varphi_n u_n' \equiv 0, \\ \varphi_1' u_1' + \varphi_2' u_2' + \cdots + \varphi_n' u_n' \equiv 0, \\ \qquad\qquad \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)} u_1' + \varphi_2^{(n-2)} u_2' + \cdots + \varphi_n^{(n-2)} u_n' \equiv 0, \\ \varphi_1^{(n-1)} u_1' + \varphi_2^{(n-1)} u_2' + \cdots + \varphi_n^{(n-1)} u_n' \equiv f. \end{cases} \tag{8}$$

用常数变易法解高阶非齐次线性方程(5)时, 设(5)有解

$$x(t) = u_1(t)\varphi_1(t) + u_2(t)\varphi_2(t) + \cdots + u_n(t)\varphi_n(t),$$

其中$u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t)$待定, 且满足方程组(8). 由(8)中$n$个方程就可以确定$n$个未知函数$u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t)$, 从而求出非齐次方程(5)的通解.□

回忆第二节中用常数变易法求二阶非齐次方程时曾假设非齐次方程的通解

$$x(t)=c_1(t)x_1(t)+c_2(t)x_2(t),$$

满足条件

$$c_1'(t)x_1(t)+c_2'(t)x_2(t)\equiv 0.$$

上面的分析说明, 这一假设条件是必要的.