参考样题二简答

1

1. 解：$Ax=x \Rightarrow (A-I_3)x=0$

$$A-I_3=\begin{bmatrix}-2&-2&-6\\-2&0&-4\\2&1&5\end{bmatrix}，\quad 解的集合为\ k\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}。$$

（其中 k 为任意常数）.

2. 解. (1). 用高斯-若当消去法得到

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}-1&6&4\\1&-5&-3\\1&-4&-3\end{bmatrix} \quad (计算即为证明)$$

(2) $$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

(3). $$A^5=T(T^{-1}AT)^5T^{-1}=T\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^5\cdot T^{-1}=A$$

[或观察到 $(T^{-1}AT)^2=I \Rightarrow A^2=I$，$A^5=A$].

3. 解. 增广矩阵为 $\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\2&3&\lambda+2&3\\1&\lambda&-2&0\end{array}\right]$.

$$\to\cdots\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&2&1&1\\0&1&\lambda+1&1\\0&0&(\lambda-3)(\lambda+1)&\lambda-3\end{array}\right]$$

$\lambda=-1$ 时无解，$\lambda=3$ 时有无穷多解，$\lambda\neq-1,3$ 时唯一解。

4. 解：分别用(1)，(3) 向量减 $\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$，得 $\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$

2

这2个向量是 A 的零空间 $N(A)$ 中2个线性无关的向量.

所以 $\text{rank}(A) \le 4-2=2$，即 $\text{rank}(A)$ 或者为1，或者为2.

~~当 rank(A) = 2 时，将~~ $\cancel{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}}$ ~~代入 AX=0，得~~

$$\cancel{\begin{cases}a_{11}=a_{12}\\ a_{13}=-a_{14}\\ a_{33}=-a_{34}\end{cases}}$$

当 $\text{rank}(A)=1$ 时，$a_{13}, a_{14}, a_{33}, a_{34}$ 均 ~~a_{13} 与 a_{33} 一个为0，一个不~~ 为零.

可得一个与 $\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$ 无关的由 $AX=0$ 的解 $\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

此时 $AX=b$ 全部解为 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

解答不唯一

当 $\text{rank}(A)=2$ 时，$AX=b$ 的全部解为 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$，

5. (1). $\begin{bmatrix}1&0&8&0&0&0\\0&1&0&0&0&2020\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&11\end{bmatrix}$

(解答不唯一)

(2). $\text{rank}(A)=4$，列空间维数为4，A 的 1, 2, 4, 5 列是一组基.

(3) 行空间维数为4，A 的4个行向量构成为它的一组基.

(4) ~~ko~~ A 的零空间维数为 2. 取 x_3, x_6 为自由变量

$N(A)$ 的一组基为 $\begin{bmatrix}-8\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-2020\\0\\0\\-11\\1\end{bmatrix}$.

3

(5) B 的行空间维数仍为 4, 其 4 个行向量为一组基.

~~(6)~~ 零空间维数为 $7-4=3$, $N(B)$ 的一组基为 $\begin{bmatrix}-8\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-2020\\0\\0\\0\\-11\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$,

(6). C 的列空间维数为 4, 其 1,2,4,5 列为一组基.

C 的零空间维数为 2, $N(A)$ 的基即为 $N(C)$ 的基.

6. (1) 错. 因为 $\dim N(A) + \dim R(A) = 7$.

(2) 错. 因为 $\text{rank}(A) \leq 2$. 所以 $\dim N(A) = 5-\text{rank}(A) \geq 3$.

(3) 错. 例如 所有可逆的非对称矩阵 以及反对称矩阵等.

7. 解. (1) $\left[\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right] \cdot \frac{1}{4} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.

$\left[\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} - 5\cdot\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\right] \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$A_1 = \begin{bmatrix}\frac{b_1+a_1}{2} & \frac{b_1-a_1}{2}\\ \frac{b_1-a_1}{2} & \frac{b_1+a_1}{2}\end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix}\frac{b_2+a_2}{2} & \frac{b_2-a_2}{2}\\ \frac{b_2-a_2}{2} & \frac{b_2+a_2}{2}\end{bmatrix}$

所以 $A_1A_2 = A_2A_1 = \begin{bmatrix} \frac{b_1b_2+a_1a_2}{2} & \frac{b_1b_2-a_1a_2}{2} \\ \frac{b_1b_2-a_1a_2}{2} & \frac{b_1b_2+a_1a_2}{2} \end{bmatrix}$

4

(2) 直接计算.

或. $A_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\\b_1\end{bmatrix}$ $\quad A_1\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_1\\-a_1\end{bmatrix}$

$$A_1\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1 & a_1\\b_1 & -a_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1 & 0\\0 & a_1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1 & 0\\0 & a_1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}^{-1}\left(A_1^2-(a_1+b_1)A_1+a_1b_1I_2\right)\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}b_1^2 & \\ & a_1^2\end{bmatrix} - (a_1+b_1)\begin{bmatrix}b_1 & \\ & a_1\end{bmatrix} + a_1b_1\begin{bmatrix}1 & \\ & 1\end{bmatrix} = 0$$

同理得到 A_2 的结果.

8. (1). $A = \begin{bmatrix}1 & & \\ 2 & 1 & \\ 0 & -1/3 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -3 & -3\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$

LU分解 按照 U的第1行, L的第1列

U的第2行, L的第2列 …… 顺序计算

5

(2) L 和 U 都是可逆的.

所以 A 可逆.

$$\begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ -B_2A^{-1} & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \varepsilon B_1 \\ B_2 & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \varepsilon B_1 \\ 0 & C-\varepsilon B_2A^{-1}B_1 \end{bmatrix}$$

$X_\varepsilon = \begin{bmatrix} A & \varepsilon B_1 \\ B_2 & C \end{bmatrix}$ 可逆 $\Leftrightarrow$ $C-\varepsilon B_2A^{-1}B_1$ 可逆.

因为 C 是严格对角占优. 所以只要 ε 充分小, 即可使 $C-\varepsilon B_2A^{-1}B_1$ 也为严格对角占优. 即可逆.

记 $B_2A^{-1}B_1 = M = [m_{ij}]_{n\times n}$, $C=[c_{ij}]_{n\times n}$

要满足. $|c_{ii}-\varepsilon m_{ii}| > \sum_{j\neq i} |c_{ij}-\varepsilon m_{ij}|$, $\forall i=1,\cdots,n$.

$|c_{ii}-\varepsilon m_{ii}| \geq |c_{ii}| - \varepsilon |m_{ii}|$, $\sum_{j\neq i} |c_{ij}-\varepsilon m_{ij}| \leq \sum_{j\neq i}(|c_{ij}|+\varepsilon|m_{ij}|)$

所以只要. $|c_{ii}|-\varepsilon|m_{ii}| > \sum_{j\neq i}(|c_{ij}|+\varepsilon|m_{ij}|)$

即. $\left(\sum_{j=1}^{n}|m_{ij}|\right)\cdot\varepsilon < |c_{ii}| - \sum_{j\neq i}|c_{ij}|$, $\forall i=1,\cdots,n$

取. $\varepsilon_0 = \dfrac{\min\limits_{i=1,\cdots,n}\left(|c_{ii}|-\sum_{j\neq i}|c_{ij}|\right)}{1+\max\limits_{i=1,\cdots,n}\sum_{j=1}^{n}|m_{ij}|}$. 则对任意 $\varepsilon<\varepsilon_0$

X_ε 均可逆。