线性代数 第17讲

11月8日

第四章第1讲　　行列式函数

期中考试总体情况和第三章内容回顾

行列式函数

行列式的一些运算性质

行列式的几何意义

期中考试总体情况

- 共125人参加考试
- 95分（含）以上：25人；
- 90~94分：29人，累计54人；
- 80~89分：45人，累计91人；
- 70~79分：25人，累计116人；
- 低于70分：9人。

以上为初步批阅成绩，最终的成绩尚待校对，本周内会上传网络学堂，单独作为一次作业登入分数。

内积

定义3.1.2(内积)　定义 R^n 上的两个向量 a,b 的内积为实数 $a^T b$,

即如果 $a=\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, 则 a,b 的内积为 $a_1 b_1+\cdots+a_n b_n$.

命题 3.1.3　向量内积满足如下性质:

1. **对称性**: $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$;
2. **双线性性**: $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(k_1\boldsymbol{b}_1+k_2\boldsymbol{b}_2)=k_1\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1+k_2\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2, (k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=k_1\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}+k_2\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$;
3. **正定性**: $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}\geqslant 0$, 且 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

向量 $a=\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ 的长度定义为: $\|a\|=\sqrt{a^T a}=\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}$,

$\|a-b\|$ 称为向量 a,b 间的距离。

向量的夹角与正交

$|a^Tb| \le \|a\| \cdot \|b\|$, 等号成立当且仅当 a,b 线性相关(或是说共线)。

根据Cauchy-Schwarz不等式, $|a^Tb| \le \|a\| \cdot \|b\|$, 对于非零向量 a,b, $\left|\dfrac{a^Tb}{\|a\| \cdot \|b\|}\right| \le 1$,

定义非零向量 a,b 的夹角为 $\arccos\dfrac{a^Tb}{\|a\| \cdot \|b\|}$.

如果向量 a,b 满足 $a^Tb = 0$, 称二者正交或垂直, 记为 $a \perp b$. 零向量与任何向量都正交。

定义 3.1.8 (正交向量组) 设 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的向量组，如果这些向量都非零且两两正交，则称该向量组为**正交向量组**. 特别地，如果正交向量组中的向量都是单位向量，则称其为**正交单位向量组**.

命题 3.1.9 正交向量组线性无关.

定义 3.1.10 (标准正交基) 设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，如果它的一组基是正交向量组，则称之为 $\mathcal{M}$ 的一组**正交基**；如果它的一组基是正交单位向量组，则称之为 $\mathcal{M}$ 的一组**标准正交基**.

Gram-Schmidt 正交化

将任意一组基改造为标准正交基

设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，从 $\mathcal{M}$ 的任意一组基 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 出发，

$$\tilde{\boldsymbol{q}}_1 = \boldsymbol{a}_1,$$

$$\tilde{\boldsymbol{q}}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}_2}{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{q}}_1} \tilde{\boldsymbol{q}}_1,$$

$$\tilde{\boldsymbol{q}}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}_3}{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{q}}_1} \tilde{\boldsymbol{q}}_1 - \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_2^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}_3}{\tilde{\boldsymbol{q}}_2^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{q}}_2} \tilde{\boldsymbol{q}}_2,$$

$$\vdots$$

$$\tilde{\boldsymbol{q}}_r = \boldsymbol{a}_r - \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}_r}{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{q}}_1} \tilde{\boldsymbol{q}}_1 - \cdots - \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_{r-1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{a}_r}{\tilde{\boldsymbol{q}}_{r-1}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{q}}_{r-1}} \tilde{\boldsymbol{q}}_{r-1}.$$

为了得到标准正交基，只要再把正交基中的每个向量都单位化即可：$\boldsymbol{q}_i = \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_i}{\|\tilde{\boldsymbol{q}}_i\|}$.

$\mathbb{R}^n$中的三角形，正交投影

在 $\mathbb{R}^n$ 中的三角形的三条边能写成向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，两边（长度）之和大于第三边（长度）.

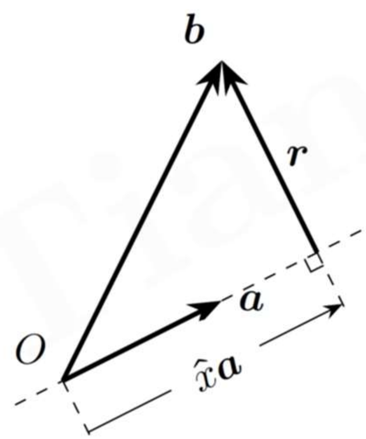


图 3.1.1: 平面向量的逼近

推论 3.1.5 (三角不等式) $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leqslant \|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|$，等号成立当且仅当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线.

定理 3.1.6 (勾股定理) 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 正交，则 $\|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}\|^2=\|\boldsymbol{a}\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2$.

证. 根据定义，$\|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}\|^2=(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}\pm 2\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2$. □

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in \boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{a}\neq \boldsymbol{0}$，则有 $\boldsymbol{b}=\dfrac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}+\left(\boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}\right)$

$\boldsymbol{a}^T\left(\boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}\right)=\boldsymbol{0}$，$\dfrac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}$ 称为向量 $\boldsymbol{b}$ 向直线 $\mathrm{span}(\boldsymbol{a})$ 的正交投影。

命题 3.1.7 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个向量，$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\left\|\boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}\right\|=\min\limits_{x\in\mathbb{R}}\|\boldsymbol{b}-x\boldsymbol{a}\|$.

正交矩阵

设 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 是 R^n 的一组标准正交基，记 n 阶方阵 $Q=\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix}$,

则 $$Q^TQ=\begin{bmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_1^Tq_1 & q_1^Tq_2 & \cdots & q_1^Tq_n \\ q_2^Tq_1 & q_2^Tq_2 & \cdots & q_2^Tq_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n^Tq_1 & q_n^Tq_2 & \cdots & q_n^Tq_n \end{bmatrix}=I_n.$$

定义3.2.1(正交矩阵) 一个 n 阶方阵 Q 如果满足 $Q^TQ=I_n$.则称 Q 是 n 阶正交矩阵。

命题 3.2.3 两个 n 阶正交矩阵的乘积还是 n 阶正交矩阵.

命题 3.2.4 对 n 阶方阵 Q，以下叙述等价:

1. Q 是正交矩阵，即 $Q^{\mathrm{T}}Q=I_n$;
2. Q 为保距变换，即，对任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，$\|Q\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{x}\|$;
3. Q 为保内积变换，即，对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$，$Q\boldsymbol{x}$ 与 $Q\boldsymbol{y}$ 的内积等于 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的内积.

QR分解

设 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，Gram-Schmidt 正交化的计算过程分为两步，

第一步正交化，得到一组正交基

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_1 &= \boldsymbol{a}_1,\\
\tilde{q}_2 &= \boldsymbol{a}_2 - \frac{\tilde{q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2}{\tilde{q}_1^{\mathrm{T}}\tilde{q}_1}\tilde{q}_1,\\
\tilde{q}_3 &= \boldsymbol{a}_3 - \frac{\tilde{q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_3}{\tilde{q}_1^{\mathrm{T}}\tilde{q}_1}\tilde{q}_1 - \frac{\tilde{q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_3}{\tilde{q}_2^{\mathrm{T}}\tilde{q}_2}\tilde{q}_2,\\
&\ \vdots\\
\tilde{q}_n &= \boldsymbol{a}_n - \frac{\tilde{q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_n}{\tilde{q}_1^{\mathrm{T}}\tilde{q}_1}\tilde{q}_1 - \cdots - \frac{\tilde{q}_{n-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_n}{\tilde{q}_{n-1}^{\mathrm{T}}\tilde{q}_{n-1}}\tilde{q}_{n-1}.
\end{aligned}$$

设 $A = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}, \widetilde{Q} = \begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{q}}_1 & \cdots & \tilde{\boldsymbol{q}}_n\end{bmatrix}$

$$A = \widetilde{Q}\widetilde{R},\quad \widetilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\tilde{q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2}{\tilde{q}_1^{\mathrm{T}}\tilde{q}_1} & \cdots & \frac{\tilde{q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_n}{\tilde{q}_1^{\mathrm{T}}\tilde{q}_1} \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{\tilde{q}_{n-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_n}{\tilde{q}_{n-1}^{\mathrm{T}}\tilde{q}_{n-1}} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

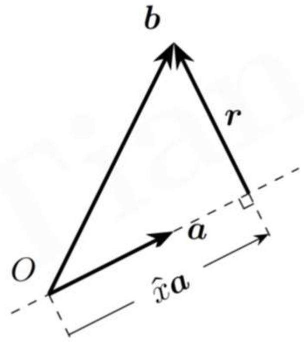
第二步再单位化每个向量，得到标准正交基：$\boldsymbol{q}_i = \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_i}{\|\tilde{\boldsymbol{q}}_i\|}$.

$$A = Q\,\mathrm{diag}(\|\tilde{\boldsymbol{q}}_i\|)\widetilde{R} = QR$$

定理 3.2.7 (可逆矩阵的 QR 分解)　设 A 是 n 阶可逆矩阵，则存在唯一的分解 $A = QR$，其中 Q 是正交矩阵，R 是对角元都是正数的上三角矩阵.

例 3.3.1 考虑方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，其中 $A=\begin{bmatrix}1&1\\2&1\\1&3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\3\\5\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$. 简单计算可知方程组无解. 那么，如何找到 $\widehat{\boldsymbol{x}}\in\mathbb{R}^2$，满足

$$\|\boldsymbol{b}-A\widehat{\boldsymbol{x}}\|=\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2}\|\boldsymbol{b}-A\boldsymbol{x}\|?$$



$$\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}+\left(\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}\right)$$

三维空间中的正交投影

设 $\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2$ 是 $span(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$ 的一组标准正交基，
则 $\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{b})\boldsymbol{q}_1+(\boldsymbol{q}_2^T\boldsymbol{b})\boldsymbol{q}_2+\boldsymbol{r}$

对 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 做 Gram-Schmidt 正交化，则得到 $\mathscr{R}(A)$ 的一组标准正交基 $\boldsymbol{q}_1$，$\boldsymbol{q}_2$

$$A=[\boldsymbol{a}_1\quad\boldsymbol{a}_2]=[\boldsymbol{q}_1\quad\boldsymbol{q}_2]\boldsymbol{R}\quad\Rightarrow\quad[\boldsymbol{q}_1\quad\boldsymbol{q}_2]=A\boldsymbol{R}^{-1}$$

$$\boldsymbol{b}=[\boldsymbol{q}_1\quad\boldsymbol{q}_2]\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{q}_2^T\boldsymbol{b}\end{bmatrix}+\boldsymbol{r}=A\boldsymbol{R}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{q}_2^T\boldsymbol{b}\end{bmatrix}+\boldsymbol{r}=A\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{r},$$

设 $\hat{\boldsymbol{y}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{q}_2^T\boldsymbol{b}\end{bmatrix}=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{b}$，$\quad\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{R}^{-1}\hat{\boldsymbol{y}}$

例 3.3.1 考虑方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，其中 $A=\begin{bmatrix}1&1\\2&1\\1&3\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\3\\5\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}^2$，简单计算可知方程组无解．那么，如何找到 $\hat{\boldsymbol{x}}\in \boldsymbol{R}^2$，满足 $\|\boldsymbol{b}-A\hat{\boldsymbol{x}}\|=\min\limits_{x\in R^2}\|\boldsymbol{b}-A\boldsymbol{x}\|$？

设 q_1,q_2 是 $span(a_1,a_2)$ 的一组标准正交基，

则 $b=(q_1^Tb)q_1+(q_2^Tb)q_2+r$

$A=[a_1\quad a_2]=[q_1\quad q_2]R \Rightarrow [q_1\quad q_2]=AR^{-1}$

$$b=[q_1\quad q_2]\begin{bmatrix}q_1^Tb\\q_2^Tb\end{bmatrix}+r=AR^{-1}Q^Tb+r$$

$$=AR^{-1}Q^Tb+r=A\hat{x}+r$$

首先计算正交向量组 $\tilde{q}_1,\tilde{q}_2$：
$$\tilde{q}_1=\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\quad \tilde{q}_2=\boldsymbol{a}_2-\frac{\tilde{q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2}{\tilde{q}_1^{\mathrm{T}}\tilde{q}_1}\tilde{q}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}-\frac{6}{6}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{q}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix}.$$

$$A=[\tilde{q}_1\quad \tilde{q}_2]\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=[q_1\quad q_2]\begin{bmatrix}\sqrt{6}&0\\0&\sqrt{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&0\\\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix},\quad R=\begin{bmatrix}\sqrt{6}&\\&\sqrt{5}\end{bmatrix}\widetilde{R}=\begin{bmatrix}\sqrt{6}&\sqrt{6}\\0&\sqrt{5}\end{bmatrix}.\quad R^{-1}=\widetilde{R}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\\&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\\&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{5}}\\0&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}=Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}\frac{11}{\sqrt{6}}\\\frac{7}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}, \hat{\boldsymbol{x}}=R^{-1}\hat{\boldsymbol{y}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{5}}\\0&\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{11}{\sqrt{6}}\\\frac{7}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{13}{30}\\\frac{7}{5}\end{bmatrix}.$$

因此，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{b}-A\hat{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-\frac{11}{6}\\\frac{11}{15}\\\frac{11}{30}\end{bmatrix}$，最小距离 $\|\boldsymbol{r}\|=\frac{11}{\sqrt{30}}$.

下面，将正交投影的概念推广到任意子空间上。

子空间的正交补空间

命题3.3.2 如果 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 都正交，则$\boldsymbol{b}$ 与子空间 $span(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s)$ 中的任意向量都正交.

在 $\mathbb{R}^3$ 中，命题3.3.2 的几何描述，就是

向量垂直于某个平面当且仅当它垂直于平面内两条相交直线.

齐次方程组 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的任意解向量 $\boldsymbol{x}$ 与矩阵 A 的所有行向量都正交.

因此，零空间 $\mathcal{N}(A)$ 中的任意向量和行空间 $\mathcal{R}(A^{\mathrm{T}})$ 中的任意向量都正交.

定义 3.3.3 (子空间正交) 给定 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$，如果 $\mathcal{M}$ 中任意向量和 $\mathcal{N}$ 中任意向量都正交，则称 $\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{N}$ **正交**，记为 $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$.

特别地，如果 $\mathrm{span}(\boldsymbol{a}) \perp \mathcal{M}$，则简称向量 $\boldsymbol{a}$ 与子空间 $\mathcal{M}$ 正交，记为 $\boldsymbol{a} \perp \mathcal{M}$.

定义 3.3.4 (正交补) 给定 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 $\mathcal{M}$，则 $\mathbb{R}^n$ 的子集 $\mathcal{M}^{\perp} := \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{a} \perp \mathcal{M}\}$，称为 $\mathcal{M}$ 的**正交补**.

命题 3.3.6 如果 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，则其正交补 $\mathcal{M}^{\perp}$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

命题 3.3.7 对 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 $\mathcal{M}$，有

1. $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp = \{\mathbf{0}\}$;
2. $\dim \mathcal{M}^\perp = n - \dim \mathcal{M}$;
3. $(\mathcal{M}^\perp)^\perp = \mathcal{M}$;
4. 对任意 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$，都存在唯一的分解 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$，使得 $\boldsymbol{a}_1 \in \mathcal{M}, \boldsymbol{a}_2 \in \mathcal{M}^\perp$.

定理 3.3.8 给定 $m \times n$ 矩阵 A，则

1. $\mathcal{R}(A^\mathrm{T})^\perp = \mathcal{N}(A), \mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^\mathrm{T})$;
2. $\mathcal{R}(A^\mathrm{T}A) = \mathcal{R}(A^\mathrm{T}), \mathcal{N}(A^\mathrm{T}A) = \mathcal{N}(A)$;
3. $\mathcal{R}(AA^\mathrm{T}) = \mathcal{R}(A), \mathcal{N}(AA^\mathrm{T}) = \mathcal{N}(A^\mathrm{T})$.

正交投影

给定 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 $\mathcal{M}$，根据命题 3.3.7 可知，对任意 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$，都有**唯一的**分解

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$，其中 $\boldsymbol{a}_1 \in \mathcal{M}, \boldsymbol{a}_2 \in \mathcal{M}^{\perp}$.

定义 $\mathbb{R}^n$ 上的一个变换 $\boldsymbol{P}_{\mathcal{M}} : \boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{a}_1$,

它是线性变换：如果 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 分别有分解 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$,

则 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1) + (\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2)$ 是 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ 唯一的分解,

因此 $\boldsymbol{P}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{P}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{P}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{b})$;

$\boldsymbol{P}_{\mathcal{M}}(k\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{P}_{\mathcal{M}}(k\boldsymbol{a}_1 + k\boldsymbol{a}_2) = k\boldsymbol{a}_1 = k\boldsymbol{P}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{a})$.

定义 3.3.10 给定 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 $\mathcal{M}$，线性变换 $\boldsymbol{P}_{\mathcal{M}}$ 称为子空间 $\mathcal{M}$ 上的**正交投影（变换）**，而 $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{P}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{a})$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\mathcal{M}$ 上的**正交投影**.

正交投影

定义3.3.10 给定 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 $\mathcal{M}$，对任意 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$

都有唯一的分解 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$，其中 $\boldsymbol{a}_1 \in \mathcal{M}, \boldsymbol{a}_2 \in \mathcal{M}^\perp$.

线性变换$\boldsymbol{P}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}_1$称为子空间 $\mathcal{M}$ 上的**正交投影（变换）**，

而 $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{P}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{a})$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\mathcal{M}$ 上的**正交投影**.

特别地，$\boldsymbol{a} \in \mathcal{M}$ 当且仅当 $\boldsymbol{P}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$，而 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{M}^\perp$ 当且仅当 $\boldsymbol{P}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$.

线性变换 $\boldsymbol{P}_{\mathcal{M}^\perp}: \boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{a}_2$ 是 $\mathcal{M}^\perp$ 上的**正交投影（变换）**，

而 $\boldsymbol{a}_2$ 是 $\boldsymbol{a}$ 在 $\mathcal{M}^\perp$ 上的正交投影.

注意，$\boldsymbol{a}_1 \perp \boldsymbol{a}_2$，因此一个向量在一个子空间上的正交投影，

与其在该子空间的正交补上的投影总正交，这就是这种变换称为正交投影的原因.

显然 $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{P}_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{P}_{\mathcal{M}^\perp}$.

命题 3.3.12 给定 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 $\mathcal{M}$ 和向量 $\boldsymbol{a}$，而 $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{P}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{a})$ 为 $\boldsymbol{a}$ 在 $\mathcal{M}$ 上的正交投影，则 $\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_1\| = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}} \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}\|$.

如何计算正交投影

设 $\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_r$ 是 $\mathcal{M}$ 的一组标准正交基.

将其扩充成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_r, \boldsymbol{q}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{q}_n$.

对任意 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{q}_1^\top \boldsymbol{a})\boldsymbol{q}_1 + \cdots + (\boldsymbol{q}_r^\top \boldsymbol{a})\boldsymbol{q}_r + (\boldsymbol{q}_{r+1}^\top \boldsymbol{a})\boldsymbol{q}_{r+1} + \cdots + (\boldsymbol{q}_n^\top \boldsymbol{a})\boldsymbol{q}_n$

则 $\boldsymbol{P}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{q}_1^\top \boldsymbol{a})\boldsymbol{q}_1 + \cdots + (\boldsymbol{q}_r^\top \boldsymbol{a})\boldsymbol{q}_r$.

令 $Q_r = [\boldsymbol{q}_1 \cdots \boldsymbol{q}_r]$，于是 $\boldsymbol{P}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_1^\top \boldsymbol{a} + \cdots + \boldsymbol{q}_r\boldsymbol{q}_r^\top \boldsymbol{a} = Q_r Q_r^\top \boldsymbol{a}$.

因此正交投影$\boldsymbol{P}_{\mathcal{M}}$ 的表示矩阵就是 $Q_r Q_r^\top$，记为$P_{\mathcal{M}}$.

注意，表示矩阵 $P_{\mathcal{M}}$ 与 $\mathcal{M}$ 的正交基和 Q_r 的选取无关（为什么？）.

因此正交投影$\boldsymbol{P}_{\mathcal{M}}$的表示矩阵就是 $Q_r Q_r^{\mathrm{T}}$，记为$P_{\mathcal{M}}$

下面讨论 $\mathcal{M} = \mathcal{R}(A)$ 的情形，此时 $\mathcal{R}(A)^{\perp} = \mathcal{N}(A^{\mathrm{T}})$.

定义3.3.13 给定矩阵 A，其列空间上的正交投影的表示矩阵 $P_{\mathcal{R}(A)}$，称为关于 A 的正交投影矩阵，简记为 P_A.

当 A 是可逆方阵时，$\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^n$，此时正交投影就是恒同变换，因此 $P_A = I_n$.

如果 P 是关于 A 的正交投影矩阵，则 $P = P_{\mathcal{R}(A)}$，

例 3.3.1 考虑方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$，

例 3.3.15 继续讨论例 3.3.1，取 $\mathcal{R}(A)$ 的一组标准正交基并列排成的矩阵是

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.\ \text{正交投影矩阵}\ P_A = QQ^{\mathrm{T}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{13}{15} & -\frac{1}{15} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{15} & \frac{29}{30} \end{bmatrix}.$$

向量 $\boldsymbol{b}$ 的正交投影分解为 $\boldsymbol{b} = P_A\boldsymbol{b} + (I_3 - P_A)\boldsymbol{b}$，

核心问题：$A_{n\times n}x=b$

用一个指标来标识此方程组何时 有唯一解

定义 4.2.1 (行列式) 定义在全体 n 阶方阵上的函数 δ，如果满足如下性质：

1. 列多线性性：对每个列向量都满足线性性，即对任意 $1\leqslant i\leqslant n$，都有 $\delta(\cdots,k\boldsymbol{a}_i+k'\boldsymbol{a}_i',\cdots)=k\delta(\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots)+k'\delta(\cdots,\boldsymbol{a}_i',\cdots)$；

2. 列反对称性：对任意 $1\leqslant i<j\leqslant n$，都有 $\delta(\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_j,\cdots)=-\delta(\cdots,\boldsymbol{a}_j,\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots)$；

3. 单位化条件：$\delta(I_n)=1$；

则 δ 就称为一个 n **阶行列式函数**.

$$\delta\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right)=-\delta\left(\begin{bmatrix} a_{21} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}\right)$$

$$\delta\left(\begin{bmatrix} a_{11} & ka_{12}+k'a_{12}' & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22}+k'a_{22}' & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32}+k'a_{32}' & a_{33} \end{bmatrix}\right)=k\cdot\delta\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right)+k'\cdot\delta\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}' & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}' & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}' & a_{33} \end{bmatrix}\right)$$

定义 4.2.1 (行列式) 定义在全体 n 阶方阵上的函数 δ，如果满足如下性质：

1. 列多线性性：对每个列向量都满足线性性，即对任意 $1 \leqslant i \leqslant n$，都有 $\delta(\cdots, k\boldsymbol{a}_i + k'\boldsymbol{a}_i', \cdots) = k\delta(\cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots) + k'\delta(\cdots, \boldsymbol{a}_i', \cdots)$；

2. 列反对称性：对任意 $1 \leqslant i < j \leqslant n$，都有 $\delta(\cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots) = -\delta(\cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots)$；

3. 单位化条件：$\delta(I_n) = 1$；

则 δ 就称为一个 n 阶**行列式函数**.

我们将证明 n 阶方阵的行列式函数存在且唯一. 这个唯一的行列式函数在矩阵 A 的值称为 A 的**行列式**，记为[1]$\det(A)$ 或 $|A|$.

某个 n 阶方阵的行列式可以直接称为一个 n 阶行列式.

$$det(A) \text{ 或 } |A| \text{ 或 } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

命题 4.2.3 1. 如果方阵 A 有两列相等，则 $\det(A) = 0$；

2. 如果方阵 A 不满秩，即不可逆，则 $\det(A) = 0$；

3. 如果方阵 A 有一列为零或有一行为零，则 $\det(A) = 0$.

$$\begin{vmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} d_{kk}$$

命题 4.2.4 行列式函数在初等矩阵上的取值均不为零，分别是：

1. $\det(P_{ij}) = -1$;
2. $\det(E_{ii;k}) = k$;
3. $\det(E_{ji;k}) = 1$.

证. 三类初等矩阵都可以从单位矩阵 I_n 做一次初等列变换得到.

第 1 条：P_{ij} 对调了 I_n 的第 i, j 列，由列反对称性可知.

第 2 条：$E_{ii;k}$ 把 I_n 的第 i 列乘以 k，由列线性性可知.

第 3 条：$E_{ji;k}$ 把 I_n 的第 j 列的 k 倍加到第 i 列，因此 $\det(E_{ji;k}) = \delta(\cdots, \boldsymbol{e}_i + k\boldsymbol{e}_j, \cdots, \boldsymbol{e}_j, \cdots) = \delta(\cdots, \boldsymbol{e}_i, \cdots, \boldsymbol{e}_j, \cdots) + k\delta(\cdots, \boldsymbol{e}_j, \cdots, \boldsymbol{e}_j, \cdots) = \det(I_n) = 1$. □

命题 4.2.5 行列式函数满足

1. 对 A 的第 i, j 列位置互换得到 $B = AP_{ij}$，则 $\det(B) = \det(AP_{ij}) = -\det(A)$;
2. 对 A 的第 i 列乘非零常数 k 得到 $B = AE_{ii;k}$，则 $\det(B) = \det(AE_{ii;k}) = k\det(A)$;
3. 把 A 的第 j 列的 k 倍加到第 i 列上得到 $B = AE_{ji;k}$，则 $\det(B) = \det(AE_{ji;k}) = \det(A)$.

行列式函数的几个重要性质

定理 4.2.6 行列式函数有如下性质:

1. 对初等矩阵 E, 则 $\det(AE) = \det(A)\det(E)$;
2. 设可逆矩阵 $A = E_1 \cdots E_m$, 其中 E_i 为初等矩阵, 则 $\det(A) = \det(E_1)\cdots\det(E_m)$;
3. $\det(A) \neq 0$ 当且仅当 A 可逆;
4. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$;
5. $\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A)$.

第 4 条: 如果 B 可逆, 令 $B = E_1 \cdots E_m$, 则 $\det(AB) = \det(AE_1 \cdots E_m) = \det(AE_1 \cdots E_{m-1})\det(E_m) = \cdots = \det(A)\det(E_1)\cdots\det(E_m) = \det(A)\det(B)$; 如果 B 不可逆, 则 B 不满秩, 由 $\operatorname{rank}(AB) \leqslant \operatorname{rank}(B)$ 可知 AB 也不满秩, 因此 $\det(AB) = \det(B) = 0$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ 也成立.

第 5 条: 如果 A 可逆, 令 $A = E_1 \cdots E_m$, 则 $A^{\mathrm{T}} = E_m^{\mathrm{T}} \cdots E_1^{\mathrm{T}}$, 由初等矩阵和它的转置具有相同的行列式可知 $\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A)$; 如果 A 不可逆, 则 A^{T} 也不可逆, 因此 $\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A) = 0$. $\square$

消去法计算行列式

1. 把 A 的某行的倍数加到另一行，或某列的倍数加到另一列，其行列式不变；
2. 把 A 的两行或两列对调，其行列式变为原来的相反数；
3. 把 A 的某行或某列乘以 k，其行列式变为原来的 k 倍.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 10 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{第1行分别乘以}-2,-3\\ \text{加到第2行和第3行}}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

练习 4.2.4 计算 $\det(A)$.

1. $A = \left[i+j\right]_{n\times n}$.
2. $A = \left[ij\right]_{n\times n}$.

练习 4.2.21 设 A, B 是 n 阶方阵，证明，$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}\right) = \det(A+B)\det(A-B)$.

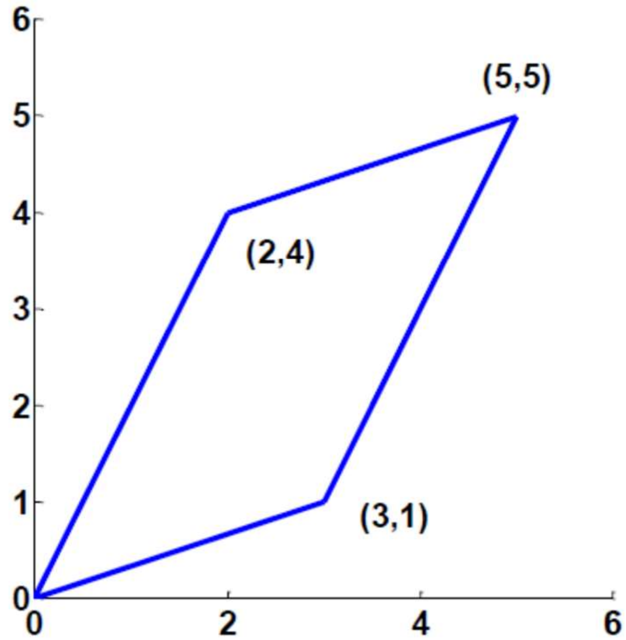
行列式的几何意义

说明：行列式的几何意义是线性变换下“体积”的变化率，设$e_1,e_2,\cdots,e_n$是R^n的一组标准正交基，A为一可逆矩阵，则$Ae_1,Ae_2,\cdots,Ae_n$也是R^n的一组基，由$Ae_1,Ae_2,\cdots,Ae_n$围成的n维平行超立方体的“体积”为$\left|\det(A)\right|$。线性变换$Y=AX$将区域D映射为D'，则$S(D')=S(D)\cdot\left|\det(A)\right|$。

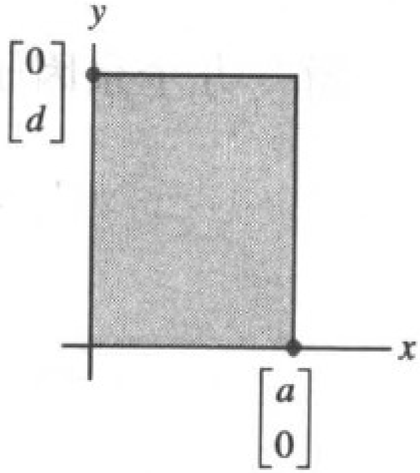
行列式的几何意义图示

$$A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right)=10$$



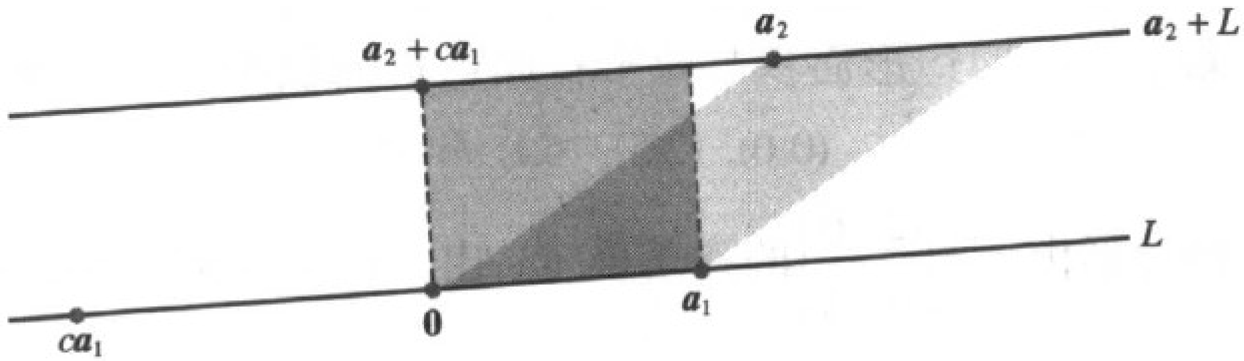
行列式的几何意义



若 A 为 2 阶对角矩阵，定理显然成立.

$$\left|\det\begin{bmatrix}a & 0\\0 & d\end{bmatrix}\right| = |ad| = \{\text{矩阵的面积}\}$$

设a_1和a_2为非零向量，则对任意常数c，由a_1和a_2确定的平行四边形面积等于由a_1和a_2+ca_1确定的平行四边形面积



作 业（11月8日）

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

练习4.2

1(1,3)，2，3，5，9，14，19，25

11月15日提交

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~