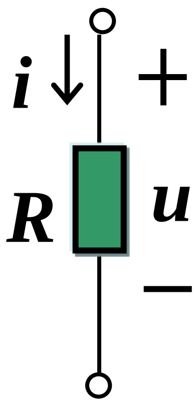
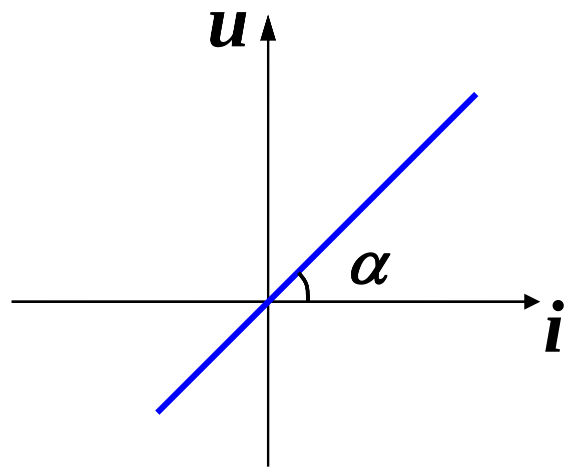
第8讲 非线性电阻电路分析

- 非线性电阻
- 非线性电阻电路的解析解法
- 非线性电阻电路的分段线性解法 ← 重点
- 非线性电阻电路的图形解法
- 非线性电阻电路解的存在性和唯一性

1 非线性电阻

（1）线性电阻元件

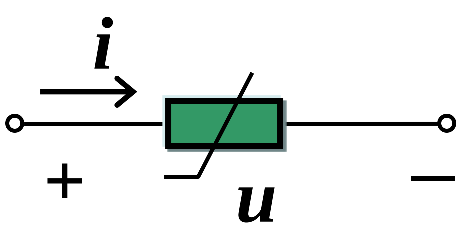




$$R=\frac{u}{i}=\mathrm{tg}\,\alpha=\mathrm{const}$$

（2）非线性电阻元件

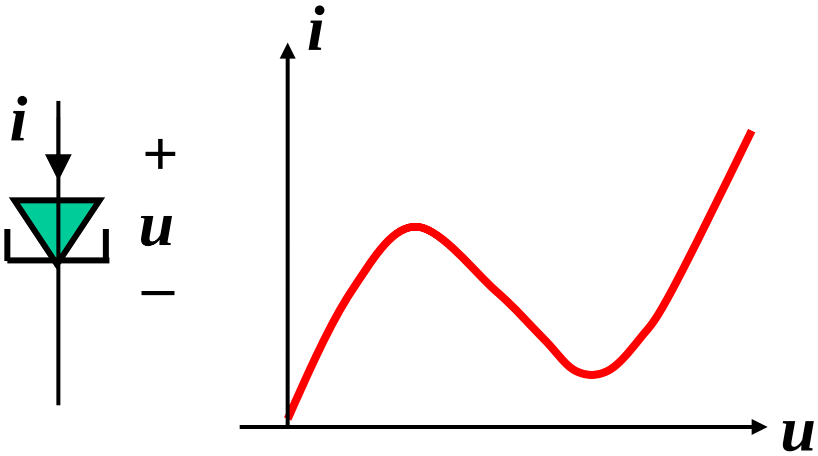
电路符号



伏安特性 $u=f(i)$ 或 $i=g(u)$ 过原点

例1 隧道二极管

已预习

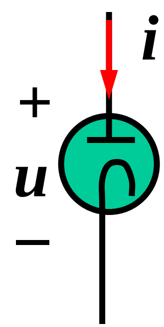


$$i = g(u) = a_0u + a_1u^2 + a_2u^3$$

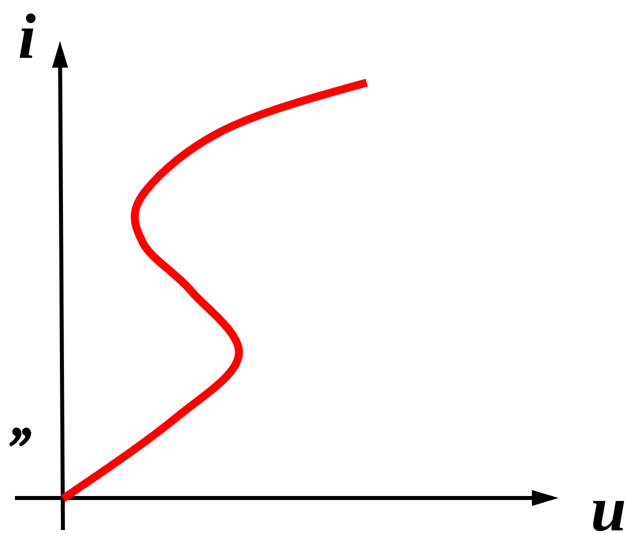
称为“压控型”或“N型”

每个电压对应唯一的电流

例2 充气二极管



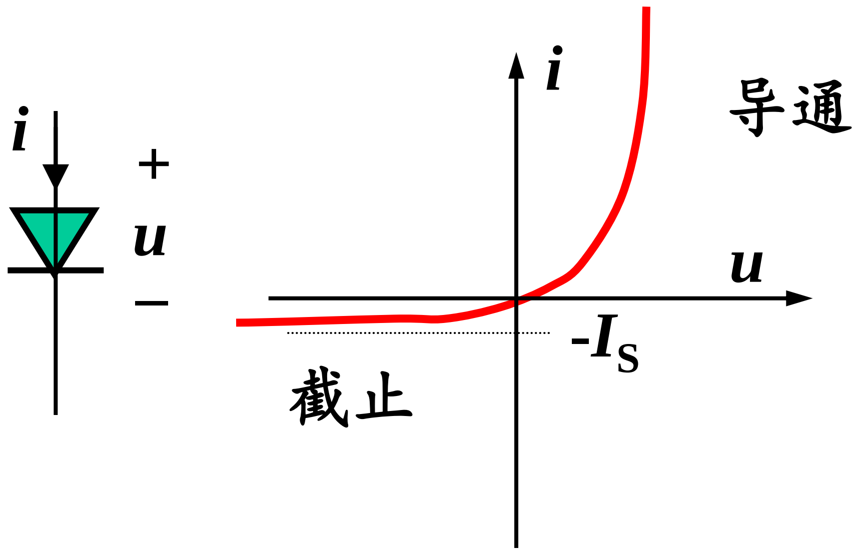
$$u = f(i) = a_0i + a_1i^2 + a_2i^3$$



称为“流控型”或“S 型”

每个电流对应唯一的电压

例3 整流二极管



伏安特性

$$i = I_S(e^{u/U_{TH}} - 1)$$

$I_S > 0$ 反向饱和电流

对于硅二极管来说，典型值为

$$I_S = 10^{-12}\,\text{A} = 1\text{pA},\quad U_{TH} = 0.025\text{V} = 25\text{mV}$$

（3） 线性电阻和非线性电阻的区别

已预习

例 非线性电阻 $u = f(i) = 50\,i + 0.5\,i^3$

$i_1 = 2\text{A}$ $u_1 = 100 + 0.5 \times 8 = 104\text{V}$

$i_2 = 10\text{A}$ $u_2 = 500 + 500 = 1000\text{V}$ $\neq 5 \times 104$

齐次性不满足

当 $i = i_1 + i_2$ 时

$$
\begin{aligned}
u &= 50(i_1 + i_2) + 0.5(i_1 + i_2)^3 \\
&= 50\,i_1 + 0.5\,i_1^3 + 50\,i_2 + 0.5\,i_2^3 + 1.5\,i_1 i_2 (i_1 + i_2) \\
&= u_1 + u_2 + 1.5\,i_1 i_2 (i_1 + i_2) \\
&\neq u_1 + u_2
\end{aligned}
$$

可加性不满足

① 齐次性和可加性不适用于非线性电阻。

例 非线性电阻 $u=f(i)=50i+0.5i^3$

$4\sin^3 t=3\sin t-\sin 3t$

$i_3=2\sin 60t\,\mathrm{A}$ $u_3=50\times 2\sin 60t+0.5\times 8\sin^3 60t$

已预习

$=100\sin 60t+3\sin 60t-\sin 180t$

$=103\sin 60t-\sin 180t\ \mathrm{A}$

出现3倍频

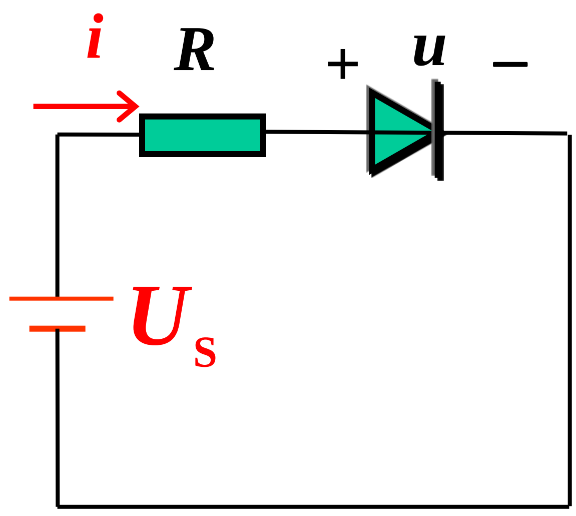
②非线性电阻能产生与输入信号不同的频率（变频作用）。

如何看待非线性?

线性元件：分压、分流、滤波等作用。
非线性元件：整流、稳压、放大、振荡、变频、开关等作用。

2 非线性电阻电路的解析解法

例 求电压u。



$$i = I_S(e^{u/U_{TH}} - 1)$$

KCL+KVL+元件特性

$$\frac{U_S - u}{R} = I_S\left(e^{u/U_{TH}} - 1\right)$$

超越方程

$$\frac{U_S - u}{R} = I_S\left(e^{u/U_{TH}} - 1\right) \Rightarrow 10^{-9}\left(e^{\frac{u}{0.025}} - 1\right) + u - 2 = 0$$

设$U_S = 2\text{V}$, $R = 1\text{k}\Omega$, I_S=1pA, U_{TH}=25mV

法1 手算

$$10^{-9}\left(e^{\frac{u}{0.025}} - 1\right) + u = 2$$

u	左	右
0	0	2
0.3	0.3	2
0.6	27	2
0.5	0.985	2
0.53	2.14	2
0.525	1.844	2
0.527	1.956	2
0.528	2.015	2

法2 MATLAB

```
function f=diode(x)
 f=10^(-9)*(exp(x/0.025)-1)+x-2;
```

```
>> a = fzero(@diode,-0.2)
a =    0.5278
```

trial and error

(1) 节点电压方程的列写

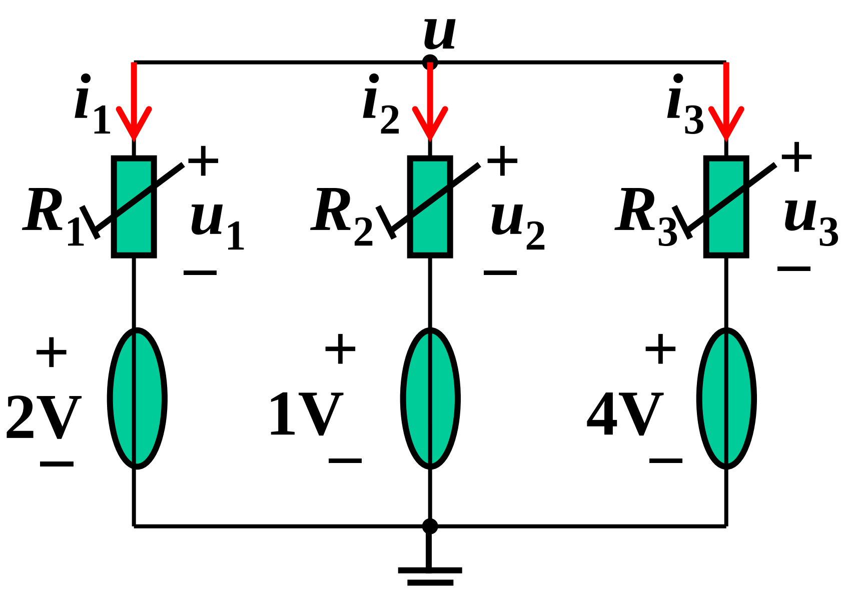
非线性电阻为压控电阻

KCL

电路方程 { 元件性能——非线性；电路的连接——KCL,KVL

非线性电阻电路——非线性代数方程

例1 已知$i_1 = u_1$，$i_2 = u_2^5$，$i_3 = u_3^3$，列写求电压 u 所需方程。



由KCL

$$i_1+i_2+i_3=0$$

代入元件性质

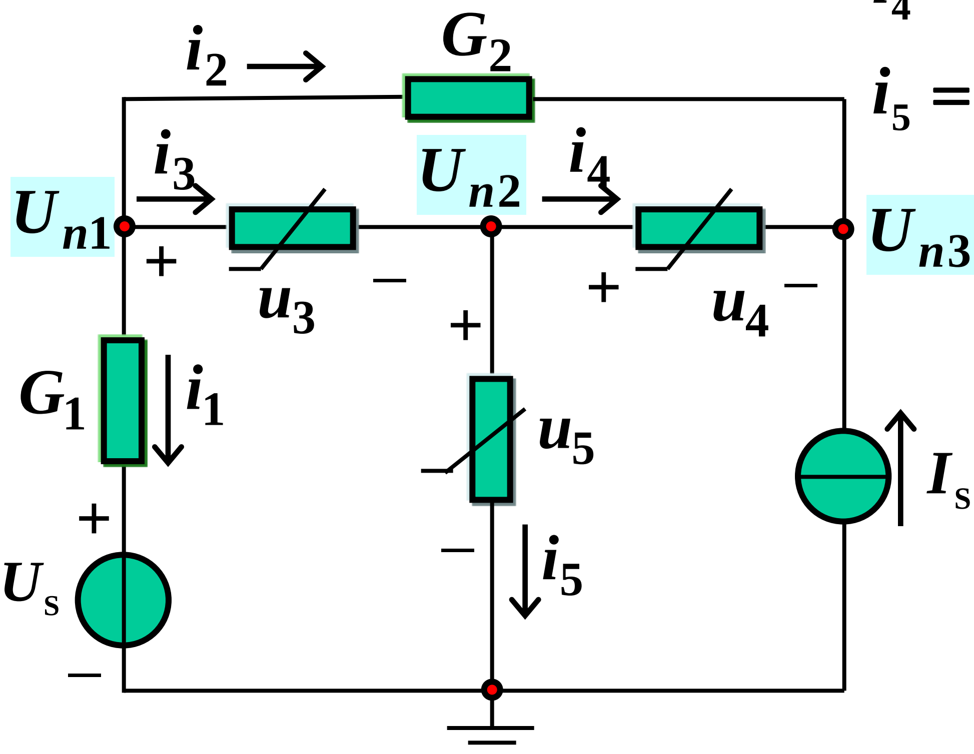
$$u_1+u_2^5+u_3^3=0$$

应用KVL，得

$$u-2+(u-1)^5+(u-4)^3=0$$

非线性代数方程

例2　列写节点电压方程



$$i_3 = 5u_3^3$$
$$i_4 = 10u_4^{1/3}$$
$$i_5 = 15u_5^{1/5}$$

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ -i_3 + i_4 + i_5 = 0 \\ -i_4 - i_2 - I_s = 0 \end{cases}$$ KCL

$$\begin{cases} i_1 = G_1(U_{n1} - U_s) \\ i_2 = G_2(U_{n1} - U_{n3}) \\ i_3 = 5(U_{n1} - U_{n2})^3 \\ i_4 = 10(U_{n2} - U_{n3})^{1/3} \\ i_5 = 15U_{n2}^{1/5} \end{cases}$$

元件性质

KVL

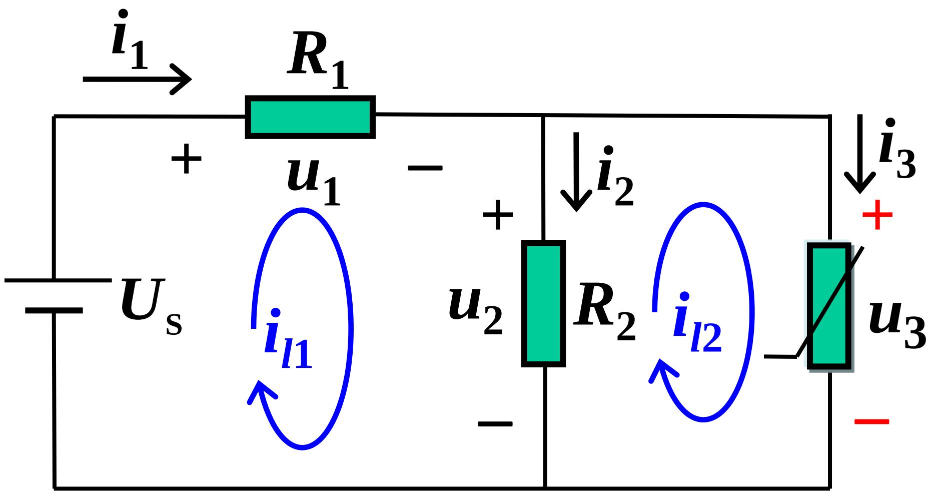
则节点方程为

$$\begin{cases} G_1(U_{n1} - U_s) + G_2(U_{n1} - U_{n3}) + 5(U_{n1} - U_{n2})^3 = 0 \\ -5(U_{n1} - U_{n2})^3 + 10(U_{n2} - U_{n3})^{1/3} + 15U_{n2}^{1/5} = 0 \\ -10(U_{n2} - U_{n3})^{1/3} - G_2(U_{n1} - U_{n3}) - I_s = 0 \end{cases}$$

非线性代数方程组

(2) 回路电流方程的列写

例3 已知 $u_3 = 20\, i_3^{1/3}$，求节点电压 u_3。



非线性电阻为流控电阻
KVL

$$\begin{cases} R_1 i_{l1} + R_2(i_{l1} - i_{l2}) = U_S \\ 20 i_{l2}^{1/3} - R_2(i_{l1} - i_{l2}) = 0 \end{cases} \Longrightarrow i_3 \Longrightarrow u_3$$

非线性代数方程组

解析解法的特点

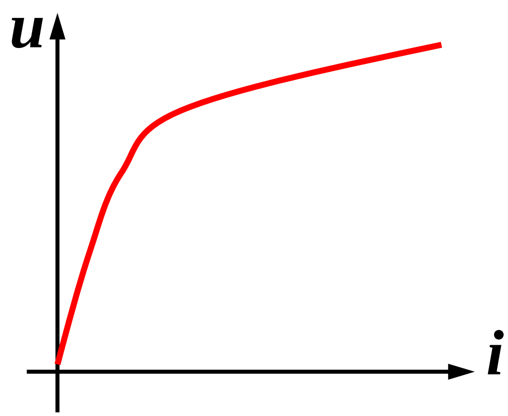
- 步骤
  - 利用所有非线性元件的特性、KCL和KVL列写并求解电路的非线性方程
- 优点
  - 貌似能求出精确解 → 实际上数值解法也带来误差
- 缺点
  - 方程列写可能比较麻烦
  - 方程求解比较麻烦

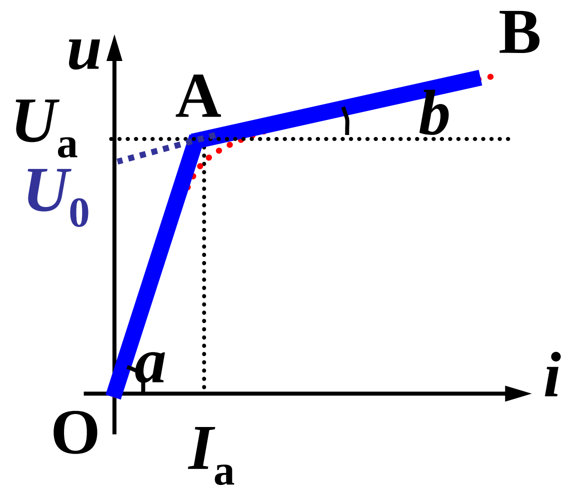
3 非线性电阻电路的分段线性解法

分段线性法：将非线性电阻近似地用折线来表示。

将求解过程分为几个线性段，每段中分析线性电路。

例1

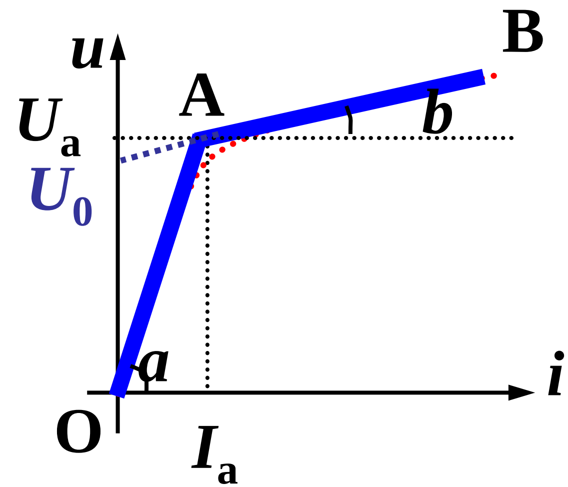




单选题 1分

设置

O-A段对应等效电路为



A 阻值为tan(a)的电阻

B 阻值为tan(a)的电阻串联U_0电压源

C 阻值为tan(b)的电阻

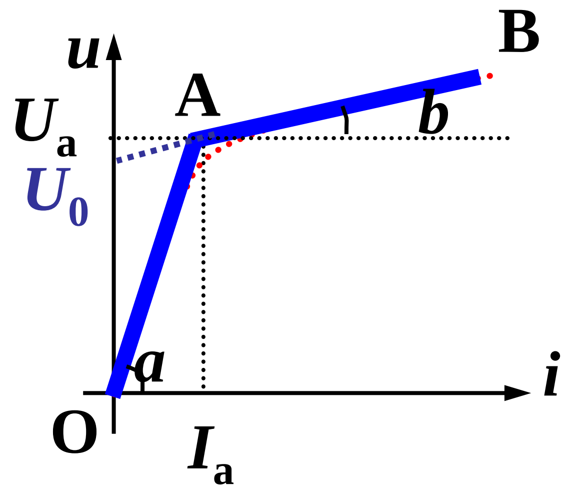
D 阻值为tan(b)的电阻串联U_0电压源

提交

单选题 1分

设置

A-B段对应等效电路为



A 阻值为tan(a)的电阻

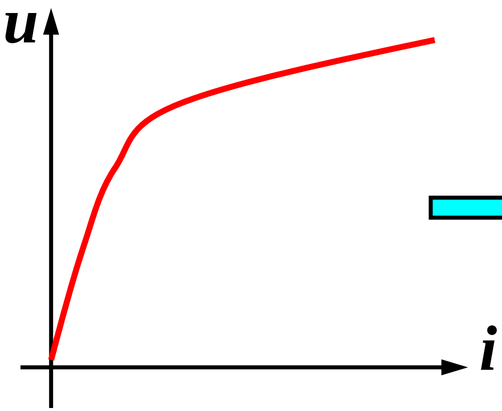
B 阻值为tan(a)的电阻串联U_0电压源

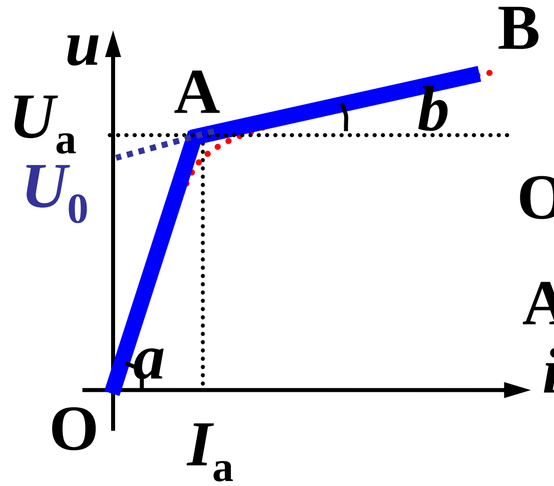
C 阻值为tan(b)的电阻

D 阻值为tan(b)的电阻串联U_0电压源

提交

例1



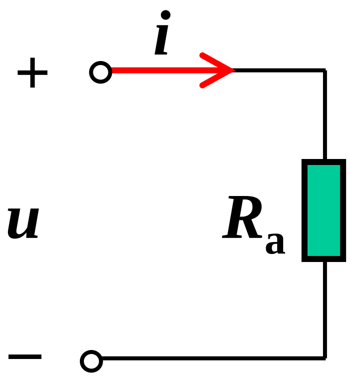


OA段 $R_a = \tan a$

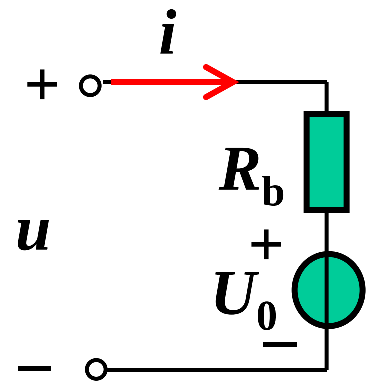
AB段 $R_b = \tan b$

等效电路

OA段



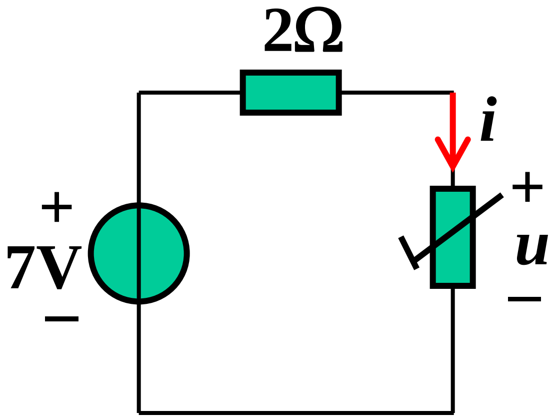
AB段

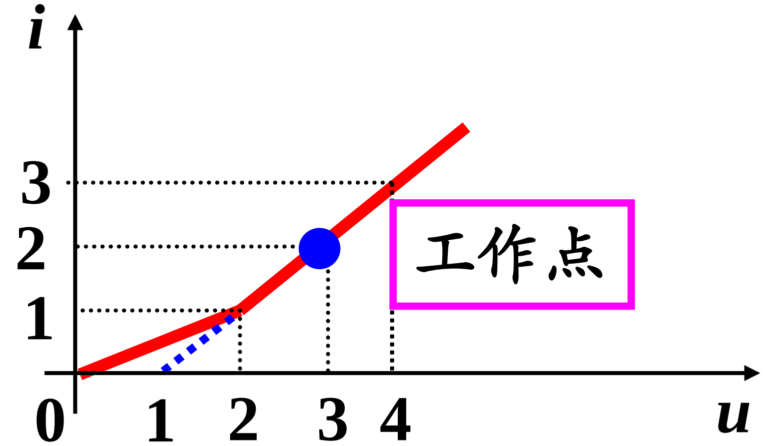


如何知道在哪段?

此处可以有弹幕

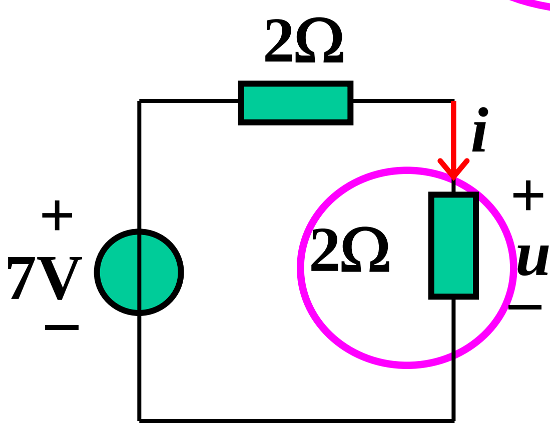
例 2 已知 $0<i<1\text{A}$，$u=2i$；$i>1\text{A}$，$u=i+1$。求电压u。





假设工作在第1段：$0<i<1\text{A}$

条件



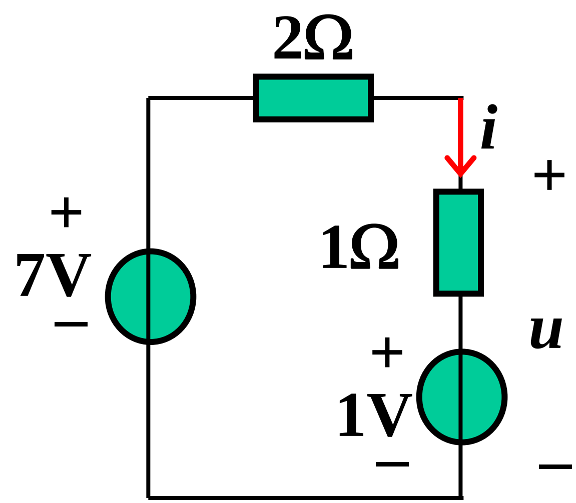
性质

$i=1.75\text{A}$

$u=3.5\text{V}$

$i=1.75\text{A}>1\text{A}$ 假设错误

假设工作在第2段：$i>1\text{A}$



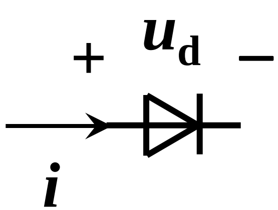
$i=2\text{A}$

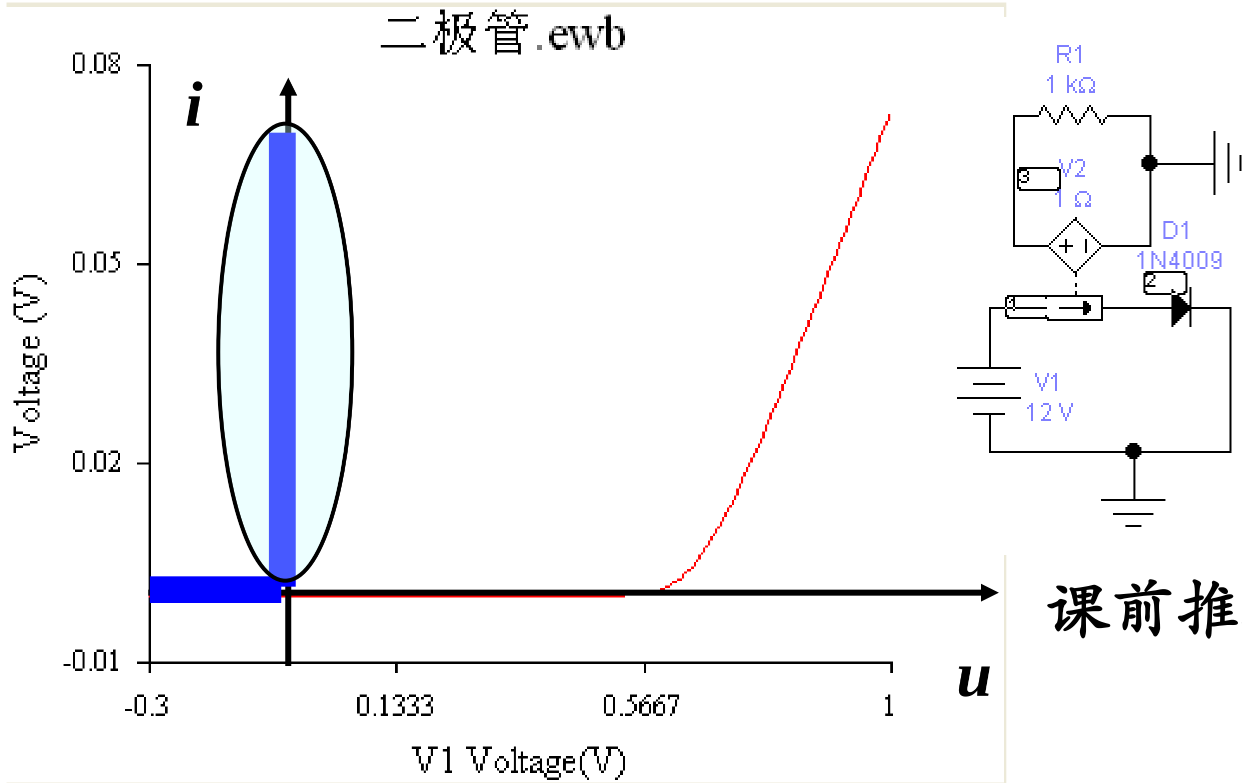
$u=3\text{V}$

假设正确

研究二极管的分段线性模型

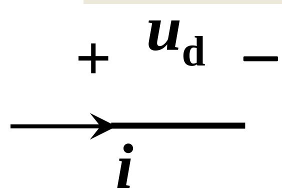
模型1





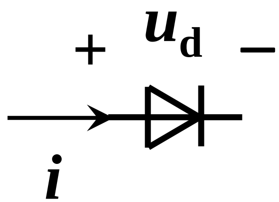
课前推送

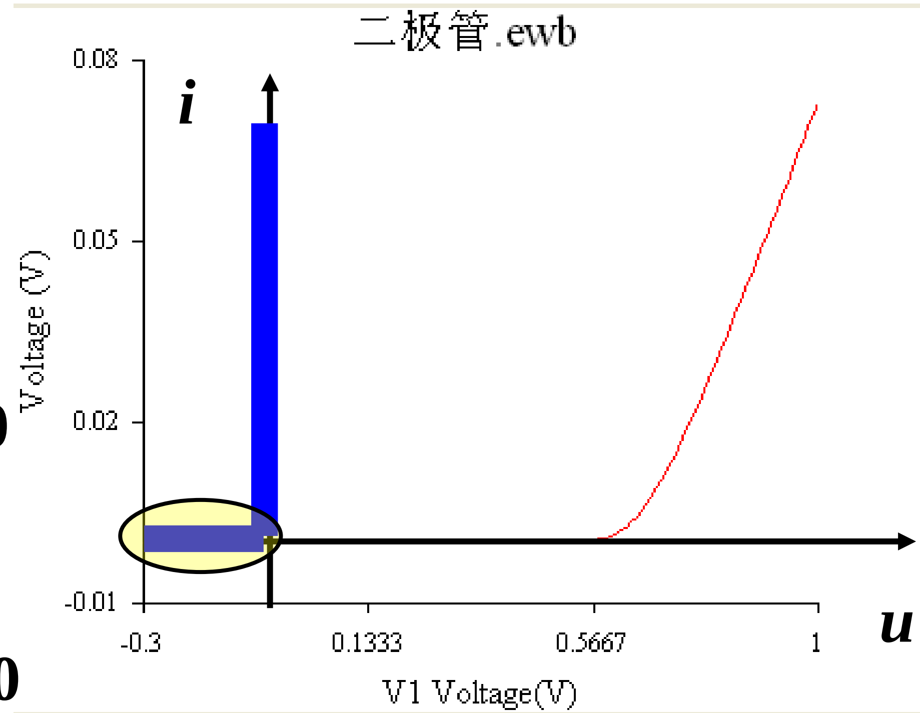
(半个)短路

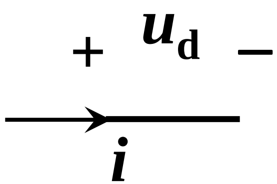


条件是 $i > 0$

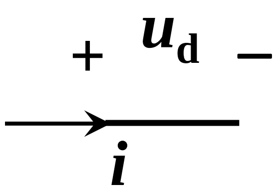
阴影部分对应的模型和条件是？



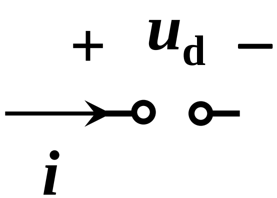


A 

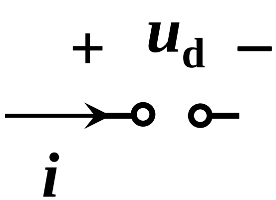
条件是 $i > 0$

B 

条件是 $i < 0$

C 

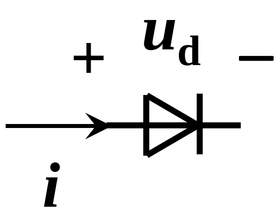
条件是 $u_d < 0$

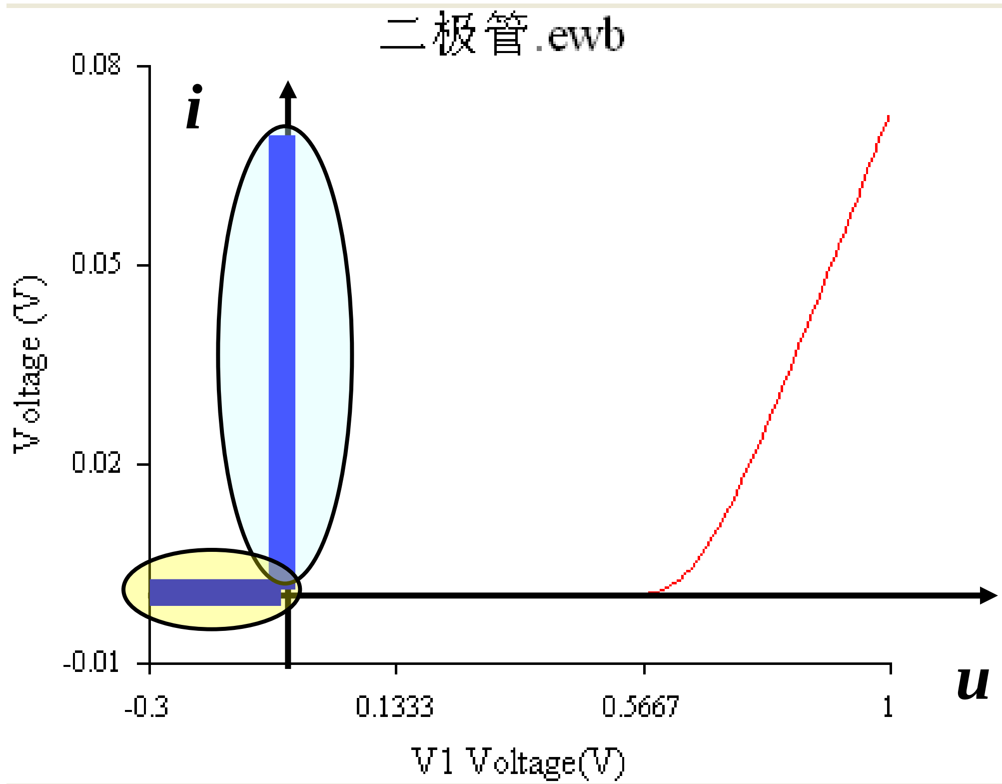
D 

条件是 $u_d > 0$

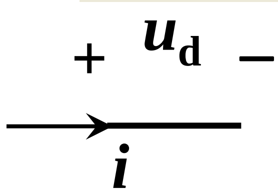
提交

模型1



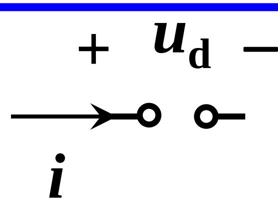


(半个)短路



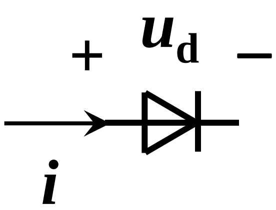
条件是 $i > 0$

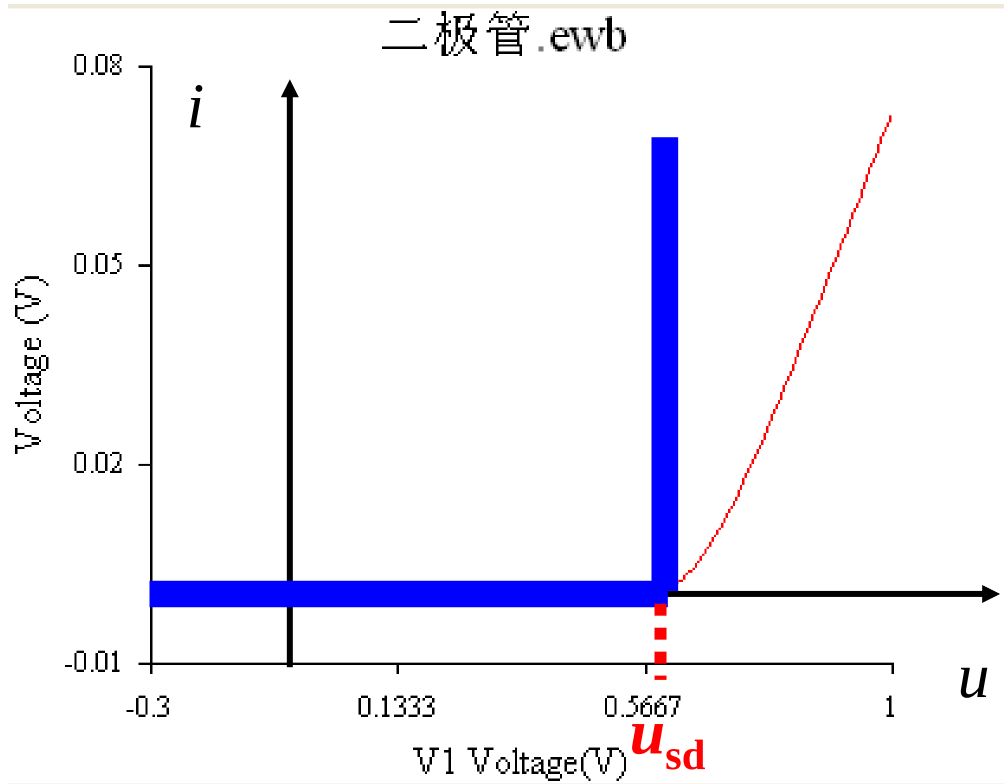
(半个)开路



条件是 $u_d < 0$

模型2

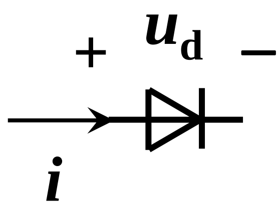

+
u_d
−
i

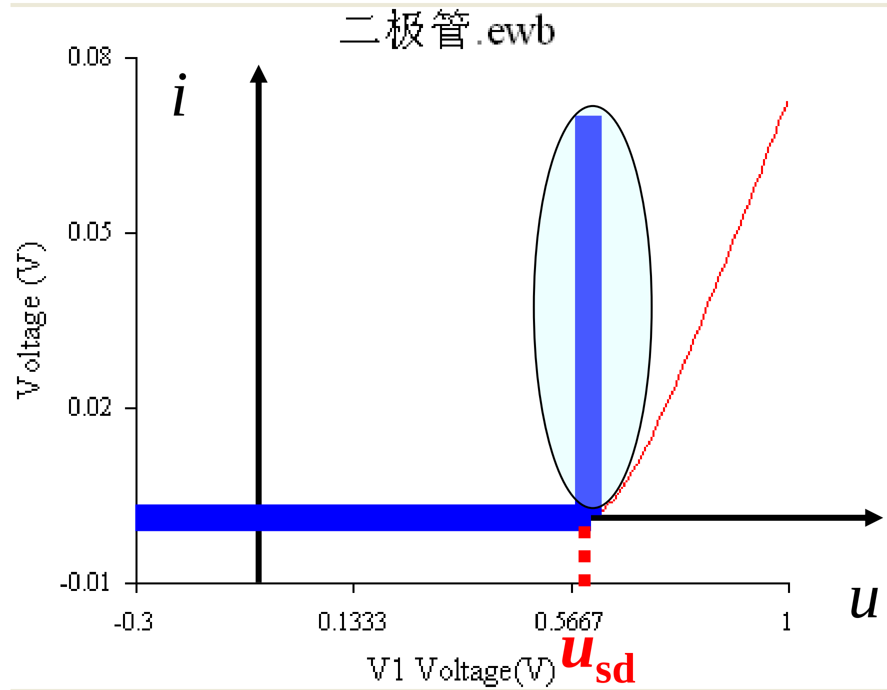

二极管.ewb
0.08
0.05
0.02
-0.01
Voltage (V)
i
-0.3
0.1333
0.5667
1
V1 Voltage(V)
u
u_{sd}

单选题 1分

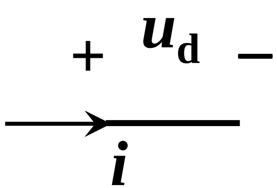
设置

阴影部分对应的模型和条件是?



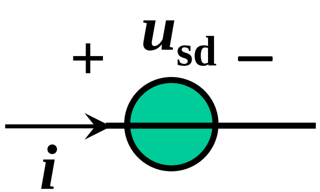


A



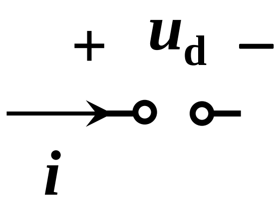
条件是 $i > 0$

B



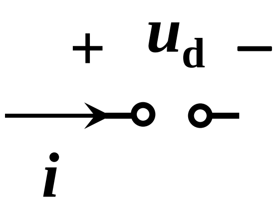
条件是 $i > 0$

C



条件是 $u_d < 0$

D

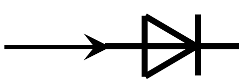


条件是 $u_d < u_{sd}$

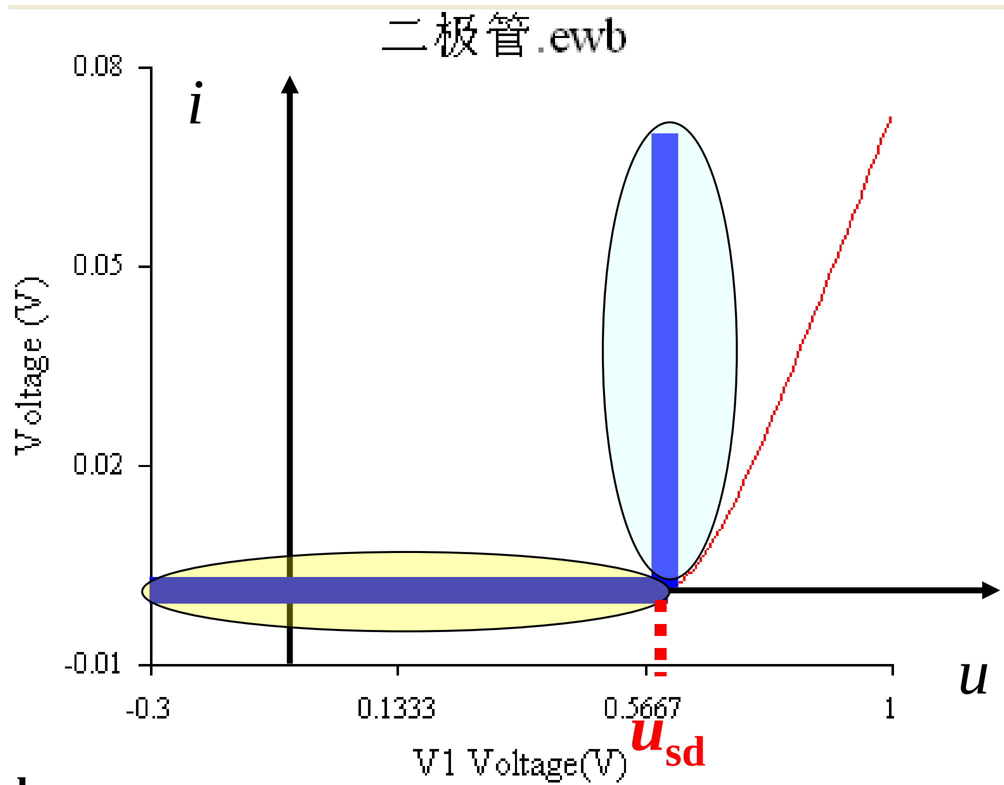
提交

模型2

+ u_d −

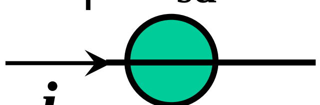


i



+ u_{sd} −

独立电压源



i

条件是 $i > 0$

硅二极管u_{sd}=0.7V

锗二极管u_{sd}=0.2V

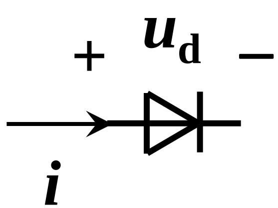
+ u_d −

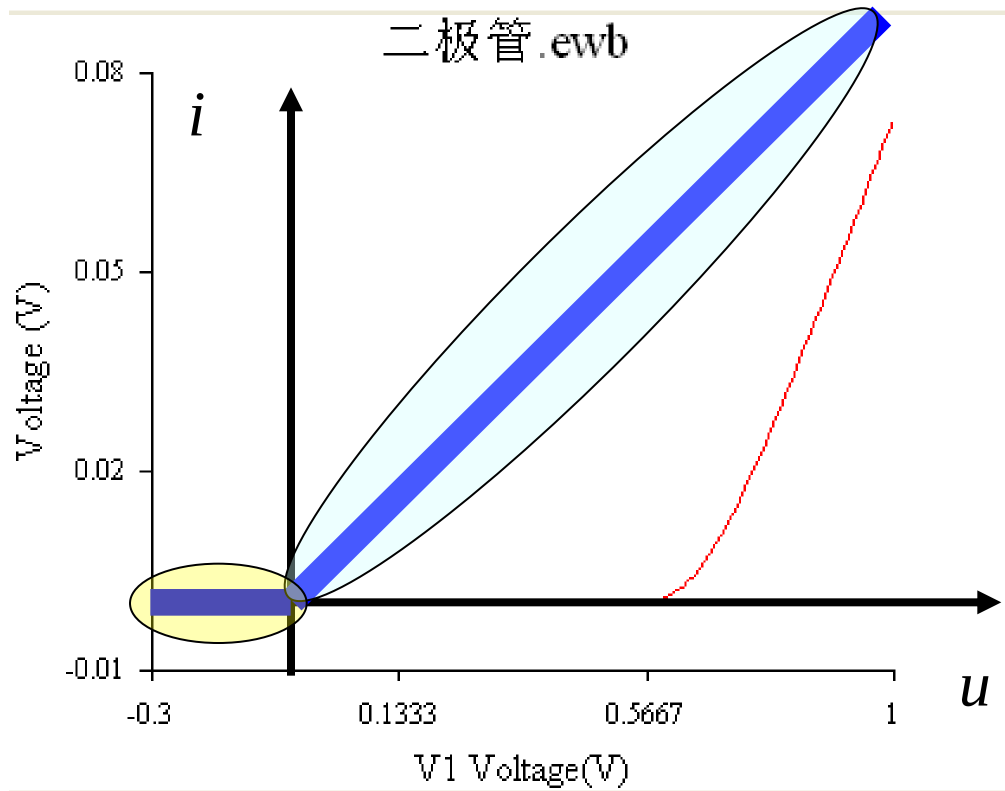
开路

i

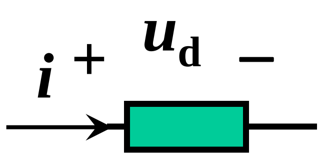
条件是 $u_d < u_{sd}$

模型3



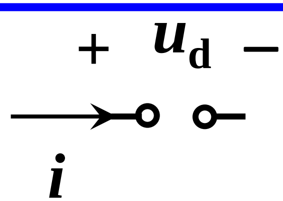


电阻



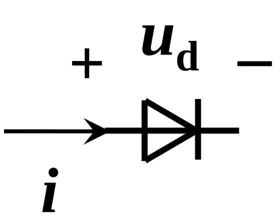
条件是 $i > 0$ 或 $u > 0$

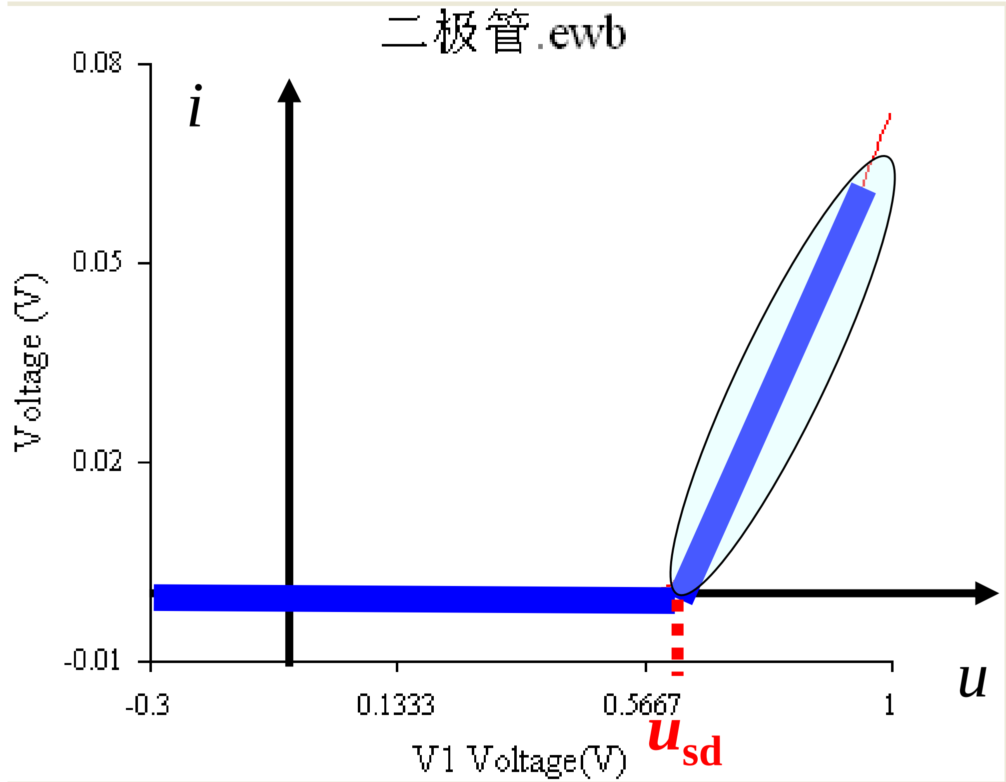
开路



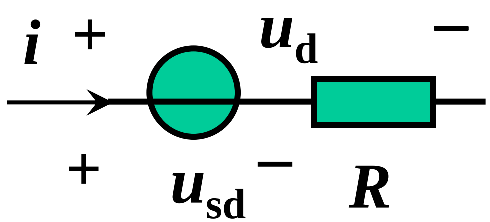
条件是 $u_d < 0$

模型4



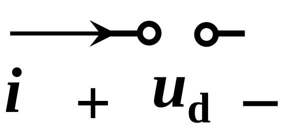


独立电压源串电阻

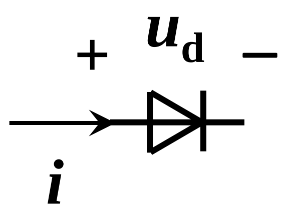


条件是 $i > 0$ 或 $u_d > u_{sd}$

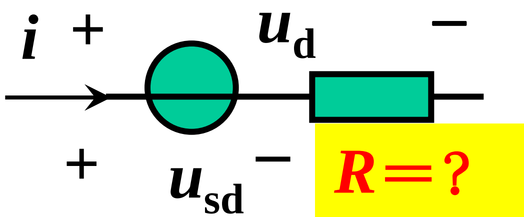
开路



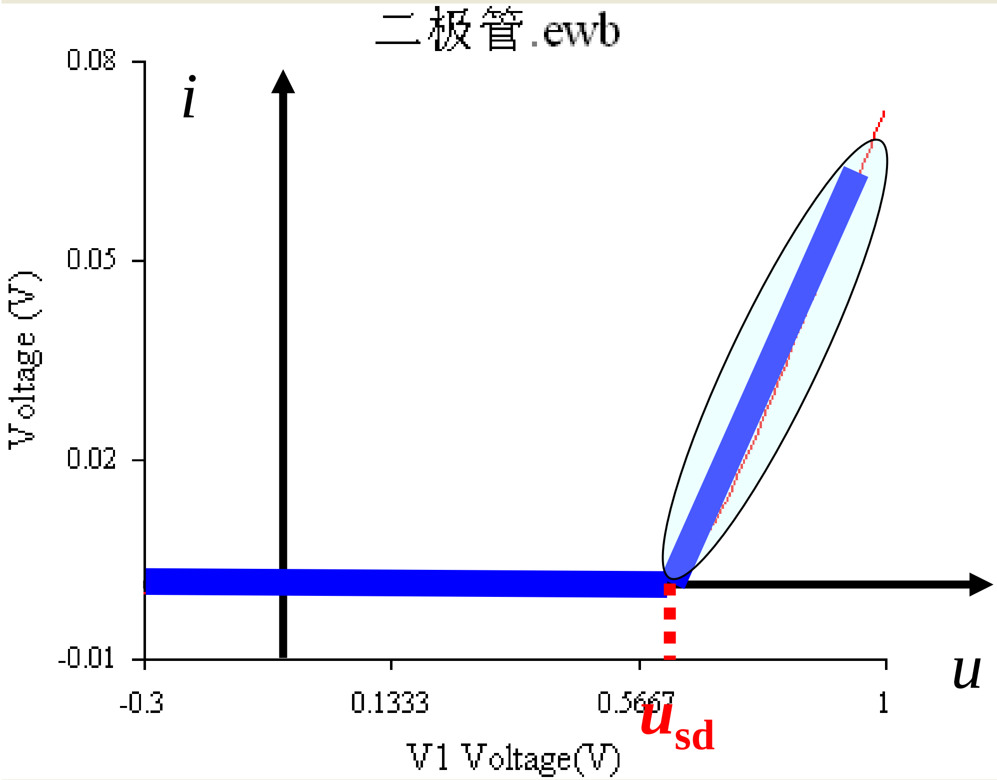
条件是 $u_d < u_{sd}$



独立电压源串电阻



条件是 $i > 0$

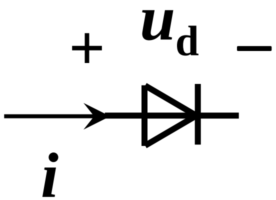


A mΩ量级

B Ω量级

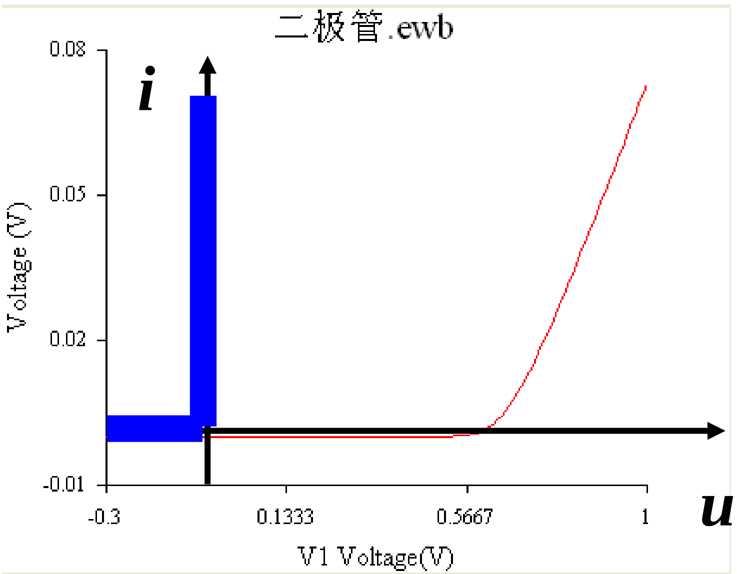
C kΩ量级

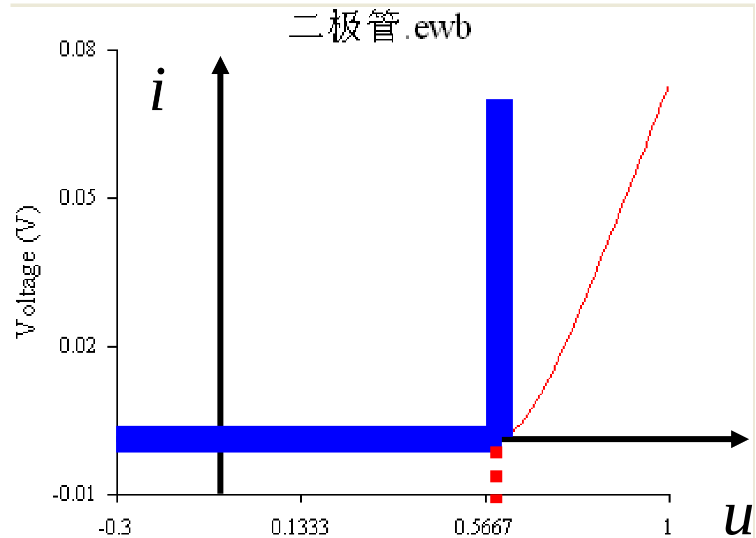
提交

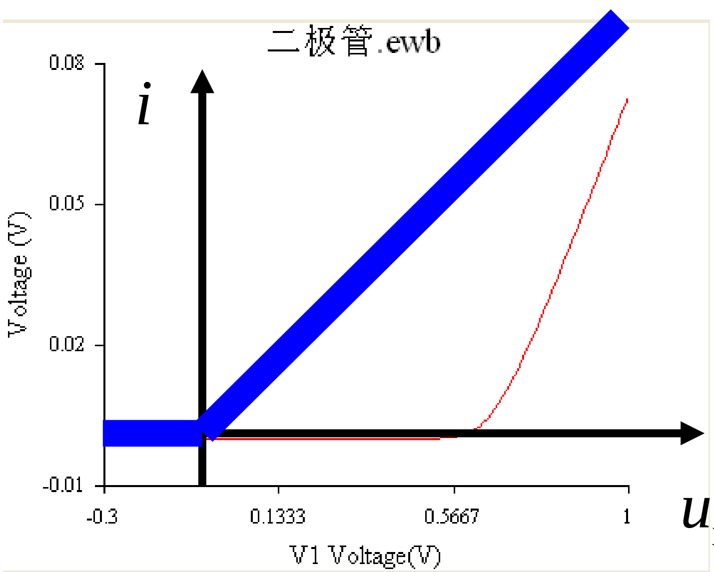


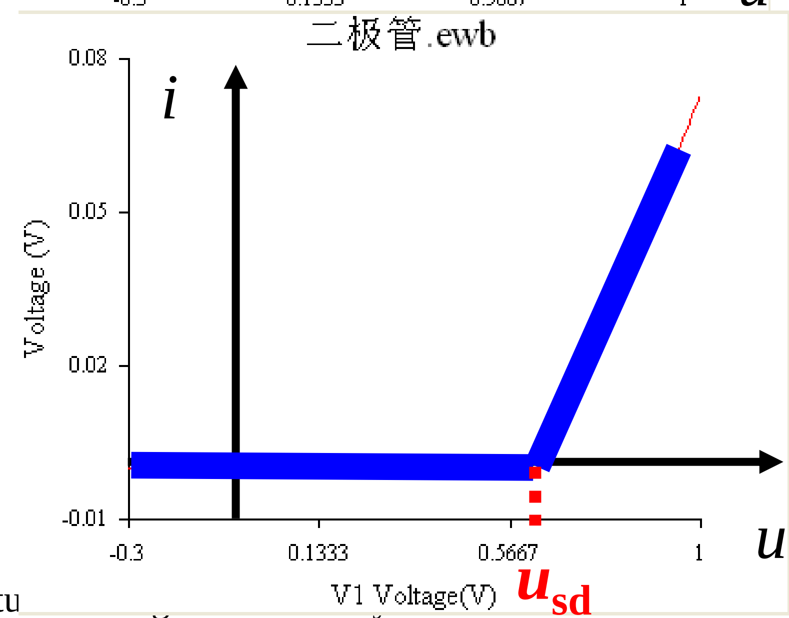
为什么有这么多模型？
什么时候用哪个？

此处可以有弹幕

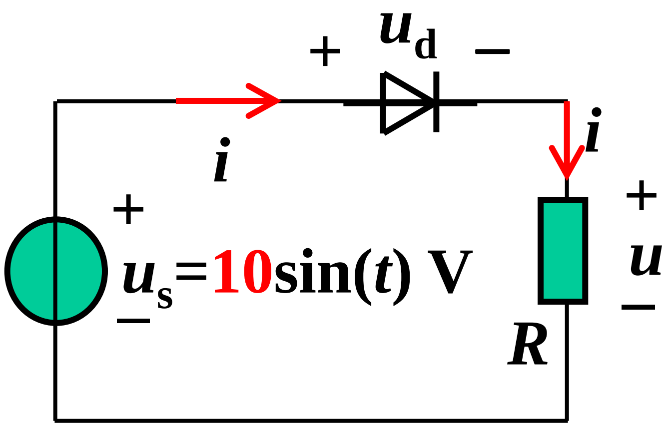








例 3 用分段线性法求u，用理想二极管模型。



方法：

假设 → 检验

模型1　　短路　　条件是 $i > 0$	开路　　条件是 $u_d < 0$

假设二极管短路，得 $u = 10\sin(t)$

$$i = \frac{10\sin(t)}{R}$$

$\sin(t)>0$时成立。

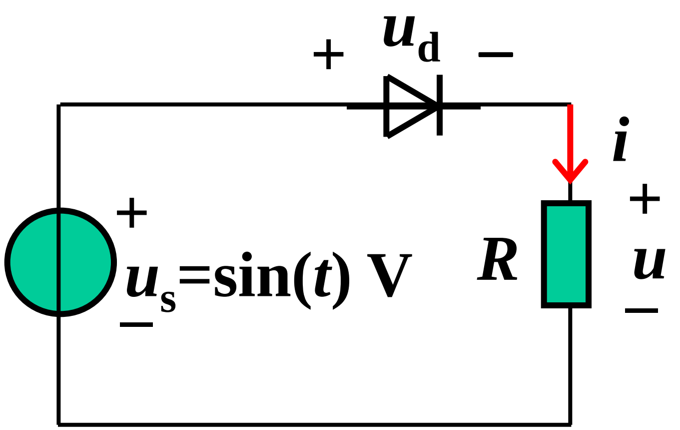
假设二极管开路，得 $u = 0$

$$u_d = 10\sin(t)$$

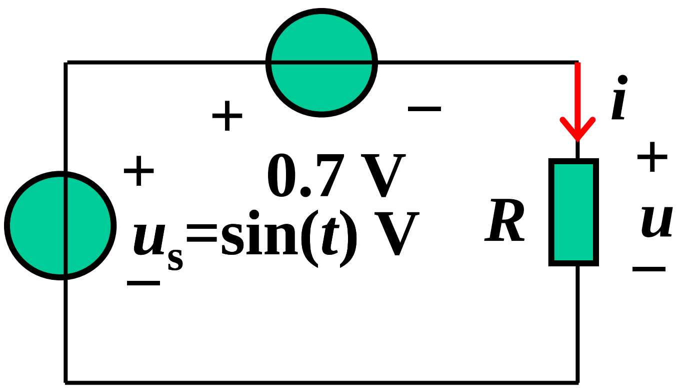
$\sin(t)<0$时成立。

看仿真

例 3 用分段线性法求u。二极管用模型2，硅二极管。



模型2	0.7V独立电压源	条件是 $i > 0$
	开路	条件是 $u_d < u_{sd}$



设 $i > 0$ $\quad u = \sin(t) - 0.7$

$$i = \frac{\sin(t) - 0.7}{R}$$

即$\sin(t) > 0.7$时成立。

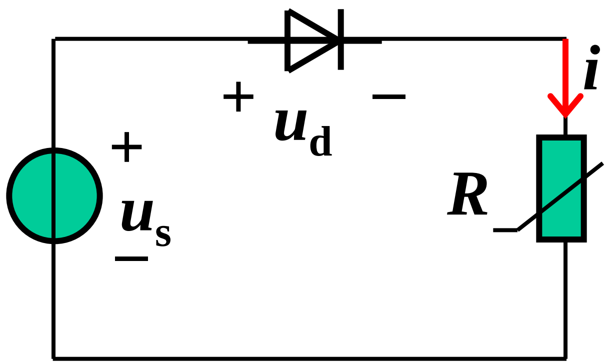
设二极管开路，得 $u = 0$

u的波形怎样?

$u_d = \sin(t)$

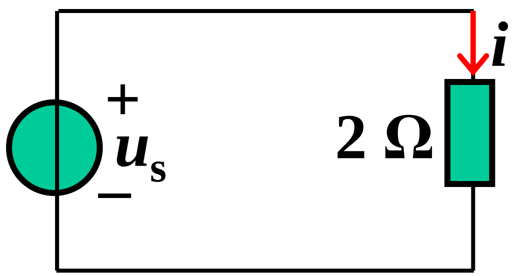
$u_d = \sin(t) < 0.7$时成立。

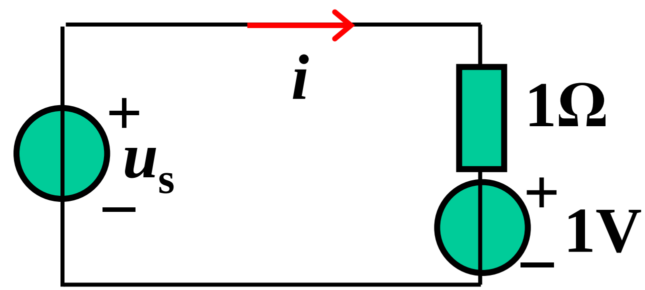
含两个非线性电阻

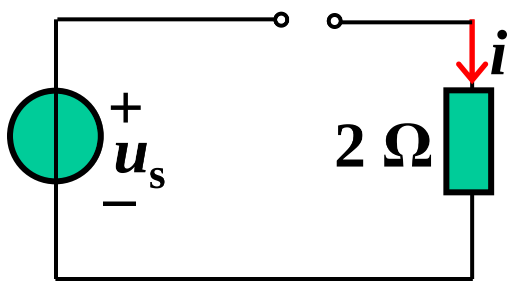


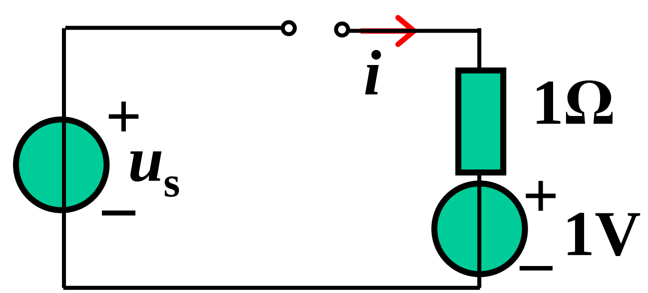
二极管：
- 短路　条件是 $i > 0$
- 开路　条件是 $u_d < 0$

非线性 R：
$$u = 2i\,,\quad i < 1\text{A},$$
$$u = i + 1,\quad i > 1\text{A},$$





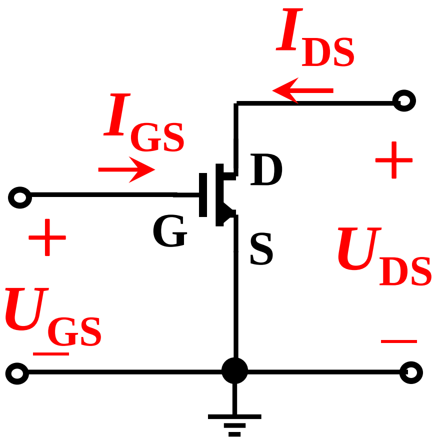




如果电路中有两个非线性电阻，各分为两段，则要假设四个状态，求解4个相同拓扑结构的电路。

分段线性解法的特点

- 步骤
  - 将非线性元件根据精度的需要划分为若干段，每段中用线性元件来建模。确定模型和条件
  - 假设非线性元件位于某一段，将模型带入，检验条件是否满足
- 优点
  - 线性模型的求解比较方便
- 缺点
  - 精度上有牺牲
  - 非线性元件多的时候需要求解的线性电路数量大大增加

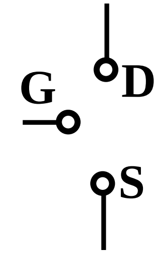


用分段的思想来分析MOSFET电路

1. 截止区

条件 $(U_{GS}-U_T)<0$

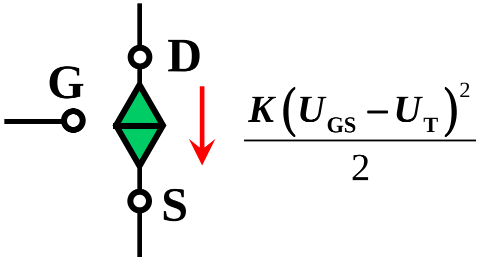
性质 $I_{DS}=0$



2.恒流源区

条件 $0<(U_{GS}-U_T)<U_{DS}$

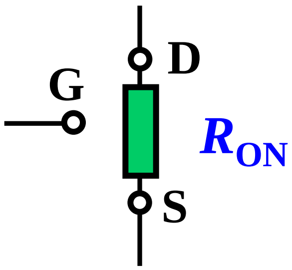
性质 $I_{DS}=\dfrac{K(U_{GS}-U_T)^2}{2}$



3.电阻区

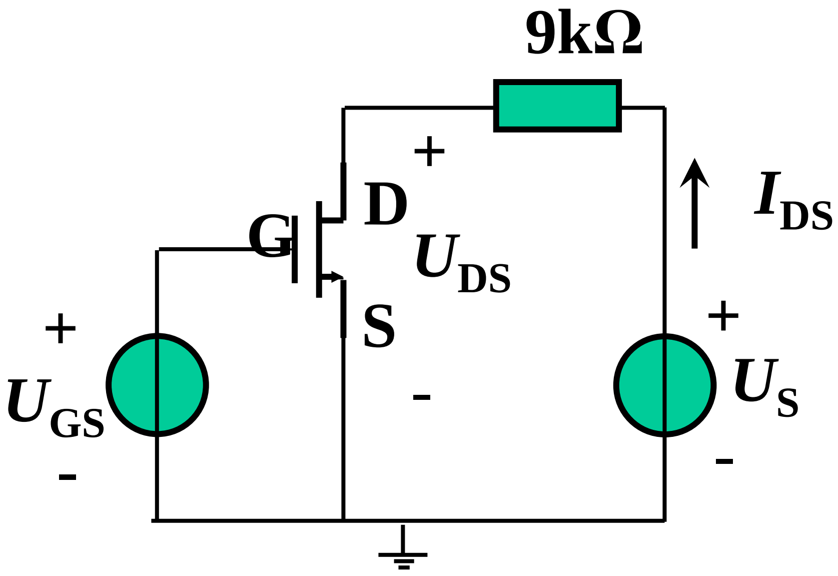
条件 $U_{DS}<(U_{GS}-U_T)$

性质：R_{ON}

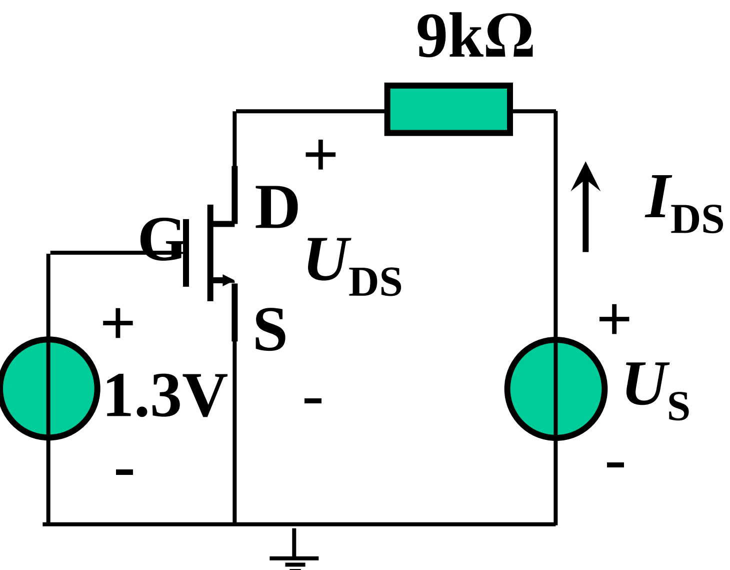


问题1：给定MOSFET元件参数和U_S数值，U_{GS}取不同值时，如何确定MOSFET工作区间？

假设检验！



例1：U_S=5V，U_{GS}=1.3V，K=0.5mA/V^2，U_T=1V，R_L=9kΩ，R_{ON}=1kΩ



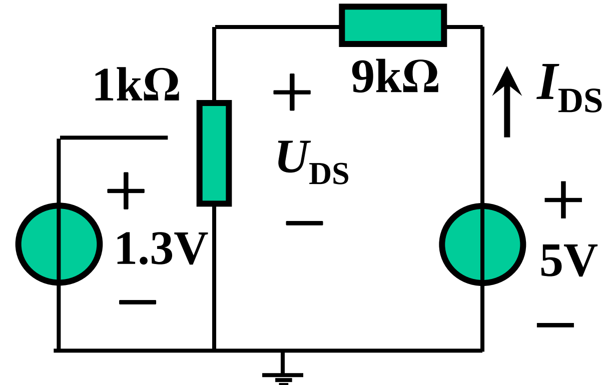
$U_{GS} > U_T$ → D、S导通

假设“可变电阻区”

$U_{DS} < (U_{GS} - U_T)$

0.5> (1.3—1)

假设不成立



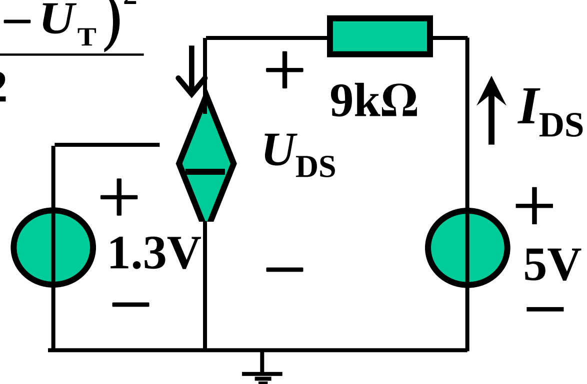
假设“恒流源区”

$$I_{DS} = \frac{K\left(U_{GS} - U_T\right)^2}{2}$$

$(U_{GS} - U_T) < U_{DS}$

(1.3—1)< 4.80

假设成立



$$U_{DS} = U_S - I_{DS} R_L$$

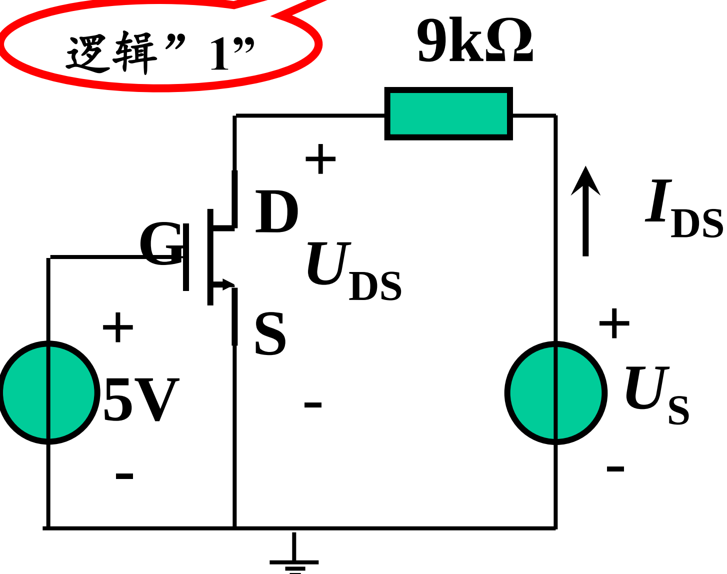
$$U_{DS} = 5 - 9000\frac{K\left(U_{GS} - U_T\right)^2}{2}$$

$$= 5 - \frac{0.5\times\left(1.3-1\right)^2}{2}\times 9 = 4.80\text{V}$$

输入U_{GS}为“1”时，输出U_{DS}为“0” → 反相器

例2：$U_S=5V$，$U_{GS}=5V$，$K=0.5mA/V^2$，$U_T=1V$，$R_L=9k\Omega$，$R_{ON}=1k\Omega$

逻辑”1”



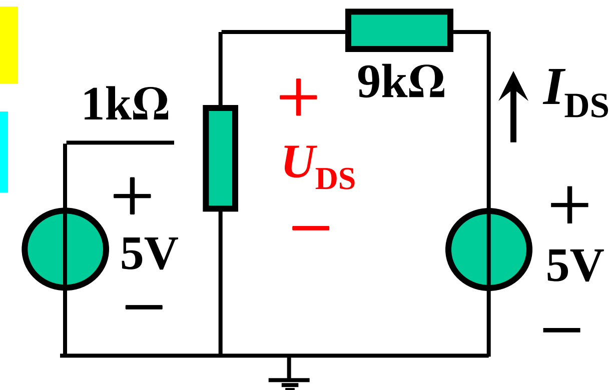
$U_{GS} > U_T$ → D、S导通

假设“可变电阻区”

$U_{DS} < (U_{GS} - U_T)$

$0.5 < (5-1)$

假设成立

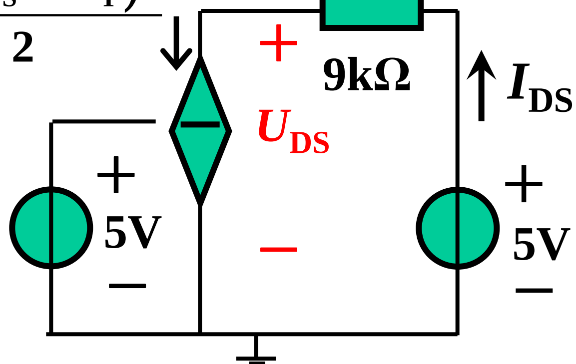


$$I_{DS} = \frac{K(U_{GS} - U_T)^2}{2}$$

假设“恒流源区”

$(U_{GS} - U_T) < U_{DS}$

(5-1)>(-31)



假设不成立

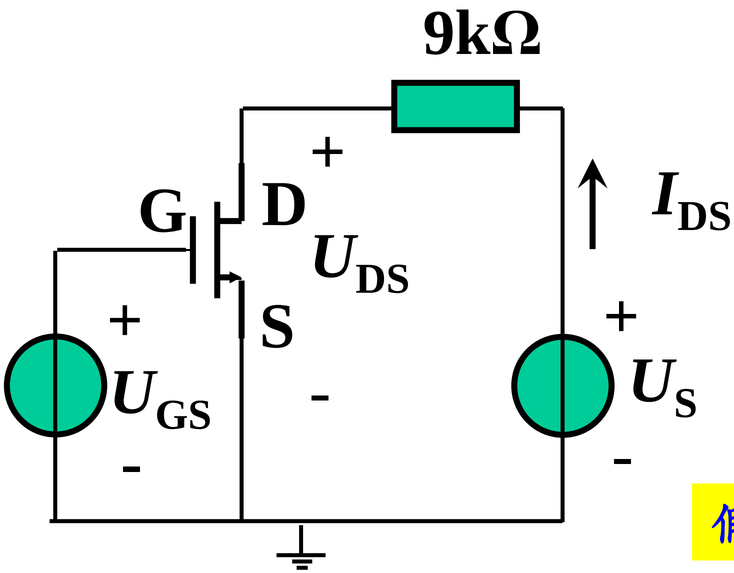
$$U_{DS} = U_S - I_{DS} R_L$$

$$U_{DS} = U_S - \frac{K(U_{GS} - U_T)^2}{2} R_L$$

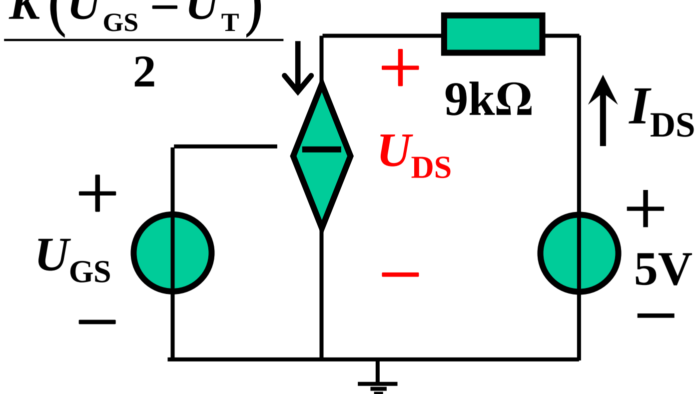
$$= 5 - \frac{0.5 \times (5-1)^2}{2} \times 9 = -31V$$

$U_S=5\text{V}$，$K=0.5\text{mA/V}^2$，$U_T=1\text{V}$，$R_L=9\text{k}\Omega$，$R_{ON}=1\text{k}\Omega$

问题2：u_{GS}在什么范围内，该模型是有效的？



$$I_{DS}=\frac{K\left(U_{GS}-U_T\right)^2}{2}$$



假设“恒流源区”

$$0<(U_{GS}-U_T)<U_{DS}$$

$$1<U_{GS}<2.28\text{V} \Leftarrow U_{DS}=5-\frac{0.5\left(U_{GS}-1\right)^2}{2}\times 9>U_{GS}-1$$

单选题 1分

设置

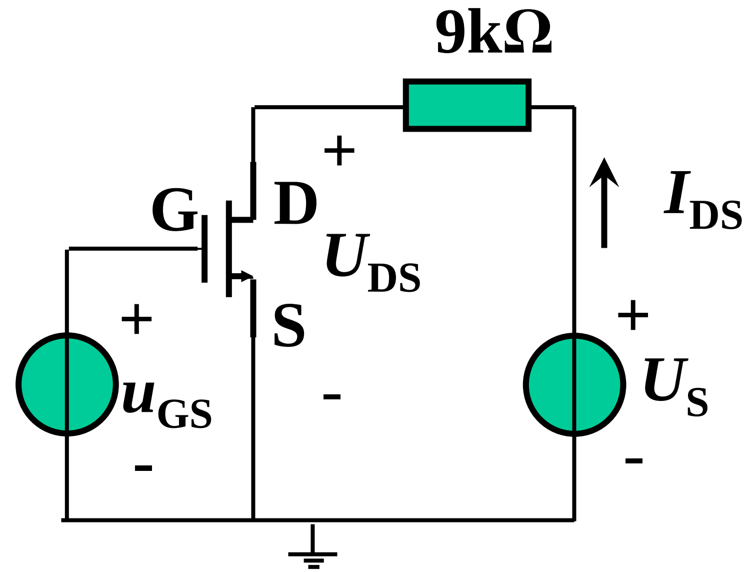
$U_S = 5V$，$K = 0.5mA/V^2$，$U_T = 1V$，$R_L = 9k\Omega$，$R_{ON} = 1k\Omega$

u_{GS}在什么范围内，根据前面方法

难以判断MOSFET的工作区域

(前页分析了恒流源区条件，

还需要分析电阻区条件)



A $u_{GS} > 1.5V$

B $u_{GS} > 3.5V$

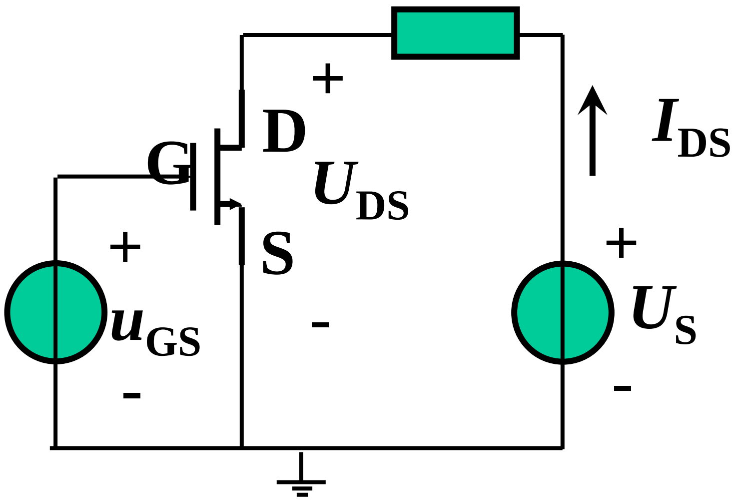
C $2.28V > u_{GS} > 1.5V$

D $1.28V > u_{GS} > 1.5V$

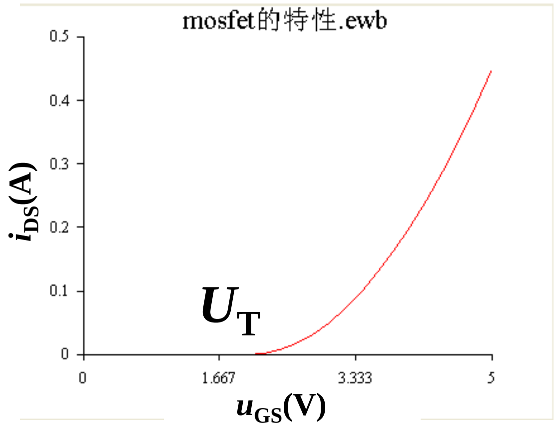
“红包”

提交

$U_S = 5V$，$K = 0.5mA/V^2$，$U_T = 1V$，$R_L = 9k\Omega$，$R_{ON} = 1k\Omega$



2.28V>u_{GS}>1.5V时，根据前面方法难以判断MOSFET的工作区域



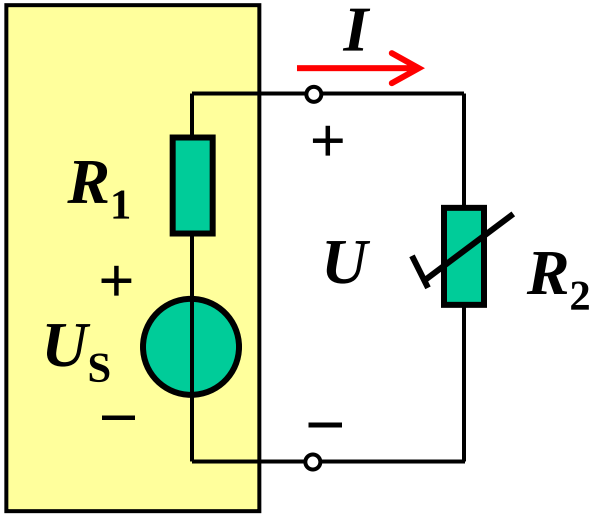
原因：模型不够完备

说明1：完备模型课后推送

说明2：如果只工作在远离交叉区域，不完备模型也可接受

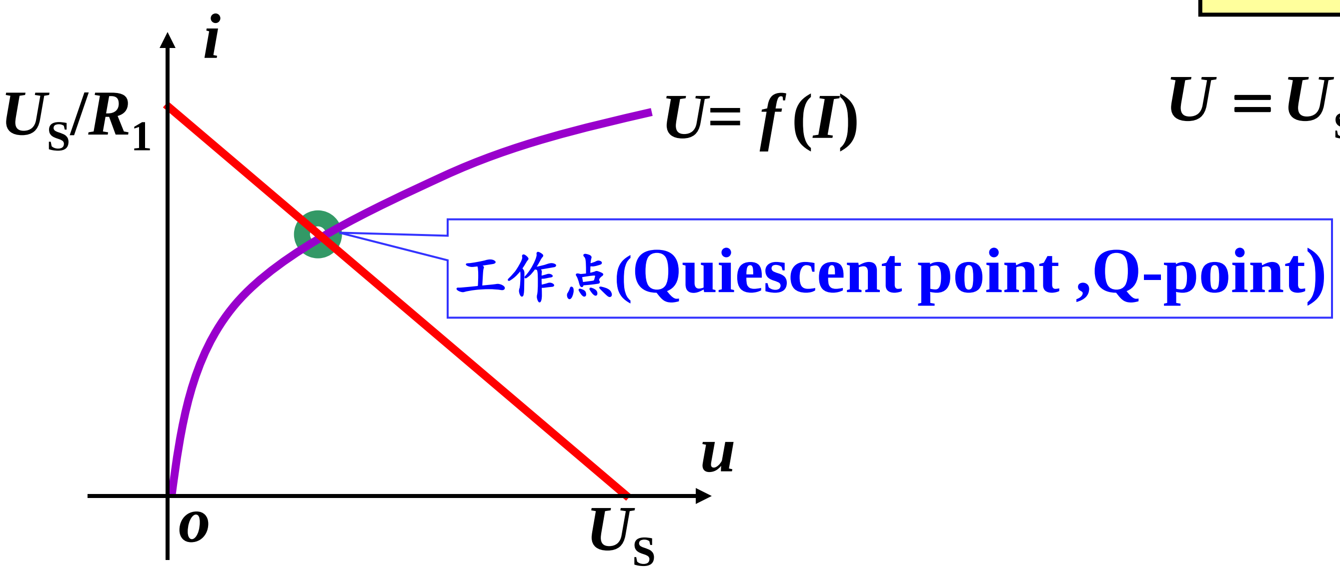
4 非线性电阻电路的图形解法

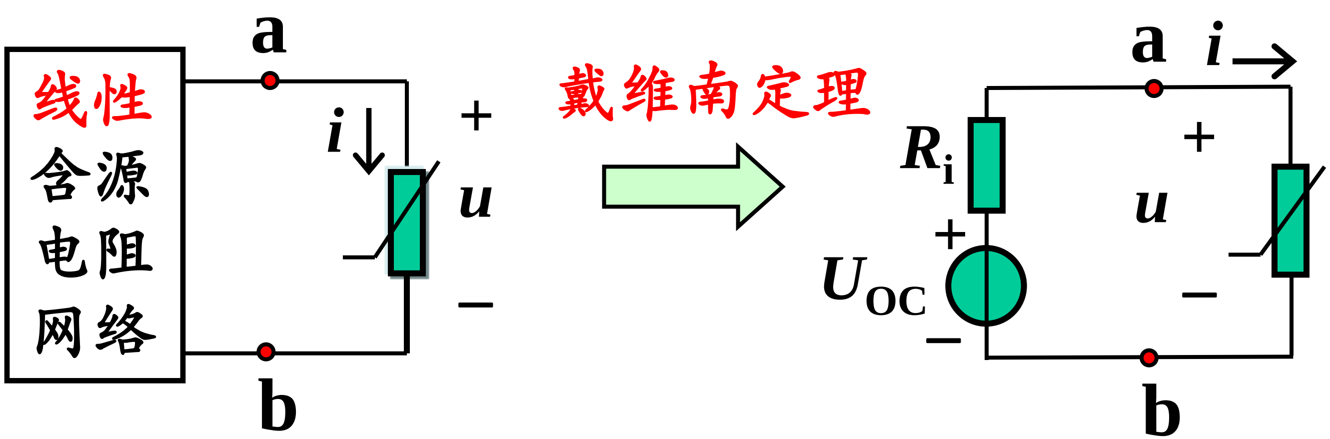
用图解法求解非线性电路

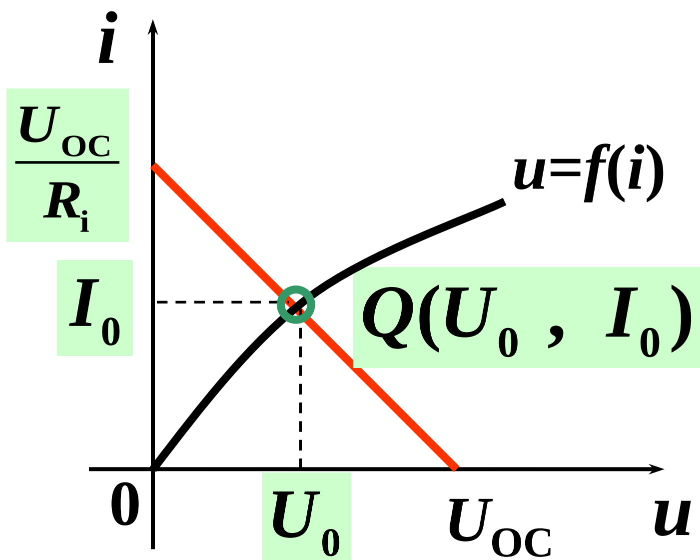


$U = U_S - R_1 I$

R_2:
$U = f(I)$







$$u = U_{OC} - R_i i$$

其特性为一直线。

两曲线交点坐标 (U_0, I_0)
即为所求解答。

图形解法的特点

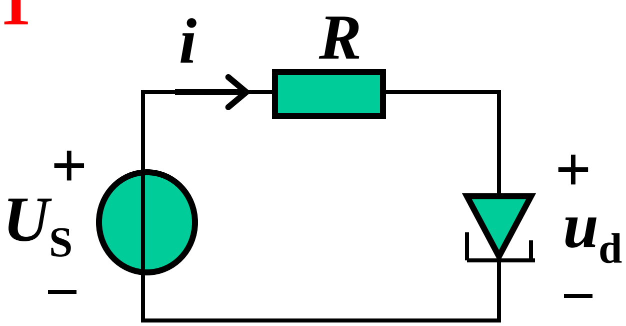
- 步骤
  - 将除非线性元件外的线性电路用戴维南等效
  - 在同一幅图中画出戴维南电路和非线性元件的*u-i*关系，其交点即为非线性电路的电压和电流（工作点, Q-point）
- 优点
  - 简单
  - 直观，物理意义清晰
- 缺点
  - 精度上有牺牲
  - 适宜求解只在一个端口上含有非线性电阻的电路

5 非线性电阻电路解的存在性与唯一性

线性电路一般有唯一解。

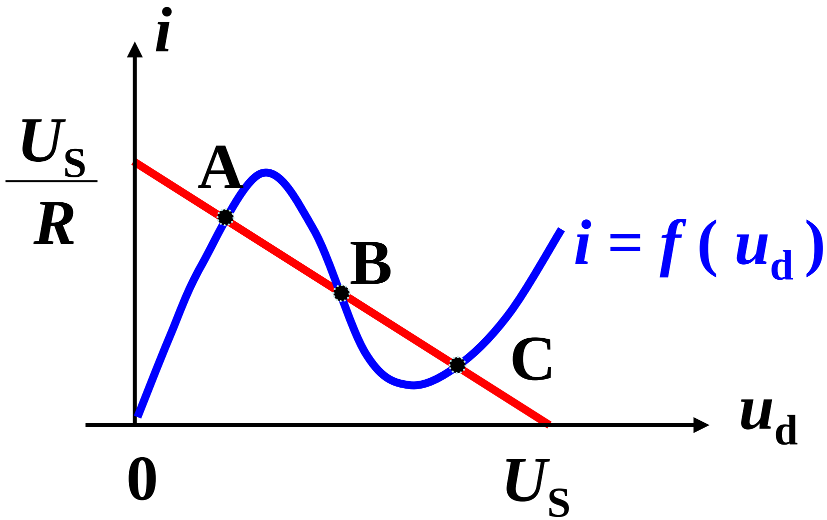
非线性电阻电路可以有多个解或没有解。

例1

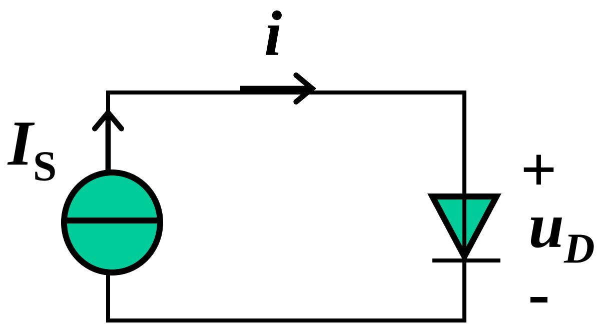


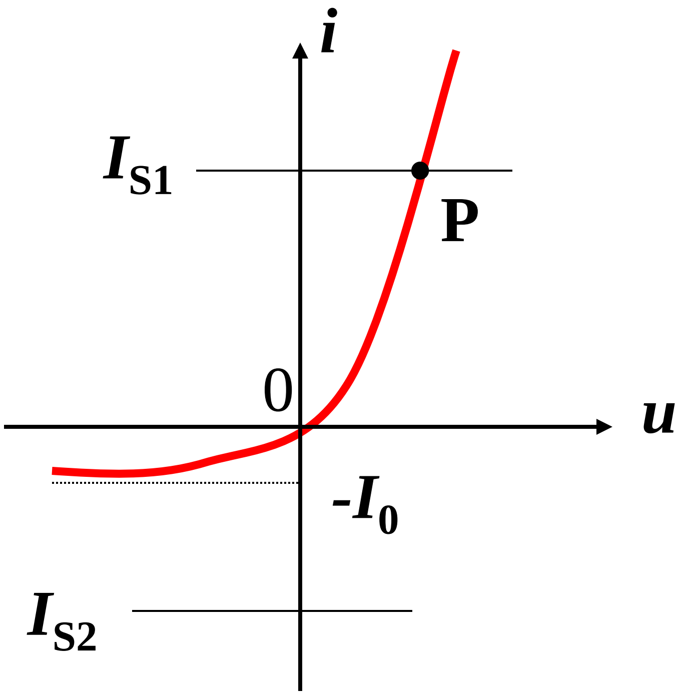
$$R\,i + u_d = U_S$$

$$i = f\,(u_d)$$



例2





当 $I_S > -I_0$ 时 有唯一解

当 $I_S < -I_0$ 时 无解

非线性电阻电路有唯一解的充分条件请参考教材4.1.2节