第十次习题课参考答案

习题 1. 构造一个三阶实对称矩阵，使得其特征值为 1,1,−1, 属于特征值 1 的线性无关的特征向量有 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ 和 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T$.

参考解答 1：

令 $\lambda_3 = -1$ 的一个特征向量是 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. 则应用不同特征值的特征向量的正交性，我们解得 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$. 令 $P_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ 1 & 2 & -t \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 若 $t \neq 0$, 则 P_t 可逆且 $P_t^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2t} & -\frac{1}{2t} & 0 \end{pmatrix}$. 我们得到

$$A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

参考解答 2：

令 $\lambda_3=-1$ 的一个特征向量为 $(a,b,c)^T$, 与其他特征向量正交

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 2a+2b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \end{cases} \quad \text{可令 } (a,b,c)^T=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)^T$$

特征值1对应一组正交的单位特征向量: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)^T$ 和 $(0,0,1)^T$

综上得到正交矩阵: $P_t=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A &= PDP^T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

图 1: 习题一参考解答 2

习题 2. 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶实对称矩阵, 其特征值是 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$.

(1) 证明对于任意 n 维列向量 $\alpha \in \mathbb{R}^n$, 均有

$$\lambda_1 \alpha^T \alpha \leq \alpha^T A \alpha \leq \lambda_n \alpha^T \alpha.$$

(2) 展示 $\lambda_1 \leq a_{11} \leq \lambda_n$.

(3) 假设 $A=(a_{ij})$ 是一个 2 阶实对称阵. 求 a_{12} 可能的最大值和最小值.

参考解答:

(1) 存在实正交阵 Q,

$$Q^TAQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

对于任意 n 维列向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$, 令 $\beta = Q\alpha$, 则有

$$\begin{aligned} \beta^T A\beta = \alpha^T Q^T AQ\alpha = \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \cdots + \lambda_n a_n^2 &\leq \lambda_n a_1^2 + \lambda_n a_2^2 + \cdots + \lambda_n a_n^2 \\ &\leq \lambda_n \alpha^T \alpha = \lambda_n \beta^T \beta \end{aligned}$$

因为 Q 是可逆矩阵, β 可以取任意 n 维列向量. 同理可证不等式 $\lambda_1 \alpha^T \alpha \leq \alpha^T A\alpha$.

(2) 令 $\alpha = e_1 = (1, 0, \cdots, 0)^T$. 则 $e_1^T A e_1 = a_{11}$. 由 (1), 不等式成立.

(3) 有两种二阶实正交阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} (\text{旋转}) \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix} (\text{反射})$$

(提示: 由正交阵定义, $a^2 + c^2 = 1 = b^2 + d^2 = 1$, 令 $a = \cos t, b = \cos\theta$, 再应用 $ab + cd = 0$.) 交换反射矩阵的两行, 我们得到

$$\begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ -\cos t & \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \end{pmatrix}$$

仍然是一个旋转矩阵. 因此, 一个 2 阶实对称阵能做如下分解

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

通过计算, 我们得到 $a_{12} = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)\sin 2t$, 因而, 有

$$-\frac{1}{2}|\lambda_2 - \lambda_1| \leq a_{12} \leq \frac{1}{2}|\lambda_2 - \lambda_1|.$$

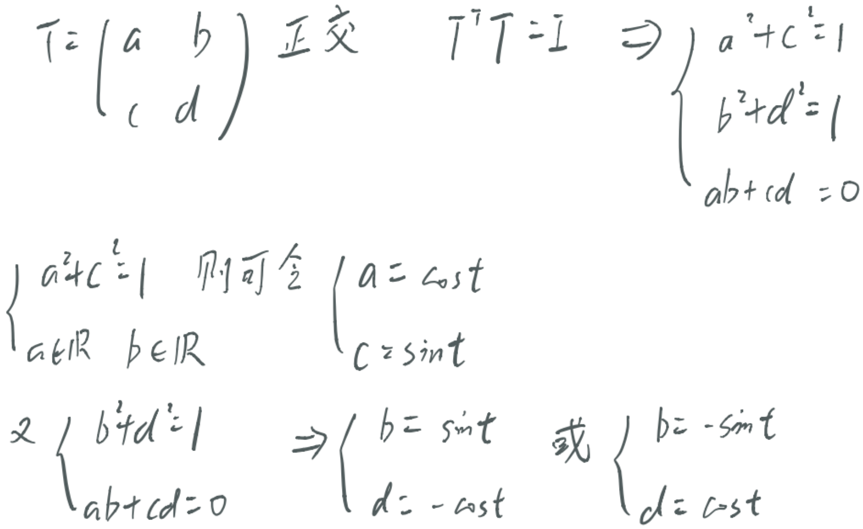

图 2: 存在两种实正交阵的推导

习题 3. 设 A,B 是 n 阶实对称矩阵, 其特征值分别是 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$ 和 $\mu_1 \le \mu_2 \le \cdots \le \mu_n$. 求证: $A+B$ 的特征值全部落在区间 $[\lambda_1+\mu_1, \lambda_n+\mu_n]$.

参考解答:

应用上题的结果, 任意 $\alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha^T A\alpha \le \lambda_n \alpha^T\alpha, \alpha^T B\alpha \le \mu_n \alpha^T\alpha$.

因为 $A+B$ 也是实对称阵, 特征值均是实数.

假设 $\eta \in \mathbb{R}$ 是一个特征值, 相应的特征向量是 β, 则 $\beta^T(A+B)\beta = \eta\beta^t\beta$.

另一方面,

$$\beta^T(A+B)\beta = \beta^T A\beta + \beta^T B\beta \le \lambda_n\beta^T\beta + \mu_n\beta^T\beta = (\lambda_n+\mu_n)\beta^T\beta.$$

因为 $\beta^T\beta > 0$, 我们得到 $\eta \le \lambda_n + \mu_n$.

同理可证明 $\eta \ge \lambda_1 + \mu_1$.

习题 4. 若 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶实方阵，且 A 的秩小于 n，则 A 的伴随矩阵的特征值包含至少 $n-1$ 个 0, 若存在非零特征值，则它是 $\sum_{i=1}^{n} C_{ii}$.

参考解答:

设 C 是 A 的代数余子式矩阵, C^T 是 A 的伴随矩阵.

因为 A 的行列式为 0，所以 $AC^T=0$. 如果 A 的秩等于 $n-1$，则 C^T 的秩不超过 1. 如果 A 的秩小于 $n-1$，则 $C^T=0$.

假设 $C^T \neq 0$, 则 C^T 的秩等于 1 , 则存在 $u,v \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, 使得 $C^T=uv^T$. 我们有

$$\det\left(\lambda I_n - C^T\right) = \lambda^n \det\left(I_n - \frac{1}{\lambda}uv^T\right) = \lambda^n \det\left(1-\frac{1}{\lambda}v^T u\right) = \lambda^{n-1}\left(\lambda - v^T u\right).$$

如果 $v^T u=0$, 则 C^T 只有特征值 $0(n$ 重根).

如果 $v^T u \neq 0$, 则 C^T 的全部特征值是 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0, \lambda_n=v^T u$. 进一步,

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\operatorname{tr}\left(C^T\right)=C_{11}+C_{22}+\cdots+C_{nn}.$$

其中 C_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式.

习题 5 (♡). 设 A 是一个 n 阶反对称矩阵, 即 $A^T=-A$ 且 A 是实矩阵. 证明:

(1) I_n+A 可逆且 $(I_n-A)(I_n+A)^{-1}$ 是正交阵.

(2) 假设 $n=3$, 则存在正交阵 Q 和向量 $b\in\mathbb{R}$, 使得 $Q^TAQ=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&b\\0&-b&0\end{pmatrix}$.

参考解答:

(1) 设 $x\in\mathbb{R}^n$ 满足 $(I_n+A)x=0$. 我们得到 $Ax=-x$. 因此 $x^TAx=-x^Tx$.
但是

$$x^TAx=\left(x^TAx\right)^T=x^TA^Tx=-x^TAx,$$

即 $x^TAx=0$.
所以 $x^Tx=0$, 从而 $(I_n+A)x=0$ 只有零解, 即 I_n+A 可逆.
令 $Q=(I_n-A)\,(I_n+\ \mathrm{A})^{-1}$:

$$Q^TQ=\left(I_n+A^T\right)^{-1}\left(I_n-A^T\right)(I_n-A)\,(I_n+A)^{-1}=(I_n-A)^{-1}\,(I_n+A)\,(I_n-A)\,(I_n+A)^{-1}$$

$$=(I_n-A)^{-1}\,(I_n-A)\,(I_n+A)\,(I_n+A)^{-1}=I_n.$$

(2) 因为 $|A|=|A^T|=|-A|=(-1)^3|A|,|A|=0$, 所以 A 不可逆.
存在 $\alpha_1\in\mathbb{R}^3$ 满足 $A\alpha_1=0$ 和 $\|\alpha_1\|=1$.
向量 α_1 可以扩充成 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.
由定义, $Q=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 是一个正交阵满足

$$AQ=(0,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0&c_1&c_4\\0&c_2&c_5\\0&c_3&c_6\end{pmatrix}$$

$$A\alpha_2=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3,A\alpha_3=c_4\alpha_1+c_5\alpha_2+c_6\alpha_3$$

所以:

$$Q^TAQ=\begin{pmatrix}0&c_1&c_4\\0&c_2&c_5\\0&c_3&c_6\end{pmatrix}.$$

因为 Q^TAQ 是一个反对称阵, $c_1=c_4=c_2=c_6=0,c_3=-c_5$.

习题 6 (练习 6.1.16). 设实对称矩阵 $S=\begin{bmatrix} O & A \\ A^{\mathrm{T}} & O \end{bmatrix}$.

1. 证明, $S\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$, 当且仅当 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}\\ z\end{bmatrix}$, 满足 $A\boldsymbol{z}=\lambda\boldsymbol{y}$,$A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\lambda\boldsymbol{z}$.
2. 证明, 如果 λ 是 S 的特征值, 则 $-\lambda$ 也是 S 的特征值.
3. 证明, 如果 $\lambda\neq 0$ 是 S 的特征值, 则 λ^2 是 $A^{\mathrm{T}}A$ 的特征值, 也是 AA^{T} 的特征值.
4. 证明, AA^{T} 和 $A^{\mathrm{T}}A$ 的非零特征值相同, 且有相同的重数.
5. 分别取 $A=I_2$ 或 $A=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, 求对应 S 的谱分解.

1. $Sx=\lambda x$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}0&A\\A^T&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix} \qquad x=\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}Az\\A^Ty\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda y\\ \lambda z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}Az=\lambda y\\ A^Ty=\lambda z\end{cases}$$

2. 令 $Sx=\lambda x$, $x=(y,z)^T$, 根据第1题有: $\begin{pmatrix}Az\\A^Ty\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda y\\ \lambda z\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0&A\\A^T&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-Az\\A^Ty\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda y\\ \lambda z\end{pmatrix}=-\lambda\begin{pmatrix}y\\-z\end{pmatrix}$$

$\therefore$ $-\lambda$ 也是特征值

3. 令 $Sx=\lambda x$, $x=(y,z)^T$, 则 $\begin{cases}Az=\lambda y\\ A^Ty=\lambda z\end{cases}$

$$AA^Ty=\lambda Az=\lambda^2 y$$
$$A^TAz=\lambda A^Ty=\lambda^2 z$$

图 3: 习题六参考解答其一

4. AA^T 和 A^TA 均实对称，代数重数 = 几何重数

令 V_λ 是 AA^T 关于特征值 λ 的特征子空间 $(\lambda \neq 0)$

令 V_λ' 是 A^TA 关于特征值 λ 的特征子空间 $(\lambda \neq 0)$

取 $x \in V_\lambda$，有 $AA^Tx = \lambda x$

令 $y = f(x) = \lambda^{-1}A^Tx$，则 $A^TAy = \lambda^{-1}A^TAA^Tx = A^Tx = \lambda y$

$\therefore f(x) \in V_\lambda'$ 　f 是从 V_λ 到 V_λ' 的线性映射

若 $f(x_1) = f(x_2)$，则 $0 = f(x_1 - x_2) = \lambda^{-1}A^T(x_1 - x_2)$，则 $A^T(x_1 - x_2) = 0$

$\therefore 0 = AA^T(x_1 - x_2) = \lambda(x_1 - x_2)$ 　$\therefore x_1 = x_2$

f 是单射

对 $\forall y \in V_\lambda'$，有 $A^TAy = \lambda y$

令 $x = Ay$，则 $AA^Tx = AA^TAy = \lambda Ay = \lambda x$

$\therefore x \in V_\lambda$ 且 $f(x) = \lambda^{-1}A^TAy = y$

综上：f 是从 V_λ 到 V_λ' 的线性双射

$\therefore \dim(V_\lambda) = \dim(V_\lambda')$

$\therefore AA^T$ 和 A^TA 的非零特征值相同，且有相同重数

5. $$\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}\right)^T$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \sqrt{2} & \\ & & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T$$

图 4: 习题六参考解答其二

习题 7 (练习 6.1.17). 构造一个实方阵 A, 满足 $AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A$ 但 $A \neq A^{\mathrm{T}}$, 并验证 A 和 A^{T} 具有相同的特征值和特征向量. 注意, 这里相同的特征向量不意味着对应的特征值相同.

注意: 事实上, 对实方阵 A, 如果 $AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A$, 则 A 和 A^{T} 具有相同的特征值和特征向量.

令 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$

∴ A 有特征值 i 和 $-i$

i 的特征子空间 $V_i = \mathrm{span}\{(1, i)^T\}$

$V_{-i} = \mathrm{span}\{(i, 1)^T\}$

A^T 有特征值 $-i$ 和 i

i 的特征子空间 $V_{-i} = \mathrm{span}\{(1, i)^T\}$

$V_i = \mathrm{span}\{(i, 1)^T\}$

图 5: 习题七参考解答

习题 8 (练习 6.2.7). (Hadamard 不等式) 给定对称正定矩阵 A, 求证:

1. 对任意 $\boldsymbol{y}$, $\det\left(\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}\right) \leqslant 0$;
2. 记 $A=[a_{ij}]$, 则 $\det(A) \leqslant a_{nn}A_{n-1}$, 其中 A_{n-1} 是 A 的 $n-1$ 阶顺序主子式;
3. $\det(A) \leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

利用上述结论证明: 如果实矩阵 $T=[t_{ij}]$ 可逆, 那么 $\det(T)^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n}(t_{1i}^2+t_{2i}^2+\cdots+t_{ni}^2)$.

注意: 练习 4.2.27 用不同方法证明了相同结论.

1. $$\begin{vmatrix} A & y \\ y^T & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & \\ -y^TA^{-1} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A & y \\ y^T & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I & -A^{-1}y \\ & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} A & \\ & -y^TA^{-1}y \end{vmatrix} = |A|\cdot(-y^TA^{-1}y)$$

A正定 $\Rightarrow |A|>0$ 且 A^{-1}正定 $\Rightarrow y^TA^{-1}y \geq 0$

$$\therefore \begin{vmatrix} A & y \\ y^T & 0 \end{vmatrix} = -(y^TA^{-1}y)|A| \leq 0$$

2. $$|A| = \begin{vmatrix} A_{n-1} & y \\ y^T & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & \\ -y^TA_{n-1}^{-1} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{n-1} & y \\ y^T & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I & -A_{n-1}^{-1}y \\ & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} A_{n-1} & \\ & a_{nn}-y^TA_{n-1}^{-1}y \end{vmatrix}$$
$$= |A_{n-1}|\cdot(a_{nn}-y^TA_{n-1}^{-1}y)$$
$$= |A_{n-1}|\cdot a_{nn} - |A_{n-1}|\cdot y^TA_{n-1}^{-1}y$$
$$\leq |A_{n-1}|\cdot a_{nn}$$

或者 $$|A| = \begin{vmatrix} A_{n-1} & y \\ y^T & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{n-1} & y \\ & a_{nn} \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} A_{n-1} & y \\ & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn}\cdot|A_{n-1}|$$

3. 由第2题, $|A| \leq a_{nn}\cdot|A_{n-1}| \leq a_{nn}\cdot a_{n-1\,n-1}\cdot|A_{n-2}| \leq \cdots \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

4. $|T|^2 = |T|\cdot|T^T| = |T\cdot T^T| \leq \prod_{i=1}^{n}(t_{1i}^2+t_{2i}^2+\cdots+t_{ni}^2)$

图 6: 习题八参考解答

习题 9 (练习 6.2.8). 证明 $A=\left[\dfrac{1}{i+j}\right]_{n\times n}$ 正定.

$$
\begin{aligned}
(a_1 \cdots a_n)\, A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j \cdot \left.\frac{t^{i+j}}{i+j}\right|_0^1 \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j t^{i+j-1}\, dt \\
&= \int_0^1 t\left(\sum_{i=1}^{n} a_i t^{i-1}\right)^2 dt \geq 0
\end{aligned}
$$

等号成立当且仅当 $a_1=\cdots=a_n=0$

$\therefore$ A 正定

图 7: 习题九参考解答

习题 10 (练习 6.2.19). 设 A,B 是 n 阶实对称矩阵, A 正定. 证明, 存在可逆矩阵 T, 使得 $T^{\mathrm{T}}AT$ 和 $T^{\mathrm{T}}BT$ 同时是对角矩阵.

∵ A 实对称

∴ 存在正交阵 X_1，使得: $X_1^T A X_1 = D_A$ $\quad D_A = diag(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 对角阵

∵ A 正定

∴ $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $\cdots$, $a_n > 0$

令 $X_2 = D_A^{-\frac{1}{2}} = diag(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{1}{\sqrt{a_2}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{a_n}})$

∴ $X_2^T X_1^T A X_1 X_2 = I$

而 $X_2^T X_1^T B X_1 X_2$ 仍实对称

∴ 存在正交阵 X_3，$X_3^T X_2^T X_1^T B X_1 X_2 X_3 = D_B$ 对角阵

而 $X_3^T X_2^T X_1^T A X_1 X_2 X_3 = X_3^T X_3 = I$

令 $T = X_1 X_2 X_3$ 即可

图 8: 习题十参考解答