第八周作业参考解答

于子宏

练习 3.3.1

易知行简化阶梯形为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 所以 $\mathcal{M}$ 的一组基为 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\mathcal{M}^\perp$ 的一组基就是矩阵的行空间, 可以是行简化阶梯形的行, 也可以是对应的原矩阵的行. 秩为 2, 任取两行即可, 为方便后续正交化计算, 我们取元素绝对值比较小的两行作为一组基, 为 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.

分别进行正交化可得:

$\mathcal{M}$ 的一组标准正交基为 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{310}}\begin{bmatrix} -12 \\ 9 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix}$. $\mathcal{M}^\perp$ 的一组标准正交基为 $\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{93}}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix}$.

■ *注意, 能选的时候, 尽量选元素绝对值小的向量作为基向量, 也尽量把元素绝对值小的向量放在正交化的第一步, 就可以减少计算复杂性, 降低出错的概率. 部分同学算出来正交基的分母是根号下好几千好几万, 啥数都有, 说实话我也不知道你算得对不对 orz 不过至少, 要把正交化前的基向量写对. 还有部分同学算的零空间秩为 1, 那肯定是错了:)*

练习 3.3.2

一组基为 $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. 正交化可得标准正交基为 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

■ *$\mathcal{M}^\perp$ 的一组标准基应为转置后的矩阵的零空间! 部分同学直接写的两个原向量是一组基, 是不对的.*

练习 3.3.6

由定义即得.

练习 3.3.7

1. 只需验证包含零向量, 以及对加法和数乘封闭.

2. $A = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_k \end{bmatrix}^T$.

3. 利用 2, 有 $(\{v_1, \cdots, v_k\}^\perp)^\perp = N(A)^\perp = R(A^T) = R(\begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_k \end{bmatrix}) = \operatorname{span}(\{v_1, \cdots, v_k\})$.

练习 3.3.9

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

■ *原空间的秩为 2, 先计算其正交补 (转置后的矩阵) 的零空间的基 (维数为 1), 然后算出在正交补中的投影 (见下一题的提示), 然后再与原向量相减, 即可求出在原空间的正交投影.*

练习 3.3.10

$$\frac{2}{13}\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

■ *直线的方向向量为* $q = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, *计算正交投影公式为* $b_1 = \frac{1}{q^T q}(qq^T)b = \frac{1}{q^T q}q(q^T b) = \frac{q^T b}{q^T q}q$. *注意一维情形都可以如此计算, 这也正是正交化的过程.*

练习 3.3.11

$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$. 距离为 $\sqrt{\frac{4}{3}}$.

■ *平面是二维的 (秩为 2), 先算在其正交补 (法向量为基) 中的正交投影 (方法见上一题的提示) 为* $\frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, *再相减即得. 距离为刚刚算的在法向量方向的投影的长度.*

练习 3.3.18

$$P_2 P_1 = P_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

练习 3.3.19

由定义即得.

练习 3.3.20

$\mathcal{R}(A) = \mathcal{N}(A)^\perp \iff \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^T)$. 易知对称矩阵, 反对称矩阵, 正交矩阵均满足条件.

上三角矩阵可举一反例为 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.