线性代数 第6讲

9月29日

第一章第5讲　初等矩阵与可逆矩阵

上一讲要点回顾

初等矩阵

可逆矩阵

高斯-若当消去法计算逆矩阵

映射的线性运算

定义 1.4.1 (映射的线性运算) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是两个线性映射, $k \in \mathbb{R}$，定义两个新的映射:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\colon \quad \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ \boldsymbol{x} &\mapsto \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}), \\ k\boldsymbol{A}\colon \quad \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ \boldsymbol{x} &\mapsto k\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

称 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，$k\boldsymbol{A}$ 为数 k 与 $\boldsymbol{A}$ 的数乘.

注意，定义中涉及的运算是陪域 $\mathbb{R}^m$ 中的线性运算. 特别地，由于向量之间不能做乘除法，两个映射之间也没有乘除运算.

命题 1.4.2 映射 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 和 $k\boldsymbol{A}$ 都是线性映射.

证. 根据定义，这里只验证 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的情形:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}')+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}')+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}') \\ &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}')+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}') = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{x}'), \\ (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(k\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{x})+\boldsymbol{B}(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})+k(\boldsymbol{x}) = k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$. □

矩阵的线性运算

定义 1.4.3 (矩阵的线性运算) 设 $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}, B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ 是两个 $m\times n$ 矩阵，$k\in\mathbb{R}$，定义

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix};$$

$$kA=k\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}.$$

1. 加法结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$；
2. 加法交换律：$A+B=B+A$；
3. 零矩阵：$A+O_{m\times n}=A$，其中 $O_{m\times n}$ 是所有元素全为 0 的矩阵，称为 $m\times n$ **零矩阵**，简记为 O；
4. 负矩阵：对任意 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$，记 $-A=\begin{bmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}$，它满足 $A+(-A)=O$，称它为 A 的**负矩阵**；
5. 单位数：$1A=A$；
6. 数乘结合律：$(kl)A=k(lA)$；
7. 数乘对数的分配律：$(k+l)A=kA+lA$；
8. 数乘对矩阵的分配律：$k(A+B)=kA+kB$.

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的表示矩阵分别为 $l\times m$ 矩阵 $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_m\end{bmatrix}$ 和 $m\times n$ 矩阵 $B=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_n\end{bmatrix}$，那么根据定义，线性映射 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$ 的表示矩阵 C 可以计算出来：

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{e}_1)) & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{e}_2)) & \cdots & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{e}_n))\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_1) & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_2) & \cdots & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_n)\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}A\boldsymbol{b}_1 & A\boldsymbol{b}_2 & \cdots & A\boldsymbol{b}_n\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

这启发我们给出如下对矩阵乘法的定义.

定义 1.4.12 (矩阵乘法) 给定 $l\times m$ 矩阵 A 和 $m\times n$ 矩阵 $B=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_n\end{bmatrix}$，定义二者乘积 AB 是如下 $l\times n$ 矩阵：

$$AB = A\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_n\end{bmatrix} := \begin{bmatrix}A\boldsymbol{b}_1 & \cdots & A\boldsymbol{b}_n\end{bmatrix}. \tag{1.4.5}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boxed{\boldsymbol{a}_{i1} \quad \boldsymbol{a}_{i2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_{is}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots & \boldsymbol{b}_{1j} & \vdots \\ \vdots & \boldsymbol{b}_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \boldsymbol{b}_{sj} & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \boxed{\boldsymbol{c}_{ij}} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{c}_{ij} &= \boldsymbol{a}_{i1}\boldsymbol{b}_{1j} + \boldsymbol{a}_{i2}\boldsymbol{b}_{2j} + \cdots + \boldsymbol{a}_{is}\boldsymbol{b}_{sj} \\ &= \sum_{k=1}^{s} \boldsymbol{a}_{ik}\boldsymbol{b}_{kj} \end{aligned}}$$

矩阵乘法满足结合律：$A(BC)=(AB)C$.

- 不满足交换律：$AB \neq BA$ 如果 $AB = BA$，则称 A 与 B 可交换.
- 不满足消去律：$AB = AC \not\Rightarrow B = C$
- 可能有零因子：$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0} \not\Rightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$，$A\neq 0$ 且 $B\neq 0 \not\Rightarrow AB\neq 0$

矩阵乘法的功能举例

练习 1.4.27 由标准坐标向量 $\boldsymbol{e}_i$ 定义 $E_{ij}=\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}}$，它是 (i,j) 元为 1，其他元素为 0 的矩阵.

1. 证明，当 $j\neq k$ 时，$E_{ij}E_{kl}=O$.
2. 对任意矩阵 A，求向量 $\boldsymbol{v}$ 使得 $A\boldsymbol{v}$ 是 A 的第 i 列.
3. 对任意矩阵 A，求向量 $\boldsymbol{v}$ 使得 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}A$ 是 A 的第 i 行.
4. 对任意矩阵 A，证明，$\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{e}_j$ 为 A 的 (i,j) 元.
5. 对 $\boldsymbol{e}_k\in\mathbb{R}^m$ 证明，$\sum\limits_{k=1}^{m}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k^{\mathrm{T}}=I_m$.
6. (阅读) 计算矩阵乘积 AB 的 (i,j) 元的另一种方法：设 A 有 m 列，B 有 m 行，则

$$\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}AB\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}AI_mB\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}A(\sum_{k=1}^{m}\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_k^{\mathrm{T}})B\boldsymbol{e}_j=\sum_{k=1}^{m}(\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{e}_k)(\boldsymbol{e}_k^{\mathrm{T}}B\boldsymbol{e}_j).$$

定义 1.4.7 (转置) 定义 $m \times n$ 矩阵 A 的**转置**:

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}.$$

即, A^{T} 是由对调 A 的行和列得到的 $n \times m$ 矩阵.

定义1.4.9(对称矩阵): $A = A^T$

反对称矩阵: $A = -A^T$

● 转置矩阵的运算性质

$(A^T)^T = A$, $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, $(AB)^T = B^T A^T$

设 $B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$, 则

$$(AB)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} A\boldsymbol{b}_1 & \cdots & A\boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} (A\boldsymbol{b}_1)^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ (A\boldsymbol{b}_n)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_n^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}.$$

练习 1.4.20 设 A, B 是同阶对称矩阵. 求证: AB 是对称矩阵当且仅当 $AB = BA$.

矩阵的乘幂运算与性质

- AA 有意义当且仅当 A 为方阵.　　$A^k = \underbrace{A\cdots A}_{k},\ k = 1,2,\cdots,n.$

- 若 f(x) 是 x 的 n 次多项式:　　$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$

- 对于方阵 A 可以定义:　$f(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n,$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},\ 求 A^k,\ k = 1,2,\cdots,n.$$

矩阵的行列初等变换的运算实现

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -5 & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & -3 & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

定义 1.5.1 (初等矩阵)　对恒同矩阵 I_n 做一次初等变换，得到的矩阵统称为**初等矩阵**：

1. 对换行变换：把 I_n 的第 i, j 行位置互换，得到**对换矩阵**

$$P_{ij} = \begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
\ddots & & & & & & & & \\
& 1 & & & & & & & \\
& & 0 & & & & 1 & & \\
& & & 1 & & & & & \\
& & & & \ddots & & & & \\
& & & & & 1 & & & \\
& & 1 & & & & 0 & & \\
& & & & & & & 1 & \\
& & & & & & & & \ddots
\end{bmatrix} &
\begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} \\
\begin{matrix} & & i & & & & j & & \end{matrix} &
\end{array};$$

2. 倍乘行变换：第 i 行乘非零常数 k，得到**倍乘矩阵**

$$E_{ii;k}=\begin{array}{cc} \begin{bmatrix}\ddots&&&&\\&1&&&\\&&k&&\\&&&1&\\&&&&\ddots\end{bmatrix} & \begin{array}{c}\\ \\ i\\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc}&&i&&\end{array} & \end{array};$$

3. 倍加行变换：把第 i 行的 k 倍加到第 j 行上，得到**倍加矩阵**

$$E_{ji;k}=\begin{array}{cc} \begin{bmatrix}\ddots&&&&\\&1&&&\\&&\ddots&&\\&k&&1&\\&&&&\ddots\end{bmatrix} & \begin{array}{c}\\ i\\ \\ j\\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc}&i&&j&\end{array} & \end{array}\ (j>i),\quad E_{ji;k}=\begin{array}{cc} \begin{bmatrix}\ddots&&&&\\&1&&k&\\&&\ddots&&\\&&&1&\\&&&&\ddots\end{bmatrix} & \begin{array}{c}\\ j\\ \\ i\\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc}&j&&i&\end{array} & \end{array}\ (j<i).$$

命题 1.5.2 1. 若矩阵 I_m 经过某一初等行变换得到矩阵 T，则任意 $m\times n$ 矩阵 A 经过相同初等行变换得到矩阵 TA.

2. 若矩阵 I_n 经过某一初等列变换得到矩阵 T，则任意 $m\times n$ 矩阵 A 经过相同初等列变换得到矩阵 AT.

初等变换的矩阵实现

定义 1.3.3 (初等变换) 对方程组施加的如下三类变换的每一类都称为方程组的**初等变换**：

1. **对换变换**：互换两个方程的位置；
2. **倍乘变换**：把某个方程两边同乘一个非零常数 k；
3. **倍加变换**：把某个方程的 k 倍加到另一个方程上.

求下列方程组的通解:
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} \color{red}{1} & 0 & -1 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & \color{red}{1} & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

可逆矩阵

- 在解方程 $ax = b$ 的时候，如果 $a \neq 0$，等式两边同乘以 a^{-1}，得 $x = a^{-1}b$.
- 线性方程组 $AX = b$，能否在一定条件下引进 A^{-1} 的概念，使得解为 $X = A^{-1}b$？
- 由 $a^{-1}a = 1$ 到 $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

定义1.5.3（逆矩阵）设 A 是 n 阶方阵，如果存在 n 方阵 B，使得 $AB = BA = I_n$，则称 A 是可逆矩阵或非奇异矩阵，并称 B 是 A 的逆（矩阵）。

A 的逆矩阵唯一，表示为 A^{-1}

不可逆的矩阵称为奇异矩阵。

定义1.5.3（逆矩阵）设 A 是 n 阶方阵，如果存在 n 方阵 B，使得 $AB = BA = I_n$，则称 A 是可逆矩阵或非奇异矩阵，并称 B 是 A 的逆（矩阵）。

定理 若矩阵 A 可逆，则 A 的逆矩阵唯一.

证明 设 B, C 都是矩阵 A 的逆矩阵， 则有

$$BA = AC = I$$

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C. \qquad \blacksquare$$

- 矩阵 A 的如果可逆， 其唯一的逆矩阵记为A^{-1}， 故有 $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

旋转变换 $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$

反射变换 $\begin{bmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{bmatrix}$

对换变换

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

伸缩变换

$$\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1/k & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

错切变换

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -k & 1\end{bmatrix}$$

命题 1.5.4 初等矩阵可逆，且 $P_{ij}^{-1}=P_{ij}, E_{ii;k}^{-1}=E_{ii;k^{-1}}, E_{ji;k}^{-1}=E_{ji;-k}$.

命题 1.5.5 对角矩阵 D 可逆当且仅当对角元素都不为零，且 D 可逆时有

$$D^{-1}=\begin{bmatrix}d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}d_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^{-1}\end{bmatrix}.$$

命题1.5.4　初等矩阵可逆且逆还是初等矩阵:

$$
\begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{ccccccc} \quad & \quad & \text{第 }i\text{ 列} & \quad & \text{第 }j\text{ 列} & \quad & \quad \end{array} & \\
E_{ji,k}= & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & k & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 }i\text{ 行} \\ \\ \text{第 }j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

$$E_{ji,k}E_{ji,-k}=I,$$

$$E_{ji,-k}E_{ji,k}=I,$$

$$E_{ji,k}^{-1}=E_{ji,-k}.$$

主观题 10分

设置

练习 1.5.7 求 $A = \begin{bmatrix} & a_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1} \\ a_n & & & \end{bmatrix}$ 的逆矩阵，其中 $a_i \neq 0$.

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

逆矩阵与解线性方程组

考虑线性方程组 $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$A = (a_{ij})_{n\times n}, X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$$

写成矩阵形式 AX = b.

$$AX = b \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}b \Rightarrow X = A^{-1}b$$

- 因为矩阵乘法不满足交换律，所以对于同阶方阵 *A* 与 *B*，若 A 可逆，一般$A^{-1}B \neq BA^{-1}$. 即，左除和右除不等价

例如，设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, 则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}, \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}.$$

逆矩阵的几个性质

命题1.5.6 若矩阵A，B可逆

(1) A^{-1}可逆，且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$

(2) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(3) A^{T}可逆，且$(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$，记为$A^{-T}$

(2′) $(A_1A_2\cdots A_k)^{-1}=A_k^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$

定理 1.5.7 设 A 是 n 阶方阵，以下叙述等价：

1. A 可逆；
2. 任取 n 维向量 $\boldsymbol{b}$，方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解唯一，且 $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$；
3. 齐次方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解；
4. A 对应的阶梯形矩阵有 n 个主元；
5. A 对应的行简化阶梯形矩阵一定是 I_n；
6. A 是有限个初等矩阵的乘积.

记系数矩阵为 A，对 $\begin{bmatrix} A & I_2 \end{bmatrix}$ 消元：

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{倍加变换}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{倍乘变换}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{\text{倍加变换}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

因此 A 可逆，且 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

那么 A^{-1} 的列向量组有什么实际含义？由 $AA^{-1} = I_2$ 可得，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

求逆矩阵的初等变换法（Gauss-Jordan消去法）

可逆方阵 A 可仅经过一系列行初等变换化为单位阵.

$P_s \cdots P_1 A = I,$ $\quad P_s \cdots P_1 I = A^{-1}$

所以完全相同的变换可以把 I 化为 A^{-1}. $\quad A^{-1}[A, I] = [I, A^{-1}]$

构造一个分块矩阵: $[A, I] \xrightarrow{\boxed{\text{仅用行初等变换}}} [I, A^{-1}]$

Gauss-Jordan消去法求A的逆矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{bmatrix}$.

解　先将 A 化为阶梯形矩阵，再化为单位阵：

$$[A,I]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}0&2&-1&1&0&0\\1&1&2&0&1&0\\-1&-1&-1&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&0&1&0\\0&2&-1&1&0&0\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-1/2&-3/2&-5/2\\0&1&0&1/2&1/2&1/2\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right],\qquad A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&-3&-5\\1&1&1\\0&2&2\end{bmatrix}$$

设 $A=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&-1\\-1&1&-3\end{bmatrix}$，试判断 A 是否可逆.

解 $[A,I]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\0&2&-1&0&1&0\\-1&1&-3&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\0&2&-1&0&1&0\\0&2&-1&1&0&1\end{array}\right]$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\0&2&-1&0&1&0\\0&0&0&1&-1&1\end{array}\right],$$

练习 1.5.8 求下列矩阵方程的解: $\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}4&-1\\2&1\\1&0\end{bmatrix}$.

作 业（9月29日）

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

练习1.6

1(1,2,5)， 2(1,2,4)，3， 4， 6(1,2,4,7,8)

10月4日提交

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~