线性代数 第23讲

11月29日

实对称矩阵

实对称矩阵的正交对角化

实对称阵对角化的方法

瑞雷（Rayleigh）商

例题选讲

- 对于一般 n 阶矩阵而言，只有少数能够对角化.
- 但是任何一个实对称阵一定可以对角化（在实数范围里）.
- 不仅如此，我们还可以得到一个更强的结论.
- 任意实对称阵 A 不仅可对角化，而且能找到一个正交阵 Q，

  使得 $Q^{-1}AQ = Q^{T}AQ$ 为对角阵. 即 A 可正交对角化.
- 思考：Q是否唯一？

实对称阵的特征值均为实数

命题6.1.1　设 A 是 n 阶实对称阵，则 A 的特征值都是实数.

证　设复数 λ 是 A 的特征值，在 C^n 中存在一个非零向量 X，

使得 AX=λX　(1)，　对(1)式两端取共轭有　$\overline{AX} = \overline{\lambda X}$

但是 A 是实矩阵，$\overline{A} = A$，故有　$A\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$　(2)

X^T左乘(2)式两端，　得到　$X^T A\overline{X} = \overline{\lambda} X^T \overline{X}$　(3)

因为 $A=A^T$，并注意到　$X^T A\overline{X}$ 及 $X^T \overline{X}$ 是数，

$$X^T A\overline{X} = (X^T A\overline{X})^T = \overline{X}^T AX = \overline{X}^T \lambda X = \lambda \overline{X}^T X = \lambda(\overline{X}^T X)^T = \lambda X^T \overline{X} \qquad (4)$$

由(3)及(4)式，　有 $(\lambda - \overline{\lambda})X^T \overline{X} = 0$，由 $X \neq 0$ 知 $X^T \overline{X} \neq 0$. 所以 $\lambda - \overline{\lambda} = 0$

即 λ 是实数.

实对称阵属于不同特征值的特征向量互相正交

设 A 是 n 阶实对称矩阵，λ_1, λ_2 是 A 的两个相异的特征值，X_1, X_2 分别是属于 λ_1和λ_2 的特征向量，则 X_1和X_2 必正交.

证明：设 λ_1 和 λ_2 是对称矩阵 A 的两个互不相等的特征值 x_1 和 x_2 分别是属于特征值 λ_1 和 λ_2 的特征向量，即 $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $\quad Ax_2 = \lambda_2 x_2$

$$x_2^T A x_1 = \lambda_1 x_2^T x_1$$

$$\left(x_2^T A x_1\right)^T = x_1^T A x_2 = \lambda_2 x_1^T x_2$$

$$\lambda_1 x_2^T x_1 = \lambda_2 x_1^T x_2 \Rightarrow x_1^T x_2 = 0.$$

定理6.1.2（实对称矩阵的谱分解）

对 n 阶实对称矩阵 A，存在 n 阶正交矩阵 Q 和实对角矩阵 Λ，使得 $A = Q\Lambda Q$T.

证明：对 A的阶数用归纳法. 当 n=1 结论明显成立.

假定 n-1 命题成立，证 n的情形.

根据 A 实对称，设 （ λ_1 , q_1 ） 是 A 的一个实特征对，设 $\|\boldsymbol{q}_1\| = 1$.

把 $\boldsymbol{q}_1$ 扩充成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基 $\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_n$，令 $Q_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 & Q_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 & \cdots & \boldsymbol{q}_n \end{bmatrix}$.
由于 $\boldsymbol{q}_1$ 与 Q_{12} 的列向量都正交，

$$Q_1^{\mathrm{T}} A Q_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}} A Q_{12} \\ Q_{12}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{q}_1 & Q_{12}^{\mathrm{T}} A Q_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q}_1 & \lambda_1 \boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}} Q_{12} \\ \lambda_1 Q_{12}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q}_1 & Q_{12}^{\mathrm{T}} A Q_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & Q_{12}^{\mathrm{T}} A Q_{12} \end{bmatrix}.$$

注意 $Q_{12}^{\mathrm{T}} A Q_{12}$ 是 $n-1$ 阶实对称矩阵，根据归纳假设，存在正交矩阵 Q_2 和实对角矩阵 Λ_2，使得 $Q_{12}^{\mathrm{T}} A Q_{12} = Q_2 \Lambda_2 Q_2^{\mathrm{T}}$. 因此

$$A = Q_1 \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & Q_2 \Lambda_2 Q_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} Q_1^{\mathrm{T}} = Q_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} Q_1^{\mathrm{T}}.$$

定义 6.1.5 (正交相似) 对实方阵 A, B，如果存在正交矩阵 Q 使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ = B$，则称 A 和 B **正交相似**，或 A 正交相似于 B.

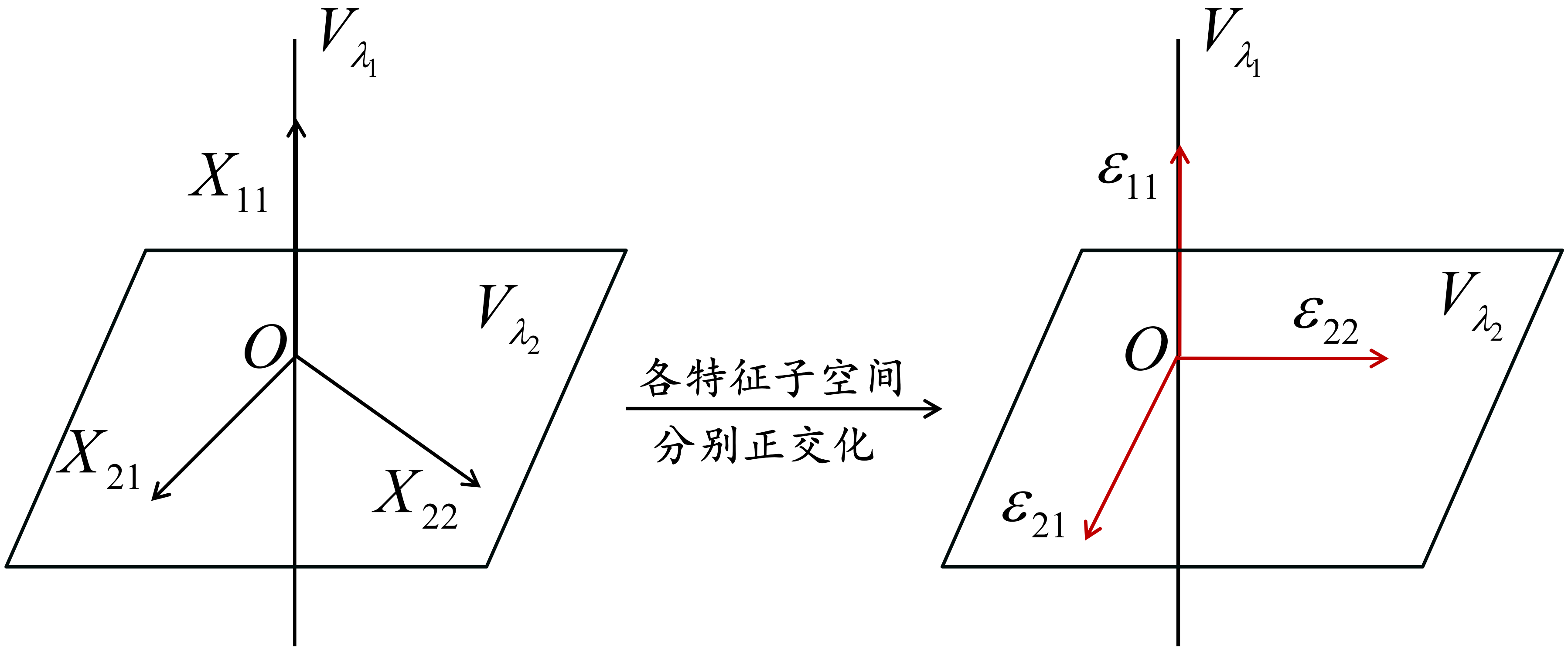
命题 6.1.6 实方阵的正交相似关系是等价关系.

- 这个定理的证明并没有使用矩阵可对角化的充分必要条件去证明.
- 定理说明实对称矩阵不仅特征值都是实数，而且每个特征值的几何重数一定等于代数重数.

问题：如何去求相应的正交矩阵Q?

- 我们需要A的n个彼此正交的特征向量，也就是有特征向量组成的 R^n 的标准正交基.

注记: 把 $\boldsymbol{n}$ 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征子空间的标准正交基求出来，合在一起就构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.以它们为列向量的矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵,通过它可将 $\boldsymbol{A}$ 正交相似对角化.



实对称阵对角化的方法

(1) 求A的特征值，得到 $f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$，其中$\lambda_i\neq\lambda_j, i\neq j.$

(2) 对每个λ_i，求方程组$(\lambda_i I-A)X=0$的基础解系，$i=1, 2, \ldots, s$，得到

$$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{in_i}, i=1,2,\cdots,s.$$

(3) 对每组向量 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{in_i}$ 进行施密特正交化，得一个标准正交向量组：

$$\varepsilon_{i1},\varepsilon_{i2},\cdots,\varepsilon_{in_i}, i=1,2,\cdots,s.$$

(4) 令 $Q=(\varepsilon_{11},\cdots,\varepsilon_{1n_1},\varepsilon_{21},\cdots,\varepsilon_{2n_2},\cdots,\varepsilon_{s1},\cdots,\varepsilon_{sn_s})$，则 Q 是正交矩阵，而且

$$Q^{-1}AQ=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_2,\cdots,\lambda_s,\cdots,\lambda_s),\text{其中有}n_i\text{个}\lambda_i, i=1,2,\cdots,s.$$

例 题

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$ 求正交阵Q, 使得$Q^{-1}AQ$成对角阵.

解 (1) $$|\lambda I - A| = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda-1)^3(\lambda+3).$$

得到 $\lambda_1 = 1, n_1 = 3; \lambda_2 = -3, n_2 = 1.$

(2) 将 λ_1=1, 代入 $(\lambda I-A)X=0$, 得 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

求得基础解系： $\alpha_{11} = (1,0,0,-1)^T, \alpha_{12} = (0,1,-1,0)^T, \alpha_{13} = (1,1,0,0)^T$.

将 λ_2=–3 代入 $(\lambda I-A)X=0$，得 $\begin{cases} -3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

解得基础解系 $\alpha_{21} = (1,-1,-1,1)^T$.

(3) 施密特正交化

先正交化：$\beta_{11}=\alpha_{11}=(1,0,0,-1)^T$,

$\beta_{12}=\alpha_{12}=(0,1,-1,0)^T$,

$$\beta_{13}=\alpha_{13}-\frac{(\alpha_{13},\beta_{11})}{(\beta_{11},\beta_{11})}\beta_{11}-\frac{(\alpha_{13},\beta_{12})}{(\beta_{12},\beta_{12})}\beta_{12}=\frac{1}{2}(1,1,1,1)^T,$$

$\beta_{21}=\alpha_{21}=(1,-1,-1,1)^T$.

再单位化：$\varepsilon_{11}=\dfrac{\beta_{11}}{|\beta_{11}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,-1)^T,\ \varepsilon_{12}=\dfrac{\beta_{12}}{|\beta_{12}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0)^T,$

$$\varepsilon_{13}=\frac{\beta_{13}}{|\beta_{13}|}=\frac{1}{2}(1,1,1,1)^T,\ \varepsilon_{21}=\frac{\beta_{21}}{|\beta_{21}|}=\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)^T.$$

(4) 令 $Q=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$,

则Q是正交阵，且 $Q^{-1}AQ=Q^{T}AQ=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix}$.

瑞雷（Rayleigh）商

定义 6.1.7 (Rayleigh 商) 给定实矩阵 A 和非零向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，实数 $\dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}$ 称为 $\boldsymbol{x}$ 关于 A 的 Rayleigh 商.

若 A 和 B 正交相似，即存在正交矩阵 Q 使得 $Q^{\mathrm{T}} A Q = B$，则

$$\frac{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} B \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}} = \frac{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} A Q \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}} = \frac{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} A Q \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} Q \boldsymbol{y}} = \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}},$$

即 $\boldsymbol{x} = Q\boldsymbol{y}$ 关于 A 的 Rayleigh 商等于 $\boldsymbol{y}$ 关于 B 的 Rayleigh 商.

命题 6.1.8 设实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$，相应的特征向量为 $\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_n$，则

$$\lambda_1 = \max_{\boldsymbol{x} \neq 0} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}, \qquad \lambda_i = \max_{\substack{\boldsymbol{x} \neq 0 \\ \boldsymbol{x} \perp \operatorname{span}(\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_{i-1})}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}, i = 2, \cdots, n.$$

类似地，

$$\lambda_n = \min_{\boldsymbol{x} \neq 0} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}, \qquad \lambda_i = \min_{\substack{\boldsymbol{x} \neq 0 \\ \boldsymbol{x} \perp \operatorname{span}(\boldsymbol{q}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{q}_n)}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}, i = 1, \cdots, n-1.$$

证. 先说明后者能由前者简单得到. 考察 $-A$，注意 $-A$ 的特征值是 $-\lambda_n \geqslant \cdots \geqslant -\lambda_1$，由前者就得到 $-\lambda_n = \max\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(-A)\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$，于是 $\lambda_n = \min\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$. 另一等式类似.

下证 $\lambda_1 = \max\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$. 记 $A = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$ 为 A 的谱分解. 则

$$\max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}} = \max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}QQ^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}} = \max_{\boldsymbol{y}=Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\Lambda\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}} = \max_{\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2}{y_1^2 + \cdots + y_n^2} = \lambda_1,$$

最后一个等式成立，是因为 $\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \leqslant \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_1 y_n^2 = \lambda_1(y_1^2 + \cdots + y_n^2)$，而令 $y_1 = 1, y_2 = \cdots = y_n = 0$，等式成立.

再证 $\lambda_i = \max\limits_{\substack{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x}\perp\mathrm{span}(\boldsymbol{q}_1,\cdots,\boldsymbol{q}_{i-1})}} \dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$. 注意 $\boldsymbol{x} \perp \mathrm{span}(\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_{i-1}) \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \mathrm{span}(\boldsymbol{q}_i, \cdots, \boldsymbol{q}_n)$. 则

$$\begin{aligned}
\max_{\substack{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x}\in\mathrm{span}(\boldsymbol{q}_i,\cdots,\boldsymbol{q}_n)}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}} &= \max_{\substack{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x}\in\mathrm{span}(\boldsymbol{q}_i,\cdots,\boldsymbol{q}_n)}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}QQ^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}} \\
&= \max_{\substack{\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{y}\in\mathrm{span}(\boldsymbol{e}_i,\cdots,\boldsymbol{e}_n)}} \frac{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\Lambda\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}} \qquad (\text{变量替换}\boldsymbol{y} = Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}) \\
&= \max_{\substack{\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{y}\in\mathrm{span}(\boldsymbol{e}_i,\cdots,\boldsymbol{e}_n)}} \frac{\lambda_i y_i^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2}{y_i^2 + \cdots + y_n^2} = \lambda_i.
\end{aligned}$$

□

例题选讲

1. $A\in M_3$且是实对称矩阵，已知A的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$，又对应于$\lambda=1$的特征向量为 $\xi_1=(2,1,2)^T$，$\xi_2=(1,2,-2)^T$，则对应于$\lambda=-1$的特征向为.

2. 已知矩阵A是三阶实对称阵，它的特征值分别是 1，1，2，且属于2 的特征向量是$(1,0,1,)^T$，求A=?

3. 若A可逆且可对角化，则A*是否可对角化？ 理由是?

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 $\boldsymbol{n}$ 阶矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=0$, 则 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 有公共的特征向量？

设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$，若 $(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0$, 且 $\lambda_1\neq\lambda_2$,

证明：$\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵 $\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_2\end{bmatrix}$.

作 业（11月29日）

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

练习6.1

1(1,2,3)，2，3，5，6，9，10，14

12月6日提交

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~