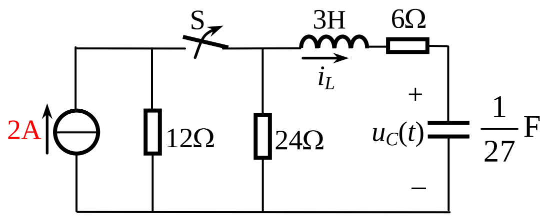
第 8 章　二阶电路

8-1　题图 8-1 所示电路换路前已达稳态，t=0 时打开开关 S。求 $u_C(t)$的零输入响应，并定性画出其变化曲线。



题图 8-1

解　由换路前的稳态电路可得

$$u_C(0^-) = \frac{12 \times 24}{12+24} \times 2 = 16\text{V}，\ i_L(0^-) = 0$$

根据换路定则，有

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 16\text{V}，\ i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$$

由 0^+ 电路可得

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+} = \frac{1}{C} i_L(0^+) = 0$$

换路后关于 u_C 的微分方程为

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0$$

代入参数值，整理得

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + 10\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + 9u_C = 0$$

上述方程对应的特征方程为

$$p^2 + 10p + 9 = 0$$

解得特征根为 $p_1 = -1$，$p_2 = -9$。

u_C 的解答表达式为

$$u_C(t) = A\mathrm{e}^{-t} + B\mathrm{e}^{-9t}$$

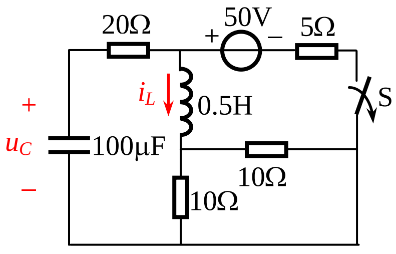
由起始值定参数，有

$$\begin{cases} A+B=16 \\ -A-9B=0 \end{cases}$$

解得 $A=18$， $B=-2$。所以

$$u_C(t)=18\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-9t}\ \mathrm{V} \qquad (t\geq 0)$$

8-2　题图 8-2 所示电路换路前已达稳态，t=0 时打开开关 S。求 $u_C(t)$，并定性画出其变化曲线。



题图 8-2

解　由换路前的稳态电路可得

$$u_C(0^-)=\frac{10//10}{10//10+5}\times 50=25\mathrm{V}，\ i_L(0^-)=\frac{50}{10//10+5}=5\mathrm{A}$$

根据换路定则，有

$$u_C(0^+)=u_C(0^-)=25\mathrm{V}，\ i_L(0^+)=i_L(0^-)=5\mathrm{A}$$

由 0^+ 电路可得

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+}=-\frac{1}{C}i_L(0^+)=-\frac{1}{100\times 10^{-6}}\times 5=-5\times 10^4\ \mathrm{V/s}$$

换路后关于 u_C 的微分方程为

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0$$

代入参数值，整理得

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+50\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+2\times 10^4u_C=0$$

上述方程对应的特征方程为

$$p^2+50p+2\times 10^4=0$$

解得特征根为 $p_{1,2}=-25\pm \mathrm{j}139$。

u_C 的解答表达式为

$$u_C(t)=A\mathrm{e}^{-25t}\sin(139t+\theta)$$

由起始值定参数，有

$$\begin{cases}A\sin\theta=25\\-25A\sin\theta+139A\cos\theta=-5\times10^4\end{cases}$$

解得 $\theta=176°$， $A=358$。所以

$$u_C(t)=358\mathrm{e}^{-25t}\sin(139t+176°)\ \mathrm{V}\qquad（t\geq0）$$

$u_C(t)$ 的定性变化曲线如题图 8-2(a)所示。

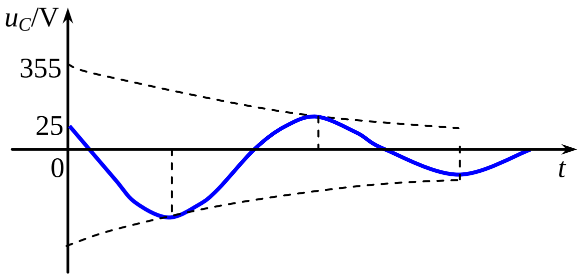
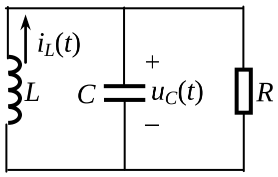


图 8-2(a)

8-3 题图 8-3 所示电路中电容无初始储能，电感中有初始电流 $i_L(0)$=10A，且 L=7H，C=0.0238F。求 R 在下列三种情况下的电容电压 $u_C(t)$：(1)R=6Ω；(2)R=8.575Ω；(30 R=14.85Ω。并分别定性画出三种情况下 $u_C(t)$ ($t>0$)的变化曲线。



题图 8-3

解 $u_C(0^+)=$ ， $i_L(0^+)=10\mathrm{A}$。

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+}=\frac{1}{C}\left[i_L(0^+)-\frac{u_C(0^+)}{R}\right]=\frac{1}{0.0238}\times10=420.2\ \mathrm{V/s}$$

换路后关于 u_C 的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}u_C=0$$

（1）当 $R=6\Omega$ 时，代入参数值得

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+7.00\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+6.00u_C=0$$

上述方程对应的特征方程为

$$p^2+7.00p+6.00=0$$

解得特征根为 $p_1=-1.00$， $p_2=-6.00$。

u_C 的解答表达式为

$$u_C(t)=A\mathrm{e}^{-t}+B\mathrm{e}^{-9t}$$

由起始值定参数，有

$$\begin{cases}A+B=0\\-1.00A-6.00B=420.2\end{cases}$$

解得 $A=84.0$， $B=-84.0$。所以

$$u_C(t)=84.0(\mathrm{e}^{-1.00t}-2\mathrm{e}^{-6.00t})\ \mathrm{V}\qquad（t>0）$$

（2）当 $R=8.575\Omega$ 时，特征根为 $p_1=p_2=-2.45$

$$u_C(t)=(A+Bt)\mathrm{e}^{-2.45t}$$

由起始值定参数，有

$$\begin{cases}A=0\\B-2.45A=420.2\end{cases}$$

解得 $A=0$， $B=420$。所以

$$u_C(t)=420t\mathrm{e}^{-2.45t}\ \mathrm{V}\qquad（t>0）$$

（3）当 $R=14.85\Omega$ 时，特征根为 $p_{1,2}=-1.42\pm \mathrm{j}2.00$

$$u_C(t)=K\mathrm{e}^{-1.415t}\sin(2.00t+\beta)$$

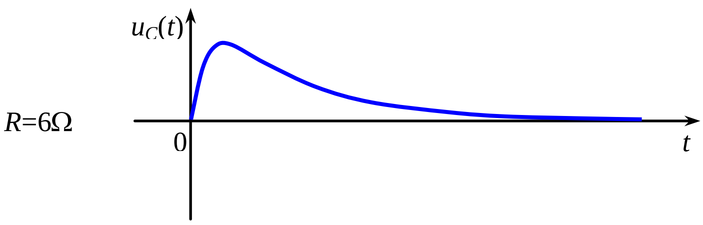
由起始值定参数，有

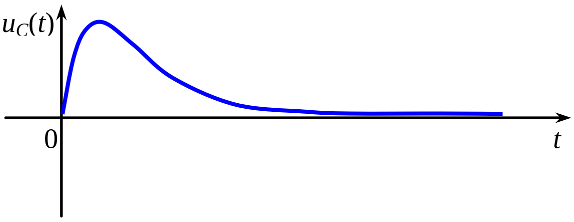
$$\begin{cases}K\sin\beta=0\\-1.42K\sin\beta+2.00K\cos\beta=420.2\end{cases}$$

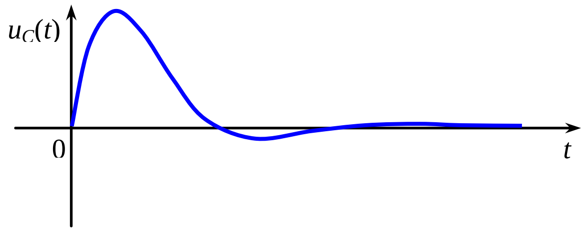
解得 $K=210$， $\beta=0$。所以

$$u_C(t)=210\mathrm{e}^{-1.415t}\sin 2.00t\ \mathrm{V}\qquad（t>0）$$

三种情况下的 $u_C(t)$ ($t>0$)的定性变化曲线如图所示。

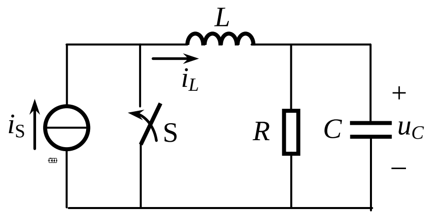






说明：上述定性波形参考了仿真结果。若要是振荡波形更明显，应将 R 的参数值再增大些。

8-4 题图 8-4 所示电路中，已知 i_S=1A，R=100Ω，L=2.083H，C=50μF，换路前电路已达稳态，t=0 时闭合开关 S。求 u_C 和 i_L。



题图 8-4

解 由换路前稳态电路及换路定则，有

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 100 \times 1 = 100\text{V}，\ i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1\text{A}$$

由 0+电路可得

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+} = \frac{1}{C}\left[i_L(0^+) - \frac{u_C(0^+)}{R}\right] = \frac{1}{50\times10^{-6}}(1-1) = 0$$

换路后关于 u_C 的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C = 0$$

代入参数值，将微分方程整理

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + 200\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + 9602u_C = 0$$

上述方程对应的特征方程为

$$p^2 + 200p + 9602 = 0$$

解得特征根为 $p_1 = -80.0$， $p_2 = -120$ 。

u_C 的解答表达式为

$$u_C(t) = A\mathrm{e}^{-80.0t} + B\mathrm{e}^{-120t}$$

由起始值定参数，有

$$\begin{cases} A + B = 100 \\ -80.0A - 120B = 0 \end{cases}$$

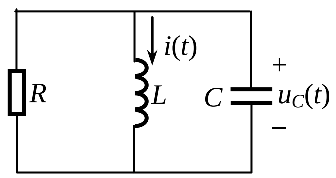
解得 $A = 300$， $B = -200$。所以

$$u_C(t) = 300\mathrm{e}^{-80.0t} - 200\mathrm{e}^{-120t}\ \mathrm{V} \quad （t \geq 0）$$

进而可导出

$$i_L(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{R} = 1.8\mathrm{e}^{-80.0t} - 0.8\mathrm{e}^{-120t}\ \mathrm{A} \quad （t \geq 0）$$

8-5 题图 8-5 所示电路中，已知电容初始储能为 $\frac{1}{30}$J，u_C 的零输入响应为 $u_C(t) = 100\mathrm{e}^{-600t}\cos 400t\ (t > 0)$V。求 R、L、C 和 $i(t)$。



题图 8-5

解　由电容初始储能和 u_C 的表达式可得

$$\frac{1}{30} = \frac{1}{2}C[u_C(0^+)]^2 = \frac{1}{2}C \times 100^2$$

可得

$$C = \frac{1}{15} \times 10^{-4}\,\mathrm{F} = 6.67\mu\mathrm{F}$$

关于 u_C 的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C = 0$$

标准形式为

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + 2\alpha\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C = 0$$

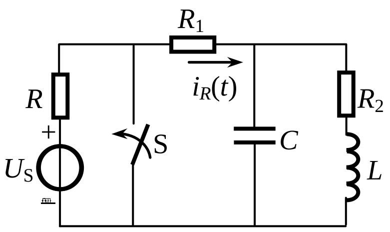
由 u_C 的零输入响应及标准方程可得

$$
\begin{cases}
\alpha = \dfrac{1}{2RC} = 600 \\
\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \left(\dfrac{1}{2RC}\right)^2} = 400
\end{cases}
$$

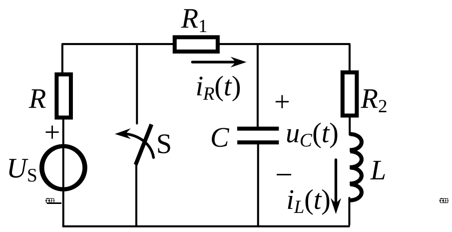
解上述方程可得 $R = 125\Omega$， $L = 0.288\text{H}$ 。

$$
\begin{aligned}
i(t) &= -C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} - \frac{u_C}{R} \\
&= \left(\frac{6}{15}\mathrm{e}^{-600t}\cos 400t + \frac{4}{15}\mathrm{e}^{-600t}\sin 400t\right) - \frac{100}{125}\mathrm{e}^{-600t}\cos 400t \text{ A} \\
&= -0.4\mathrm{e}^{-600t}\cos 400t + 0.267\mathrm{e}^{-600t}\sin 400t \text{ A}
\end{aligned}
$$

8-6 题图 8-6 所示电路中，已知 U_S=6V，R=40Ω，R_1= R_2=10Ω，L=1mH，C=1μF，换路前电路已达稳态，t=0 时闭合开关 S。求 $i_R(t)$，并定性画出其波形。



题图 8-6



题图 8-6(a)

解 电压、电流参考方向如题图 8-6(a)所示。由换路前的稳态电路及换路定则可得

$$
u_C(0^+) = u_C(0^-) = \frac{R_2}{R + R_1 + R_2} \times U_S = \frac{10}{60} \times 6 = 1\text{V}
$$

$$
i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{U_S}{R + R_1 + R_2} = 0.1\text{A}
$$

由 0+电路可得

$$
\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+} = \frac{1}{C}\left[-i_L(0^+) - \frac{u_C(0^+)}{R_1}\right] = \frac{1}{10^{-6}}(-0.1 - 0.1) = -2\times 10^5 \text{ V/s}
$$

为方便计，先求 u_C，再导出 i_R。列写开关 S 闭合后关于 u_C 的微分方程为

$$
\frac{LC}{R_2}\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \left(C + \frac{L}{R_1 R_2}\right)\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{2}{R_1}u_C = 0
$$

代入参数，并整理得

$$
\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + 1.1\times 10^5 \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + 2\times 10^9 u_C = 0
$$

特征方程为

$$p^2+1.1\times10^5 p+2\times10^9=0$$

解得 $p_1=-2.298\times10^4$， $p_2=-8.702\times10^4$ 。

u_C 的解答表达式为

$$u_C(t)=Ae^{-2.298\times10^4 t}+Be^{-8.702\times10^4 t}$$

由起始值定参数，有

$$\begin{cases}A+B=1\\ -2.298\times10^4 A-8.702\times10^4 B=-2\times10^5\end{cases}$$

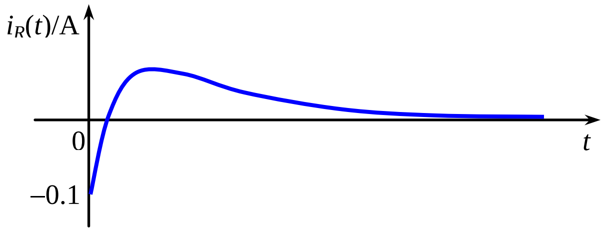
解得 $A=-1.765$， $B=2.765$ 。所以

$$u_C(t)=-1.765e^{-2.298\times10^4 t}+2.765e^{-8.702\times10^4 t}\ \text{V}\qquad（t\geq0）$$

进而可导出

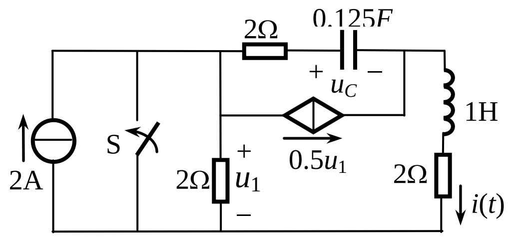
$$i_R(t)=-\frac{u_C}{R_1}=0.177e^{-2.298\times10^4 t}-0.277e^{-8.702\times10^4 t}\ \text{A}\qquad（t>0）$$

$i_R(t)$的定性波形如题图 8-6(b)所示。



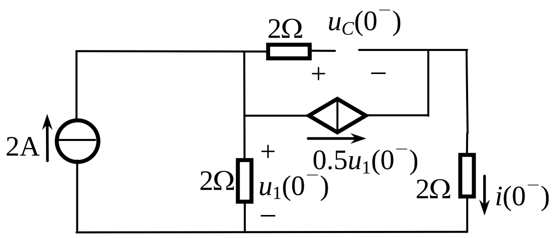
题图 8-6(b)

8-7 电路如题图 8–7 所示。换路前电路已达稳态，在 t=0 时闭合开关 S。求换路后的 $i(t)$。



题图 8-7

解 $t=0^-$ 时的稳态电路如题图 8-7(a)所示。



题图 8-7(a)

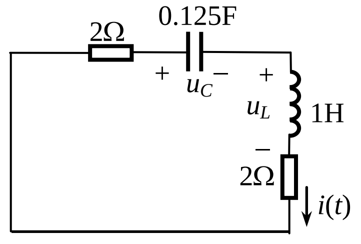
由0^-等效电路可解得

$$i(0^-)=1\text{A}\text{，}\ u_C(0^-)=0$$

由换路定则，有

$$i(0^+)=i(0^-)=1\text{A}\text{，}\ u_C(0^+)=u_C(0^-)=0$$

换路后受控源为零，等效电路如题图 8-7(b)所示。



题图 8-7(b)

由换路后的等效电路可得

$$u_L(0^+)=-4\times i(0^+)=-4\text{V}$$

微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}+4\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+8i=0$$

由其特征方程可得特征根为 $p_{1,2}=-2\pm \mathrm{j}2$。

解答形式为

$$i(t)=\mathrm{e}^{-2t}(A\sin 2t+B\cos 2t)$$

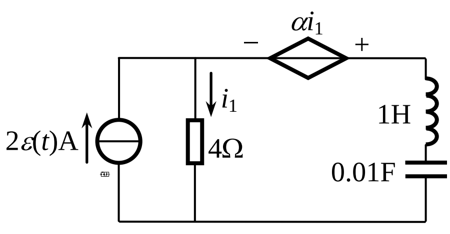
$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{-2t}[(-2A-2B)\sin 2t+(2A-2B)\cos 2t]$$

由起始条件，可求得 $A=-1,\ B=1$。所以

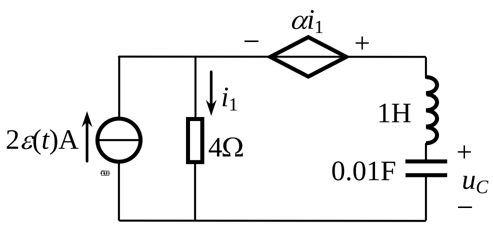
$$i(t)=\mathrm{e}^{-2t}(-\sin 2t+\cos 2t)\ \text{A}$$

$$=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-2t}\cos(2t+45^\circ)\ \ \text{A}$$

8-8 若要使题图 8-8 所示电路分别处于欠阻尼、临界阻尼和过阻尼状态，试确定相应的α的取值范围。



题图 8-8



题图 8-8(a)

解法 1 参考方向如题图 8-8(a)所示。直接列写以u_C为变量的微分方程：

$$\begin{cases} 0.01\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=2\varepsilon(t)-i_1 \\ 4i_1=-\alpha i_1+0.01\dfrac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+u_C \end{cases}$$

整理得

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+(4+\alpha)\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+100u_C=800\varepsilon(t)+200\alpha$$

其特征方程为

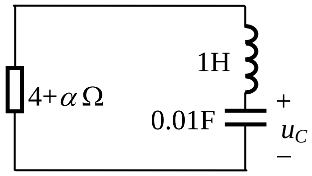
$$p^2+(4+\alpha)p+100=0$$

特征根为

$$p_{1,2}=\frac{-(4+\alpha)\pm\sqrt{(4+\alpha)^2-400}}{2}$$

由此可知，当$\alpha>16$时，为过阻尼；当$\alpha=16$时，为临界阻尼；当$\alpha<16$时，为欠阻尼。（设$\alpha>0$）

解法 2　因线性非时变电路响应的性质与激励无关，所以可仅考虑零输入情况，对题图 8-8，令独立电流源电流为零，并对受控源等效变换，可得题图 8-8(b)所示电路。



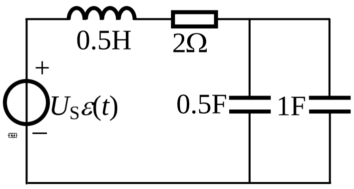
题图 8-8(b)

对题图 8-8(b)所示电路，列写以u_C为变量的微分方程为

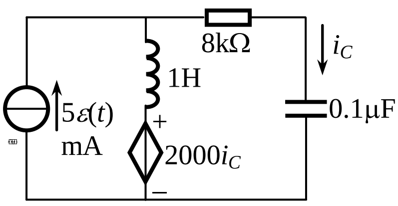
$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+(4+\alpha)\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+100u_C=0$$

其余判断方法与解法 1 相同。

8-9　判断题图 8-9 所示电路的过渡过程性质，若振荡则求出衰减系数δ及振荡角频率ω。



题图 8-9(a)



题图 8-9 (b)

解法 1　直接列方程（略）。

解法 2　因响应性质与激励无关，可仅讨论零输入电路。

（a）列方程：

$$0.5\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+2i_L+\frac{1}{1.5}\int i_L(t)\mathrm{d}t=0$$

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=0$$

其特征方程为

$$0.5p^2+2p+\frac{1}{1.5}=0\text{，即 }p^2+4p+\frac{4}{3}=0$$

因 $4^2-4\times\frac{4}{3}>0$，所以过渡过程为过阻尼，非振荡（特征根为两个不等的负实根）。两个特征根分别为 $p_1=-0.367$， $p_2=-3.633$（不要求）。

（b）方程为

$$8000\,i_C+\frac{1}{C}\int i_C\mathrm{d}t=L\frac{\mathrm{d}(0.005-i_C)}{\mathrm{d}t}+2000\,i_C$$

整流得

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 i_C}{\mathrm{d}t^2}+6000\,C\frac{\mathrm{d}i_C}{\mathrm{d}t}+i_C=0$$

代入参数值，其特征方程为

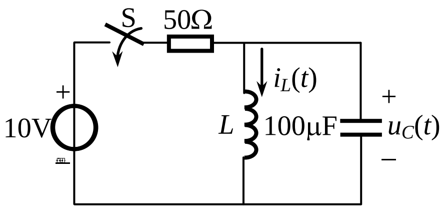
$$p^2+6000\,p+10^7=0$$

因 $6000^2-4\times(10^7)^2<0$，所以过渡过程为欠阻尼，响应为振荡波形。特征根为

$$p_{1,2}=-3000\pm \mathrm{j}1000$$

即 $\alpha=3000\ \mathrm{s}^{-1}$， $\omega=1000\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$。

8-10　题图 8-10 所示电路换路前电路已达稳态，储能元件无初始储能， $t=0$ 时闭合开关 S。求下列两种情况下的 $i_L(t)$，并定性画出其波形：（1）$L=\frac{4}{3}$ H；（2）L=0.1H。



题图 8-10

解　换路后的电路方程如下：

$$\begin{cases}50(i_L+C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t})+u_C=10\\ L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=u_C\end{cases}$$

整理得

$$50LC\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}+L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+50i_L=0$$

特征方程为

$$p^2+200p+\frac{10^4}{L}=0$$

（1）当 $L=\frac{4}{3}$H 时，特征根为 $p_1=-50$， $p_2=-150$。解的形式为

$$i_L\ (t)=A_1\mathrm{e}^{-50t}+A_2\mathrm{e}^{-150t}+0.2\mathrm{A}\quad t\geq 0$$

初值为

$$i_L(0^+)=0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right|_{0^+}=\frac{1}{L}u_C(0^+)=0$$

由初值定常数，得

$$\begin{cases}A_1+A_2+0.2=0\\-50A_1-150A_2=0\end{cases}$$

解得 $A_1=-0.3$， $A_2=0.1$。所以解答为

$$i_L(t)=-0.3\mathrm{e}^{-50t}+0.1\mathrm{e}^{-150t}+0.2\ \mathrm{A}\quad (t\geq 0)$$

$i_L(t)$的定性波形如题图 8-10(a)所示。

（2）当 $L=0.1$H 时，特征根为 $p_{1,2}=-100\pm \mathrm{j}300$。解的形式为

$$i_L(t)=K\mathrm{e}^{-100t}\sin(300t+\beta)+0.2$$

由初值定常数，有

$$\begin{cases}K\sin\beta+0.2=0\\\tan\beta=3\end{cases}$$

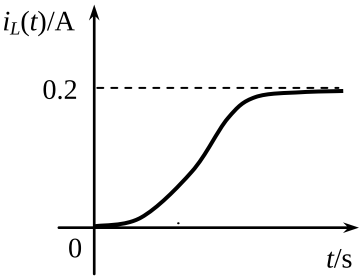
解得 $K=-0.211$， $\beta=71.56°$。所以，解答为

$$i_L(t)=-0.211\mathrm{e}^{-100t}\sin(300t+71.56^\circ)+0.2\ \mathrm{A}\quad (t\geq 0)$$

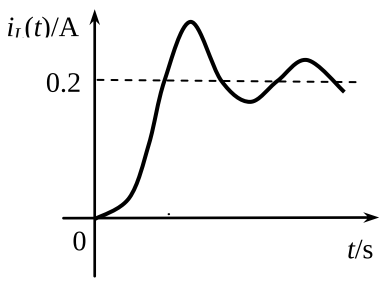
或

$$i_L(t)\ =\mathrm{e}^{-100t}(-0.067\sin 300t-0.2\cos 300t)+0.2\mathrm{A}\quad (t\geq 0)$$

$i_L(t)$的定性波形如题图 8-10(b)所示。

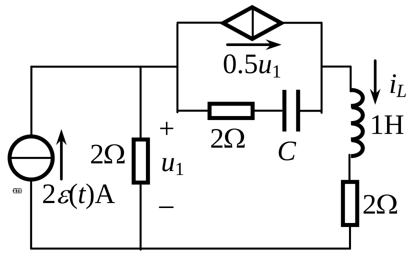


题图 8-10(a)



题图 8-10(b)

8-11　求题图 8-11 所示电路在下列三种情况下 $i_L(t)$的零状态响应：（1）$C=\dfrac{1}{6}$ F；（2）$C=\dfrac{1}{8}$ F；（3）$C=\dfrac{1}{16}$ F。

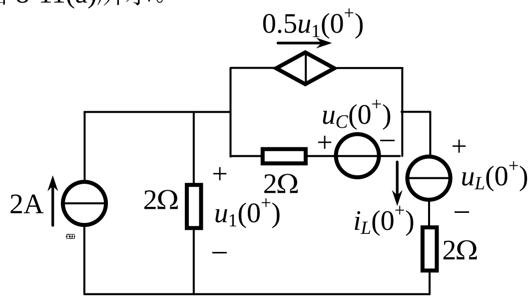


题图 8-11

解　由零状态及换路定则，有

$$i(0^+)=i(0^-)=0，\ u_C(0^+)=u_C(0^-)=0$$

0^+等效电路如题图 8-11(a)所示。



题图 8-11(a)

由 0^+等效电路可求得

$$u_1(0^+)=2\times 2=4\text{V}$$

$$u_L(0^+)=2\times 0.5u_1(0^+)+u_1(0^+)=8\text{V}$$

列方程：

$$\begin{cases} u_1=2(i_L-0.5u_1)+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int(i_L-0.5u_1)\mathrm{d}t+1\times\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+2i_L \\ u_1=2(2-i_L) \end{cases}$$

整理得

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}+8\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+\frac{2}{C}i_L=\frac{2}{C}\qquad（t>0）$$

特征方程为

$$p^2+8p+\frac{2}{C}=0$$

特征根为

$$p_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\times\frac{2}{C}}}{2}=-4\pm\sqrt{16-\frac{2}{C}}$$

（1）当 $C=\frac{1}{6}$ F 时，特征根为 $p_1=-2$， $p_1=-6$。解的形式为

$$i_L(t)=1+A_1\mathrm{e}^{-2t}+A_2\mathrm{e}^{-6t}$$

由初值定常数，有

$$\begin{cases}1+A_1+A_2=0\\-2A_1-6A_2=8\end{cases}$$

解得 $A_1=0.5$， $A_2=-1.5$。所以

$$i_L(t)=1+0.5\mathrm{e}^{-2t}-1.5\mathrm{e}^{-6t}\mathrm{A}\quad（t\geq 0）$$

（2）当 $C=\frac{1}{8}$ F 时，特征根为 $p_1=p_2=-4$。解的形式为

$$i_L(t)=1+(A_1+A_2t)\mathrm{e}^{-4t}$$

由初值定常数，有

$$\begin{cases}1+A_1=0\\-4A_1+A_2=8\end{cases}$$

解得 $A_1=-1$， $A_2=4$。所以

$$i_L(t)=1+(-1+4t)\mathrm{e}^{-4t}\ \mathrm{A}\quad（t\geq 0）$$

（3）当 $C=\frac{1}{16}$ F 时，特征根为 $p_{1,2}=-4\pm\mathrm{j}4$。解的形式为

$$i_L(t)=1+A_1\mathrm{e}^{-4t}\cos 4t+A_2\mathrm{e}^{-4t}\sin 4t$$

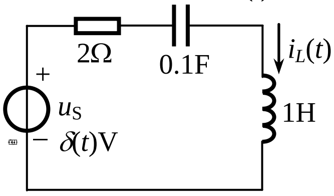
由初值定常数，有

$$\begin{cases}1+A_1=0\\-4A_1+4A_2=8\end{cases}$$

解得 $A_1=-1$， $A_2=1$。所以

$$i_L(t)=1+\mathrm{e}^{-4t}(\sin 4t-\cos 4t)\ \mathrm{A}\quad（t\geq 0）$$

8-12　求题图 8-12 所示电路的单位冲激响应 $i_L(t)$。



题图 8-12

解法 1　直接列写微分方程，由微分方程定初值。

微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+10i_L=\frac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t}$$

由方程可得，$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=\delta(t)$，$i_L(0^+)=1\mathrm{A}$；方程两边 $0^-\sim0^+$ 积分可得

$$u_L(0^+)=\left.\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+}=-2i_L(0^+)=-2\mathrm{V}$$

由特征方程得特征根为 $p_{1,2}=-1\pm\mathrm{j}3$。解的形式为

$$i_L(t)=A\mathrm{e}^{-t}\sin(3t+\varphi)\qquad（t>0）$$

由初值定常数，得

$$\begin{cases}A\sin\varphi=1\\-A\sin\varphi+3A\cos\varphi=-2\end{cases}$$

解得 $A=-1.054$，$\varphi=-71.56^\circ$。所以

$$i_L(t)=-1.054\mathrm{e}^{-t}\sin(3t-71.56^\circ)\ \mathrm{A}\qquad（t>0）$$

写成全时间域的表达式为

$$i_L(t)=-1.054\mathrm{e}^{-t}\sin(3t-71.56^\circ)\varepsilon(t)\ \mathrm{A}$$

解法 2　由电路先定初值。

$0^-\sim0^+$ 时：电容相当于短路，电感相当于开路，则 $u_L(t)=\delta(t)$ V，$i_C(t)=0$ 所以

$$i_L(0^+)=i_L(0^-)+\frac{1}{1}\int_{0^-}^{0^+}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=1\mathrm{A}$$

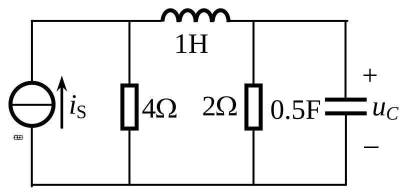
再有 0^+ 等效电路得 $u_L(0^+)=-2i_L(0^+)=-2\mathrm{V}$。

$t\geq0^+$ 时：微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+10i_L=0$$

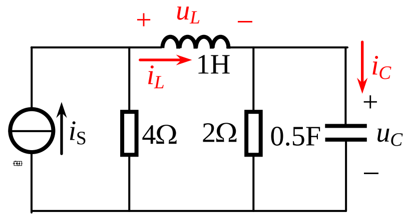
以下求解过程与解法 1 相同。

8-13 题图 8-13 所示电路中，$u_C(0^-)$=1V，$i_L(0^-)$=0A，$i_S(t)=0.25\delta(t)$A。求 $u_C(t)$。



题图 8-13

解 各电压、电流参考方向如题图 8-13(a)所示。



题图 8-13(a)

当 $t=0^- \sim 0^+$ 时，电感可看作开路，所以

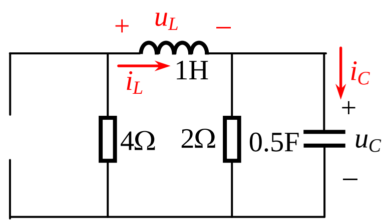
$$u_L(t)=4i_S=\delta(t)\ \text{V}$$

电容中的电流 $i_C(t)$ 为有限值。所以有

$$i_L(0^+)=i_L(0^-)+\frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+}u_L(\tau)\mathrm{d}\tau=0+\frac{1}{1}\int_{0^-}^{0^+}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=1\ \text{A}$$

$$u_C(0^+)=u_C(0^-)=1\ \text{V}$$

当 $t>0^+$，电路如题图 8-13(b)所示。



题图 8-13(b)

由 0^+ 等效电路可得

$$i_C(0^+)=i_L(0^+)-\frac{u_C(0^+)}{2}=1-0.5=0.5\ \text{A}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+}=\frac{1}{C}i_C(0^+)=1\ \text{V/s}$$

列写方程：

$$\begin{cases} u_C + 4i_L + 1\cdot\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = 0 \\ i_L = \dfrac{u_C}{2} + 0.5\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

整理得

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + 5\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + 6u_C = 0$$

特征方程为

$$p^2 + 5p + 6 = 0$$

解得特征根为 $p_1 = -2$， $p_2 = -3$。解的形式为

$$u_C(t) = A_1\mathrm{e}^{-2t} + A_2\mathrm{e}^{-3t} \quad （t > 0）$$

由起始值 $u_C(0^+) = 1\ \mathrm{V}$ 、 $\left.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+} = 1\ \mathrm{A/s}$ 定常数，有

$$\begin{cases} 1 = A_1 + A_2 \\ 1 = -2A_1 - 3A_2 \end{cases}$$

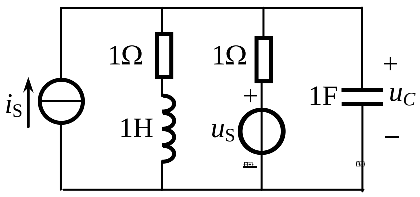
解得 $A_1 = 4$， $A_2 = -3$。所以

$$u_C(t) = 4\mathrm{e}^{-2t} - 3\mathrm{e}^{-3t}\ \mathrm{V} \quad （t > 0）$$

$u_C(t)$ 的全时间域的表达式为

$$u_C(t) = \varepsilon(-t) + [4\mathrm{e}^{-2t} - 3\mathrm{e}^{-3t}]\varepsilon(t)\ \mathrm{V}$$

8-14　题图 8-14 所示电路中，$i_S=\delta(t)$A，$u_S=\varepsilon(t)$ V。求 $u_C(t)$。



题图 8-14

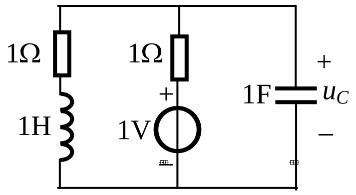
解　$t = 0^- \sim 0^+$时，电感可看作开路，电容看作短路，有

$$i_C(t) = \delta(t)\mathrm{A}，\ u_L(t) = 0$$

$$u_C(0^+)=u_C(0^-)+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} i_C(\tau)\mathrm{d}\tau=0+\frac{1}{1}\int_{0^-}^{0^+}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=1\ \mathrm{V}$$

$$i_L(0^+)=0$$

$t>0^+$ 时，电路如题图 8-14(a)所示。



题图 8-14(a)

有 0^+ 电路，可得 $i_C(0^+)=\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+}=0$。

微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+2u_C=1$$

特征方程为

$$p^2+2p+2=0$$

解得特征根为 $p_{1,2}=-1\pm \mathrm{j}1$。解的形式为

$$u_C(t)=0.5+K\mathrm{e}^{-t}\sin(t+\varphi)\qquad（t>0）$$

由起始值 $u_C(0^+)=1\ \mathrm{V}$、$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+}=0$ 定常数，有

$$\begin{cases}1=0.5+K\sin\varphi\\ 0=-K\sin\varphi+K\cos\varphi\end{cases}$$

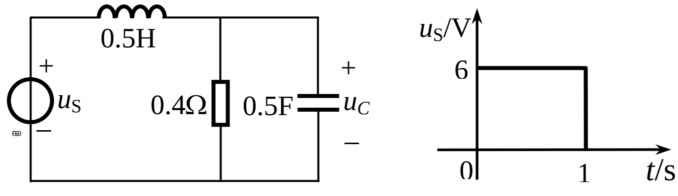
解得 $K=\frac{\sqrt{2}}{2}=0.707$，$\varphi=45°$。所以

$$u_C(t)=0.5+0.707\mathrm{e}^{-t}\sin(t+45°)\ \mathrm{V}\qquad（t>0）$$

$u_C(t)$ 的全时间域的表达式为

$$u_C(t)=[0.5+0.707\mathrm{e}^{-t}\sin(t+45°)]\varepsilon(t)\ \mathrm{V}$$

8-15 电路如题图 8-15(a)所示，激励源 u_S 的波形如图(b)所示。试用卷积积分求 $u_C(t)$。



题图 8-15

解 （1）先求冲激响应。当 $u_S(t)=\delta(t)\text{V}$ 时，电感可看作开路，电容看作短路，有

$t=0^- \sim 0^+$ 时：

$$u_L(t)=\delta(t)\text{V}, \quad i_C(t)=0$$

$$i_L(0^+)=i_L(0^-)+\frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+}u_L(\tau)\mathrm{d}\tau=0+\frac{1}{0.5}\int_{0^-}^{0^+}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=2\text{A}$$

$$u_C(0^+)=0$$

由 0^+ 电路可得

$$i_C(0^+)=i_L(0^+)=2\text{A}$$

$t>0^+$ 时，微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}u_C=0$$

特征方程为

$$p^2+5p+4=0$$

特征根为 $p_1=-1$， $p_2=-4$ 。解的形式为

$$u_C(t)=A_1\mathrm{e}^{-t}+A_2\mathrm{e}^{-4t} \qquad (t>0)$$

由初值定常数有

$$\begin{cases}0=A_1+A_2\\4=-A_1-4A_2\end{cases}$$

解得 $A_1=-\frac{4}{3}$， $A_2=\frac{4}{3}$ 。所以冲激响应为

$$h(t)=u_C(t)=\frac{4}{3}(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-4t})\ \text{V} \qquad (t>0)$$

（2）做卷积积分。

当 $0<t\le 1\text{s}$，有

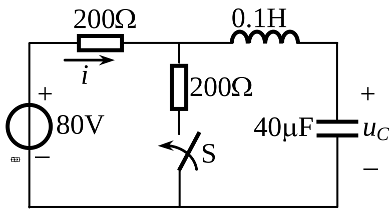
$$u_C(t)=\int_0^t u_S(t-\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_0^t 6\times\frac{4}{3}(\mathrm{e}^{-\tau}-\mathrm{e}^{-4\tau})\mathrm{d}\tau=6-8\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-4t}\ \mathrm{V}$$

当 $t>1\mathrm{s}$，有

$$u_C(t)=\int_{t-1}^t 6\times\frac{4}{3}(\mathrm{e}^{-\tau}-\mathrm{e}^{-4\tau})\mathrm{d}\tau=8\mathrm{e}^{-(t-1)}-2\mathrm{e}^{-4(t-1)}-8\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-4t}\ \mathrm{V}$$

8-16 题图 8-16 所示电路换路前已达稳态，t=0 时闭合开关 S。求 $u_C(t)$。



题图 8-16

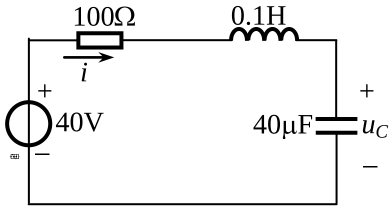
解 这是求全响应的问题。由换路前的稳态电路及换路定则，有

$$u_C(0^+)=u_C(0^-)=80\mathrm{V},\quad i_L(0^+)=i_L(0^-)=0$$

由 0^+ 电路可得

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+}=\frac{1}{C}i_L(0^+)=0$$

换路后电路可作戴维南等效，等效后电路如题图 8-16(a)所示。



题图 8-16(a)

以 u_C 为变量的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}u_C=\frac{40}{LC}$$

代入参数值，特征方程为

$$p^2+1000p+2.5\times10^5=0$$

特征根为 $p_1=p_2=-500$。全解的形式为

$$u_C(t)=40+(A_1++A_2t)\mathrm{e}^{-500t}$$

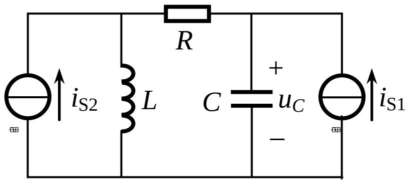
由初值定常数，有

$$\begin{cases}80=40+A_1\\0=-500A_1+A_2\end{cases}$$

解得 $A_1=40$， $A_2=20000$。所以

$$u_C(t)=40+(40+20000t)\mathrm{e}^{-500t}\ \mathrm{V}\qquad(t\geq 0)$$

8-17 题图 8-17 所示电路中，已知 i_{S1}=5A，i_{S2}=4$\varepsilon(t)$A，R=30Ω，L=3H，$C=\dfrac{1}{27}$F。求 $u_C(t)$。



题图 8-17

解 由 i_{S1}=5A 所产生的初值为

$$i_L(0^-)=5\mathrm{A}，\ u_C(0^-)=150\,\mathrm{V}$$

根据换路定则，有

$$i_L(0^+)=i_L(0^-)=5\mathrm{A}，\ u_C(0^+)=u_C(0^-)=150\mathrm{V}$$

由 0^+ 电路可得

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+}=\frac{1}{C}(5+4-5)=108\ \mathrm{V\cdot s^{-1}}$$

$t>0$ 的方程为

$$u_C=R\left(5-C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)+L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(5+4-C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)$$

整理得

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+10\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+9u_C=9\times150$$

特征根方程为

$$p^2+10p+9=0$$

特征根为 $p_1=-1$， $p_2=-9$。解的形式为

$$u_C(t)=150+A_1\mathrm{e}^{-t}+A_2\mathrm{e}^{-9t}$$

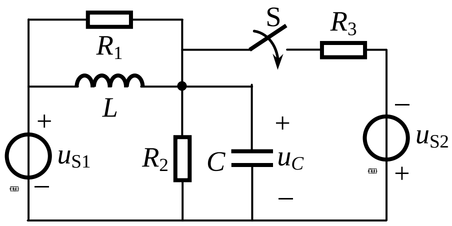
由初值定常数，有

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ -A_1 - 9A_2 = 108 \end{cases}$$

解得 $A_1 = 13.5$， $A_2 = -13.5$。所以

$$u_C(t) = 150 + 13.5\mathrm{e}^{-t} - 13.5\mathrm{e}^{-9t}\mathrm{V} \quad (t \geq 0)$$

8-18 题图 8-18 所示电路中，已知 u_{S1}=1V，u_{S2}=2V，R_1=2Ω，R_2=R_3=4Ω，$L=\frac{5}{6}$ H，$C=\frac{1}{5}$ F。换路前电路已达稳态，t=0 时闭合开关 S。求 $u_C(t)$。



题图 8-18

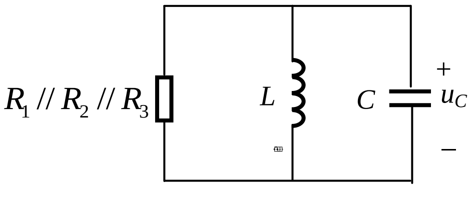
解 换路前 $u_C(0^-) = 1\mathrm{V}$， $i_L(0^-) = 0.25\mathrm{A}$ 。由换路定则有

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 1\mathrm{V}, \quad i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0.25\mathrm{A}$$

由 0^+等效电路可得

$$i_C(0^+) = i_L(0^+) + \frac{1-1}{R_1} - \frac{u_C(0^+)}{R_2} - \frac{2 + u_C(0^+)}{R_3} = -0.75\mathrm{A}\,.$$

由换路后的零输入电路确定解的自由分量的性质。原电路的零输入电路为



对零输入电路列方程为

$$\frac{1}{5}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{6}{5}\int u_C \mathrm{d}t + \frac{u_C}{1} = 0$$

整理得

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + 5\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + 6u_C = 0$$

特征根为 $p_1 = -2,\ p_2 = -3$。

由原电路可得换路后 $u_C(t)$ 的稳态分量（强制分量）为

$$u_C(\infty) = u_{S1} = 1\mathrm{V}$$

全响应为

$$u_C(t) = 1 + A\mathrm{e}^{-2t} + B\mathrm{e}^{-3t}$$

由 $u_C(0^+) = 1\mathrm{V}$， $i_C(0^+) = -0.75\mathrm{A}$ 定常数 A，B。可得

$$\begin{cases} 1+A+B=1 \\ \dfrac{1}{5}(-2A-3B)=-0.75 \end{cases}$$

解得 $A=-3.75,\ \ B=3.75$ 。所以

$$u_C(t)=1-3.75\mathrm{e}^{-2t}+3.75\mathrm{e}^{-3t}\ \mathrm{V}\ \ (t\geq 0)$$

第 8 章　二阶电路

8-1　$u_C=18\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-9t}$ V，$t\geqslant 0$

8-2　$u_C=355\mathrm{e}^{-25t}\sin(139t+176°)$V，$t\geqslant 0$

8-3　（1）$=84(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-6t})$V，$t\geqslant 0$；（2）$u_C=420t\mathrm{e}^{-2.45t}$ V，$t\geqslant 0$；（3）$u_C=210\mathrm{e}^{-1.415t}\sin 2t$ V，$t\geqslant 0$

8-4　$u_C=300\mathrm{e}^{-80t}-200\mathrm{e}^{-120t}$ V，$t\geqslant 0$；$i_L=1.8\,\mathrm{e}^{-80t}-0.8\mathrm{e}^{-120t}$ A，$t\geqslant 0$

8-5　$R=125\Omega$，$L=0.288$H，$C=6.67\mu$F，$i=-0.4\,\mathrm{e}^{-600t}\cos 400t+0.267\mathrm{e}^{-600t}\sin 400t$ A，$t\geqslant 0$

8-6　$i_R=0.177\mathrm{e}^{-22980t}-0.277\mathrm{e}^{-87000t}$A，$t>0$

8-7　$i=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-2t}\cos(2t+45°)\mathrm{A}$

8-8　$-4<\alpha<16,\ \ \alpha=16,\ \ \alpha>16$

8-9　（a）过阻尼；（b）振荡，δ=3000 s^{-1}，ω= 1000 rad·s^{-1}

8-10　（1）$i_L=-0.3\,\mathrm{e}^{-50t}+0.1\,\mathrm{e}^{-150t}+0.2$A，$t\geqslant 0$；（2）$i_L=-0.211\,\mathrm{e}^{-100t}\sin(300t+71.6°)+0.2$A，$t\geqslant 0$

8-11　（1）$i_L=(1+0.5\mathrm{e}^{-2t}-1.5\mathrm{e}^{-6t})\varepsilon(t)$ A；（2）$i_L=[1+(4t-1)\mathrm{e}^{-4t}]\varepsilon(t)$ A；
（3）$[1+\mathrm{e}^{-4t}(\sin 4t-\cos 4t)]\varepsilon(t)$ A

8-12　$i_L=\mathrm{e}^{-t}(\cos 3t-0.333\sin 3t)\varepsilon(t)$ A

8-13　$u_C=(4\,\mathrm{e}^{-2t}-3\,\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$ V

8-14　$u_C=[0.5+0.707\mathrm{e}^{-t}\sin(t+45°)]\varepsilon(t)$ V

8-15　$$u_C=\begin{cases}6-8\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-4t}\mathrm{V}, & (0\le t\le 1)\\ 8\mathrm{e}^{-(t-1)}-2\mathrm{e}^{-4(t-1)}+2\mathrm{e}^{-4t}-8\mathrm{e}^{-t}\mathrm{V}, & (t\ge 1)\end{cases}$$

8-16　$u_C=40+40\mathrm{e}^{-500t}+20000t\mathrm{e}^{-500t}$ V，$t\geqslant 0$

8-17　$u_C=150+13.5\mathrm{e}^{-t}-13.5\,\mathrm{e}^{-9t}$)V，$t\geqslant 0$

8-18　$u_C=1-3.75(\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-3t})$V，$t\geqslant 0$