4.2.1.1

$$◀ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 3 = -6. ▶$$

4.2.1.3

$$◀ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 160. ▶$$

练习 4.2.2. 设 A 是三阶方阵, $det(A) = 5$, 求下列矩阵 B 的行列式.

1. $B = 2A, -A, A^2, A^{-1}$.

◀ $40, -5, 25, \frac{1}{5}$. ▶

2. $B = \begin{bmatrix} a_1^T - a_3^T \\ a_2^T - a_1^T \\ a_3^T - a_2^T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1^T + a_3^T \\ a_2^T + a_1^T \\ a_3^T + a_2^T \end{bmatrix}$, 其中 $A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{bmatrix}$.

◀ 第一个将前两行加到第三行后得到 0. 第二个后两行减去第一行后得到 $2det(A) = 10$.

练习 4.2.3. 设 $A_n = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + nI_2$.

1. 求 A_0, A_1, A_2, A_3 的行列式.

◀ $2, 6, 12, 20$. ▶

2. 求 $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + xI_2$ 的行列式, 并将其写成 $(x+a)(x+b)$ 的形式.

◀ $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$. ▶

3. 分别求 $A_0^2, A_0^2 + I_2, A_0^2 + 3A_0 + 2I_2, A_0^3 - 2A_0^2 + 3A_0 - 4I_2$ 的行列式, 并分析它们与 a, b 的关系.

◀ $4, 10, 72, -6$. 等于多项式在 a, b 处值的积. ▶

练习 4.2.5. 计算 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -1 \\ -1 & & & 1 \end{vmatrix}$.

◀ 依次将每行加到下一行. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -1 \\ -1 & & & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & -1 \\ 0 & & & 0 \end{vmatrix} = 0$. ▶

练习 4.2.9. 证明或举出反例.

1. $AB - BA$ 的行列式必然是零.

◀ 错误. 例: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. ▶

2. A 的行列式等于其行简化阶梯形的行列式.

◀ 错误. 倍乘变换和交换两行改变行列式. 反例自举. ▶

3. A 为 n 阶反对称矩阵, 当 n 为奇数时, $det(A) = 0$.

◀ 正确. $det(A) = det(A^T) = det(-A) = (-1)^n det(A) = -det(A)$ 推出 $det(A) = 0$. ▶

4. A 为 n 阶反对称矩阵, 当 n 为偶数时, $det(A) = 0$.

◀ 错误. 例: 对 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 有 $det(A) = 1$. (注. 对偶数阶反对称方阵 A, 我们总有 $det(A) = Pf(A)^2$, 其中 $Pf(A)$ 为 A 的 Pfaffian.) ▶

5. 如果 $|det(A)| > 1$, 那么当 n 趋于无穷时, A^n 中必然有元素的绝对值趋于无穷.

◀ 正确. A 的某个特征值的绝对值大于 1. ▶

6. 如果 $|det(A)| < 1$, 那么当 n 趋于无穷时, A^n 中的所有元素都趋于 0.

◀ 错误. 例: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. ▶

练习 4.2.14. 证明奇数阶反对称矩阵不可逆.

◀ $det(A) = det(A^T) = det(-A) = (-1)^n det(A) = -det(A)$ 推出 $det(A) = 0$. ▶

练习 4.2.19. 1. 对分块对角矩阵 $X = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$, 其中 A, B 是方阵, 证明, $det(X) = det(A)det(B)$.

◀ 考察在 X 中选取 n 个行列互不相同的元素的方式. 这些元素只能落在 A, B 中. ▶

2. 对分块对角矩阵 $X = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$, 其中 A, B 是方阵, 证明, $det(X) = det(A)det(B)$.

◀ 考察在 X 中选取 n 个行列互不相同的元素的方式. 这些元素只能落在 A, B 中. ▶

4.2.25

1. 当 $n = 1, 2, 3$ 时, 用 A 的元素表示 $f'(0)$; 分析其规律, 求 $f'(0)$ 的一般表达式.

◀ $f'(0) = \sum_{i=1}^n det(\begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_{i-1} & a_i & e_{i+1} & \cdots & e_n \end{bmatrix}) = trace(A)$. ▶

2. 利用 $det(I_m + AB) = det(I_n + BA)$, 证明 $trace(AB) = trace(BA)$(trace 的定义见练习 1.5.22).

◀ 考虑 $det(I_m + tAB) = det(I_n + tBA)$. ▶

4.3.1

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

◀ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$. ▶

2. $\begin{vmatrix}1 & 1 & 10\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 5\end{vmatrix}$.

◀ $\begin{vmatrix}1 & 1 & 10\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 10\\ 0 & 1 & -8\\ 0 & 1 & -5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 10\\ 0 & 1 & -8\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix} = 3.$ ▶

4.3.2

1. $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 4 & 0 & 3\\ 2 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$.

◀ $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 4 & 0 & 3\\ 2 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 5 & 4 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix} = -4\cdot 4\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix} = -4\cdot 4\cdot(1\cdot 1 - 2\cdot 2) = 48.$ ▶

2. $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix}$.

◀ $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\end{vmatrix} = 24-12-8-6=-2.$

练习 4.3.4. 求 $\begin{vmatrix}2x & x & 1 & 2\\ 1 & x & 1 & -1\\ 3 & 2 & x & 1\\ 1 & 1 & 1 & x\end{vmatrix}$ 中 x^4, x^3 的系数.

◀ $2, -1.$ ▶

练习 4.3.5. 计算 $\begin{vmatrix}\lambda & & & & a_n\\ -1 & \lambda & & & a_{n-1}\\ & \ddots & \ddots & & \vdots\\ & & -1 & \lambda & a_2\\ & & & -1 & \lambda + a_1\end{vmatrix}$.

◀ 从最后一行向上依次将每行的 λ 倍加到上一行. 结果是 $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$. ▶

4.3.8

1. 利用展开式得到 $det(B_n)$ 关于 n 的递推关系,并计算 $det(B_n)$.

◀ 将第一行加到第二行知 $det(B_n) = det(B_{n-1})$. $det(B_n) = 1$. ▶

2. 利用 $det(A_n)$ 与 $det(B_n)$ 的关系计算 $det(A_n)$.

◀ $det(A_n) = det(B_n) + det(A_{n-1})$. $det(A_n) = n+1$. ▶

4.3.14

◀ 考察 n 阶方阵 A 的秩. 若 $rank(A) \le n-2$, 则伴随矩阵的秩是 0. 若 $rank(A) = n-1$, 秩不等式保证了伴随矩阵的秩是 1. ▶

4.3.16

$$◀ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t}sint + \frac{2}{3}te^{-t}cost \\ e^{2t}sint - \frac{1}{3}te^{2t}cost \end{bmatrix}. ▶$$

上面写的有点小错误，$\frac{2}{3}$改为$\frac{1}{3}$。

4.3.18.1

$$\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A^2+B^2 & 0 \\ 0 & A^2+B^2 \end{vmatrix} = |A^2+B^2|^2$$

4.3.19

1. 设 A 为 4 阶矩阵, 所有元素均为 1, 在其行列式的完全展开式中, 多少项为 1? 多少项为 -1? 由此计算 A 的行列式.

◀ $12, 12, 0.$ ▶

2. 把 A 的 (i,j) 元乘以 $\frac{i}{j}$ 得到 B, 在 A 和 B 行列式的完全展开式中, 每一项如何变化? 行列式如何变化?

◀ 讨论. ▶

3. 设 $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ e & 0 & f & 0 \\ 0 & g & 0 & h \end{bmatrix}$, 在行列式的完全展开式中, 有多少项非零? 这个完全展开式是否有因式分解? (跟分块对角矩阵的情形进行类比)

◀ $4, (af-be)(ch-dg).$ ▶