Review

- 一阶ODE的初等解法
- 一阶线性ODE $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y+q(x)$

$$y(x)=e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int q(x)e^{\int -p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right).$$

$$y(x)=e^{\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t}\left(y(x_0)+\int_{x_0}^{x} q(s)e^{-\int_{x_0}^{s} p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s\right).$$

(1)常数变易法　(2)积分因子法

- Bernoulli方程、Riccati方程

§3. 高阶ODE的降阶与幂级数解法

1.可降阶的ODE

1)方程不显含未知函数x:

$$F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \cdots, x^{(n)}) = 0$$

令$y = x^{(k)}$,则方程降为关于y的$n-k$阶方程

$$F(t, y, y', \cdots, y^{(n-k)}) = 0$$

例: 求 $y^{(5)}-\frac{1}{x}y^{(4)}=0$ 的通解.

解:方程不显含未知函数y.令$u=y^{(4)}$,则原方程化为

$$u'-\frac{1}{x}u=0,\qquad \frac{\mathrm{d}u}{u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

于是, $u=y^{(4)}=cx, c\in\mathbb{R}.$

逐次积分得 $y=c_1x^5+c_2x^3+c_3x^2+c_4x+c_5,$

$$c_1,c_2,c_3,c_4,c_5\in\mathbb{R}.\square$$

2)方程不显含自变量t (自治方程): $F(x, x', \cdots, x^{(n)}) = 0$

令$y = x'$, 视y为新未知函数, 视x为新自变量, 则

$$x' = y,\ \ x'' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

$$x''' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = y\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + y\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + y^2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}, \ \cdots$$

原方程降为关于$y(x)$的$n-1$阶方程:

$$G\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right) = 0.$$

例: 求 $xx'' + 2(x')^2 = 0$ 的通解.

解: 令 $y = x' = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, 则 $x'' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x') = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

原方程化为 $xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y^2 = 0$,

即 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = 0$ (隐含 $y = 0$), 也即 $x\mathrm{d}y + 2y\mathrm{d}x = 0$,

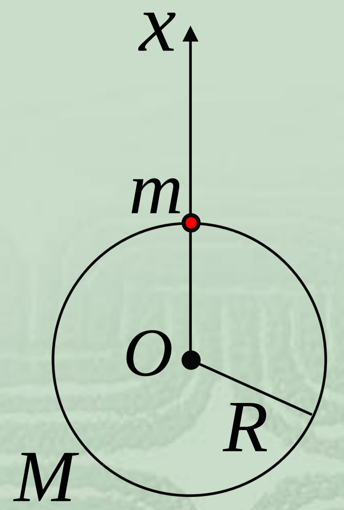
同乘x得 $x^2\mathrm{d}y + 2xy\mathrm{d}x = 0$, $\mathrm{d}(x^2 y) = 0$.

因此 $x^2 y = c$, 即$x^2 x' = c$ $(\mathrm{d}x^3 = 3c\mathrm{d}t)$.

故原方程的通解为 $x^3 = c_1 t + c_2$. □

例:第二宇宙速度(发射人造卫星的最小速度)

设人造卫星在t时刻的位移为$x(t)$



受力分析：忽略空气阻力

$$\text{地球引力} F=\frac{-kMm}{x^2}$$

$$\text{运动方程:}\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{-kM}{x^2}\\ x(0)=R,x'(0)=v_0\end{cases}$$

欲求最小v_0, s.t. $v(x)>0,\forall x>0$.

令$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,则原方程化为

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-\frac{kM}{x^2},\quad \text{即}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}x}=-\frac{kM}{x^2}.$$

故

$$\frac{1}{2}v^2(x)=\frac{kM}{x}+c$$

代入初值条件$v(R)=v_0$,得$c=\frac{1}{2}v_0^2-\frac{kM}{R}$,即

$$\frac{1}{2}v^2(x)=\frac{kM}{x}+\frac{1}{2}v_0^2-\frac{kM}{R}$$

由$v(x)>0$得$\frac{1}{2}v_0^2-\frac{kM}{R}\geq 0$.故第二宇宙速度为

$$v_0=\sqrt{\frac{2kM}{R}}$$

$$=\sqrt{2gR}$$

$$\approx 11.2\times 10^3\, m/s.$$

地球表面重力加速度

$$g=\frac{kM}{R^2}\approx 9.81 m/s^2$$

$$R\approx 63\times 10^5 m$$

3)m次齐次方程(m为正整数): $F(t,x,x',\cdots,x^{(n)})=0$

且 $F(t,kx,kx',\cdots,kx^{(n)})=k^m F(t,x,x',\cdots,x^{(n)})=0, \forall k\neq 0.$

因为 $x^{-m}F(t,x,x',\cdots,x^{(n)})=F(t,1,\frac{1}{x}x',\cdots,\frac{1}{x}x^{(n)}),$

原方程等价于 $$F(t,1,\frac{1}{x}x',\cdots,\frac{1}{x}x^{(n)})=0 \qquad (1)$$

令$u=u(t)=\frac{1}{x}x'$,则

$$x'=xu, x''=xu^2+xu'=x(u^2+u'),$$

$$x'''=x(u^3+3uu'+u''), \ \cdots$$

代入(1),所得方程比原方程低一阶.

例: 求 $x^2y\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-(y-x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2=0$ 的通解.

解:这是一个2次齐次方程. 令$u(x)=y'/y$,则

$$y'=yu, y''=y'u+yu'=y(u^2+u').$$

原方程化为 $x^2y^2(u^2+u')-(y-xyu)^2=0.$

$y=0$为平凡解. $y\neq 0$时,得一阶线性方程

$$x^2u'+2xu-1=0,\ \text{即}\ (x^2u)'=1.$$

故 $x^2u=x+c$,即$u=\dfrac{1}{y}y'=\dfrac{1}{x^2}(c+x).$

分离变量积分得原方程的通解为$y=c_1xe^{-\frac{c_2}{x}}$. □

4)*齐次线性方程: 若已知

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0 \qquad (2)$$

的k个线性无关的解$x_1,x_2,\cdots x_k$,则可使方程降k阶.

令(2)的解为 $x=x_k y$,则

$$x'=x_k'y+x_ky',\ x''=x_ky''+2x_k'y'+x_k''y,\cdots$$

$$x^{(n)}=x_ky^{(n)}+nx_k'y^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2}x_k''y^{(n-2)}+\cdots+x_k^{(n)}y$$

代入(2)得到 $x_ky^{(n)}+\left[nx_k'+a_1(t)x_k\right]y^{(n-1)}+\cdots$

$$+\left[x_k^{(n)}+a_1(t)x_k^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x_k\right]y=0 \qquad (3)$$

因为x_k为(2)的解,所以(3)中y的系数恒为0.

令$z=y'$,并在$x_k\neq 0$的区间上用x_k除(3)的各项,得

$$z^{(n-1)}+b_1(t)z^{(n-2)}+\cdots+b_{n-1}(t)z=0 \qquad (4)$$

(4)的解与(3)的解的关系是

$$z=y'=\left(\frac{x}{x_k}\right)', \text{ 即} x(t)=x_k(t)\int z(t)\mathrm{d}t,$$

且(4)有$k-1$个线性无关解$z_i=\left(\dfrac{x_i}{x_k}\right)', i=1,2,\cdots k-1.$

事实上,我们有

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \cdots + \lambda_{k-1} z_{k-1} \equiv 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \left(\frac{x_1}{x_k} \right)' + \lambda_2 \left(\frac{x_2}{x_k} \right)' + \cdots + \lambda_{k-1} \left(\frac{x_{k-1}}{x_k} \right)' \equiv 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \left(\frac{x_1}{x_k} \right) + \lambda_2 \left(\frac{x_2}{x_k} \right) + \cdots + \lambda_{k-1} \left(\frac{x_{k-1}}{x_k} \right) \equiv -\lambda_k \, (\in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_k x_k \equiv 0$$

而$x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_k$线性无关, 因此$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{k-1} = \lambda_k = 0$, 从而$z_1, z_2, \cdots, z_{k-1}$线性无关.

例*:设$x''+p(t)x'+q(t)x=0$有特解$x_1\neq 0$,求其通解.

解:设方程有解$x=x_1\int y(t)\mathrm{d}t$, 则

$$x'=x_1y+x_1'\int y,\ x''=x_1y'+2x_1'y+x_1''\int y,$$

代入原方程得 $$x_1y'+[2x_1'+p(t)x_1]y=0.$$

解得 $$y=\frac{c_1}{x_1^2}e^{-\int p(t)\mathrm{d}t}.$$

故原方程的通解为

$$x=x_1\left[c_2+c_1\int\frac{1}{x_1^2}e^{-\int p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right],\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}. \qquad (5)$$

例*:已知$x_1=\dfrac{\sin t}{t}$是$x''+\dfrac{2}{t}x'+x=0$的解,求通解.

解:$p(t)=\dfrac{2}{t}$,代入上例中(5)式得通解为

$$x=x_1\left[c_2+c_1\int\frac{1}{x_1^2}e^{-\int p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{\sin t}{t}\left[c_2+c_1\int\frac{t^2}{\sin^2 t}e^{-\int\frac{2}{t}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{\sin t}{t}\left[c_2+c_1\int\frac{1}{\sin^2 t}\mathrm{d}t\right]=\frac{\sin t}{t}[c_2-c_1\cot t]$$

$$=c_2\frac{\sin t}{t}-c_1\frac{\cos t}{t},\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.\square$$

2*.二阶ODE的幂级数解法

Thm:若二阶齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (6)$$

的系数$p(x), q(x)$在区间$|x - x_0| < r$可以展开成$(x - x_0)$的幂级数,则(6)在$|x - x_0| < r$内有收敛的幂级数解

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n,$$

其中c_0, c_1是两个任意常数(它们可由初值条件决定,即$c_0 = y(x_0), c_1 = y'(x_0)$),而$c_n (n \geq 2)$可从$c_0, c_1$出发由递推公式确定.

例:分别求方程 $x''+x=0$ 的满足初值条件 $x(0)=1$, $x'(0)=0$ 和 $x(0)=0, x'(0)=1$ 的解.

解:设方程的通解为 $x(t)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$, 代入方程得

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)c_n t^{n-2}+\sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n=0, \quad c_{n+2}=-\frac{c_n}{(n+2)(n+1)}, \quad \forall n\geq 0.$$

当 $x(0)=1, x'(0)=0$ 时, $c_0=1, c_1=0$,

$$c_{2n}=\frac{(-1)^n}{(2n)!}, c_{2n+1}(0)=0, \quad x(t)=\cos t;$$

当 $x(0)=1, x'(0)=0$ 时, $c_0=0, c_1=1$,

$$c_{2n+1}=\frac{(-1)^n}{(2n)!}, c_{2n}(0)=0, \quad x(t)=\sin t.\square$$

例:求方程$y' = y - x$的满足初值条件 $y(0)=0$的解.

解:由前一定理, 方程在$\mathbb{R}$中有收敛的幂级数解,设为

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

则$a_0 = y(0) = 0,\quad y' = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots.$

将 y 与 y' 代入微分方程,比较 x 的同次幂的系数,得

$$a_1 = a_0 = 0, a_2 = \frac{a_1 - 1}{2} = -\frac{1}{2}, a_n = \frac{a_n}{n} = -\frac{1}{n!}, n > 2.$$

故原方程的解为

$$y = -\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right) = -e^x + 1 + x. \square$$

作业：习题7.3

No.2,3,6,9