第17讲 频率特性，滤波器，谐振

本节课堂要用计算器

1 频率特性

2 滤波器

3 谐振

重点：

定性画频率特性

求谐振频率

求谐振入端电阻

1　频率特性

课前预习

电路的频率响应 ⟷ 电路的频率特性

改变电路激励的频率（维持其幅值不变）对电路造成的影响。

- 阻抗
  - 阻抗频率特性
  - 电抗频率特性
- 支路电压电流
  - 电压频率特性
  - 电流频率特性
- 输入输出关系
  - 网络函数/传递函数

$X_L = \omega L$

$$\dot{I} = \frac{U_S}{\sqrt{R^2 + \left(1/\omega C\right)^2}} \angle\left(\varphi + \arctan 1/\omega RC\right)$$

$$H = \frac{\text{响应}}{\text{激励}}$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \angle -\arctan(\omega RC)$$

单选题 1分

设置

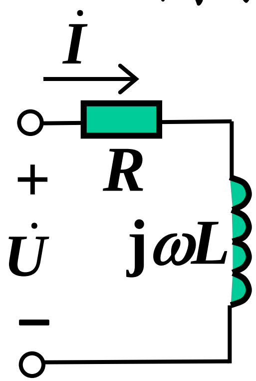
对于正弦激励下的纯电阻电路，只改变电路激励的频率，不会影响电路中某支路量的幅值和初相角

A 正确

B 错误

提交

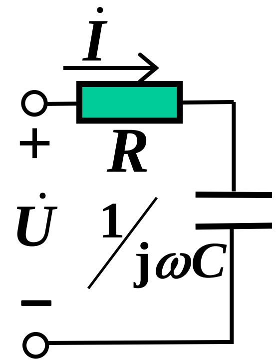
例1 画图示电路入端阻抗频率特性。



$$Z = R + \mathrm{j}\omega L$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

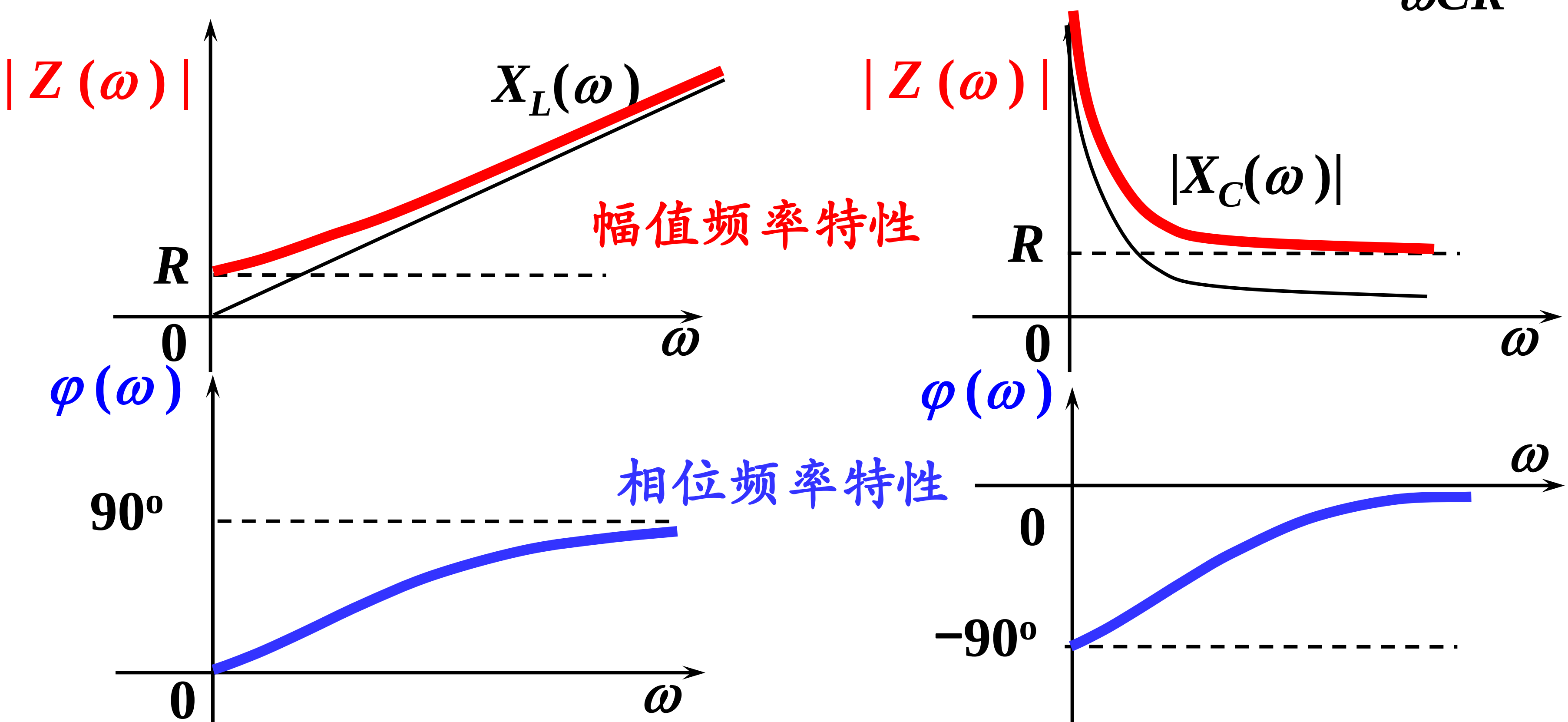
$$\varphi = \arctan\frac{\omega L}{R}$$



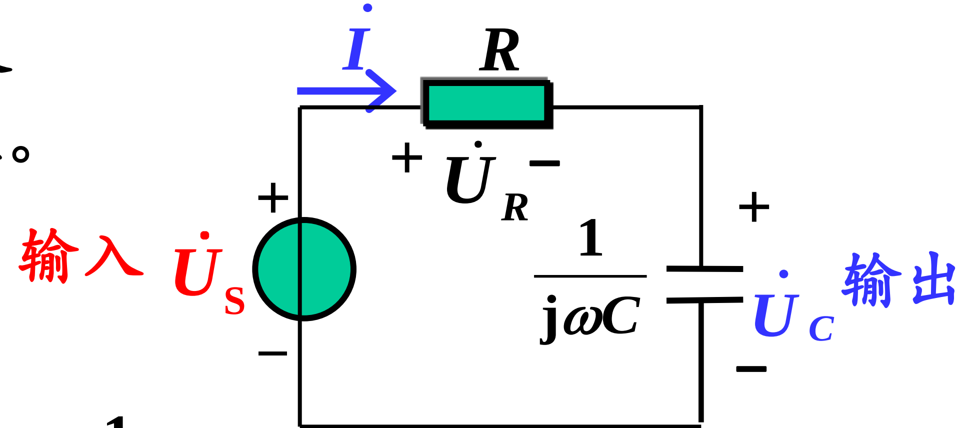
$$Z = R - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C}$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}$$

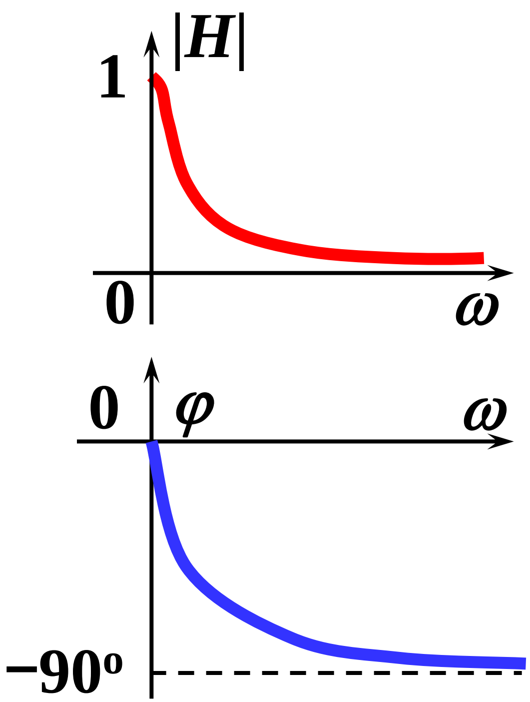
$$\varphi = -\arctan\frac{1}{\omega CR}$$



例2　画图示电路网络函数的频率特性。



$$H(\omega)=|H|\angle\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}\angle-\arctan(\omega CR)$$



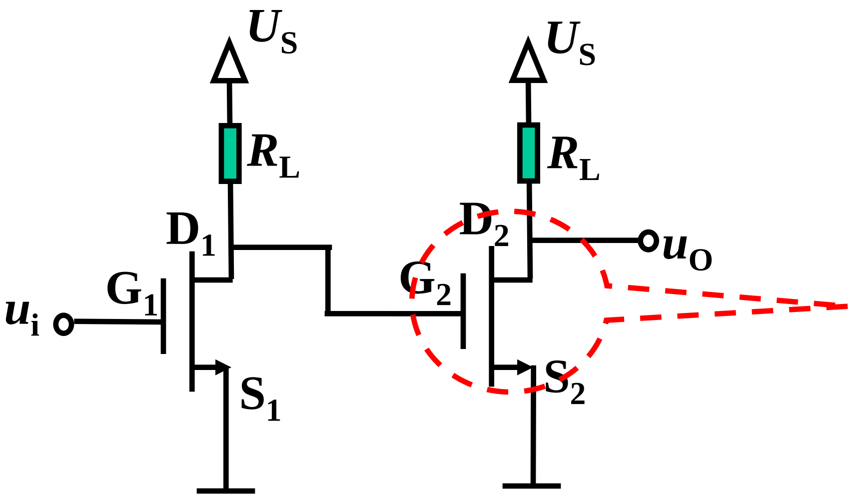
见仿真

设 $RC=1$

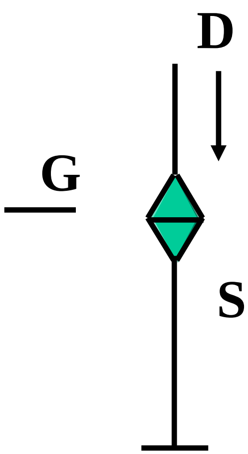
ω /(rad/s)	$\lvert H\rvert$	φ (°)
0	1	0
1	0.707	−45
5	0.196	−78.7
10	0.1	−84.3
20	0.05	−87.1
100	0.01	−89.4

(2) 用频率特性来分析

——MOSFET小信号放大器的增益

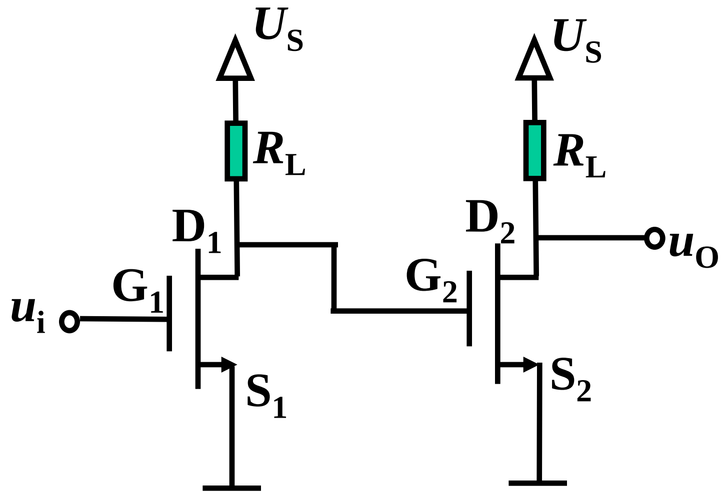


电流源模型



$$i_{DS} = \frac{K(u_{GS} - U_T)^2}{2}$$

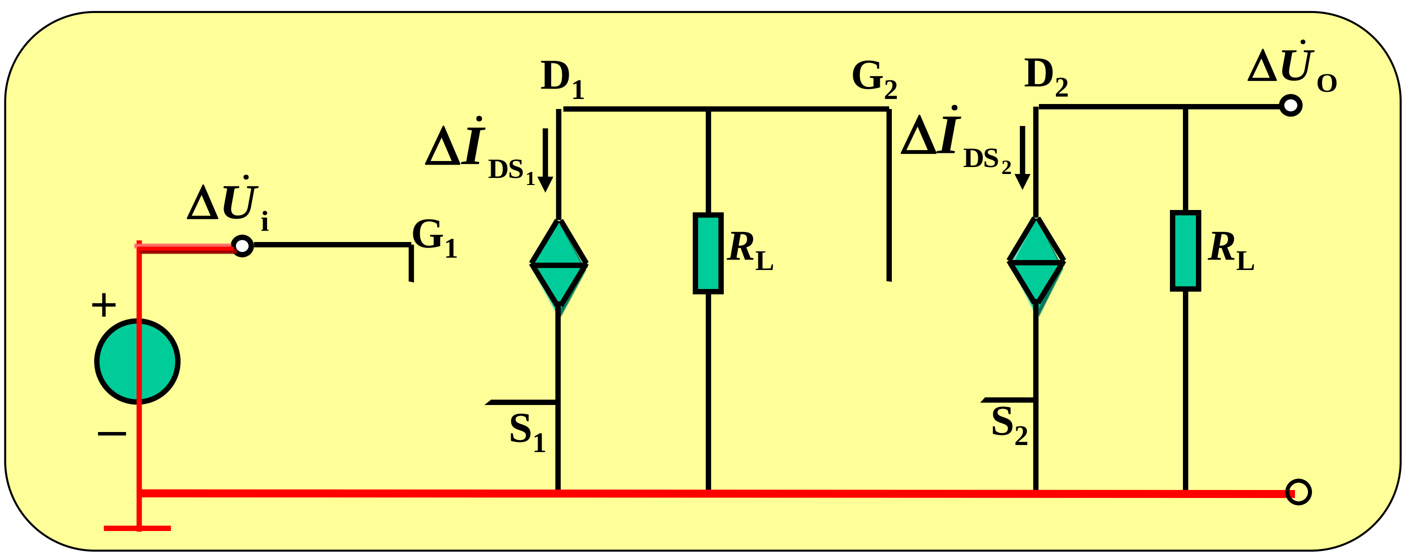
导通状态



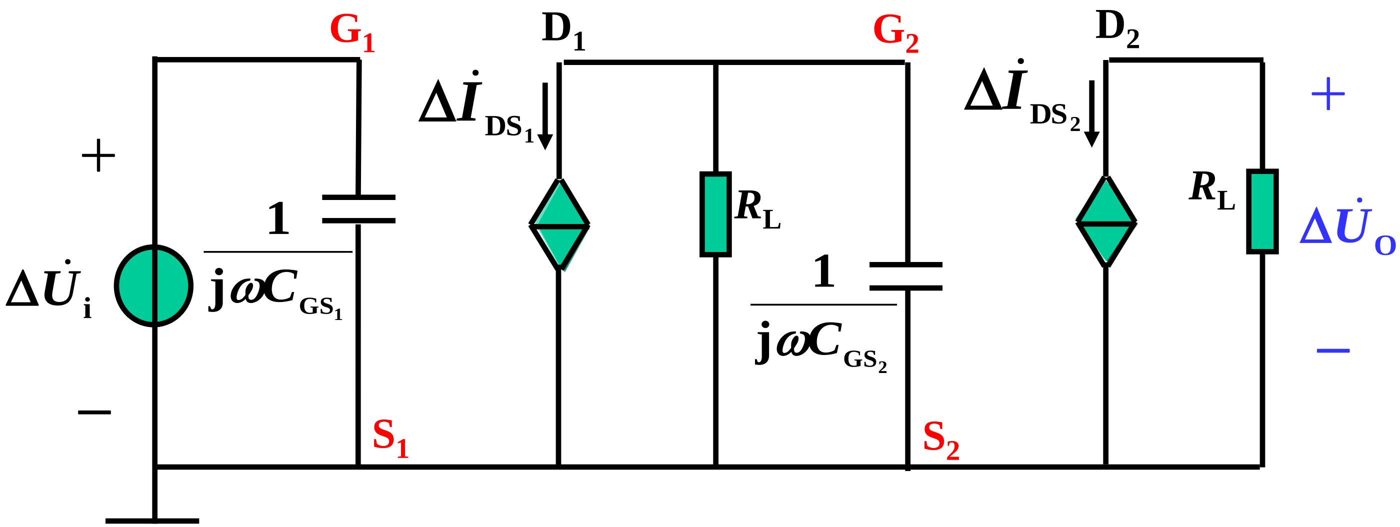
$$\Delta\dot{I}_{DS_1} = g_m \Delta\dot{U}_{G_1S_1}$$

$$\Delta\dot{I}_{DS_2} = g_m \Delta\dot{U}_{G_2S_2}$$

MOSFET放大器的小信号相量电路模型



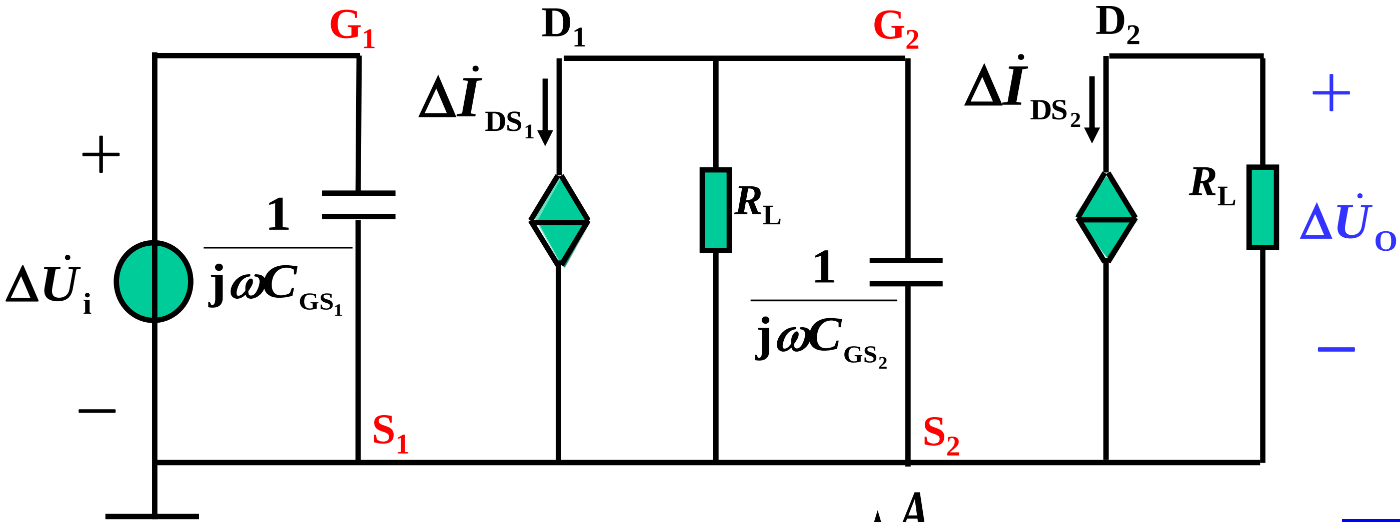
$$\Delta\dot{I}_{DS_1} = g_m \Delta\dot{U}_{G_1S_1} \qquad \Delta\dot{I}_{DS_2} = g_m \Delta\dot{U}_{G_2S_2}$$



$$\Delta\dot{U}_O = -\Delta\dot{I}_{DS_2} R_L = -g_m \Delta\dot{U}_{G_2S_2} R_L$$

$$\Delta\dot{U}_{G_2S_2} = -\frac{R_L \times \dfrac{1}{j\omega C_{GS_2}}}{R_L + \dfrac{1}{j\omega C_{GS_2}}} \times \Delta\dot{I}_{DS_1} = -\frac{R_L}{1 + j\omega C_{GS_2} R_L} \times \Delta\dot{I}_{DS_1}$$

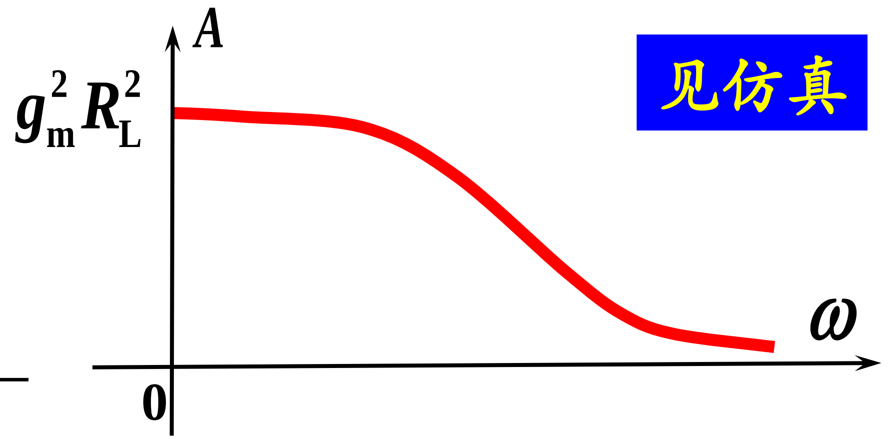
$$\Delta\dot{U}_O = g_m R_L \times \frac{R_L}{1 + j\omega C_{GS_2} R_L} \times \Delta\dot{I}_{DS_1} = \frac{g_m^2 R_L^2}{1 + j\omega C_{GS_2} R_L} \times \Delta\dot{U}_{G_1S_1}$$



$$\Delta\dot{U}_{\mathrm{O}} = \frac{g_{\mathrm{m}}^{2} R_{\mathrm{L}}^{2}}{1 + \mathrm{j}\omega C_{\mathrm{GS}_2} R_{\mathrm{L}}} \times \Delta\dot{U}_{\mathrm{G_1S_1}}$$

$$\frac{\Delta\dot{U}_{\mathrm{O}}}{\Delta\dot{U}_{\mathrm{i}}} = \frac{\Delta\dot{U}_{\mathrm{O}}}{\Delta\dot{U}_{\mathrm{G_1S_1}}} = \frac{g_{\mathrm{m}}^{2} R_{\mathrm{L}}^{2}}{1 + \mathrm{j}\omega C_{\mathrm{GS}_2} R_{\mathrm{L}}}$$

$$A = \left|\frac{\Delta\dot{U}_{\mathrm{O}}}{\Delta\dot{U}_{\mathrm{i}}}\right| = \frac{g_{\mathrm{m}}^{2} R_{\mathrm{L}}^{2}}{\sqrt{1 + \left(\omega C_{\mathrm{GS}_2} R_{\mathrm{L}}\right)^{2}}}$$



见仿真

结论：

由于存在寄生电容，MOSFET小信号放大器的增益随着频率增加而减小。

实际应用中，经常会出现

- 待考察量的变化非常大
- 频率范围非常宽

阻抗、电压电流、传递函数

$10^{-4}<|H|<10^{+3}$

1mHz～1GHz

见仿真

幅值/相位频率特性的波形特点被掩盖

$-4<\lg|H|<+3$

用对数表示

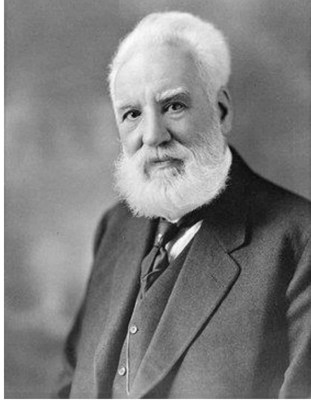
$-3\sim 9$

见仿真

分贝(decibel)

$$H_{\mathrm{dB}} = 20\lg|H|$$

dB的由来和好处



Bell

- 人们在研究声音有多响亮的过程中，提出两种用log方式描述比例大小的手段
- 声音响亮的程度与功率成正比
- 声音的功率与声压平方成正比
- 好处
  - 从容地表示大比例
  - 对>1和<1区分明显

$$\eta = \lg \frac{A}{B} (\text{Bell})$$

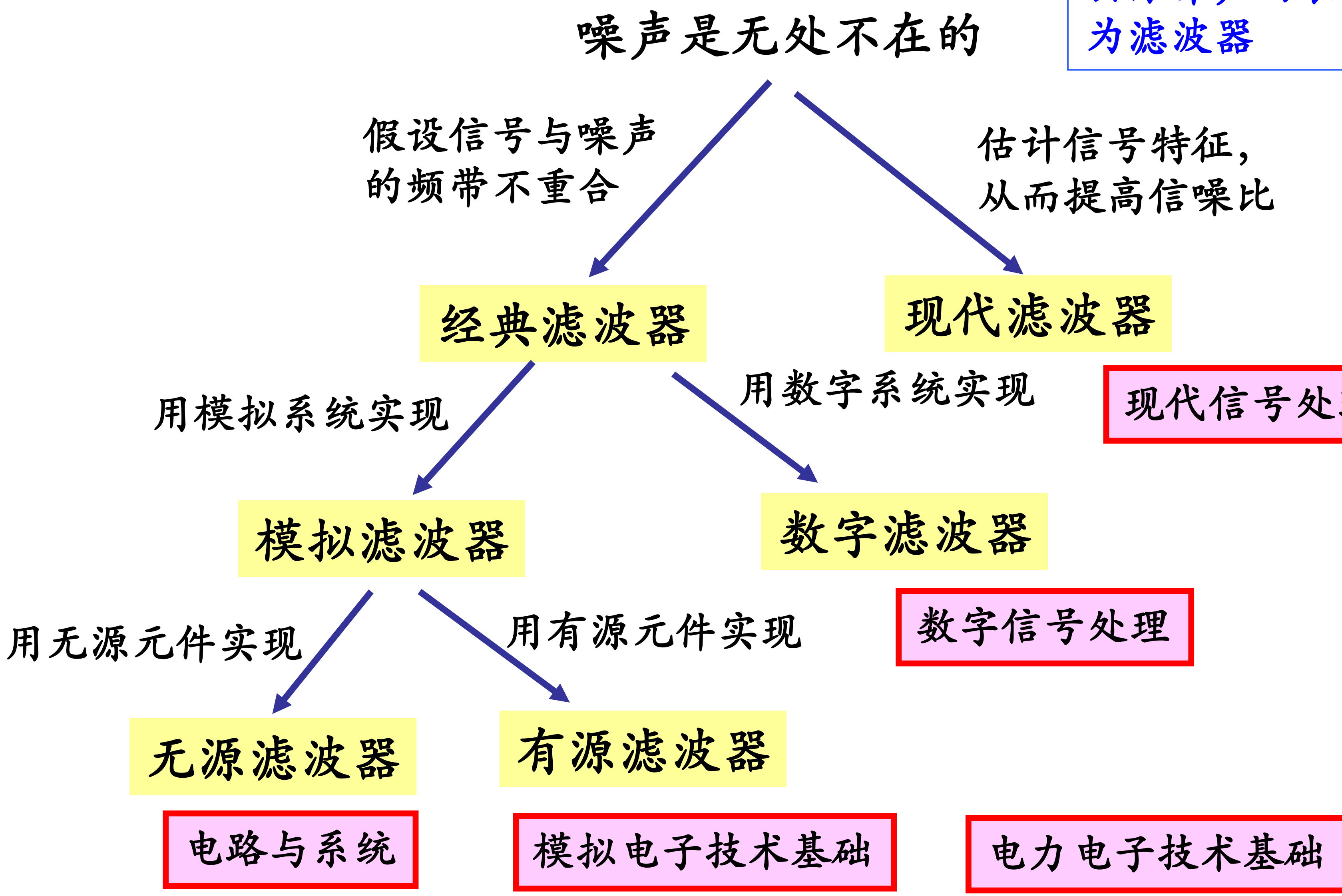
$$\text{dB} = 10 \lg \frac{A}{B}$$

$$\text{dB} = 10 \lg \frac{P_2}{P_1}$$

$$\text{dB} = 10 \lg \frac{U_2^2}{U_1^2} = 20 \lg \frac{U_2}{U_1}$$

2　滤波器(Filter)

去除噪声的装置称为滤波器



模拟滤波器

从功能上分类

低通(LP) 高通(HP) 带通(BP) 带阻(BS, Notch) 全通(FP)

从实现方式上分类

无源滤波器

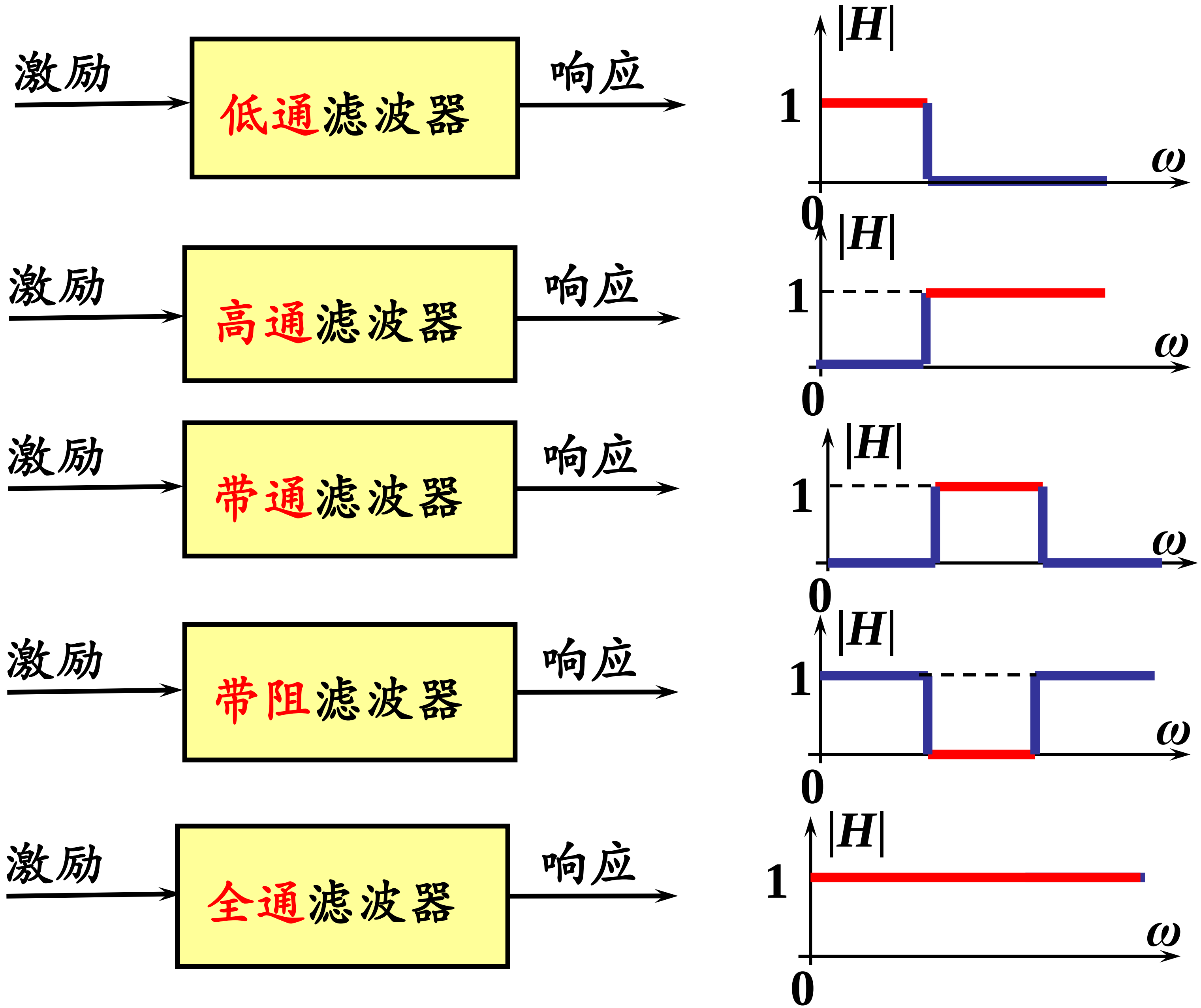
RC LC

用无源元件实现

有源滤波器

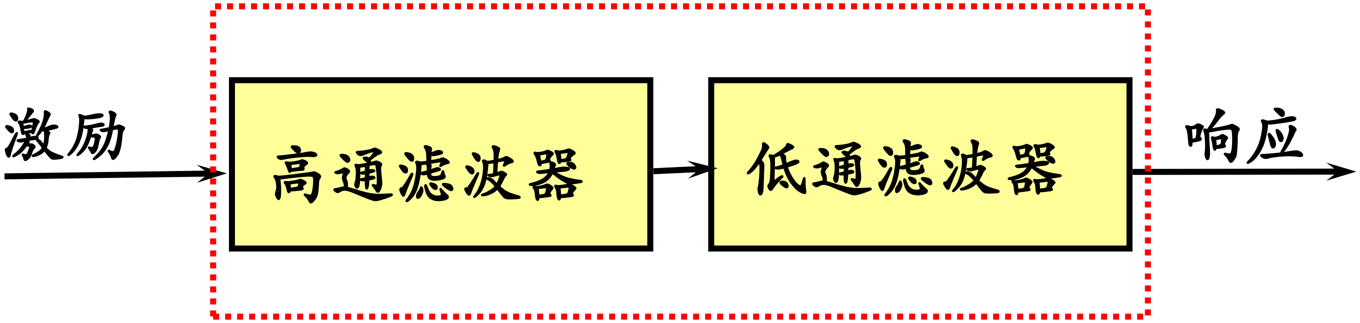
Op Amp 电力电子器件

用有源元件实现


激励
低通滤波器
响应
激励
高通滤波器
响应
激励
带通滤波器
响应
激励
带阻滤波器
响应
激励
全通滤波器
响应
|H|
1
0
ω

单选题 1分

设置



如设计得当，图示滤波器的组合可用作：

A 带通滤波器

B 全通滤波器

C 带阻滤波器

D 以上均有可能

提交

前述考虑了C_{GS}的MOSFET小信号放大器，可视作哪种滤波器？

A 高通

B 低通

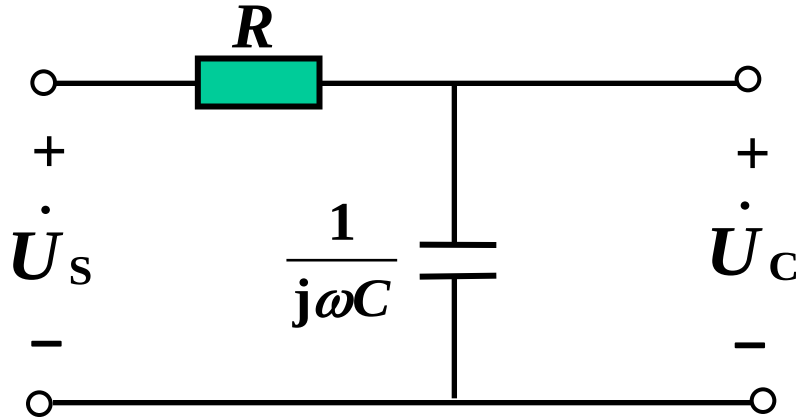
C 带通

D 带阻

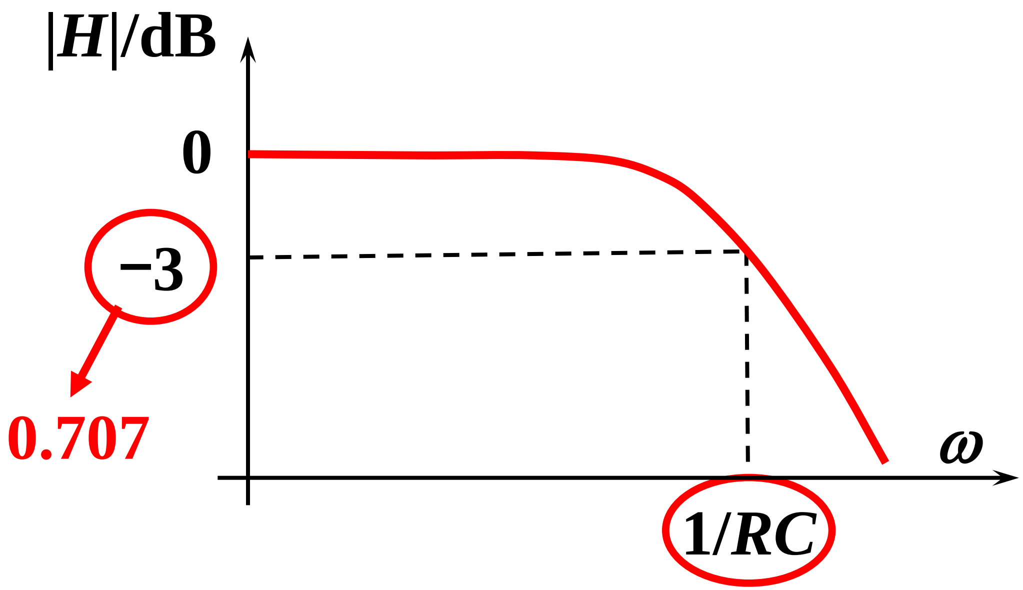
$$A=\left|\frac{\Delta\dot{U}_o}{\Delta\dot{U}_i}\right|=\frac{g_m^2R_L^2}{\sqrt{1+\left(\omega C_{GS_2}R_L\right)^2}}$$

提交

例



$$H(\omega)=|H|\angle\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}\angle-\arctan(\omega CR)$$

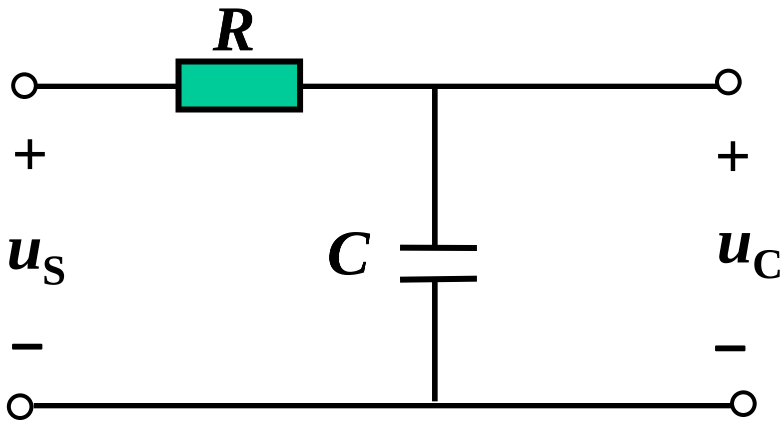


低通滤波器

下面我们来讨论这个低通滤波器在时域是个什么

截止频率　半功率频率

低通滤波器



时域

已知

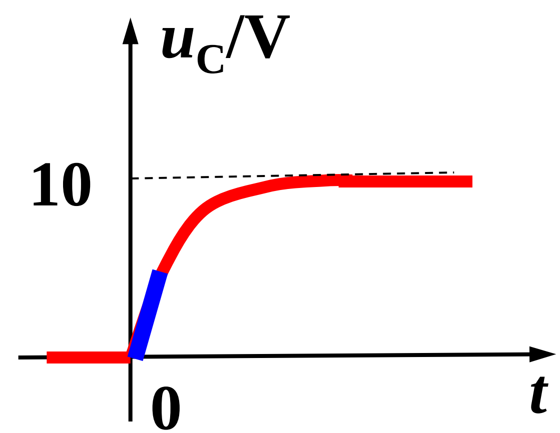
$$u_C(0^-)=0\,,\quad u_S=10\,\text{V}$$

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=u_S \quad\longrightarrow\quad u_C(t)=10(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})$$

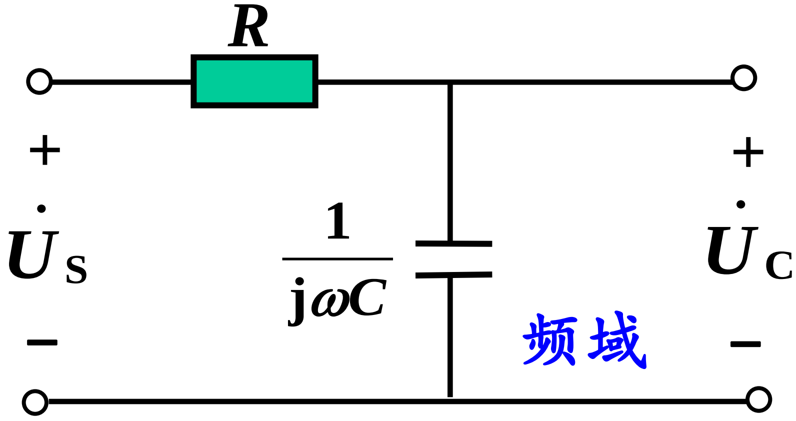
$RC>>1$

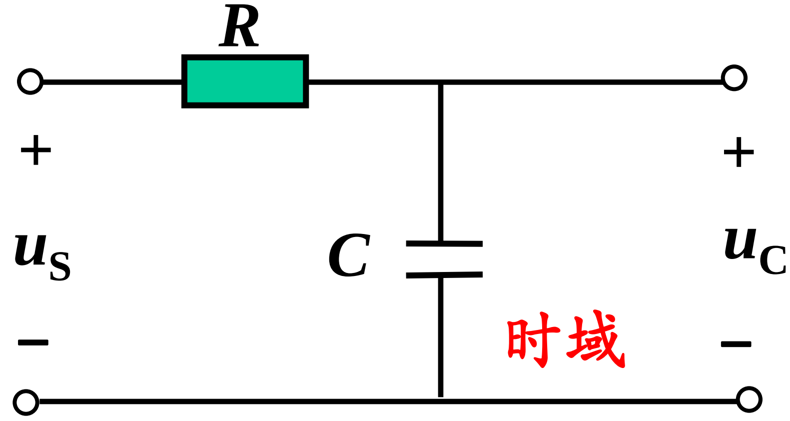
t很小

$$u_C\approx\frac{1}{RC}\int u_S\mathrm{d}t \qquad u_C\approx 10\frac{t}{RC}$$

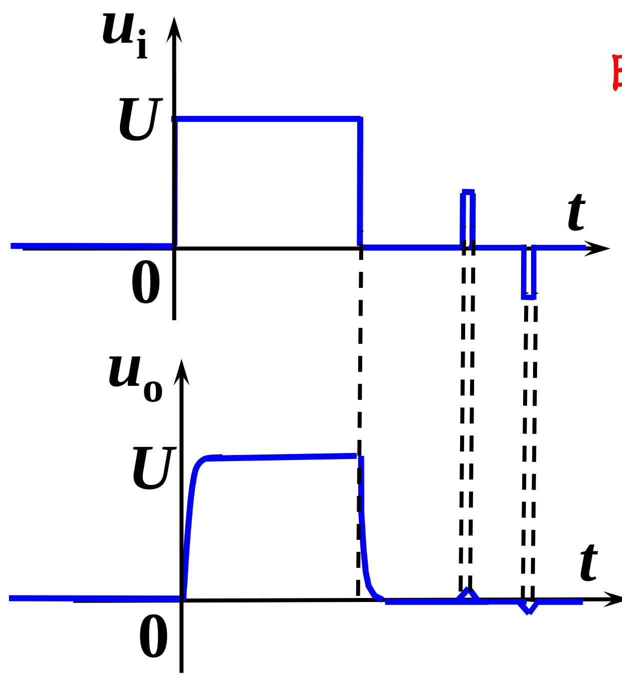


近似积分器





(截止频率比较低的)低通滤波器 ⟷ ? ⟷ (积分速度比较慢的)积分器



频域

毛刺变化快

↓

高频成分多

↓

高频成分被滤除

↓

毛刺被抑制

时域

毛刺时间短

↓

积分量小

↓

毛刺被抑制

3 谐振

resonance

The increase in amplitude of oscillation of an electric or mechanical system exposed to a periodic force whose frequency is equal or very close to the natural undamped frequency of the system.

19世纪的
垮桥悲剧
法、德、俄

Tacoma大桥垮塌事件

Washington, USA　　1980 米长

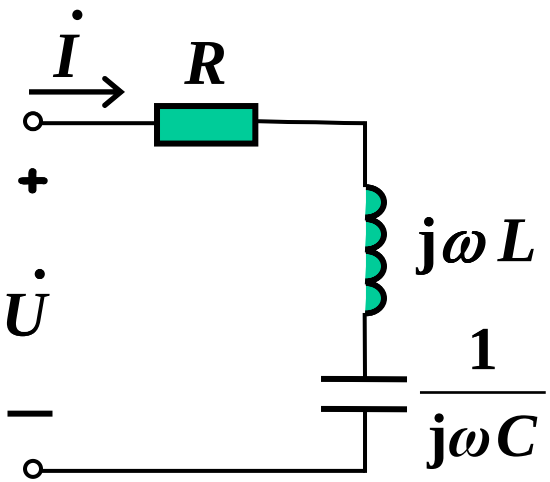
July 1, 1940　～　November 7, 1940

（1）电路中谐振的定义

当ω，L， C 满足一定条件，恰好使一端口网络的端口电压、电流出现同相位。一端口网络的这种状态称为谐振。

*RLC*串联

串联谐振

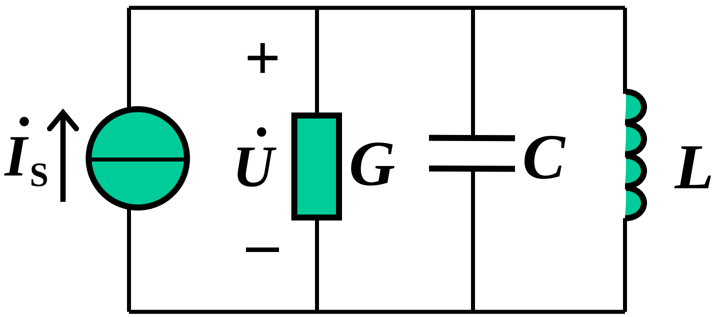


$$Z = R + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

$\omega L > \frac{1}{\omega C}$ 感性

$\omega L < \frac{1}{\omega C}$ 容性

$\omega L = \frac{1}{\omega C}$ 阻性



*RLC*并联

并联谐振

$$Y = G + \mathrm{j}(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

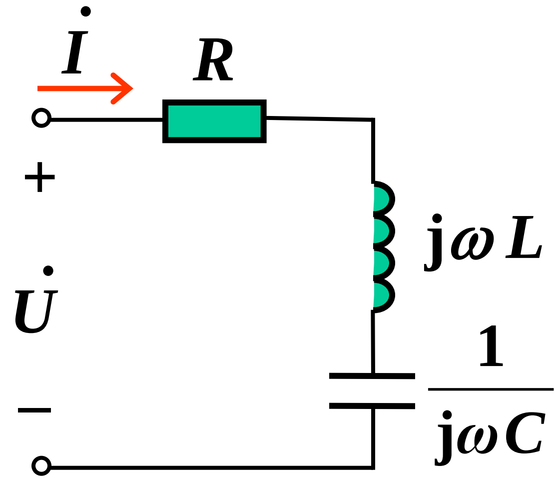
$\omega C > \dfrac{1}{\omega L}$ 容性

$\omega C < \dfrac{1}{\omega L}$ 感性

$\omega C = \dfrac{1}{\omega L}$ 阻性

(1) RLC串联谐振

（a） 串联谐振的谐振条件和谐振时端口入端电阻



① L C 不变，改变 ω，使 $X_L=|X_C|$

谐振时 $\omega_0 L = \dfrac{1}{\omega_0 C}$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

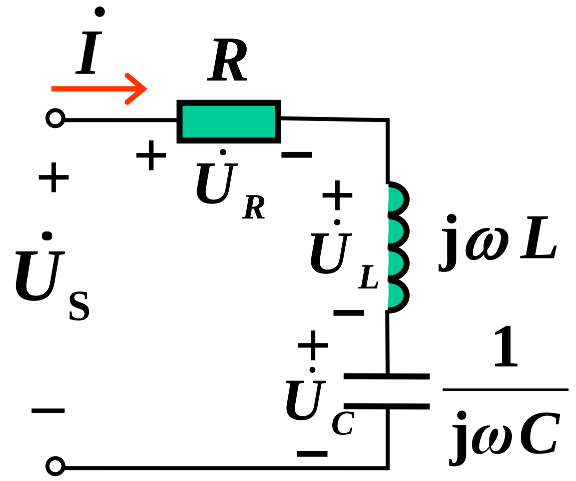
谐振角频率（resonant angular frequency）

$$\boxed{Z_0 = R}$$

谐振时端口入端阻抗(入端电阻)

②电源频率不变，改变 L 或 C（常改变C），使 $X_L=|X_C|$。

(b) 串联谐振时的电压和电流

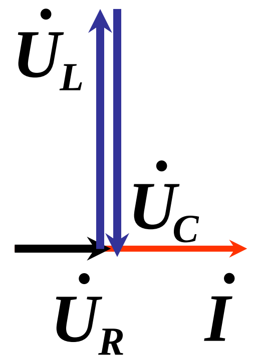


$$\dot{U}_R = R\dot{I} = \dot{U}_S \qquad \dot{I} = \frac{\dot{U}_S}{R}$$

$$\dot{U}_L = \mathrm{j}\omega_0 L\dot{I} = \mathrm{j}\frac{\omega_0 L}{R}\dot{U}_S$$

$$\dot{U}_C = \frac{\dot{I}}{\mathrm{j}\omega_0 C} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega_0 CR}\dot{U}_S$$

$$\omega_0 L = \frac{1}{\sqrt{LC}}L = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{\omega_0 C}$$

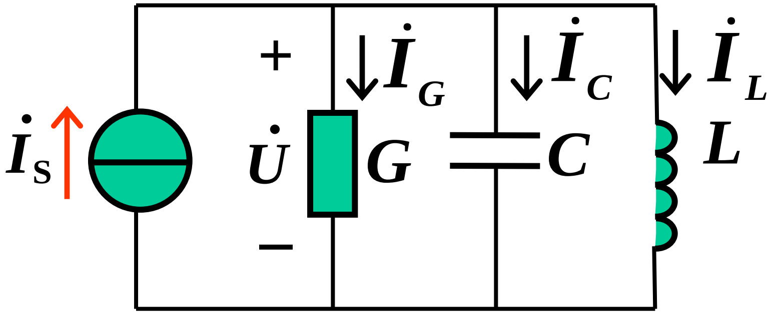


L 和 *C* 上可能出现比端口电压更高的电压

谐振时的相量图

串联谐振又称电压谐振

(2) GCL并联谐振



$$Y = G + \mathrm{j}(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

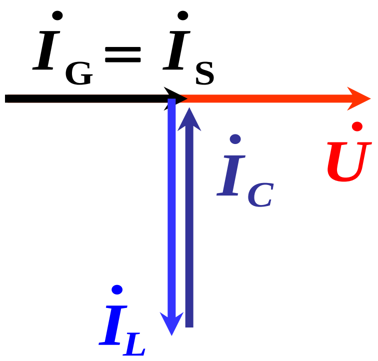
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Z_0 = 1/G$$

$$\dot{I}_G = G\dot{U} = \dot{I}_S \qquad \dot{U} = \frac{\dot{I}_S}{G}$$

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}}{\mathrm{j}\omega_0 L} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega_0 LG}\dot{I}_S$$

$$\dot{I}_C = \mathrm{j}\omega_0 C\dot{U} = \mathrm{j}\frac{\omega_0 C}{G}\dot{I}_S$$



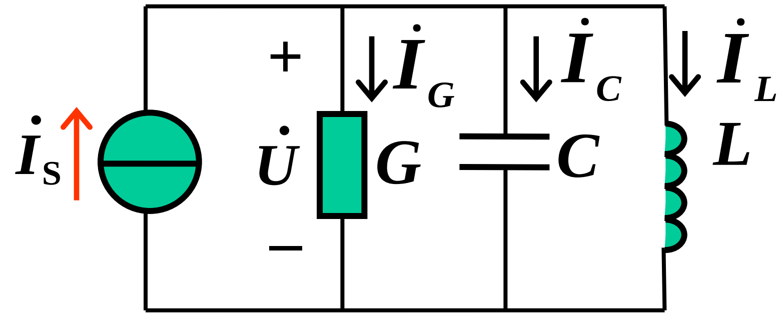
L 和 *C* 上可能出现比端口电流更大的电流

并联谐振又称电流谐振

单选题 1分

设置

对于图示的GCL并联电路，电源为频率可变的正弦电流，L=0.25mH，C=10μF。其谐振**频率**为



A 20.0 kHz

B 6.36 kHz

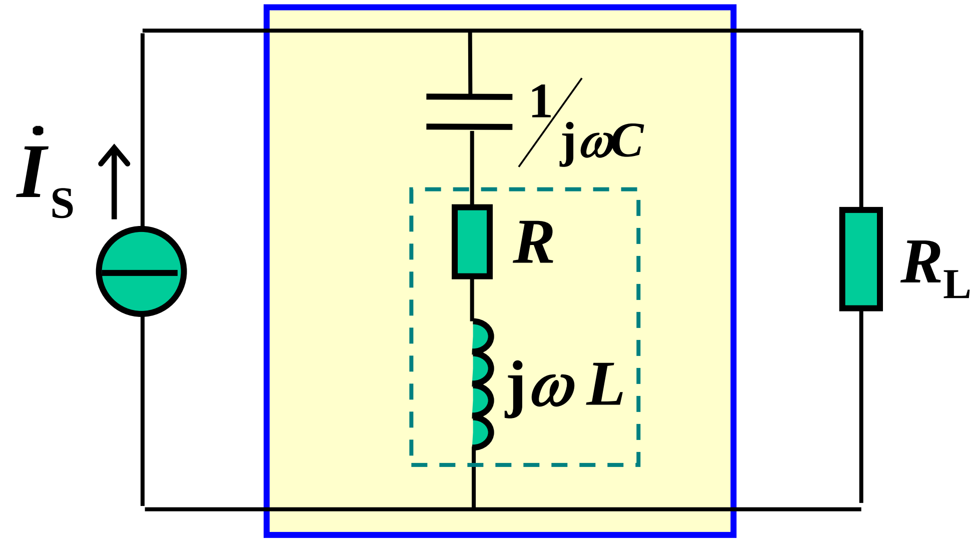
C 3.18 kHz

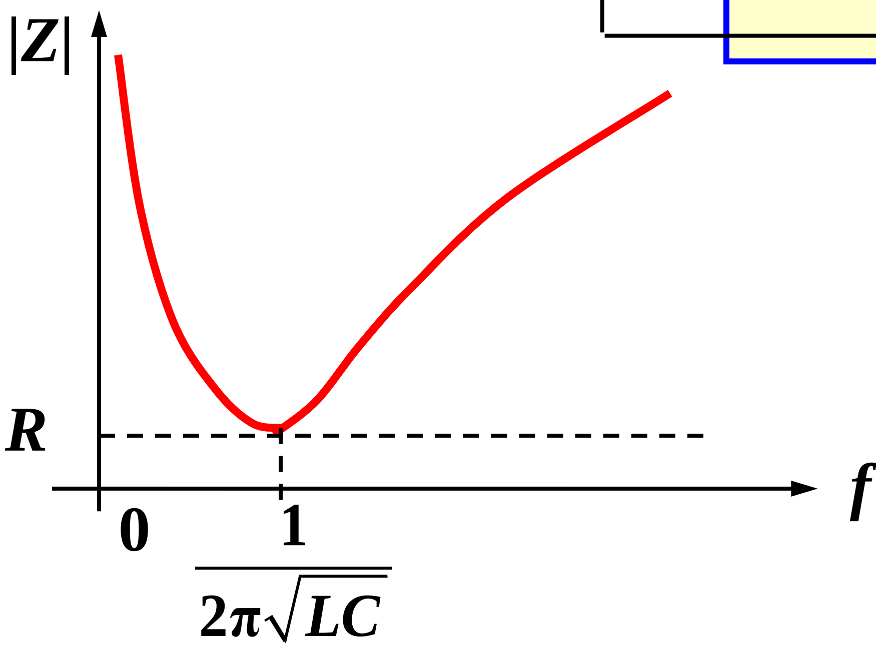
D 1.59 kHz

提交

(4) 谐振可视为某种滤波器

电力谐振滤波器





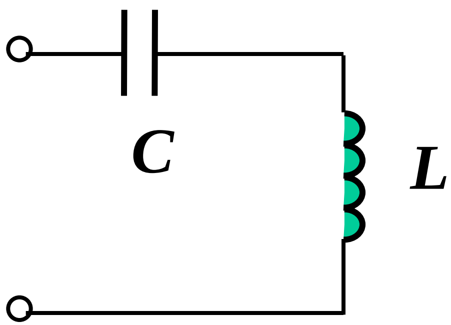
看仿真

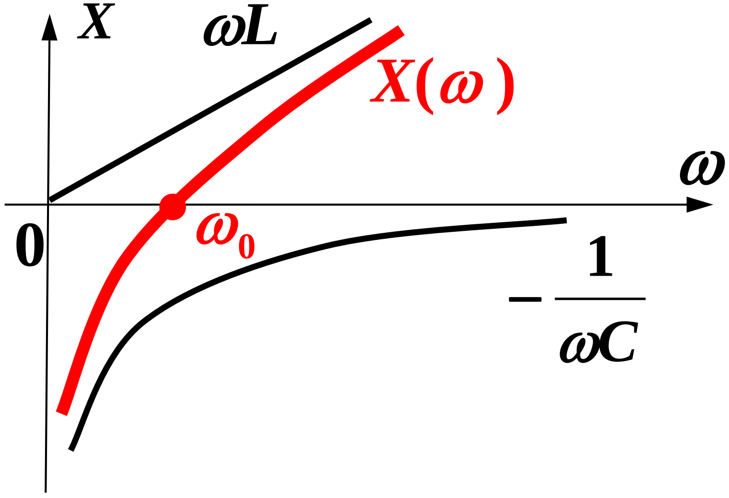
带阻滤波器

(5) LC谐振电路

（a）串联谐振

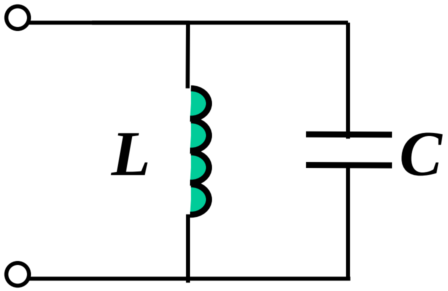
$$jX = j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$



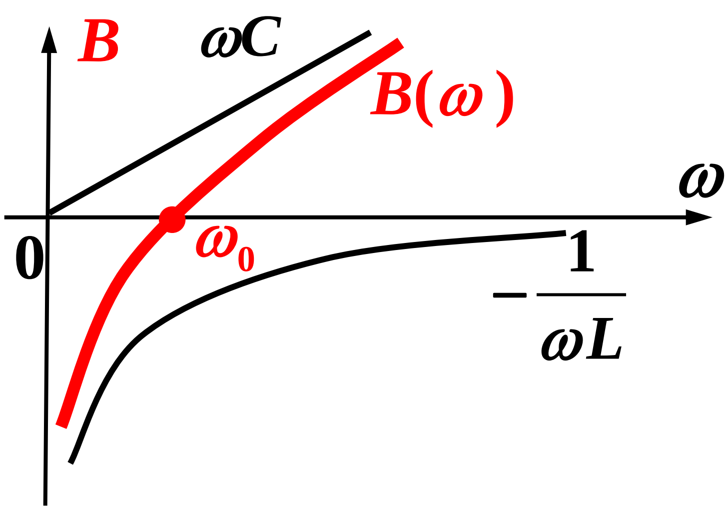


$\omega = \omega_0$ 时　　端口相当于短路

(b）并联谐振



$$\mathrm{j}B = \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} + \mathrm{j}\omega C = \mathrm{j}(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$



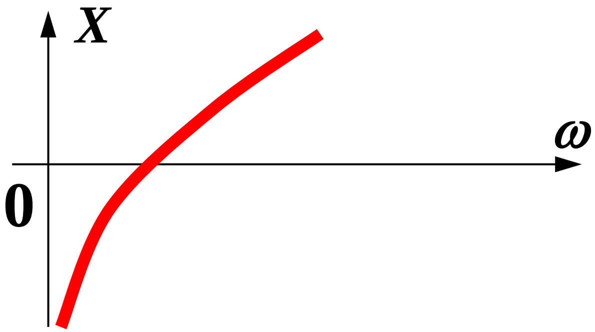
$$\mathrm{j}X = \frac{1}{\mathrm{j}B} = \mathrm{j}(-\frac{1}{B})$$

单选题 1分

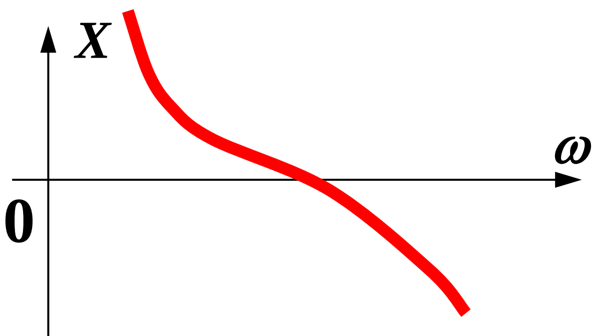
设置

LC并联谐振的端口电抗频率特性为

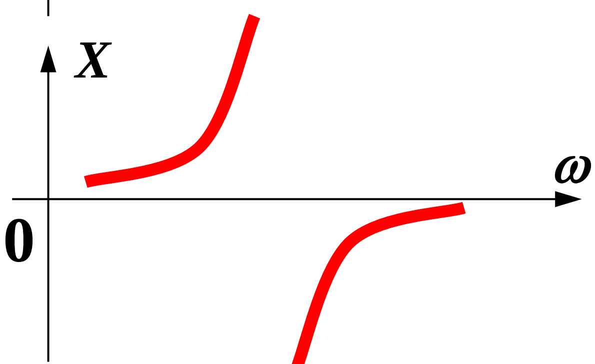
A

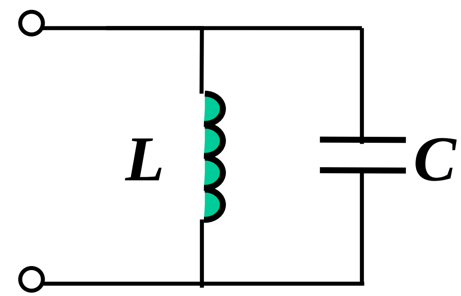


B



C



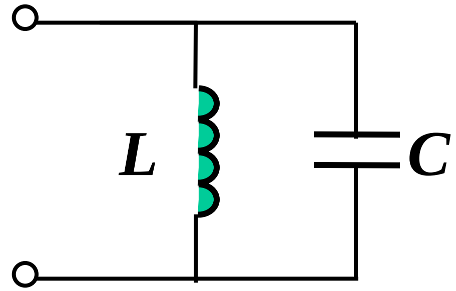


$$\mathrm{j}B = \mathrm{j}(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

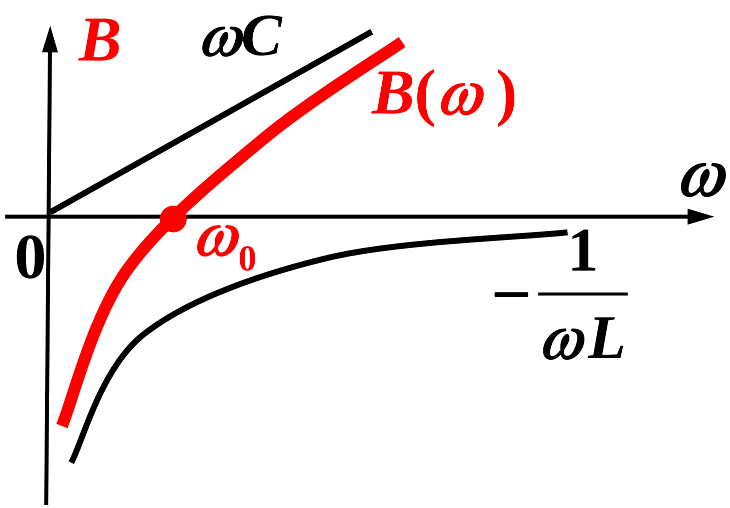
$$\mathrm{j}X = \frac{1}{\mathrm{j}B} = \mathrm{j}(-\frac{1}{B})$$

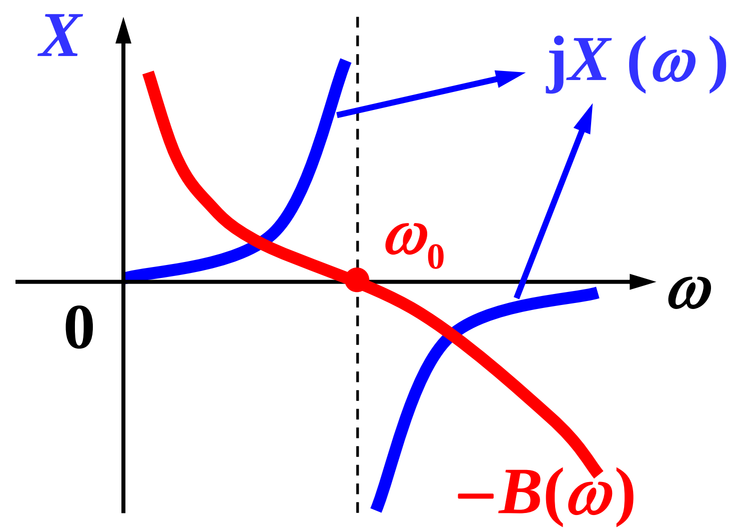
提交

(b) 并联谐振



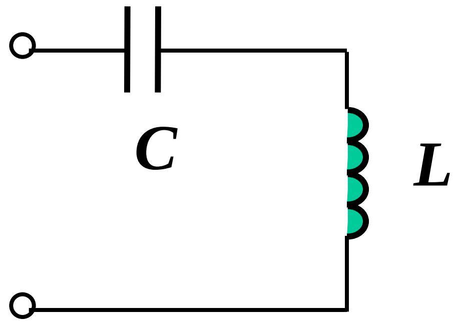
$$jB = \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = j(\omega C - \frac{1}{\omega L}) \qquad jX = \frac{1}{jB} = j(-\frac{1}{B})$$

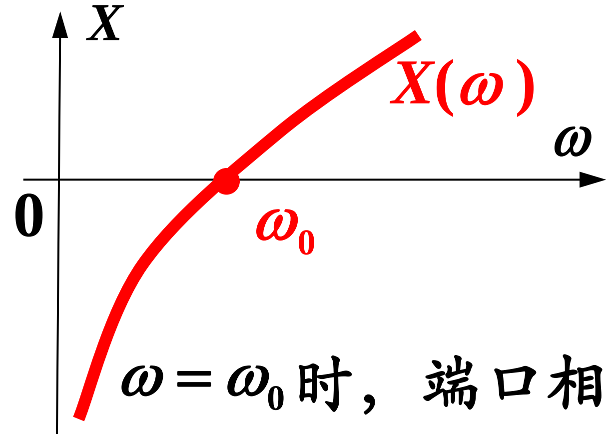




$\omega = \omega_0$ 时　　端口相当于开路

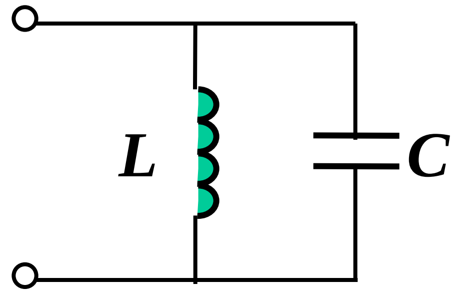
LC串联谐振

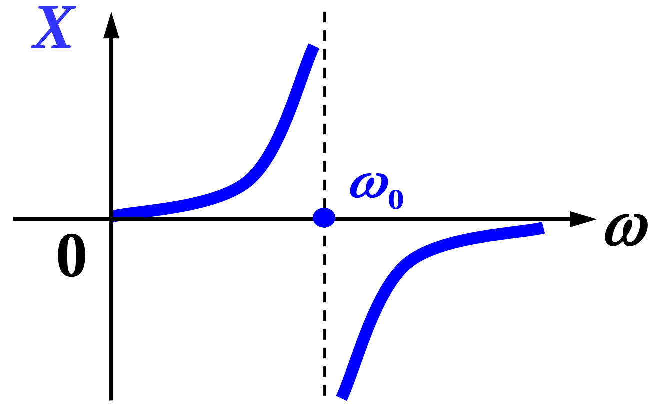




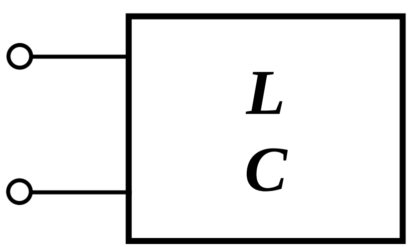
$\omega=\omega_0$时，端口相当于短路

LC并联谐振





$\omega=\omega_0$时，端口相当于开路

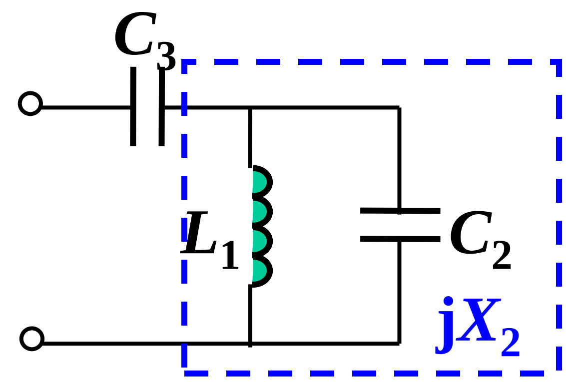


$$Z(\omega)=\mathrm{j}\frac{f_1(\omega)}{f_2(\omega)}$$

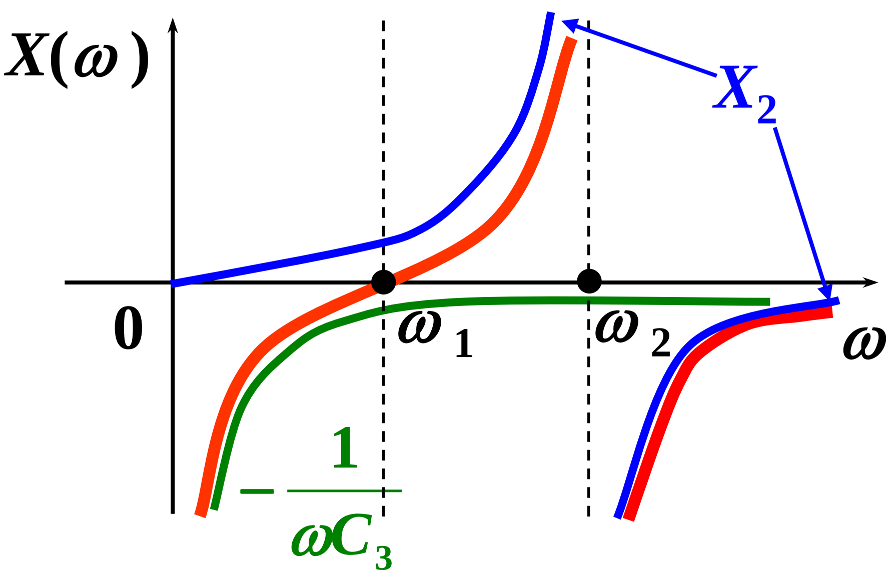
$f_1(\omega_0)=0$ 时，电路发生串联谐振

$f_2(\omega_0)=0$ 时，电路发生并联谐振

(c) 混联谐振



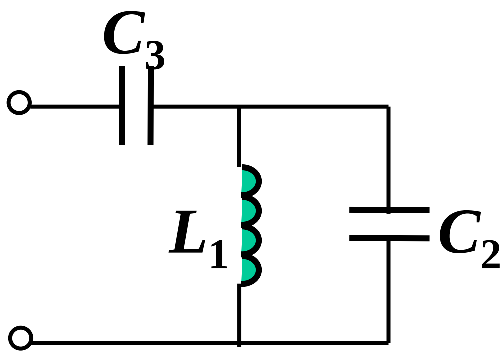
$$jX=\frac{1}{j\omega C_3}+jX_2=j(-\frac{1}{\omega C_3}+X_2)$$



L_1、C_2并联，在某一角频率ω_2下发生并联谐振。

$\omega>\omega_2$时，并联部分呈容性， $\omega<\omega_2$时，并联部分呈感性，在某一角频率ω_1下可与C_3发生串联谐振。

定量分析



$$Z(\omega)=\frac{1}{j\omega C_3}+\frac{j\omega L_1\dfrac{1}{j\omega C_2}}{j\omega L_1+\dfrac{1}{j\omega C_2}}$$

$$=\frac{1}{j\omega C_3}+\frac{j\omega L_1}{1-\omega^2 L_1 C_2}$$

$$=-j\frac{1-\omega^2 L_1(C_2+C_3)}{\omega C_3(1-\omega^2 L_1 C_2)}$$

分别令分子、分母为零，可得：

$$\boxed{\omega_1=\frac{1}{\sqrt{L_1(C_2+C_3)}}}$$

发生串联谐振 $\boxed{Z_0=0}$

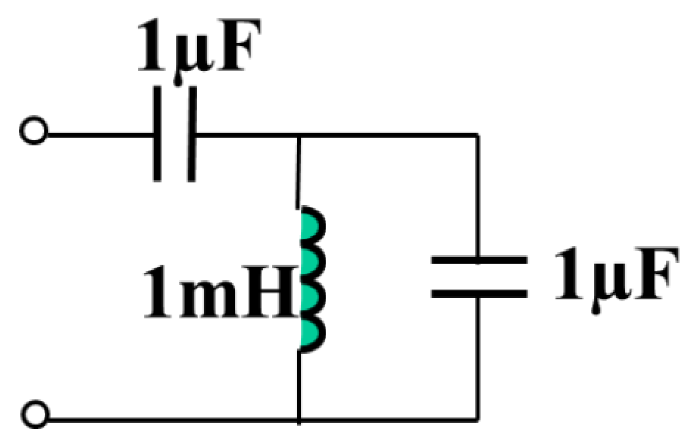
$$\boxed{\omega_2=\frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}}}$$

发生并联谐振 $\boxed{Z_0=\infty}$

单选题 1分

设置

对于图示电路，当频率为何值时，会发生串联谐振？



A 3.56 kHz

B 5.03 kHz

C 22.4 kHz

D 31.6 kHz

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1(C_2 + C_3)}}$$

发生串联谐振

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}}$$

发生并联谐振

提交

思考

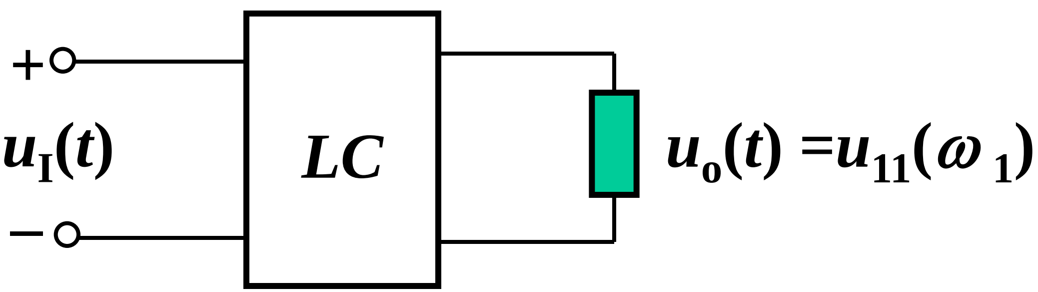
此处可以有投稿

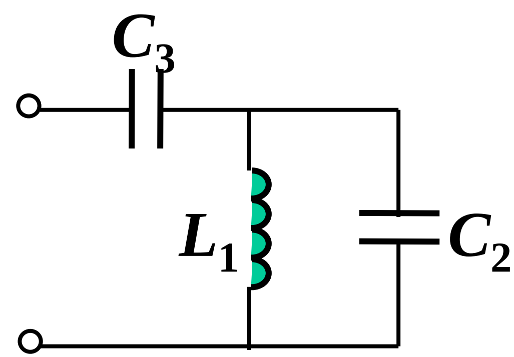
激励 $u_I(t)$，包含两个频率ω_1、 ω_2分量($\omega_1 < \omega_2$):

$$u_1(t) = u_{11}(\omega_1) + u_{12}(\omega_2)$$

要求负载电压$u_o(t)$只有$u_{11}(\omega_1)$频率电压，（无ω_2频率电压）。

如何实现?





若$\omega_1 > \omega_2$，仍要只得到ω_1频率电压，如何设计电路?