第5讲　二端口网络
(Two-port Network)

二端口网络的参数和方程

根据给定电路求二端口参数

二端口网络的等效电路

根据给定二端口参数求等效电路

Why Two-port?

电磁场
(感兴趣内部*EB*)

→

电路元件
(感兴趣接线端*ui*)

→

功能子电路
(感兴趣端口*ui*)

↓

板卡
(感兴趣接口*ui*)

→

计算机
(感兴趣接口*ui*)

→

Internet
(感兴趣网线中*ui*表征的信息)

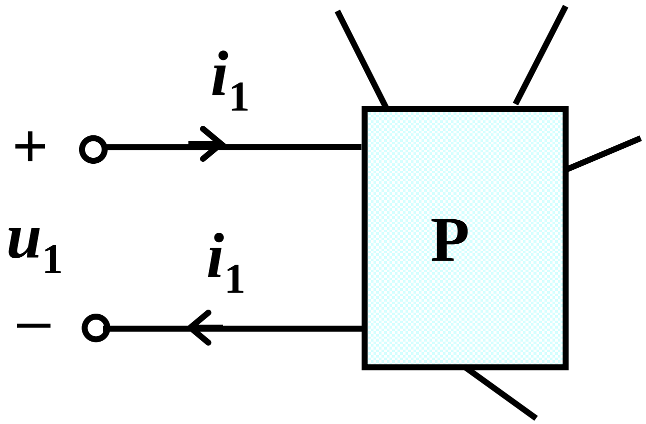
抽象的力量

对等效的理解

二端口的分析手段：KCL+KVL+元件约束

1. 定义

(1) 端口 (port)



端口由两个接线端构成，且满足如下条件：**从一个接线端流入的电流等于从另一个接线端流出的电流。**

端口条件

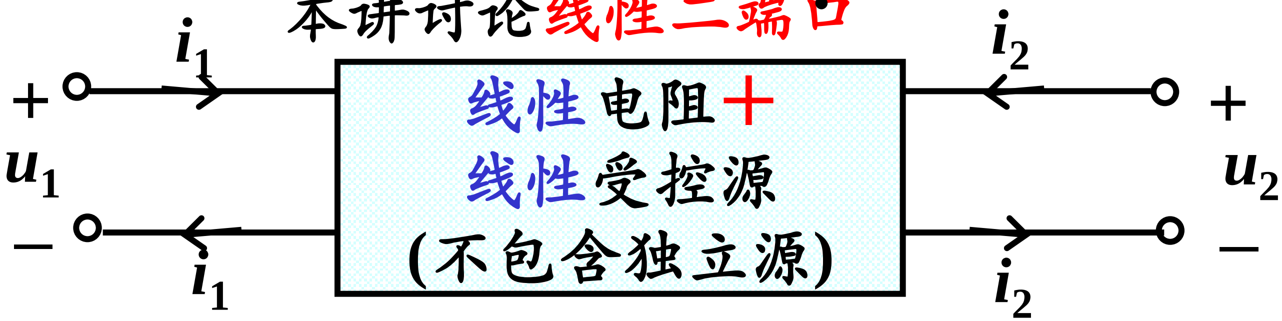
(2) 二端口（two-port）

Franz Breisig 1920提出

当一个电路与外部电路通过**两个端口**连接时称此电路为**二端口**网络。

≠线性四端网络

本讲讨论**线性二端口**



注意 **参考方向**：u上+下−，i从u的+端流入。

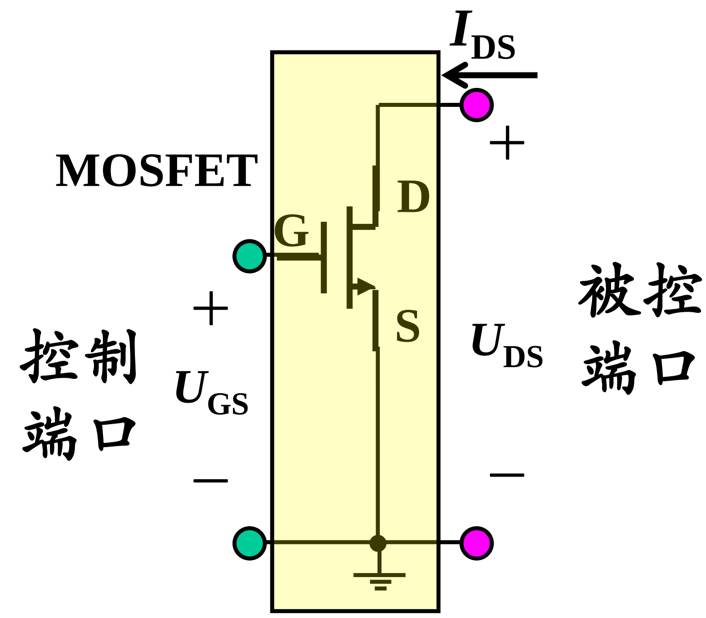
单选题 1分

设置

图示电路可以看做二端口吗？

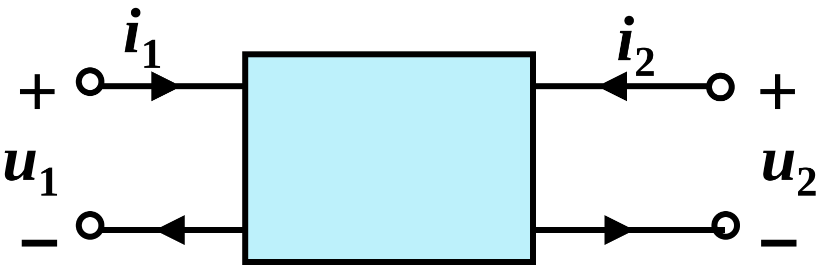
A 可以

B 不可以



提交

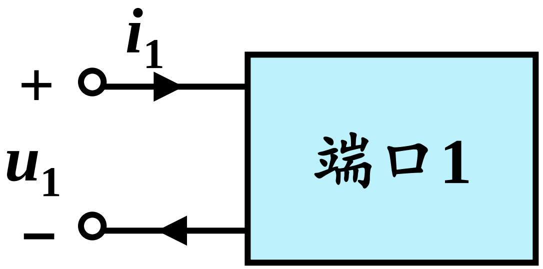
2　二端口的参数和方程

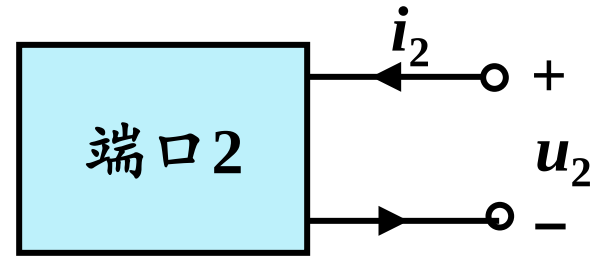


端口物理量**4个**　　i_1　i_2　u_1　u_2

如何描述二端口网络的电压电流关系?

回忆一端口网络的电压电流关系



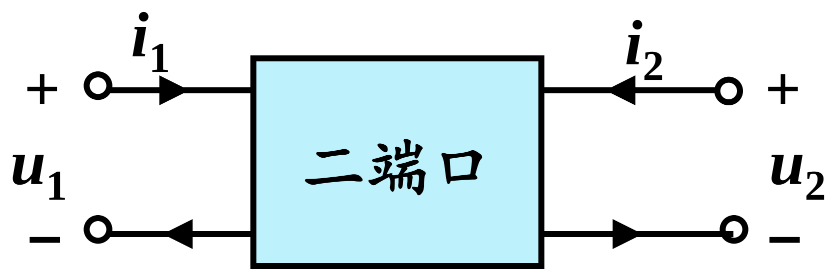


$$u_1 = f_1(i_1)$$

或 $$i_1 = g_1(u_1)$$

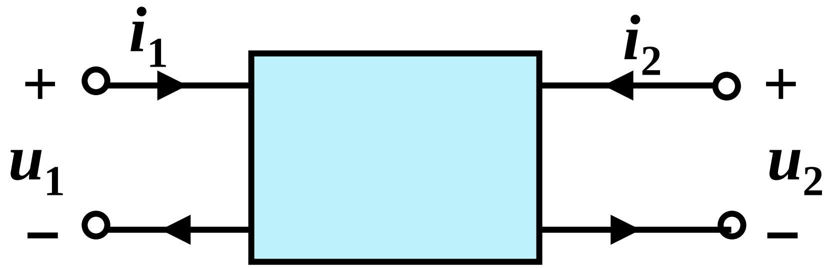
$$u_2 = f_2(i_2)$$

或 $$i_2 = g_2(u_2)$$



应该用两个电压电流关系方程来描述二端口网络

即：用两个物理量来表示另外两个物理量



端口物理量**4个**

i_1 i_2 u_1 u_2

可能有几种用两个量描述另外两个量的端口关系方程?

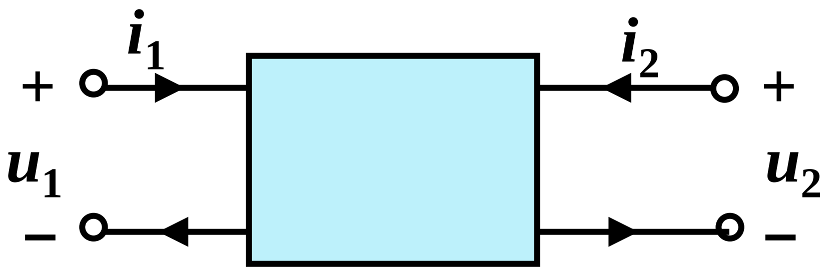
A 1

B 3

C 6

D 8

提交



端口物理量**4个**

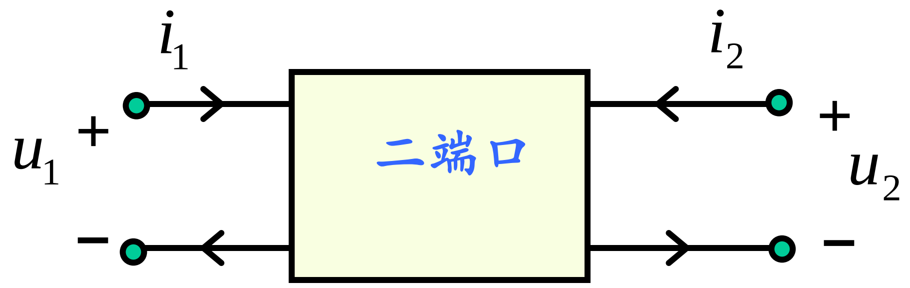
$i_1 \quad i_2 \quad u_1 \quad u_2$

共6种端口关系方程

用		来表示	
u_1	u_2	i_1	i_2
i_1	i_2	u_1	u_2
i_2	u_2	i_1	u_1
i_1	u_2	i_2	u_1
i_1	u_1	i_2	u_2
i_2	u_1	i_1	u_2

(1) 用电压表示电流：G参数和方程

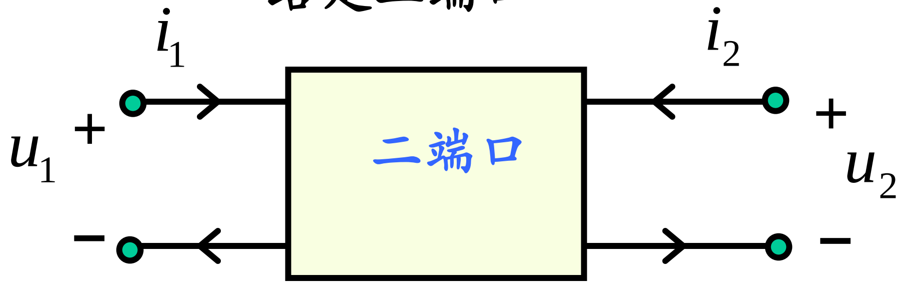
$$\begin{cases} i_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2 \\ i_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2 \end{cases}$$



矩阵形式 $$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

令 $$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

给定二端口



$$\begin{cases} i_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2 \\ i_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2 \end{cases}$$

对于某一黑箱二端口，
如何获得其G参数（不解方程）？

此处可以有弹幕

G参数的实验测定

$$G_{11} = \frac{i_1}{u_1}\bigg|_{u_2=0}$$ 自电导

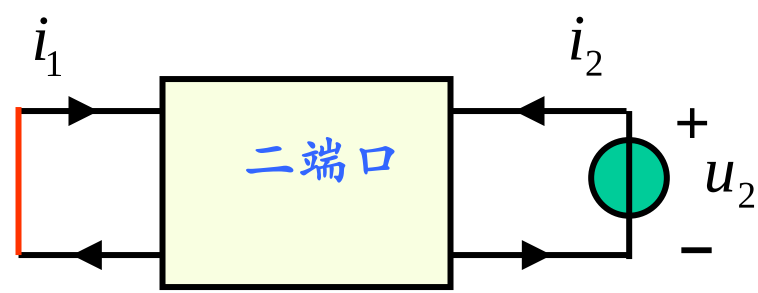
$$G_{21} = \frac{i_2}{u_1}\bigg|_{u_2=0}$$ 转移电导

$$G_{12} = \frac{i_1}{u_2}\bigg|_{u_1=0}$$ 转移电导

$$G_{22} = \frac{i_2}{u_2}\bigg|_{u_1=0}$$ 自电导

类比一端口网络端口电导的求法

加压求流

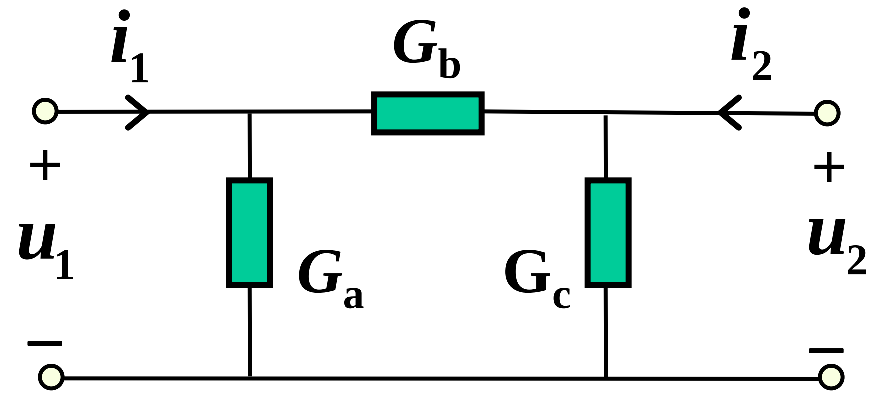


称G为短路电导参数矩阵

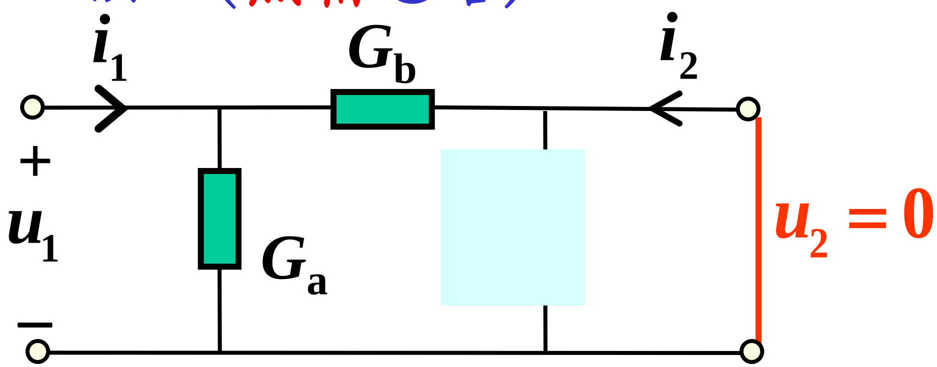
能这样做的前提是端口能够被短路！

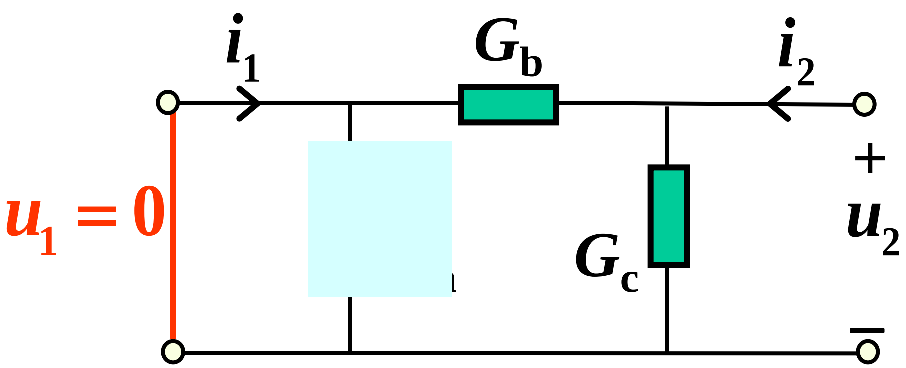
例1 求G参数。

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2 \\ i_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2 \end{cases}$$



解 法1（黑箱思路）





$$G_{11} = \left.\frac{i_1}{u_1}\right|_{u_2=0} = G_a + G_b$$

$$G_{21} = \left.\frac{i_2}{u_1}\right|_{u_2=0} = -G_b$$

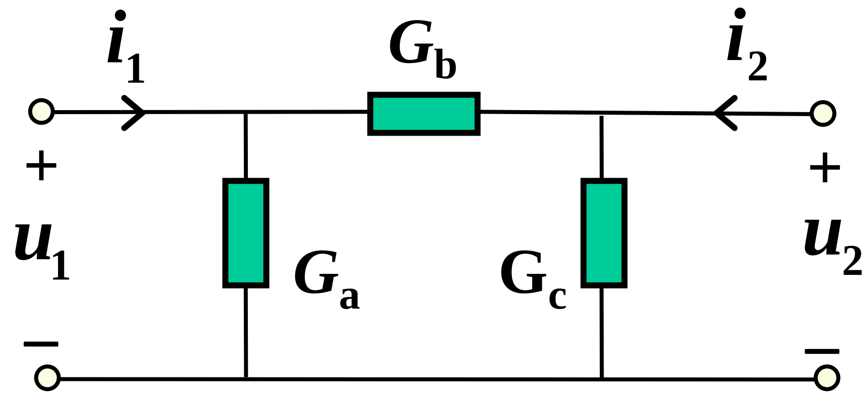
$$G_{12} = \left.\frac{i_1}{u_2}\right|_{u_1=0} = -G_b$$

$$G_{22} = \left.\frac{i_2}{u_2}\right|_{u_1=0} = G_b + G_c$$

$$\boxed{G_{12} = G_{21} = -G_b}$$

例1 求G参数。

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2 \\ i_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2 \end{cases}$$



解

法2 对白箱二端口，可直接求端口电压电流关系

$$i_1 = u_1G_a + (u_1 - u_2)G_b$$

$$i_2 = u_2G_c + (u_2 - u_1)G_b$$

$$G_{11} = G_a + G_b$$

$$G_{21} = -G_b$$

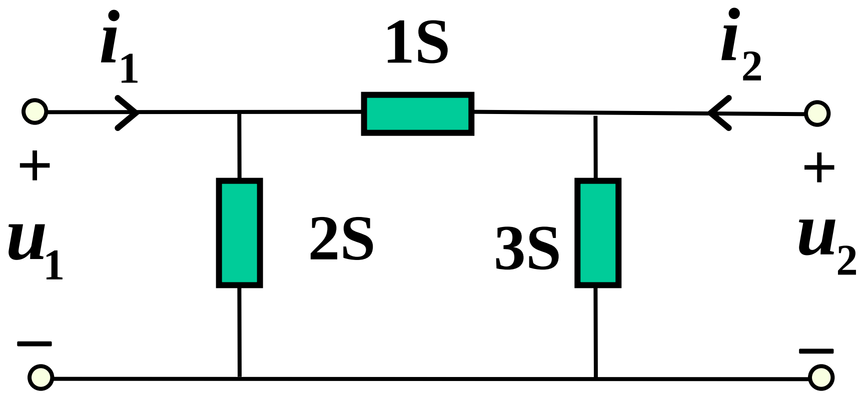
$$G_{12} = -G_b$$

$$G_{22} = G_b + G_c$$

单选题 1分

设置

该二端口网络的G_{21}=____S



A 1

B -1

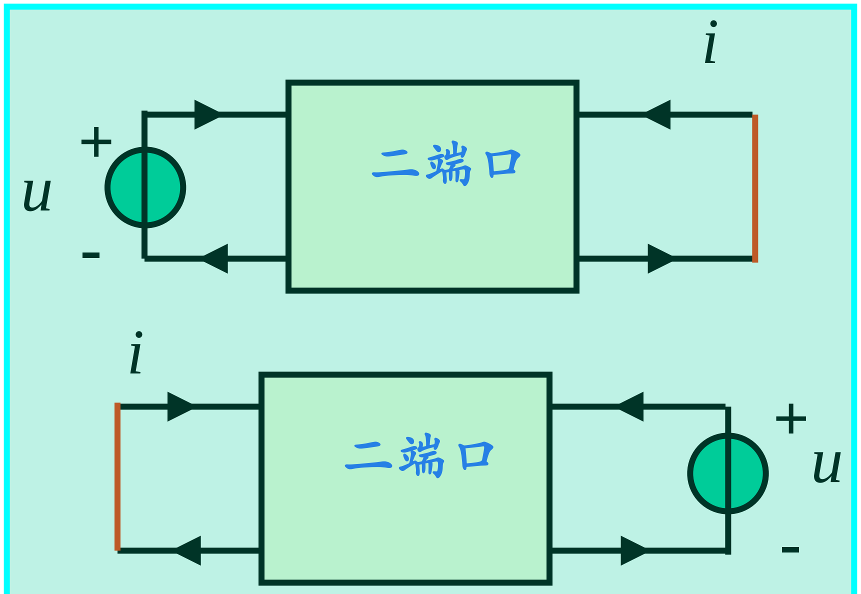
C 3

D 4

提交

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

互易二端口 某激励无论加在哪侧，在**对侧**产生的响应都一样



$$i = G_{21}u$$

$$i = G_{12}u$$

$$G_{12} = G_{21}$$

互易二端口网络**四个参数中只有三个是独立的**

由线性电阻组成的二端口

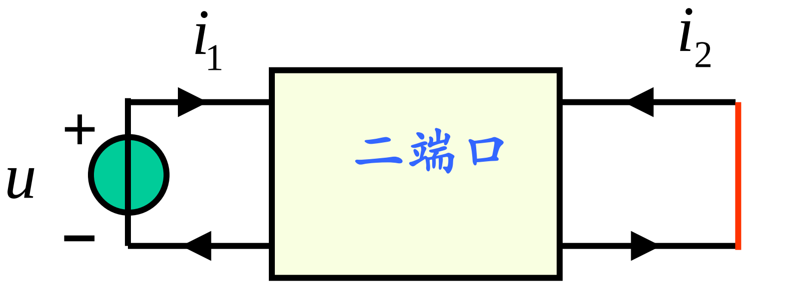
互易定理

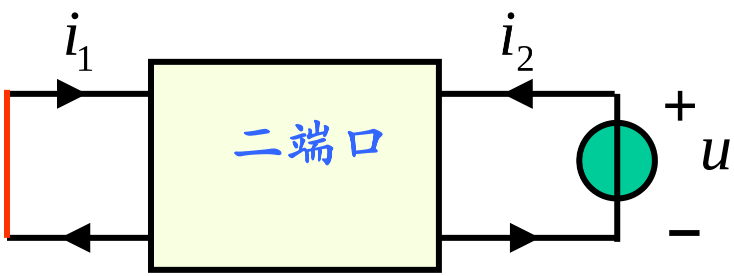
互易二端口

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

对称二端口

两个端口外特性(己侧/对侧)完全一样 → $G_{12}=G_{21}$ $G_{11}=G_{22}$





$$i_2 = G_{21}u$$

$$i_1 = G_{11}u$$

$$i_2 = G_{22}u$$

$$i_1 = G_{12}u$$

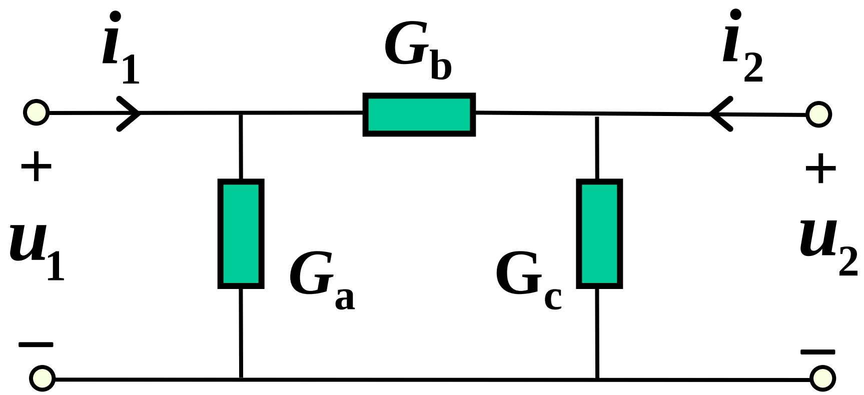
$G_{11}=G_{22}$

$G_{12}=G_{21}$

对称二端口只有两个参数是独立的。

电阻二端口：显然互易

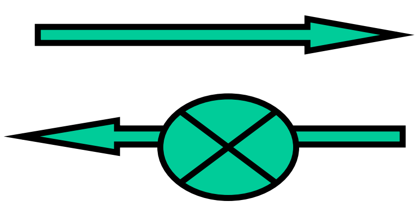
$$G=\begin{bmatrix} G_a+G_b & -G_b \\ -G_b & G_b+G_c \end{bmatrix}$$



若 $G_a=G_c$

有 $G_{12}=G_{21}$， 又$G_{11}=G_{22}$，为对称二端口。 结构对称

结构对称的二端口

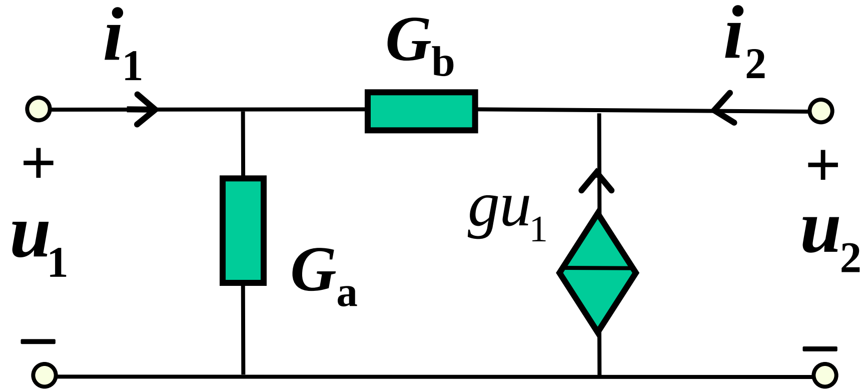


对称二端口

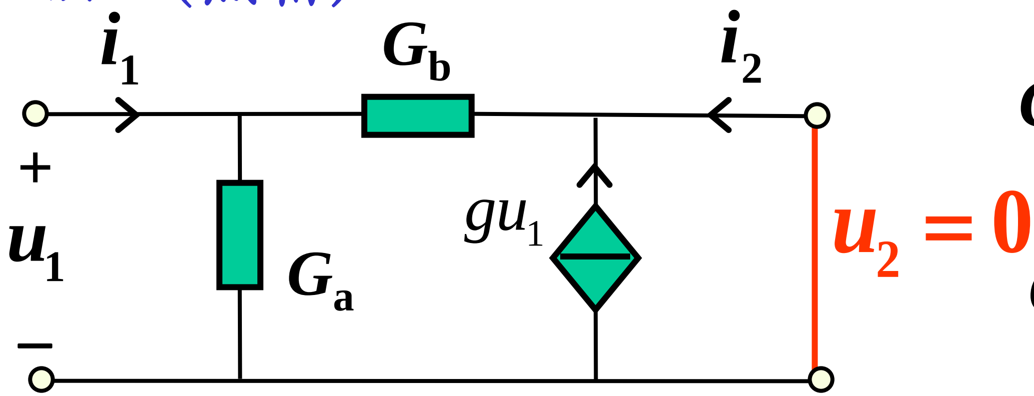
（电气对称）

例2 求所示电路的 G 参数

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2 \\ i_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2 \end{cases}$$

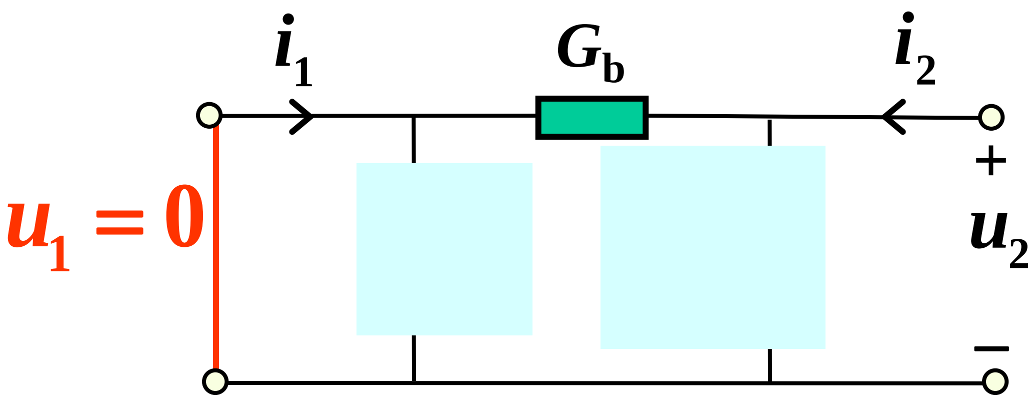


解 法1（黑箱）



$$G_{11} = \frac{i_1}{u_1}\bigg|_{u_2=0} = G_a + G_b$$

$$G_{21} = \frac{i_2}{u_1}\bigg|_{u_2=0} = -G_b - g$$



$$G_{12} = \frac{i_1}{u_2}\bigg|_{u_1=0} = -G_b$$

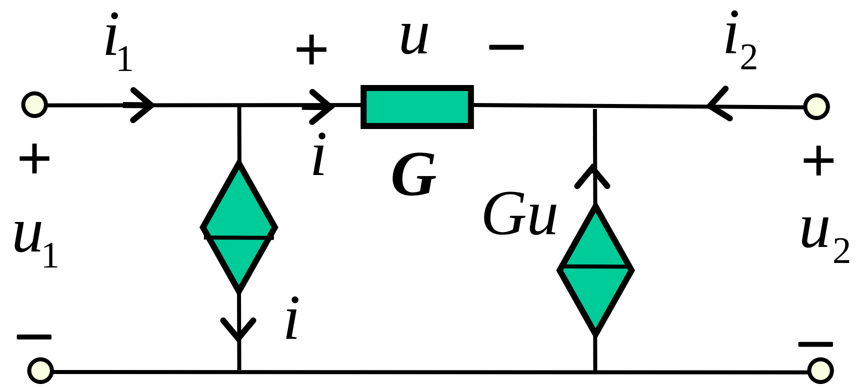
$$G_{22} = \frac{i_2}{u_2}\bigg|_{u_1=0} = G_b$$

法2（白箱） 复习时自行练习

单选题 1分

设置

对该二端口的描述正确的是



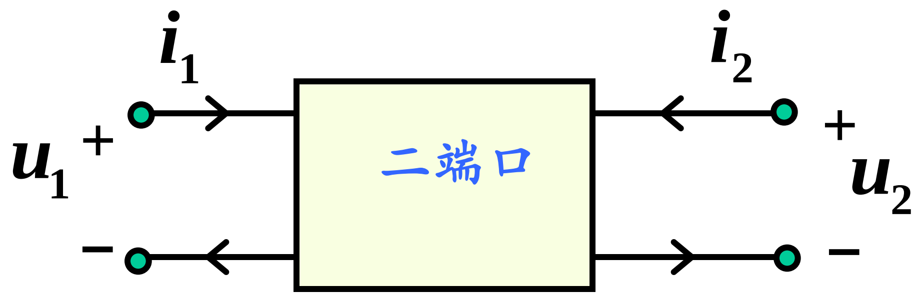
A 非互易

B 对称

C 互易非对称

提交

(2)用电流表示电压：R参数和方程



由G参数方程 $\begin{cases} i_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2 \\ i_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{解出}}$ u_1, u_2

即

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{G_{22}}{\Delta} i_1 + \dfrac{-G_{12}}{\Delta} i_2 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2 \\ u_2 = \dfrac{-G_{21}}{\Delta} i_1 + \dfrac{G_{11}}{\Delta} i_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2 \end{cases}$$

其中 $\Delta = G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21} \neq 0$　　前提：G 非奇异

其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$$

*R*参数的实验测定（黑箱）

$$R_{11} = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} \qquad R_{12} = \left.\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0}$$

$$R_{21} = \left.\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}\right|_{\dot{I}_2=0} \qquad R_{22} = \left.\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}\right|_{\dot{I}_1=0}$$

称*R*为开路电阻参数矩阵

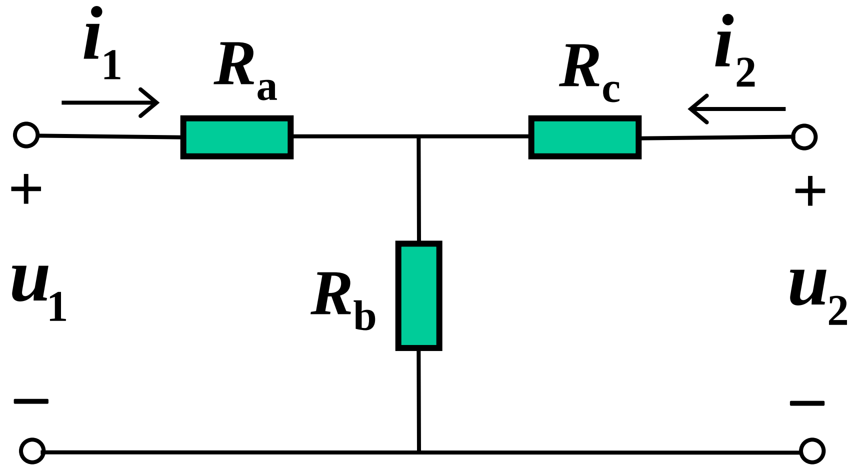
能这样做的前提是端口能够被开路！

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{G_{22}}{\Delta} i_1 + \dfrac{-G_{12}}{\Delta} i_2 = R_{11} i_1 + R_{12} i_2 \\ u_2 = \dfrac{-G_{21}}{\Delta} i_1 + \dfrac{G_{11}}{\Delta} i_2 = R_{21} i_1 + R_{22} i_2 \end{cases}$$

互易二端口 $G_{12} = G_{21} \longrightarrow \boxed{R_{12} = R_{21}}$

对称二端口 $G_{12} = G_{21}$, $G_{11} = G_{22} \longrightarrow \boxed{R_{11} = R_{22}}$ $\boxed{R_{12} = R_{21}}$

例　求所示电路的R参数



$$u_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2$$

$$u_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2$$

法2（白箱）

端口电压电流关系

法1（黑箱）

实验测定。自行完成

$$u_1 = i_1 R_a + (i_1 + i_2) R_b$$

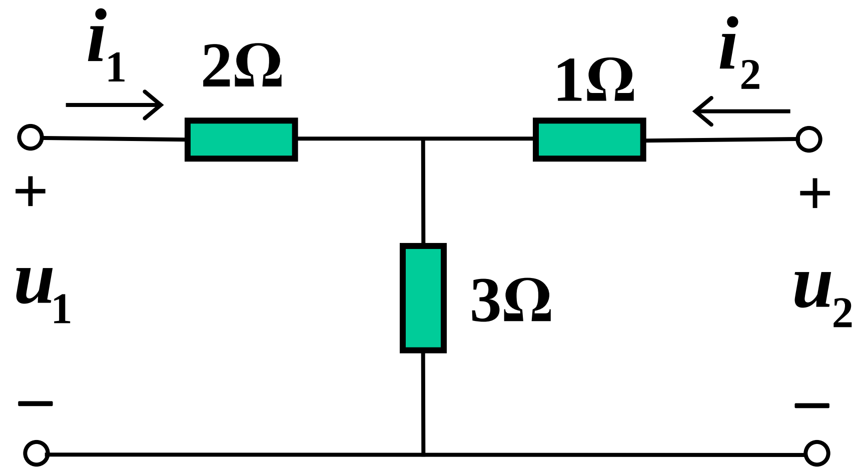
$$u_2 = i_2 R_c + (i_1 + i_2) R_b$$

互易二端口

单选题 1分

设置

图示二端口的R_{11}= ______Ω



A 2

B 1

C 3

D 5

提交

(3)用输出表示输入：T参数和方程

$$i_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2 \qquad (1)$$

如何用u_2和i_2来表示u_1和i_1？

$$i_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2 \qquad (2)$$

由(2)得

$$u_1 = -\frac{G_{22}}{G_{21}}u_2 + \frac{1}{G_{21}}i_2 \qquad (3)$$

将(3)代入(1)得

$$i_1 = \left(G_{12} - \frac{G_{11}G_{22}}{G_{21}}\right)u_2 + \frac{G_{11}}{G_{21}}i_2$$

令

$$T_{11} = -\frac{G_{22}}{G_{21}} \quad T_{12} = \frac{-1}{G_{21}} \quad T_{21} = \frac{G_{12}G_{21} - G_{11}G_{22}}{G_{21}} \quad T_{22} = -\frac{G_{11}}{G_{21}}$$

即

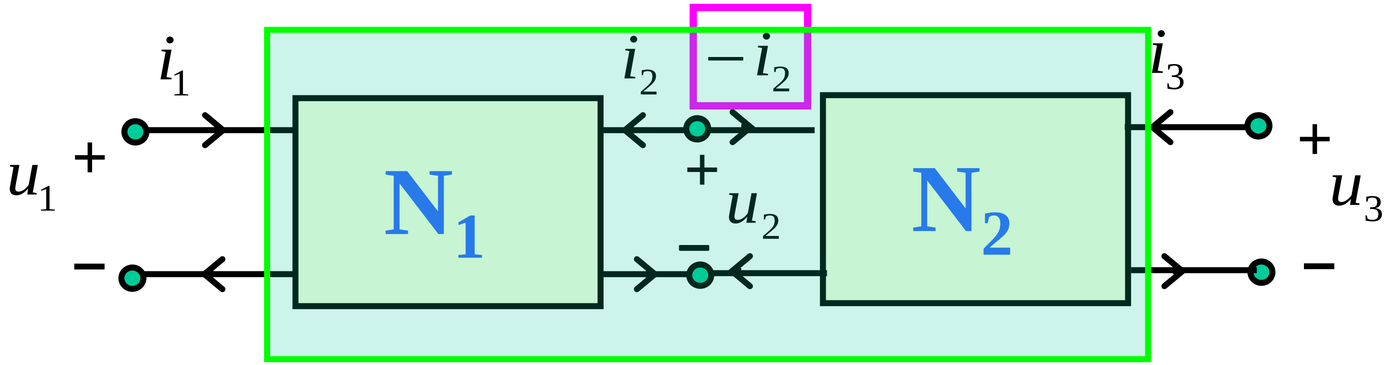
$$u_1 = T_{11}u_2 - T_{12}i_2$$
$$i_1 = T_{21}u_2 - T_{22}i_2$$

(注意负号)

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

称为传输参数(T)矩阵

为什么会有这么怪怪的定义 $\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$



$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = T_1 \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = T_2 \begin{bmatrix} u_3 \\ -i_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = T_1 T_2 \begin{bmatrix} u_3 \\ -i_3 \end{bmatrix}$$

级联

T参数的定义方式，

确保级联对外的T参数容易获取

如何考虑T参数的互易和对称条件?　　基本思路：回归G参数

$$u_1 = T_{11}u_2 - T_{12}i_2$$

$$i_1 = T_{21}u_2 - T_{22}i_2$$

$$i_2 = -\frac{1}{T_{12}}u_1 + \frac{T_{11}}{T_{12}}u_2$$

G_{21}　　G_{22}

$$= T_{21}u_2 + \frac{T_{22}}{T_{12}}u_1 - \frac{T_{11}T_{22}}{T_{12}}u_2$$

$$i_1 = \frac{T_{22}}{T_{12}}u_1 + \frac{T_{12}T_{21} - T_{11}T_{22}}{T_{12}}u_2$$

G_{11}　　G_{12}

互易二端口　$T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = 1$

对称二端口　$T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = 1$　　$T_{11} = T_{22}$

T 参数的实验测定（黑箱）

$$u_1 = T_{11}u_2 - T_{12}i_2$$

$$i_1 = T_{21}u_2 - T_{22}i_2$$

$$T_{11} = \left.\frac{u_1}{u_2}\right|_{i_2=0}$$

$$T_{21} = \left.\frac{i_1}{u_2}\right|_{i_2=0}$$

开路参数

$$T_{12} = \left.\frac{u_1}{-i_2}\right|_{u_2=0}$$

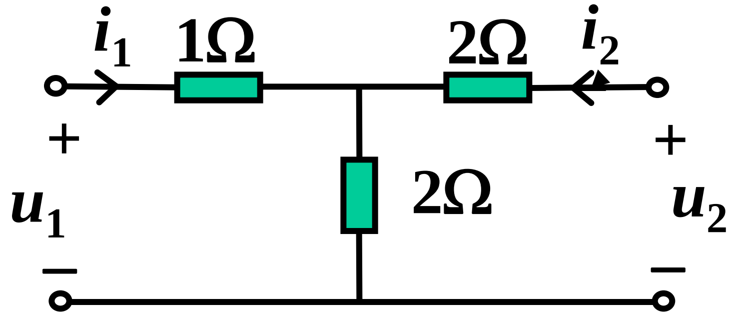
$$T_{22} = \left.\frac{i_1}{-i_2}\right|_{u_2=0}$$

短路参数

能这样做的前提是端口2能够被开路和短路！

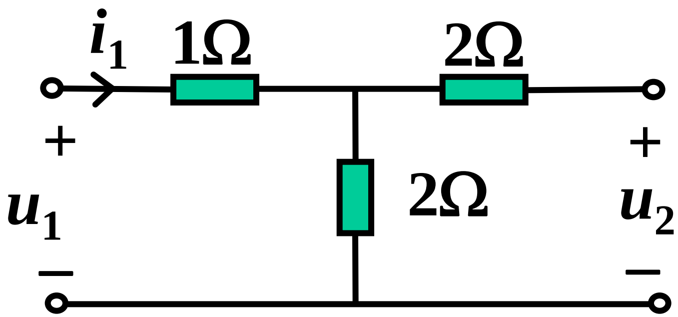
例

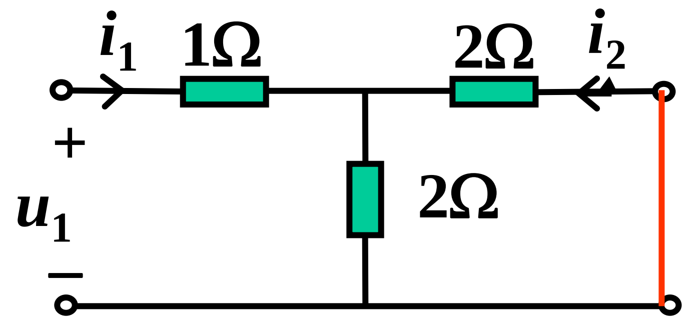
求T参数



$$u_1 = T_{11}u_2 - T_{12}i_2$$
$$i_1 = T_{21}u_2 - T_{22}i_2$$

法1（黑箱）





$$T_{11} = \frac{u_1}{u_2}\bigg|_{i_2=0} = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

$$T_{12} = \frac{u_1}{-i_2}\bigg|_{u_2=0} = \frac{i_1[1+(2//2)]}{0.5i_1} = 4\,\Omega$$

$$T_{21} = \frac{i_1}{u_2}\bigg|_{i_2=0} = 0.5\,\mathrm{S}$$

$$T_{22} = \frac{i_1}{-i_2}\bigg|_{u_2=0} = \frac{i_1}{0.5i_1} = 2$$

法2　先写出G或R参数，再解出T参数

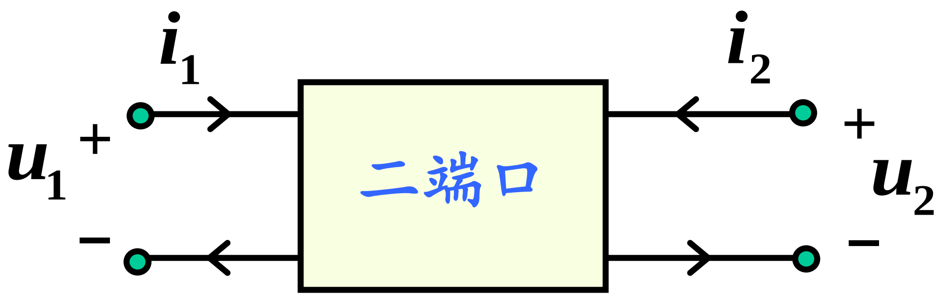
法3（白箱）　根据KCL、KVL列方程并整理

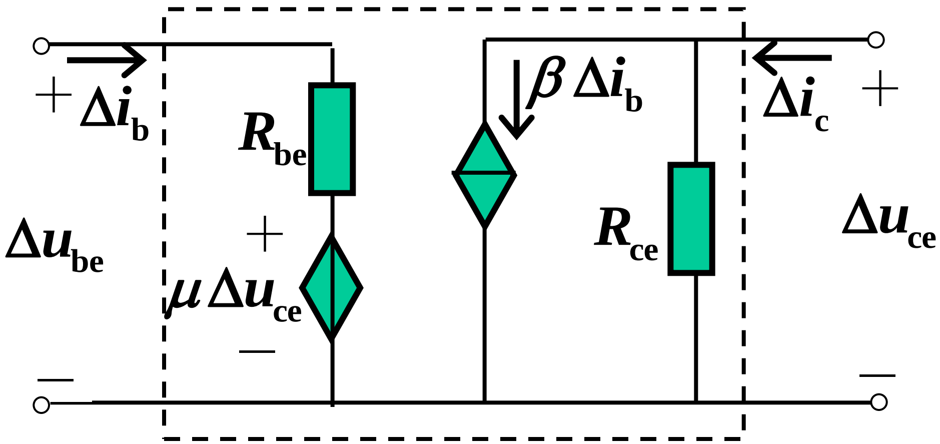
(4) *H* 参数和方程

H 参数也称为混合参数，常用于双极型晶体管等效电路。

H 参数方程

$$u_1 = H_{11} i_1 + H_{12} u_2$$
$$i_2 = H_{21} i_1 + H_{22} u_2$$



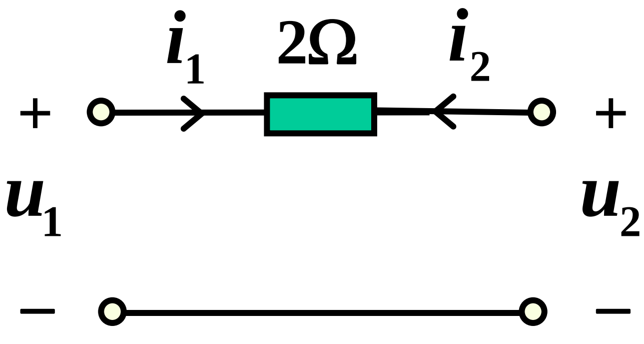


$$\Delta u_{be} = R_{be}\Delta i_b + \mu\Delta u_{ce}$$
$$\Delta i_c = \beta\Delta i_b + \frac{\Delta u_{ce}}{R_{ce}}$$

为什么用这么多参数表示?

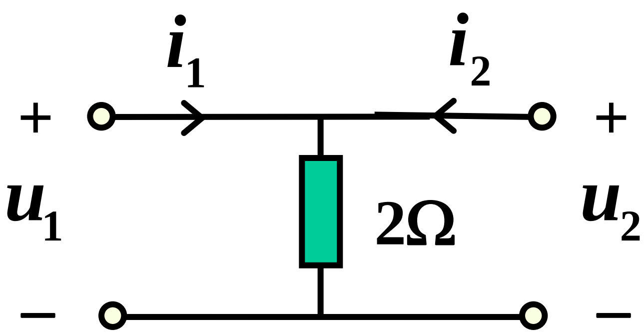
（1）为描述电路方便，测量方便(如H)。

（2）有些电路只存在某几种参数。



$$G=\begin{bmatrix}0.5 & -0.5\\ -0.5 & 0.5\end{bmatrix}\mathrm{S}$$

*R*参数 不存在



$$R=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}\Omega$$

G 参数不存在

（3）有些电路不能端口短路/开路（黑箱法）。

3 二端口的等效电路

◆ 两个二端口网络等效：

是指对外电路而言，端口的电压、电流关系相同。

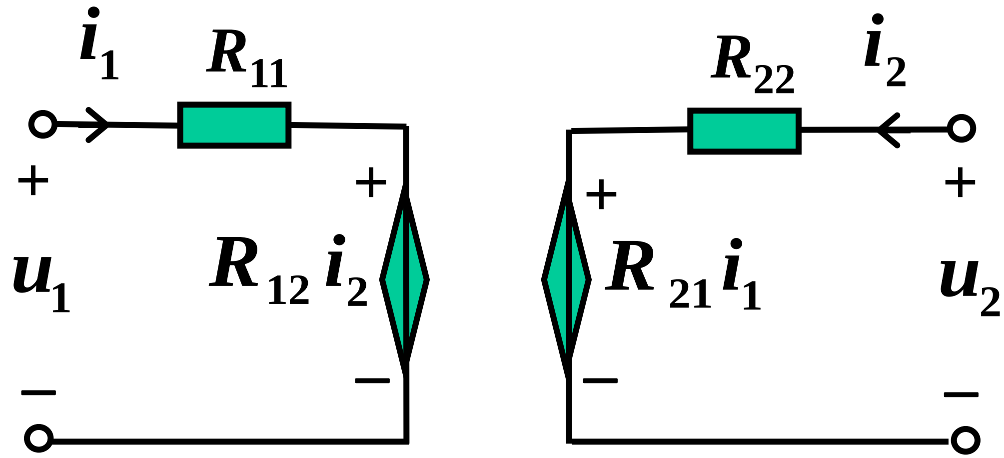
◆ 求等效电路即根据给定的参数方程确定电路结构和参数。

反向工程：

测量端口电压－电流关系 → 构造电路满足端口电压－电流关系

(1) 由*R*参数方程画等效电路

$$u_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2$$
$$u_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2$$



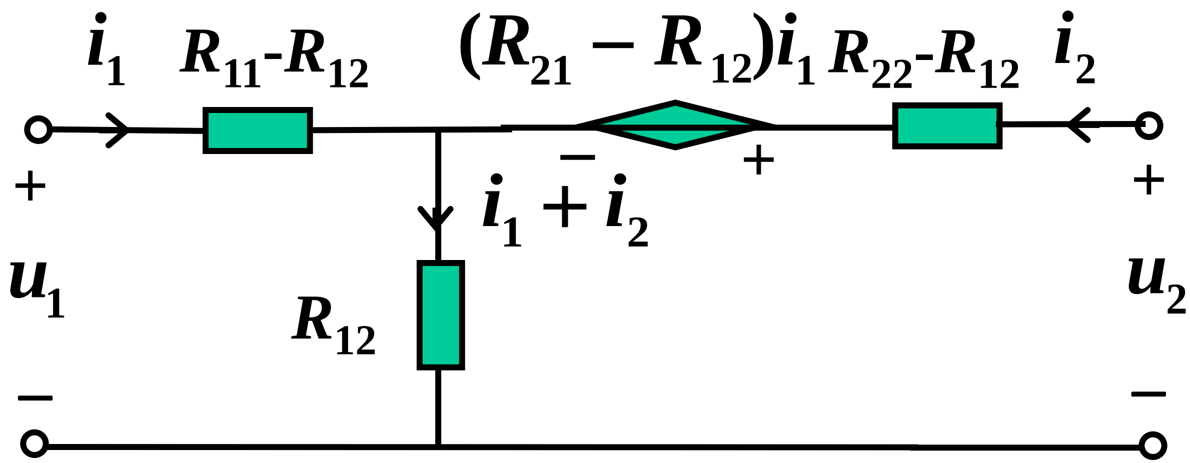
如果只用一个受控源

$$u_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2$$
$$u_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2$$

原方程改写为

$$u_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2 + R_{12}i_1 - R_{12}i_1$$

$$u_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2 + R_{12}i_1 - R_{12}i_1 + R_{12}i_2 - R_{12}i_2$$



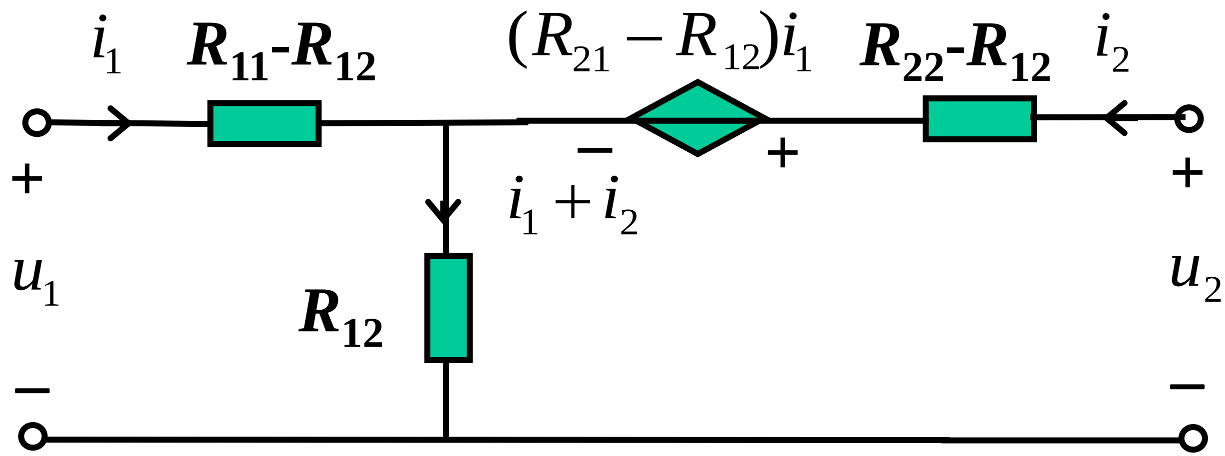
电路综合

同一个参数方程，可以画出结构不同的等效电路。

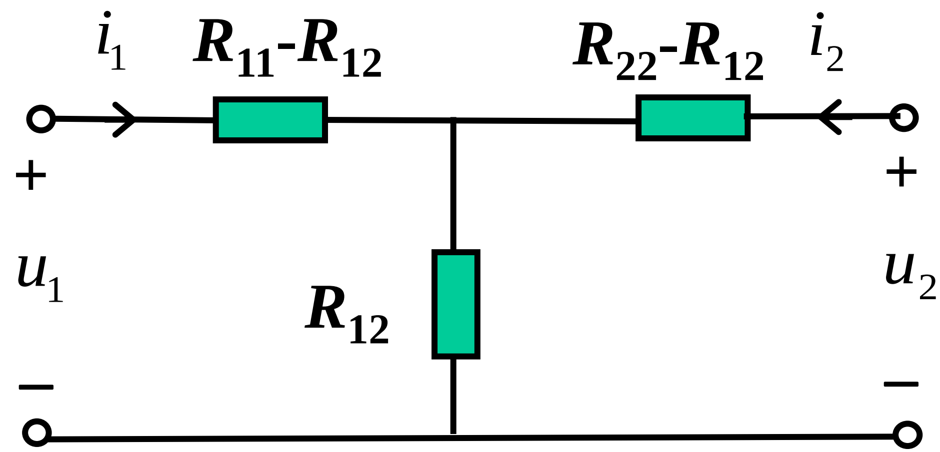
等效电路不唯一。

能不用受控源吗？为什么

此处可以有弹幕



互易网络 $R_{12}=R_{21}$



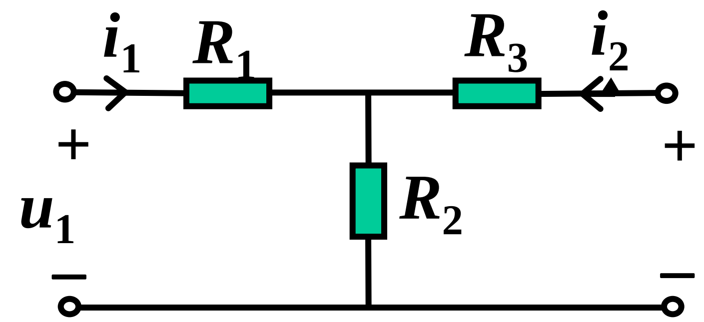
网络对称（$R_{11}=R_{22}$）则等效电路也对称

单选题 1分

设置

二端口R参数矩阵为

$$R=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\Omega$$



其中的R_3=________Ω

A 1

B 2

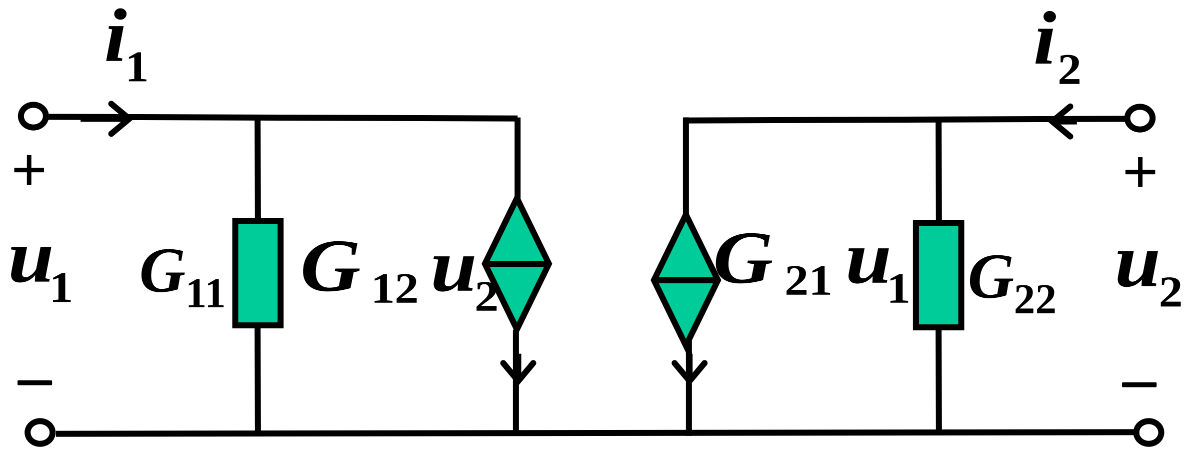
C 3

D 4

提交

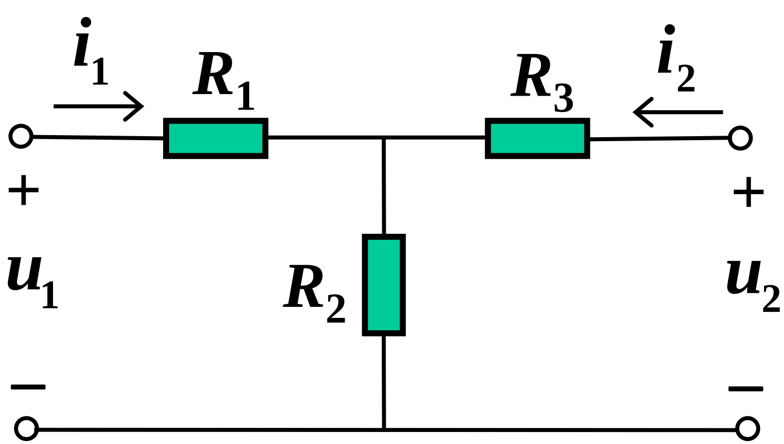
(2) 由G参数方程画等效电路

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2 \\ i_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2 \end{cases}$$



如何用1个受控源生成G参数的等效电路?

(3) T参数的等效电路? 教材例2.7.6



若二端口互易

$$R_2 = \frac{1}{T_{21}}$$

$$R_1 = \frac{T_{11} - 1}{T_{21}} \qquad R_3 = \frac{T_{22} - 1}{T_{21}}$$