Review

- 二重积分化累次积分

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

$$= \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

- 极坐标下二重积分的计算

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta.$$

其中, $E = \{(r,\theta) \mid (r\cos\theta, r\sin\theta) \in D\}.$

§3. 二重积分的变量替换

当被积区域D的形状不好,或者被积函数f的表达式比较复杂时,将二重积分化为直角坐标下的累次积分来计算可能会很复杂,甚至计算不出来.如果在极坐标下计算,积分可能会变得简单.但在极坐标下计算二重积分的方法也不是万能的,很多时候积分也不能被简化.因此,我们需要更一般的方法.这就是变量替换方法.

回到二重积分原始的几何背景,计算以D为下底,以曲面$S:z = f(x,y),(x,y)\in D$为上顶的曲顶柱体的Ω体积

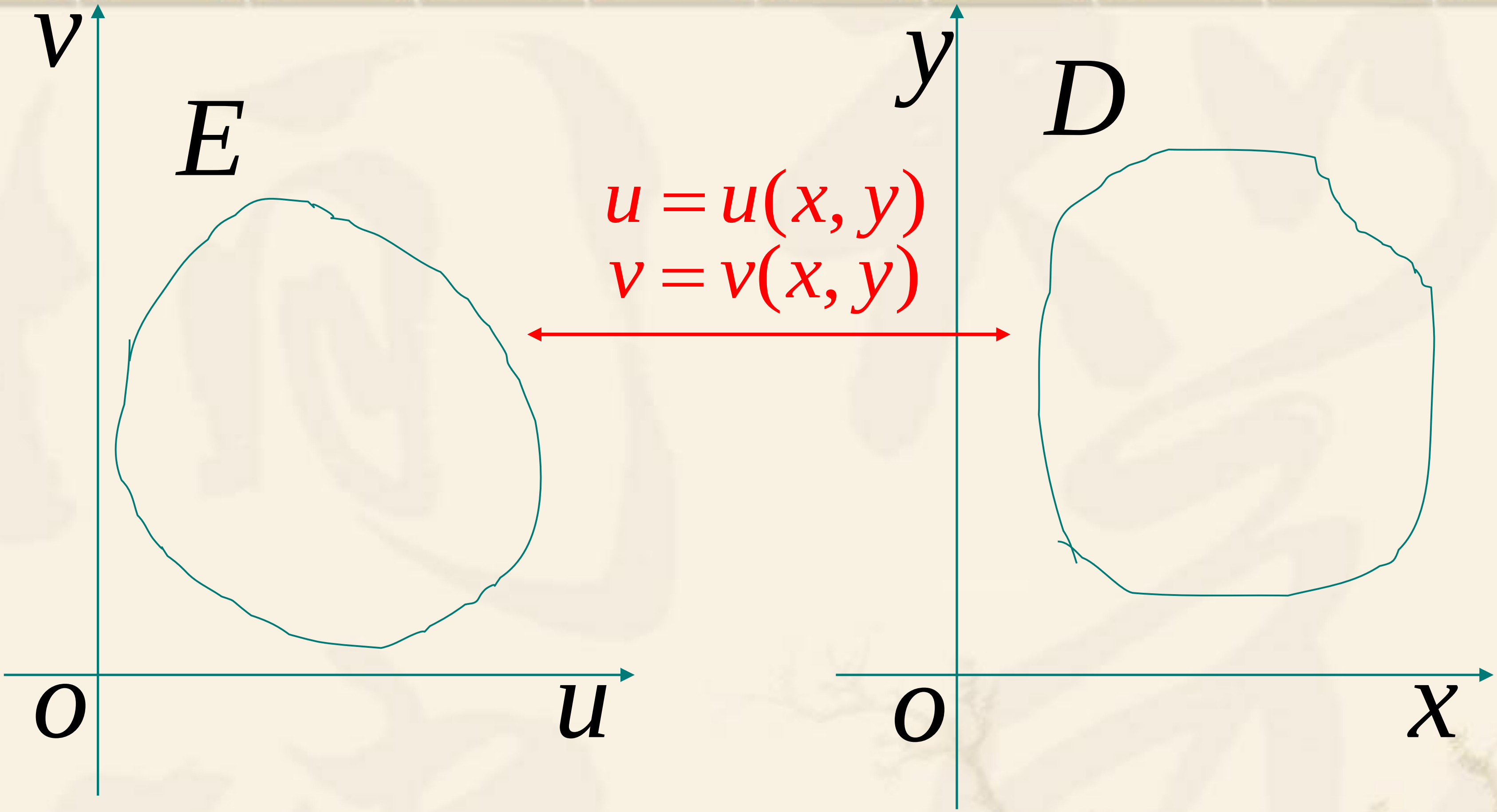
$$\mathrm{V}(\Omega) = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

- Step1.对D进行分划:

对区域D做分划之前,先引进一一映射

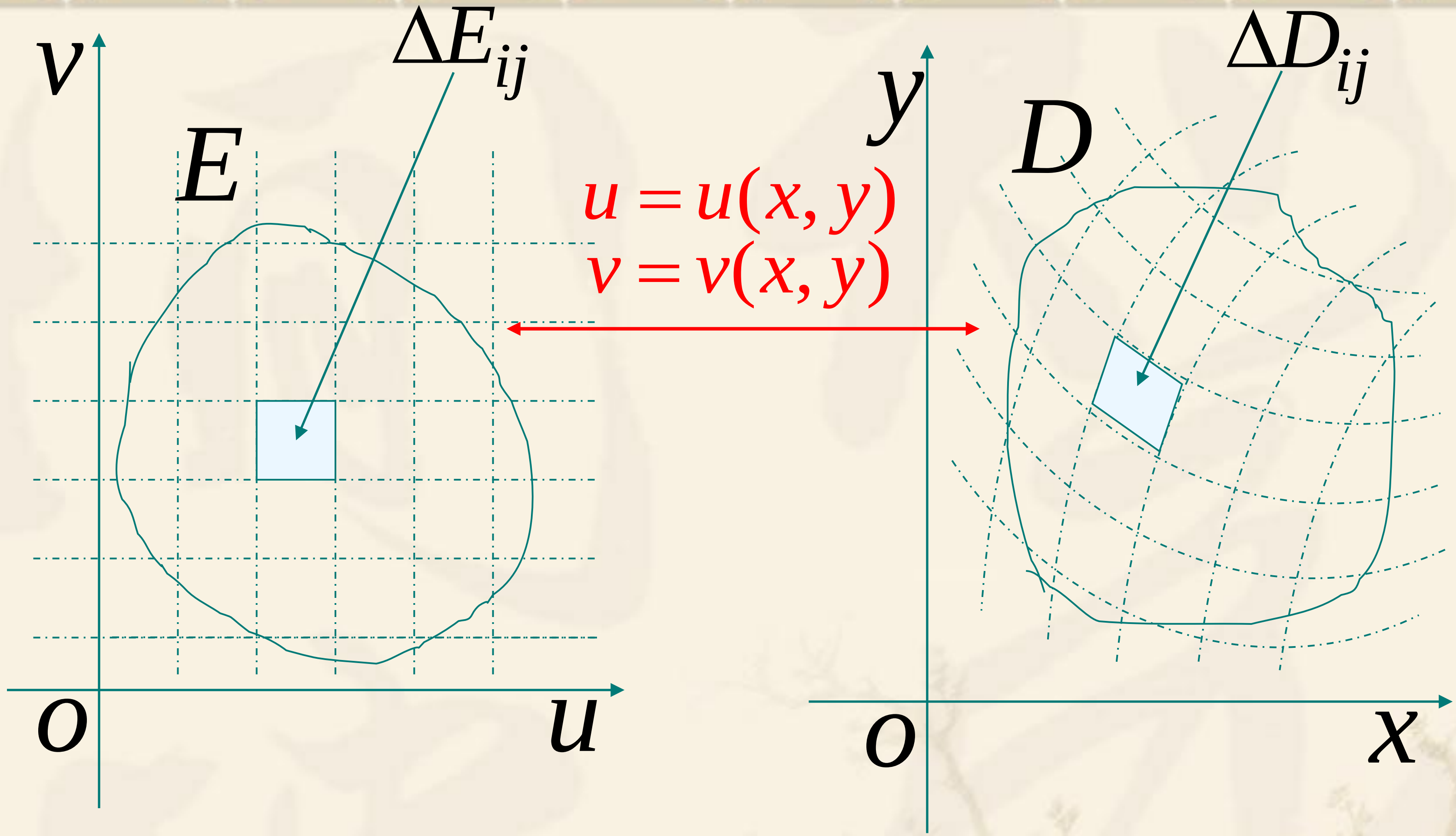
$$u = u(x,y), v = v(x,y),$$

将区域D映为区域E, 使$(x,y)\in D$与$(u,v)\in E$一一对应.



在ouv平面上,用平行于坐标轴的直线

$$u = u_i (i = 1, 2, \cdots, n), v = v_j (j = 1, 2, \cdots, m)$$



将区域E分割成若干小矩形ΔE_{ij}(忽略区域边界上那些不规则的小区域).在映射$u = u(x, y), v = v(x, y)$

下,小矩形ΔE_{ij}与oxy平面上曲边四边形ΔD_{ij}对应.

于是区域D有分划$T=\left\{\Delta D_{ij}\right\}$.

- Step2.取标志点

$$(\xi_{ij},\eta_{ij})=\left(x(u_i,v_j),y(u_i,v_j)\right)\in\Delta D_{ij}$$

$$(i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m).$$

- Step3.近似求和: 以$\Delta\sigma_{ij}$表示ΔD_{ij}的面积,则f在

区域D上的*Riemann*和

$$\sum_{i,j}f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta\sigma_{ij}=\sum_{i,j}f\left(x(u_i,v_j),y(u_i,v_j)\right)\Delta\sigma_{ij}.$$

下面的任务是计算$\Delta\sigma_{ij}=\sigma(\Delta D_{ij})$.

矩形ΔE_{ij}的四个顶点为

$P_0(u_i, v_j), P_1(u_{i+1}, v_j), P_2(u_i, v_{j+1})$和$P_3(u_{i+1}, v_{j+1})$.

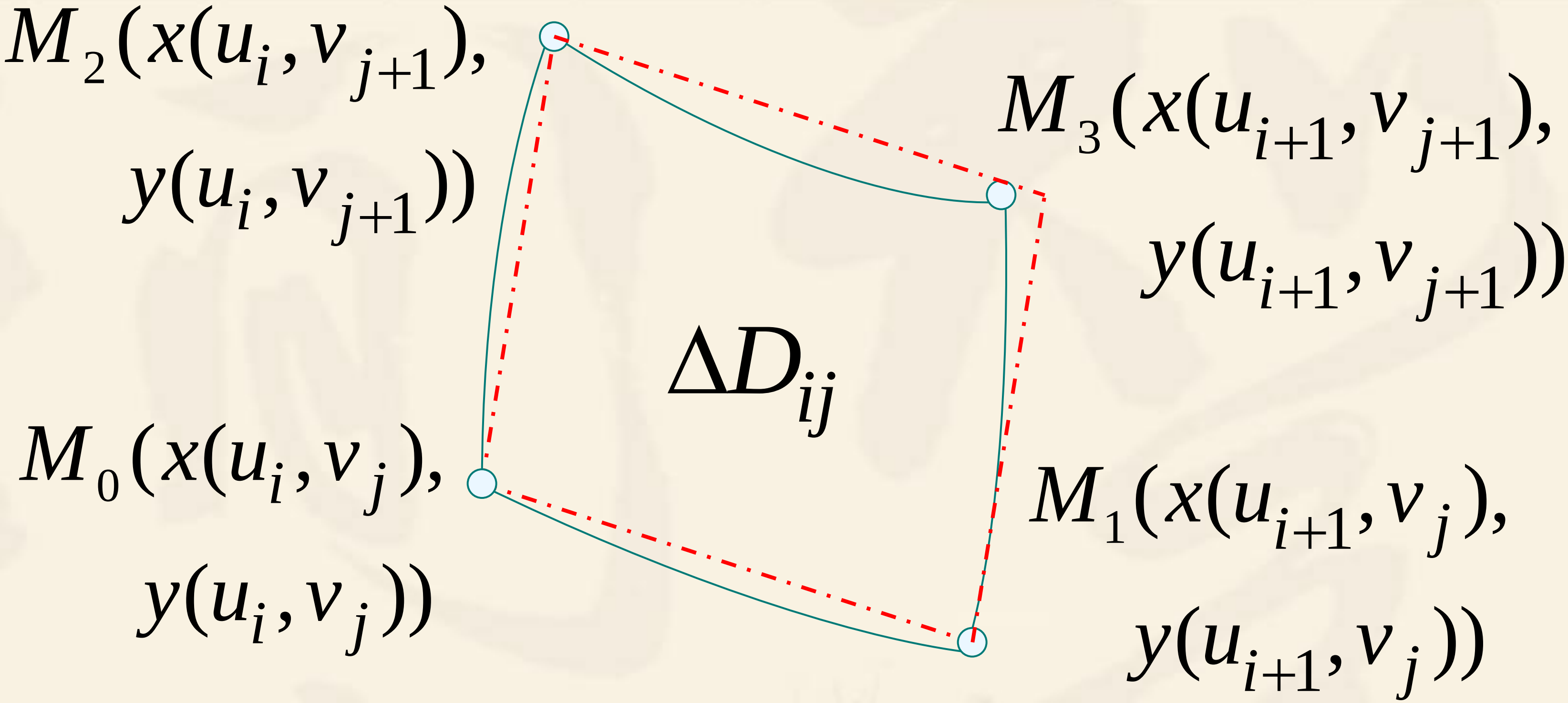
对应地,曲边四边形ΔD_{ij}的四个顶点为

$$M_0(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)),$$

$$M_1(x(u_{i+1}, v_j), y(u_{i+1}, v_j)),$$

$$M_2(x(u_i, v_{j+1}), y(u_i, v_{j+1})),$$

$$M_3(x(u_{i+1}, v_{j+1}), y(u_{i+1}, v_{j+1})).$$



当对区域E的分割很细时，ΔD_{ij}可以近似地看成以线段M_0M_1, M_0M_2为邻边的平行四边形.

$$\Delta\sigma_{ij} \approx \left\| \overrightarrow{M_0M_1} \times \overrightarrow{M_0M_2} \right\|$$

记$\Delta u_i = u_{i+1} - u_i, \Delta v_j = v_{j+1} - v_j$,则

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{M_0M_1}\\&=\left(x(u_{i+1},v_j)-x(u_i,v_j),y(u_{i+1},v_j)-y(u_i,v_j)\right)\\&\approx\left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_i,v_j)\Delta u_i,\frac{\partial y}{\partial u}(u_i,v_j)\Delta u_i\right)\end{aligned}$$

同理

$$\overrightarrow{M_0M_2}\approx\left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_i,v_j)\Delta v_j,\frac{\partial y}{\partial v}(u_i,v_j)\Delta v_j\right).$$

于是$\Delta\sigma_{ij} \approx \left\| \overrightarrow{M_0M_1} \times \overrightarrow{M_0M_2} \right\|$

$$\approx \left\| \left(x_u(u_i, v_j)\Delta u_i, y_u(u_i, v_j)\Delta u_i \right) \right.$$

$$\left. \times \left(x_v(u_i, v_j)\Delta v_j, y_v(u_i, v_j)\Delta v_j \right) \right\|$$

$$= \left| \det \left. \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_{(u_i, v_j)} \right| \Delta u_i \Delta v_j.$$

为了保证$\Delta\sigma_{ij} \neq 0$,我们要求所做变量替换满足

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0, \forall (u, v) \in E.$$

于是$Riemann$和

$$\sum_{i,j} f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta\sigma_{ij} = \sum_{i,j} f\Big(x(u_i,v_j),y(u_i,v_j)\Big)\Delta\sigma_{ij}.$$

$$\approx \sum_{i,j}\left\{ f\Big(x(u_i,v_j),y(u_i,v_j)\Big)\cdot\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\bigg|_{(u_i,v_j)}\right|\Delta u_i\Delta v_j\right\}.$$

注意上式左边是(x,y)的二元函数函数$f(x,y)$在区域D上的$Riemann$和,而右端是(u,v)的二元函数

$$f(x(u,v),y(u,v))\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$$

在区域E上的$Riemann$和.

- Step4.取极限

当$\max\{\Delta u_i, \Delta v_j\} \to 0$时，$D$的分划$T=\{\Delta D_{ij}\}$的半径$\lambda(T)\to 0$，于是

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

$$=\iint_E f(x(u,v),y(u,v))\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv.$$

这就是变量替换$u=u(x,y), v=v(x,y)$下二重积分的计算公式.

Remark: 形式上,二重积分$\iint_D f(x,y)dxdy$可以理解为由三部分构成:被积函数$f(x,y)$,积分区域D和面积元$dxdy$.于是,在变量替换$u=u(x,y),v=v(x,y)$下,

- 被积函数$f(x,y)$化为$f(x(u,v),y(u,v))$,
- 积分区域D化为E,
- 面积元$dxdy$化为$\left|\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$.

Remark: 重新审视极坐标下二重积分的计算.

Remark:用变量替换方法计算二重积分时,所做的变量替换$u=u(x,y),v=v(x,y)$必须是一一映射,且（除有限个点外）满足$\left|\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\neq 0.$

Remark: 通常选取适当的变量替换

$$u=u(x,y),v=v(x,y),$$

使得在这一变换下,要么积分区域变得简单, 要么被积函数被化简.

Remark. 二重积分的轮换不变性：若$D\subset\mathbb{R}^2$关于x,y是轮换对称的,则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(y,x)dxdy.$$

Proof. 令$u=y,v=x$,则$\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=1.D$关于$x,y$对称, 即$(x,y)\in D\Leftrightarrow(u,v)\in D.$于是

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(v,u)dudv=\iint_D f(y,x)dxdy.$$

例. $f\in C([a,b]), f>0, D=[a,b]\times[a,b]$,则

$$\iint_D \frac{f(x)}{f(y)}dxdy \ge (b-a)^2.$$

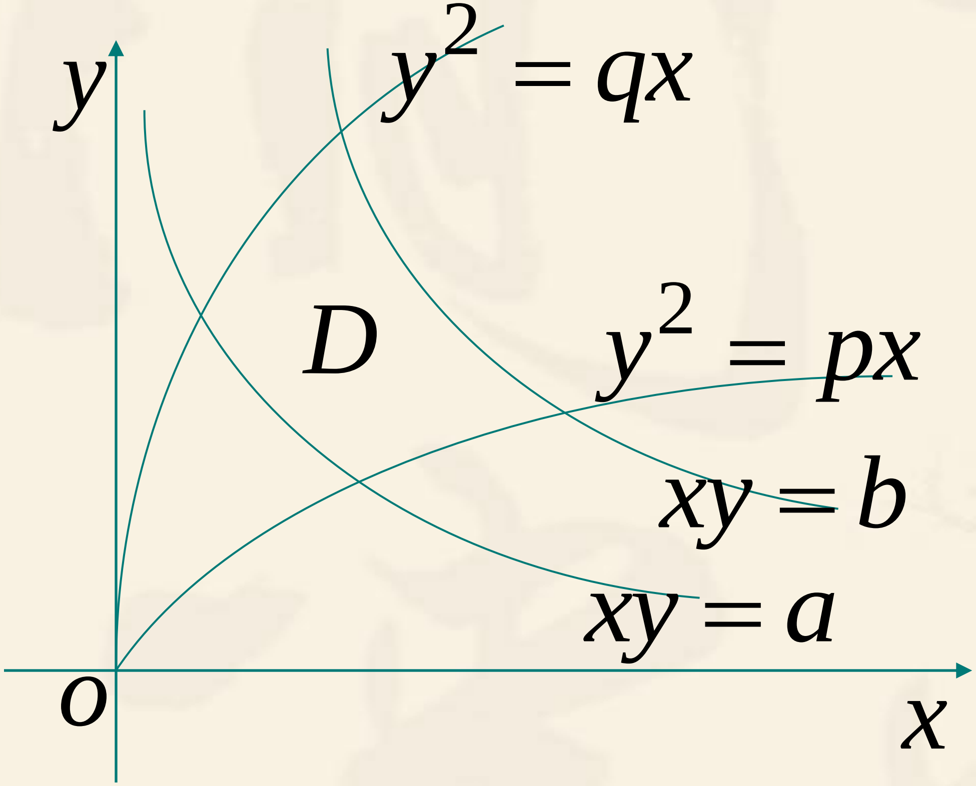
Proof: 由于区域D是轮换对称的,因此

$$\iint_D \frac{f(x)}{f(y)}d\sigma = \iint_D \frac{f(y)}{f(x)}d\sigma.$$

$$\iint_D \frac{f(x)}{f(y)}dxdy = \frac{1}{2}\iint_D \left(\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right)dxdy$$

$$\ge \frac{1}{2}\iint_D 2dxdy = (b-a)^2. \square$$

例: 区域D由$y^2=px, y^2=qx(0<p<q)$和$xy=a$, $xy=b(0<a<b)$围成.求D的面积.



分析: 区域D的形状不规则,用直角坐标和极坐标都不容易计算其面积$\iint\limits_D dxdy$.

考虑做变量替换,将积分区域变规则.

解: 做变量替换,$u=y^2/x, v=xy$.则$(x,y)\in D$与

$(u,v)\in\Omega=\{(u,v)\mid p\le u\le q, a\le v\le b\}$一一对应,

且 $$\det\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\det\begin{bmatrix}-y^2/x^2 & 2y/x\\ y & x\end{bmatrix}$$

$$=-3y^2/x=-3u\neq 0.$$

于是,区域D的面积为

$$S=\iint_D dxdy=\iint_\Omega\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

$$=\iint_\Omega\frac{1}{3u}dudv=\int_a^b dv\int_p^q\frac{1}{3u}du=\frac{1}{3}(b-a)\ln\frac{q}{p}.\square$$

例: $I=\iint_{x^2+4y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy$

解: 令$x=\rho\cos\theta, y=\frac{1}{2}\rho\sin\theta$,则

$$\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}=\det\begin{pmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta\\ \frac{1}{2}\sin\theta & \frac{1}{2}\rho\cos\theta\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\rho\neq 0,$$

$$I=\iint_{0\le\rho\le 1,0\le\theta<2\pi}\rho^2(\cos^2\theta+\frac{1}{4}\sin^2\theta)\cdot\frac{1}{2}\rho d\rho d\theta$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2}\rho^3 d\rho\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta+\frac{1}{4}\sin^2\theta)d\theta=\frac{5\pi}{32}.\square$$

例: $I = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} |3x+4y|\,dxdy.$ 坐标旋转和伸缩

解: 令$u=3x+4y, v=4x-3y$. 区域$x^2+y^2\le 1$与区域$u^2+v^2\le 25$对应, 且

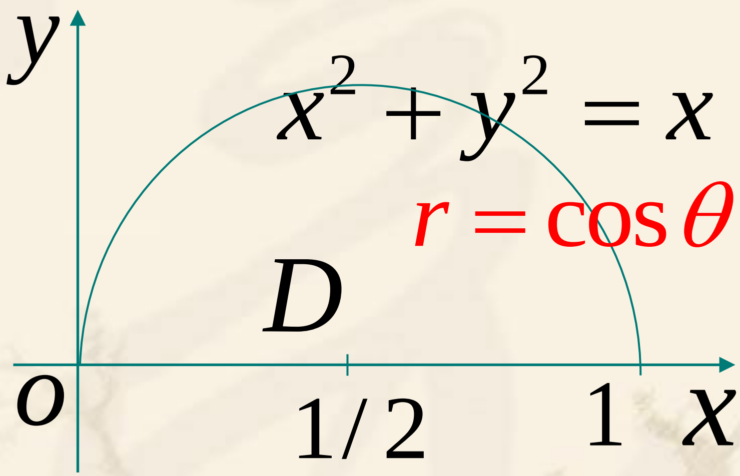
$$\left|\det\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}\right| = 25 \ne 0.$$

于是$I = \iint\limits_{u^2+v^2\le 25} |u|\cdot\frac{1}{25}\,dudv = \iint\limits_{u^2+v^2\le 25, u\ge 0} \frac{2u}{25}\,dudv$

$$= \int_0^5 \frac{2}{25}udu \int_{-\sqrt{25-u^2}}^{\sqrt{25-u^2}} dv = \frac{4}{25}\int_0^5 u\sqrt{25-u^2}\,du = \frac{20}{3}.\square$$

例:$I=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\cos\theta} r\sqrt{r\cos\theta-r^2\cos^2\theta}\,dr.$

分析:被积函数复杂,不论是先对r还是先对θ积分都不容易.应作变量替换.



解:令$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta,$

则 $I=\iint_D\sqrt{x-x^2}\,dxdy,$

其中区域D如图所示.

于是,$I=\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}dy=\int_0^1\left(x-x^2\right)dx=\dfrac{1}{6}.$ □

例：求由$(x^2+y^2)^2=8x^3$围成的区域的面积.

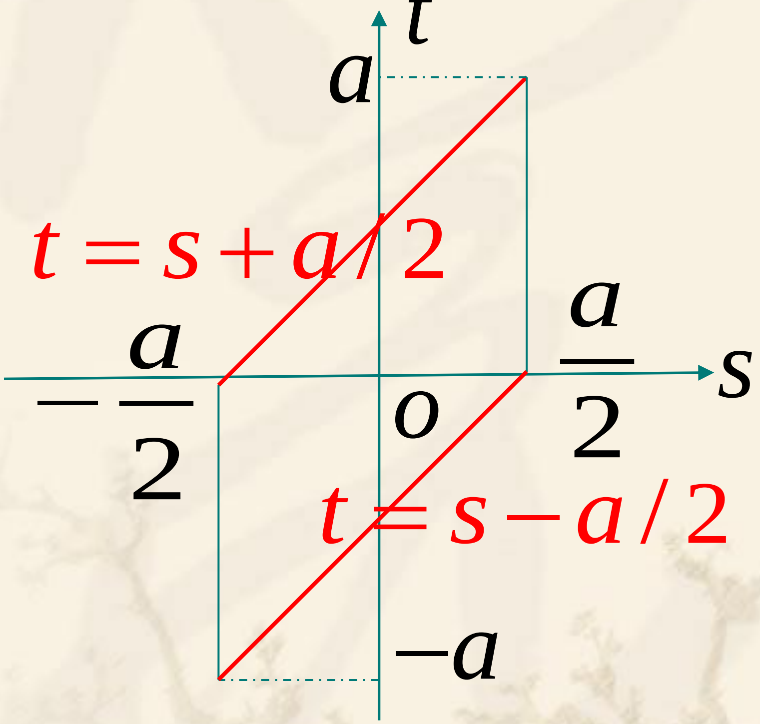
分析：我们很难画出曲线$(x^2+y^2)^2=8x^3$的图形, 因而也难以确定积分区域. 但在极坐标下积分区域并不难把握.

解：令$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,曲线方程可化为$r^4=8r^3\cos^3\theta$,即$r=8\cos^3\theta$. 由此,积分区域为$\Omega=\left\{-\pi/2\le\theta<\pi/2, 0\le r\le 8\cos^3\theta\right\}$.所求面积为$\iint\limits_{\Omega} r dr d\theta$. 以下留作练习.□

*例: f 连续, 则

$$\iint_{|x|,|y|\le a/2} f(x-y)\,dxdy=\int_{-a}^{a} f(t)(a-|t|)\,dt.$$

解: 令 $s=x, t=x-y$, 则

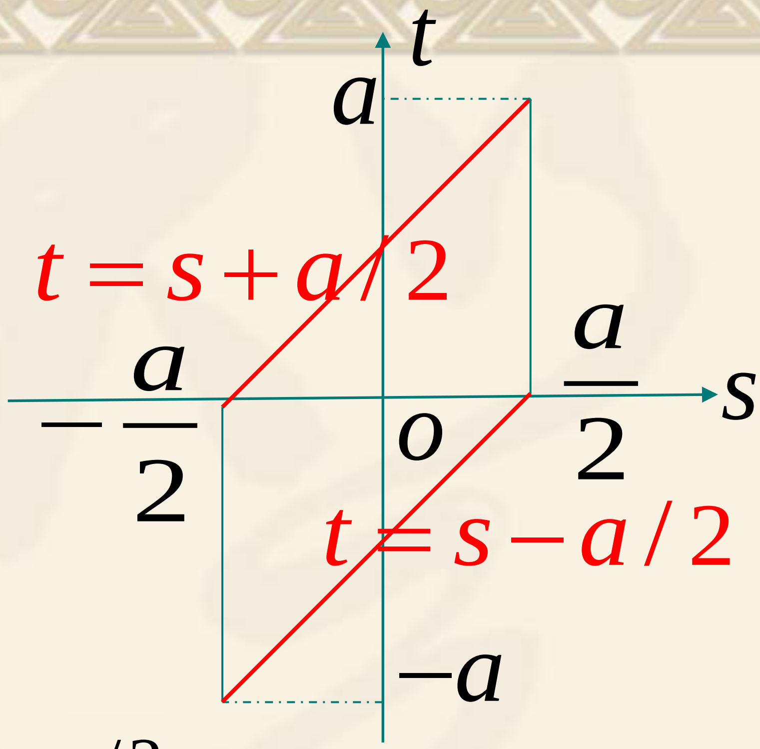


$$s\in[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}],$$

$$t\in[s-\frac{a}{2},s+\frac{a}{2}].$$

$$\det\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}=\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=-1\neq 0.$$

$$\iint_{|x|,|y|\le a/2} f(x-y)\,dxdy$$



$$= \iint_{\substack{-a/2\le s\le a/2\\ s-a/2\le t\le s+a/2}} f(t)\,dsdt$$

$$= \int_{-a}^{0} dt \int_{-a/2}^{t+a/2} f(t)\,ds + \int_{0}^{a} dt \int_{t-a/2}^{a/2} f(t)\,ds$$

$$= \int_{-a}^{0} f(t)(t+a)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)(a-t)\,dt$$

$$= \int_{-a}^{a} f(t)(a-|t|)\,dt. \ \square$$

作业：习题3.3

No. 12-14, 17, 18