第十四周作业 参考解答

练习7.2

1, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14

练习7.3

4, 5, 6, 16, 17, 18

练习7.4

2, 4, 7

练习 7.2.1. 把数域 $\mathbb{F}$ 看作自身上的线性空间,求它的一组基和维数.

◀ $\{1\}$, 1. ▶

练习 7.2.5. 判断 $\mathbb{R}$ 上的线性空间 $C[-\pi,\pi]$ 内的下列向量组是否线性相关,并求其秩.

1. $cos^2x, sin^2x.$

◀ 否. 2. ▶

2. $cos^2x, sin^2x, 1.$

◀ 是. 2. ▶

3. $cos2x, sin2x.$

◀ 否. 2. ▶

4. $1, sinx, sin2x, \cdots, sinnx.$

◀ 否. $n+1$. ▶

5. $1, sinx, sin^2x, \cdots, sin^nx.$

◀ 否. $n+1$. ▶

练习 7.2.6. 考虑练习 7.1.9 中的线性空间 $Com(A)$, 对下列 A 求 $Com(A)$ 的一组基.

1. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

◀ I, A, A^2. ▶

2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

◀ I, A, A^2. ▶

3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$.

◀ $I, A, A^2, \cdots, A^{n-1}$. ▶

4. $diag(a_i)$, 其中 a_i 各不相同.

◀ $e_1e_1^T, \cdots, e_ne_n^T$. (或 $I, A, \cdots, A^{n-1}$.) ▶

5. $diag(a_i)$.

◀ 用置换矩阵进行相似, 不妨设 A 相似到 $B = diag(b_1I, \cdots, b_kI)$. 与 B 交换的矩阵形如 $diag(B_1, \cdots, B_k)$, 容易给出一组基. ▶

练习 7.2.8. 证明, n 维线性空间中任意多于 n 个的向量都线性相关.

◀ 这是由于其极大线性无关组中向量的个数不大于 n. ▶

练习 7.2.9. 考虑练习 7.1.8 中的线性空间 $P(A)$.

1. 判断其维数是否有限.

◀ 有限. 由其是有限维线性空间 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间, 故其维数不大于 n^2. ▶

2. 证明存在次数不大于 n^2 的多项式 $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, 使得 $f(A) = 0$.

◀ 这是由于 $1, A, A^2, \cdots, A^{n^2}$ 线性相关. ▶

3. 令 $A = diag(1, \omega, \omega^2)$, 其中 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 求 $P(A)$ 的维数和一组基.

◀ 3, $\{I, A, A^2\}$. ▶

练习 7.2.10. 证明连续函数空间的子集 $span(f(x)=k_0+k_1cosx+k_2cos2x|f(0)=0)$ 是一个子空间, 并求一组基.

◀ 验证加法和数乘封闭. 一组基为 $\{cosx-1, cos2x-1\}$. ▶

练习 7.2.11. 给定 $A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$ 和 $\mathbb{R}^{3\times 3}$ 上的线性变换 $f: X\to AX$. 分别求 $N(f)$ 和 $R(f)$ 的维数和一组基.

◀ 维数分别是 3, 6. 易给出二者的基. ▶

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&-1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

练习 7.2.12. 设 M_1, M_2 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间, 且 $M_1\subseteq M_2$. 证明, 如果 $dim\,M_1=dim\,M_2$, 则 $M_1=M_2$.

◀ 取 M_1 的一组基. 由维数相同知其也生成了 M_2. ▶

练习 7.2.13. 设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, $M^{\perp}$ 是其正交补空间, 证明, $\mathbb{R}^n = M \oplus M^{\perp}$.

◀ 由维数关系, 只需验证两个子空间的交为 0. ▶

练习 7.2.14. 证明, 练习 7.1.7 中的 $\mathbb{F}^{n\times n} = \mathbb{F}_0^{n\times n} \oplus span(I_n)$.

◀ 由维数关系, 只需验证两个子空间的交为 0. ▶

练习 7.3.4. 给定 $a \in \mathbb{F}$, 判断下面定义的 $\mathbb{F}[x]$ 上的变换 T_a 是否是线性变换: $T_a(f(x)) = f(x+a), \forall f(x) \in \mathbb{F}[x]$.

◀ 是的. ▶

练习 7.3.5. 在光滑函数空间 $C^\infty(\mathbb{R})$ 上定义变换: $A(f(x)) = (f'(x))^2$. 判断 A 是否是线性变换.

◀ 不是. ▶

练习 7.3.6. 计算例 7.3.2 中线性映射的核与像集, 并求二者的维数.

◀1. 以矩阵 A 左乘或右乘给出的线性映射 L_A 和 R_A. 容易直接描述核与像, 如 $Ker(L_A) = \{X \in \mathbb{F}^{m\times n} | AX = 0\}$. 利用相抵标准形可以求出核与像的维数. 设 $rank(A) = r$, 则 $dimKer(L_A) = (m-r)p$, $dimIm(L_A) = rp$, $dimKer(R_A) = (n-r)l$, $dimIm(R_A) = rl$.

2. 转置. 核为 0, 像为全空间.

3. 迹. 容易直接描述. 核的维数是 $n^2 - 1$, 像的维数是 1.

4. 函数在某些点处的赋值. 容易直接描述. ▶

练习 7.3.16. 原题目表述有误，可以定义一个$R^{2\times 2}$ 的二维子空间$\mathbb{V}=\{aI+bA\}$

则复数域$\mathbb{C}$和$\mathbb{V}$同构.

证：设 $A\in span(I_2)$，若 $A\neq 0$，设 $A=\lambda I_2$（$\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\in\mathbb{R}$）.

∴ $A^2=\lambda^2 I_2=-I_2$ 无解 ∴ $A\notin span(I_2)$，即 $span(A)\cap span(I_2)=\{0\}$，

从而 $span(A)+span(I)$ 是直和.

∴ $\forall B\in\{aI_2+bA\}$，B有唯一分解 $B=mI_2+nA$，即 $B=aI_2+bA$

从而f是双射，从而f是 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的同构

即 $\{aI_2+bA\}$ 中元素 B 与实数对 (a,b) 一一对应，即与 $\mathbb{C}$ 中元素 $a+bi$ 一一对应.

4

A形如$\begin{bmatrix} a & b \\ -\dfrac{a^2+1}{b} & -a \end{bmatrix},(b\neq 0)$

练习 7.3.17. 证明矩阵空间 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 与 $\mathbb{F}^{mn}$ 同构.

◀ 二者均为 $\mathbb{F}$ 上的 mn 维线性空间.▶

练习 7.3.18. 证明多项式空间 $\mathbb{F}[x]_n$ 与 $\mathbb{F}^n$ 同构.

◀ 二者均为 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间.▶

练习 7.4.2. 求 $\mathbb{F}^4$ 中由基 e_1,e_2,e_3,e_4 到基 t_1,t_2,t_3,t_4 的过渡矩阵, 并分别求向量 a 在两组基下的坐标.

1. $e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, e_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, e_4=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}; t_1=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\\1\end{bmatrix}, t_2=\begin{bmatrix}0\\3\\1\\0\end{bmatrix}, t_3=\begin{bmatrix}5\\3\\2\\1\end{bmatrix}, t_4=\begin{bmatrix}6\\6\\1\\3\end{bmatrix}; a=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}.$

◀ 我们欲求的过渡矩阵 (记为 A) 满足 $(t_1,t_2,t_3,t_4)=(e_1,e_2,e_3,e_4)A$. 在 e_1,e_2,e_3,e_4, t_1,t_2,t_3,t_4 均为列向量时, 我们有 $\begin{bmatrix}t_1 & t_2 & t_3 & t_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_1 & e_2 & e_3 & e_4\end{bmatrix}A$. 故这里过渡矩阵

$$A=\begin{bmatrix}e_1 & e_2 & e_3 & e_4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}t_1 & t_2 & t_3 & t_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t_1 & t_2 & t_3 & t_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 5 & 6\\1 & 3 & 3 & 6\\-1 & 1 & 2 & 1\\1 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}.$$

向量 $a=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}$ 在 e_1,e_2,e_3,e_4 下的坐标就是 $\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}$. 由 $a=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}=$ $\begin{bmatrix}t_1 & t_2 & t_3 & t_4\end{bmatrix}A^{-1}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}$, a 在基 t_1,t_2,t_3,t_4 下的坐标为 $A^{-1}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{bmatrix}$. ▶

练习 7.4.2. 求 $\mathbb{F}^4$ 中由基 e_1, e_2, e_3, e_4 到基 t_1, t_2, t_3, t_4 的过渡矩阵, 并分别求向量 a 在两组基下的坐标.

2. $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, e_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; t_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, t_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, t_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, t_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

◀ 同上, $A = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

设 a 在基 e_1, e_2, e_3, e_4 下的坐标为 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$, 即 $a = (e_1, e_2, e_3, e_4) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$. 由于 e_1, e_2, e_3, e_4 是列向量, 我们有 $a = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$. a 在基 e_1, e_2, e_3, e_4 下的坐标 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{bmatrix}^{-1} a = \begin{bmatrix} \frac{3}{13} \\ \frac{5}{13} \\ -\frac{2}{13} \\ -\frac{3}{13} \end{bmatrix}$. a 在基 t_1, t_2, t_3, t_4 下的坐标为 $\begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{bmatrix}^{-1} a = \begin{bmatrix} \frac{4}{13} \\ \frac{2}{13} \\ -\frac{3}{13} \\ -\frac{1}{13} \end{bmatrix}$. ▶

练习 7.4.4.

1. 从 1 到 2: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & & 1 & 3 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$, 从 2 到 3: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & & 1 & 3 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$, 从 1 到 3: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ & 1 & 4 & 12 \\ & & 1 & 6 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. 26, 10, 10

练习 7.4.7. 矩阵空间 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 有两组基 $e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 和 $t_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $t_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $t_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $t_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. 求从基 e_1, e_2, e_3, e_4 到基 t_1, t_2, t_3, t_4 的过渡矩阵.

◀ $(t_1, t_2, t_3, t_4) = (e_1, e_2, e_3, e_4) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. ▶