第16讲　正弦电流电路的功率

1 瞬时功率

2 平均功率

3 无功功率

4 复(数)功率

5 视在功率

本节课需要用复数计算器

各种功率的定义是重点

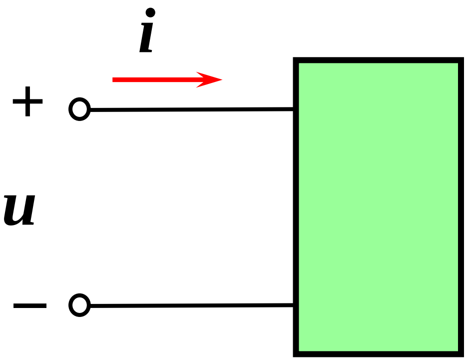
1 瞬时功率 (instantaneous power)

课前预习

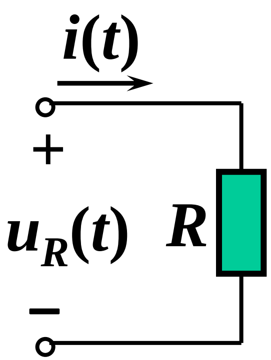
定 义

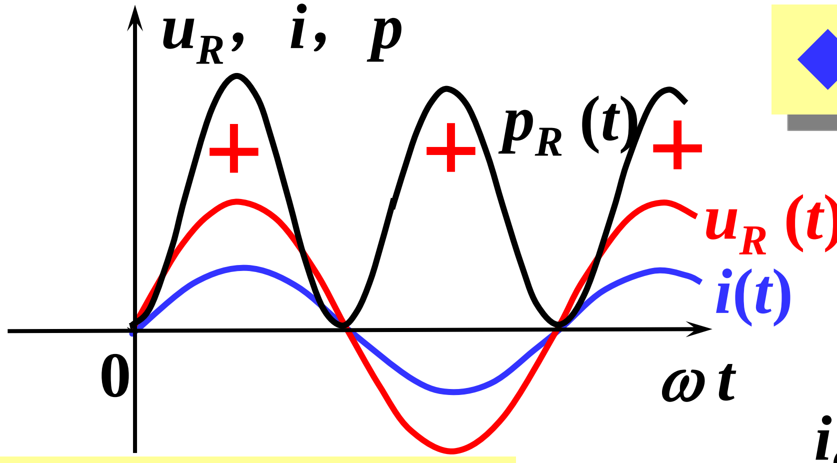
$$p_{\text{吸}} \stackrel{\text{def}}{=} ui$$

单位：W（瓦）

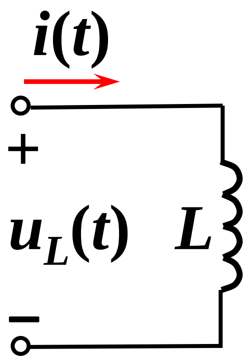


（1）正弦稳态下RLC元件的瞬时功率



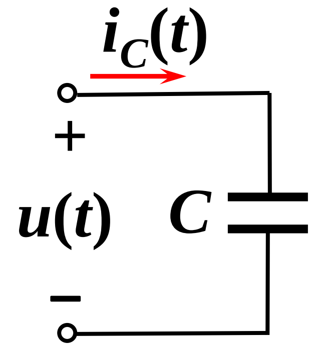


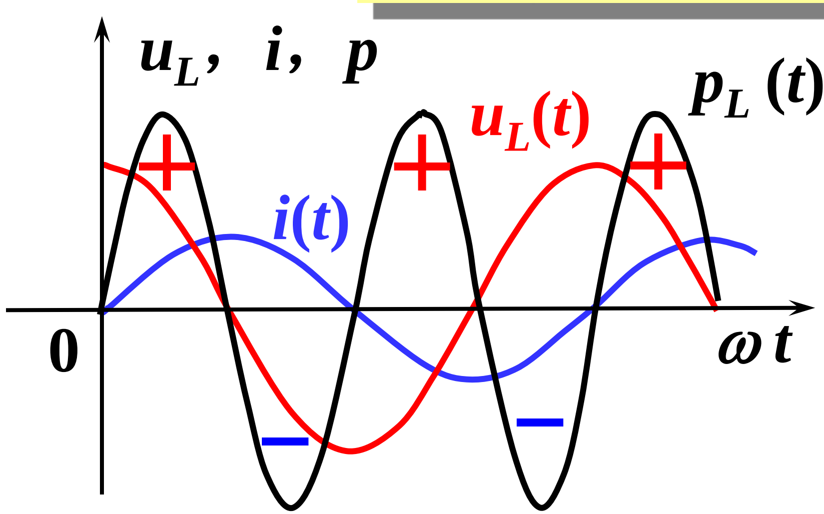
◆ $p_R \geq 0$

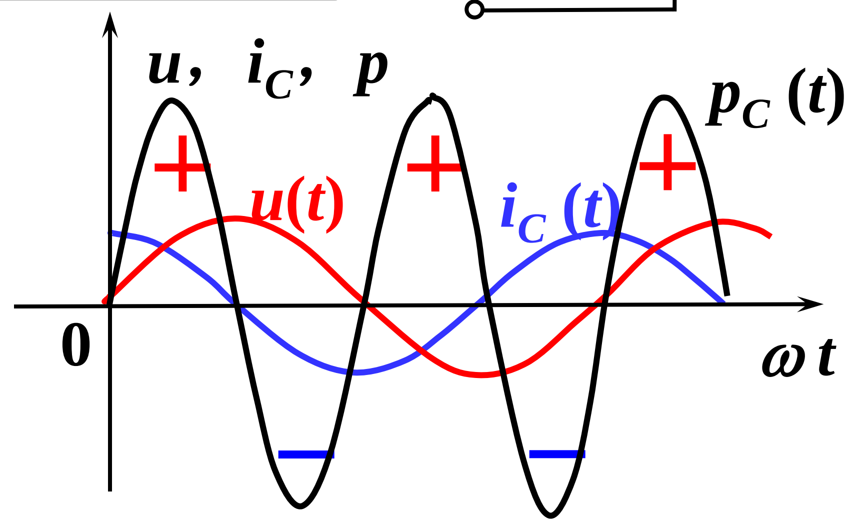


◆ p_L和p_C正负振荡

◆ 瞬时功率的角频率为2ω







对于一个电容的两端施加50Hz工频电压，其吸收的瞬时功率的频率为：

A 0 Hz

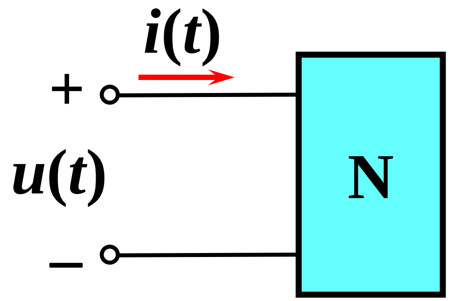
B 50 Hz

C 100 Hz

D 200 Hz

提交

（4）任意一端口网络吸收的瞬时功率



$$u(t) = \sqrt{2}U\sin\omega t$$

$$i(t) = \sqrt{2}I\sin(\omega t - \varphi)$$

$$p(t) = u(t)i(t) = \sqrt{2}U\sin\omega t \cdot \sqrt{2}I\sin(\omega t - \varphi)$$

$$= \sqrt{2}U\sin\omega t \cdot \sqrt{2}I\left(\sin\omega t\cos\varphi - \cos\omega t\sin\varphi\right)$$

$$= 2UI\sin^2\omega t\cos\varphi - 2UI\sin\omega t\cos\omega t\sin\varphi$$

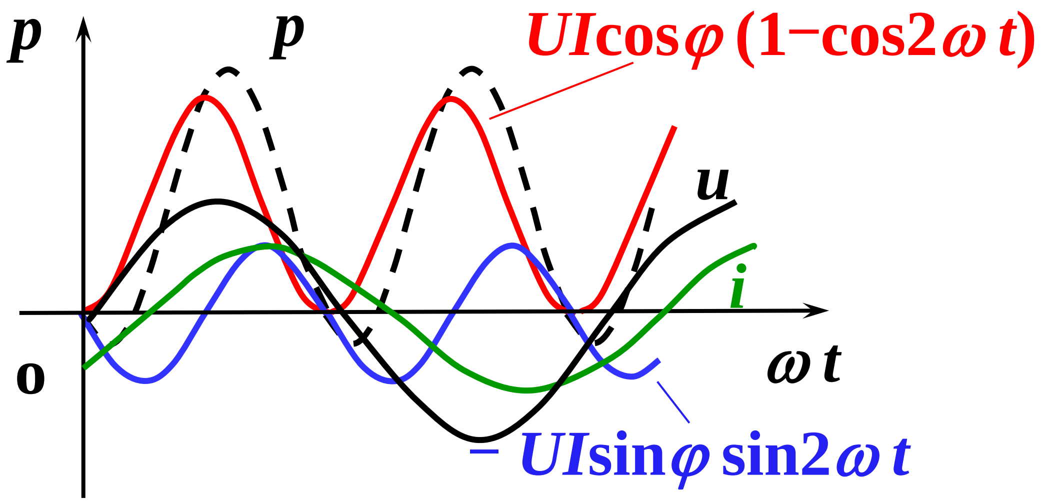
$$= UI\cos\varphi\,(1 - \cos 2\omega t) - UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$

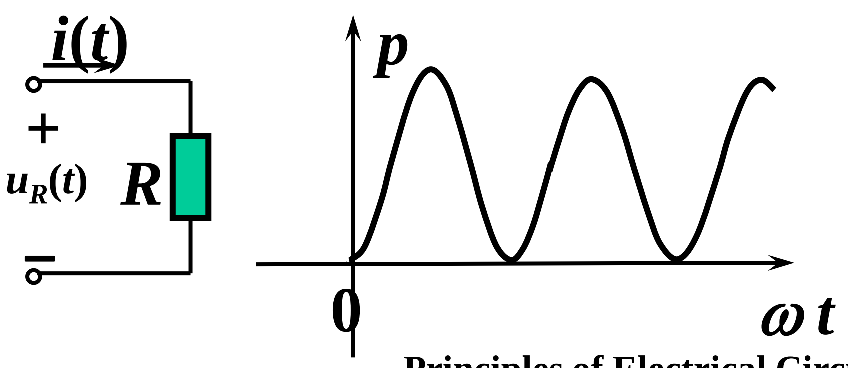
$$p(t)=u(t)i(t)=\sqrt{2}U\sin\omega t\cdot\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$

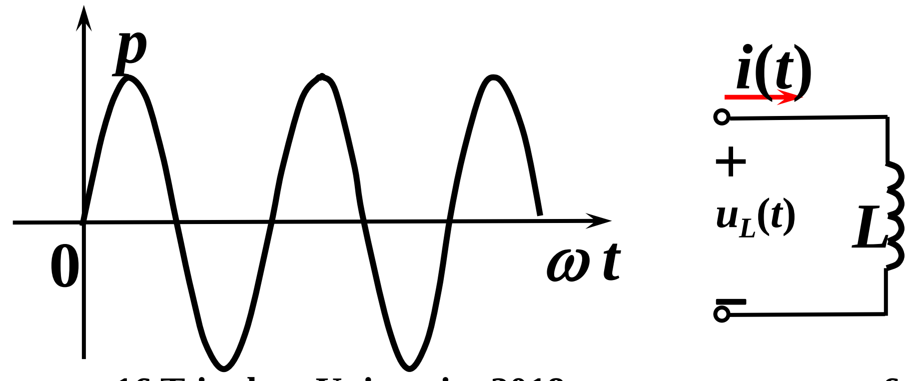
$$=UI\cos\varphi\,(1-\cos 2\omega t)-UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$

不可逆部分
（类似*R*的瞬时功率）

可逆部分
（类似*L*/*C*的瞬时功率）







2 平均功率

（1）平均功率 (average power)

$$u(t)=\sqrt{2}U\sin\omega t$$

$$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$

定义：瞬时功率的平均值。

常以符号P来表示。

$$p(t)=u(t)i(t)=\sqrt{2}U\sin\omega t\cdot\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$

$$=UI\cos\varphi\,(1-\cos 2\omega t)-UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$

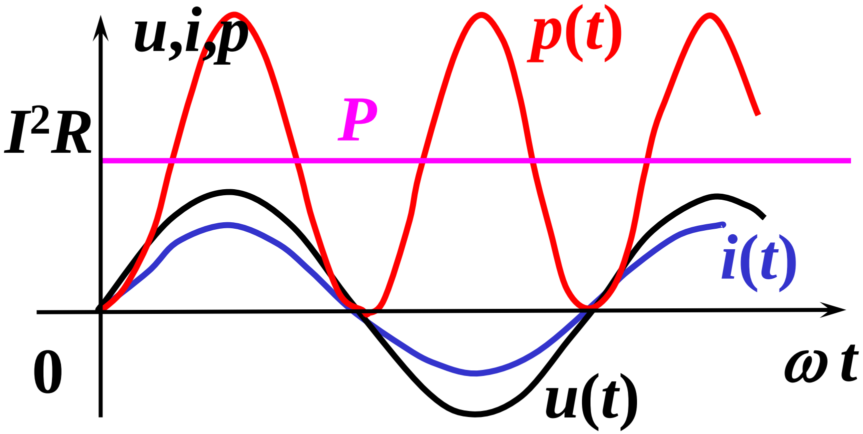
$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t=UI\cos\varphi$$

其中，$\cos\varphi$称为功率因数；$\varphi=\psi_u-\psi_i$，称作功率因数角。

对于无独立源网络，φ即为其等效阻抗的阻抗角。

平均功率P的单位也是**W**（瓦）

纯电阻(电阻元件或等效纯阻性网络) 条件下， $\varphi = 0^\circ$



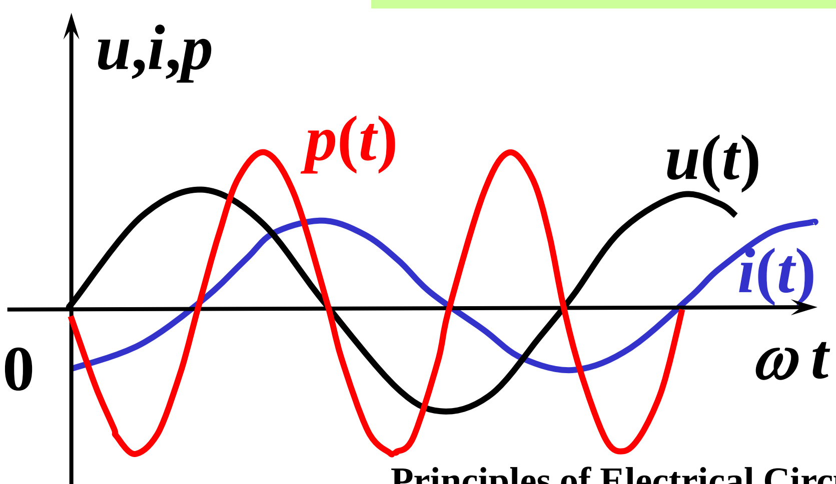
$$P = UI\cos\varphi = UI = I^2R = U^2/R$$

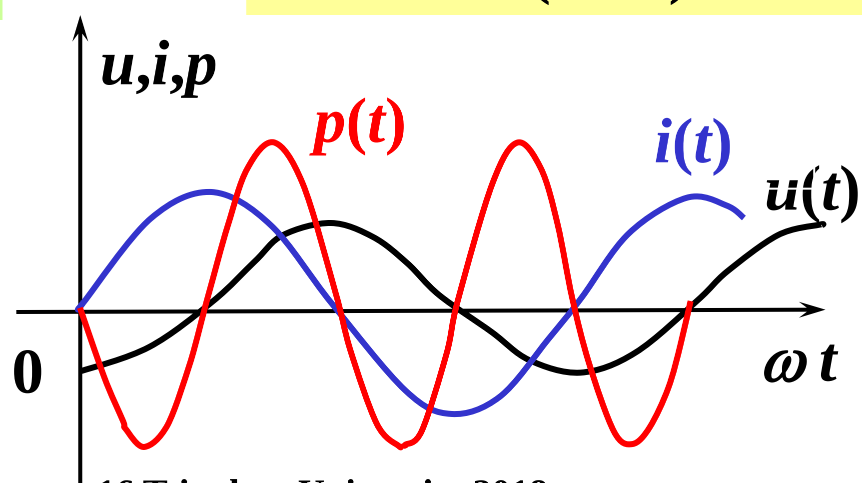
纯电感 (电感元件或等效纯感性网络) 条件下， $\varphi = 90^\circ$

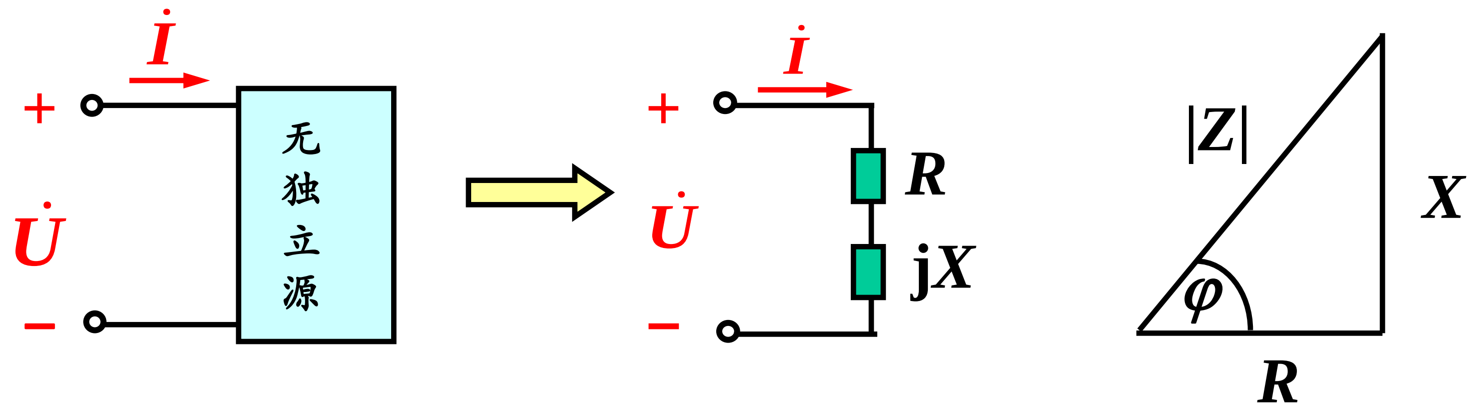
纯电容(电容元件或等效纯容性网络) 条件下， $\varphi = -\ 90^\circ$

$$P = UI\cos 90^{\circ} = 0$$

$$P = UI\cos(-90^{\circ}) = 0$$







$$P = UI\cos\varphi = |Z|\,I\;I\cos\varphi = I^2|Z|\cos\varphi = I^2R$$

功率因数 $\cos\varphi \begin{cases} 1, & \text{纯电阻} \\ 0, & \text{纯电抗} \end{cases}$

一般地，$0 \le \cos\varphi \le 1$

$X > 0$，$\varphi > 0$

感性，滞后的功率因数

$X < 0$，$\varphi < 0$

容性，超前的功率因数

例 $\cos\varphi = 0.5$ (滞后)，则 $\varphi = 60^{\circ}$

平均功率就是

消耗在电阻上的功率。

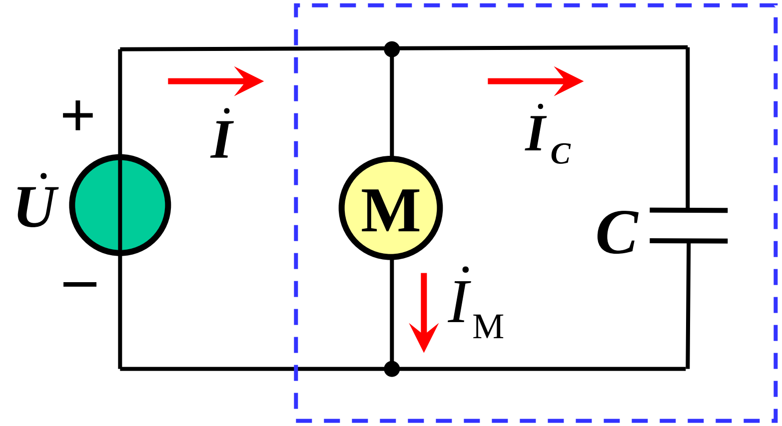
↓

有功功率(active power)

有功功率反映阻抗中实部的功率

有功功率守恒：电路中所有元件吸收的有功功率的代数和为零。

例 已知：U=220V，f =50Hz，
电动机 P_M=1000W，
$\cos\varphi_M$=0.8（滞后），C =30μF。
求虚线框中负载电路的功率因数



解 设 $\dot{U} = 220\angle 0^\circ$ V

$$I_M = \frac{P}{U\cos\varphi_M} = \frac{1000}{220\times 0.8} = 5.68\text{A}$$

$\cos\varphi_M = 0.8$（滞后） 即：电动机电压超前电机电流

$$\varphi_M = 36.9^\circ \longrightarrow \boxed{\dot{I}_M = 5.68\angle -36.9^\circ\ \text{A}}$$

$$\dot{I}_C = \text{j}\omega C 220\angle 0^\circ = \text{j}2.08\text{A}$$

$$\boxed{\dot{I} = \dot{I}_M + \dot{I}_C = 4.54 - \text{j}1.33 = 4.73\angle -16.3^\circ \text{A}}$$

$\cos\varphi = \cos[0^\circ - (-16.3^\circ)] = 0.96$（滞后）

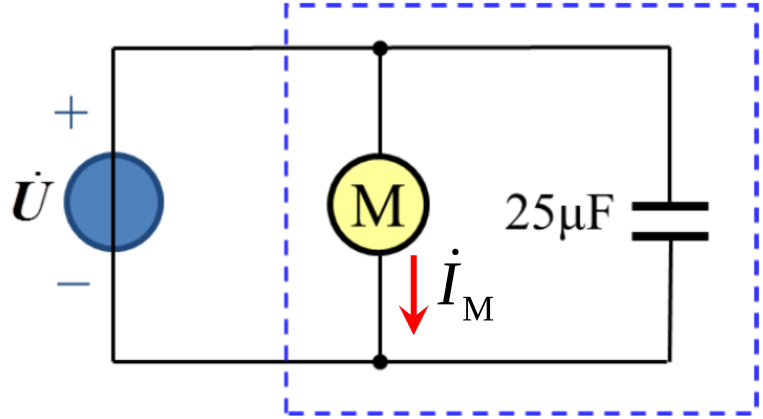
此处可以有弹幕

在并入电容前后，从电源看入，虚线框所示负载特性有什么变化?

单选题 1分

设置

已知U=200V，角频率ω=200rad/s，电动机功率因数为 $\cos\varphi = 0.8$（滞后），电动机 P_M=1000W，则虚线框中负载整体的功率因数为



A $\cos\varphi_M = 0.65$ （滞后）

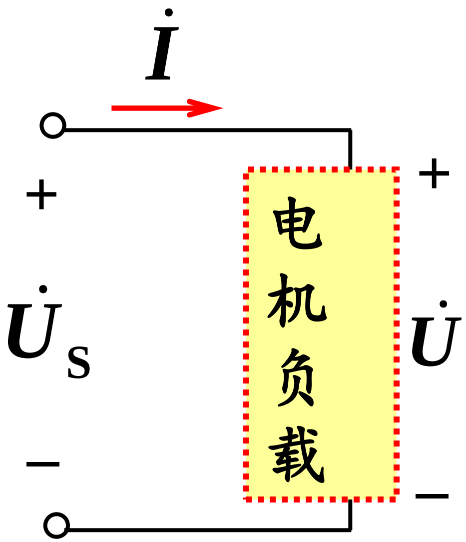
B $\cos\varphi_M = 0.72$ （滞后）

C $\cos\varphi_M = 0.88$ （滞后）

D $\cos\varphi_M = 0.94$ （滞后）

提交

（2）功率因数的提高



以异步电机为例： 空载$\cos\varphi$ =0.2~0.3

满载$\cos\varphi$ =0.7~0.85

需要提高功率因数!

设： 电源电压有效值 $U_S = 10V$，

负荷吸收的有功功率$P = 10W$（恒定）。

- $\cos\varphi=1$ I=1A
- $\cos\varphi=0.5$ I=2A
- $\cos\varphi=0.1$ I=10A

$$\boxed{P = UI\cos\varphi}$$

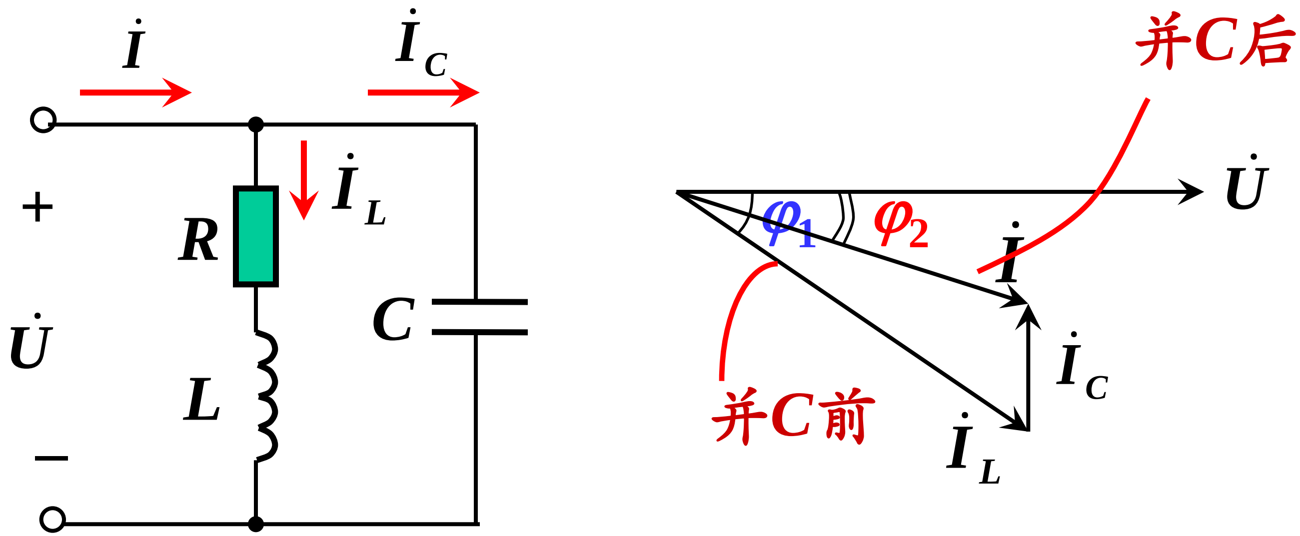
功率因数低带来的问题:

负载吸收相同有功功率时，(1)对电源有更高的要求(输出电流更大)，(2) 线路上的损耗随之增大。

功率因数低的用电户尤其是用电大户，必须提高功率因数。

解决办法：在用户端并联电容器；改造用电设备。 规定+处罚

原理分析
(并电容)



吸收的有功功率不变

提高了功率因数

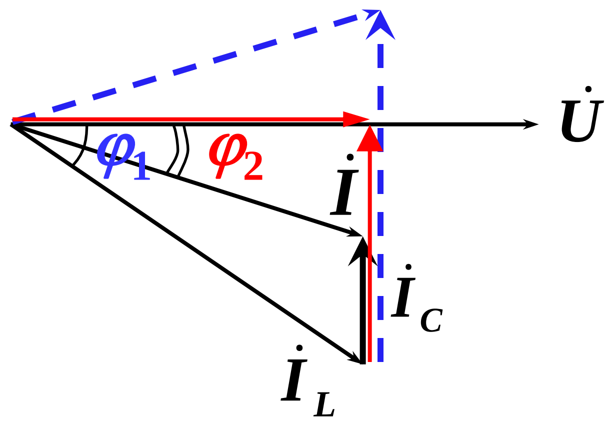
补偿容量的确定

$$I_C = I_L \sin\varphi_1 - I\sin\varphi_2$$

$$\left.\begin{aligned} I &= \frac{P}{U\cos\varphi_2} \\ I_L &= \frac{P}{U\cos\varphi_1} \end{aligned}\right\} \text{代入上式}$$

$$I_C = \frac{P}{U}(\mathrm{tg}\varphi_1 - \mathrm{tg}\varphi_2)$$

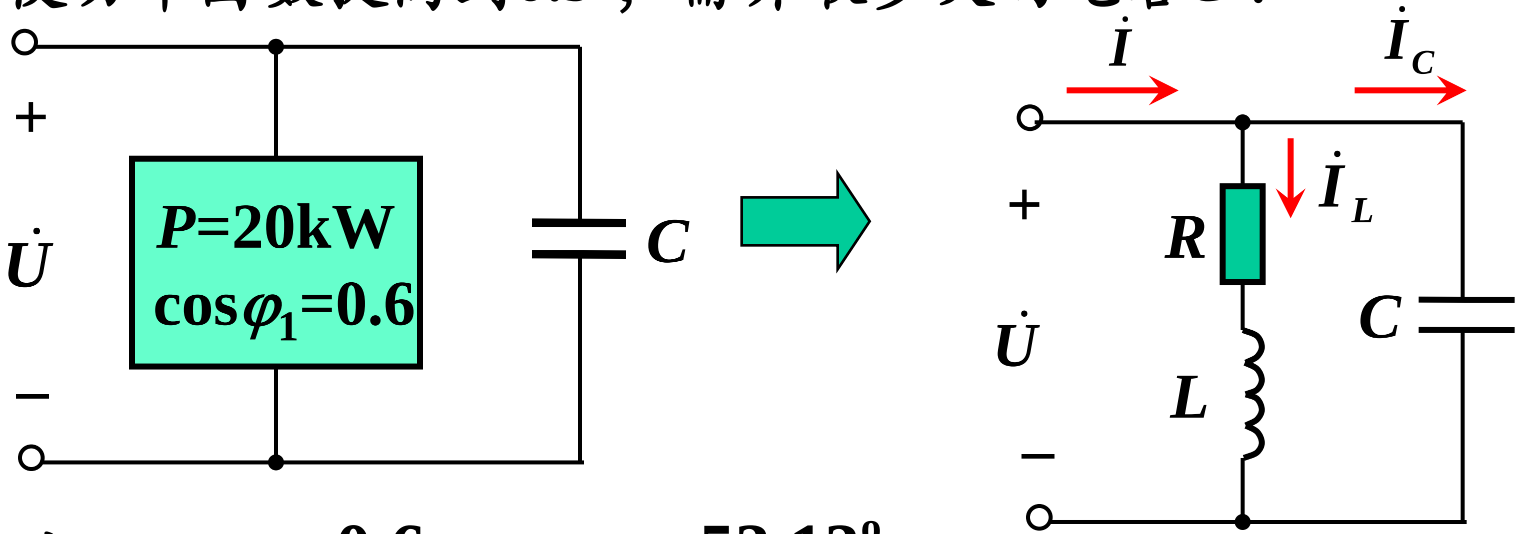
$$\therefore\ C = \frac{P}{\omega U^2}(\mathrm{tg}\varphi_1 - \mathrm{tg}\varphi_2)$$



补偿容量不同 $\begin{cases} \text{欠补偿} \\ \text{全补偿} \\ \text{过补偿} \end{cases}$

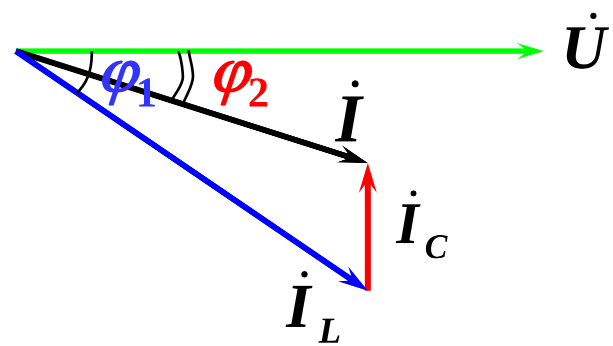
实际实施 $\begin{cases} \text{性能} \\ \text{成本} \end{cases}$ 一般补偿到λ=0.95(滞后)

例 已知 f=50Hz，U=380V，P=20kW，$\cos\varphi_1$=0.6(滞后)。问：要使功率因数提高到0.9，需并联多大的电容C？



解 由 $\cos\varphi_1 = 0.6$ 得 $\varphi_1 = 53.13^{\circ}$

由 $\cos\varphi_2 = 0.9$ 得 $\varphi_2 = 25.84^{\circ}$



$$C = \frac{P}{\omega U^2}(\mathrm{tg}\varphi_1 - \mathrm{tg}\varphi_2)$$

$$= \frac{20\times 10^3}{314\times 380^2}(\mathrm{tg}53.13^{\circ} - \mathrm{tg}25.84^{\circ})$$

$$= 375\,\mu\mathrm{F}$$

单选题 1分

设置

接到220V工频电源的交流电动机，其功率为2.2kW，功率因数 $\cos\varphi = 0.7$（滞后），欲将其功率因数提高至0.9，应并联多大的电容?

A 77.5 μF

B 487 μF

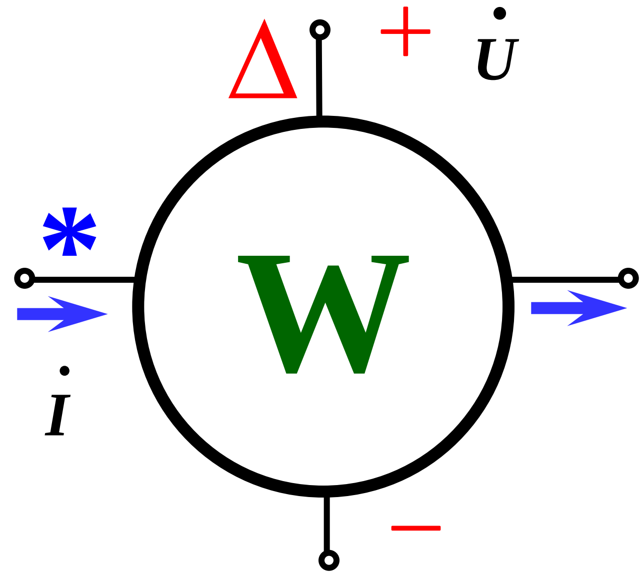
C 242 μF

D 98.5 μF

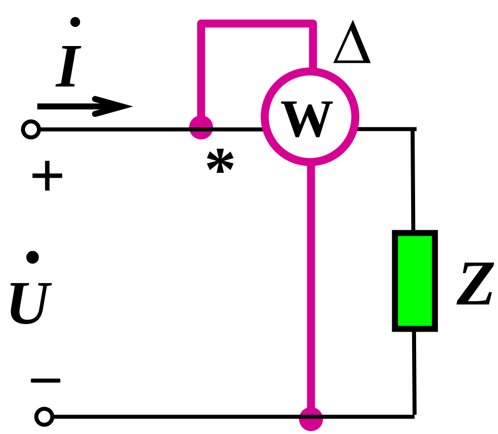
$$\therefore\ C = \frac{P}{\omega U^2}(\mathrm{tg}\varphi_1 - \mathrm{tg}\varphi_2)$$

提交

(3) 有功功率的测量　　功率表



(1) 功率表接线：如果接线方式是使得电流从“*”端流入；电压线圈的“Δ”端接负载电压的正端→则功率表的示值反映的即为 $UI\cos(\psi_u-\psi_i)$

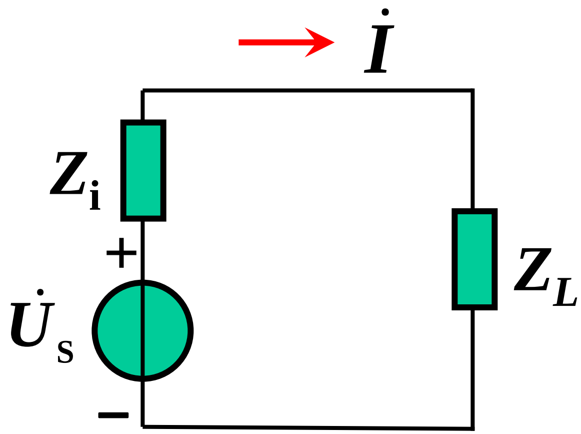


右侧接法功率表读数即为负载吸收的有功功率

(2) 功率表量程：测量有功功率时，P、U、I 均不能超量程。

（4） 最大功率传输（maximum power transfer）

——正弦稳态电路中负载获得最大有功功率$P_{\max}$的条件



$$Z_i = R_i + jX_i ，\quad Z_L = R_L + jX_L$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_S}{Z_i + Z_L}$$

$$I = \frac{U_S}{\sqrt{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2}}$$

负载吸收的有功功率 $P = R_L I^2 = \dfrac{R_L U_S^2}{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2}$

负载吸收的有功功率 $P = R_L I^2 = \dfrac{R_L U_S^2}{(R_i + R_L)^2 + (X_i + X_L)^2}$

$Z_L = R_L + jX_L$，实部虚部可任意改变（分两步进行分析）

先讨论X_L改变时，P的极值

当$X_i + X_L = 0$，即$X_L = -X_i$时，
P获得极值

$$P = \frac{R_L U_S^2}{(R_i + R_L)^2}$$

再讨论R_L改变时，P如何取得的最大值

$X_L = -X_i$条件下，当$R_L = R_i$时，P获得最大值(似直流电路)

$$P_{max} = \frac{U_S^2}{4R_i}$$

共轭匹配

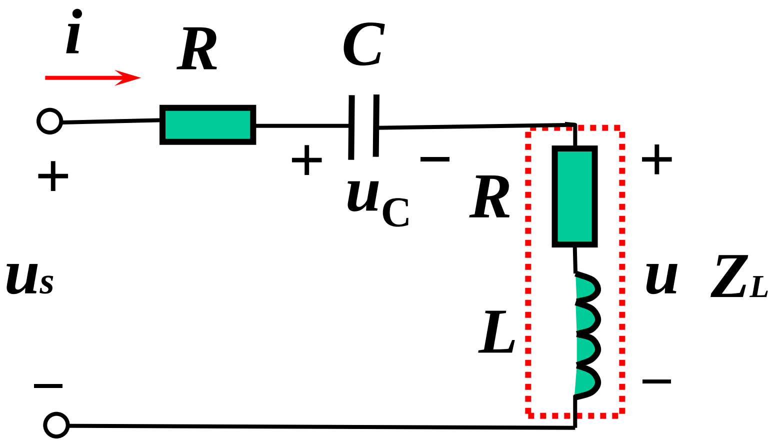
负载上获得最大功率的条件是 $\boxed{Z_L = Z_i^*}$，即 $\begin{cases} R_L = R_i \\ X_L = -X_i \end{cases}$

此结果可由P分别对X_L、R_L求偏导数得到。

单选题 1分

设置

L=1H, C=1μF, 当电压频率(不是问角频率)为何值时， 负载Z_L上有最大的功率？



A 1000 Hz

B 159 Hz

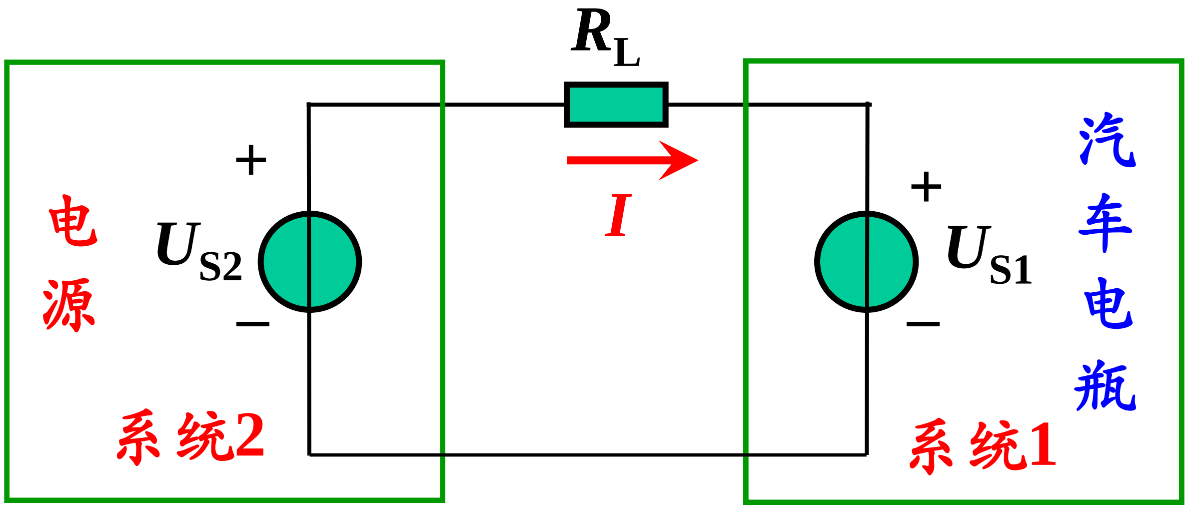
C 100 Hz

D 318 Hz

提交

(5) 电力系统中有功功率的传输

直流系统



$$I=\frac{U_{S2}-U_{S1}}{R_L}$$

系统1（蓄电池）吸收的功率

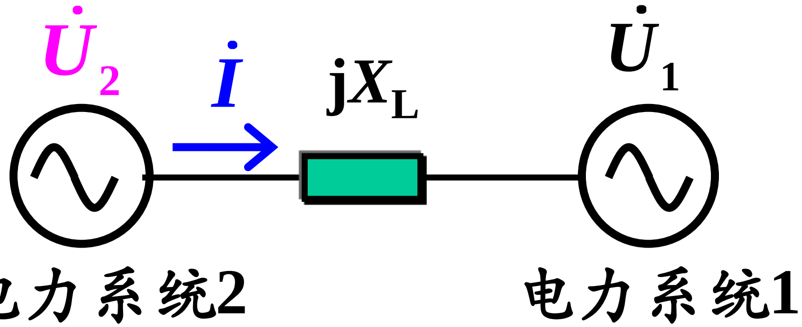
$$P=U_{S1}\frac{U_{S2}-U_{S1}}{R_L}$$

系统2向系统1输出的有功功率取决于：

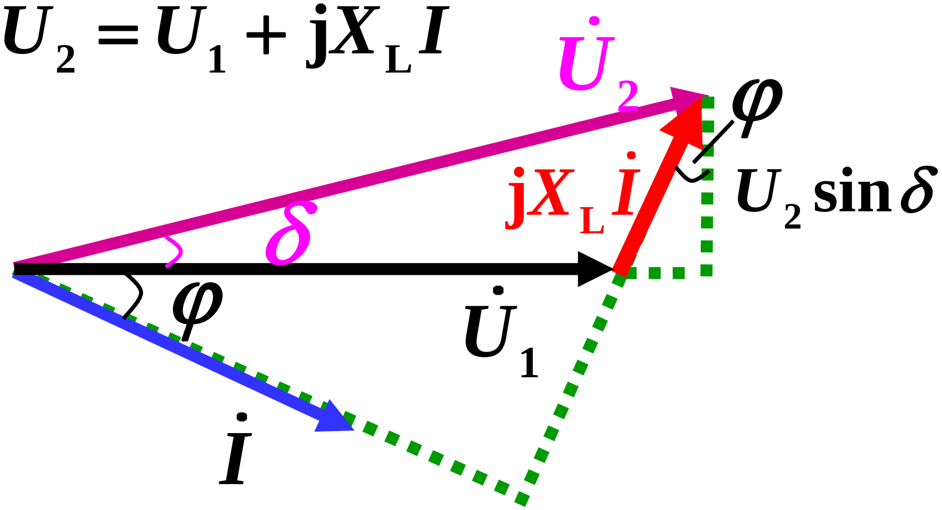
- 电压U_{S1}，U_{S2} （以及二者之差）
- 线路电阻R_L

电压高的系统向电压低的系统输送有功功率

交流系统



$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 + jX_L\dot{I}$$



系统1吸收的有功功率

$$P = U_1 I\cos\varphi$$

$$= U_1 \frac{X_L I\cos\varphi}{X_L}$$

$$P = \frac{U_1 U_2 \sin\delta}{X_L}$$

系统2向系统1输出的有功功率取决于:

- 电压U_1，U_2
- 相角差δ
- 线路电抗X_L

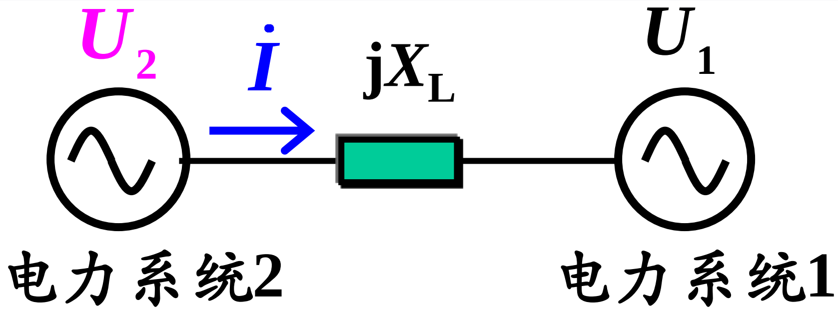
初相角领先的系统向落后的系统输送有功功率

画一个系统1向系统2输送有功功率的相量图

此处可以有投稿

多选题 1分

设置



增加输电功率的方法有：

系统1吸收的有功功率为

$$P = \frac{U_1 U_2 \sin\delta}{X_L}$$

A 提高电压等级

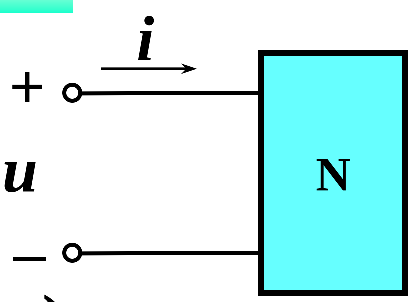
B 增加系统间电压幅值差

C 增加系统间电压相角差

D 减小线路电抗

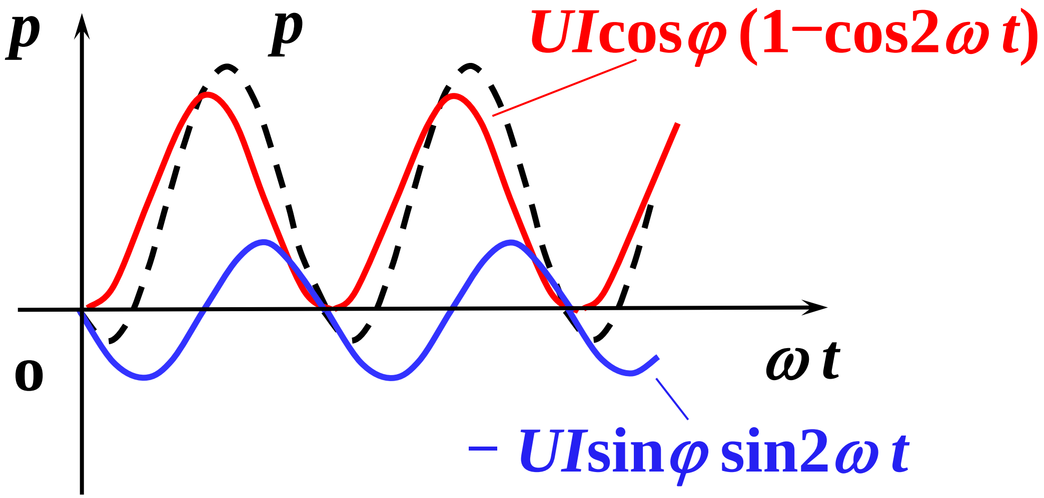
提交

3 无功功率



$$p(t) = u(t)i(t) = \sqrt{2}U\sin\omega t \cdot \sqrt{2}I\sin(\omega t - \varphi)$$

$$= UI\cos\varphi\,(1 - \cos 2\omega t) - UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$



不可逆部分
（类似*R*消耗瞬时功率）

可逆部分
（类似*L*/*C*瞬时功率）

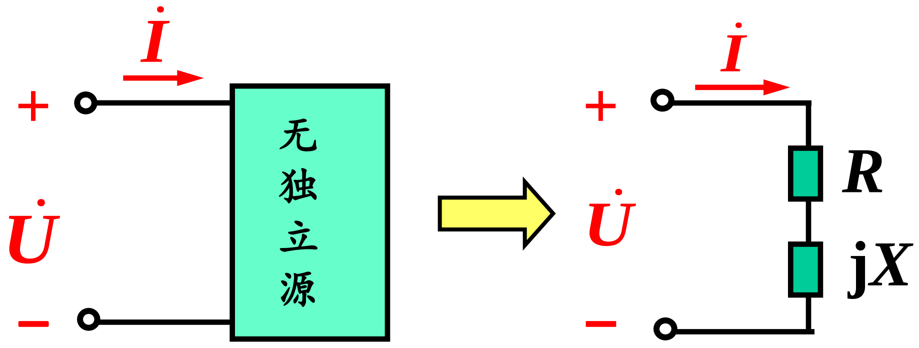
（1）无功功率 (reactive power) Q

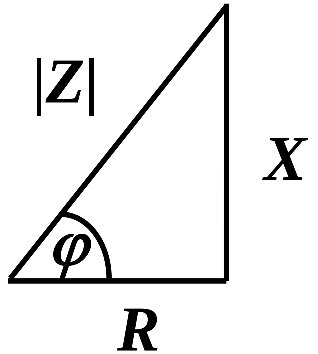
$$p(t)=UI\cos\varphi\,(1-\cos 2\omega t)-UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$

a）定义

$$Q \overset{\text{def}}{=} UI\sin\varphi$$ 单位：var (乏)

$$=|Z|\,I\,I\sin\varphi=I^2|Z|\sin\varphi=I^2X$$



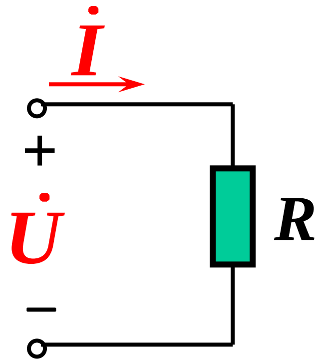


$\varphi=\psi_u-\psi_i$ 功率因数角

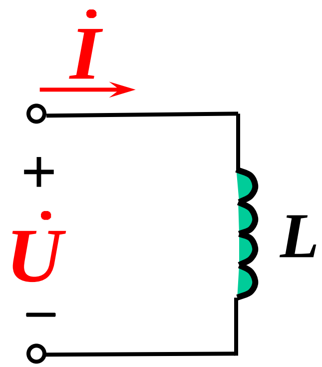
无功功率反映阻抗中虚部的功率

无功功率守恒：电路中所有元件吸收无功功率的代数和为零。

b）R、L、C 元件吸收的无功功率

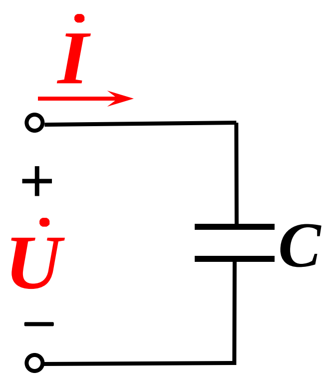


$$Q_R = UI\sin\varphi = UI\sin 0° = 0$$



$$Q_L = UI\sin\varphi = UI\sin 90° = UI = U^2/X_L = I^2 X_L > 0$$

L永远吸收无功功率



$$Q_C = UI\sin\varphi = UI\sin(-90°)$$

$$= -UI = -U^2/|X_C| = -I^2|X_C| < 0$$

C永远发出无功功率

（2）无功功率的物理意义

$$u(t)=\sqrt{2}U\sin\omega t$$

$$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$

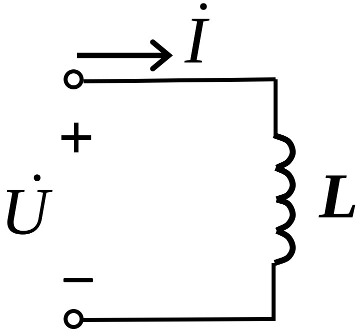
$$p(t)=UI\cos\varphi\,(1-\cos 2\omega t)-UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$

$$\varphi=90^\circ$$

$$p_L(t)=-UI\sin 2\omega t$$

$$Q_L=UI$$

$$=-Q_L\sin 2\omega t$$



电感储能变化率的最大值

$$p(t)=\frac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t}$$

功率是能量的时间变化率

对电容可以得到相同的结论

储能元件的无功功率反映其能量变化的最大速率

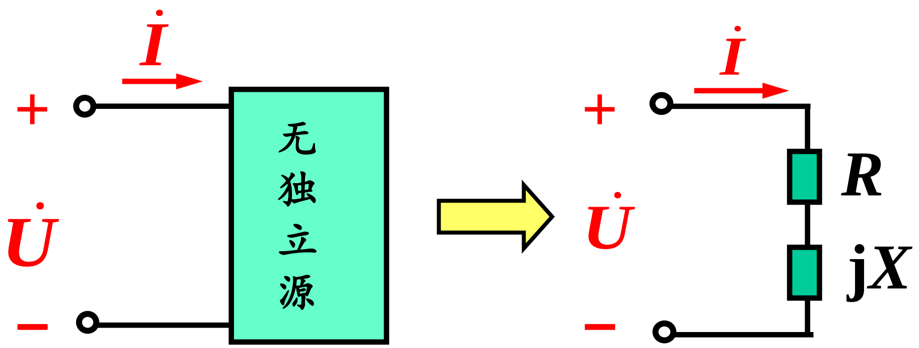
统一讨论负载吸收的无功功率和有功功率

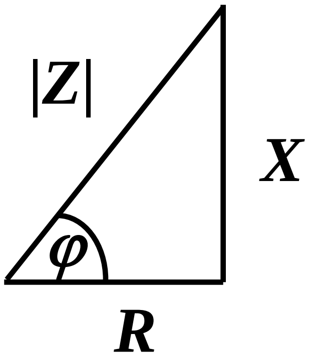
$$p(t)=u(t)i(t)=\sqrt{2}U\sin\omega t\cdot\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$$

$$=UI\cos\varphi\,(1-\cos 2\omega t)-UI\sin\varphi\sin 2\omega t$$

不可逆部分
（类似*R*的瞬时功率）

可逆部分
（类似*L/C*的瞬时功率）

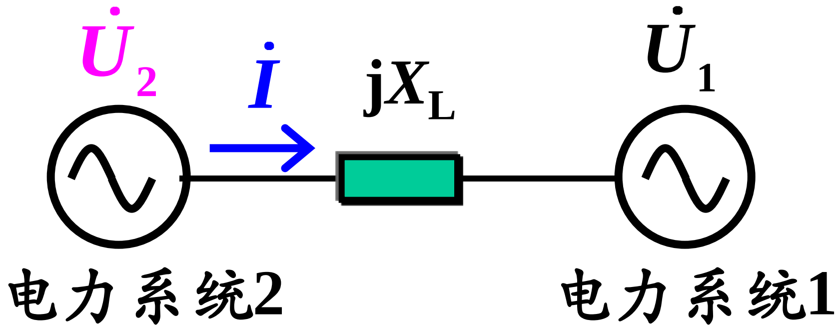




有功功率反映负载吸收功率的平均值(都消耗在阻抗的电阻部分)

无功功率反映阻抗中电抗部分能量交换的最大速率

(3) 电力系统中无功功率和电压的关系



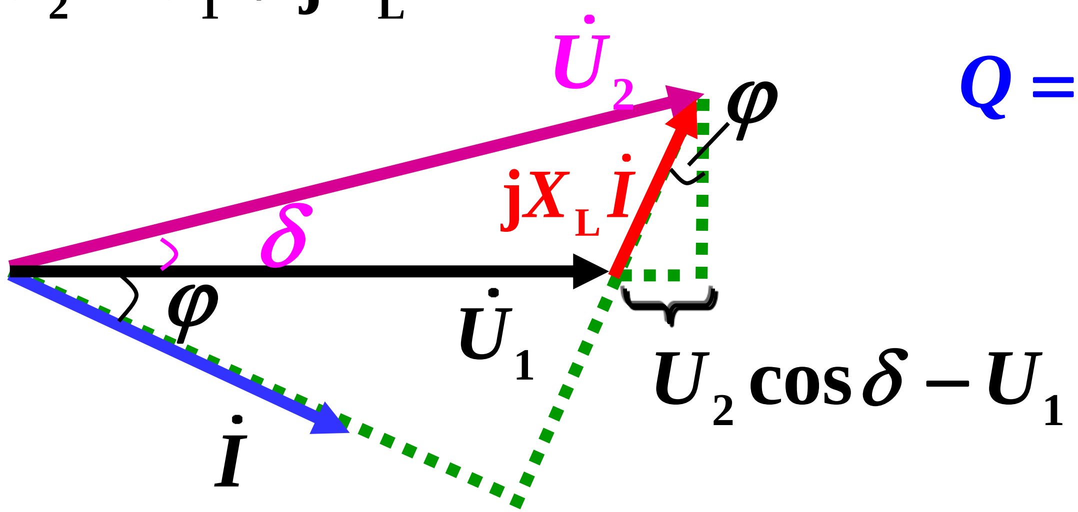
电力系统1吸收的无功功率

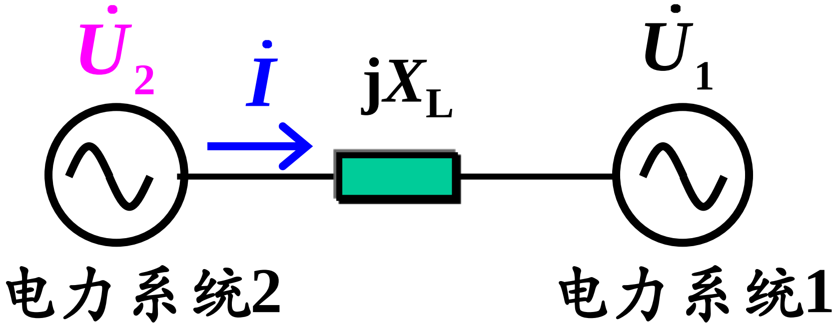
$$Q = U_1 I \sin\varphi$$

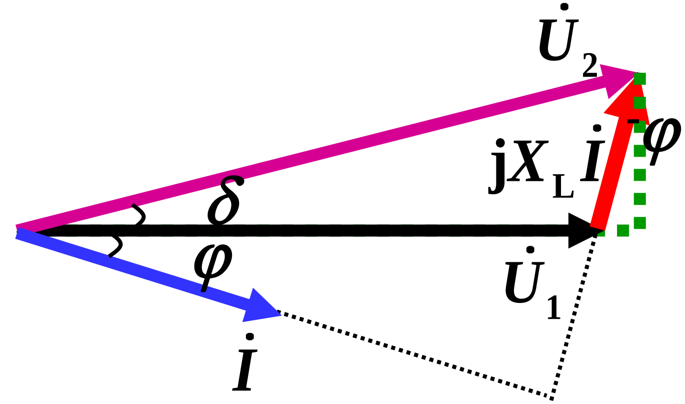
$$= U_1 \frac{X_L I \sin\varphi}{X_L}$$

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 + jX_L \dot{I}$$

$$Q = \frac{U_1}{X_L}\left(U_2 \cos\delta - U_1\right)$$

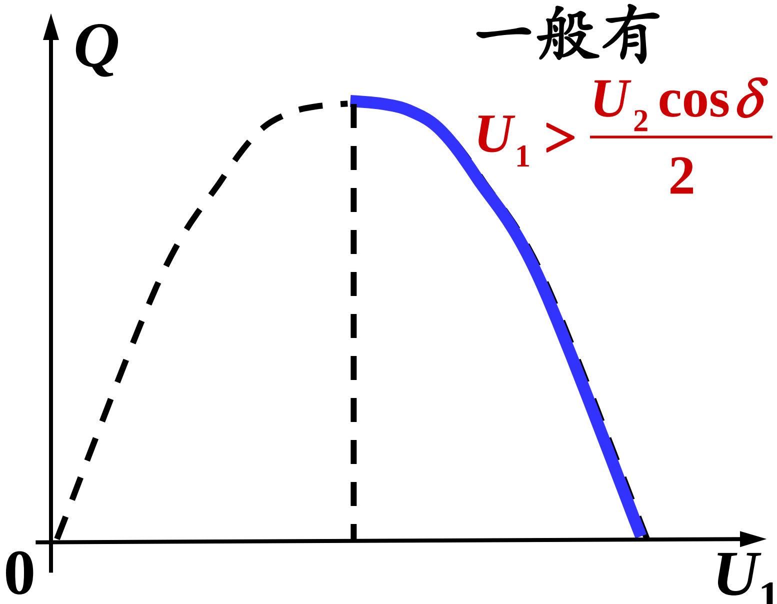






$$Q=\frac{U_1}{X_L}\left(U_2\cos\delta-U_1\right)$$

电力系统1吸收的无功功率是关于U_1的二次函数

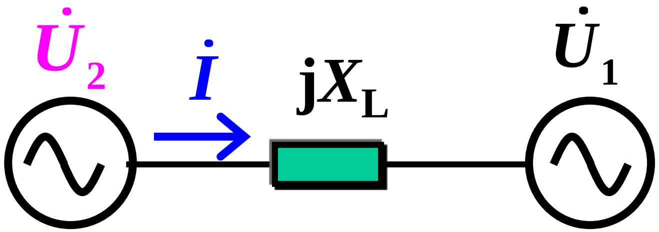


该函数在$U_1=\dfrac{U_2\cos\delta}{2}$获得最大值

单选题 1分

设置

“红包”



电力系统1吸收的无功功率为

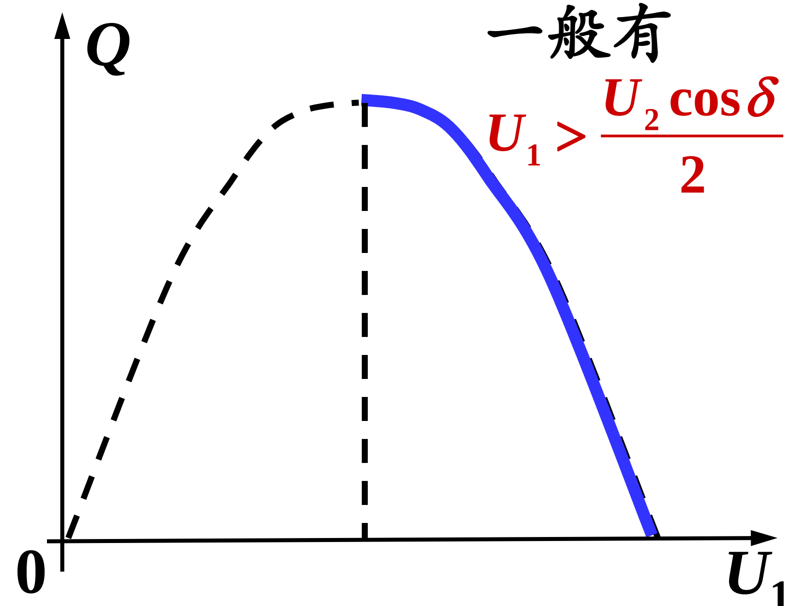
$$Q = \frac{U_1}{X_L}\left(U_2\cos\delta - U_1\right)$$

电力系统1吸收的无功功率越多，则:

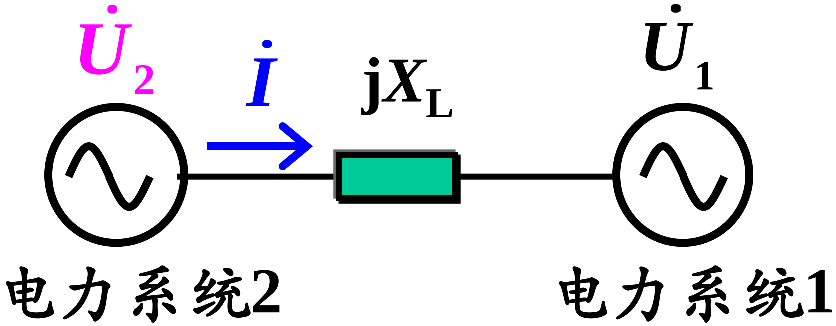
A 系统1电压越高

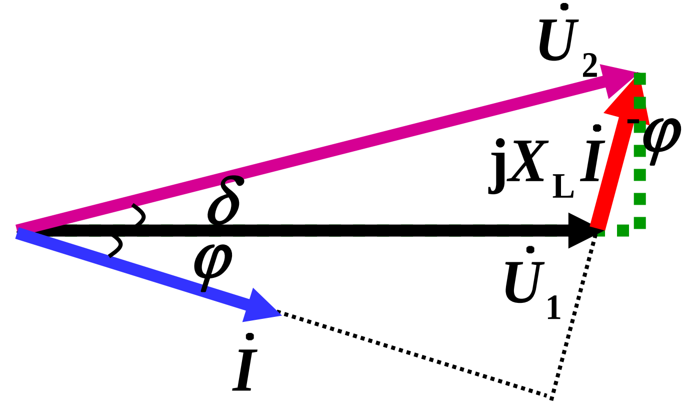
B 系统1电压越低

C 系统1电压不变



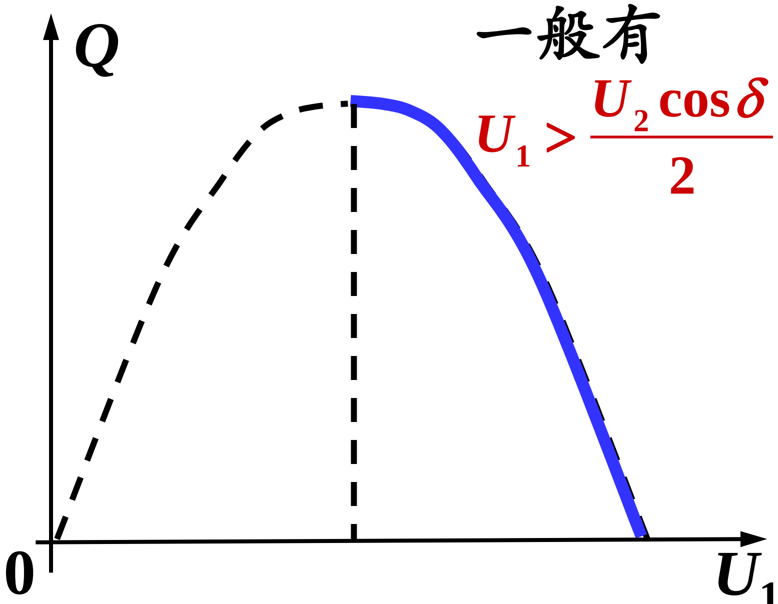
提交





$$Q=\frac{U_1}{X_L}\left(U_2\cos\delta-U_1\right)$$

电力系统1吸收的无功功率是关于U_1的二次函数



随着系统1吸收无功功率的增加

⬇

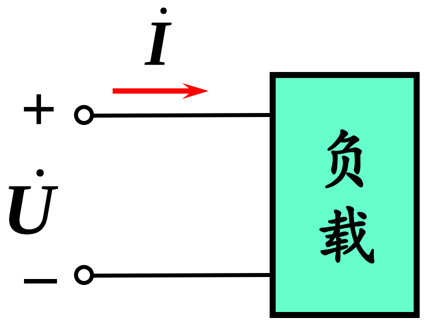
系统1母线上的电压随之降低

该函数在$U_1=\dfrac{U_2\cos\delta}{2}$获得最大值

$\boxed{\text{无功功率补偿 (类似功率因数提高)}}$

4 复(数)功率 (complex power)

$$\dot{U}=U\angle\psi_u\ ,\qquad \dot{I}=I\angle\psi_i$$



$$P=UI\cos\left(\psi_u-\psi_i\right)=UI\cos\varphi$$

$$Q=UI\sin\left(\psi_u-\psi_i\right)=UI\sin\varphi$$

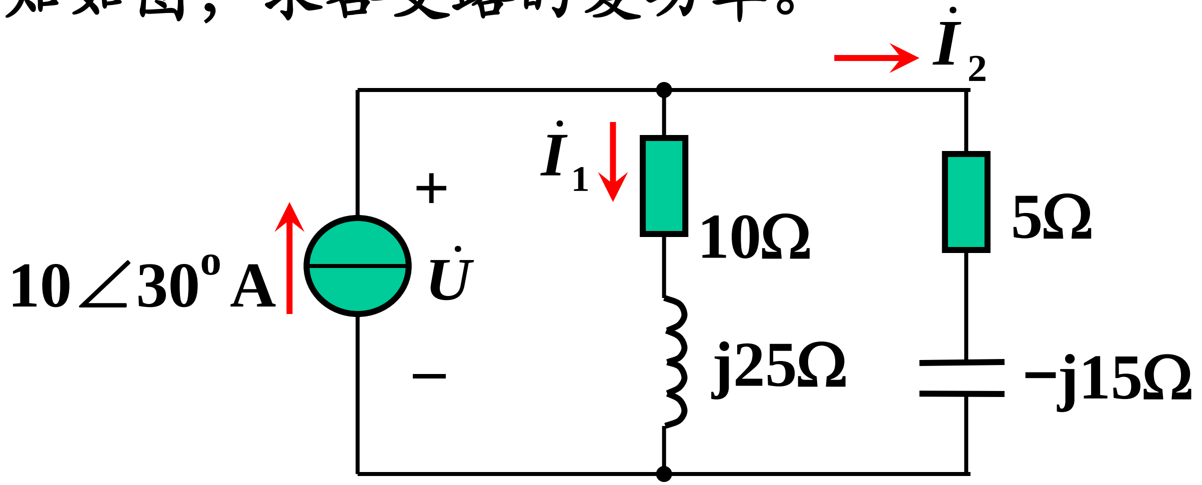
$$\dot{U}\dot{I}^*=U\angle\psi_u\times I\angle-\psi_i=UI\angle\psi_u-\psi_i$$

$$=UI\cos\varphi+\mathrm{j}UI\sin\varphi=P+\mathrm{j}Q$$

记： $\overline{S}=\dot{U}\dot{I}^*$ 称为复功率，单位:VA[伏安]

（2）复功率守恒 $\displaystyle\sum_{k=1}^{b}\overline{S}_k=\sum_{k=1}^{b}\dot{U}_k\dot{I}_k^*=0$

例　已知如图，求各支路的复功率。



解

$$\dot{I}_1 = 10\angle 30^{\circ} \times \frac{5-\text{j}15}{10+\text{j}25+5-\text{j}15} = 8.77\angle(-75.3^{\circ}) \quad \text{A}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_S - \dot{I}_1 = 14.94\angle 64.5^{\circ} \quad \text{A}$$

$$\dot{U} = 10\angle 30^{\circ} \times [(10+\text{j}25)//(5-\text{j}15)] = 236\angle(-7.1^{\circ}) \quad \text{V}$$

电流源 $\overline{S}_{发} = 236\angle(-7.1^{\circ}) \times 10\angle(-30^{\circ}) = 1882 - \text{j}1424 \ \text{VA}$

支路1 $\overline{S}_{1吸} = 236\angle(-7.1^{\circ}) * 8.77\angle(75.3^{\circ}) = 769 + \text{j}1923 \quad \text{VA}$

支路2 $\overline{S}_{2吸} = 236\angle(-7.1^{\circ}) * 14.94\angle(-64.5^{\circ}) = 1116 - \text{j}3348 \quad \text{VA}$

5 视在功率

定义：$S \overset{\text{def}}{=} UI$

单位：VA（伏安）

表征电气设备的容量

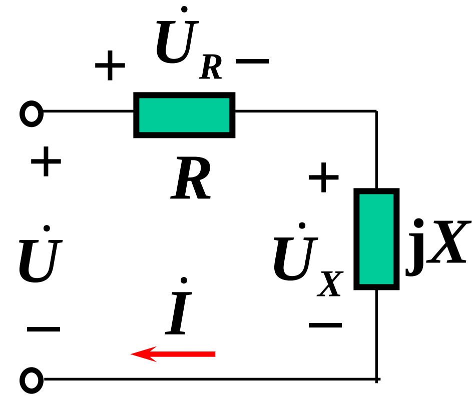
（例如发电机的发电容量）

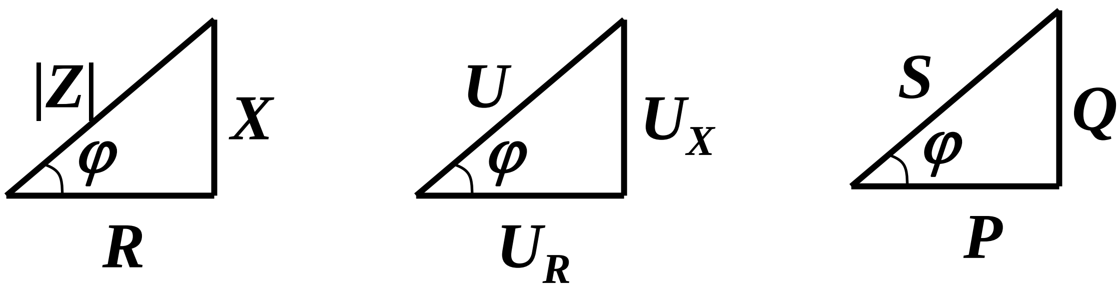
有功功率、无功功率与视在功率的关系

有功功率：$P=UI\cos\varphi$　　单位：W

无功功率：$Q=UI\sin\varphi$　　单位：var

视在功率：$S=UI$　　单位：VA





三个三角形相似

阻抗三角形　　电压三角形　　功率三角形