线性代数 第12讲

10月20日

第二章第4讲　　线性方程组的解集

上一讲要点回顾

例题选讲

矩阵秩的几个性质

线性方程组解的结构

矩阵的秩

定义 2.3.1 (秩) 矩阵 A 的列空间的维数 $\dim \mathcal{R}(A)$ 称为矩阵 A 的**秩**，记为 $\mathrm{rank}(A)$.

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{a}_1^T\\ \tilde{a}_2^T\\ \vdots\\ \tilde{a}_m^T\end{bmatrix},\quad rank\left(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n\right)=rank\left(\tilde{a}_1\ \tilde{a}_2\ \cdots\ \tilde{a}_m\right)$$

矩阵的列秩　　矩阵的行秩

矩阵的秩
行满秩
列满秩
满秩

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 4\\ 1 & 3 & 0 & 2\end{bmatrix}\qquad rank\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\4\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\4\\2\end{bmatrix}\right)=rank\left(\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\4\\1\\4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\3\\0\\2\end{bmatrix}\right)$$

对矩阵 A 做一系列初等行变换得到 $B \Leftrightarrow B=PA$, 即 $\begin{bmatrix}b_1\ b_2\ \cdots\ b_n\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}a_1\ a_2\ \cdots\ a_n\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}b_{i_1}\ b_{i_2}\ \cdots\ b_{i_r}\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots a_{i_r}\end{bmatrix} \Leftrightarrow a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots a_{i_r}$ 线性相关/无关 $\Leftrightarrow b_{i_1}\ b_{i_2}\ \cdots b_{i_r}$ 相关/无关

推论 2.3.4 矩阵的行简化阶梯形唯一.

$$
\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}
1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \cdots\cdots\cdots & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \cdots\cdots\cdots & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * & \cdots\cdots\cdots & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & & & &
\end{bmatrix}.
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 0 & -3 & -1 & \tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}} \\
1 & -1 & 2 & -1 & 0 & \tilde{\boldsymbol{a}}_2^{\mathrm{T}} \\
4 & -2 & 6 & 3 & -4 & \tilde{\boldsymbol{a}}_3^{\mathrm{T}} \\
2 & 4 & -2 & 4 & -7 & \tilde{\boldsymbol{a}}_4^{\mathrm{T}}
\end{array}\right]
\to
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 0 & -3 & -1 & \tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}} \\
0 & -2 & 2 & 2 & 1 & \tilde{\boldsymbol{a}}_2^{\mathrm{T}}-\tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}} \\
0 & 0 & 0 & 9 & -3 & \tilde{\boldsymbol{a}}_3^{\mathrm{T}}-3\tilde{\boldsymbol{a}}_2^{\mathrm{T}}-\tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\boldsymbol{a}}_4^{\mathrm{T}}-\frac{4}{3}\tilde{\boldsymbol{a}}_3^{\mathrm{T}}+5\tilde{\boldsymbol{a}}_2^{\mathrm{T}}-\frac{5}{3}\tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}}
\end{array}\right]
$$

命题 2.3.7 矩阵 A 的行空间的维数 $\operatorname{rank}(A^{\mathrm{T}})$ 等于 A 化成的阶梯形矩阵的阶梯数.

命题 2.3.8 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则 $\operatorname{rank}(A^{\mathrm{T}})=\operatorname{rank}(A)$.

设矩阵A的行简化阶梯形为R，$QA=R=\begin{bmatrix}R_1\\0\end{bmatrix}$，则下列$B$的行简化阶梯形

1. $B=\begin{bmatrix}A & A\end{bmatrix}$.

2. $B=\begin{bmatrix}A & AC\end{bmatrix}$.

3. $B=\begin{bmatrix}A\\A\end{bmatrix}$.

4. $B=\begin{bmatrix}A\\CA\end{bmatrix}$.

5. $B=\begin{bmatrix}A & A\\0 & A\end{bmatrix}$.

6. $B=PA$，其中 P 是可逆矩阵.

7. A 有 LU 分解 $A=LU$，这里 L 为单位下三角阵，令 $B=U$.

(1) $Q\begin{bmatrix}A & A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R & R\end{bmatrix}$

(2) $Q\begin{bmatrix}A & AC\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R & RC\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}Q & 0\\-I & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R\\0\end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix}Q & 0\\-C & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R\\0\end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix}Q & -Q\\0 & Q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & A\\0 & A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R & 0\\0 & R\end{bmatrix}\Rightarrow R\begin{bmatrix}Q & -Q\\0 & Q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & A\\0 & A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_1 & 0\\0 & R_1\\0 & 0\end{bmatrix}$（$R$为一交换行的置换阵）

(6) $QP^{-1}PA=R$

(7) $A=LU\Rightarrow QLU=QA=R$（L为单位下三角矩阵，所以可逆，QL也可逆）

练习2.3.14 设 $m \times n$ 矩阵 A 列满秩，
求证：存在行满秩的 $n \times m$ 矩阵B，使得$BA = I_n$.　　左逆

证明：$m\times n$ 矩阵列满秩，意味着$n\le m$，其行秩与列秩均为 n，

设 $A=\begin{bmatrix}\tilde{a}_1^T\\ \tilde{a}_2^T\\ \vdots\\ \tilde{a}_m^T\end{bmatrix}$，存在 $\tilde{a}_{i_1},\tilde{a}_{i_2},\cdots,\tilde{a}_{i_n}\in\mathrm{R}^n$，且线性无关，则有唯一的 $\begin{bmatrix}b_{ki_1}\\ b_{ki_2}\\ \vdots\\ b_{ki_n}\end{bmatrix}$，满足 $\begin{bmatrix}\tilde{a}_{i_1} & \tilde{a}_{i_2} & \cdots & \tilde{a}_{i_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{ki_1}\\ b_{ki_2}\\ \vdots\\ b_{ki_n}\end{bmatrix}=e_k$

$$\begin{bmatrix}\tilde{a}_{i_1} & \tilde{a}_{i_2} & \cdots & \tilde{a}_{i_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{1i_1} & b_{2i_1} & \cdots & b_{ni_1}\\ b_{1i_2} & b_{2i_2} & \cdots & b_{ni_2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{1i_n} & b_{2i_n} & \cdots & b_{ni_n}\end{bmatrix}=I_n \Rightarrow \begin{bmatrix}b_{1i_1} & b_{1i_2} & \cdots & b_{1i_n}\\ b_{2i_1} & b_{2i_2} & \cdots & b_{2i_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{ni_1} & b_{ni_2} & \cdots & b_{ni_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{a}_{i_1}^T\\ \tilde{a}_{i_2}^T\\ \vdots\\ \tilde{a}_{i_n}^T\end{bmatrix}=BA=I_n$$

（令B的$i_1,i_2,\cdots,i_n$以外的列均为0）

$$\begin{bmatrix}\tilde{a}_{i_1} & \tilde{a}_{i_2} & \cdots & \tilde{a}_{i_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{1i_1} & b_{2i_1} & \cdots & b_{ni_1}\\ b_{1i_2} & b_{2i_2} & \cdots & b_{ni_2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{1i_n} & b_{2i_n} & \cdots & b_{ni_n}\end{bmatrix}x=0\text{只有零解}\Rightarrow \begin{bmatrix}b_{1i_1} & b_{2i_1} & \cdots & b_{ni_1}\\ b_{1i_2} & b_{2i_2} & \cdots & b_{ni_2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{1i_n} & b_{2i_n} & \cdots & b_{ni_n}\end{bmatrix}x=0\text{只有零解}\Rightarrow B\text{行满秩}$$

练习2.3.13 当矩阵 A 列满秩时，$AB = AC$ 可以推出 $B = C$。

证法II

练习2.3.14 设 $m \times n$ 矩阵 A 列满秩，
求证：存在行满秩的 $n \times m$ 矩阵B，使得$BA = I_n$. 左逆

证明：设 $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \tilde{a}_1^T \\ \tilde{a}_2^T \\ \vdots \\ \tilde{a}_m^T \end{bmatrix}$，$\tilde{a}_{i_1},\tilde{a}_{i_2},\cdots,\tilde{a}_{i_n}$为行向量的一个极大线性无关部分组

令 $A_1=\begin{bmatrix} \tilde{a}_{i_1}^T \\ \tilde{a}_{i_2}^T \\ \vdots \\ \tilde{a}_{i_n}^T \end{bmatrix}$，$A_2$ 为 A 的除去第 $i_1,i_2,\cdots,i_n$行，剩余部分组成的矩阵。

存在置换阵 P，使得 $PA=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$，则$\begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \end{bmatrix}PA=I_n$，

令 $B=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \end{bmatrix}P$，有$\operatorname{rank}(B)=n, BA=I_n$.

练习2.3.16 设 A, B 是 n 阶方阵，利用不等式 $\operatorname{rank}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$，证明，

1. 如果 $AB = I_n$，则 A, B 都可逆，且 $BA = I_n$.
2. 如果 AB 可逆，则 A, B 都可逆.

证明：

(1) 设A、B是方阵，利用 $rank(AB) \le \min\{rank(A), rank(B)\}$，

得 $n = rank(I_n) \le \min\{rank(A), rank(B)\} \le n$

所以 $rank(A) = rank(B) = n$

$\operatorname{rank}(A) = n \Rightarrow$ A可通过一系列初等行变换，变为单位矩阵，即 $PA = I_n$。

$$AB = I_n \Rightarrow PABA = PI_nA \Rightarrow (PA)BA = PA \Rightarrow BA = I_n$$

(2) AB 可逆，所以 $rank(AB) = n \le \min\{rank(A), rank(B)\} \le n$

所以 $rank(A) = rank(B) = n$， A、B 都可逆。

矩阵秩的几个性质

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则

(1) $r(AB) \le \min(r(A), r(B))$;

(2) $r(A+B) \le r(A) + r(B)$;

(3) $r\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\right) = r(A) + r(B)$;

(4) $r\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}\right) \ge r(A) + r(B)$;

(5) 设 $AB = 0$，则 $r(A) + r(B) \le n$.

设 A 是 m×n 矩阵, B 是 n×s 矩阵则

(1) $r(AB) \le \min(r(A), r(B))$;

证明 记 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $AB = (c_1, c_2, \cdots, c_s)$, $B = (b_{ij})_{n\times s}$.

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}$$

则 $c_1 = b_{11}\alpha_1 + b_{21}\alpha_2 + \dots + b_{n1}\alpha_n$,

$$c_2 = b_{12}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 + \dots + b_{n2}\alpha_n,$$

$$\cdots \quad \cdots$$

$$c_s = b_{1s}\alpha_1 + b_{2s}\alpha_2 + \dots + b_{ns}\alpha_n,$$

$r(A) = r(a_1, a_2, \dots, a_n) \ge r(c_1, c_2, \cdots, c_s) = r(AB)$.

同理可得 $r(B) \ge r(AB)$.

设 A 是 m×n 矩阵，则

(2) rank(A+B) ≤ rank(A) + rank(B);

证法一 记 $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

不妨设 $a_1, a_2, \ldots, a_r$ 为 A 的列向量组的极大线性无关部分组,

而$b_1, b_2, \ldots, b_s$ 为B 的列向量组的极大线性无关部分组,

则A 可由 $a_1, a_2, \ldots, a_r$ 线性表出, B 可由 $b_1, b_2, \ldots, b_s$ 线性表出,

所以 $a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n$ 可由 $a_1, a_2, \ldots, a_r, b_1, b_2, \ldots, b_s$ 线性表示,

所以 rank(A+B) ≤ r+s = rank(A)+rank(B).

证法二

$$\because \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A+B & B \end{bmatrix} \quad \therefore r(A)+r(B) \overset{(1)}{=} r\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ A+B & B \end{bmatrix}\right)$$

可知 rank(A+B) ≤ rank(A)+rank(B).

设 **A** 是 **m×n** 矩阵, **B** 是 **s×t** 矩阵,则

(3) $$r\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\right) = r(A) + r(B);$$

证明 由高斯消元法 ***A*** 通过初等行变换可以化为阶梯形矩阵,

其非零行的行数为 **r(A)**, **B** 通过初等行变换化为阶梯形矩阵,

其非零行的行数为 **r(B)**, 则 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ 通过初等行变换可以化为

阶梯形矩阵, 其非零行的行数为 **r(A) + r(B)**, 故

$$r\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\right) = r(A) + r(B);$$

设 A 是 m×n 矩阵, B 是 s×t 矩阵,则

(4) $$\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}\right) \ge \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B);$$

证明 设 $\operatorname{rank}(A) = r1, \operatorname{rank}(B) = r2,$

$a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_{r1}}$ 是矩阵 $A = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$ 的列向量组的一个极大线性无关部分组

$b_{j_1}, b_{j_2}, \cdots, b_{j_{r2}}$ 是矩阵 $B = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_t]$ 的列向量组的一个极大线性无关部分组

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n & & & 0 & \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n & b_1 & b_2 & \cdots & b_t \end{bmatrix}$$

若 $$\lambda_1 \begin{bmatrix} a_{i_1} \\ c_{i_1} \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} a_{i_2} \\ c_{i_2} \end{bmatrix} + \cdots + \lambda_{r1} \begin{bmatrix} a_{i_{r1}} \\ c_{i_{r1}} \end{bmatrix} + \lambda_{r1+1} \begin{bmatrix} 0 \\ b_{j_1} \end{bmatrix} + \lambda_{r1+2} \begin{bmatrix} 0 \\ b_{j_2} \end{bmatrix} + \cdots + \lambda_{r1+r2} \begin{bmatrix} 0 \\ b_{j_{r2}} \end{bmatrix} = 0$$

则 $$\begin{bmatrix} \lambda_1 a_{i_1} + \lambda_2 a_{i_2} + \cdots + \lambda_{r1} a_{i_{r1}} \\ \lambda_1 a_{i_1} + \lambda_2 a_{i_2} + \cdots + \lambda_{r1} a_{i_{r1}} + \lambda_{r1+1} b_{j_1} + \lambda_{r1+2} b_{j_2} + \cdots + \lambda_{r1+r2} b_{j_{r2}} \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 a_{i_1} + \lambda_2 a_{i_2} + \cdots + \lambda_{r1} a_{i_{r1}} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{r1} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{r1+1} b_{j_1} + \lambda_{r1+2} b_{j_2} + \cdots + \lambda_{r1+r2} b_{j_{r2}} = 0 \Rightarrow \lambda_{r1+1} = \lambda_{r1+2} = \cdots = \lambda_{r1+r2} = 0$$

所以 $\mathit{rank}\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}\right) \ge r1 + r2 = \mathit{rank}(A) + \mathit{rank}(B)$。

设 A 是 m×n 矩阵, B 是 n×s 矩阵则

(5) 若 AB = 0, 则 r(A) + r(B) ≤ n.

证明 $$\begin{bmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -AB \\ I_n & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_n & B \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$$

初等变换不改变矩阵行秩和列秩，所以

$$r\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_n & 0 \end{bmatrix}\right) = n,$$

又由 $r\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}\right) \geq r(A) + r(B)$ 有 $r(A) + r(B) \leq r\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ I & B \end{bmatrix}\right) = n.$

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \cdots\cdots & 0 & * & \cdots & * \\ & & & & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \cdots\cdots & 0 & * & \cdots & * \\ & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * & \cdots\cdots & 0 & * & \cdots & * \\ & & & & & & & & & & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & & & 0 & * & \cdots & * \\ & & & & & & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * \\ & & & & & & & & & & & & & & & & \end{bmatrix}.$$

相抵标准形

命题 2.3.13 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, P,Q 分别是 m 阶和 n 阶可逆矩阵, 则 $\operatorname{rank}(PAQ)=\operatorname{rank}(A)$. 即，矩阵的秩在初等行变换和初等列变换下不变.

定义 2.3.14 (相抵) 如果矩阵 A 可以经过一系列初等行变换和初等列变换化成矩阵 B，则称 A 和 B **相抵**.

命题 2.3.15 给定两个 $m\times n$ 矩阵 A,B. 那么二者相抵，当且仅当存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q，使得 $PAQ=B$.

命题 2.3.16 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q，使得 $PAQ=D_r=\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$，其中 $r=\operatorname{rank}(A)$.

命题中的 D_r 称为矩阵 A 的**相抵标准形**.

推论 2.3.17 设 A,B 是 $m\times n$ 矩阵，则 A 和 B 相抵，当且仅当 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$.

例 1.3.10 求解

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0,\\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0,\\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0,\\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0, \end{cases}$$

这个方程组的常数项全是 0，因此不论何种初等行变换，对应的计算结果全为 0．所以我们可以只对系数矩阵 A 做初等行变换：

$$\begin{bmatrix}1&1&0&-3&-1\\1&-1&2&-1&0\\4&-2&6&3&-4\\2&4&-2&4&-7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&-3&-1\\0&-2&2&2&1\\0&-6&6&15&0\\0&2&-2&10&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&-3&-1\\0&-2&2&2&1\\0&0&0&9&-3\\0&0&0&12&-4\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&0&-3&-1\\0&-2&2&2&1\\0&0&0&9&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

化为阶梯形后，我们知道方程组有无穷多解．继续化为行简化阶梯形：

$$\cdots\to\begin{bmatrix}1&1&0&-3&-1\\0&1&-1&-1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&-2&-\frac{1}{2}\\0&1&-1&-1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&0&-\frac{7}{6}\\0&1&-1&0&-\frac{5}{6}\\0&0&0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

于是通解为

$$x_1=-x_3+\frac{7}{6}x_5,\quad x_2=x_3+\frac{5}{6}x_5,\quad x_4=\frac{1}{3}x_5,$$

其中 x_1,x_2,x_4 是主变量，x_3,x_5 是自由变量． ☺

存在问题　何时方程组有解?

个数问题　无解、唯一解、无穷多解

解法问题　高斯消元法求出通解

结构问题　解集合结构如何?

$$x=\begin{bmatrix}-x_3+\frac{7}{6}x_5\\ x_3+\frac{5}{6}x_5\\ x_3\\ \frac{1}{3}x_5\\ x_5\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix}7/6\\5/6\\0\\1/3\\1\end{bmatrix}$$

x_3,x_5是自由变量，

可取 $\begin{bmatrix}x_3\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$$k_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\quad k_2=\begin{bmatrix}7/6\\5/6\\0\\1/3\\1\end{bmatrix}$$

方程组的解的集合为

$$\{c_1k_1+c_2k_2\,|\,c_1,c_2\in R\}$$

例 1.3.10 求解

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0, \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0, \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0, \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$Ax=0$, $rank(A)=3$, 5个未知量，自由未知量的个数为$5-3=2$

一般地，设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$\mathrm{rank}(A)=r$,它的行简化阶梯形包括 r 个主变量，$n-r$ 个自由变量。对齐次方程组 $Ax=0$, 设 k_i 是第 i 个自由变量取 1，其余自由变量都取 0 时得到的解，由此得到 $n-r$ 个解 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$。

定理2.4.1 对 $m\times n$ 矩阵 A，上述 $n-r$ 个解 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 是零空间 $N(A)$ 的一组基，其中 $r=\mathrm{rank}(A)$. 进一步地，$\dim N(A)=n-\mathrm{rank}(A)$.

一般地，设 A 是 $m\times n$ 矩阵，秩为 r，它的行简化阶梯形包含 r 个主变量，$n-r$ 个自由变量. 对齐次方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，设 $\boldsymbol{k}_i$ 是第 i 个自由变量取 1，其余自由变量都取 0 时得到的解，由此得到 $n-r$ 个解 $\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_{n-r}$.

定理 2.4.1 对 $m\times n$ 矩阵 A，上述 $n-r$ 个解 $\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_{n-r}$ 是零空间 $\mathcal{N}(A)$ 的一组基，其中 $r=\operatorname{rank}(A)$. 进一步地，$\dim\mathcal{N}(A)=n-\operatorname{rank}(A)$.

证明：先证明 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 可以线性生成零空间 $N(A)$

设 $k\in N(A)$ 是 $Ax=0$ 的任意一个解，

它在 $n-r$ 个自由变量上的取值依次为 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$，

设 $k'=c_1k_1+c_2k_2+\cdots+c_{n-r}k_{n-r}-k$，则 $k'\in N(A)$，且 k' 在自由变量上的取值均为 0，

所以 $k'=0$，$k=c_1k_1+c_2k_2+\cdots+c_{n-r}k_{n-r}$，$\operatorname{span}(k_1,k_2,\cdots,k_{n-r})=N(A)$。

再证明 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 线性无关

设 $c_1k_1+c_2k_2+\cdots+c_{n-r}k_{n-r}=0$，

因为向量 $c_1k_1+c_2k_2+\cdots+c_{n-r}k_{n-r}$ 在自由变量的位置取值以此为 $c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$，

所以 $c_1=c_2=\cdots=c_{n-r}=0$，$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 线性无关。

通常，将 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 称为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系。

例 **求下列方程组的基础解系:** $\begin{cases} x_1+3x_2-5x_3-x_4+2x_5=0 \\ 2x_1+6x_2-8x_3+5x_4+3x_5=0 \\ x_1+3x_2-3x_3+6x_4+x_5=0 \end{cases}$

解 **用初等行变换化系数矩阵为阶梯形:** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -8 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} \underline{1} & 3 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \underline{2} & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

由于 n -r = 5-2 = 3, 所以有三个自由未知量: x_2, x_4 , x_5, 基础解系也由三个解向量组成. 把原方程组改写为: $\begin{cases} x_1-5x_3=-3x_2+x_4-2x_5 \\ 2x_3=-7x_4+x_5 \end{cases}$ **分别令** $(x_2,x_4,x_5)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

代入上述方程组解得:

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$为$\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$,$\begin{bmatrix} -33/2 \\ 7/2 \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$. **因此基础解系为:** $\eta_1=\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\eta_2=\begin{bmatrix} -33/2 \\ 0 \\ -7/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\eta_3=\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

通解为 $X=c_1\eta_1+c_2\eta_2+c_3\eta_3$, 其中 c_1,c_2,c_3 为任意数.

例. 设A是 $m\times n$ 矩阵，B是 $n\times s$ 矩阵，如果 $AB = 0$，证明 $\text{rank}(A)+\text{rank}(B) \le n$.

证　记$B=(b_1, b_2, \cdots, b_s)$ （b_i 为B的第i列）.

由$AB = 0$得 $Ab_i = 0$ $(i=1, \cdots, s)$.

所以，$b_1, b_2, \cdots, b_s$ 都是 $A_{m\times n}x = 0$ 的解，

又 $Ax = 0$ 只有 $n-\text{rank}(A)$ 个线性无关的解，

所以，$\text{rank}(B)=\text{rank}\{b_1, b_2, \cdots, b_s\} \le n-\text{rank}(A)$，

即 $\text{rank}(A)+\text{rank}(B) \le n$.

如果 k_0 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的一个解, 则

对任意 $Ax=b$ 的解 k, 满足 $A(k-k_0)=0$, 即 $k-k_0\in N(A)$

对任意 $k'\in N(A)$, k_0+k' 是方程组 $Ax=b$ 的解

所以，求解非齐次线性方程组 $Ax=b$,

先求出对应齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解，再找到任意一个 $Ax=b$ 的解(特解)

特解 + $Ax=0$ 的全部解 即为 $Ax=b$ 的全部解

$$\begin{aligned} f:\{\boldsymbol{x}\mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\}&\to\mathcal{N}(A),\\ \boldsymbol{k}&\mapsto\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0.\end{aligned}\tag{2.4.1}$$

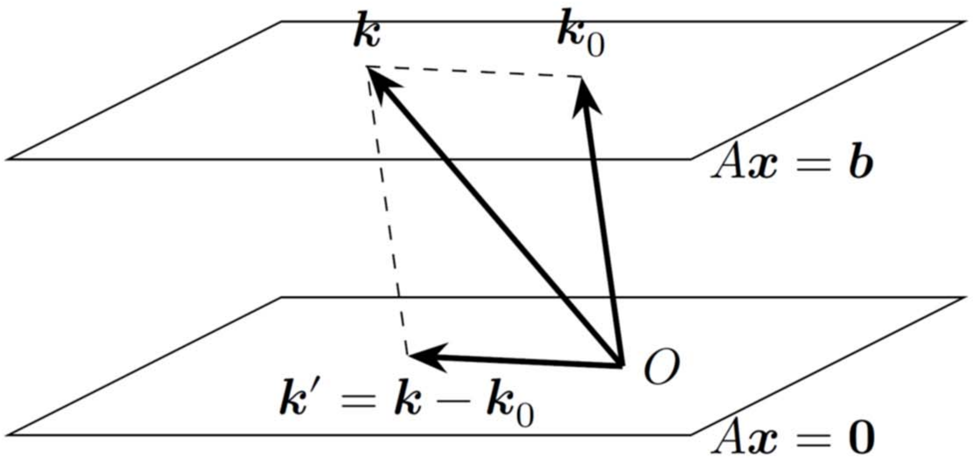

图 2.4.1: 非齐次线性方程组

定理 2.4.2 设线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解是 $\boldsymbol{k}_0$，其导出方程组的解空间 $\mathcal{N}(A)$ 的一组基是 $\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_{n-r}$，其中 $r=\operatorname{rank}(A)$，则 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解集就是

$$\{\boldsymbol{k}_0+c_1\boldsymbol{k}_1+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{k}_{n-r}\mid c_1,\cdots,c_{n-r}\in\mathbb{R}\}.$$

注意只要 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，这个解集就不是一个子空间.

定理 2.4.3 (判定定理) 对 n 个变量的线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，它的解有如下情形:

1. 它有解，当且仅当其系数矩阵与增广矩阵秩相等，即 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}A & \boldsymbol{b}\end{bmatrix}\right)$;
2. 它有唯一解，当且仅当 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}A & \boldsymbol{b}\end{bmatrix}\right)=n$;
3. 它有无穷多组解，当且仅当 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}A & \boldsymbol{b}\end{bmatrix}\right)<n$.

定理 1.3.8 (判定定理)

1. 如果 $\begin{bmatrix}A & \boldsymbol{b}\end{bmatrix}$ 对应的阶梯数比 A 对应的阶梯数多 1 (此时方程出现了矛盾)，则方程组无解;
2. 如果 $\begin{bmatrix}A & \boldsymbol{b}\end{bmatrix}$ 和 A 对应的阶梯数相等，则方程组有解. 其中，
   (a) 如果阶梯形的阶梯数和未知数个数相等，则方程组有唯一解;
   (b) 如果阶梯形的阶梯数小于未知数个数，则方程组有无穷多组解.

例 2.4.4 求解:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad + x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 \qquad + x_3 \qquad - x_5 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

对增广矩阵做初等行变换:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right].$$

主变量是 x_1, x_2, x_3，自由变量为 x_4, x_5. 把 $x_4 = x_5 = 0$ 代入，得到一个特解是 $\boldsymbol{k}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，而导出方程组的一组基为 $\boldsymbol{k}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{k}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. 因此原方程组的全部解为 $\boldsymbol{k}_0 + c_1\boldsymbol{k}_1 + c_2\boldsymbol{k}_2$，其中 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ☺

定理 2.4.5 设 A 是 $m \times n$ 矩阵，则

$$\dim \mathcal{R}(A) + \dim \mathcal{N}(A) = n, \quad \dim \mathcal{R}(A^{\mathrm{T}}) + \dim \mathcal{N}(A^{\mathrm{T}}) = m.$$

其中 $\mathbb{R}^m$ 的子空间 $\mathcal{N}(A^{\mathrm{T}})$, 称为矩阵 A 的**左零空间**, 得名于其中向量 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A = \mathbf{0}^{\mathrm{T}}$.

从方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的角度来观察定理 2.4.5 . 一方面，$\dim \mathcal{N}(A)$ 是自由变量的个数，$\mathrm{rank}(A) = \dim \mathcal{R}(A)$ 是主变量个数，而 A 的列数 n 则是变量的总个数. 显然 $\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{R}(A) = n$. 另一方面，$\mathrm{rank}(A^{\mathrm{T}}) = \dim \mathcal{R}(A^{\mathrm{T}})$ 是有效方程的个数，m 是总方程个数. 而 $\dim \mathcal{R}(A^{\mathrm{T}}) + \dim \mathcal{N}(A^{\mathrm{T}}) = m$，因此 $\dim \mathcal{N}(A^{\mathrm{T}})$ 是多余方程的个数.

练习 2.4.3 求下列矩阵零空间的一组基.

1. $\begin{bmatrix} I_n & I_n \end{bmatrix}$.
2. $\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ O & O \end{bmatrix}$.
3. $\begin{bmatrix} I_n & I_n & I_n \end{bmatrix}$.

练习 2.4.11 在平面直角坐标系下给定点 $A(a_1,a_2), B(b_1,b_2), C(c_1,c_2)$，证明，$A,B,C$ 三点不共线当且仅当矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix}$ 可逆.

练习 2.4.14 对任意 $\mathbb{R}^n$ 中线性无关的向量组 $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_t$，证明，存在满足如下条件的非齐次线性方程组:

1. $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_t$ 都是此方程组的解;
2. 该方程组的任意解都能被 $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_t$ 线性表示.

练习 2.4.19 对 n 阶方阵 A，求证:

1. $A^2 = A$ 当且仅当 $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(I_n - A) = n$.
   提示：考虑 A 和 $I - A$ 的相关的子空间有何关系？
2. $A^2 = I_n$ 当且仅当 $\operatorname{rank}(I_n + A) + \operatorname{rank}(I_n - A) = n$.
   提示：考虑 $I + A$ 和 $I - A$ 的相关的子空间有何关系？

练习 2.4.14 对任意 $\mathbb{R}^n$ 中线性无关的向量组 $\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_t$，证明，存在满足如下条件的非齐次线性方程组：

1. $\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_t$ 都是此方程组的解；
2. 该方程组的任意解都能被 $\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_t$ 线性表示.

证明：先证明 $x_1-x_0,x_2-x_0,\cdots,x_t-x_0$ 线性无关

令 $c_1(x_1-x_0)+c_2(x_2-x_0)+\cdots+c_t(x_t-x_0)=0, c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_tx_t+(-c_1-c_2-\cdots-c_t)x_0=0,$

因为 $x_1,x_2,\cdots,x_t,x_0$ 线性无关，所以 $c_1=c_2=\cdots=c_t=0$，所以 $x_1-x_0,x_2-x_0,\cdots,x_t-x_0$ 线性无关。

构造矩阵 $B=\begin{bmatrix}(x_1-x_0)^T\\(x_2-x_0)^T\\\vdots\\(x_t-x_0)^T\end{bmatrix}$，则 $\mathrm{rank}(B)=t$， $By=0$ 的解空间是 $n-t$ 维，

设 $y_1,y_2,\cdots,y_{n-t}$ 是 $By=0$ 的一个和基础解系，

令 $A=\begin{bmatrix}y_1{}^T\\y_2{}^T\\\vdots\\y_{n-t}{}^T\end{bmatrix}$，则 $A(x_k-x_0)=\begin{bmatrix}y_1{}^T(x_k-x_0)\\y_2{}^T(x_k-x_0)\\\vdots\\y_{n-t}{}^T(x_k-x_0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(x_k-x_0)^T y_1\\(x_k-x_0)^T y_2\\\vdots\\(x_k-x_0)^T y_{n-t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$， $1\le k\le t$

$x_1-x_0,x_2-x_0,\cdots,x_t-x_0$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，

x_0 是方程组 $Ax=Ax_0$ 的一个特解，所以 $Ax=Ax_0$ 即为一个满足条件(1)(2)的线性方程组。

作 业（10月20日）

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

练习2.4

1，2，4，5，6，8，13，21，22，23

10月25日提交

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~