Homework

王俊琪

April 6, 2022

2.1

2.1.4

(1)

注意到 $|x^s e^{-x}| \leq |x^b e^{-x}|$，而 $\int_1^{+\infty} x^b e^{-x} \,\mathrm{d}x$ 收敛，因此有

$$\int_1^{+\infty} x^s e^{-x} \,\mathrm{d}x$$

一致收敛
　补证 $\int_1^{+\infty} x^b e^{-x} \,\mathrm{d}x$ 收敛：

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 x^b e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{b+2}}{e^x} = 0$$

且 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x$ 也收敛。
　从而有 $\int_1^{+\infty} x^b e^{-x} \,\mathrm{d}x$ 收敛

(2)

注意到 $\cos yx \leq 1$ 则

$$|\frac{\cos yx}{1+x^2}| \leq \frac{1}{1+x^2}$$

而 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$ 收敛，因此有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos yx}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$$

一致收敛

(4)

注意到

$$|e^{-tx}\sin x| \le e^{-t_0 x}$$

且 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^{t_0 x}}$ 收敛

从而

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin x\,\mathrm{d}x$$

一致收敛

(10)

* 不认为原题是可做的，应该为 $\int_1^{+\infty}$

设 $t=x^2$，则原式为

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x^p}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{2t^{\frac{p}{2}+\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}t$$

又由于 $\int_1^A \sin t\,\mathrm{d}t \le 2$（$A$ 任意大）

且 $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t^{p+\frac{1}{2}}}=0$

由 *Dirichilet* 判别法，知

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x^p}\,\mathrm{d}x$$

一致收敛

2.1.5

先考虑 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin 3x}{x+t}\,\mathrm{d}x$

注意到对于任意充分大的 A，我们都有 $|\int_1^{+\infty}\sin 3x\,\mathrm{d}x| \le 2$

且 $\frac{1}{x+t}$ 关于变量 x 为单调函数，且 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+t}=0$ 关于 t 一致成立，则由 *Dirichlet* 判别法，

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin 3x}{x+t}\,\mathrm{d}x$ 一致收敛

同时，我们有 e^{-tx} 关于 x 单调，且关于 $t\in[0,+\infty]$ 一致有界为 0，则由 *Abel* 判别法，知

$\int_1^{+\infty}e^{-tx}\frac{\sin 3x}{x+t}\,\mathrm{d}x$ 一致收敛

2.1.8

由对称性，我们可以只考虑 $t\in[0,+\infty]$ 的情况，我们证明对于任意 $a>0$, 该积分在 $(a,+\infty)$ 上一致收敛，而在 $[0,a]$ 上不一致收敛。

对于任意的 $\epsilon>0$, 我们总存在 $A>a$，使得 $|\int_A^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x|<\epsilon$

（这是由于 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛）

因此有 $|\int_A^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}\,\mathrm{d}x| = |\int_{At}^{+\infty}\frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y|$

从而取 $B > \max(A, At)$，有 $|\int_B^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y| < \epsilon$

从而该积分在 $(a, +\infty)$ 上一致收敛。

我们再考虑在 $[0, a]$ 上的情况。

已知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$

而 $\int_u^{+\infty} \frac{\sin tx}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{ut}^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y$

当 $t \to 0$ 时，$\int_{ut}^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y \to \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}$

从而 t 充分小趋近于 0 的时候，可以有 $\int_u^{+\infty} \frac{\sin tx}{x}\,\mathrm{d}x > 1$，从而在 $[0, a]$ 上不一致收敛。

2.2

2.2.5

(1)

设 $x = \cos z$

则

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2y^2}\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos^2 z\ y^2}\,\mathrm{d}z$$

设 $u = \tan z$，则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{u^2+1}$

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos^2 z\ y^2}\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\ y^2} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \mathrm{d}y \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}$$
$$= \frac{\pi}{2} \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})$$

2.3

2.3.1

(2)

$$\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin(yx)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2a}e^{-ax^2}\sin(xy)\Big|_{x=0}^{x=+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{y}{2a}e^{-ax^2}\cos(xy)\,\mathrm{d}x$$

设 $F = \int_0^{+\infty} \frac{y}{2a}e^{-ax^2}\cos(xy)\,\mathrm{d}x, F' = \frac{y}{2a}F$

解得 $F = Ce^{\frac{y^2}{4a}}$

又因为 $F(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

$F = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{y^2}{4a}}$

原积分为 $F' = \frac{y}{2a}F = \frac{y}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{y^2}{4a}}$

2.3.2

(1)

我们显然有对于任意的 n,$\int_o^{+\infty} e^{-tx^2} x^{2n}\,\mathrm{d}x$ 均一致收敛

从而设 $F = \int_o^{+\infty} e^{-tx^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}$,

$$F^{(1)} = -\int_o^{+\infty} e^{-tx^2} x^2\,\mathrm{d}x$$

$$\cdots$$

$$F^{(n)} = (-1)^n \int_o^{+\infty} e^{-tx^2} x^{2n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\ldots(-\frac{2n-1}{2})t^{-\frac{2n+1}{2}} = (-1)^n\sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}t^{-\frac{2n+1}{2}}$$

从而

$$\int_o^{+\infty} e^{-tx^2} x^{2n}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}t^{-\frac{2n+1}{2}}$$