第八次习题课参考解答

习题 1 (练习 2.4.24). 给定 n 阶方阵 A.

1. 对任意 k, 证明 $\mathscr{R}(A^k) \geqslant \mathscr{R}(A^{k+1})$;
2. 假设 $\mathscr{R}(A^k) = \mathscr{R}(A^{k+1})$, 求证 $\mathscr{R}(A^{k+1}) = \mathscr{R}(A^{k+2})$;
3. 求证: 存在 $k \leqslant n$, 满足 $\operatorname{rank}(A^k) = \operatorname{rank}(A^{k+1}) = \cdots$. 由此证明, 如果存在 p 使得 $A^p = O$, 则 $A^n = O$.

参考解答

证明.

1. 对任意 $y \in \mathscr{R}(A^{k+1})$, 能找到 x, 使得 $y = A^{k+1}x = A^k(Ax)$, 从而 $y \in \mathscr{R}(A^k)$, 即 $\mathscr{R}(A^k) \supseteq \mathscr{R}(A^{k+1})$.

2. 对任意 $y \in \mathscr{R}(A^{k+1})$, 能找到 x, 使得 $y = A^{k+1}x = A(A^k x)$. 由 $\mathscr{R}(A^k) = \mathscr{R}(A^{k+1})$, 则可以找到 z, 满足 $A^k x = A^{k+1}z$. 则 $y = A(A^{k+1}z) = A^{k+2}z \in \mathscr{R}(A^{k+2})$, 即 $\mathscr{R}(A^{k+1}) \subseteq \mathscr{R}(A^{k+2})$. 由 1 知 $\mathscr{R}(A^{k+1}) \supseteq \mathscr{R}(A^{k+2})$, 从而 $\mathscr{R}(A^{k+1}) = \mathscr{R}(A^{k+2})$.

3. 若 A 可逆, 则有 $n = \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^2) = \cdots$. 此时 $k = 1$.

若 A 不可逆. 由 1 知 $\operatorname{rank}(A^k) \geqslant \operatorname{rank}(A^{k+1})$. 若对某个 k 有 $\operatorname{rank}(A^k) = \operatorname{rank}(A^{k+1})$, 由 2 可知 $\operatorname{rank}(A^k) = \operatorname{rank}(A^{k+1}) = \operatorname{rank}(A^{k+2}) = \cdots$. 否则, 设对所有 k 都有 $\operatorname{rank}(A^k) > \operatorname{rank}(A^{k+1})$, 必存在一个最小正整数 p, 使得 $\operatorname{rank}(A^p) = \operatorname{rank}(A^{p+1}) = \cdots = 0$. 由 $n > \operatorname{rank}(A) > \cdots > \operatorname{rank}(A^p) = 0$ 知 $p \leqslant n$.

□

■ 关于期中考试某道题目的证明 (若二阶方阵 $A^{2021} = 0$, 则 $A^2 = 0$), 除使用本题上述方法外, 还可以注意到在讨论秩为 1 的矩阵时, 可以令 $A = uv^T$, 从而 $A^2 = uv^T uv^T = (v^T u)uv^T$, 然后进行相应推导.

习题 2 (练习 5.2.7). 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1,2,3, 求下列矩阵的特征值.

1. $2A, A+I_3, A^2, \overline{A}, A^T, A^{-1}$($A$ 为何可逆)?. 2. $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & A \\ 0 & A \end{bmatrix}$.

参考解答

1. 注意利用 $Ax = \lambda x$. 以及转置不改变 A 的特征多项式.

$2A: 2,4,6 \quad A+I_3: 2,3,4 \quad A^2: 1,4,9 \quad \overline{A}: 1,2,3 \quad A^T: 1,2,3 \quad A^{-1}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

2. 设可以用 P 将 A 相似到对角阵. 用 $\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}$ 相似容易看出这两个矩阵的特征值均为 1,1,2,2,3,3.

习题 3 (练习 5.2.22). 求矩阵 A 的稳态矩阵 A^∞. 比较它们的特征值和特征向量, 并说明为何 A^{2021} 近似于 A^∞. 如果 A^n 和 A^∞ 中对应的元素相差不超过 0.01, n 至少是多少? A 的两行互相交换, 特征值是否不变?

1. $A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}$. 2. $A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0.4 & 0.9 \end{bmatrix}$.

参考解答

1. A 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.4$, 对应的特征向量 $x_1 = [1,2]^T, x_2 = [1,-1]^T$.

A^∞ 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$, 对应的特征向量与 A 相同.

A^{2021} 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=0.4^{2021}\approx 0$, 所以 A^{2021} 近似于 A^∞: 相同特征向量和相近特征值.

$A^n=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot 0.4^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot 0.4^n\\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot 0.4^n & \frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot 0.4^n\end{bmatrix}$. 则 $\dfrac{2}{3}\cdot 0.4^n<0.01$, 取对数得 $n>\log(0.015)/\log(0.4)\approx 4.58$, n 至少为 5.

交换后特征值由 1,0.4 变为 $1,-0.4$.

2. A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=0.5$, 对应的特征向量 $x_1=[1,4]^T,x_2=[1,-1]^T$.

A^∞ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=0$, 对应的特征向量与 A 相同.

$A^n=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\cdot 0.5^n & \frac{1}{5}-\frac{1}{5}\cdot 0.5^n\\ \frac{4}{5}-\frac{4}{5}\cdot 0.5^n & \frac{4}{5}+\frac{4}{5}\cdot 0.5^n\end{bmatrix}$. 则 $\dfrac{4}{5}\cdot 0.5^n<0.01$, 取对数得 $n>\log(0.0125)/\log(0.5)\approx 6.32$, n 至少为 7.

交换后特征值由 1,0.5 变为 $1,-0.5$.

■ 二阶矩阵快速求逆 (如果可逆): $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$.

习题 4 (练习 5.2.13). 对方阵 A, 若多项式 $f(x)$ 满足 $f(A)=O$, 则称 $f(x)$ 是 A 的化零多项式. 给定 A 的特征值 λ, 证明, 若 $f(x)$ 是 A 的化零多项式, 则 $f(\lambda)=0$.

参考解答

考虑 λ 的特征向量 x, 有 $0=f(A)x=f(\lambda)x$. $\quad(A^nx=\lambda^nx)$

习题 5 (练习 5.2.18). 设 A,B 分别是 $m\times n,n\times m$ 阶矩阵, 证明,

$$\lambda^n\det(\lambda I_m-AB)=\lambda^m\det(\lambda I_n-BA)$$

特别地, 当 $m=n$ 时, $\det(\lambda I_m-AB)=\det(\lambda I_n-BA)$.

参考解答

$$\begin{bmatrix}I_n & \\ \frac{1}{\lambda}A & I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda I_n & \\ & \lambda I_m-AB\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n & B\\ & I_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda I_n & B\\ A & \lambda I_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_n & B\\ & I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda I_n-BA & \\ & \lambda I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n & \\ \frac{1}{\lambda}A & I_m\end{bmatrix}.$$

习题 6 (练习 5.3.9). 利用特征值计算下列 n 阶矩阵的行列式.

1. $\begin{vmatrix}a & b & \cdots & b\\ b & a & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & b\\ b & \cdots & b & a\end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix}1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1}b_n\\ a_nb_1 & \cdots & a_nb_{n-1} & 1+a_nb_n\end{vmatrix}$.

参考解答

1. 注意 $\begin{bmatrix}a & b & \cdots & b\\ b & a & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & b\\ b & \cdots & b & a\end{bmatrix}=(a-b)I_n+\begin{bmatrix}b & b & \cdots & b\\ b & b & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & b\\ b & \cdots & b & b\end{bmatrix}$, 而秩 1 矩阵 $\begin{bmatrix}b & b & \cdots & b\\ b & b & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & b\\ b & \cdots & b & b\end{bmatrix}$ 的特征值为 nb 和 0 ($n-1$ 重). (为什么? 见下方说明.) 故原矩阵的特征值为 $a+(n-1)b$ 和 $a-b$ ($n-1$ 重), 从而其行列式为 $(a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$.

■ 因为它不满秩, 不可逆, 行列式为 0, 有特征值为 0, 由于秩 1, 零空间 $n-1$ 维, 特征值 0 的几何重数为 $n-1$, 而代数重数大于等于几何重数, 又特征值之和即矩阵的迹为 nb 非零, 所以 0 的代数重数恰为 $n-1$, 另一个特征值为 nb .

2. 注意 $\begin{bmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1}b_n \\ a_nb_1 & \cdots & a_nb_{n-1} & 1+a_nb_n \end{bmatrix} = I_n + \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$, 而秩 1 矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$ 有特征值 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i$ 和 $0(n-1$ 重), 故原矩阵的特征值为 $1+\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$ 和 1 ($n-1$ 重), 从而其行列式为 $1+\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i$.

此外, 还可套用习题 5 公式. (使用前一定要先证明!)

习题 7. 设 A,B 分别为 $m\times n$ 阶和 $n\times m$ 阶矩阵. 证明若 $\lambda\neq 0$ 是 AB 的特征值, 则 λ 也是 BA 的特征值. 举例说明 $\lambda=0$ 时, 结论不一定对.

参考解答

$ABx=\lambda x \Rightarrow BABx=\lambda Bx$ (注意说明 Bx 非零). 反例: $A=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

习题 8 (练习 5.2.21). 设方阵 A 的每个元素都是整数, 证明 $\dfrac{1}{2}$ 一定不是 A 的特征值.

参考解答

A 的特征多项式 P_A 是首 1 整系数多项式, $\dfrac{1}{2}$ 不是 P_A 的根. (两边同乘 2^{n-1})

习题 9. 设 A 是 n 阶实方阵, 且任意非零向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 均为其特征向量, 证明 $A=\lambda I_n$.

参考解答

分别取 $\boldsymbol{x}$ 等于 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$, 可得 A 是对角阵.

取 $\boldsymbol{x}$ 等于 $\begin{bmatrix}1,1,\cdots,1\end{bmatrix}^T$, 可知 A 的所有对角元素都相等.

习题 10. 已知一个三阶方阵的特征值为 0, 1, 2. 那么下列哪些项就可以确定?

1. $\mathrm{rank}(B)$ 2. $\det(B^TB)$ 3. B^TB 的特征值 4. $(B^2+I)^{-1}$ 的特征值

参考解答

1. $\mathrm{rank}(B)=2$ (法 1: 考察特征值 0 的代数重数, 几何重数, 零空间的维度. 法 2: 三个不同特征值对应三个线性无关特征向量, 可对角化, 对角化不改变秩.)

2. $\det(B^TB)=\det(B^T)*\det(B)=0$ 4. $(B^2+I)^{-1}$ 的特征值为 $1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{5}$

3. B^TB 的特征值不能确定. (反例 $B=\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$ 和 $B=\begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$, 特征值分别为 0,1,4 和 0,1,5)