线性代数 第27讲

12月13日

第七章第2讲 基和维数

上一讲要点回顾

线性相关和线性无关

基与维数

维数公式

定义 7.1.2 (线性空间) 给定非空集合 $\mathcal{V}$ 和数域 $\mathbb{F}$，如果 $\mathcal{V}$ 上定义了**加法**运算 $+: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$，$\mathcal{V}$ 的元素和 $\mathbb{F}$ 中的数定义了**数乘**运算 $\cdot: \mathbb{F} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$，且这两种运算满足如下八条运算法则：

1. 加法结合律：对任意 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathcal{V}$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

2. 加法交换律：对任意 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathcal{V}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

3. 零元素：存在元素 $\mathbf{0} \in \mathcal{V}$，对任意 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}$，$\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$，其中 $\mathbf{0}$ 称为**零元素**；

4. 负元素：对任意 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}$，存在 $\boldsymbol{b} \in \mathcal{V}$，满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$，称它为 $\boldsymbol{a}$ 的**负元素**，记为 $-\boldsymbol{a}$；

5. 单位数：对任意 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}$，$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；

6. 数乘结合律：对任意 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}, k, l \in \mathbb{F}$，$(kl)\boldsymbol{a}=k(l\boldsymbol{a})$；

7. 数乘对数的分配律：对任意 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}, k, l \in \mathbb{F}$，$(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$；

8. 数乘对向量的分配律：对任意 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathcal{V}, k \in \mathbb{F}$，$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$；

则称 $\mathcal{V}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的**向量空间**或**线性空间**，其中的元素可以称为**向量**，零元素和负元素可以称为零向量和负向量.

减法可以自然地定义：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

定义 7.1.1 (数域) 给定 $\mathbb{C}$ 的子集 $\mathbb{F}$，如果 $\mathbb{F}$ 中至少包含一个非零复数，且 $\mathbb{F}$ 对复数的加减乘除四则运算封闭，即对任意 $a,b\in\mathbb{F}$，都有 $a+b,a-b,ab\in\mathbb{F}$，且当 $b\neq 0$ 时 $\frac{a}{b}\in\mathbb{F}$，则称 $\mathbb{F}$ 是一个**数域**.

可以验证，$\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ 都是数域，而 $\mathbb{N},\mathbb{Z}$ 不是数域. 数域 $\mathbb{F}$ 上的线性方程组的解（如果存在）也在数域 $\mathbb{F}$ 上.

设 F 是一个数集. 如果 F 满足

(1) $1,0\in F$;

(2) F对于加法、减法、乘法、除法（除数不为零）运算封闭;则称F为一个数域.

我们熟悉的Q(有理数),R(实数),C(复数)都是数域.Q是最小数域. $F=\left\{a+b\sqrt{2}\,\middle|\,a,b\in Q\right\}$

练习 7.1.1 在所有正实数构成的集合 $\mathbb{R}^+$ 上，定义加法和数乘运算:

$$a\oplus b:=ab,\quad k\odot a:=a^k,\quad \forall a,b\in\mathbb{R}^+,k\in\mathbb{R}.$$

判断 $\mathbb{R}^+$ 对这两个运算是否构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

例 7.1.5 1. 坐标向量空间及其子集：

(a) m 维向量的全体 $\mathbb{F}^m$，加法和数乘运算由定义 1.1.4 给出.

(b) $\mathbb{F}$ 中数组成的矩阵诱导的坐标向量空间的子集，如列空间 $\mathcal{R}(A)$、零空间 $\mathcal{N}(A)$.

2. 矩阵空间及其子集：

(a) $m \times n$ 矩阵的全体，记为 $\mathbb{F}^{m \times n}$，加法和数乘运算由定义 1.4.3 给出.

(b) 矩阵空间的子集：n 阶上（下）三角矩阵的全体；n 阶对角矩阵的全体；n 阶 (反) 对称矩阵的全体.

3. 函数空间及其子集：

(a) 定义域为 D 的实值函数 $f\colon D \to \mathbb{R}$ 的全体构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，其中加法是函数的加法，数乘是常数和函数的乘法，称为函数空间.

(b) 定义域相同的实值连续函数的全体也构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，称为连续函数空间，记为 $C(D)$.

(c) 定义域相同的实值无穷次可导函数的全体也构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，称为光滑函数空间，记为 $C^\infty(D)$.

(d) 实系数多项式的全体也构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，称为多项式空间，记为 $\mathbb{R}[x]$.

(e) 次数小于 n 的实系数多项式的全体添上零多项式也构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，记为 $\mathbb{R}[x]_n$.

(f) 类似地，系数取自 $\mathbb{F}$ 的多项式，其全体构成的线性空间记为 $\mathbb{F}[x]$，同样可有 $\mathbb{F}[x]_n$. ☺

子空间的交与子空间的和

定义 7.1.6 (子空间) 给定数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $\mathcal{V}$ 及其非空子集 $\mathcal{M}$. 如果 $\mathcal{M}$ 关于 $\mathcal{V}$ 上的加法和数乘也构成线性空间，则称 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{V}$ 的**子空间**.

命题 7.1.7 线性空间 $\mathcal{V}$ 的非空子集 $\mathcal{M}$ 是一个子空间，当且仅当它对加法和数乘封闭.

证. "$\Rightarrow$": 显然. "$\Leftarrow$": 八条运算法则中只需验证零向量和负向量的存在性. 由于 $\mathcal{M}$ 非空，则存在 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{M}$. 根据数乘的封闭性，$\mathbf{0} = 0\boldsymbol{a} \in \mathcal{M}, -\boldsymbol{a} = (-1)\boldsymbol{a} \in \mathcal{M}$. □

定义 7.1.10 (子空间的交) 给定线性空间 $\mathcal{V}$ 的两个子空间 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$，集合 $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ 是 $\mathcal{V}$ 的子空间，称为子空间 $\mathcal{M}_1$ 与 $\mathcal{M}_2$ 的**交**.

定义 7.1.11 (子空间的和) 给定线性空间 $\mathcal{V}$ 的两个子空间 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$，集合

$$\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 := \{\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n} \mid \boldsymbol{m} \in \mathcal{M}_1, \boldsymbol{n} \in \mathcal{M}_2\}$$

是 $\mathcal{V}$ 的子空间，称为子空间 $\mathcal{M}_1$ 与 $\mathcal{M}_2$ 的**和**.

练习 7.1.2 令 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，$\mathbb{Q}[\omega] = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

1. 证明 $\mathbb{Q}[\omega]$ 关于数的加法和数乘构成 $\mathbb{Q}$ 上的一个线性空间.
2. 证明子集 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathcal{M} = \{b\omega \mid b \in \mathbb{Q}\}$ 都是 $\mathbb{Q}[\omega]$ 的子空间. 并求二者的交与和.
3. 判断 $\mathbb{Q}[\omega]$ 是否是数域.

练习 7.1.13 考虑函数空间 $C(\mathbb{R})$ 的如下子集:

$$\mathcal{V} = \{f \mid f'' + 3f' + 2f = 0\}, \quad \mathcal{M} = \{f \mid f' + 2f = 0\}, \quad \mathcal{N} = \{f \mid f' + f = 0\}.$$

1. 证明 $\mathcal{V}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ 都是 $C(\mathbb{R})$ 的子空间，且 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ 是 $\mathcal{V}$ 的子空间.
2. 描述 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ 中的所有元素，并证明 $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{\mathbf{0}\}$.
3. 对任意 $f \in \mathcal{V}$，证明 $f' + f \in \mathcal{M}, f' + 2f \in \mathcal{N}$.
4. 证明 $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N} = \mathcal{V}$.
5. 设 $f \in \mathcal{V}$，且满足 $f(0) = 1, f'(0) = 2$，求 f.

子空间的直和

定义 7.1.15 (子空间的直和) 给定线性空间 $\mathcal{V}$ 的两个子空间 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$. 如果 $\mathcal{M}$ 的任意向量 $\boldsymbol{m}$ 的分解式

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2, \quad \boldsymbol{m}_1 \in \mathcal{M}_1, \boldsymbol{m}_2 \in \mathcal{M}_2,$$

唯一，则称 $\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{M}_1$ 与 $\mathcal{M}_2$ 的**直和**，也称 $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ 是直和，记作 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$.

定理7.1.16 对线性空间 V 的两个子空间 M_1，M_2，以下叙述等价：

1. $M_1 + M_2$ 是直和；
2. 零向量有唯一的分解式，即 $\mathbf{0} = \boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2$，$\boldsymbol{m}_1 \in M_1$，$\boldsymbol{m}_2 \in M_2$，推出 $\boldsymbol{m}_1 = \boldsymbol{m}_2 = \mathbf{0}$；
3. $M_1 \cap M_2 = \{\mathbf{0}\}$.

定义 7.2.1（线性组合、生成、线性无关）

给定数域 F 上的线性空间 V 内的向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 和数 $k_1, \cdots, k_n \in$ F，称向量 $k_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{a}_n$ 是向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的一个线性组合.

若向量 $\boldsymbol{b}$ 和向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的一个线性组合相等，则称 $\boldsymbol{b}$ 可以被向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性表示.

若向量组 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ 中的每一个向量都可以被向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性表示，则称向量组 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ 可以被向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性表示.

向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的线性组合的全体构成 V 的一个子空间，称为该向量组生成的子空间，记作 $\mathrm{span}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$.

如果存在 F 内的 n 个不全为 0 的数 $k_1, \cdots, k_n$，使得 $k_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$，则称向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关.

如果由 $k_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$ 必定推出 $k_1 = \cdots = k_n = 0$，则称向量组 $\boldsymbol{a}1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关.

在坐标向量空间 F_n 中，向量组的线性关系能够通过线性方程组判断. 对一般的线性空间，则只能根据其上的线性运算具体分析.

在坐标向量空间 F_n 中，向量组的线性关系能够通过线性方程组判断.

对一般的线性空间，则需要根据其上的线性运算具体分析.

例7.2.2 实数集 R 作为 R 上的线性空间，其中的向量组 1，π 线性相关，因为 $(\pi)\cdot 1+(-1)\cdot\pi=0$.

实数集 R 作为 Q 上的线性空间，其中的向量组 1，π 线性无关，因为 π 是无理数，对任意不全为零的有理数 k_1，k_2，$k_1\cdot 1+k_2\cdot\pi\neq 0$.

例 7.2.3 连续函数空间 $C(\mathbb{R})$ 中的向量组 $\sin x, \sin 2x, \sin 3x$ 线性无关.

考察方程 $k_1\sin x+k_2\sin 2x+k_3\sin 3x=0$. 注意等式右端是零函数，即函数空间中的零向量. 两函数相等是指函数值处处相等. 选择三个值 $\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}$ 代入，有

$$\begin{cases} k_1 - k_3 = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}k_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}k_2 = 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{2}k_1 + k_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}k_3 = 0. \end{cases}$$

这一方程组只有零解 $k_1=k_2=k_3=0$，因此向量组线性无关. ☺

例 7.2.4 给定相异实数 λ_1, λ_2，光滑函数空间 $C^\infty(\mathbb{R})$ 中的向量组 $\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ 线性无关.

考察方程 $k_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + k_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x} = 0$. 可以采用与例 7.2.3 相同的方法得到结论. 下面给出另一种方法.

由于函数等式成立, 故对其两端求导数等式也成立. 两端对 x 求导数, 得 $k_1\lambda_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + k_2\lambda_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x} = 0$. 由此得到关于函数的矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \lambda_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

系数矩阵的行列式是

$$\begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} & \lambda_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2)x}(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0.$$

对任意实数 x，系数矩阵都可逆，因此方程组只有零解 $k_1 = k_2 = 0$.

利用同一方法能够证明，对任意相异实数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 向量组 $e^{\lambda_1}, \cdots, e^{\lambda_n}$ 线性无关 .

极大线性无关部分组

定义 7.2.5 (极大线性无关部分组) 给定线性空间 $\mathcal{V}$ 中的向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$，如果其部分组 $\boldsymbol{a}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ 满足：

1. $\boldsymbol{a}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ 线性无关；
2. $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 可以被 $\boldsymbol{a}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ 线性表示；

则称 $\boldsymbol{a}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ 是 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 的一个**极大线性无关部分组**.

极大线性无关部分组仍然可以利用筛选法构造得到，从而证明其存在性.
关键仍然是如下线性表示与线性无关之间的关系.

命题 7.2.6 如果向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 线性无关，则对任意向量 $\boldsymbol{b}$，有

1. 向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{b}$ 线性相关当且仅当 $\boldsymbol{b}$ 可以被向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 线性表示；
2. $\boldsymbol{b}$ 不能被向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 线性表示当且仅当 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{b}$ 线性无关.

向量组的秩，线性空间的基和维数

命题 7.2.8 如果向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 和 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_t$ 可以互相线性表示，且两个向量组分别线性无关，则 $s = t$.

如果两个向量组可以互相线性表示，则称二者**线性等价**. 一个向量组的任意两个极大线性无关部分组线性等价. 因此，二者中的向量个数相同.

定义 7.2.9 (秩) 一个向量组 S 的任意一个极大线性无关部分组中向量的个数称为这个向量组的**秩**，记为 $\mathrm{rank}(S)$. 一个只包含零向量的向量组的秩定义为零.

定义 7.2.10 (基、维数) 给定数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $\mathcal{V}$. 如果 $\mathcal{V}$ 中存在一个线性无关的向量组，$\mathcal{V}$ 中的任意向量都可以被它线性表示，则称该向量组为 $\mathcal{V}$ 的一组**基**.

如果 $\mathcal{V}$ 中存在 n 个向量组成的一组基，则称 $\mathcal{V}$ 为 n **维线性空间**，又称 $\mathcal{V}$ 的**维数**是 n，记为 $\dim \mathcal{V} = n$.

如果 V 中存在任意多个线性无关的向量，则称其为无限维线性空间；反之，则称为有限维线性空间. 单由零向量组成的线性空间 $\{\mathbf{0}\}$，其维数定义为0.

例 7.1.4 1. 只有一个零元素的集合构成数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，记为 $\{\mathbf{0}\}$.

2. 数域的扩张：实数集 $\mathbb{R}$ 是有理数集 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间，加法和数乘运算就是实数的运算. 注意，这与 $\mathbb{R}$ 作为 $\mathbb{R}$ 上的线性空间不同.

3. 几何空间：考虑三维几何空间中的所有向量（即有向线段），在向量的加法和数乘下构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 注意，未设定坐标系前，该线性空间与 $\mathbb{R}^3$ **并不相同**. ☺

例7.2.11 回顾例7.1.4 .

三维几何空间中，任意不共面的三个向量都是一组基，因此几何空间的维数是3.

复数集 C 作为 R 上的线性空间，1，i 是一组基，维数是 2.

复数集 C 作为 C 上的线性空间，任意非零复数是一组基，维数是 1.

实数集 R 作为 Q 上的线性空间，由对任意 n，向量组 1，π，⋯，π^n 在 Q 上线性无关.

这一事实可知，R 是 Q 上的无限维线性空间.

例7.2.12 矩阵空间 $\mathrm{F}^{m\times n}$ 中，对任意的 $1 \leqslant i \leqslant m$，$1 \leqslant j \leqslant n$，

设 E_{ij} 是(i, j) 元为1，其余元素都是 0 的矩阵.

根据定义直接验证，这 mn 个向量 E_{ij}，$1 \leqslant i \leqslant m$，$1 \leqslant j \leqslant n$是 $\mathrm{F}^{m\times n}$ 的一组基.

因此，$\dim \mathrm{F}^{m\times n} = mn$.

例 7.2.13 线性空间 $\mathbb{R}[x]_n$ 中，$1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 线性无关. 该命题有多种证法.

证一. 设一组数 $k_0, k_1, \cdots, k_{n-1}$ 使得 $k_0 + k_1x + \cdots + k_{n-1}x^{n-1} = 0$. 注意等式右端是零多项式. 选择 n 个两两不同的数 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 代入，可以得到齐次线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ \vdots \\ k_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

系数矩阵是 Vandermonde 矩阵，由于 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 两两不同，系数矩阵可逆，方程组只有零解. 故 $1, x, \cdots, x^{n-1}$ 线性无关. ☺

证二. 注意等式右端是零多项式. 故对其两端求导数等式也成立，
即 $k_1 + 2k_2x + \cdots + (n-1)k_{n-1}x^{n-2} = 0$.
类似地求 2次至 $n-1$ 次导数，我们可得齐次线性方程组.
显然方程组只有零解. 故 1，x，$\cdots$，x^{n-1} 线性无关.

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 0 & 1 & 2x & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \frac{(n-1)!}{2}x^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & (n-1)!x \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (n-1)! \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

证三. 利用数学归纳法. $n = 1$ 时，显然线性无关. 现假设 $1, x, \cdots, x^{n-2}$ 线性无关. 若 $1, x, \cdots, x^{n-2}, x^{n-1}$ 线性相关，则 x^{n-1} 可以被 $1, x, \cdots, x^{n-2}$ 线性表示. 这意味着存在 $k_0, k_1, \cdots, k_{n-2}$ 使得 $x^{n-1} = k_0 + k_1x + \cdots + k_{n-2}x^{n-2}$. 将其看作一元 $n-1$ 次方程，则它至多有 $n-1$ 个不同的根. 选择这些根之外的数 λ，则 $\lambda^{n-1} \neq k_0 + k_1\lambda + \cdots + k_{n-2}\lambda^{n-2}$. 矛盾. 故 $1, x, \cdots, x^{n-1}$ 也线性无关. 综上所述，对任意 n，结论都成立. ☺

向量组 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 显然可以线性生成 $\mathbb{R}[x]_n$，因此它是一组基，$\dim \mathbb{R}[x]_n = n$. 由于对任意 n，$1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 线性无关，多项式空间 $\mathbb{R}[x]$ 是无限维线性空间. 而其中由 $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$ 线性生成的子空间正是 $\mathbb{R}[x]_n$.

命题 7.2.14 对 n 维线性空间 $\mathcal{V}$，给定其中含有 n 个向量的向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$.

1. 如果 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性无关，则 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是 $\mathcal{V}$ 的一组基；
2. 如果 $\mathcal{V}=\operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$，则 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是 $\mathcal{V}$ 的一组基.

事实上，$\dim\mathcal{V}=n$；$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性无关；$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性生成 $\mathcal{V}$：这三个条件中的任意两个都可以推出另外一个，因此都可以作为基的判定条件.

命题 7.2.15 有限维线性空间 $\mathcal{V}$ 中任意 r 个线性无关的向量 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 都可以扩充成 $\mathcal{V}$ 的一组基.

证. 设 $\dim\mathcal{V}=n$. 显然 $r\leqslant n$，不然与维数定义矛盾. 若 $r=n$，则该向量组已经是一组基. 下面关注 $r<n$ 的情形. 此时该向量组不是一组基，则 $\operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r)\neq\mathcal{V}$，故存在 $\boldsymbol{a}_{r+1}\in\mathcal{V}$，且 $\boldsymbol{a}_{r+1}\notin\operatorname{span}\{\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r\}$. 此时 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{a}_{r+1}$ 线性无关，因为若线性相关，则根据命题 7.2.6 ，$\boldsymbol{a}_{r+1}$ 能被 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性表示，即 $\boldsymbol{a}_{r+1}\in\operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r)$，矛盾.

现在已有 $r+1$ 个线性无关的向量. 重复上述步骤 $n-r$ 次，得到 n 个线性无关的向量 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$. 因为 $\dim\mathcal{V}=n$，由命题 7.2.14 可知，该向量组是 $\mathcal{V}$ 的一组基. □

推论 7.2.16 给定有限维线性空间 $\mathcal{V}$ 的子空间 $\mathcal{M}$，则 $\mathcal{M}$ 的任意一组基都可以扩充成 $\mathcal{V}$ 的一组基. 因此 $\dim\mathcal{M}\leqslant\dim\mathcal{V}$.

子空间的运算与维数之间的关系

给定有限维线性空间 V 的两个子空间 M_1，M_2，根据基扩张“从小到大” 的原则，先取 $M_1 \cap M_2$ 的一组基

R ： $\boldsymbol{a}_1$，⋯，$\boldsymbol{a}_r$，将其分别扩充成 M_1 和 M_2 的一组基 S 和 T：

S ： $\boldsymbol{a}_1$，⋯，$\boldsymbol{a}_r$，$\boldsymbol{b}_1$，⋯，$\boldsymbol{b}_s$，

T ： $\boldsymbol{a}_1$，⋯，$\boldsymbol{a}_r$，$\boldsymbol{c}_1$，⋯，$\boldsymbol{c}_t$.

此时，$R = S \cap T$. 那么 $S \cup T$ 是什么，是 $M_1 + M_2$ 的一组基吗？

定理 7.2.17 结合如上记号，向量组 $S \cup T : \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_s, \boldsymbol{c}_1, \cdots, \boldsymbol{c}_t$ 是 $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ 的一组基. 特别地，如下维数公式成立：

$$\dim(\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2) = \dim \mathcal{M}_1 + \dim \mathcal{M}_2 - \dim \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2.$$

定理 7.2.17 结合如上记号，向量组 $S\cup T: \boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_s,\boldsymbol{c}_1,\cdots,\boldsymbol{c}_t$ 是 $\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2$ 的一组基．特别地，如下维数公式成立：

$$\dim(\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2)=\dim\mathcal{M}_1+\dim\mathcal{M}_2-\dim\mathcal{M}_1\cap\mathcal{M}_2.$$

证．根据基的定义，只需验证 $S\cup T$ 线性生成 $\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2$，而且线性无关．

首先，$\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2$ 中的任意向量都有分解式 $\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}$，其中 $\boldsymbol{m}\in\mathcal{M}_1,\boldsymbol{n}\in\mathcal{M}_2$．二者分别可以被向量组 S 和 T 线性表示，因此 $\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}$ 可以被 $S\cup T$ 线性表示．亦即，$\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2\subseteq\operatorname{span}(S\cup T)$．因此 $\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2=\operatorname{span}(S\cup T)$.

其次，证明向量组 $S\cup T$ 线性无关．考虑方程

$$k_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{a}_r+l_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+l_s\boldsymbol{b}_s+m_1\boldsymbol{c}_1+\cdots+m_t\boldsymbol{c}_t=\boldsymbol{0}. \tag{7.2.1}$$

目标是证明所有系数都是零．移项可得

$$k_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{a}_r+l_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+l_s\boldsymbol{b}_s=-(m_1\boldsymbol{c}_1+\cdots+m_t\boldsymbol{c}_t).$$

其次，证明向量组 $S\cup T$ 线性无关．考虑方程

$$k_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{a}_r+l_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+l_s\boldsymbol{b}_s+m_1\boldsymbol{c}_1+\cdots+m_t\boldsymbol{c}_t=\mathbf{0}. \tag{7.2.1}$$

目标是证明所有系数都是零．移项可得

$$k_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{a}_r+l_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+l_s\boldsymbol{b}_s=-(m_1\boldsymbol{c}_1+\cdots+m_t\boldsymbol{c}_t).$$

等式左端向量在 $\mathcal{M}_1$ 内，右端向量在 $\mathcal{M}_2$ 内，所以该向量在 $\mathcal{M}_1\cap\mathcal{M}_2$ 内．因此，它可以被向量组 $R:\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性表示：

$$-(m_1\boldsymbol{c}_1+\cdots+m_t\boldsymbol{c}_t)=n_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+n_r\boldsymbol{a}_r.$$

移项即得

$$n_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+n_r\boldsymbol{a}_r+m_1\boldsymbol{c}_1+\cdots+m_t\boldsymbol{c}_t=\mathbf{0}.$$

而向量组 $T:\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{c}_1,\cdots,\boldsymbol{c}_t$ 线性无关，因此 $n_1=\cdots=n_r=m_1=\cdots=m_t=0$．代入 (7.2.1)，有

$$k_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{a}_r+l_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+l_s\boldsymbol{b}_s=\mathbf{0}.$$

向量组 $S:\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_s$ 线性无关，因此 $k_1=\cdots=k_r=l_1=\cdots=l_s=0$．这说明 (7.2.1) 中所有系数都是零，故向量组 $S\cup T$ 线性无关．

对四个子空间的基中向量计数，立得维数公式．$\square$

推论 7.2.18 给定线性空间 $\mathcal{V}$ 的两个有限维子空间 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$,

1. $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ 是直和，当且仅当 $\dim(\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2) = \dim \mathcal{M}_1 + \dim \mathcal{M}_2$.

2. 若 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$，则 $\mathcal{M}_1$ 与 $\mathcal{M}_2$ 各取一组基，其并集就是 $\mathcal{M}$ 的一组基.

例 7.2.19 例 7.2.12 给出了矩阵空间 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的一组基 E_{ij}，下面给出几个子空间的基.

1. 考虑例 7.1.14 中的子空间 $\mathcal{U}, \mathcal{L}$. 易得 $E_{ii}, 1 \leqslant i \leqslant n$ 是 $\mathcal{U} \cap \mathcal{L}$ 的一组基；由此扩充成 $\mathcal{U}$ 的一组基 $E_{ij}, 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$，和 $\mathcal{L}$ 的一组基 $E_{ij}, 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$. 于是，$\mathcal{U} + \mathcal{L}$ 的一组基是 $E_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant n$，这得到 $\mathcal{U} + \mathcal{L} = \mathbb{F}^{n\times n}$. 此时的维数公式是 $n^2 = \frac{n^2+n}{2} + \frac{n^2+n}{2} - n$.

2. 考虑例 7.1.17 中的子空间 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$. 易得 $E_{ij} + E_{ji}, E_{kk}, 1 \leqslant i < j \leqslant n, 1 \leqslant k \leqslant n$ 是 $\mathcal{M}_1$ 的一组基，$E_{ij} - E_{ji}, 1 \leqslant i < j \leqslant n$ 是 $\mathcal{M}_2$ 的一组基. 两组基的并集是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的一组基. ☺

例 7.1.14 考虑线性空间 $\mathbb{F}^{n\times n}$，设 $\mathcal{U}, \mathcal{L}$ 分别是由所有上/下三角矩阵构成的子空间，则 $\mathcal{U} \cap \mathcal{L}$ 是所有对角矩阵构成的子空间. 而 $\mathcal{U} + \mathcal{L} = \mathbb{F}^{n\times n}$，因为任意方阵显然能分解为上三角矩阵和下三角矩阵的和，记 $A = U + L$. 注意，这个分解式并不唯一，因为对任意非零对角矩阵 D，$A = (U + D) + (L - D)$ 是一个不同的分解式. ☺

例 7.1.17 考虑线性空间 $\mathbb{F}^{n\times n}$，设 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ 分别是由所有对称/反对称矩阵构成的子空间，则 $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \{\mathbf{0}\}$，$\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$ 是直和. 任意方阵都能分解成对称矩阵和反对称矩阵的和：$A = \frac{1}{2}(A + A^{\mathrm{T}}) + \frac{1}{2}(A - A^{\mathrm{T}})$. 于是，$\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 = \mathbb{F}^{n\times n}$. 因此，上述分解式唯一. ☺

练习 7.2.2　求练习 7.1.1 中线性空间 $\mathbb{R}$ 的一组基和维数.

练习 7.2.3　在练习 7.1.2 中的线性空间 $\mathbb{Q}[\omega] = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ 内,

1. 求下列向量组的秩：$S_1 : \frac{1}{2}, 3, -7$，$S_2 : 1, \omega, \omega^2, \omega^3$，$S_3 : \omega, \overline{\omega}, \sqrt{3}$.
2. 求 $\mathbb{Q}[\omega]$ 的一组基和维数.

练习 7.2.4　判断练习 7.1.5 中线性空间的维数是否有限.

练习 7.1.1　在所有正实数构成的集合 $\mathbb{R}^+$ 上，定义加法和数乘运算：

$$a \oplus b := ab, \quad k \odot a := a^k, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{R}.$$

判断 $\mathbb{R}^+$ 对这两个运算是否构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

练习 7.1.2　令 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，$\mathbb{Q}[\omega] = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

1. 证明 $\mathbb{Q}[\omega]$ 关于数的加法和数乘构成 $\mathbb{Q}$ 上的一个线性空间.
2. 证明子集 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathcal{M} = \{b\omega \mid b \in \mathbb{Q}\}$ 都是 $\mathbb{Q}[\omega]$ 的子空间．并求二者的交与和.
3. 判断 $\mathbb{Q}[\omega]$ 是否是数域.

练习 7.1.5　设 $\mathcal{V}$ 是以 0 为极限的实数序列全体：$\mathcal{V} = \left\{\{a_n\} \,\middle|\, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\right\}$．定义加法和数乘分别为：

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}; \quad k\{a_n\} = \{ka_n\}, k \in \mathbb{R}.$$

证明 $\mathcal{V}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

作 业（12月13日）

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

练习7.2

1，5，6，8，9，10，11，12，13，14

12月20日提交

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~