

# 线性代数 第7讲

10月4日

## 第一章第6讲 可逆矩阵与分块矩阵

上一讲要点回顾

可逆矩阵的性质

相抵标准型与等价关系

分块矩阵

**定义 1.5.1 (初等矩阵)** 对恒同矩阵  $I_n$  做一次初等变换，得到的矩阵统称为**初等矩阵**：

1. 对换行变换：把  $I_n$  的第  $i, j$  行位置互换，得到**对换矩阵**

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} ;$$

2. 倍乘行变换：第  $i$  行乘非零常数  $k$ ，得到**倍乘矩阵**

$$E_{ii;k} = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & 1 & & \\ & & k & \\ & & & 1 \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ i \end{matrix} ;$$

3. 倍加行变换：把第  $i$  行的  $k$  倍加到第  $j$  行上，得到**倍加矩阵**

$$E_{ji;k} = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & k & & 1 \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} (j > i), \quad E_{ji;k} = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & 1 & & k \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{matrix} j \\ i \end{matrix} (j < i).$$

**命题 1.5.2** 1. 若矩阵  $I_m$  经过某一初等行变换得到矩阵  $T$ ，则任意  $m \times n$  矩阵  $A$  经过相同初等行变换得到矩阵  $TA$ .

2. 若矩阵  $I_n$  经过某一初等列变换得到矩阵  $T$ ，则任意  $m \times n$  矩阵  $A$  经过相同初等列变换得到矩阵  $AT$ .

对单位矩阵做一次初等**行变换**，**左乘**矩阵A，则结果为A做相应行变换得到的矩阵  
对单位矩阵做一次初等**列变换**，**右乘**矩阵A，则结果为A做相应列变换得到的矩阵



## 可逆矩阵

- 在解方程  $ax = b$  的时候, 如果  $a \neq 0$ , 等式两边同乘以  $a^{-1}$ , 得  $x = a^{-1}b$ .
- 线性方程组  $AX = b$ , 能否在一定条件下引进  $A^{-1}$  的概念, 使得解为  $X = A^{-1}b$ ?
- 由  $a^{-1}a = 1$  到  $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ .

定义1.5.3(逆矩阵) 设  $A$  是  $n$  阶方阵, 如果存在  $n$  方阵  $B$ , 使得  $AB = BA = I_n$ , 则称  $A$  是可逆矩阵或非奇异矩阵, 并称  $B$  是  $A$  的逆(矩阵)。

$A$  的逆矩阵唯一, 表示为  $A^{-1}$

不可逆的矩阵称为奇异矩阵。

**命题 1.5.4** 初等矩阵可逆, 且  $P_{ij}^{-1} = P_{ij}, E_{ii;k}^{-1} = E_{ii;k^{-1}}, E_{ji;k}^{-1} = E_{ji;-k}$ .

**命题 1.5.5** 对角矩阵  $D$  可逆当且仅当对角元素都不为零, 且  $D$  可逆时有

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} d_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^{-1} \end{bmatrix}.$$

1. 对换行变换: 把  $I_n$  的第  $i, j$  行位置互换, 得到**对换矩阵**

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix};$$

$$P_{ij} \cdot P_{ij} = I,$$

$$P_{ij}^T = P_{ij}$$

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}^T = P_{ij}$$

命题1.5.4 初等矩阵可逆且逆还是初等矩阵:

$$E_{ji,k} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ k & \cdots & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

第  $i$  列

第  $i$  行

第  $j$  行

第  $j$  列

$$E_{ji,k} E_{ji,-k} = I,$$

$$E_{ji,-k} E_{ji,k} = I,$$

$$E_{ji,k}^{-1} = E_{ji,-k}.$$



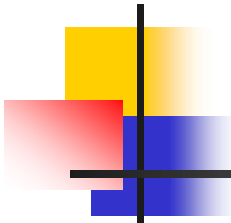
## 求逆矩阵的初等变换法 (Gauss-Jordan消去法)

可逆方阵  $A$  可仅经过一系列行初等变换化为单位阵.

$$P_s \cdots P_1 A = I, \quad P_s \cdots P_1 = A^{-1}$$

所以完全相同的变换可以把  $I$  化为  $A^{-1}$ .  $A^{-1}[A, I] = [I, A^{-1}]$

构造一个分块矩阵:  $[A, I] \xrightarrow{\text{仅用行初等变换}} [I, A^{-1}]$

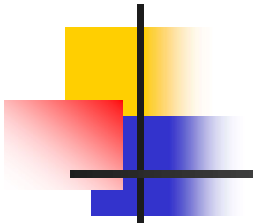


*Gauss-Jordan* 消去法求  $A$  的逆矩阵,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ .

**解** 先将  $A$  化为阶梯形矩阵, 再化为单位阵:

$$[A, I] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & -3/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right], \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$



设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ , 试判断  $A$  是否可逆.

解  $[A, I] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

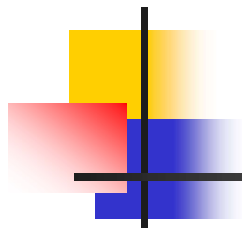
练习 1.5.8 求下列矩阵方程的解:  $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$



[illegible]

写成矩阵形式  $AX = b$ .

9



## 逆矩阵的几个性质

---

命题1.5.6 若矩阵A, B可逆

(1)  $A^{-1}$ 可逆, 且  $(A^{-1})^{-1} = A$

(2)  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(3)  $A^T$ 可逆, 且  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ , 记为  $A^{-T}$

(2')  $(A_1A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$

定理 1.5.7 设  $A$  是  $n$  阶方阵, 以下叙述等价:

1.  $A$  可逆;
2. 任取  $n$  维向量  $\mathbf{b}$ , 方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的解唯一, 且  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ ;
3. 齐次方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  只有零解;
4.  $A$  对应的阶梯形矩阵有  $n$  个主元;
5.  $A$  对应的行简化阶梯形矩阵一定是  $I_n$ ;
6.  $A$  是有限个初等矩阵的乘积.

练习1.5.18, 证明: 如果  $n$  阶矩阵  $A$  满足  $A^2 = A$ , 则  $I - 2A$  可逆。

**命题 1.5.10** 上三角矩阵可逆当且仅当其对角元素都不为零. 此时, 其逆矩阵也是上三角矩阵, 逆矩阵的对角元素是该矩阵的对应对角元素的倒数.

下三角矩阵也有类似性质. **命题1.5.10: 练习1.5.11, 习题课题目**

**定义 1.5.11 (置换矩阵)** 单位矩阵经一系列对换行变换得到的矩阵称为置换矩阵.

简单验证可以得到置换矩阵的一些性质.

**命题 1.5.12** 1. 单位矩阵经一系列对换列变换得到的矩阵也是置换矩阵;

2. 置换矩阵可以通过按某种次序排列单位矩阵的行来得到;

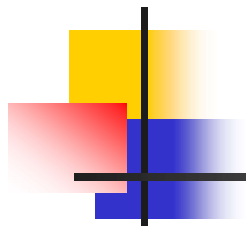
3. 置换矩阵可以通过按某种次序排列单位矩阵的列来得到;

4. 不同的  $n$  阶置换矩阵共有  $n!$  个<sup>7</sup>;

5. 置换矩阵的乘积也是置换矩阵;

6. 置换矩阵的逆是其转置, 也是置换矩阵.

**练习 1.5.7** 求  $A = \begin{bmatrix} & a_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1} \\ a_n & & & \end{bmatrix}$  的逆矩阵, 其中  $a_i \neq 0$ .



## (严格) 对角占优矩阵

**定义 1.5.13 (对角占优)** 如果矩阵  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  对  $i = 1, \dots, n$ , 都有  $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ , 则称其为 (行) 对角占优矩阵.

**命题 1.5.14** 对角占优矩阵一定可逆.

**练习 1.5.6** 说明  $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$  可逆, 并计算其逆.



## 相抵标准形

---

**定义 1.5.16 (左相抵)** 如果矩阵  $A$  可以经过一系列初等行变换化成矩阵  $B$ , 则称  $A$  和  $B$  左相抵.

**命题 1.5.17** 给定两个  $m \times n$  矩阵  $A, B$ . 那么二者左相抵, 当且仅当存在  $m$  阶可逆矩阵  $P$ , 使得  $PA = B$ .

证.  $A$  与  $B$  左相抵  $\Leftrightarrow A$  经一系列初等行变换得到  $B \Leftrightarrow$  存在  $m$  阶初等矩阵  $P_1, \dots, P_s$ , 使得  $P_s \cdots P_1 A = B \xrightarrow{\text{定理 1.5.7}} \Leftrightarrow$  存在  $m$  阶可逆矩阵  $P$ , 使得  $PA = B$ .  $\square$

可以看到在所有和矩阵  $A$  左相抵的矩阵中, 形式最简单的应该就是其行简化阶梯形, 因此我们也可以称此矩阵为  $A$  的**左相抵标准形**.



## 等价关系

---

不难看出，左相抵关系满足如下三条基本性质：

1. 反身性：每个矩阵和自身左相抵；
2. 对称性：如果  $A$  和  $B$  左相抵，那么  $B$  和  $A$  左相抵；
3. 传递性：如果  $A$  和  $B$  左相抵， $B$  和  $C$  左相抵，那么  $A$  和  $C$  左相抵。

事实上，很多数学对象之间都存在类似的关系。为此，我们抽象出一系列概念。

**定义 1.5.18 (等价关系)** 如果非空集合  $S$  的元素之间定义了一种二元关系 “ $\sim$ ”，满足：

1. 反身性：对任意  $a \in S$ ， $a \sim a$ ；
2. 对称性：如果  $a \sim b$ ，那么  $b \sim a$ ；
3. 传递性：如果  $a \sim b, b \sim c$ ，那么  $a \sim c$ ，

则称此关系为  $S$  上的一个等价关系。



$S$  中所有与其中某一元素  $a$  等价的元素组成的集合称为  $a$  所在的**等价类**. 由元素  $a$  变成与其等价的元素  $b$  的过程称为对应于这一等价关系的**等价变换**. 同一等价类中的元素共享的某个属性称为这一等价关系中（或这一等价变换下）的**不变量**. 同一等价类中的形式最简单、性质最好的元素往往称为这一等价关系中（或这一等价变换下）的**标准形**.

显然,  $S$  等于所有等价类的无交并. 等价类的数目可以有限, 也可以无限.

**例 1.5.19** 平面上所有三角形组成的集合上, 相似是一个等价关系, 三个角的角度是等价关系中的不变量.

由等价关系得到等价类, 进而对集合进行划分的举例,

定义  $(x, y)$  的二元关系:  $x-y$  能够被3整除。

此关系为整数集合上的一个等价关系。

由这个等价关系得到3个等价类:  $\{3k\}$ ,  $\{3k+1\}$ ,  $\{3k+2\}$ ,

是对整数集合的一个划分。





## 分块矩阵的概念

- 处理有结构特点的大矩阵，有时需要进行分块
- **分法**：将矩阵用纵线和横线分成若干小矩阵，每个小矩阵称为原矩阵的**子块**，分为子块的矩阵叫**分块矩阵**.

例 
$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}, \quad \text{即} \quad A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

## 常用分块方式

- 分成四块, 例如:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

- 按列分块, 例如:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$$

- 按行分块, 例如:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

(1) 体现原矩阵特点, (2) 根据问题需要, (3) 能够把块看作元素进行运算



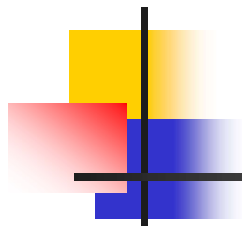
## 分块矩阵的运算

- 设分块矩阵  $A$  与  $B$  的行数和列数均相同, 采用同样的分法, 即

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{A_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \boxed{B_{11}} & \cdots & \boxed{B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{bmatrix} \quad A + B = \begin{bmatrix} \boxed{A_{11} + B_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r} + B_{1r}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} + B_{s1} & \cdots & A_{sr} + B_{sr} \end{bmatrix}.$$

其中  $A_{ij}$  与  $B_{ij}$  的行数和列数均相同

- 设  $A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{bmatrix}$ ,  $\lambda$  是数, 则  $\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{bmatrix}.$



## 分块矩阵的乘法 $C = AB$ ( $A_{m \times p}, B_{p \times n}$ )

A 的列数 = B 的行数

A 的列的分法 = B 的行的分法

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{r1} & \cdots & C_{rt} \end{bmatrix},$$

$$C_{ik} = A_{i1}B_{1k} + A_{i2}B_{2k} + \cdots + A_{is}B_{sk} = \sum_{j=1}^s A_{ij}B_{jk}, \quad i = 1, \cdots, r; \quad k = 1, \cdots, t.$$



## 分块矩阵

在矩阵乘法中，我们经常把矩阵写成列向量组或者行向量组并排的形式。例如，设

$$A = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{a}}_l^T \end{bmatrix}, B = [\mathbf{b}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_n], \text{ 其中 } \tilde{\mathbf{a}}_i^T \text{ 是 } m \text{ 维行向量, } \mathbf{b}_1 \text{ 是 } m \text{ 维列向量, 则}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{a}}_l^T \end{bmatrix} [\mathbf{b}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_n] = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1^T \mathbf{b}_1 & \cdots & \tilde{\mathbf{a}}_1^T \mathbf{b}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{\mathbf{a}}_l^T \mathbf{b}_1 & \cdots & \tilde{\mathbf{a}}_l^T \mathbf{b}_n \end{bmatrix}.$$

另一方面，若  $n = l$ ，我们有

$$BA = [\mathbf{b}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_n] \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{a}}_l^T \end{bmatrix} = \mathbf{b}_1 \tilde{\mathbf{a}}_1^T + \cdots + \mathbf{b}_n \tilde{\mathbf{a}}_l^T.$$



## 准三角形矩阵

● 准上三角矩阵:

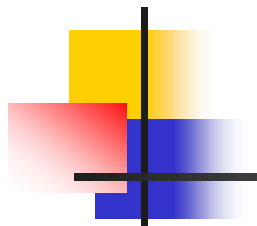
$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

其中  $A_{11}, \dots, A_{nn}$  都是小方阵, 上三角矩阵可作为准上三角矩阵的特殊情形.

● 准下三角矩阵:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

其中  $A_{11}, \dots, A_{nn}$  都是小方阵, 下三角矩阵可作为准下三角矩阵的特殊情形.



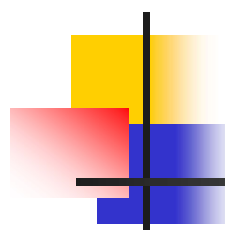
准三角形矩阵具有下列性质:

两个具有相同分块的准上(下)三角形矩阵的和, 乘积仍是准上(下)三角形角矩阵,  
数与准上(下)三角形矩阵的乘积

准上(下)三角形矩阵的转置仍是准上(下)三角形矩阵

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ 0 & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1n} + B_{1n} \\ 0 & A_{22} + B_{22} & \cdots & A_{2n} + B_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} + B_{nn} \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & A_{22}B_{22} & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn}B_{nn} \end{bmatrix},$$



● 准对角矩阵:  $\begin{bmatrix} A_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & A_{nn} \end{bmatrix} = \text{diag}(A_{11}, \dots, A_{nn})$

其中  $A_{11}, \dots, A_{nn}$  都是小方阵, 对角矩阵可作为准对角矩阵的特殊情形.

如下列矩阵都是准对角矩阵:

$$A = \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline 0 & A_{22} \end{array} \right]$$

$$B = \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} B_{11} & 0 \\ \hline 0 & B_{22} \end{array} \right]$$

**例** 试判断矩阵  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$  是否可逆? 若可逆, 求出  $A^{-1}$ .





## 作业 (10月4日)

---

~~~~~

练习1.5

12(1, 2, 3, 4, 5), 15, 17, 23

更正：第17题第3问是：设 $f(x)=p(x)+q(x)\cdots$

练习1.6

2, 6, 13

10月11日提交

~~~~~