

Review

- 含参广义积分的一致收敛性

Def. $\forall t \in \Omega, \int_a^{+\infty} f(t, x)dx$ 收敛. 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon), s.t.$

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x, y)dx \right| = \left| \int_a^A f(t, x)dx - \int_a^{+\infty} f(t, x)dx \right| < \varepsilon,$$

$$\forall A > M, \forall t \in \Omega,$$

则称含参广义积分 $\int_a^{+\infty} f(t, x)dx$ 关于 $t \in \Omega$ 一致收敛.



Def . 设 $\forall t \in \Omega, \int_a^b f(t, x)dx$ 收敛, b 为唯一瑕点, 若

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) \in (0, b - a), s.t.$

$$\left| \int_{b-\eta}^b f(t, x)dx \right| = \left| \int_a^{b-\eta} f(t, x)dx - \int_a^b f(t, x)dx \right| < \varepsilon,$$

$$\forall \eta \in (0, \delta), \forall t \in \Omega,$$

则称含参瑕积分 $\int_a^b f(t, x)dx$ 关于 $t \in \Omega$ 一致收敛.



•含参广义积分一致收敛性的判别法

Thm.(Cauchy) $\int_a^{+\infty} f(t, x)dx$ 关于 $t \in \Omega$ 一致收敛

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M(\varepsilon), s.t.$

$$\left| \int_A^{A'} f(t, x)dx \right| < \varepsilon, \quad \forall A, A' > M, \forall t \in \Omega.$$

Thm.(Cauchy) $\forall t \in \Omega, b$ 为 $\int_a^b f(t, x)dx$ 的唯一瑕点, 若

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, s.t.$

$$\left| \int_{b-\eta_2}^{b-\eta_1} f(t, x)dx \right| < \varepsilon, \quad \forall \eta_1, \eta_2 \in (0, \delta), \forall t \in \Omega,$$

则 $\int_a^b f(t, x)dx$ 关于 $t \in \Omega$ 一致收敛.



Thm.(Weirstrass) 设 $\forall t \in \Omega, \int_a^{+\infty} f(t, x)dx$ 收敛, 若存在 $[a, +\infty)$ 上的可积函数 $g(x), s.t.$

$$|f(t, x)| \leq g(x), \quad \forall (t, x) \in \Omega \times [a, +\infty),$$

则 $\int_a^{+\infty} f(t, x)dx$ 在 $t \in \Omega$ 上一致收敛.

Thm.(Weirstrass) 设 $\forall t \in \Omega, \int_a^b f(t, x)dx$ 收敛, b 为唯一瑕点, 且存在 $[a, b)$ 上可积函数 $g(x), s.t.$

$$|f(t, x)| \leq g(x), \quad \forall (t, x) \in \Omega \times [a, b),$$

则 $\int_a^b f(t, x)dx$ 在 $t \in \Omega$ 上一致收敛.



Thm.(Dirichlet) $\forall t \in \Omega, f(t, x), g(t, x)$ 在 $x \in [a, +\infty)$ 上连续, 若

(1) $\forall t \in \Omega, f(t, x)$ 关于 x 单调,

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(t, x) = 0$ 关于 $t \in \Omega$ 一致成立, 即;

(3) $\int_a^A g(t, x) dx$ 关于 $t \in \Omega$ 以及充分大的 A 一致有界;

则 $\int_a^{+\infty} f(t, x) g(t, x) dx$ 在 $t \in \Omega$ 上一致收敛.



Thm.(Dirichlet) $\forall t \in \Omega$, $f(t, x)$, $g(t, x)$ 在 $x \in [a, b)$ 上连续, 若

(1) $\forall t \in \Omega$, $f(t, x)$ 关于 x 单调;

(2) $\lim_{x \rightarrow b^-} f(t, x) = 0$ 关于 $t \in \Omega$ 一致成立;

(3) $\int_a^A g(t, x) dx$ 关于 $t \in \Omega$ 以及 $A \in [a, b)$ 一致有界;

则 $\int_a^b f(t, x) g(t, x) dx$ 在 $t \in \Omega$ 上一致收敛.



Thm.(Abel) $\forall t \in \Omega, f(t, x), g(t, x)$ 在 $x \in [a, +\infty)$ 上连续, 若

(1) $\forall t \in \Omega, f(t, x)$ 关于 x 单调;

(2) $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(t, x)$ 关于 $t \in \Omega$ 一致有界;

(3) $\int_a^{+\infty} g(t, x) dx$ 关于 $t \in \Omega$ 一致收敛;

则 $\int_a^{+\infty} f(t, x) g(t, x) dx$ 在 $t \in \Omega$ 上一致收敛.



Thm.(Abel) $\forall t \in \Omega, f(t, x), g(t, x)$ 在 $x \in [a, b)$ 上连续, 若

(1) $\forall t \in \Omega, f(t, x)$ 关于 x 单调;

(2) $x \rightarrow b^-$ 时, $f(t, x)$ 关于 $t \in \Omega$ 一致有界;

(3) $\int_a^b g(t, x) dx$ 关于 $t \in \Omega$ 一致收敛;

则 $\int_a^b f(t, x) g(t, x) dx$ 在 $t \in \Omega$ 上一致收敛.



§ 3. 含参广义积分的性质

Thm1. $f(t, x) \in C([\alpha, \beta] \times [a, +\infty))$, $I(t) = \int_a^{+\infty} f(t, x) dx$ 关于 $t \in [\alpha, \beta]$ 一致收敛, 则 $I(t) \in C[\alpha, \beta]$.

Proof. $\int_a^{+\infty} f(t, x) dx$ 关于 t 一致收敛, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists M > a, s.t.$

$$\left| \int_A^{+\infty} f(t, x) dx \right| < \varepsilon, \forall A > M, \forall t \in [\alpha, \beta].$$

取定 $A > M$, $f \in C([\alpha, \beta] \times [a, A])$, 因而 $\exists \delta > 0, s.t.$

$$|f(t, x) - f(t_0, x)| \leq \varepsilon / (A - a),$$

$$\forall |t - t_0| < \delta, t, t_0 \in [\alpha, \beta], x \in [a, A].$$



于是 $\forall t, t_0 \in [\alpha, \beta]$, 当 $|t - t_0| < \delta$ 时, 有

$$\begin{aligned} |I(t) - I(t_0)| &= \left| \int_a^{+\infty} f(t, x) dx - \int_a^{+\infty} f(t_0, x) dx \right| \\ &= \left| \int_a^A f(t, x) dx + \int_a^{+\infty} f(t, x) dx \right. \\ &\quad \left. - \int_a^A f(t_0, x) dx - \int_a^{+\infty} f(t_0, x) dx \right| \\ &\leq \int_a^A |f(t, x) - f(t_0, x)| dx \\ &\quad + \left| \int_A^{+\infty} f(t, x) dx \right| + \left| \int_A^{+\infty} f(t_0, x) dx \right| \\ &\leq 3\varepsilon. \square \end{aligned}$$



例. $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 连续.

分析: $x < 1$ 时, $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{x-1} e^{-t} = +\infty$, $t = 0$ 为积分的瑕点, 因此 $t = 0$ 和 $t = +\infty$ 都要讨论.

Proof. $\forall 0 < a < b$, 往证 $\Gamma(x) \in C[a, b]$. 由于

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \triangleq \Gamma_1(x) + \Gamma_2(x),$$

只要证 $\Gamma_1(x), \Gamma_2(x)$ 均在 $[a, b]$ 上连续.



先看 $\Gamma_1(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$. 由于

$$0 < t^{x-1} e^{-t} \leq t^{a-1}, \quad \forall (t, x) \in (0, 1] \times [a, b],$$

而 $a > 0$, 所以 $\int_0^1 t^{a-1} dt = \frac{1}{a}$, 收敛, 由Weirstrass判别法,

$\Gamma_1(x)$ 关于 $x \in [a, b]$ 一致收敛, 进而有 $\Gamma_1(x) \in C[a, b]$.

再看 $\Gamma_2(x) = \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. 由于

$$0 < t^{x-1} e^{-t} < t^{b-1} e^{-t}, \quad \forall (t, x) \in [1, +\infty) \times [a, b],$$

而 $\int_1^{+\infty} t^{b-1} e^{-t} dt$ 收敛, 由Weirstrass判别法, $\Gamma_2(x)$ 关于

$x \in [a, b]$ 一致收敛, 进而有 $\Gamma_2(x) \in C[a, b]$. \square

例. 证明 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x} dx$ 在 $t \in [0, +\infty)$ 上不一致收敛.

解:
$$I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}.$$

若 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x} dx$ 在 $t \in [0, +\infty)$ 上一致收敛, 则 $I(t)$

$\in C[0, +\infty)$, 矛盾. \square

Remark. 证明含参积分不一致收敛的方法:

定义、Cauchy准则、含参积分不连续.

例. $a \in (0, \pi)$, 求 $\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos a}}$, $\lim_{a \rightarrow \pi^-} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos a}}$.

解: 当 $a \in (0, \pi/2)$, $t \in (0, 1)$ 时,

$$\cos at - \cos a = 2 \sin \frac{a(1+t)}{2} \sin \frac{a(1-t)}{2} > \frac{2a^2(1-t^2)}{\pi^2} > 0,$$

$$\frac{a}{\sqrt{\cos at - \cos a}} \leq \frac{\pi}{\sqrt{2(1-t^2)}}, \quad \text{而} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dx = \frac{\pi}{2},$$

$\int_0^1 \frac{adt}{\sqrt{\cos at - \cos a}}$ 关于 $a \in (0, \pi/2)$ 一致收敛 (Weierstrass), 故

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos a}} &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{adt}{\sqrt{\cos at - \cos a}} \\ &= \int_0^1 \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{a}{\sqrt{\cos at - \cos a}} dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}. \end{aligned}$$

当 $a \in (\pi/2, \pi)$, $x \in (0, a)$ 时,

$$\begin{aligned}\sqrt{\cos x - \cos a} &\leq \sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \\ &= \sqrt{2 \sin^2 \frac{\pi - x}{2}} \leq \frac{\sqrt{2}(\pi - x)}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos a}} &\geq \int_0^a \frac{\sqrt{2} dx}{\pi - x} \\ &= \sqrt{2} \ln(\pi - x) \Big|_a^0 \rightarrow +\infty, a \rightarrow \pi^- \text{ 时.}\end{aligned}$$

故 $\lim_{a \rightarrow \pi^-} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos a}} = +\infty. \square$



Thm2. 设(1) $f(t, x), f'_t(t, x) \in C([\alpha, \beta] \times [a, +\infty))$;
(2) $\forall t \in [\alpha, \beta], I(t) = \int_a^{+\infty} f(t, x) dx$ 收敛;
(3) $\int_a^{+\infty} f'_t(t, x) dx$ 关于 $t \in [\alpha, \beta]$ 一致收敛;

则 $I(t) \in C^1[\alpha, \beta]$, 且

$$I'(t) = \frac{d}{dt} \int_a^{+\infty} f(t, x) dx = \int_a^{+\infty} f'_t(t, x) dx.$$

Proof.

$$\begin{aligned} \frac{I(t + \Delta t) - I(t)}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta} \int_a^{+\infty} [f(t + \Delta t, x) - f(t, x)] dx \\ &= \int_a^{+\infty} f'_t(t + \theta \Delta t, x) dx, \quad \theta(x, t, \Delta t) \in (0, 1). \end{aligned}$$

$\int_a^{+\infty} f'_t(t, x) dx$ 关于 $t \in [\alpha, \beta]$ 一致收敛, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists M > a, s.t.$

$$\left| \int_A^{+\infty} f'_t(t, x) dx \right| < \varepsilon, \forall A > M, \forall t \in [\alpha, \beta].$$

取定 $A > M$, $f'_t(t, x)$ 在 $D = [\alpha, \beta] \times [a, A]$ 上(一致)连续,

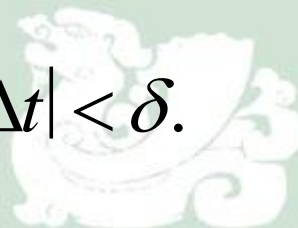
于是 $\exists \delta > 0, \forall (t_i, x) \in D, i = 1, 2$, 只要 $|t_1 - t_2| < \delta$, 就有

$$|f'_t(t_1, x) - f'_t(t_2, x)| < \varepsilon.$$

从而,

$$|f'_t(t + \theta \Delta t, x) - f'_t(t, x)| < \varepsilon / (A - a),$$

$$\forall t, t + \Delta t \in [\alpha, \beta], \forall x \in [a, A], |\Delta t| < \delta.$$



因此 $\forall t, t + \Delta t \in [\alpha, \beta]$, 当 $|\Delta t| < \delta$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{I(t + \Delta t) - I(t)}{\Delta t} - \int_a^{+\infty} f'_t(t, x) dx \right| \\ & \leq \int_a^A |f'_t(t + \theta \Delta t, x) - f'_t(t, x)| dx \\ & \quad + \left| \int_A^{+\infty} f'_t(t + \theta \Delta t, x) dx \right| + \left| \int_A^{+\infty} f'_t(t, x) dx \right| < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

故

$$I'(t) = \int_a^{+\infty} f'_t(t, x) dx.$$

又 $f'_t(t, x) \in C([\alpha, \beta] \times [a, +\infty))$, $\int_a^{+\infty} f'_t(t, x) dx$ 关于 $t \in [\alpha, \beta]$ 的一致收敛, 由Thm1知 $I'(t) \in C[\alpha, \beta]$. \square

例. 证明 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

引入收敛因子 e^{-xy}

解: 令 $I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx$. $\forall y \in [0, +\infty)$, $x=0$ 是关于 x 的一元函数 $f(x, y) = \frac{\sin x}{x} e^{-xy}$ 的可去间断点.

$$\left| \int_a^b \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx \right| \leq \int_a^b e^{-ax} dx \leq \frac{e^{-a^2}}{a}, \quad \forall b > a > 1, \forall y \geq 0.$$

由Cauchy准则, $I(y)$ 在 $y \in [0, +\infty)$ 上(一致)收敛. $\forall y_0 > 0$,

$$\int_0^{+\infty} f'_y(x, y) dx = - \int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx$$

在 $y \in [y_0, +\infty)$ 一致收敛(Dirichlet). 因此



$$I'(y) = -\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx = \frac{-1}{1+y^2}, \quad \forall y \geq y_0 > 0,$$

由 $y_0 > 0$ 的任意性,

$$I(y) = -\arctan y + c, \quad \forall y > 0.$$

又

$$|I(y)| = \left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xy} dx = \frac{1}{y}, \quad \forall y > 0.$$

故

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} I(y) = 0, \quad c = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = I(0) = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

例. 利用 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$.

解: 令 $I(t) \triangleq \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 tx}{x^2} dx$, 则 $I(0) = 0$, 欲求 $I(1)$.

$\forall t \in [0, +\infty)$, $x = 0$ 是关于 x 的一元函数 $f(t, x) = \frac{\sin^2 tx}{x^2}$ 的可去间断点.

$$\frac{\sin^2 tx}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}, \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ 收敛,}$$

由 Weirstrass 判别法, $\int_0^{+\infty} f(t, x) dx$ 关于 $t \in [0, 1]$ 一致收敛.

故 $I(t) \in C[0, 1]$.



已知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, 收敛, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, s.t.$

$$\left| \int_A^B \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \varepsilon > 0, \quad \forall A, B > M.$$

对任意取定的 $t_0 \in (0, 1]$, 有

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f'_t(t, x) dx \right| &= \left| \int_a^b \frac{2 \sin tx \cos tx}{x} dx \right| = \left| \int_a^b \frac{\sin 2tx}{x} dx \right| \\ &= \left| \int_{2at}^{2bt} \frac{\sin x}{x} dx \right| < \varepsilon, \quad \forall a, b > \frac{M}{2t_0}, \forall t > t_0. \end{aligned}$$

因此 $\int_0^{+\infty} f'_t(t, x) dx$ 关于 $t \geq t_0 > 0$ 一致收敛 (Cauchy), 故

$$\begin{aligned}
 I'(t) &= \int_0^{+\infty} f'_t(t, x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin tx \cos tx}{x} dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2tx}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \forall t \in [t_0, 1].
 \end{aligned}$$

由 t_0 的任意性, 有

$$I'(t) = \frac{\pi}{2}, \quad \forall t \in (0, 1].$$

又 $I(t) \in C[0, 1]$, $I(0) = 0$, 所以

$$I(t) = \frac{\pi}{2}t, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = I(1) = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

Question. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx = ? \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx = ? \quad \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}.$

Thm3. $f(x, y) \in C([a, +\infty) \times [\alpha, \beta]), I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$

关于 $y \in [\alpha, \beta]$ 一致收敛, 则 $I(y)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上可积, 且

$$\int_{\alpha}^{\beta} I(y) dy = \int_a^{+\infty} \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy \right) dx,$$

即
$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^{+\infty} \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy \right) dx,$$

也记为
$$\int_{\alpha}^{\beta} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy.$$

Proof. 往证 $\forall \varepsilon > 0, \exists M > a, \forall A > M,$

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} I(y) dy - \int_a^A \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dy \right) dx \right| < \varepsilon.$$



因为 $\int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ 关于 $y \in [\alpha, \beta]$ 一致收敛, 所以 $\forall \varepsilon > 0$,

$$\exists M > a, s.t. \quad \left| \int_A^{+\infty} f(x, y)dx \right| < \varepsilon, \quad \forall A > M, \forall y \in [\alpha, \beta].$$

取定 $A > M$, 则

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} I(y)dy &= \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_a^A f(x, y)dx + \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_A^{+\infty} f(x, y)dx \\ &= \int_a^A dx \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y)dy + \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_A^{+\infty} f(x, y)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} I(y)dy - \int_a^A dx \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y)dy \right| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_A^{+\infty} f(x, y)dx \right| \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} \left| \int_A^{+\infty} f(x, y)dx \right| dy < \varepsilon(\beta - \alpha). \quad \square \end{aligned}$$

例: $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx \quad (b > a > 0).$

解法一: $I = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-tx} dt.$

e^{-tx} 在 $(t, x) \in D = [a, b] \times [0, +\infty)$ 上连续, 且

$$|e^{-tx}| \leq e^{-ax}, \quad \forall (t, x) \in D;$$

$a > 0, \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$ 收敛. 由 Weistrass 判别法, $\int_0^{+\infty} e^{-tx} dx$

关于 $t \in [a, b]$ 一致收敛, 从而累次积分可交换次序

$$I = \int_a^b dt \int_0^{+\infty} e^{-tx} dx = \int_a^b \frac{1}{t} dt = \ln \frac{b}{a}. \quad \square$$

解法二:引入参数 $t \in [a, b]$, 令 $I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} - e^{-bx}}{x} dx$.

则 $I(b) = 0$, 欲求 $I(a)$, 可以先求 $I'(t)$, 再积分. 因为

• $f(t, x) = (e^{-tx} - e^{-bx})/x$ 在 $[a, b] \times [0, +\infty)$ 上连续可微,

• $\int_0^{+\infty} f(t, x) dx$ 对任意 $t \in [a, b]$ 收敛,

• $\int_0^{+\infty} f'_t(t, x) dx = -\int_0^{+\infty} e^{-tx} dx$ 对 $t \in [a, b]$ 一致收敛,

所以 $I'(t) = \int_0^{+\infty} f'_t(t, x) dx = \int_0^{+\infty} -e^{-tx} dx = \frac{e^{-tx}}{t} \Big|_{x=0}^{+\infty} = -1/t$,

$I(t) = -\ln t + C$. 又 $I(b) = 0$, $C = \ln b$, $I(t) = \ln b - \ln t$.

所求积分为 $I = I(a) = \ln b - \ln a$. \square

Thm4. $f(x, y) \in C([a, +\infty) \times [\alpha, +\infty])$, 且满足

(1) $\forall \beta > \alpha, \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ 在 $y \in [\alpha, \beta]$ 上一致收敛;

$\forall b > a, \int_\alpha^{+\infty} f(x, y)dy$ 在 $x \in [a, b]$ 上一致收敛;

(2) $\int_\alpha^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x, y)|dx$ 与 $\int_a^{+\infty} dx \int_\alpha^{+\infty} |f(x, y)|dy$ 中至少有一个存在;

则 $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ 在 $[\alpha, +\infty]$ 上可积, 且

$$\int_\alpha^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_\alpha^{+\infty} f(x, y)dy.$$



例. 利用Poisson积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 dx$.

解: 由Poisson积分得 $\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}, t > 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 dx = 2 \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx \stackrel{t=x^2}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \sin t dx \stackrel{?}{=} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \sin t dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \square$$

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bxdx = \frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$



附. $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx, J = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$

$$I + J = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1+(1/x)^2}{x^2+(1/x)^2} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{d(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x-1/x}{\sqrt{2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$$I - J = \int_0^{+\infty} \frac{1-x^2}{1+x^4} dx = \int_0^{+\infty} \frac{(1/x)^2-1}{x^2+(1/x)^2} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{-d(x+1/x)}{(x+1/x)^2-2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x+1/x-\sqrt{2}}{x+1/x+\sqrt{2}} \Big|_0^{+\infty} = 0.$$

$$I = J = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

作业：习题2.3 No. 1, 2



例. 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx$ ($b > a > 0$).

思路1. $I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos tx}{x} dx, I(a) = 0, I(b) = ?$

$I'(t) \neq \int_0^{+\infty} \sin t x dx$, 右边的积分不收敛, 无法继续.

思路2. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b \sin t x dt$

$\neq \int_a^b dt \int_0^{+\infty} \sin t x dx$, 无法继续计算.

对策: 引入收敛因子 $e^{-\lambda x}, \lambda > 0$.



解: 令 $J(\lambda) \triangleq \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx, \lambda \in [0, 1]$. 欲求 $J(0)$.

$e^{\lambda x} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}$ 可以连续延拓到 $(\lambda, x) \in [0, 1] \times [0, +\infty)$.

$x = 0$ 不是含参积分的瑕点. $x \rightarrow +\infty$ 时, $e^{-\lambda x}/x$ 关于 $\lambda \in [0, 1]$ 一致收敛到 0, 且

$$\left| \int_0^A (\cos ax - \cos bx) dx \right| \leq \frac{2}{a} + \frac{2}{b}, \quad \forall A > 0, \forall \lambda \in [0, 1].$$

由 Dirichlet 判别法, 含参积分 $J(\lambda)$ 关于 $\lambda \in [0, 1]$ 一致收敛.

因此, $J(\lambda) \in C[0, 1]$.

下面先任意固定 $\lambda \in (0, 1]$, 求 $J(\lambda)$; 再令 $\lambda \rightarrow 0$, 得 $J(0)$.



固定 $\lambda \in (0, 1]$, 令 $I(t) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \frac{\cos ax - \cos tx}{x} dx, t \in [a, b]$.

$e^{\lambda x} \frac{\cos ax - \cos tx}{x}$ 可以连续延拓到 $(t, x) \in [a, b] \times [0, +\infty)$.

$x = 0$ 不是积分的瑕点. $I(t)$ 关于 $t \in [a, b]$ 一致收敛 (Dirichlet),

因此, $I(t) \in C[a, b]$. $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \sin txdx$ 关于 $t \in [a, b]$ 一致收敛 (Weierstrass). 故

$$I'(t) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \sin txdx = \frac{t}{\lambda^2 + t^2}, \quad t \in [a, b];$$

$$J(\lambda) = I(b) = I(a) + \int_a^b I'(t) dt = \int_a^b \frac{t}{\lambda^2 + t^2} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda^2 + b^2}{\lambda^2 + a^2}.$$

由 $J(\lambda) \in C[0, 1]$, 得 $J(0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} J(\lambda) = \ln \frac{b}{a}$. \square

例. $\alpha, \beta > 0$, 计算Laplace积分

$$I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx, J(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx.$$

解: $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx$ 关于 $\beta \geq b > 0$ 一致收敛 (Dirichlet).

故 $I'(\beta) = -J(\beta)$. (再在积分下求导是不允许的?)

已知 $\beta > 0$ 时,
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

两式相加, 得
$$I'(\beta) + \frac{\pi}{2} = \alpha^2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x(\alpha^2 + x^2)} dx.$$

求导得 $I''(\beta) = \alpha^2 I(\beta).$

此微分方程通解为 $I = c_1 e^{-\alpha\beta} + c_2 e^{\alpha\beta}.$

因为 $|I| \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{\pi}{2\alpha}, \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I = 0,$

所以 $c_2 = 0, \quad I = c_1 e^{-\alpha\beta}.$

$$\text{又 } \lim_{\beta \rightarrow 0+} I = \lim_{\beta \rightarrow 0+} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2\alpha}.$$

所以 $c_1 = \frac{\pi}{2\alpha}, \quad I(\beta) = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-\alpha\beta},$

$$J(\beta) = -I'(\beta) = -\frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta}. \quad \square$$

Ex. $I = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}} dx$. (瑕积分)

引入参变量 t

解: 令 $I(t) = \int_0^1 \frac{\arctan(tx)}{x\sqrt{1-x^2}} dx$, 则 $I(0) = 0$, 求 $I(1)$.

$$\begin{aligned} I'(t) &\stackrel{\text{Able}}{=} \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2x^2)\sqrt{1-x^2}} dx \stackrel{x=\sin\theta}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1+t^2\sin^2\theta} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\csc^2\theta d\theta}{\csc^2\theta + t^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{-d\cot\theta}{1+t^2+\cot^2\theta} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1+t^2}} \arctan \frac{\cot\theta}{\sqrt{1+t^2}} \Big|_{\theta=0}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+t^2}}. \end{aligned}$$

$$I(1) = \int_0^1 \frac{\pi}{2\sqrt{1+t^2}} dt = \frac{\pi}{2} \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \Big|_{t=0}^1 = \frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2}). \square$$

Ex. $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \sin(\ln \frac{1}{x}) dx \quad (a, b > 0).$

解: 固定 $a > 0$, 欲求含参积分 $I(b)$. $I(a) = 0$.

$$f(b, x) = \frac{x^b - x^a}{\ln x} \sin(\ln \frac{1}{x}), \quad |f(b, x)| \leq |x^b - x^a|.$$

故 $f(b, x)$ 可以连续延拓到 $(b, x) \in (0, +\infty) \times (0, 1]$, $x = 1$ 非瑕点,

$\forall b > 0, I(b)$ 收敛. $\int_0^1 \sin(\ln \frac{1}{x}) dx = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin t dt = \frac{1}{2}$, 因而

$$I'(b) \stackrel{\text{Able}}{=} \int_0^1 x^b \sin(\ln \frac{1}{x}) dx = \frac{1}{1 + (1+b)^2}.$$

$$I(b) = I(a) + \int_a^b \frac{dt}{1 + (1+t)^2} = \arctan(1+t) \Big|_{t=a}^b$$

$$= \arctan(1+b) - \arctan(1+a). \square$$

