线性代数 第11讲

10月18日

第二章第3讲 矩阵的秩

上一讲要点回顾

极大线性无关部分组的计算

矩阵的秩

相抵标准型

极大线性无关部分组

定义 2.2.1 (极大线性无关部分组) 给定 $\mathbb{R}^m$ 中的向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$，设 $\boldsymbol{a}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ 是它的一个部分组，且满足：

1. $\boldsymbol{a}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ 线性无关；

2. $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 可以被 $\boldsymbol{a}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ 线性表示；

则称 $\boldsymbol{a}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ 是 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的一个**极大线性无关部分组**.

$a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r}$ 是向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的极大线性无关部分组，

$$\Leftrightarrow$$

$a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r}$ 是 $span(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的一组基。

1. $\mathcal{M}$ 中的任意向量都可以被该向量组线性表示，即 $\mathcal{M} = \operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$；

2. 该向量组线性无关；

求极大线性无关部分组的筛选法

命题 2.2.3 如果向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性无关，那么对任意向量 $\boldsymbol{b}$，有

1. $\boldsymbol{b}$ 可以被向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性表示，当且仅当向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}$ 线性相关；
2. $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{b}$ 线性无关，当且仅当 $\boldsymbol{b}$ 不能被向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性表示.

筛选法：利用命题2.2.3的结论，逐步扩充，生成极大线性无关部分组。

命题2.2.4 任意不全为0的向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 都存在极大线性无关部分组。

例 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，求矩阵 A 列向量组的一个极大无关组和秩,

例 设 $A=\begin{bmatrix}-1&-2&1&0\\1&4&1&4\\1&3&0&2\end{bmatrix}$，求矩阵 A 列向量组的一个极大无关组和秩，

并把其余列向量用所求出的极大无关组表示出来：

解 通过初等行变换把 A 化为阶梯形：$A=\begin{bmatrix}-1&-2&1&0\\1&4&1&4\\1&3&0&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&-2&1&0\\0&2&2&4\\0&1&1&2\end{bmatrix}$

$$\to\begin{bmatrix}-1&0&3&4\\0&1&2&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-3&-4\\0&1&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}=U$$

$$PA=P\begin{bmatrix}-1&-2&1&0\\1&4&1&4\\1&3&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-3&-4\\0&1&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$P\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1&b_2&b_3&b_4\end{bmatrix}$$

- ✓ 列向量组的秩 = 2;
- ✓ A 的第1, 2列是极大无关组;
- ✓ 第3列 = 第2列 − 3×第1列;
- ✓ 第4列 = 2×第2列 − 4×第1列.

向量组之间的线性表示关系

设 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 的两个向量组，如果 $\boldsymbol{S}$ 中的每一个向量都可以被 $\boldsymbol{T}$ 线性表示，则称向量组 $\boldsymbol{S}$ 可以被 $\boldsymbol{T}$ 线性表示。

命题 2.2.5 设 $S:\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n,T:\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_p$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的两个向量组，以下叙述等价：

1. S 可以被 T 线性表示；
2. 存在 $p\times n$ 矩阵 U 满足 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_p\end{bmatrix}U$；
3. 线性生成的子空间满足 $\operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)\subseteq\operatorname{span}(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_p)$.

如果两个向量组可以互相线性表示，则称二者**线性等价**.

命题 2.2.8 设 S,T 是 $\mathbb{R}^m$ 中的两个向量组，则 S 与 T 线性等价当且仅当 $\operatorname{span}(S)=\operatorname{span}(T)$.

命题 2.2.9 向量组的线性等价是等价关系.

向量组的秩

命题 2.2.10 设向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 可以被 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_p$ 线性表示.

1. 如果 $n > p$，则 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关;

2. 如果 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关，则 $n \leqslant p$.

推论2.2.11 设向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 和 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_p$ 线性等价，如果两个向量组都线性无关，则 $n = p$.

定义 2.2.12 (秩) 一个向量组 S 的任意一个极大线性无关部分组中向量的个数称为这个向量组的**秩**，记为 $\mathrm{rank}(S)$. 一个只包含零向量的向量组的秩定义为零.

这说明向量组的秩也是向量组之间线性等价这一等价关系中的不变量.

练习 2.2.9 举例说明秩相等的向量组未必线性等价.

基和维数

定理 2.2.13 (基存在定理) 给定 $\mathbb{R}^m$ 的子空间 $\mathcal{M}$，如果 $\mathcal{M} \neq \{\mathbf{0}\}$，则 $\mathcal{M}$ 存在一组基，且基中向量个数不大于 m.

定理 2.2.14 (基扩充定理) 设 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间，且 $\mathcal{M} \neq \{\mathbf{0}\}$. 如果 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$，则 $\mathcal{M}$ 的任意一组基都能扩充成 $\mathcal{N}$ 的一组基. 特别地，当 $\mathcal{N} = \mathbb{R}^m$ 时，子空间 $\mathcal{M}$ 的任意一组基都能扩充成 $\mathbb{R}^m$ 的一组基.

练习 2.2.5 证明，一个向量组的任意线性无关的部分组都可以扩充成它的一个极大线性无关部分组.

定义 2.2.15 (维数) 一个子空间 $\mathcal{M}$ 的任意一组基中向量的个数称为这个子空间的**维数**，记为 $\dim \mathcal{M}$. 平凡子空间 $\{\mathbf{0}\}$ 的维数定义为零.

维数是 r 的子空间，常称为 r 维子空间.

线性空间的维数与基

定理 2.2.16

1. 线性空间 $\mathbb{R}^m$ 的维数是 m;
2. 设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间，则 $\dim \mathcal{M} \leqslant m$;
3. 设 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的两个子空间，且 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$，则 $\dim \mathcal{M} \leqslant \dim \mathcal{N}$.

在维数已知的情况下，可以更简单地判定一个向量组是否为基.

命题 2.2.17 设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的 r 维子空间，给定 $\mathcal{M}$ 中含有 r 个向量的向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$.

1. 如果 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 线性无关，则 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 是 $\mathcal{M}$ 的一组基;
2. 如果 $\mathcal{M} = \operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r)$，则 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 是 $\mathcal{M}$ 的一组基.

命题 2.2.18 设 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的两个子空间，且 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. 如果 $\dim \mathcal{M} = \dim \mathcal{N}$，则 $\mathcal{M} = \mathcal{N}$.

在维数已知的情况下，可以更简单地判定一个向量组是否为基.

命题 2.2.17 设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的 r 维子空间，给定 $\mathcal{M}$ 中含有 r 个向量的向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$.

1. 如果 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 线性无关，则 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 是 $\mathcal{M}$ 的一组基;
2. 如果 $\mathcal{M}=\operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r)$，则 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 是 $\mathcal{M}$ 的一组基.

证明：

(1) M 是 R^m 的 r 维子空间，则存在一组基 $b_1,b_2,\cdots,b_r$，即 $b_1,b_2,\cdots,b_r$ 线性无关，且 $M=span(b_1,b_2,\cdots,b_r)$

因为 $a_1,a_2,\cdots,a_r\in M$，所以 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 能够由 $b_1,b_2,\cdots,b_r$ 线性表示 $\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_r\end{bmatrix}U$,

$a_1,a_2,\cdots,a_r$ 线性无关，所以 $\begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_r\end{bmatrix}x=0$ 只有零解，即 $\begin{bmatrix}b_1 & \cdots & b_r\end{bmatrix}Ux=0$ 只有零解 $\Rightarrow$ $Ux=0$ 只有零解，

U 可逆 $\Rightarrow\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_r\end{bmatrix}U^{-1}$，$a_1,a_2,\cdots,a_r$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_r$ 等价，

$span(b_1,b_2,\cdots,b_r)=span(a_1,a_2,\cdots,a_r)$，$a_1,a_2,\cdots,a_r$ 是 M 的一组基。

(2) $M=span(a_1,a_2,\cdots,a_r)$，设 $b_1,b_2,\cdots,b_r$ 是 M 的一组基，

则 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_r$ 可以互相线性表示，所以向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 的秩为 r,

$a_1,a_2,\cdots,a_r$ 线性无关，是 M 的一组基.

判断方阵是否可逆的方法

命题 2.2.19 给定 n 阶方阵 A，$\boldsymbol{A}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ 是其诱导的线性变换，以下叙述等价：

1. A 可逆，即存在 m 阶方阵 B，满足 $AB = BA = I_m$；
2. 存在 m 阶方阵 B，满足 $BA = I_m$；
3. 存在 m 阶方阵 B，满足 $AB = I_m$；
4. $\boldsymbol{A}$ 是双射；
5. $\boldsymbol{A}$ 是单射；
6. $\boldsymbol{A}$ 是满射.

练习2.2.15　给定 r 阶方阵 P 和子空间 M 的一组基 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ ，

令 $\left[b_1 \cdots b_r\right]=\left[a_1 \cdots a_r\right]P$,

证明：$b_1,b_2,\cdots,b_r$ 是 M 的一组基当且仅当矩阵 P 可逆。

证明：

$\Rightarrow$ 如果 $b_1,b_2,\cdots,b_r$ 是 M 的一组基

则 $b_1,b_2,\cdots,b_r$ 线性无关，$\left[b_1 \cdots b_r\right]x=0$ 只有零解 $\Rightarrow$ $\left[a_1 \cdots a_r\right]Px=0$ 只有零解，

$Px=0$ 只有零解 $\Rightarrow$ P 可逆。

或如果 $b_1,b_2,\cdots,b_r$ 是 M 的一组基

$b_1,b_2,\cdots,b_r$ 的秩为 r，$\left[a_1 \cdots a_r\right]P$ 的秩为 r，所以 P 可逆。

$\Leftarrow$ 如果矩阵 P 可逆

因为 $\left[b_1 \cdots b_r\right]=\left[a_1 \cdots a_r\right]P$，所以 $b_1,b_2,\cdots,b_r$ 的秩为 r，$b_1,b_2,\cdots,b_r$ 线性无关，

且 $span\left(b_1,b_2,\cdots,b_r\right)=span\left(a_1,a_2,\cdots,a_r\right)$，所以 $b_1,b_2,\cdots,b_r$ 是 M 的一组基。

矩阵的秩

定义 2.3.1 (秩) 矩阵 A 的列空间的维数 $\dim \mathcal{R}(A)$ 称为矩阵 A 的**秩**，记为 $\operatorname{rank}(A)$.

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1^T \\ \tilde{a}_2^T \\ \vdots \\ \tilde{a}_m^T \end{bmatrix}, \quad \underbrace{rank\left(a_1\ a_2 \cdots a_n\right)}_{\text{矩阵的列秩}} = \underbrace{rank\left(\tilde{a}_1\ \tilde{a}_2 \cdots \tilde{a}_m\right)}_{\text{矩阵的行秩}}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad rank\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = rank\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$

极大线性无关部分组的计算

例 2.3.2 求下列 $\mathbb{R}^4$ 中的向量组的极大线性无关部分组：

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\4\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}0\\2\\6\\-2\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_4=\begin{bmatrix}-3\\-1\\3\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_5=\begin{bmatrix}-1\\0\\-4\\-7\end{bmatrix}.$$

判断向量组是否线性相关，等价于判断对应的齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0,\\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0,\\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0,\\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0,\end{cases}$$

是否有非零解，而解又对应了线性表示的表示法. 这个向量组显然线性相关（为什么?）

初等行变换

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -3 & -1\\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4\\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7\end{bmatrix}\to B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -3 & -1\\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

对矩阵B，主元所在的列，即第1，2，4 列，
给出B 的列向量组的一个极大线性无关部分组.

对应地，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_4$ 是原向量组的一个极大线性无关部分组.

$B=PA$，即 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_{i_1} & \cdots & \boldsymbol{b}_{i_r}\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_{i_1} & \cdots & \boldsymbol{a}_{i_r}\end{bmatrix}$

$\boldsymbol{a}_{i_1},\boldsymbol{a}_{i_2},\cdots\boldsymbol{a}_{i_r}$线性无关$\Leftrightarrow \boldsymbol{b}_{i_1}\ \boldsymbol{b}_{i_2}\ \cdots\boldsymbol{b}_{i_r}$线性无关;

$\boldsymbol{a}_{i_1},\boldsymbol{a}_{i_2},\cdots\boldsymbol{a}_{i_r}$线性相关$\Leftrightarrow \boldsymbol{b}_{i_1}\ \boldsymbol{b}_{i_2}\ \cdots\boldsymbol{b}_{i_r}$线性相关

容易看出，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_5$ 和$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_3$，$\boldsymbol{a}_5$ 等都是极大线性无关部分组，
其中包含的向量个数都是3，因此向量组的秩为3，而矩阵 A 的秩也是3.

Gauss 消元法的计算过程，对应着列向量组的筛选法，不过避免了一些重复计算.

命题 2.3.3 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_n\end{bmatrix}$ 左相抵（即 A 经过一系列初等**行变换**后化成 B，见定义 1.5.16 ），则

1. 部分组 $\boldsymbol{a}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{a}_{i_r}$ 线性无关当且仅当对应的部分组 $\boldsymbol{b}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{b}_{i_r}$ 线性无关.
2. A 的列 $\boldsymbol{a}_j$ 可以被部分组 $\boldsymbol{a}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{a}_{i_r}$ 线性表示，即 $\boldsymbol{a}_j=k_1\boldsymbol{a}_{i_1}+\cdots+k_r\boldsymbol{a}_{i_r}$ 当且仅当 B 对应的列 $\boldsymbol{b}_j$ 可以被对应的部分组 $\boldsymbol{b}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{b}_{i_r}$ 线性表示，且表示法相同，即 $\boldsymbol{b}_j=k_1\boldsymbol{b}_{i_1}+\cdots+k_r\boldsymbol{b}_{i_r}$.
3. 部分组 $\boldsymbol{a}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{a}_{i_r}$ 是 A 的列向量组的极大线性无关部分组当且仅当 $\boldsymbol{b}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{b}_{i_r}$ 是 B 的列向量组的极大线性无关部分组.

推论 2.3.4 矩阵的行简化阶梯形唯一.

$$\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}
1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \cdots\cdots & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \cdots\cdots & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * & \cdots\cdots & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & & & &
\end{bmatrix}.\qquad R \text{ 的某自由列 } \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}$$

R 的列和 A 的对应列之间的线性关系相同.
因此 R 的某列是主列当且仅当 A 的对应列是主列.
而 A 的列之间的线性关系是确定的，
因此 R 的主列的个数和位置都被唯一确定.

$\boldsymbol{a}_j=\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{a}_{i_1}+\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{a}_{i_2}+\cdots+\boldsymbol{r}_m\boldsymbol{a}_{i_m}$，表示法唯一，

$$\boldsymbol{R}_j=\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{P}\boldsymbol{a}_{i_1}+\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{P}\boldsymbol{a}_{i_2}+\cdots+\boldsymbol{r}_m\boldsymbol{P}\boldsymbol{a}_{i_m}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}_1\\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m\end{bmatrix}$$

命题 2.3.5 $\operatorname{rank}(A)$ 等于 A 化成的阶梯形矩阵的阶梯数.

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$\mathbb{R}^n$ 的子空间 $\mathcal{R}(A^{\mathrm{T}})$ 由 A 的行向量的转置线性生成，因此称为矩阵 A 的**行（向量）空间**.

矩阵 A 的行向量对应于齐次方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 中的方程，而 $\operatorname{rank}(A^{\mathrm{T}})$ 描述了“有效”方程的个数.

例 2.3.6 考虑例 2.3.2 中的线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. 考虑 A 的行空间 $\mathcal{R}(A^{\mathrm{T}})$.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&0&-3&-1&\tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}}\\1&-1&2&-1&0&\tilde{\boldsymbol{a}}_2^{\mathrm{T}}\\4&-2&6&3&-4&\tilde{\boldsymbol{a}}_3^{\mathrm{T}}\\2&4&-2&4&-7&\tilde{\boldsymbol{a}}_4^{\mathrm{T}}\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&0&-3&-1&\tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}}\\0&-2&2&2&1&\tilde{\boldsymbol{a}}_2^{\mathrm{T}}-\tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}}\\0&-6&6&15&0&\tilde{\boldsymbol{a}}_3^{\mathrm{T}}-4\tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}}\\0&2&-2&10&-5&\tilde{\boldsymbol{a}}_4^{\mathrm{T}}-2\tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}}\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&0&-3&-1&\tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}}\\0&-2&2&2&1&\tilde{\boldsymbol{a}}_2^{\mathrm{T}}-\tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}}\\0&0&0&9&-3&\tilde{\boldsymbol{a}}_3^{\mathrm{T}}-3\tilde{\boldsymbol{a}}_2^{\mathrm{T}}-\tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}}\\0&0&0&12&-4&\tilde{\boldsymbol{a}}_4^{\mathrm{T}}+\tilde{\boldsymbol{a}}_2^{\mathrm{T}}-3\tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}}\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&0&-3&-1&\tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}}\\0&-2&2&2&1&\tilde{\boldsymbol{a}}_2^{\mathrm{T}}-\tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}}\\0&0&0&9&-3&\tilde{\boldsymbol{a}}_3^{\mathrm{T}}-3\tilde{\boldsymbol{a}}_2^{\mathrm{T}}-\tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}}\\0&0&0&0&0&\tilde{\boldsymbol{a}}_4^{\mathrm{T}}-\frac{4}{3}\tilde{\boldsymbol{a}}_3^{\mathrm{T}}+5\tilde{\boldsymbol{a}}_2^{\mathrm{T}}-\frac{5}{3}\tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}}\end{array}\right].$$

$\tilde{\boldsymbol{a}}_4^{\mathrm{T}}-\frac{4}{3}\tilde{\boldsymbol{a}}_3^{\mathrm{T}}+5\tilde{\boldsymbol{a}}_2^{\mathrm{T}}-\frac{5}{3}\tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}^{\mathrm{T}}$ 第四个方程是前三个方程的线性组合，因此是多余的.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & \tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}} \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & \tilde{\boldsymbol{a}}_2^{\mathrm{T}} \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 & \tilde{\boldsymbol{a}}_3^{\mathrm{T}} \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 & \tilde{\boldsymbol{a}}_4^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & \tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}} \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 & \tilde{\boldsymbol{a}}_2^{\mathrm{T}} - \tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 & \tilde{\boldsymbol{a}}_3^{\mathrm{T}} - 3\tilde{\boldsymbol{a}}_2^{\mathrm{T}} - \tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\boldsymbol{a}}_4^{\mathrm{T}} - \frac{4}{3}\tilde{\boldsymbol{a}}_3^{\mathrm{T}} + 5\tilde{\boldsymbol{a}}_2^{\mathrm{T}} - \frac{5}{3}\tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

即阶梯形的行空间和 A 的行空间是同一个子空间. 可见 $\tilde{\boldsymbol{a}}_1, \tilde{\boldsymbol{a}}_2 - \tilde{\boldsymbol{a}}_1, \tilde{\boldsymbol{a}}_3 - 3\tilde{\boldsymbol{a}}_2 - \tilde{\boldsymbol{a}}_1$ 线性无关, 且线性生成行空间. 因此 $\tilde{\boldsymbol{a}}_1, \tilde{\boldsymbol{a}}_2 - \tilde{\boldsymbol{a}}_1, \tilde{\boldsymbol{a}}_3 - 3\tilde{\boldsymbol{a}}_2 - \tilde{\boldsymbol{a}}_1$ 是 $\mathcal{R}(A^{\mathrm{T}})$ 的一组基. 易见 $\tilde{\boldsymbol{a}}_1, \tilde{\boldsymbol{a}}_2, \tilde{\boldsymbol{a}}_3$ 也是 $\mathcal{R}(A^{\mathrm{T}})$ 的一组基. ☺

$$QA^T = Q\begin{bmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \cdots & \tilde{a}_m \end{bmatrix}, \quad Q\begin{bmatrix} \tilde{a}_{i_1} & \tilde{a}_{i_2} & \cdots & \tilde{a}_{i_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{i_1} & \tilde{b}_{i_2} & \cdots & \tilde{b}_{i_r} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \tilde{a}_{i_1}^T \\ \tilde{a}_{i_2}^T \\ \vdots \\ \tilde{a}_{i_r}^T \end{bmatrix} \text{与} \begin{bmatrix} \tilde{b}_{i_1}^T \\ \tilde{b}_{i_2}^T \\ \vdots \\ \tilde{b}_{i_r}^T \end{bmatrix} \text{的线性相关性相同}$$

命题 2.3.7 矩阵 A 的行空间的维数 $\operatorname{rank}(A^{\mathrm{T}})$ 等于 A 化成的阶梯形矩阵的阶梯数.

命题 2.3.8 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则 $\operatorname{rank}(A^{\mathrm{T}}) = \operatorname{rank}(A)$.

设 $m \times n$ 矩阵 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$，则 $\mathcal{R}(A) = \operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \subseteq \mathbb{R}^m$. 显然有 $\operatorname{rank}(A) \leqslant n$. 当 $\operatorname{rank}(A) = n$ 时，即 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关时，称矩阵 A **列满秩**.

由定理 2.2.16 可知，$\operatorname{rank}(A) \leqslant m$. 当 $\operatorname{rank}(A) = m$ 时，称矩阵 A **行满秩**.

特别地，如果 $\operatorname{rank}(A) = m = n$，则称矩阵 A **满秩**.

命题 2.3.10 1. 矩阵 A 可逆当且仅当 A 满秩.

2. 矩阵 A 是零矩阵当且仅当 $\operatorname{rank}(A) = 0$.

命题 2.3.11 设 A, B 分别为 $l \times m$ 矩阵和 $m \times n$ 矩阵，则 $\mathcal{R}(AB) \subseteq \mathcal{R}(A)$. 特别地，如果 B 可逆，则 $\mathcal{R}(AB) = \mathcal{R}(A)$.

命题 2.3.12 设 A, B 是 $l \times m, m \times n$ 矩阵，则

$$\operatorname{rank}(AB) \leqslant \operatorname{rank}(A), \quad \operatorname{rank}(AB) \leqslant \operatorname{rank}(B),$$

即矩阵乘法不增加秩.

练习2.3.14 设 $m \times n$ 矩阵 A 列满秩，
求证：存在行满秩的 $n \times m$ 矩阵B，使得$BA = I_n$.　　左逆

证明：设 $A=\begin{bmatrix}\tilde{a}_1^T\\ \tilde{a}_2^T\\ \vdots\\ \tilde{a}_m^T\end{bmatrix}$，$\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_m \in \mathrm{R}^n$，且线性无关，则有唯一的$\begin{bmatrix}b_{k1}\\ b_{k2}\\ \vdots\\ b_{km}\end{bmatrix}$，满足$\begin{bmatrix}\tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \cdots & \tilde{a}_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{k1}\\ b_{k2}\\ \vdots\\ b_{km}\end{bmatrix}=e_k$

$$\begin{bmatrix}\tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \cdots & \tilde{a}_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1}\\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{1m} & b_{2m} & \cdots & b_{nm}\end{bmatrix}=I_n \Rightarrow \begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{a}_1^T\\ \tilde{a}_2^T\\ \vdots\\ \tilde{a}_m^T\end{bmatrix}=BA=I_n$$

$$\begin{bmatrix}\tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \cdots & \tilde{a}_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1}\\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{1m} & b_{2m} & \cdots & b_{nm}\end{bmatrix}x=0\text{只有零解} \Rightarrow \begin{bmatrix}b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1}\\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{1m} & b_{2m} & \cdots & b_{nm}\end{bmatrix}x=0\text{只有零解} \Rightarrow B\text{行满秩}$$

练习2.3.13 当矩阵 A 列满秩时，$AB = AC$ 可以推出 $B = C$。

练习2.3.16 设 A, B 是 n 阶方阵，利用不等式 $\operatorname{rank}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$，证明，

1. 如果 $AB = I_n$，则 A, B 都可逆，且 $BA = I_n$.
2. 如果 AB 可逆，则 A, B 都可逆.

证明：

(1) 设A、B是方阵，利用$rank(AB) \le \min\{rank(A), rank(B)\}$，

得$n = rank(I_n) \le \min\{rank(A), rank(B)\} \le n$

所以$rank(A) = rank(B) = n$

$\operatorname{rank}(A) = n \Rightarrow$ A可通过一系列初等行变换，变为单位矩阵，即 $PA = I_n$。

$AB = I_n \Rightarrow PABA = PI_nA \Rightarrow (PA)BA = PA \Rightarrow BA = I_n$

(2) AB可逆，所以$rank(AB) = n \le \min\{rank(A), rank(B)\} \le n$

所以$rank(A) = rank(B) = n$，A、B都可逆。

相抵标准形

命题 2.3.13 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, P,Q 分别是 m 阶和 n 阶可逆矩阵, 则 $\operatorname{rank}(PAQ)=\operatorname{rank}(A)$. 即, 矩阵的秩在初等行变换和初等列变换下不变.

定义 2.3.14 (相抵) 如果矩阵 A 可以经过一系列初等行变换和初等列变换化成矩阵 B, 则称 A 和 B **相抵**.

命题 2.3.15 给定两个 $m\times n$ 矩阵 A,B. 那么二者相抵, 当且仅当存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q, 使得 $PAQ=B$.

命题 2.3.16 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, 则存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q, 使得 $PAQ=D_r=\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$, 其中 $r=\operatorname{rank}(A)$.

命题中的 D_r 称为矩阵 A 的**相抵标准形**.

推论 2.3.17 设 A,B 是 $m\times n$ 矩阵, 则 A 和 B 相抵, 当且仅当 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$.

作 业（10月18日）

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

练习2.3

1，2，3，5，6，7，12，18，23（1,2,3）

10月25日提交

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~