第四周作业参考解答

于子宏

部分同学作业漏题, 请注意对照网络学堂检查作业题目. 本次作业为:

练习 1.5　12(1,2,3,4,5), 15, 17, 23

练习 1.6　2, 6, 13, 3, 4, 5, 12, 14

练习 1.7　1.(1,3,5), 2

练习 1.5.12

1. 设 $B = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{bmatrix}$. 易知 $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 和 $A\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 都有无穷组解. 所以可以找到 B.

由于 $CA = I_3$, 则 $A^TC^T = I_3$. 设 $C = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix}$, 则 $C^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \end{bmatrix}$. 易知 $A^T\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 无解.($A^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_2$ 和 $A^T\boldsymbol{z} = \boldsymbol{e}_3$ 同样无解). 所以不存在这样的 C.

2. 均不能. 方法同上.

3. $Ax = 0$ 两边左乘 C 知 $CAx = 0$, 即 $I_nx = 0, x = 0$. 此时有 $m \geq n$.

4. 上一题解答取转置即得. 此时有 $m \leq n$.

5. 前两问给出了 $m = n$. 我们有 $B = I_nB = CAB = CI_n = C$.

■ *此题有部分同学第 3、4 问只写了 $m = n$, 需要结合第 1 问给出更一般的条件.*

练习 1.5.15

1. A 的第一列全是零等价于 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$. 左相抵不改变这一性质.

2. A 的所有列都相同等价于 $A\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{bmatrix}=0$. 左相抵不改变这一性质.

3. A 的第一列是第二列与第三列的和等价于 $A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}=0$. 左相抵不改变这一性质.

4. 我们考虑其逆否命题. B 的第一列和第二列成比例等价于存在常数 k_1, k_2 使得 $B\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}=0$. 左相抵不改变这一性质.

■ *需要注意到 A 与 B 左相抵等价于存在可逆矩阵 P 使得 $B=PA$. 也可以把 A 写成 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots a_n \end{bmatrix}$ 进行说明.*

练习 1.5.17

1. 是的. (由于多项式中只出现矩阵 A, 所以乘法交换律成立.)

2. 这是由于每个 $\begin{bmatrix} a & b & c \\ & a & b \\ & & a \end{bmatrix}=aI_3+b\begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ & & \end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ & & \end{bmatrix}^2$ 均为 $\begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ & & \end{bmatrix}$ 的多项式.

3. 只证后者. 设 $g(x)=\sum_{i=1}^n g_i x^i, p(x)=\sum_{i=1}^{n_1} p_i x^i, q(x)=\sum_{i=1}^{n_2} q_i x^i$, 我们有 $g_i=\sum_{1\le i_1\le n_1, 1\le i_2\le n_2, i_1+i_2=i} p_{i_1}q_{i_2}$. 回忆我们对多项式 $g(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ 定义 $g(A)=a_nA^n+\ldots+a_1A+a_0I$, 为验证 $g(A)=p(A)q(A)$, 将等式右边展开并比较两边 A 各幂次的系数即可. 由于多项式中只含有 A 时乘法交换律成立, 所以命题得证.

4. 例: $\begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$. (对换矩阵亦满足要求.)

5. $v=\frac{A+I_n}{2}v+\frac{-(A-I_n)}{2}v$.

6. $I_3=A^3+I_3=(A+I)\left(A^2-A+I_3\right); -I_3=A^3-I_3=(A-I)\left(A^2+A+I_3\right)$.

则 $p(x)=x^2-x+1, q(x)=-x^2-x-1$.

(注意到对任意的 $\lambda\neq 0$, 同样的论证给出 $A-\lambda I_n$ 可逆.)

■ *第二问展开直接计算也可. 第 6 问注意 $q(x)$ 不要忘记负号, 以及注意多项式不要 x I_n 混写, 也不要 A 1 混写.*

练习 1.5.23

设对称方阵 A 满足 $A^T = A$, 则 $(A^{-1})^T A = (A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I$ 所以 $(A^{-1})^T = A^{-1}$, 即对称矩阵的逆矩阵也是对称矩阵. 同理可证对于反对称矩阵 B 有 $(B^{-1})^T = -B^{-1}$.

■ 直接利用 $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ 的性质直接可得结论, 但最好也先证明这一性质.

练习 1.6.2

1. 分块求逆. 结果为 $\begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ 2 & -1 & & & \\ & & 1 & -4 & -3 \\ & & 1 & -5 & -3 \\ & & -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

2. 将矩阵写成一个准对角阵右乘置换二三列的置换矩阵再求逆. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ & & 1 & -1 \\ -1 & 1 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$.

■ 求逆不要再算错数啦!

练习 1.6.3

1. $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_m \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -A & I_n \\ I_m & 0 \end{bmatrix}$

■ 注意角标 m 和 n 不要写反.

练习 1.6.4

$X = \begin{bmatrix} & A \\ B & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & I \\ I & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & \\ & A \end{bmatrix}$ 是可逆矩阵之积故可逆. $X^{-1} = \begin{bmatrix} B & \\ & A \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} & I \\ I & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & B^{-1} \\ A^{-1} & \end{bmatrix}$.

练习 1.6.5

$U = \begin{bmatrix} A & C \\ & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & A^{-1}C \\ & I \end{bmatrix}$ 是可逆矩阵之积故可逆. $U^{-1} = \begin{bmatrix} I & A^{-1}C \\ & I \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -A^{-1}C \\ & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ & B^{-1} \end{bmatrix}$.

练习 1.6.6

取 $T = \begin{bmatrix} T_1 & \\ & T_2 \end{bmatrix}$. $T^{-1}\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}T = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & \\ & T_2^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 & \\ & T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^{-1}A_1T_1 & \\ & T_2^{-1}A_2T_2 \end{bmatrix}$ 为对角矩阵.

练习 1.6.12

注意到 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}^3 = \mathbf{0}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{bmatrix}^2 = \mathbf{0}$, 则可构造 $f(x) = a(x-2)^3(x-1)^2$, 其中 $a \neq 0$.

(注意对分块对角矩阵 $\begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_n \end{bmatrix}$ 有 $f\left(\begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(J_n) \end{bmatrix}$.)

■ *最好能观察到 (或者记住) 上述性质, 对于用极复杂的列方程组求解系数的同学, 系数应为 1 -8 25 -38 28 -8, 大多数人都没求对这个答案 >_<*

练习 1.6.13

例: $\begin{bmatrix} & I \\ -I & \end{bmatrix}$. (或以之为子块构造分块矩阵.)

练习 1.6.14

1. 设对某个可逆矩阵 P 有 $A = PB$, 则 $Ax = PBx = 0$ 当且仅当 $Bx = 0$.

2. A 的最后一列不是主列, 则 $Ax = 0$ 对应的解集最后一项为自由变量, 可以取为 1.

3. 这个向量的最后一行非零.

4. 由第 2 问, 存在 x 使得 $A\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$. 由第 1 问, $B\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$. 则 $(A-B)\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$, 故 $A-B$ 的最后一列为零, A 和 B 最后一列也相等. 从而 $A = B$.

5. 若 B 的最后一列不是主列, 则存在 x 使得 $B\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$. 由第 1 问从而也有 $A\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$, 与第 3 问矛盾! 所以 B 的最后一列也是主列. 故 A 和 B 的最后一列均为 $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

6. 对矩阵的列数归纳.

■ *第 2 问有同学认为若 A 的最后一列不是主列, 则最后一列必全为 0, 这是不对的.*

练习 1.7.1

1. $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$ 5. $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 2 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$

■ *LU 分解也不要算错数啦!*

练习 1.7.2

$$1.\ x = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad 2.\ y = \begin{bmatrix} 34 \\ -6 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}. \quad 3.\ x = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

■ 解方程也不要算错数啦!