Review

- 含参(定)积分的性质

$$I(t)=\int_{\alpha}^{\beta} g(t,x)dx,\quad D=[a,b]\times[\alpha,\beta]$$

(1) $g(t,x)\in C(D)$

$$\Rightarrow \begin{cases} I(t)\in C[a,b],\text{即} \lim\limits_{t\to t_0}\int_{\alpha}^{\beta} g(t,x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}\lim\limits_{t\to t_0} g(t,x)dx \\ \int_a^b dt\int_{\alpha}^{\beta} g(t,x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}dx\int_a^b g(t,x)dt \end{cases}$$

(2) $g(t,x), g_t'(t,x)\in C(D)$

$$\Rightarrow I'(t)=\frac{d}{dt}\int_{\alpha}^{\beta} g(t,x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} g_t'(t,x)dx.$$

(3) $g(t,x), g_t'(t,x) \in C([a,b]\times[c,d]), \alpha(t), \beta(t)$ 在$[a,b]$上可导，且

$$c \le \alpha(t), \beta(t) \le d, \quad \forall t \in [a,b],$$

则

$$f(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} g(t,x)dx$$

在区间$[a,b]$上可导，且

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} g(t,x)dx.$$

$$= \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} g_t'(t,x)dx + g(t,\beta(t))\beta'(t) - g(t,\alpha(t))\alpha'(t).$$

§2. 广义含参积分的一致收敛性

Question: 设$f(t,x)$在$D=[\alpha,\beta]\times[a,+\infty]$上连续, $\forall t\in[\alpha,\beta]$,

广义积分$I(t)=\int_a^{+\infty} f(t,x)dx$收敛. 问$I(t)\in C[\alpha,\beta]$?

分析: $|I(t)-I(t_0)|=\left|\int_a^{+\infty} f(t,x)dx-\int_a^{+\infty} f(t_0,x)dx\right|$

$$\le\int_a^{+\infty}|f(t,x)-f(t_0,x)|dx$$

由f的连续性, $|f(t,x)-f(t_0,x)|$可控, 但积分区间为$[a,+\infty)$. 因此需要更多的条件来确保广义含参积分的连续性.

以下就无穷限积分进行讨论,瑕积分有相似的结论.

$I(t_0)=\int_a^{+\infty} f(t_0,x)dx$, 则$\underline{\forall\varepsilon>0,\exists \mathrm{M}(\varepsilon,t_0)>a}$, $\forall \mathrm{A}>\mathrm{M}$, 有

$$\left|\int_a^{\mathrm{A}} f(t_0,x)dx-I(t_0)\right|<\varepsilon.$$

Cauchy收敛原理:

$\int_a^{+\infty} f(t_0,x)dx$ 收敛

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists \mathrm{M}(\varepsilon,t_0), s.t. \left|\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}'} f(t_0,x)dx\right|<\varepsilon,\ \ \forall \mathrm{A},\mathrm{A}'>\mathrm{M}.$$

Def. $\forall t\in[\alpha,\beta], I(t)=\int_a^{+\infty} f(t,x)dx$ 收敛.若$\forall\varepsilon>0, \exists \mathrm{M}(\varepsilon), s.t.$

$$\left|\int_a^{\mathrm{A}} f(t,x)dx - I(t)\right| < \varepsilon, \quad \forall \mathrm{A} > \mathrm{M}, \forall t\in[\alpha,\beta],$$

则称含参广义积分$\int_a^{+\infty} f(t,x)dx$ 关于$t\in[\alpha,\beta]$一致收敛.

Thm.(Cauchy收敛原理)

$\int_a^{+\infty} f(t,x)dx$ 关于$t\in[\alpha,\beta]$一致收敛

$\Leftrightarrow \ \forall\varepsilon>0, \exists \mathrm{M}(\varepsilon), s.t.$

$$\left|\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}'} f(t,x)dx\right| < \varepsilon, \quad \forall \mathrm{A}, \mathrm{A}' > \mathrm{M}, \forall t\in[\alpha,\beta].$$

Remark. $\int_a^{+\infty} f(t,x)dx$ 关于$t\in[\alpha,\beta]$非一致收敛

$\Leftrightarrow\ \exists\varepsilon>0,\forall \mathrm{M},\exists \mathrm{A},\mathrm{A}'>\mathrm{M},\exists t_0\in[\alpha,\beta], s.t.$

$$\left|\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}'} f(t_0,x)dx\right|\ge\varepsilon.$$

例. 证明$\int_a^{+\infty} ye^{-xy}dx$ 关于$y\in[0,+\infty)$不一致收敛.

Pf. $\exists\varepsilon_0=e^{-1}-e^{-2}, \forall \mathrm{M}>0,\exists \mathrm{A}=\mathrm{M}+1,\mathrm{A}'=2\mathrm{A}, y_0=\dfrac{1}{\mathrm{A}}, s.t.$

$$\left|\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}'} y_0e^{-xy_0}dx\right|=-e^{-xy_0}\Big|_{x=\mathrm{A}}^{\mathrm{A}'}=e^{-\mathrm{A}y_0}-e^{-\mathrm{A}'y_0}=\varepsilon_0,$$

故广义积分关于$y\in[0,+\infty)$不一致收敛.□

Thm.(Weirstrass判别法) 设$f(t,x)$在$[\alpha,\beta]\times[a,+\infty]$上连续,

若$\exists g\in C[a,+\infty),\exists b>a,s.t.$

$$|f(t,x)|\le g(x),\quad \forall(t,x)\in[\alpha,\beta]\times[b,+\infty),$$

且$\int_a^{+\infty}g(x)dx$收敛,则$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$在$t\in[\alpha,\beta]$上一致收敛.

Pf. $\int_a^{+\infty}g(x)dx$收敛,则$\underline{\forall\varepsilon>0,\exists \mathrm{M}(\varepsilon)>b>0,s.t.\forall \mathrm{A}>\mathrm{A}'>\mathrm{M}(\varepsilon)}$

$$\left|\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}'}g(x)dx\right|<\varepsilon.$$

而$|f(t,x)|\le g(x),\ \forall(t,x)\in[\alpha,\beta]\times[b,+\infty)$,于是

$$\underline{\left|\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}'}f(t,x)dx\right|}\le\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}'}|f(t,x)|dx\le\left|\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}'}g(x)dx\right|\underline{<\varepsilon,\forall t\in[\alpha,\beta]}.$$

故$\int_a^{+\infty}f(t,x)dx$ 在$t\in[\alpha,\beta]$上一致收敛.□

例. (1)设$c>0,\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx$ 在$y\in[c,+\infty)$上是否一致收敛?

(2)$\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx$ 在$y\in(0,+\infty)$上是否一致收敛?

解: (1) $c>0$,则$\int_0^{+\infty}e^{-cx}dx=-\frac{1}{c}e^{-cx}\Big|_{x=0}^{+\infty}=\frac{1}{c}$收敛, 且

$$e^{-xy}\le e^{-cx},\quad \forall(x,y)\in[0,+\infty)\times[c,+\infty).$$

故$\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx$ 在$y\in[c,+\infty)$上一致收敛(Weirstrass).

(2) $\exists\varepsilon_0=e^{-1}-e^{-2},\forall \mathrm{M}>0,\exists \mathrm{A}=\mathrm{M}+1,\mathrm{A}'=2\mathrm{A},y_0=\frac{1}{\mathrm{A}}$, s.t.

$$\left|\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}'}e^{-xy_0}dx\right|=-\frac{1}{y_0}e^{-xy_0}\Big|_{x=\mathrm{A}}^{\mathrm{A}'}=\frac{1}{y_0}(e^{-\mathrm{A}y_0}-e^{-\mathrm{A}'y_0})=\mathrm{A}\varepsilon_0>\varepsilon_0,$$

故$\int_0^{+\infty}e^{-xy}dx$ 在$y\in[0,+\infty)$上不一致收敛(*Cauchy*).□

Remark. (1)$f(x,t)$在$[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$中连续, 若$\int_a^{+\infty} f(x,\beta)dx$发散, 而$\forall t\in[\alpha,\beta)$, $\int_a^{+\infty} f(x,t)dx$都收敛, 则$\int_a^{+\infty} f(x,t)dx$在$t\in[\alpha,\beta)$上非一致收敛.(证明留作课后练习)

(2) $f(x,t)$连续, 若$\int_a^{+\infty} f(x,t)dx$在$t\in I_1$上一致收敛, 在$t\in I_2$上也一致收敛, 则$\int_a^{+\infty} f(x,t)dx$在$t\in I_1\bigcup I_2$上一致收敛.

Question. $\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx$ 在$y\in[c,d]$上是否一致收敛?

分析: 给定$y\in[c,d]$, 若$f(x,y)$关于x单调, 则

$$\int_A^{A'} f(x,y)g(x,y)dx$$

$$= f(A,y)\int_A^{\xi} g(x,y)dx + f(A',y)\int_{\xi}^{A'} g(x,y)dx.$$

欲使$\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx$ 在$y\in[c,d]$上一致收敛, 只要控制

$\left|\int_A^{A'} f(x,y)g(x,y)dx\right|$, 可以考虑分别对$f$和$g$加条件.

Thm.(Abel判别法) 设$f(x,y), g(x,y)\in C\left([a,\infty)\times[c,d]\right)$,若

(1) $\forall y\in[c,d]$, $f(x,y)$关于x单调;

(2) $f(x,y)$关于$y\in[c,d]$一致有界,即$\exists \mathrm{M}>0, s.t.$

$$\left|f(x,y)\right|<\mathrm{M},\qquad \forall x\in[a,+\infty), \forall y\in[c,d];$$

(3) $\int_a^{+\infty} g(x,y)dx$关于$y\in[c,d]$一致收敛;

则$\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx$在$y\in[c,d]$上一致收敛.

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{A}'} f(x,y)g(x,y)dx$$

$$= f(\mathrm{A},y)\int_{\mathrm{A}}^{\xi} g(x,y)dx + f(\mathrm{A}',y)\int_{\xi}^{\mathrm{A}'} g(x,y)dx$$

Thm.(Dirichlet判别法) $f(x,y),g(x,y)\in C\big([a,\infty)\times[c,d]\big)$,若

(1) $\forall y\in[c,d]$, $f(x,y)$关于x单调,

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,y)=0$关于$y\in[c,d]$一致成立, 即$\forall\varepsilon>0$,

$\exists L(\varepsilon)>0, s.t.$

$$\left|f(x,y)\right|<\varepsilon,\quad \forall x>L(\varepsilon),\forall y\in[c,d];$$

(3) $\int_a^{\mathrm{A}} g(x,y)dx$关于$y\in[c,d]$以及充分大的A一致有界,即

$\exists\mathrm{M}>0, s.t.$对$\forall y\in[c,d]$以及充分大的A, 都有

$$\left|\int_a^{\mathrm{A}} g(x,y)dx\right|\le\mathrm{M}.$$

则$\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)dx$在$y\in[c,d]$上一致收敛.

例. $\int_1^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x$关于$y\in[1,+\infty)$是否一致收敛?

解: 令$f(x,y)=\frac{1}{x}$, $g(x,y)=\sin xy$, 则 $f(x,y)$关于x单调;

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,y)=0\text{关于}y\in[1,+\infty)\text{一致成立};$$

$$\left|\int_1^{\mathrm{A}} g(x,y)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_1^{\mathrm{A}}\sin xy\,\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\frac{1}{y}\cos xy\Big|_{x=1}^{A}\right|\le\frac{2}{|y|}\le 2,\quad \forall \mathrm{A}>1, y\in[1,+\infty).$$

由Dirichlet判别法, $\int_1^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x$关于$y\in[1,+\infty)$一致收敛.□

例. $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$关于$y\in[0,+\infty)$是否一致收敛?

解: 令$f(x,y)=\dfrac{\sin x}{x}, g(x,y)=e^{-xy}$, 则

$$\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\left(=\frac{\pi}{2}\right),$$

关于$y\in[0,+\infty)$一致收敛; 给定$y\in[0,+\infty)$, $g(x,y)$关于x单调, 且

$$|g(x,y)|=|e^{-xy}|\le 1,\quad \forall x\ge 0, y\ge 0.$$

由Abel判别法, $\int_0^{+\infty} e^{-xy}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 关于$y\in[0,+\infty)$一致收敛.□

作业：习题2.1 No.4

Lemma (Riemann-Lebesgue). f在$[a,b]$上可积或广义绝对可积,则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx=0,\ \ \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx=0.$$

Proof. 只证第一式,第二式同理.

Case1. 设f在$[a,b]$上可积,则f在$[a,b]$上有界,即

$$\exists M>0, s.t. \left|f(x)\right|\le M, \forall x\in[a,b].$$

任意给定$\lambda>1$,令$n=\left\lfloor\sqrt{\lambda}\right\rfloor$. n等分$[a,b]$:

$$x_i=a+(b-a)i/n,\quad i=0,1,2,\cdots,n.$$

$$\omega_i(f)=\sup\left\{f(\xi)-f(\eta):\xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]\right\},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

f在$[a,b]$上可积,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i=0$. 于是

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\cos\lambda x dx\right|$$

$$\le\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(f(x)-f(x_i)\right)\cos\lambda x dx\right|+\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i)\cos\lambda x dx\right|$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)|\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos\lambda x dx\right|$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i+\frac{2Mn}{\lambda}=\sum_{i=1}^{\lfloor\sqrt{\lambda}\rfloor}\omega_i(f)\Delta x_i+\frac{2M\lfloor\sqrt{\lambda}\rfloor}{\lambda}$$

$$\to 0,\text{当}\lambda\to+\infty\text{时}.$$

Case2. f在$[a,b]$上广义绝对可积, 不妨设a为唯一的瑕点.

则$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, s.t., f在$[a+\delta, b]$上可积, 且

$$\int_a^{a+\delta} |f(x)|\,dx < \varepsilon/2.$$

从而 $$\left|\int_a^{a+\delta} f(x)\cos\lambda x dx\right| \le \int_a^{a+\delta} |f(x)|\,dx < \varepsilon/2,$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_{a+\delta}^{b} f(x)\cos\lambda x dx = 0.$$

于是$\exists \Lambda > 0$, 当$\lambda > \Lambda$时, $\left|\int_{a+\delta}^{b} f(x)\cos\lambda x dx\right| < \varepsilon/2$, 进而有

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx\right| \le \left|\int_a^{a+\delta} f(x)\cos\lambda x dx\right| + \left|\int_{a+\delta}^{b} f(x)\cos\lambda x dx\right|$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \quad \forall \lambda > \Lambda. \square$$

例. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$.

解: 由广义积分的Dirichlet判别法, $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 收敛. 于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{\lambda\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\lambda t}{t}\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+1/2)t}{t}\mathrm{d}t.$$

恒等式 $\frac{\sin\left(n+1/2\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt$ 两边在$[0,\pi]$上积分, 得

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+1/2\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt=\frac{\pi}{2}.$$

令$g(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}$,往证$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}g(t)\sin(n+1/2)t\mathrm{d}t=0.$

$$\lim_{t\to 0}g(t)=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin\frac{t}{2}-t}{2t\sin\frac{t}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{2t\sin t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{3!}t^3+o(t^3)}{2t\left(t-\frac{1}{3!}t^3+o(t^3)\right)}=0.$$

故$t=0$是$g(t)$的可去间断点.由Riemann-Lebesgue引理,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}g(t)\sin(n+1/2)t\mathrm{d}t=0.\square$$