第六次习题课题目

注释:

对于矩阵 A, 它的四个基本子空间是列空间 $C(A)$, 零空间 $N(A)$, 行空间 $C(A^T)$ 和 A^T 的零空间 $N(A^T)$。

习题 1. 对以下矩阵进行 QR 分解:

$$1.\ \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix};\ 2.\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ 3.\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};\ 4.\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};\ 5.\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

习题 2. 我们有矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$。求四维空间中超平面 $C(A)$ 的一个单位法向量（即求一个单位向量，其与 A 所有的列向量都正交)。

习题 3 (练习 3.1.14). 令 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5$ 为 $\mathbb{R}^5$ 的一组标准正交基。

1. 证明 $\frac{1}{3}(2\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3), \frac{1}{3}(2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3), \frac{1}{3}(\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 - 2\boldsymbol{a}_3)$ 为两两正交的单位向量;
2. 给以下向量生成的子空间找一组正交基：$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_5, \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4, 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$;
3. 考虑向 $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_5$ 生成的子空间进行投影的正交投影矩阵，用我们的向量 $\boldsymbol{a}_i$ 表示出来。

习题 4 (练习 3.2.4).

1. 对任意正交矩阵 Q，证明分块矩阵 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} Q & Q \\ Q & -Q \end{bmatrix}$ 仍旧是正交矩阵;
2. 令 $H_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$。令 $H_{2n} = \begin{bmatrix} H_n & H_n \\ H_n & -H_n \end{bmatrix}$。证明 H_{2^n} 是对称矩阵，它的列两两正交，且所有元素都是 ± 1。(该矩阵称为 Hadamard 矩阵，其列向量（或者行向量）即为高维的小波基。)

注记：这里 H_{2^n} 的列向量组成了一组（非标准）正交基，其中每个向量的分量都是 ± 1，称为 Haar 小波基。它在图像处理，信息压缩等方面经常用到。给定 n 阶矩阵 A, 如果 A 的元

素都是 1 或 -1, 且 $A^TA = nI_n$, 则称 A 是一个 n 阶 Hadamard 矩阵. 显然 Hadamard 是所有元素绝对值相同的正交矩阵的倍数.

3. 列举所有的 1, 2 阶 Hadamard 矩阵.
4. 说明不存在 3 阶 Hadamard 矩阵.
5. 找出一个 4 阶 Hadamard 矩阵.

习题 5 (练习 3.3.12). 请将以下向量 $\boldsymbol{x}$ 分解成在 $N(A)$ 中的部分与在 $C(A^T)$ 中的部分的和，然后点积验证它们确实垂直。

1. $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;
2. $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;
3. $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$;

习题 6 (练习 3.3.17). 考虑矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}$。

1. 求向 $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}$ 的列空间的正交投影矩阵 P_1;
2. 求向 $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}$ 的行空间的正交投影矩阵 P_2;
3. 计算 P_1AP_2. 为什么会有如此结果?

习题 7. 考虑 $\mathbb{R}^n$ 中两个子空间 $\mathscr{M}, \mathscr{N}$。通过把对应的一组基当成列向量，不妨假设可以找到列满秩矩阵 A, B，使得 $C(A) = \mathscr{M}, C(B) = \mathscr{N}$。

1. 证明 $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{N}$ 当且仅当存在矩阵 X 使得 $A = BX$;
2. 仿照集合论中补集的性质, 我们期待正交补有类似的性质。假设 $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{N}$, 请证明 $\mathscr{N}^\perp \subseteq \mathscr{M}^\perp$。(能否从前一小问，看出一个矩阵角度的证明 ?)

习题 8 (练习 3.3.8). 考虑 $\mathbb{R}^n$ 中两个子空间 $\mathscr{M},\mathscr{N}$。通过把对应的一组基当成列向量，不妨假设可以找到列满秩矩阵 A,B，使得 $C(A)=\mathscr{M},C(B)=\mathscr{N}$。

1. $\mathscr{M}+\mathscr{N}$ 是哪个由 A,B 构造出的矩阵的列空间？这意味着 $(\mathscr{M}+\mathscr{N})^{\perp}$ 是该矩阵的什么空间？

2. $\mathscr{M}^{\perp},\mathscr{N}^{\perp}$ 分别是哪个由 A,B 构造出的矩阵的零空间？这意味着 $\mathscr{M}^{\perp}\cap\mathscr{N}^{\perp}$ 是哪个由 A,B 构造出的矩阵的零空间？

3. 证明子空间版本的 De Morgan 定律：$(\mathscr{M}+\mathscr{N})^{\perp}=\mathscr{M}^{\perp}\cap\mathscr{N}^{\perp},(\mathscr{M}\cap\mathscr{N})^{\perp}=\mathscr{M}^{\perp}+\mathscr{N}^{\perp}$。

注记：集合论中有 De Morgan 定律，它说对于两个子集 X,Y，$X\cap Y$ 的补集等于 X 的补集并上 Y 的补集，且 $X\cup Y$ 的补集等于 X 的补集交上 Y 的补集。对于子空间来说，正交补也有类似的性质。

习题 9 (练习 3.3.21). 任取 $\mathbb{R}^m$ 中的子空间 $\mathscr{M}_1,\mathscr{M}_2$，与 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间 $\mathscr{N}_1,\mathscr{N}_2$，是否一定存在一个矩阵 A，使得 $C(A)=\mathscr{M}_1,N(A^T)=\mathscr{M}_2,C(A^T)=\mathscr{N}_1,N(A)=\mathscr{N}_2$？如果并不一定存在，请给四个子空间加上尽量少的条件，使得这样的矩阵一定存在.

习题 10. 设 A 为列满秩矩阵。

1. 假设 $\boldsymbol{v}=A\boldsymbol{x}$，我们希望找到 $\boldsymbol{y}$ 使得 $\boldsymbol{v}=AA^T\boldsymbol{y}$。请找到一个矩阵 C（使用 A 来构造）使得 $C\boldsymbol{x}$ 就是这里所需要的 $\boldsymbol{y}$；（提示：A^T 未必可逆，但是利用可逆矩阵 A^TA，可以给它找一个右逆。）

2. 证明 $C(AA^T)=C(A)$。