

微积分A(1)

教师：晏平

email: yanping@mail.tsinghua.edu.cn

office: 数学系荷二办公室219

Tel: 62798584, 13521977278



◆ 教材:

《高等微积分教程》（上册），章纪民、闫浩、刘智新编，清华大学数学科学系。

◆ 考核方式:

平时(作业、习题课、答疑)**20%**

期中**30%**

期末**50%**



◆答疑

线下: 周三**8:00-9:20**, 荷二**219**

线上: 网络学堂、微信群

◆关于作业（可选择电子版、纸质版）

◆习题课（二级选课，第4周开始上课）

◆期中考试

第8周周日（11月7日）**8:00-10:00**



- 17世纪后半叶

直观微积分 Newton & Leibniz

“无穷小”（冥王星的预测）

- 19世纪上半叶

极限理论 Cauchy & Weierstrass

- 19世纪下半叶

实数的连续性 Cantor & Dedekind

（确界原理）



第一章 实数与极限

§ 1. 实数系

自然数集 \mathbb{N}
整数集 \mathbb{Z}

实数集 \mathbb{R} $\begin{cases} \text{有理数集 } \mathbb{Q} \\ \text{无理数集 } \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

\forall : 对任意(Any)

\exists : 存在(Exist)

s.t. 使得(subject to)

Thm. (有理数在 \mathbb{R} 中的稠密性)

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, \exists r \in \mathbb{Q}, \text{s.t. } a < r < b.$$



Def. (上界、下界、有界、无界)

设 A 为 \mathbb{R} 的非空子集. 若 $\exists M \in \mathbb{R}$, s.t. $\forall x \in A$, 有 $x \leq M$, 则称 M 为 A 的一个上界. 若 $\exists m \in \mathbb{R}$, s.t. $\forall x \in A$, 有 $x \geq m$, 则称 m 为 A 的一个下界. 若 A 既有上界又有下界, 则称 A 有界, 否则称 A 无界.

Def. (最大值、最小值)

设 A 为 \mathbb{R} 的非空子集. 若 $\lambda \in A$ 且 λ 是 A 的一个上界, 则称 λ 为 A 的最大值, 记作 $\lambda = \max A = \max_{x \in A} x$. 若 $\mu \in A$ 且 μ 是 A 的一个下界, 则称 μ 为 A 的最小值, 记作 $\mu = \min A = \min_{x \in A} x$.



Def. (上确界 $\sup A$ 、下确界 $\inf A$)

设 A 为 \mathbb{R} 的非空子集. 称 A 的最小上界 ξ 为 A 的上确界, 记作 $\xi = \sup A = \sup_{x \in A} x$. 称 A 的最大下界 η 为 A 的下确界, 记作 $\eta = \inf A = \inf_{x \in A} x$.

Remark. ($\sup A, \inf A$ 的等价定义)

$\xi = \sup A$ 的充要条件:

ξ 是 A 的上界, 且 $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \text{s.t. } x > \xi - \varepsilon$.

$\eta = \inf A$ 的充要条件:

η 是 A 的下界, 且 $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \text{s.t. } x < \eta + \varepsilon$.



Thm. (确界原理 — 实数的连续性)

非空有上(下)界的集合必有上(下)确界.

Ex. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\},$

$$\sup A = \sqrt{2}, \max A = \sqrt{2},$$

$$\inf A = -\sqrt{2}, \min A = -\sqrt{2}.$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\},$$

$$\sup B = \sqrt{2}, \max B \text{ 不存在},$$

$$\inf B = -\sqrt{2}, \min B \text{ 不存在}.$$



Ex. A 为非空有界数集, 记 $-A = \{-x : x \in A\}$, 则

$$\sup(-A) = \underline{-\inf A}, \quad \inf(-A) = \underline{-\sup A}.$$

Proof. 记 $\eta = \inf A$, 则

$$\forall x \in A, \text{ 有 } \eta \leq x; \text{ 且 } \forall \varepsilon > 0, \exists y \in A, \text{ s.t. } y < \eta + \varepsilon.$$

于是, $\forall -x \in -A$, 有 $-\eta \geq -x$ ($-\eta$ 是集合 $-A$ 的上界); 且 $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists -y \in -A$, s.t. $-y > -\eta - \varepsilon$ ($\forall \varepsilon > 0, -\eta - \varepsilon$ 不是集合 $-A$ 的上界).

由上确界的定义知 $\sup(-A) = -\eta = -\inf A$.

同理可证 $\inf(-A) = -\sup A$. \square



Remark. 若非空集合A无上界, 则记 $\sup A = +\infty$;
若非空集合A无下界, 则记 $\inf A = -\infty$.

Ex. 设A,B为有界集合, 且 $A \cap B$ 非空, 则

$$\sup(A \cup B) \underline{= \max\{\sup A, \sup B\}},$$

$$\inf(A \cup B) \underline{= \min\{\inf A, \inf B\}},$$

$$\sup(A \cap B) \underline{\leq \min\{\sup A, \sup B\}},$$

$$\inf(A \cap B) \underline{\geq \max\{\inf A, \inf B\}}.$$

如何证明?



§ 2. 数列极限的概念

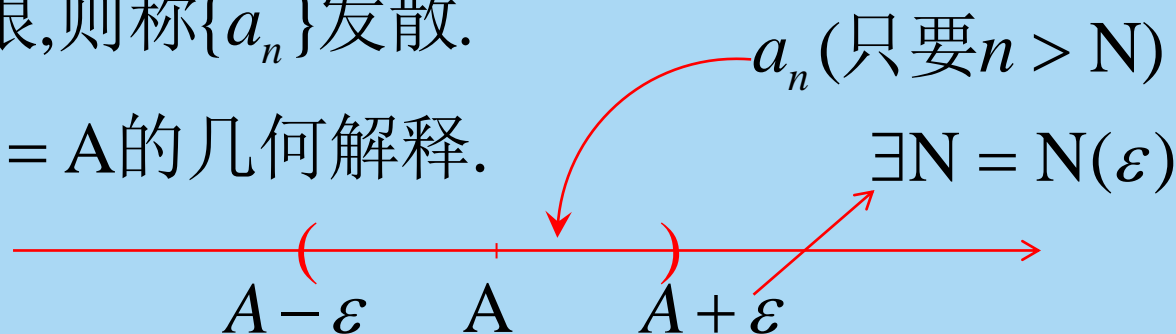
$\{a_n\}$: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ $\{\sin(2+3^{-n})\}$ 的极限为 $\sin 2$.

Def. 若 $\exists A \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{s.t.}$ 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - A| < \varepsilon$, 则称 $\{a_n\}$ 有极限 A , 也称 $\{a_n\}$ 收敛到 A , 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \text{ 或 } a_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty).$$

若 $\{a_n\}$ 没有极限, 则称 $\{a_n\}$ 发散.

Remark. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ 的几何解释.



$\forall \varepsilon > 0, \{a_n\}$ 中至多有有限项落在 $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ 之外!



Ex. $0 < |q| < 1$, 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Proof. $\forall \varepsilon > 0$, 为使 $|q^n - 0| < \varepsilon$, 因 $0 < |q| < 1$, 只要 $n > \log_{|q|} \varepsilon$ 即可. 取 $N = \lceil \log_{|q|} \varepsilon \rceil$. 当 $n > N$ 时, 有 $n > \log_{|q|} \varepsilon$, 从而 $|q^n - 0| < \varepsilon$. 由极限的定义知 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$. \square

Remark. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$.

Remark. 关于数列极限的分析或证明, 着手点是

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

求解 n 所满足的条件, 找出极限定义中所需的 $N = N(\varepsilon)$.



Ex. $a_n = \frac{2n^2 + n + 2}{n^2 - 3}$. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

Proof. 当 $n > 8$ 时, $|a_n - 2| = \frac{n+8}{n^2-3} \leq \frac{2n}{n^2/2} = \frac{4}{n}$.

$\forall \varepsilon > 0$, 求解 $\frac{4}{n} < \varepsilon$, 得 $n > \frac{4}{\varepsilon}$, 任意取定 $N > \max\{8, \frac{4}{\varepsilon}\}$,

当 $n > N$ 时, $|a_n - 2| < \varepsilon$. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n + 2}{n^2 - 3} = 2$. \square

Remark. $N = N(\varepsilon)$ 的选取不唯一. 可以通过放缩不等式

$|a_n - A| < \varepsilon$, 简化计算, 选取合适的 N .

$$|a_n - A| < \cdots < \boxed{n \text{ 的简单表达式}} < \varepsilon$$



Remark. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{s.t. 当 } n > N \text{ 时, 有 } |a_n - A| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{s.t. 当 } n \geq N \text{ 时, 有 } |a_n - A| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{s.t. 当 } n > N \text{ 时, 有 } |a_n - A| < \varepsilon / 2$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in (0, 1), \exists N \in \mathbb{N}, \text{s.t. 当 } n \geq N \text{ 时, 有 } |a_n - A| \leq 2\varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \exists N = N(k) \in \mathbb{N}, \text{s.t. 当 } n \geq N \text{ 时, 有 } |a_n - A| \leq \frac{1}{k}.$$

Question. 如何用 ε -N 语言描述 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq A$?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq A \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, \text{s.t. } |a_n - A| > \varepsilon.$$



Ex. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Proof. 记 $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$ (≥ 0), 则 $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n$. $\forall n > 2$, 有

$$n = (1 + a_n)^n > C_n^2 a_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} a_n^2,$$

$$a_n^2 < \frac{2}{n-1} < \frac{4}{n}, \quad a_n < \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

$\forall \varepsilon > 0$, 求解 $\frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ 得 $n > \frac{4}{\varepsilon^2}$. 取 $N = \left\lfloor \frac{4}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 2$, 当 $n > N$ 时,

$$a_n < \varepsilon, \quad \text{即} \quad \left| \sqrt[n]{n} - 1 \right| < \varepsilon.$$

由极限的定义, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. \square



Ex. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. 证明: (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{a_n} = e^A$; (2) 若 $A > 0, a_n > 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \ln A; \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

Proof. (1) $\forall \varepsilon \in (0, e^A)$,

$$\begin{aligned} |e^{a_n} - e^A| < \varepsilon &\Leftrightarrow |e^{a_n - A} - 1| < \varepsilon e^{-A} \\ &\Leftrightarrow 1 - \varepsilon e^{-A} < e^{a_n - A} < 1 + \varepsilon e^{-A} \\ &\Leftrightarrow \ln(1 - \varepsilon e^{-A}) < a_n - A < \ln(1 + \varepsilon e^{-A}) \quad (*) \end{aligned}$$

令 $\delta = \min\{-\ln(1 - \varepsilon e^{-A}), \ln(1 + \varepsilon e^{-A})\}$, 则 $\delta > 0$. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$,

$\exists N, s.t. \forall n > N$, 有 $|a_n - A| < \delta$. 于是 $n > N$ 时 (*) 成立, 从而有

$|e^{a_n} - e^A| < \varepsilon$. 由极限的定义得 $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{a_n} = e^A$.



$$(2) \quad |\ln a_n - \ln A| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \ln \frac{a_n}{A} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow e^{-\varepsilon} < \frac{a_n}{A} < e^{\varepsilon} \Leftrightarrow Ae^{-\varepsilon} < a_n < Ae^{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow A(e^{-\varepsilon} - 1) < \textcolor{red}{a_n} - \textcolor{red}{A} < A(e^{\varepsilon} - 1) \quad (**)$$

$\forall \varepsilon > 0$, 令 $\delta = \min\{-A(e^{-\varepsilon} - 1), A(e^{\varepsilon} - 1)\} (> 0)$. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$,

$\exists N, s.t. \forall n > N$, 有 $|a_n - A| < \delta$. 于是 $n > N$ 时 (**) 成立, 从而

$|\ln a_n - \ln A| < \varepsilon$ 成立. 由极限的定义得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \ln A$.

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{n} = \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \right) = \ln 1 = 0. \square$$



Ex. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = A$.

Proof. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, s.t.$

$$|a_n - A| < \varepsilon, \quad \forall n > N_1.$$

Remark.

分步确定N.

对此 $N_1, \exists N > N_1, s.t.$

$$\frac{|a_1 - A| + \cdots + |a_{N_1} - A|}{n} < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

于是, 当 $n > N$ 时, 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - A \right| &= \left| \frac{(a_1 - A) + (a_2 - A) + \cdots + (a_n - A)}{n} \right| \\ &\leq \frac{|a_1 - A| + \cdots + |a_{N_1} - A|}{n} + \frac{|a_{N_1+1} - A| + \cdots + |a_n - A|}{n} < 2\varepsilon. \square \end{aligned}$$

清华大学



Ex. $a_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A > 0$. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = A$.

Proof.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left\{ \frac{\ln a_1 + \ln a_2 \cdots + \ln a_n}{n} \right\} \\ &= \exp \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_1 + \ln a_2 \cdots + \ln a_n}{n} \right\} \\ &= \exp \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n \right\} = \exp \left\{ \ln \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right\} = e^{\ln A} = A. \square \end{aligned}$$

Question. $a_n > 0, A = 0$ 时结论是否成立? 给出证明或反例.

(结论仍成立, 但 $\ln 0$ 无意义, 例中证法失效)



Def. 称 $\{a_n\}$ 发散到 $+\infty$, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, 若

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{当 } n > N \text{ 时, } a_n > M.$$

称 $\{a_n\}$ 发散到 $-\infty$, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, 若

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{当 } n > N \text{ 时, } a_n < -M.$$

称 $\{a_n\}$ 发散到 ∞ , 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, 若

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{当 } n > N \text{ 时, } |a_n| > M.$$

Question. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 的几何意义?



Remark.(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in [-\infty, +\infty]$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{a_n} = e^a = \begin{cases} +\infty, & a = +\infty, \\ e^a, & a \in \mathbb{R}, \\ 0, & a = -\infty; \end{cases}$$

(2) 若 $a_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in [0, +\infty]$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \ln a = \begin{cases} +\infty, & a = +\infty, \\ \ln a, & 0 < a \in \mathbb{R}, \\ -\infty, & a = 0. \end{cases}$$



作业：

习题1.1 No. 2

习题1.2 No.3(单), 5