线性代数 第28讲

12月15日

第七章第3讲　线性映射与向量的坐标表示

上一讲要点回顾

线性映射，核与像集

线性变换，特征值，特征向量，特征子空间

同构，向量的坐标，过渡矩阵

定义 7.2.1（线性组合、生成、线性无关）

给定数域 F 上的线性空间 V 内的向量组 $\boldsymbol{a}_1$, …, $\boldsymbol{a}_n$ 和数 k_1, …, $k_n \in$ F，称向量 $k_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{a}_n$ 是向量组 $\boldsymbol{a}_1$, …, $\boldsymbol{a}_n$ 的一个线性组合.

若向量 $\boldsymbol{b}$ 和向量组 $\boldsymbol{a}_1$, …, $\boldsymbol{a}_n$ 的一个线性组合相等，则称 $\boldsymbol{b}$ 可以被向量组 $\boldsymbol{a}_1$, …, $\boldsymbol{a}_n$ 线性表示.

若向量组 $\boldsymbol{b}_1$, …, $\boldsymbol{b}_m$ 中的每一个向量都可以被向量组 $\boldsymbol{a}_1$, …, $\boldsymbol{a}_n$ 线性表示，则称向量组 $\boldsymbol{b}_1$, …, $\boldsymbol{b}_m$ 可以被向量组 $\boldsymbol{a}_1$, …, $\boldsymbol{a}_n$ 线性表示.

向量组 $\boldsymbol{a}_1$, …, $\boldsymbol{a}_n$ 的线性组合的全体构成 V 的一个子空间，称为该向量组生成的子空间，记作 span($\boldsymbol{a}_1$, …, $\boldsymbol{a}_n$).

如果存在 F 内的 n 个不全为 0 的数 k_1, …, k_n，使得 $k_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$，则称向量组 $\boldsymbol{a}_1$, …, $\boldsymbol{a}_n$ 线性相关.

如果由 $k_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$ 必定推出 $k_1 = \cdots = k_n = 0$，则称向量组 $\boldsymbol{a}1$, …, $\boldsymbol{a}_n$ 线性无关.

在坐标向量空间 F_n 中，向量组的线性关系能够通过线性方程组判断. 对一般的线性空间，则只能根据其上的线性运算具体分析.

极大线性无关部分组

定义 7.2.5 (极大线性无关部分组) 给定线性空间 $\mathcal{V}$ 中的向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$，如果其部分组 $\boldsymbol{a}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ 满足：

1. $\boldsymbol{a}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ 线性无关；
2. $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 可以被 $\boldsymbol{a}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ 线性表示；

则称 $\boldsymbol{a}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ 是 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 的一个**极大线性无关部分组**.

极大线性无关部分组仍然可以利用筛选法构造得到，从而证明其存在性.
关键仍然是如下线性表示与线性无关之间的关系.

命题 7.2.6 如果向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 线性无关，则对任意向量 $\boldsymbol{b}$，有

1. 向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{b}$ 线性相关当且仅当 $\boldsymbol{b}$ 可以被向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 线性表示；
2. $\boldsymbol{b}$ 不能被向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 线性表示当且仅当 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{b}$ 线性无关.

向量组的秩，线性空间的基和维数

命题 7.2.8 如果向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 和 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_t$ 可以互相线性表示，且两个向量组分别线性无关，则 $s = t$.

如果两个向量组可以互相线性表示，则称二者**线性等价**．一个向量组的任意两个极大线性无关部分组线性等价．因此，二者中的向量个数相同.

定义 7.2.9 (秩) 一个向量组 S 的任意一个极大线性无关部分组中向量的个数称为这个向量组的**秩**，记为 $\operatorname{rank}(S)$．一个只包含零向量的向量组的秩定义为零.

定义 7.2.10 (基、维数) 给定数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $\mathcal{V}$．如果 $\mathcal{V}$ 中存在一个线性无关的向量组，$\mathcal{V}$ 中的任意向量都可以被它线性表示，则称该向量组为 $\mathcal{V}$ 的一组**基**.

如果 $\mathcal{V}$ 中存在 n 个向量组成的一组基，则称 $\mathcal{V}$ 为 n **维线性空间**，又称 $\mathcal{V}$ 的**维数**是 n，记为 $\dim \mathcal{V} = n$.

如果 V 中存在任意多个线性无关的向量，则称其为无限维线性空间；反之，则称为有限维线性空间．单由零向量组成的线性空间{**0**}，其维数定义为0.

线性空间的基和维数公式

命题 7.2.14 对 n 维线性空间 $\mathcal{V}$，给定其中含有 n 个向量的向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$.

1. 如果 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性无关，则 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是 $\mathcal{V}$ 的一组基；
2. 如果 $\mathcal{V}=\operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$，则 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是 $\mathcal{V}$ 的一组基.

事实上，$\dim\mathcal{V}=n$；$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性无关；$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性生成 $\mathcal{V}$：这三个条件中的任意两个都可以推出另外一个，因此都可以作为基的判定条件.

推论 7.2.16 给定有限维线性空间 $\mathcal{V}$ 的子空间 $\mathcal{M}$，则 $\mathcal{M}$ 的任意一组基都可以扩充成 $\mathcal{V}$ 的一组基. 因此 $\dim\mathcal{M}\leqslant\dim\mathcal{V}$.

定理 7.2.17 结合如上记号，向量组 $S\cup T:\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_s,\boldsymbol{c}_1,\cdots,\boldsymbol{c}_t$ 是 $\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2$ 的一组基. 特别地，如下维数公式成立：

$$\dim(\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2)=\dim\mathcal{M}_1+\dim\mathcal{M}_2-\dim\mathcal{M}_1\cap\mathcal{M}_2.$$

设 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&3\\1&-1&3\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2&1&-1\\3&2&-1\\-1&2&3\end{bmatrix},$

W_1 = R(A), W_2 = R(B), 求 W_1+W_2 和 $W_1\cap W_2$ 的维数与基.

解 记 $\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&3\\1&-1&3\end{bmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\begin{bmatrix}2&1&-1\\3&2&-1\\-1&2&3\end{bmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3),$

$\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&3\\1&-1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\0&-2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$ **dim W_1 = 2.** α_1,α_2 为 **W_1** 的一组基.

$\begin{bmatrix}2&1&-1\\3&2&-1\\-1&2&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&-3\\0&5&5\\0&8&8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&-3\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ **dim W_2 = 2.** β_1,β_2 为 **W_2** 的一组基.

故 $W_1+W_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)=L(\alpha_1,\alpha_2,-\beta_1,-\beta_2)$, 设 $\delta\in W_1\cap W_2$,

则 $\delta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=l_1\beta_1+l_2\beta_2$, $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2-l_1\beta_1-l_2\beta_2=0$,

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & -1\\ 2 & 1 & -3 & -2\\ 1 & -1 & 1 & -2\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}\underline{1} & 0 & 0 & -2\\ 0 & \underline{1} & 0 & -1\\ 0 & 0 & \underline{1} & -1\end{bmatrix}$$

解得 $k_1=2k, k_2=k, l_1=k, l_2=k$, 故 $\delta=k\begin{bmatrix}3\\5\\1\end{bmatrix}, k\in F$.

$(3,5,1)^T$ 为 $W_1\cap W_2$ 的一组基,

所以 $\dim(W_1\cap W_2)=1$, $\dim(W_1+W_2)=3$,

$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 为 W_1+W_2 的一组基.

线性映射

定义 7.3.1 (线性映射) 给定数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $\mathcal{U},\mathcal{V}$，如果从 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的映射 f 满足

1. 对任意 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathcal{U}$，有 $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=f(\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{b})$;
2. 对任意 $\boldsymbol{a}\in\mathcal{U},k\in\mathbb{F}$，有 $f(k\boldsymbol{a})=kf(\boldsymbol{a})$，

则称其为 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的**线性映射**，$\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的线性映射的全体记作 $\mathrm{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{V})$.

特别地，对任意线性映射 f，都有 $f(\mathbf{0}_U)=\mathbf{0}_V$.
易见定义7.3.1 中的两个条件和如下条件等价：
对任意$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}\in U$，k，$l\in F$，有 $f(k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b})=kf(\boldsymbol{a})+lf(\boldsymbol{b})$.

Hom：homomorphism，同态

例 7.3.2 下面列出几个常见的线性映射.

1. 设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，左乘矩阵 A 定义了一个线性映射：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_A\colon\ \mathbb{F}^{n\times p} &\to \mathbb{F}^{m\times p}, \\ X &\mapsto AX. \end{aligned}$$

   类似地，右乘矩阵 A 也定义了一个线性映射：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_A\colon\ \mathbb{F}^{l\times m} &\to \mathbb{F}^{l\times n}, \\ X &\mapsto XA. \end{aligned}$$

2. 转置：

$$\begin{aligned} \cdot^{\mathrm{T}}\colon\ \mathbb{F}^{m\times n} &\to \mathbb{F}^{n\times m}, \\ A &\mapsto A^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

3. 取迹：

$$\begin{aligned} \mathrm{trace}\colon\ \mathbb{F}^{n\times n} &\to \mathbb{F}, \\ A &\mapsto \mathrm{trace}(A). \end{aligned}$$

4. 函数在若干给定点的取值：

$$\begin{aligned} C(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R}^n, \\ f &\mapsto \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

☺

定义 7.3.3 (线性运算) 给定数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $\mathcal{U},\mathcal{V}$，$\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的线性映射全体是 $\mathrm{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{V})$. 规定

1. $\mathrm{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 上的**加法**：给定 $f,g\in\mathrm{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{V})$，定义

$$
\begin{aligned}
f+g\colon\ \mathcal{U}&\to\mathcal{V},\\
\boldsymbol{x}&\mapsto f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x}),
\end{aligned}
$$

2. $\mathrm{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 上的**数乘**：给定 $f\in\mathrm{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{V})$，定义

$$
\begin{aligned}
kf\colon\ \mathcal{U}&\to\mathcal{V},\\
\boldsymbol{x}&\mapsto kf(\boldsymbol{x}).
\end{aligned}
$$

命题 7.3.4 集合 $\mathrm{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 关于加法和数乘两种运算构成线性空间.

定义 7.3.5 (乘法（复合）) 给定数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W}$，若 $f\in\mathrm{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{V}),g\in\mathrm{Hom}(\mathcal{V},\mathcal{W})$，则定义 f 与 g 的**复合**为

$$
\begin{aligned}
g\circ f\colon\ \mathcal{U}&\to\mathcal{W},\\
\boldsymbol{x}&\mapsto g(f(\boldsymbol{x})),
\end{aligned}
$$

f 与 g 的复合运算又称为 g 与 f 的**乘法**，记为 gf.

定义 7.3.6 (核、像集) 给定数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $\mathcal{U},\mathcal{V}$，以及 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的线性映射 f. 则集合 $\mathcal{N}(f) := \{\boldsymbol{a}\in\mathcal{U} \mid f(\boldsymbol{a})=\mathbf{0}\}$，称为线性映射 f 的**核**；集合 $\mathcal{R}(f) := \{f(\boldsymbol{a}) \mid \boldsymbol{a}\in\mathcal{U}\}$，称为线性映射 f 的**像集**.

1. 设 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$，左乘矩阵 A 定义了一个线性映射：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_A:\quad \mathbb{F}^{n\times p} &\to \mathbb{F}^{m\times p},\\ X &\mapsto AX. \end{aligned}$$

命题 7.3.7 对 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的线性映射 f，

1. $\mathcal{N}(f)$ 是 $\mathcal{U}$ 的子空间，而且 f 是单射当且仅当 $\mathcal{N}(f)=\{\mathbf{0}\}$；
2. $\mathcal{R}(f)$ 是 $\mathcal{V}$ 的子空间，而且 f 是满射当且仅当 $\mathcal{R}(f)=\mathcal{V}$.

(1) 证明：$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\in\boldsymbol{N}(\boldsymbol{f})$，则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{k}\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{l}\boldsymbol{u}_2)=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_1)+\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_2)=0\Rightarrow \boldsymbol{k}\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{l}\boldsymbol{u}_2\in\boldsymbol{N}(\boldsymbol{f})$

$\boldsymbol{f}$ 为单射，则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=0\Rightarrow\boldsymbol{x}=0$， 否则，若 $\boldsymbol{x}_1\neq0,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)=0,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$ 与单射矛盾

$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{f})=\{0\}$，则 $\boldsymbol{f}$ 为单射，否则，若存在 $\boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)$，则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)=0$，$\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\neq0$，与 $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{f})=\{0\}$ 矛盾

线性变换，特征值、特征向量

定义 7.3.8 (线性变换) 线性空间 $\mathcal{U}$ 到自身的线性映射称为 $\mathcal{U}$ 上的**线性变换**.

注意，$\mathcal{U}$ 上任意两个线性变换都可以复合，得到的还是 $\mathcal{U}$ 上的线性变换.

类似于 $\mathbb{F}^n$ 上的线性变换有特征值和特征向量，这两个概念也可以推广到一般线性空间的线性变换上.

定义 7.3.9 (特征值) 给定 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $\mathcal{U}$，以及其上的线性变换 f. 如果对 $\lambda \in \mathbb{F}$，存在非零向量 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}$，使得 $f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$，则称 λ 为线性变换 f 的一个**特征值**，而称非零向量 $\boldsymbol{x}$ 为 f 的一个属于特征值 λ 的**特征向量**.

二元组 $(\lambda, \boldsymbol{x})$ 常称为线性变换 f 的一个**特征对**.

非零向量 $\boldsymbol{x}$ 为 f 的属于特征值 λ 的特征向量，当且仅当 $\boldsymbol{x} \in \mathrm{N}(\lambda \boldsymbol{I} - f)$.

子空间 $\mathrm{N}(\lambda \boldsymbol{I} - f)$ 称为 f 的属于特征值 λ 的特征子空间.

命题7.3.10 对 U 上的线性变换 f，属于不同特征值的特征向量线性无关.

定义 7.3.1 (线性映射) 给定数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $\mathcal{U},\mathcal{V}$，如果从 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的映射 f 满足

1. 对任意 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathcal{U}$，有 $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=f(\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{b})$；
2. 对任意 $\boldsymbol{a}\in\mathcal{U},k\in\mathbb{F}$，有 $f(k\boldsymbol{a})=kf(\boldsymbol{a})$，

则称其为 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的**线性映射**，$\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的线性映射的全体记作 $\mathrm{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{V})$.

对任意 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}\in$ U，k，$l\in$ F，
有 $f(k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b})=kf(\boldsymbol{a})+lf(\boldsymbol{b})$.

命题7.3.10 对 U 上的线性变换 f，属于不同特征值的特征向量线性无关.

证. 设线性变换 f 有特征向量 $\boldsymbol{x}_1$，…，$\boldsymbol{x}_r$，分别属于特征值 λ_1，…，λ_r，

且 λ_1，…，λ_r 两两不同.

采用数学归纳法. 当 $r=1$ 时，因为特征向量不为零，因此线性无关.

现假设任意 $r-1$ 个不同特征值的特征向量都线性无关，

观察方程 $k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{x}_r=\boldsymbol{0}$. 等式两边左乘 A，则有

$\boldsymbol{0}=f(k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{x}_r)=k_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1+k_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r\lambda_r\boldsymbol{x}_r$.

再减去原方程的 λ_1 倍，$k_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1+k_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r\lambda_r\boldsymbol{x}_r-\lambda_1(k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{x}_r)$

就有 $k_2(\lambda_2-\lambda_1)\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r(\lambda_r-\lambda_1)\boldsymbol{x}_r=\boldsymbol{0}$.

根据归纳假设，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$ 线性无关，于是 $k_i(\lambda_i-\lambda_1)=0$，$i=2$，…，$r$.

由于 λ_1 和 λ_2，…，λ_r 不同，因此 $k_i=0$，$i=2$，…，r.

又得 $k_1\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0}$，由特征向量不为零得 $k_1=0$. 故 $\boldsymbol{x}_1$，…，$\boldsymbol{x}_r$ 线性无关.

例 7.3.11 1. 设 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$，取左乘矩阵和右乘矩阵映射的差：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_A - \boldsymbol{R}_A:\ \mathbb{F}^{n\times n} &\to \mathbb{F}^{n\times n}, \\ X &\mapsto AX - XA, \end{aligned}$$

定义了 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的线性变换. 其核 $\mathcal{N}(\boldsymbol{L}_A - \boldsymbol{R}_A) = \{X \in \mathbb{F}^{n\times n} \mid AX = XA\}$ 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间，包含了所有与 A 交换的 n 阶方阵.

2. 恒同变换和转置的线性组合定义了 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的线性变换：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}:\ \mathbb{F}^{n\times n} &\to \mathbb{F}^{n\times n}, \\ A &\mapsto \tfrac{1}{2}(A + A^{\mathrm{T}}). \end{aligned}$$

核 $\mathcal{N}(\boldsymbol{S})$ 是全体 n 阶反对称矩阵构成的子空间；像集 $\mathcal{R}(\boldsymbol{S})$ 是全体 n 阶对称矩阵构成的子空间.

注意，$\boldsymbol{S}^2 = \boldsymbol{S}$，因此其特征值只能是1，0（为什么？）.

两个特征子空间

$\mathrm{N}(1 \cdot \boldsymbol{I} - S) = \{A \in \mathrm{F}^{n\times n} \mid \boldsymbol{S}(A) = A\} = \mathrm{R}(\boldsymbol{S})$,

$\mathrm{N}(0 \cdot \boldsymbol{I} - S) = \{A \in \mathrm{F}^{n\times n} \mid \boldsymbol{S}(A) = O\} = \mathrm{N}(\boldsymbol{S})$.

3. 在 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数空间 $C^\infty(\mathbb{R})$ 上，求导运算定义了线性变换：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}:\quad & C^\infty(\mathbb{R})\to C^\infty(\mathbb{R}),\\ & f(x)\mapsto f'(x),\end{aligned}$$

称为求导算子. 核 $\mathcal{N}(\boldsymbol{D})$ 是常数函数的全体构成的线性空间.

再看 $\boldsymbol{D}$ 的特征值和特征向量. 对任意常数 $\lambda\in\mathbb{R}$，考虑线性变换：

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}:\quad & C^\infty(\mathbb{R})\to C^\infty(\mathbb{R}),\\ & f(x)\mapsto \lambda f(x)-f'(x),\end{aligned}$$

$\lambda e^{\lambda x}-(e^{\lambda x})'=0$, 指数函数 $e^{\lambda x}\in N(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})$. 事实上，利用常微分方程知识，

$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})f=\lambda f-f'=0$ 的解只能是 $f(x)=k\cdot e^{\lambda x}$.

因此 $N(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D})$ 是一维线性空间，而 $e^{\lambda x}$ 是一组基.

4. 求导算子和自身的乘积 $\boldsymbol{D}^2: f(x)\mapsto f''(x)$ 是 $C^\infty(\mathbb{R})$ 上的线性变换. 设 $\lambda\in\mathbb{R}$，考虑线性变换 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^2: C^\infty(\mathbb{R})\to C^\infty(\mathbb{R})$.

利用常微分方程知识，可得 $\mathcal{N}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}^2)$ 是二维线性空间，而一组基是

$$\begin{cases} e^{\sqrt{\lambda}x},\quad e^{-\sqrt{\lambda}x}, & \lambda>0;\\ \cos(\sqrt{-\lambda}x),\quad \sin(\sqrt{-\lambda}x), & \lambda<0;\\ 1,x, & \lambda=0.\end{cases}$$

☺

同构映射

定义 7.3.12 (线性空间的同构) 给定数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $\mathcal{U},\mathcal{V}$，如果存在 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的线性映射 f 是双射，则称 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ **同构**，称 f 为 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的**同构映射**.

特别地，$\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{U}$ 的同构映射称为 $\mathcal{U}$ 上的**自同构**.

例 7.3.13 定义 $\mathcal{V} := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$. 易见 $\mathcal{V}$ 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子空间. 可以验证，映射

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{C} &\to \mathcal{V}, \\ a + b\mathrm{i} &\mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

是一个同构映射. ☺

例 7.3.14 给定可逆矩阵 $T \in \mathbb{F}^{n\times n}$，那么映射

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{F}^n &\to \mathbb{F}^n, \\ \boldsymbol{x} &\mapsto T\boldsymbol{x}, \end{aligned}$$

是一个 $\mathbb{F}^n$ 上的自同构. ☺

定义 7.3.12 (线性空间的同构) 给定数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $\mathcal{U},\mathcal{V}$，如果存在 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的线性映射 f 是双射，则称 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ **同构**，称 f 为 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的**同构映射**.

特别地，$\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{U}$ 的同构映射称为 $\mathcal{U}$ 上的**自同构**.

同构映射是双射，因此它有逆映射.

命题 7.3.15 给定数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W}$，以及 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的同构映射 f，$\mathcal{V}$ 到 $\mathcal{W}$ 的同构映射 g，则

1. $g\circ f$ 是 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{W}$ 的同构映射；
2. f^{-1} 是 $\mathcal{V}$ 到 $\mathcal{U}$ 的同构映射.

证. 第 1 条：显然.

第 2 条：显然 f^{-1} 是双射，只需验证它是线性映射.

由于 f 是线性映射，因此对任意 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2\in\mathcal{V}$，

$f(k_1f^{-1}(\boldsymbol{x}_1)+k_2f^{-1}(\boldsymbol{x}_2))=k_1f(f^{-1}(\boldsymbol{x}_1))+k_2f(f^{-1}(\boldsymbol{x}_2))=k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2$.

由于f 是双射，有 $k_1f^{-1}(\boldsymbol{x}_1)+k_2f^{-1}(\boldsymbol{x}_2)=f^{-1}(k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2)$.

因此 f^{-1} 是线性映射.

命题7.3.16　线性空间的同构关系是等价关系.

练习 7.3.14 考虑例 7.3.11 中的线性变换 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的线性变换 $\boldsymbol{S}$，试问它是否是投影变换.

练习 7.3.15 考虑练习 7.1.1 中的实线性空间 $\mathbb{R}^+$，给定 $a > 0$，判断映射

$$\begin{aligned} \log_a : \quad \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \log_a x, \end{aligned}$$

是否是线性映射. 如果是，进一步分析当 a 取何值时，该映射是同构.

例 7.3.11

2. 恒同变换和转置的线性组合定义了 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的线性变换：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}: \quad \mathbb{F}^{n\times n} &\to \mathbb{F}^{n\times n}, \\ A &\mapsto \tfrac{1}{2}(A + A^{\mathrm{T}}). \end{aligned}$$

核 $\mathcal{N}(\boldsymbol{S})$ 是全体 n 阶反对称矩阵构成的子空间；像集 $\mathcal{R}(\boldsymbol{S})$ 是全体 n 阶对称矩阵构成的子空间.

练习 7.1.1 在所有正实数构成的集合 $\mathbb{R}^+$ 上，定义加法和数乘运算：

$$a \oplus b := ab, \quad k \odot a := a^k, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{R}.$$

判断 $\mathbb{R}^+$ 对这两个运算是否构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

练习 7.3.19 证明练习 7.1.2 中的线性空间 $\mathbb{Q}[\omega]$ 与练习 7.1.4 中的线性空间 $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]$ 同构.

练习 7.1.2 令 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，$\mathbb{Q}[\omega] = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

1. 证明 $\mathbb{Q}[\omega]$ 关于数的加法和数乘构成 $\mathbb{Q}$ 上的一个线性空间.
2. 证明子集 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathcal{M} = \{b\omega \mid b \in \mathbb{Q}\}$ 都是 $\mathbb{Q}[\omega]$ 的子空间. 并求二者的交与和.
3. 判断 $\mathbb{Q}[\omega]$ 是否是数域.

练习 7.1.4 设 $\mathbb{Q}[\mathrm{i}] = \{a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

1. 证明 $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]$ 关于数的加法和数乘构成 $\mathbb{Q}$ 上的一个线性空间.
2. 证明 $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]$ 是数域.
3. 把复数域 $\mathbb{C}$ 看作有理数域 $\mathbb{Q}[\mathrm{i}]$ 上的线性空间，子集 $\mathbb{R}$ 是否是子空间?

向量的坐标

命题 7.4.1 向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 线性无关，如果 $\boldsymbol{b}$ 可以被其线性表示，则表示法唯一.

定义7.4.2（坐标） 对数域 F 上的 n 维线性空间 V，设 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 是它的一组基. 那么对任意向量$\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$，都有 $\boldsymbol{x}$ 可以被这组基线性表示且表示法唯一，

不妨写为 $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$.

有序数组$x_1, \cdots, x_n$ 称为向量 $\boldsymbol{x}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 下的坐标.

为书写简便，我们把它写作 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

注意：这并不是真正的矩阵乘法，而只是借用了记号来表示线性组合.
由表示法的唯一性，可以定义映射：

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

由表示法的唯一性，可以定义映射：

$$\sigma = \sigma_{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n}: \ \mathcal{V} \to \mathbb{F}^n,$$

$$\boldsymbol{x} \mapsto \widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

映射 $\sigma_{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n}$ 就是把 $\mathcal{V}$ 中向量映射成它在一组基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 下的坐标组成的 n 维向量.

注意，坐标表示写成 $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ 后，基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 中的向量就不再能随便改换顺序，因为把基向量改换顺序将引入不同的映射 σ，而坐标表示也不同．换言之，改换顺序的基被认为是不同的基.

定理 7.4.3 映射 $\sigma_{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n}: \mathcal{V} \to \mathbb{F}^n$ 是同构映射.

证. 如果 $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{e}_n$，则 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = (x_1+y_1)\boldsymbol{e}_1 + \cdots + (x_n + y_n)\boldsymbol{e}_n, k\boldsymbol{x} = (kx_1)\boldsymbol{e}_1 + \cdots + (kx_n)\boldsymbol{e}_n$. 因此，$\sigma(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \sigma(\boldsymbol{x}) + \sigma(\boldsymbol{y}), \sigma(k\boldsymbol{x}) = k\sigma(\boldsymbol{x})$. 于是 σ 是线性映射．根据基的定义，σ 是双射. □

同构映射 σ 的逆映射

$$\sigma^{-1}_{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n}: \quad \mathbb{F}^n \to \mathcal{V},$$

$$\widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

就是在形式上推广的矩阵乘法．它在形式上满足分配律：

$$(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)(\widehat{\boldsymbol{x}}+\widehat{\boldsymbol{y}}) = (\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\widehat{\boldsymbol{x}} + (\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\widehat{\boldsymbol{y}}, \qquad (\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)(k\widehat{\boldsymbol{x}}) = k(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\widehat{\boldsymbol{x}}.$$

例 7.3.13 定义 $\mathcal{V} := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$. 易见 $\mathcal{V}$ 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子空间. 可以验证, 映射

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{C} \to \mathcal{V}, \\ & a + b\mathrm{i} \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

是一个同构映射. ☺

由定理 7.4.3 可知，F 上的任意 n 维线性空间都同构：因为它们都和 $\mathbb{F}^n$ 同构，而同构又是等价关系.

线性空间的同构这个等价关系的唯一不变量就是维数，而标准形是 $\mathbb{F}^n$.

例如，例 7.3.13 中的两个线性空间都和 $\mathbb{R}^2$ 同构，因此也互相同构.

同构映射能够保持线性运算，从而保持一切只与线性运算有关的性质.

因为，常常可以把一般向量空间中的问题转化到 $\mathbb{F}^n$ 上，例如如下结论.

命题 7.4.4 在数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 $\mathcal{V}$ 中取定一组基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$，设 $\mathcal{V}$ 内向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 在这组基下的坐标表示为 $\boldsymbol{a}_i = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\hat{\boldsymbol{a}}_i, i = 1, \cdots, m$，则 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 在 $\mathcal{V}$ 内线性无关，当且仅当 $\hat{\boldsymbol{a}}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{a}}_m$ 在 $\mathbb{F}^n$ 内线性无关.

证. $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 在 $\mathcal{V}$ 内线性相关 $\Leftrightarrow$ 存在 $\mathbb{F}$ 内不全为 0 的数 $k_1, \cdots, k_m$，使得 $k_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow$ 存在 $\mathbb{F}$ 内不全为 0 的数 $k_1, \cdots, k_m$，使得 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)(k_1\hat{\boldsymbol{a}}_1 + \cdots + k_m\hat{\boldsymbol{a}}_m) = \boldsymbol{0}$ $\xLeftrightarrow{\sigma\text{ 是双射}}$ 存在 $\mathbb{F}$ 内不全为 0 的数 $k_1, \cdots, k_m$，使得 $k_1\hat{\boldsymbol{a}}_1 + \cdots + k_m\hat{\boldsymbol{a}}_m = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \hat{\boldsymbol{a}}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{a}}_m$ 在 $\mathbb{F}^n$ 内线性相关. □

例 7.4.5 1. 考虑例 7.2.12 中矩阵空间 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 的一组基

$$E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},$$

矩阵 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}=a_{11}E_{11}+a_{12}E_{12}+a_{21}E_{21}+a_{22}E_{22}$, 即 A 在这组基下的坐标表示为 $A=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{12}\\a_{21}\\a_{22}\end{bmatrix}$, 故 A 在这组基下的坐标是 $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{12}\\a_{21}\\a_{22}\end{bmatrix}$.

$A=\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})+\frac{1}{2}(A-A^{\mathrm{T}})$

再考虑例 7.2.19 中线性空间 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 的一组基

$$E_{11},E_{22},E_{12}+E_{21}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},E_{12}-E_{21}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},$$

矩阵 A 在这组基下的坐标表示为 $A=(E_{11},E_{22},E_{12}+E_{21},E_{12}-E_{21})\tilde{\boldsymbol{a}}$, 其中 $\tilde{\boldsymbol{a}}=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{22}\\\frac{a_{12}+a_{21}}{2}\\\frac{a_{12}-a_{21}}{2}\end{bmatrix}$ 是 A 在这组基下的坐标.

不同基下的坐标

多项式空间 $R[x]_n$ 在不同基下的坐标

多项式 $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$，它在基 $1, x, \cdots, x^{n-1}$ 下的坐标表示为

$f = (1, x, \cdots, x^{n-1})\boldsymbol{f}$，其中 $\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$ 是 f 在这组基下的坐标.

它在基 $1, x - x_0, \cdots, (x - x_0)^{n-1}$ 下的坐标表示为 $f = (1, x - x_0, \cdots, (x - x_0)^{n-1})\widetilde{\boldsymbol{f}}$,

其中 $\widetilde{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f'(x_0) \\ \vdots \\ \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix}$ 是 f 在这组基下的坐标.

过渡矩阵

给定 n 维线性空间的两组基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 和 $\boldsymbol{t}_1, \cdots, \boldsymbol{t}_n$，设

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}_1 &= t_{11}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + t_{n1}\boldsymbol{e}_n, \\ &\vdots \\ \boldsymbol{t}_n &= t_{1n}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + t_{nn}\boldsymbol{e}_n, \end{aligned}$$

可以形式地写成 $(\boldsymbol{t}_1, \cdots, \boldsymbol{t}_n) = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix} =: (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)T,$

其中 T 称为从基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 到基 $\boldsymbol{t}_1, \cdots, \boldsymbol{t}_n$ 的**过渡矩阵**.

命题 7.4.6 给定数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 $\mathcal{V}$ 的一组基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$，和 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵 T. 令 $(\boldsymbol{t}_1, \cdots, \boldsymbol{t}_n) = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)T$，则有：

1. 如果 $\boldsymbol{t}_1, \cdots, \boldsymbol{t}_n$ 是一组基，则 T 可逆；
2. 如果 T 可逆，则 $\boldsymbol{t}_1, \cdots, \boldsymbol{t}_n$ 是一组基.

1. 基变换公式：$(\boldsymbol{t}_1, \cdots, \boldsymbol{t}_n) = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)T$，其中 T 可逆；
2. 坐标变换公式：若 $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{t}_1, \cdots, \boldsymbol{t}_n)\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{x}$，则 $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}$.

矩阵空间 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 的两组基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 与 $E_{11}, E_{22}, E_{12}+E_{21}, E_{12}-E_{21}$

易得 $(E_{11}, E_{22}, E_{12}+E_{21}, E_{12}-E_{21}) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$，因此从 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 到 $E_{11}, E_{22}, E_{12}+E_{21}, E_{12}-E_{21}$ 的过渡矩阵就是该四阶矩阵.

多项式空间 $\mathbb{R}[x]_n$ 的两组基 $1, x, \cdots, x^{n-1}$ 与 $1, x-x_0, \cdots, (x-x_0)^{n-1}$

易得 $(1, x-x_0, \cdots, (x-x_0)^{n-1}) = (1, x, \cdots, x^{n-1})T$，其中

$$T = \begin{bmatrix}1 & -x_0 & x_0^2 & \cdots & (-x_0)^{n-1}\\ & 1 & -2x_0 & \cdots & (n-1)(-x_0)^{n-2}\\ & & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & & 1 & -(n-1)x_0\\ & & & & 1\end{bmatrix},$$

因此从 $1, x, \cdots, x^{n-1}$ 到 $1, x-x_0, \cdots, (x-x_0)^{n-1}$ 的过渡矩阵为上三角矩阵 T.

其次来看同一个向量在两组基下坐标表示的变化规律. 设 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}$ 在一组基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 下的坐标为 $x_1, \cdots, x_n$，在另一组基 $\boldsymbol{t}_1, \cdots, \boldsymbol{t}_n$ 下的坐标表示为 $y_1, \cdots, y_n$，那么坐标表示就是

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =: (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{t}_1, \cdots, \boldsymbol{t}_n) \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} =: (\boldsymbol{t}_1, \cdots, \boldsymbol{t}_n)\boldsymbol{y}.$$

设两组基之间的过渡矩阵为 T，即 $(\boldsymbol{t}_1, \cdots, \boldsymbol{t}_n) = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)T$，则

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{t}_1, \cdots, \boldsymbol{t}_n)\boldsymbol{y} = \Big((\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)T\Big)\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)(T\boldsymbol{y}). \tag{7.4.1}$$

而 $\boldsymbol{a}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 下的表示法唯一，因此 $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}$. 可见，只要知道了向量在一组基下的坐标和这组基到另一组基的过渡矩阵，就能得到该向量在另一组基下的坐标.

1. 容易验证

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ \frac{a_{12}+a_{21}}{2} \\ \frac{a_{12}-a_{21}}{2} \end{bmatrix}.$$

2. 可以验证

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -x_0 & x_0^2 & \cdots & (-x_0)^{n-1} \\ & 1 & -2x_0 & \cdots & (n-1)(-x_0)^{n-2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & -(n-1)x_0 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f'(x_0) \\ \vdots \\ \frac{1}{(n-2)!}f^{(n-2)}(x_0) \\ \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix}.$$

作 业（12月15日）

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

练习7.3

4，5，6，12，16，17，18

练习7.4

2，4，7

12月20日提交

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~