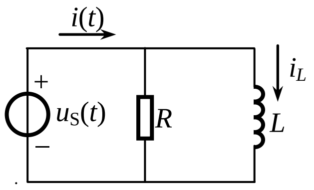
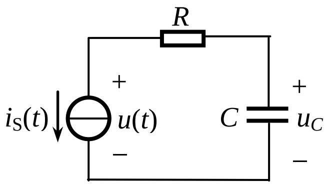
第 9 章　状态变量法

9-1　列写题图 9-1 所示电路的状态方程和输出方程。



(a) 输出为 $i(t)$



(b)　输出为 $u(t)$

题图 9-1

解　（a）状态方程为

$$\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{u_S(t)}{L}$$

输出方程为

$$i(t)=i_L(t)+\frac{u_S(t)}{R}$$

（b）状态方程为

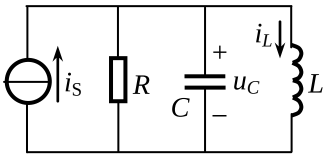
$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=\frac{i_S(t)}{C}$$

输出方程为

$$u(t)=u_C(t)+Ri_S(t)$$

9-2　列写题图 9-2 所示电路的状态方程。

（1）选电容电压 u_C 和电感电流 i_L 为状态变量；（2）选电容电荷 q 和电感磁链 ψ 为状态变量。



题图9-2

解　（1）选电容电压 u_C 和电感电流 i_L 为状态变量，列状态方程如下：

$$\begin{cases}C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{u_C}{R}-i_L+i_S\\ L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=u_C\end{cases}$$

整理成标准矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{RC} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} i_S$$

（2）选电容电荷 q 和电感磁链ψ为状态变量。由线性电容和线性电感的元件特性为有

$$q = Cu_C \text{，} \quad \psi = Li_L$$

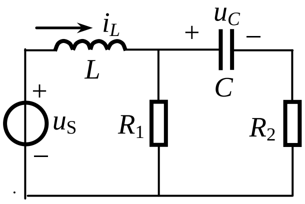
所以，（1）中的状态方程可写成如下形式：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{q}{RC} - \dfrac{\psi}{L} + i_S \\ \dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \dfrac{q}{C} \end{cases}$$

整理成标准矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{RC} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} i_S$$

9-3 列写题图 9-3 所示电路的状态方程。



题图 9-3

解 方程列写如下：

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = u_S - R_1 i_{R1} \qquad (1)$$

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = i_L - i_{R1} \qquad (2)$$

为消去中间变量 i_{R1}，列写如下方程

$$i_{R1} = \frac{1}{R_1}[u_C + R_2 C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}] \qquad (3)$$

将（3）式代入（2）式，得

$$R_1 C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = R_1 i_L - u_C - R_2 C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{(R_1 + R_2)C}u_C + \frac{R_1}{(R_1 + R_2)C}i_L \qquad (4)$$

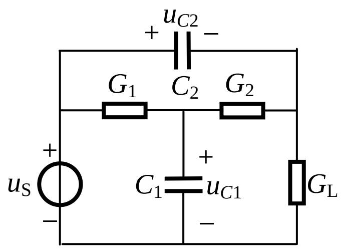
将（3）和（4）式代入（1）式，得

$$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=-\frac{R_1}{(R_1+R_2)L}u_C-\frac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L}i_L+\frac{1}{L}u_S \tag{5}$$

（4）、（5）两式便是所需的状态方程。写成矩阵形式为

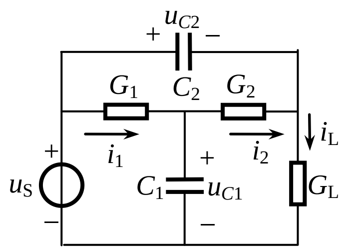
$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{(R_1+R_2)C} & \dfrac{R_1}{(R_1+R_2)C}\\ -\dfrac{R_1}{(R_1+R_2)L} & -\dfrac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{\mathrm{S}}\end{bmatrix}$$

9-4　列写题图 9-4 所示电路的状态方程。



题图 9-4

解　各电流参考方向如题图 9-4(a)所示。



题图 9-4(a)

由题图 9-4(a)可得

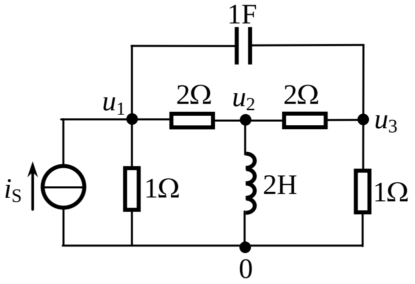
$$i_1=G_1(u_{\mathrm{S}}-u_{C1})，\quad i_2=G_2(u_{C1}-u_{\mathrm{S}}+u_{C2})，\quad i_{\mathrm{L}}=G_{\mathrm{L}}(-u_{C2}+u_{\mathrm{S}})$$

$$\begin{cases}C_1\dfrac{\mathrm{d}u_{C1}}{\mathrm{d}t}=i_1-i_2=-(G_1+G_2)u_{C1}-G_2u_{C2}+(G_1+G_2)u_{\mathrm{S}}\\ C_2\dfrac{\mathrm{d}u_{C2}}{\mathrm{d}t}=i_{\mathrm{L}}-i_2=-G_2u_{C1}-(G_2+G_{\mathrm{L}})u_{C2}+(G_2+G_{\mathrm{L}})u_{\mathrm{S}}\end{cases}$$

整理为标准的矩阵形式为

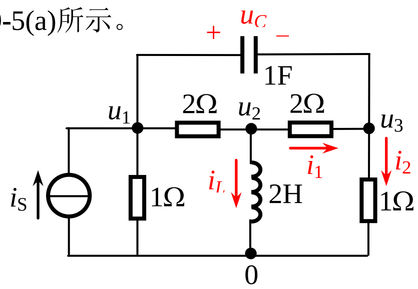
$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}u_{C1}}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}u_{C2}}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\dfrac{G_1+G_2}{C_1} & -\dfrac{G_2}{C_1}\\ -\dfrac{G_2}{C_2} & -\dfrac{G_2+G_{\mathrm{L}}}{C_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{C1}\\ u_{C2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{G_1+G_2}{C_1}\\ \dfrac{G_2+G_{\mathrm{L}}}{C_2}\end{bmatrix}u_{\mathrm{S}}$$

9-5 列写题图 9-5 所示电路的状态方程和输出方程(输出量为图中的 u_1, u_2 和 u_3)。



题图 9-5

解 参考方向如题图 9-5(a)所示。



题图 9-5(a)

选 u_C 和 i_L 为状态变量，列方程如下：

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-i_1+i_2\,,\quad 2\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=2i_1+i_2$$

由替代定理和叠加定理可得

	u_C	i_L	i_S
i_1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0
i_2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

代入前式可得

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{2}u_C-\frac{1}{2}i_L+\frac{1}{2}i_S-\frac{1}{4}u_C+\frac{1}{2}i_L=-\frac{3}{4}u_C+\frac{1}{2}i_S$$

$$2\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}u_C-i_L+\frac{1}{2}i_S-\frac{1}{2}u_C-\frac{1}{2}i_L=-\frac{3}{2}i_L+\frac{1}{2}i_S$$

整理成矩阵形式的状态方程为

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.75 & 0\\ 0 & -0.75\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.5\\ 0.25\end{bmatrix}[i_S]$$

输出方程为

$$u_1=u_C+i_2=\frac{1}{2}u_C-\frac{1}{2}i_L+\frac{1}{2}i_S$$

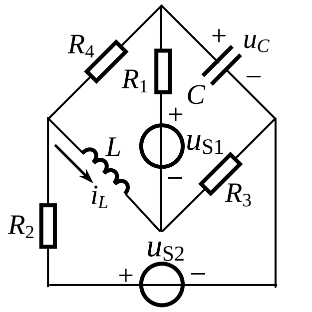
$$u_2=2\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=-\frac{3}{2}i_L+\frac{1}{2}i_S$$

$$u_3=i_2=-\frac{1}{2}u_C-\frac{1}{2}i_L+\frac{1}{2}i_S$$

写成矩阵形式：

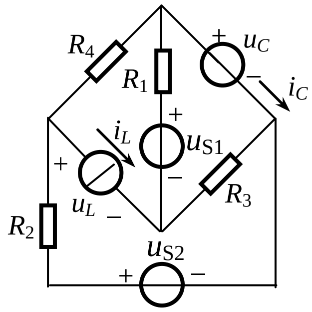
$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0 & -1.5 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_S \end{bmatrix}$$

9-6 列写题图 9-6 所示电路的状态方程。



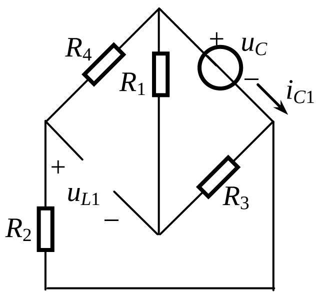
题图 9-6

解 用叠加法。由替代定理可得题图 9-6(a)所示等效电路。

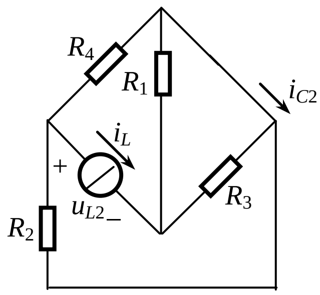


题图 9-6(a)

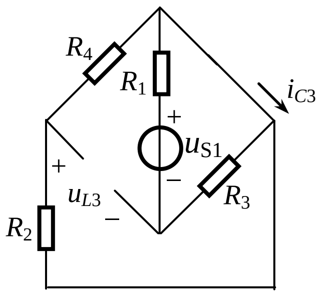
应用叠加定理，各个电源单独作用时的等效电路分别如题图 9-6(b)~ 题图 9-6(e)所示。



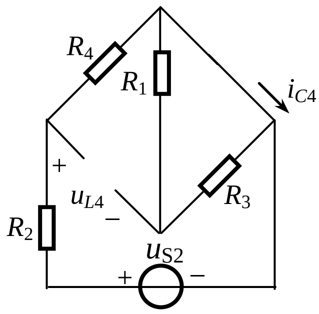
题图 9-6(b)



题图 9-6(c)



题图 9-6(d)



题图 9-6(e)

题图 9-6(b)可得

$$i_{C1}=\left(-\frac{1}{R_1+R_3}-\frac{1}{R_2+R_4}\right)u_C\text{，}\quad u_{L1}=\left(\frac{R_1}{R_1+R_3}-\frac{R_4}{R_2+R_4}\right)u_C$$

题图 9-6(c)可得

$$i_{C2}=\left(-\frac{R_1}{R_1+R_3}+\frac{R_4}{R_2+R_4}\right)i_L\text{，}\quad u_{L2}=\left(\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}-\frac{R_2R_4}{R_2+R_4}\right)i_L$$

题图 9-6(d)可得

$$i_{C3}=\frac{1}{R_1+R_3}u_{\mathrm{S1}}\text{，}\quad u_{L3}=\frac{R_3}{R_1+R_3}u_{\mathrm{S1}}$$

题图 9-6(e)可得

$$i_{C4}=\frac{1}{R_2+R_4}u_{\mathrm{S2}}\text{，}\quad u_{L4}=\frac{R_4}{R_2+R_4}u_{\mathrm{S1}}$$

由叠加定理，有

$$i_C=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=i_{C1}+i_{C2}+i_{C3}+i_{C4}$$

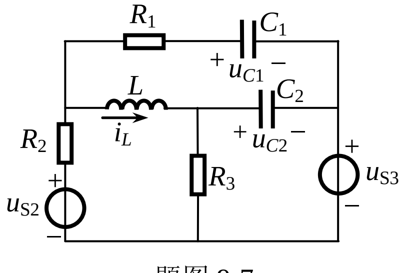
$$u_L=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=u_{L1}+u_{L2}+u_{L3}+u_{L4}$$

将各分量结果代入上两式，并整理可得矩阵形式的状态方程为

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{C}\left(\dfrac{1}{R_1+R_3}+\dfrac{1}{R_2+R_4}\right) & \dfrac{1}{C}\left(\dfrac{R_4}{R_2+R_4}-\dfrac{R_1}{R_1+R_3}\right)\\ \dfrac{1}{L}\left(\dfrac{R_1}{R_1+R_3}-\dfrac{R_4}{R_2+R_4}\right) & \dfrac{1}{L}\left(\dfrac{R_1R_3}{R_1+R_3}-\dfrac{R_2R_4}{R_2+R_4}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C\\ i_L\end{bmatrix}+$$

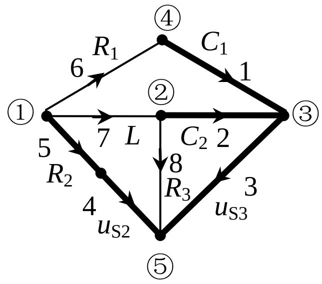
$$\begin{bmatrix}\dfrac{1}{C(R_1+R_3)} & \dfrac{1}{C(R_2+R_4)}\\ \dfrac{R_3}{L(R_1+R_3)} & \dfrac{R_4}{L(R_2+R_4)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{\mathrm{S1}}\\ u_{\mathrm{S2}}\end{bmatrix}$$

9-7 列写题图 9-7 所示电路的状态方程。



题图 9-7

解 选u_{C1}、u_{C2}和i_L为状态变量，用拓扑法列方程。题图 9-7 所示电路的图 G 如题图 9-7(a)所示。



题图 9-7(a)

选以支路 1、2、3、4、5 为树支的常态树。

基本割集的 KCL 方程为

$$C_1\frac{du_{C1}}{dt}=i_6 \tag{1}$$

$$C_2\frac{du_{C2}}{dt}=i_L-i_8 \tag{2}$$

$$i_3=i_6+i_L-i_8 \tag{3}$$

$$i_4=-i_6-i_L \tag{4}$$

$$i_5=-i_6-i_L \tag{5}$$

基本回路的 KVL 方程为

$$u_6=u_5+u_{S2}-u_{S3}-u_{C1} \tag{6}$$

$$u_7=L\frac{di_L}{dt}=u_5+u_{S2}-u_{S3}-u_{C2} \tag{7}$$

$$u_8=u_{C2}+u_{S3} \tag{8}$$

消去式（1）、式（2）和式（7）中的中间变量i_6、i_8和u_5即可得所需的状态方程。

由式（5）、式（6）及欧姆定律可得

$$i_6=-\frac{1}{R_1+R_2}u_{C1}-\frac{R_2}{R_1+R_2}i_L+\frac{1}{R_1+R_2}u_{S2}-\frac{1}{R_1+R_2}u_{S3} \tag{9}$$

$$u_5=\frac{R_2}{R_1+R_2}u_{C1}-\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}i_L-\frac{R_2}{R_1+R_2}u_{S2}+\frac{R_2}{R_1+R_2}u_{S3} \tag{10}$$

$$i_8=\frac{u_8}{R_3}=\frac{u_{C2}}{R_3}+\frac{u_{S3}}{R_3} \tag{11}$$

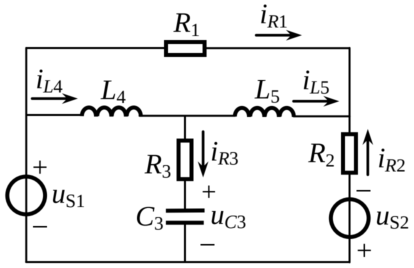
将式（9）、式（10）和式（11）分别代入式（1）、式（2）和式（7）并整理标准的矩阵形式

为

$$
\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}u_{C1}}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}u_{C2}}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{(R_1+R_2)C_1} & 0 & -\dfrac{R_2}{(R_1+R_2)C_1} \\ 0 & \dfrac{1}{R_3C_2} & \dfrac{1}{C_2} \\ \dfrac{R_2}{(R_1+R_2)L} & \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C1} \\ i_L \end{bmatrix} +
$$

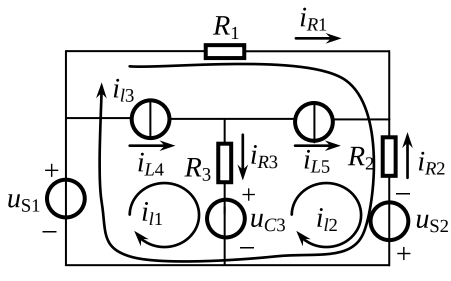
$$
\begin{bmatrix} \dfrac{1}{(R_1+R_2)C_1} & -\dfrac{1}{(R_1+R_2)C_1} \\ 0 & -\dfrac{1}{R_3C_2} \\ \dfrac{R_1}{(R_1+R_2)L} & -\dfrac{R_1}{(R_1+R_2)L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{S2} \\ u_{S3} \end{bmatrix}
$$

9-8 题图 9-8 所示电路中，电路参数已知。列写此电路的状态方程，选择状态变量为 $\boldsymbol{X}=[u_{C3} \quad i_{L4} \quad i_{L5}]^{\mathrm{T}}$。



题图 9-8

解 应用替代定理可得如题图 9-8(a)所示等效电路。



题图 9-8(a)

列写回路电流方程如下：

$$
\begin{cases} i_{l1}=i_{L4} \\ i_{l2}=i_{L5} \\ (R_1+R_2)i_{l3}+R_2i_{l2}=u_{S1}+u_{S2} \end{cases}
$$

解得

$$
i_{l1}=i_{L4}\text{，}\quad i_{l2}=i_{L5}\text{，}\quad i_{l3}=-\frac{R_2}{R_1+R_2}i_{L5}+\frac{1}{R_1+R_2}u_{S1}+\frac{1}{R_1+R_2}u_{S2}
$$

所以，有

$$C_3\frac{\mathrm{d}u_{C3}}{\mathrm{d}t}=i_{l1}-i_{l2}=i_{L4}-i_{L5}$$

$$L_4\frac{\mathrm{d}i_{L4}}{\mathrm{d}t}=u_{S1}-u_{C3}-R_3(i_{L1}-i_{L2})=u_{S1}-u_{C3}-R_3(i_{L4}-i_{L5})$$

$$L_5\frac{\mathrm{d}i_{L5}}{\mathrm{d}t}=R_3(i_{L4}-i_{L5})++u_{S2}-R_2(i_{l2}+i_{l3})$$

$$=u_{C3}+R_3i_{L4}-\left(R_3+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right)i_{L5}-\frac{R_2}{R_1+R_2}u_{S1}+\frac{R_1}{R_1+R_2}u_{S2}$$

整理成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}u_{C3}}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}i_{L4}}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}i_{L5}}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{C_3} & -\frac{1}{C_3}\\ -\frac{1}{L_4} & -\frac{R_3}{L_4} & \frac{R_3}{L_4}\\ \frac{1}{L_5} & \frac{R_3}{L_5} & -\frac{1}{L_5}\left(R_3+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{C3}\\ i_{L4}\\ i_{L5}\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{1}{L_4} & 0\\ -\frac{R_2}{(R_1+R_2)L_5} & \frac{R_1}{(R_1+R_2)L_5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{S1}\\ u_{S2}\end{bmatrix}$$

若以i_{R1}、i_{R2}和i_{R3}为输出变量，则输出方程为

$$i_{R1}=i_{l3}=-\frac{R_2}{R_1+R_2}i_{L5}+\frac{1}{R_1+R_2}u_{S1}+\frac{1}{R_1+R_2}u_{S2}$$

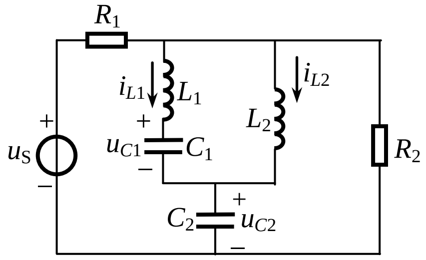
$$i_{R2}=-(i_{l2}+i_{l3})=-\frac{R_1}{R_1+R_2}i_{L5}-\frac{1}{R_1+R_2}u_{S1}-\frac{1}{R_1+R_2}u_{S2}$$

$$i_{R_3}=i_{l1}-i_{l2}=i_{L4}-i_{L5}$$

写成矩阵形式为

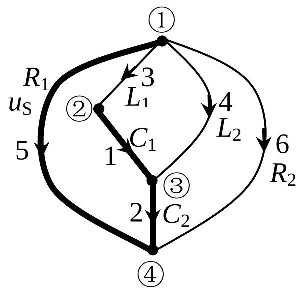
$$\begin{bmatrix}i_{R1}\\ i_{R2}\\ i_{R3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -\frac{R_2}{R_1+R_2}\\ 0 & 0 & -\frac{R_1}{R_1+R_2}\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{C3}\\ i_{L4}\\ i_{L5}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{R_1+R_2} & \frac{1}{R_1+R_2}\\ -\frac{1}{R_1+R_2} & -\frac{1}{R_1+R_2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{S1}\\ u_{S2}\end{bmatrix}$$

9-9* 用拓扑法列写题图 9-9 所示电路的状态方程。



题图 9-9

解 选 u_{C2}、i_{L1} 和 i_{L2} 为状态变量，题图 9-9 所示电路的图 G 如题图 9-9(a)所示。



题图 9-9(a)

选 1、2、5 支路为树支的常态树。

基本割集的 KCL 方程为

$$C_1\frac{\mathrm{d}u_{C1}}{\mathrm{d}t}=i_{L1} \tag{1}$$

$$C_2\frac{\mathrm{d}u_{C2}}{\mathrm{d}t}=i_{L1}+i_{L2} \tag{2}$$

$$i_5=-i_{L1}-i_{L2}-i_6 \tag{3}$$

基本回路的 KVL 方程为

$$u_3=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=u_5-u_{C2}-u_{C1} \tag{4}$$

$$u_4=L_2\frac{\mathrm{d}i_{L2}}{\mathrm{d}t}=u_5-u_{C2} \tag{5}$$

$$u_6=u_5=R_1i_5+u_S \tag{6}$$

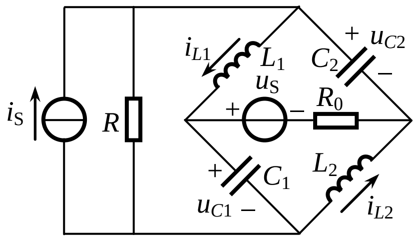
消去式（4）和式（5）中的 u_5 即可得到状态方程。由式（3）、式（6）及元件特性可得

$$u_5=-\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}(i_{L1}+i_{L2})+\frac{R_2}{R_1+R_2}u_S \tag{7}$$

将式（7）分别代入式（4）和式（5），并整理可得

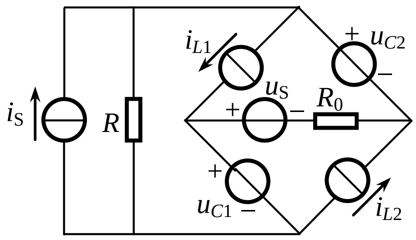
$$
\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}u_{C1}}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}u_{C2}}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_{L1}}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_{L2}}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{C_2} & \dfrac{1}{C_2} \\ -\dfrac{1}{L_1} & -\dfrac{1}{L_1} & -\dfrac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L_1} & -\dfrac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L_1} \\ 0 & -\dfrac{1}{L_2} & -\dfrac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L_2} & -\dfrac{R_1R_2}{(R_1+R_2)L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{R_2}{(R_1+R_2)L_1} \\ \dfrac{R_2}{(R_1+R_2)L_2} \end{bmatrix} u_S
$$

9-10 列写题图 9-10 所示电路的状态方程。已知电路中各元件的参数为 $L_1=L_2=1\text{H}$，$C_1=C_2=1\text{F}$，$R=R_0=1\Omega$。



题图 9-10

解 用叠加法。替代后的等效电路如题图 9-10(a)所示。



题图 9-10(a)

应用叠加定理，可分别求得

$$
C_1\frac{\mathrm{d}u_{C1}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{R+R_0}u_{C1} - \frac{1}{R+R_0}u_{C2} + \frac{R_0}{R+R_0}i_{L1} + \frac{R}{R+R_0}i_{L2} + \frac{1}{R+R_0}u_S + \frac{R}{R+R_0}i_S
$$
$$
= -0.5u_{C1} - 0.5u_{C2} + 0.5i_{L1} + 0.5i_{L2} + 0.5u_S + 0.5i_S
$$

$$
C_2\frac{\mathrm{d}u_{C2}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{R+R_0}u_{C1} - \frac{1}{R+R_0}u_{C2} - \frac{R}{R+R_0}i_{L1} - \frac{R_0}{R+R_0}i_{L2} + \frac{1}{R+R_0}u_S + \frac{R}{R+R_0}i_S
$$
$$
= -0.5u_{C1} - 0.5u_{C2} - 0.5i_{L1} - 0.5i_{L2} + 0.5u_S + 0.5i_S
$$

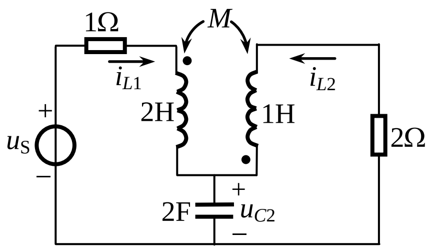
$$
L_1\frac{\mathrm{d}i_{L1}}{\mathrm{d}t} = -\frac{R_0}{R+R_0}u_{C1} + \frac{R}{R+R_0}u_{C2} - \frac{RR_0}{R+R_0}i_{L1} + \frac{RR_0}{R+R_0}i_{L2} - \frac{R}{R+R_0}u_S + \frac{RR_0}{R+R_0}i_S
$$
$$
= -0.5u_{C1} + 0.5u_{C2} - 0.5i_{L1} + 0.5i_{L2} - 0.5u_S + 0.5i_S
$$

$$L_2\frac{\mathrm{d}i_{L2}}{\mathrm{d}t}=-\frac{R}{R+R_0}u_{C1}+\frac{R_0}{R+R_0}u_{C2}+\frac{RR_0}{R+R_0}i_{L1}-\frac{RR_0}{R+R_0}i_{L2}+\frac{R}{R+R_0}u_{\mathrm{S}}-\frac{RR_0}{R+R_0}i_{\mathrm{S}}$$
$$=-0.5u_{C1}+0.5u_{C2}+0.5i_{L1}-0.5i_{L2}+0.5u_{\mathrm{S}}-0.5i_{\mathrm{S}}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}u_{C1}}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}u_{C2}}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}i_{L1}}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}i_{L2}}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5\\ -0.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5\\ -0.5 & 0.5 & -0.5 & 0.5\\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{C1}\\ u_{C2}\\ i_{L1}\\ i_{L}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0.5\\ -0.5 & 0.5\\ 0.5 & -0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{\mathrm{S}}\\ i_{\mathrm{S}}\end{bmatrix}$$

9-11 已知题图 9-11 所示电路中的互感系数 M＝1H，试写出该电路的状态方程。



题图 9-11

解 选 u_C 、 i_{L1} 和 i_{L2} 为状态变量，用直观法列写方程。

$$2\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=i_{L1}+i_{L2} \qquad (1)$$

$$2\frac{\mathrm{d}i_{L1}}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}i_{L2}}{\mathrm{d}t}=-u_C-i_{L1}+u_{\mathrm{S}} \qquad (2)$$

$$-\frac{\mathrm{d}i_{L1}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}i_{L2}}{\mathrm{d}t}=-u_C-2i_{L2} \qquad (3)$$

将上述式（2)、式（3）两个方程写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}i_{L1}}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}i_{L2}}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C\\ i_{L1}\\ i_{L2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u_{\mathrm{S}}$$

求逆，得

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}i_{L1}}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}i_{L2}}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C\\ i_{L1}\\ i_{L2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u_{\mathrm{S}}\right\}=\begin{bmatrix}-2 & -1 & -2\\ -3 & -1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C\\ i_{L1}\\ i_{L2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u_{\mathrm{S}} \qquad (4)$$

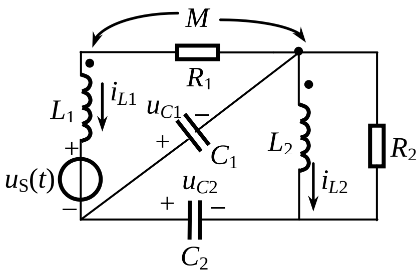
整理式（1）、式（4），写成矩阵形式，得标准形式的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_{L1}}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_{L2}}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ -2 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_{\mathrm{S}}$$

或　　若不要求写出标准形式的方程，则式（1）～（3）可写成如下矩阵形式即可。

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_{L1}}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_{L2}}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_{\mathrm{S}}$$

9-12　列写题图 9-12 所示电路状态方程。



题图 9-12

解　选 u_{C1}、u_{C2}、i_{L1} 和 i_{L2} 为状态变量，用直观法列写方程。

$$C_1 \frac{\mathrm{d}u_{C1}}{\mathrm{d}t} = i_{L1} + i_{L2} + \frac{1}{R_2}(u_{C2} - u_{C1}) \tag{1}$$

$$C_2 \frac{\mathrm{d}u_{C2}}{\mathrm{d}t} = -i_{L2} + \frac{1}{R_2}(u_{C1} - u_{C2}) \tag{2}$$

$$L_1 \frac{\mathrm{d}i_{L1}}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_{L2}}{\mathrm{d}t} = -R_1 i_{L1} - u_{C1} - u_{S1}(t) \tag{3}$$

$$M \frac{\mathrm{d}i_{L1}}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_{L2}}{\mathrm{d}t} = -u_{C1} + u_{C2} \tag{4}$$

由式（3）和式（4）可解得

$$\frac{\mathrm{d}i_{L1}}{\mathrm{d}t} = \frac{-L_2 + M}{\varDelta} u_{C1} - \frac{M}{\varDelta} u_{C2} - \frac{R_1 L_2}{\varDelta} i_{L1} - \frac{L_2}{\varDelta} u_{S1}(t) \tag{5}$$

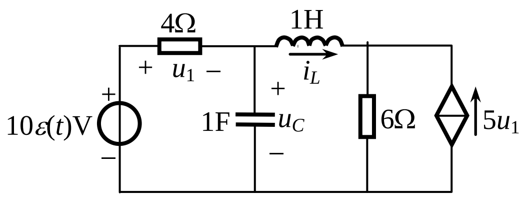
$$\frac{\mathrm{d}i_{L1}}{\mathrm{d}t} = \frac{-L_1 + M}{\varDelta} u_{C1} + \frac{L_1}{\varDelta} u_{C2} + \frac{R_1 M}{\varDelta} i_{L1} + \frac{M}{\varDelta} u_{S1}(t) \tag{6}$$

其中 $\varDelta = L_1 L_2 - M^2$。

将式（1）、式（2）、式（5）和式（6）写成标准的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}u_{C1}}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}u_{C2}}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}i_{L1}}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}i_{L2}}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{R_2C_1} & \dfrac{1}{R_2C_1} & \dfrac{1}{C_1} & \dfrac{1}{C_1}\\ \dfrac{1}{R_2C_2} & -\dfrac{1}{R_2C_2} & 0 & \dfrac{1}{C_2}\\ \dfrac{-L_2+M}{\varDelta} & -\dfrac{M}{\varDelta} & -\dfrac{R_1L_2}{\varDelta} & 0\\ \dfrac{-L_1+M}{\varDelta} & \dfrac{L_1}{\varDelta} & \dfrac{R_1M}{\varDelta} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{C1}\\ u_{C2}\\ i_{L1}\\ i_{L2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -\dfrac{L_2}{\varDelta}\\ \dfrac{M}{\varDelta}\end{bmatrix}u_{\mathrm{S}}$$

9-13 列写题图 9-13 所示电路状态方程。



题图 9-13

解 选u_C和i_L为状态变量，用直观法列写状态方程。

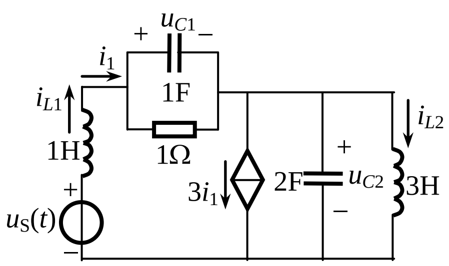
$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=\frac{10-u_C}{4}-i_L$$

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=u_C-(5u_1+i_L)\times 6$$

其中，u_1为非状态量，利用方程$u_1=10-u_C$可消去。整理得到状态方程：

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.25 & -1\\ 31 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2.5\\ -300\end{bmatrix}\quad (t>0)$$

9-14 列写题图 9-14 所示电路状态方程。



题图 9-14

解 选u_{C1}、u_{C2}、i_{L1}和i_{L2}为状态变量，用直观法列写方程。

$$C_1\frac{\mathrm{d}u_{C1}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}u_{C1}}{\mathrm{d}t}=-\frac{u_{C1}}{1}+i_{L1}$$

$$C_2\frac{\mathrm{d}u_{C2}}{\mathrm{d}t}=2\frac{\mathrm{d}u_{C1}}{\mathrm{d}t}=i_{L1}-i_{L2}-3i_1=-2i_{L1}-i_{L2}$$

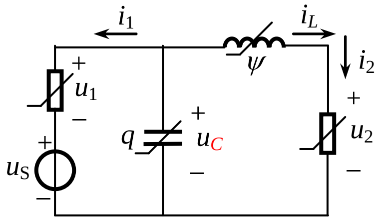
$$L_1\frac{\mathrm{d}i_{L1}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}i_{L1}}{\mathrm{d}t}=-u_{C1}-u_{C2}+u_S(t)$$

$$L_2\frac{\mathrm{d}i_{L2}}{\mathrm{d}t}=3\frac{\mathrm{d}i_{L2}}{\mathrm{d}t}=u_{C2}$$

整理，并写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}u_{C1}}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}u_{C2}}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}i_{L1}}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}i_{L2}}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2}\\ -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{C1}\\ u_{C2}\\ i_{L1}\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}u_S(t)$$

9-15 题图 9-15 所示电路中，已知非线性元件的特性为 $i_1=f_1(u_1)$，$u_2=f_2(i_2)$，$i_L=f_L(\psi)$，$u_C=f_C(q)$。写出此电路的状态变量方程。



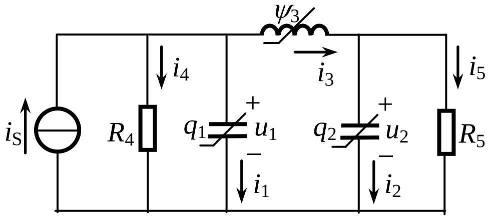
题图 9-15

解 以电荷 q 和磁链 ψ 为状态变量，方程如下：

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=-i_1-i_L=-f_1(u_C-u_S)-f_L(\psi)=-f_1[f_C(q)-u_S)]-f_L(\psi)$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}=u_C-u_2=f_C(q)-f_2(i_2)=f_C(q)-f_2[f_L(\psi)]$$

9-16 题图 9-16 所示非线性电路中，已知 $u_1=f_1(q_1)$，$u_2=f_2(q_2)$，$i_3=f_3(\psi_3)$，$R_4=R_5=1\Omega$。写出此电路的状态变量方程。



题图 9-16

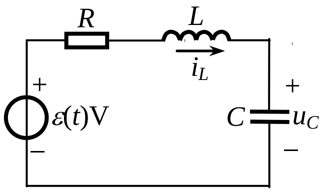
解 以q_1、q_2和ψ_3为状态变量，列写状态方程如下：

$$\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}=i_\mathrm{S}-\frac{u_1}{R_4}-i_3=-f_1(q_1)-f_3(\psi_3)+i_\mathrm{S}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}=i_3-\frac{u_2}{R_5}=-f_2(q_2)-f_3(\psi_3)$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi_3}{\mathrm{d}t}=u_1-u_2=f_1(q_1)-f_2(q_2)$$

9-17 题图 9-17 所示电路中，已知 R=1Ω，$L=\frac{1}{4}$H，$C=\frac{4}{3}$F，$u_C(0)$=0.5V，$i_L(0)$=0。选取 u_C 和 i_L 为状态变量列写状态方程，并求出 u_C 和 i_L 的全解。



题图 9-17

解 状态方程为

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=\frac{4}{3}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=i_L$$
$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=-u_C-i_L+1$$

写成标准矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0.75\\ -4 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 4\end{bmatrix}，（t\geq 0）$$

时域直接求解。

特征方程为

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 0.75\\ -4 & -4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+4\lambda+3=0$$

解得特征值$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-3$。

对每一个特征值求特征向量：

对应特征值$\lambda_1=-1$的特征向量$\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}p_{11}\\ p_{12}\end{bmatrix}$满足式$\left[\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I}\right]\boldsymbol{p}_1=0$，即

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.75 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix}=0$$

取 $p_{12}=1$，则 $p_{11}=-0.75$，得 $\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix} -0.75 \\ 1 \end{bmatrix}$。

对应特征值 $\lambda_2=-3$的特征值向量 $\boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{bmatrix}$满足式 $\left[\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I}\right]\boldsymbol{p}_2=0$，即

$$\begin{bmatrix} 3 & 0.75 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{bmatrix}=0$$

取 $p_{22}=1$，则 $p_{21}=-0.25$，得 $\boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix} -0.25 \\ 1 \end{bmatrix}$。

构成 $\boldsymbol{A}$ 的对角化矩阵：

$$\boldsymbol{P}=\left[\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2\right]=\begin{bmatrix} -0.75 & -0.25 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

其逆矩阵为

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix} -2 & -0.5 \\ 2 & 1.5 \end{bmatrix}$$

求 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$：

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{P}\mathrm{e}^{\Lambda t}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}&=\begin{bmatrix} -0.75 & -0.25 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -0.5 \\ 2 & 1.5 \end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} -0.75\mathrm{e}^{-t} & -0.25\mathrm{e}^{-3t} \\ \mathrm{e}^{-t} & -\mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -0.5 \\ 2 & 1.5 \end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} 1.5\mathrm{e}^{-t}-0.5\mathrm{e}^{-3t} & 0.375\mathrm{e}^{-t}-0.375\mathrm{e}^{-3t} \\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-3t} & -0.5\mathrm{e}^{-t}+1.5\mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

方程的全解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}(t)&=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{X}(0)+\int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}(\tau)\mathrm{d}\tau\\ &=\begin{bmatrix} 0.75\mathrm{e}^{-t}-0.25\mathrm{e}^{-3t} \\ -\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix} 1.5\mathrm{e}^{-(t-\tau)}-0.5\mathrm{e}^{-3(t-\tau)} & 0.375\mathrm{e}^{-(t-\tau)}-0.375\mathrm{e}^{-3(t-\tau)} \\ -2\mathrm{e}^{-(t-\tau)}+2\mathrm{e}^{-3(t-\tau)} & -0.5\mathrm{e}^{-(t-\tau)}+1.5\mathrm{e}^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}\mathrm{d}\tau\\ &=\begin{bmatrix} 0.75\mathrm{e}^{-t}-0.25\mathrm{e}^{-3t} \\ -\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix} 1.5\mathrm{e}^{-(t-\tau)}-1.5\mathrm{e}^{-3(t-\tau)} \\ -2\mathrm{e}^{-(t-\tau)}+6\mathrm{e}^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix}\mathrm{d}\tau=\begin{bmatrix} 1-0.75\mathrm{e}^{-t}+0.25\mathrm{e}^{-4t} \\ \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

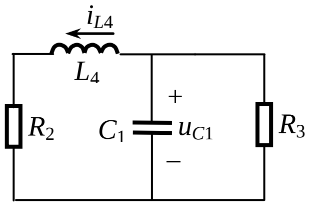
即

$$\begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-0.75\mathrm{e}^{-t}+0.25\mathrm{e}^{-4t}\ \mathrm{V} \\ \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-3t}\ \mathrm{A} \end{bmatrix}\quad (t\geq 0)$$

9-18 题图 9-18 所示电路中，已知 $C_1=\dfrac{1}{3}$ F，$R_2=R_3=\dfrac{1}{2}\,\Omega$，$L_4=\dfrac{1}{2}$ H。

（1）写出电路的状态方程；

（2）求零输入响应 $\boldsymbol{X}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}X(0)$，$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}u_{C1} & i_{L4}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。已知 $u_{C1}(0)=1$V，$i_{L4}(0)=0$。



题图 9-18

解 （1）状态方程如下：

$$C_1\frac{\mathrm{d}u_{C1}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}u_{C1}}{\mathrm{d}t}=-\frac{u_{C1}}{R_3}-i_{L4}=-2u_{C1}-i_{L4}$$

$$L_4\frac{\mathrm{d}i_{L4}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}i_{L4}}{\mathrm{d}t}=u_{C1}-R_2 i_{L4}=u_{C1}-\frac{1}{2}i_{L4}$$

写成标准矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}u_{C1}}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}i_{L4}}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & -3\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{C1}\\ i_{L4}\end{bmatrix}，（t\geq 0）$$

（2）时域直接求零输入响应。

特征方程为

$$\begin{vmatrix}-6-\lambda & -3\\ 2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+7\lambda+12=0$$

解得特征值 $\lambda_1=-3$，$\lambda_2=-4$。

对每一个特征值求特征向量：

对应特征值 $\lambda_1=-3$ 的特征向量 $\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}p_{11}\\ p_{12}\end{bmatrix}$ 满足式 $\left[\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I}\right]\boldsymbol{p}_1=0$，即

$$\begin{bmatrix}-3 & -3\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11}\\ p_{12}\end{bmatrix}=0$$

取 $p_{11}=1$，则 $p_{12}=-1$，得 $\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$。

对应特征值 $\lambda_2=-4$ 的特征值向量 $\boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}p_{21}\\ p_{22}\end{bmatrix}$ 满足式 $\left[\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I}\right]\boldsymbol{p}_2=0$，即

$$\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{21}\\ p_{22}\end{bmatrix}=0$$

取 $p_{22}=1$，则 $p_{21}=-1.5$，得 $\boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}-1.5\\ 1\end{bmatrix}$。

构成 $\boldsymbol{A}$ 的对角化矩阵：

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1.5\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

其逆矩阵为

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & -3\\ -2 & -2\end{bmatrix}$$

求 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$：

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{P}\mathrm{e}^{\Lambda t}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}&=\begin{bmatrix}1 & -1.5\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-3t} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-4t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & -3\\ -2 & -2\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-3t} & -1.5\mathrm{e}^{-4t}\\ -\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-4t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & -3\\ -2 & -2\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}-2\mathrm{e}^{-3t}+3\mathrm{e}^{-4t} & -3\mathrm{e}^{-3t}+3\mathrm{e}^{-4t}\\ 2\mathrm{e}^{-3t}-2\mathrm{e}^{-4t} & 3\mathrm{e}^{-3t}-2\mathrm{e}^{-4t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

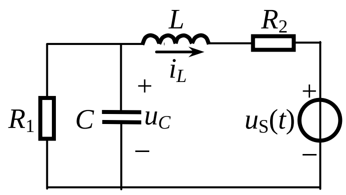
方程的全解为

$$\boldsymbol{X}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{X}(0)=\begin{bmatrix}-2\mathrm{e}^{-3t}+3\mathrm{e}^{-4t} & -3\mathrm{e}^{-3t}+3\mathrm{e}^{-4t}\\ 2\mathrm{e}^{-3t}-2\mathrm{e}^{-4t} & 3\mathrm{e}^{-3t}-2\mathrm{e}^{-4t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\mathrm{e}^{-3t}+3\mathrm{e}^{-4t}\\ 2\mathrm{e}^{-3t}-2\mathrm{e}^{-4t}\end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix}u_{C1}(t)\\ i_{L4}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\mathrm{e}^{-3t}+3\mathrm{e}^{-4t}\ \mathrm{V}\\ 2\mathrm{e}^{-3t}-2\mathrm{e}^{-4t}\ \mathrm{A}\end{bmatrix}\quad(t\geq 0)$$

9-19 题图 9-19 所示电路中，已知 R_1=0.5Ω，R_2=2.5Ω，C=1F，L=0.5H，$u_S(t)=\varepsilon(t)$V。且 $u_C(0)=0$，$i_L(0)=0$。写出电路的状态方程，并求解状态变量 $u_C(t)$和 $i_L(t)$。



题图 9-19

解 （1）列写状态方程

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-\frac{u_C}{R_1}+i_L\,,\quad L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=-u_C-R_2 i_L+u_S(t)$$

整理并代入参数值得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-2u_C+i_L\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=-2u_C-5i_L+2\end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -2 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}\quad(t>0)$$

（2）时域解状态方程

方法 1　用经典法求解

将上述状态方程转化二阶常微分方程，用经典法求解，即消去其中的一个状态变量，例如先消去i_L，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+7\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+12u_C=2$$

初值为

$$u_C(0^+)=u_C(0)=0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+}=-2u_C(0^+)+i_L(0^+)=0$$

u_C 的全解为

$$u_C(t)=\frac{1}{6}+A\mathrm{e}^{-3t}+B\mathrm{e}^{-4t}$$

由初值得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{6}+A+B=0\\ -3A-4B=0\end{cases}$$

解得 $A=-\dfrac{2}{3}$， $B=\dfrac{1}{2}$。所以

$$u_C(t)=\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4t}\ \mathrm{V}\quad (t\geq 0)$$

由状态方程得

$$i_L(t)=\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+2u_C=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3t}-\mathrm{e}^{-4t}\ \mathrm{A}\quad (t\geq 0)$$

方法 2　直接求解状态方程。

（a）特征方程为

$$\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1\\ -2 & -5-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+7\lambda+12=0$$

解得特征值$\lambda_1=-3$，$\lambda_2=-4$。

（b）对每一个特征值求特征向量：对应特征值$\lambda_1=-3$的特征向量$\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}p_{11}\\ p_{12}\end{bmatrix}$满足式$\left[\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I}\right]\boldsymbol{p}_1=0$，即

$$\begin{bmatrix}-2+3 & 1\\ -2 & -5+3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11}\\ p_{12}\end{bmatrix}=0$$

取 $p_{11}=1$，则 $p_{12}=-1$，得 $\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$。

对应特征值$\lambda_2=-4$的特征向量 $\boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}p_{21}\\ p_{22}\end{bmatrix}$满足式 $\left[\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I}\right]\boldsymbol{p}_2=0$，即

$$\begin{bmatrix} -2+4 & 1 \\ -2 & -5+4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{bmatrix}=0$$

取 $p_{21}=1$，则 $p_{22}=-2$，得 $\boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$。

（c）构成 $\boldsymbol{A}$ 的对角化矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

其逆矩阵为

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

（d）求 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{P}\mathrm{e}^{\Lambda t}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-3t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-3t} & \mathrm{e}^{-4t} \\ -\mathrm{e}^{-3t} & -2\mathrm{e}^{-4t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{-3t}-\mathrm{e}^{-4t} & \mathrm{e}^{-3t}-\mathrm{e}^{-4t} \\ -2\mathrm{e}^{-3t}+2\mathrm{e}^{-4t} & -\mathrm{e}^{-3t}+2\mathrm{e}^{-4t} \end{bmatrix}$$

（e）求方程的全解

$$\boldsymbol{X}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{X}(0)+\int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_0^t\begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{-3(t-\tau)}-\mathrm{e}^{-4(t-\tau)} & \mathrm{e}^{-3(t-\tau)}-\mathrm{e}^{-4(t-\tau)} \\ -2\mathrm{e}^{-3(t-\tau)}+2\mathrm{e}^{-4(t-\tau)} & -\mathrm{e}^{-3(t-\tau)}+2\mathrm{e}^{-4(t-\tau)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_0^t\begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{-3(t-\tau)}-2\mathrm{e}^{-4(t-\tau)} \\ -2\mathrm{e}^{-3(t-\tau)}+4\mathrm{e}^{-4(t-\tau)} \end{bmatrix}\mathrm{d}\tau=\begin{bmatrix} \frac{1}{6}-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4t}\ \mathrm{V} \\ \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3t}-\mathrm{e}^{-4t}\ \mathrm{A} \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}==\begin{bmatrix} \frac{1}{6}-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4t}\ \mathrm{V} \\ \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3t}-\mathrm{e}^{-4t}\ \mathrm{A} \end{bmatrix}\quad (t\geq 0)$$

9-20 求解下列状态方程：

（a）$\dot{\boldsymbol{X}}=\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}(0)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

（b）$\dot{\boldsymbol{X}}=\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

解 用拉普拉斯变换法求解。

（a）

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix} s+5 & 2 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{(s+3)(s+4)}\begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ 1 & s+5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix}=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}[\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{BU}(s)]=\frac{1}{(s+3)(s+4)}\begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ 1 & s+5 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2/s \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$=\frac{2}{s(s+3)(s+4)}\begin{bmatrix} s+2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

作拉式反变换得

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3t}-\mathrm{e}^{-4t} \\ \frac{1}{6}-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4t} \end{bmatrix} \quad (t>0)$$

或由 $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 作拉式反变换得

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t)}=\begin{bmatrix} -\mathrm{e}^{-3t}+2\mathrm{e}^{-4t} & -2\mathrm{e}^{-3t}+2\mathrm{e}^{-4t} \\ \mathrm{e}^{-3t}-\mathrm{e}^{-4t} & 2\mathrm{e}^{-3t}-\mathrm{e}^{-4t} \end{bmatrix}$$

再由 $\boldsymbol{x}(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{Bu}(\tau)\mathrm{d}\tau$ ，同样可得

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3t}-\mathrm{e}^{-4t} \\ \frac{1}{6}-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4t} \end{bmatrix} \quad (t>0)$$

（b）

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ -1 & s-3 \end{bmatrix}$$

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{(s+2)(s-3)-2}\begin{bmatrix} s-3 & 2 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix}=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0)=\frac{1}{s^2-s-8}\begin{bmatrix} s-3 & 2 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{s-3}{s^2-s-8} \\ \frac{1}{s^2-s-8} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{0.064}{s-3.37}+\frac{0.936}{s+2.37} \\ \frac{0.174}{s-3.37}+\frac{-0.174}{s+2.37} \end{bmatrix}$$

作拉式反变换得

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.064\mathrm{e}^{3.37t} + 0.936\mathrm{e}^{-2.37t} \\ 0.174\mathrm{e}^{3.37t} - 0.174\mathrm{e}^{-2.37t} \end{bmatrix} \quad (t > 0)$$

注：若要与书后答案对应，则题目应修改为

(b) $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$， $\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ （系数矩阵修改）

则有

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+4)} \begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{x}(0) = \frac{1}{(s+1)(s+4)} \begin{bmatrix} s+3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

作拉式反变换得

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4t} \\ \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4t} \end{bmatrix} \quad (t > 0)$$

第 9 章　状态变量法

9-1　（a）$\mathrm{d}i_L/\mathrm{d}t = u_S(t)/L$，$i = i_L + u_S(t)/R$；（b）$\mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t = -i_S(t)/C$，$u(t) = u_C - R\,i(t)$

9-2　（1）$\begin{bmatrix}\mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}i_L/\mathrm{d}t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/RC & -1/C\\ 1/L & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C\\ i_L\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1/C\\ 0\end{bmatrix} i_S$

（2）$\begin{bmatrix}\mathrm{d}q/\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}\psi/\mathrm{d}t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/RC & -1/L\\ 1/C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q\\ \psi\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} i_S$

9-3　$\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{u_C}{(R_1+R_2)C} + \dfrac{R_1 i_L}{(R_1+R_2)C}$，$\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{R_1 u_C}{(R_1+R_2)C} - \dfrac{R_1 R_2 i_L}{(R_1+R_2)C} + \dfrac{u_S}{L}$

9-4　$\begin{bmatrix}\dot{u}_{C_1}\\ \dot{u}_{C_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-(G_1+G_2)/C_1 & -G_2/C_1\\ -G_2/C_2 & -(G_L+G_2)/C_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{C_1}\\ u_{C_2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(G_1+G_2)/C_1\\ (G_L+G_2)/C_2\end{bmatrix} u_S$

9-5　$\mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t = -0.75u_C + 0.5i_S$，$\mathrm{d}i_L/\mathrm{d}t = -0.75i_L + 0.25i_S$

$$\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.5 & -0.5\\ 0 & -1.5\\ -0.5 & -0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C\\ i_L\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0.5\\ 0.5\\ 0.5\end{bmatrix} i_S$$

9-6

$$\begin{bmatrix}\dot{u}_C\\ \dot{i}_L\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\dfrac{1}{C}\left(\dfrac{1}{R_1+R_3}+\dfrac{1}{R_2+R_4}\right) & \dfrac{1}{C}\left(\dfrac{-R_1}{R_1+R_3}+\dfrac{R_4}{R_2+R_4}\right)\\ \dfrac{1}{L}\left(\dfrac{R_1}{R_1+R_3}-\dfrac{R_4}{R_2+R_4}\right) & -\dfrac{1}{L}\left(\dfrac{R_1R_3}{R_1+R_3}+\dfrac{R_2R_4}{R_2+R_4}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C\\ i_L\end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix}\dfrac{1}{C}\left(\dfrac{1}{R_1+R_3}\right) & \dfrac{1}{C}\left(\dfrac{1}{R_2+R_4}\right)\\ \dfrac{1}{L}\left(\dfrac{R_3}{R_1+R_3}\right) & \dfrac{1}{L}\left(\dfrac{R_4}{R_2+R_4}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{S1}\\ u_{S2}\end{bmatrix}$$

9-7

$$\begin{bmatrix}\dot{u}_{C1}\\ \dot{u}_{C2}\\ \dot{i}_L\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\dfrac{1}{C}\left(\dfrac{1}{R_1+R_2}\right) & 0 & -\dfrac{1}{C}\left(\dfrac{R_2}{R_1+R_2}\right)\\ 0 & -\dfrac{1}{R_3C_2} & \dfrac{1}{C_2}\\ \dfrac{1}{L}\left(\dfrac{R_2}{R_1+R_2}\right) & -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{1}{L}\left(\dfrac{R_2R_1}{R_1+R_2}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{C1}\\ u_{C2}\\ i_L\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\dfrac{1}{C_1}\left(\dfrac{1}{R_1+R_2}\right) & -\dfrac{1}{C_1}\left(\dfrac{1}{R_2+R_1}\right)\\ 0 & -\dfrac{1}{C_2R_3}\\ \dfrac{1}{L}\left(\dfrac{R_1}{R_1+R_2}\right) & -\dfrac{1}{L}\left(\dfrac{R_1}{R_2+R_1}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{S2}\\ u_{S3}\end{bmatrix}$$

9-8

$$\begin{bmatrix}\dot{u}_{C3}\\ \dot{i}_{L4}\\ \dot{i}_{L5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{C_3} & -\dfrac{1}{C_3}\\ -\dfrac{1}{L_4} & -\dfrac{R_3}{L_4} & \dfrac{R_3}{L_4}\\ \dfrac{1}{L_5} & \dfrac{R_3}{L_5} & -\dfrac{1}{L_5}(R_3+\dfrac{R_2R_1}{R_1+R_2})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{C3}\\ i_{L4}\\ i_{L5}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ \dfrac{1}{L_4} & 0\\ -\dfrac{1}{L_5}(\dfrac{R_2}{R_1+R_2}) & \dfrac{1}{L_5}(\dfrac{R_1}{R_1+R_2})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{S1}\\ u_{S2}\end{bmatrix}$$

9-9

$$\begin{bmatrix}\dot{i}_{L1}\\ \dot{i}_{L2}\\ \dot{u}_{C1}\\ \dot{u}_{C2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{R_1R_2}{L_1\left(R_1+R_2\right)} & -\dfrac{R_1R_2}{L_1\left(R_1+R_2\right)} & -\dfrac{1}{L_1} & -\dfrac{1}{L_1}\\ -\dfrac{R_1R_2}{L_2\left(R_1+R_2\right)} & -\dfrac{R_1R_2}{L_2\left(R_1+R_2\right)} & 0 & -\dfrac{1}{L_2}\\ \dfrac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0\\ \dfrac{1}{C_2} & \dfrac{1}{C_2} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_{L1}\\ i_{L2}\\ u_{C1}\\ u_{C2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{R_2}{L_1\left(R_1+R_2\right)}\\ \dfrac{R_2}{L_2\left(R_1+R_2\right)}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u_S$$

9-10 $$\begin{bmatrix}\dot{u}_{C1}\\ \dot{u}_{C2}\\ \dot{i}_{L1}\\ \dot{i}_{L2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5\\ -0.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5\\ -0.5 & 0.5 & -0.5 & 0.5\\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{C1}\\ u_{C2}\\ i_{L1}\\ i_{L2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0.5\\ -0.5 & 0.5\\ 0.5 & -0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_S\\ i_S\end{bmatrix}$$

9-11 $$\begin{bmatrix}\dot{u}_C\\ \dot{i}_{L1}\\ \dot{i}_{L2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0.5 & 0.5\\ -2 & -1 & -2\\ -3 & -1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C\\ i_{L1}\\ i_{L2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u_S$$

9-12 $\alpha=\dfrac{1}{R_2C_1}$, $\beta=\dfrac{1}{R_2C_2}$, $\varDelta=L_1L_2-M^2$

$$\begin{bmatrix}\dot{u}_{C1}\\ \dot{u}_{C2}\\ \dot{i}_{L1}\\ \dot{i}_{L2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\alpha & \alpha & \dfrac{1}{C_1} & \dfrac{1}{C_1}\\ \beta & -\beta & 0 & \dfrac{-1}{C_2}\\ \dfrac{-L_2+M}{\varDelta} & \dfrac{-M}{\varDelta} & \dfrac{-R_1L_2}{\varDelta} & 0\\ \dfrac{-L_1+M}{\varDelta} & \dfrac{L_1}{\varDelta} & \dfrac{R_1M}{\varDelta} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{C1}\\ u_{C2}\\ i_{L1}\\ i_{L2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dfrac{-L_2}{\varDelta}\\ \dfrac{M}{\varDelta}\end{bmatrix}u_S$$

9-13 $$\begin{bmatrix}\dot{u}_C\\ \dot{i}_L\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.25 & -1\\ 31 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2.5\\ -300\end{bmatrix}$$

9-14 $$\begin{bmatrix}\dot u_{C1}\\ \dot u_{C2}\\ \dot i_{L1}\\ \dot i_{L2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -0.5\\ -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0.333 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{C1}\\ u_{C2}\\ i_{L1}\\ i_{L2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}u_{\mathrm{S}}$$

9-15 $$\begin{cases}\dot q=-f_1[f_C(q)-u_{\mathrm{S}}]-f_L(\psi)\\ \dot\psi=f_C(q)-f_2[f_L(\psi)]\end{cases}$$

9-16 $$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}=-f_3(\psi_3)-\dfrac{1}{R_4}f(q_1)+i_S\\ \dfrac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{R_5}f(q_2)+f_3(\psi_3)\\ \dfrac{\mathrm{d}\psi_3}{\mathrm{d}t}=f_1(q_1)-f_2(q_2)\end{cases}$$

9-17 $$\begin{bmatrix}\dot u_C\\ \dot i_L\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0.75\\ -4 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix},\quad \begin{matrix}u_C(t)=-0.75\mathrm{e}^{-t}+0.25\mathrm{e}^{-3t}+1\\ i_L(t)=\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-3t}\end{matrix}$$

9-18 （a）$\begin{bmatrix}\dot u_{C1}\\ \dot i_{L4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & -3\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{C1}\\ i_{L4}\end{bmatrix}$；（b）$\begin{bmatrix}u_{C1}(t)\\ i_{L4}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\mathrm{e}^{-3t}+3\mathrm{e}^{-4t}\,\mathrm{V}\\ 2\mathrm{e}^{-3t}-2\mathrm{e}^{-4t}\ \mathrm{A}\end{bmatrix}$

9-19 （a）$\begin{bmatrix}\dot u_C\\ \dot i_L\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -2 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$；（b）$\begin{bmatrix}u_C(t)\\ i_L(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/6-2\mathrm{e}^{-3t}/3+0.5\mathrm{e}^{-4t}\,\mathrm{V}\\ 1/3+2\mathrm{e}^{-3t}/3-\mathrm{e}^{-4t}\ \mathrm{A}\end{bmatrix}$

9-20 （a）$\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/3+2\mathrm{e}^{-3t}/3-\mathrm{e}^{-4t}\\ 1/6-2\mathrm{e}^{-3t}/3+0.5\mathrm{e}^{-4t}\end{bmatrix}$；（b）$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\mathrm{e}^{-t}/3+\mathrm{e}^{-4t}/3\\ \mathrm{e}^{-t}/3-\mathrm{e}^{-4t}/3\end{bmatrix}$