第十周作业 参考解答

练习5.2

1(1,3,4), 3, 4, 5, 8, 9, 10， 12， 14, 16

练习5.3.

1， 2， 3， 4， 7(1, 4)， 8， 10， 12， 13

5.2.1

1. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. ◀ 特征值为 $7, -2$. 解得对应的特征向量为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$. ▶

3. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. ◀ 特征值为 $1, 1, -1$. 解得对应的特征向量为 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. ▶

4. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$. ◀ 特征值为 $\sqrt{14}i, -\sqrt{14}i, 0$. 解得对应的特征向量为 $\begin{bmatrix} 6+\sqrt{14}i \\ -2+3\sqrt{14}i \\ -10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6-\sqrt{14}i \\ -2-3\sqrt{14}i \\ -10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. (注意对于实方阵的共轭的复特征值, 可以选取共轭的特征向量, 故计算量可以减少一半.) ▶

练习 5.2.3. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & x & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & y \end{bmatrix}$, 已知 A, B 特征多项式相同, 求 x, y.

◀ A 的特征多项式为 $(\lambda-2)(\lambda^2-x\lambda-8)$, B 的特征值为 $2, 2, y$, 特征多项式为 $(\lambda-2)^2(\lambda-y)$. 解得 $x=-2, y=-4$. ▶

练习 5.2.4. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$ 可逆, 且 $x = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{bmatrix}$ 是 A 的特征向量, 求 a, b 的值.

◀ $Ax = \begin{bmatrix} 3+b \\ 2+2b \\ a+b+1 \end{bmatrix}$. 解得 $a=2, b=1$ 或 -2. 检验知 $a=2$ 时 A 可逆. ▶

练习 5.2.5. 设 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

1. 利用一元二次方程求根公式, 写出 A 的两个特征值 λ_1, λ_2 的表达式.

◀ A 的特征多项式为 $(\lambda-a)(\lambda-d)-bc$. 解得 $\lambda=\dfrac{a+d\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}$ ▶

2. 构造一个非对角的 A, 满足 $\lambda_1=\lambda_2$.

◀ $A=\begin{bmatrix} a & b \\ & a \end{bmatrix}$. ▶

3. 设 λ 为 A 的特征值, 证明 $A\begin{bmatrix} b \\ \lambda-a \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} b \\ \lambda-a \end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix} \lambda-d \\ c \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} \lambda-d \\ c \end{bmatrix}$. 提示: 如果这两个向量不是零向量, 那么它们就是特征向量.

◀ 记另一个特征值为 λ', 则 $\lambda+\lambda'=a+d$. $A\begin{bmatrix} \lambda-d & b \\ c & \lambda-a \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} \lambda-d & b \\ c & \lambda-a \end{bmatrix}=(A-\lambda I_2)(A-\lambda' I_2)$, Cayley-Hamilton 定理断言后者的值为 0. ▶

4. 若上述两个向量中有且仅有一个是零向量, 求 A 的特征值和特征向量.

◀ 这说明 $\lambda=a$ 或 $\lambda=d$ 以及 $bc=0$. 故 A 的特征值为 a, d. 对 A 为上 (下) 三角矩阵分别讨论可得 A 的特征向量. ▶

5. 若上述两个向量都是零向量, 求 A 的特征值和特征向量.

◀ 此时 A 为对角阵, 特征值为 a, d, 对应的特征向量分别为 e_1, e_2. ▶

练习 5.2.8. 证明, 如果 (λ, x) 是 A 的特征对, 则 $(f(\lambda), x)$ 是 $f(A)$ 的特征对, 其中 $f(x)$ 是任意多项式.

◀ 易见 $Ax = \lambda x$ 蕴涵 $f(A)x = f(\lambda)x$. (你可以先对单项式 x^n 归纳证明这一点再说明对这些单项式的线性组合也成立.) ▶

练习 5.2.9. 设 A 是可逆矩阵, 证明, A 的特征值都不为 0; 若 λ_0 是 A 的一个特征值, 则 $\frac{1}{\lambda_0}$ 是 A^{-1} 的一个特征值.

◀ $Ax = 0x$ 蕴涵 $x = 0$; $Ax = \lambda_0 x$ 蕴涵 $A^{-1}x = \frac{1}{\lambda_0}x$. (或: 将 A 相似上三角化易见这些成立.) ▶

练习 5.2.10. 设 $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}^3$ 为一组标准正交基, 分别求 $q_1 q_1^T$, $q_1 q_1^T + q_2 q_2^T$, $q_1 q_1^T + q_2 q_2^T + q_3 q_3^T$ 的所有特征值和特征向量.

◀ $1, 0, 0, q_1, q_2, q_3$; $1, 1, 0, q_1, q_2, q_3$; $1, 1, 1, q_1, q_2, q_3$. (注意 $q_1 q_1^T + q_2 q_2^T + q_3 q_3^T = I_3$.) ▶

注意特征值要么写重数 要么把每个特征值都写出来 不能只写特征值是0和1

练习 5.2.12. 证明:

1. 若存在正整数 k, 使得 $A^k = 0$, 则 A 的特征值只能是 0.

◀ $Ax = \lambda x$ 蕴涵 $A^k x = \lambda^k x$. (或: 将 A 相似上三角化易见其成立.) ▶

2. 若 $A^2 = I_n$, 则 A 的特征值只能是 1 或 -1.

◀ $Ax = \lambda x$ 蕴涵 $A^2 x = \lambda^2 x$. (或: 将 A 相似上三角化易见其成立.) ▶

3. 若 $A^2 = A$, 则 A 的特征值只能是 1 或 0.

◀ $Ax = \lambda x$ 蕴涵 $A^2 x = \lambda^2 x$. (或: 将 A 相似上三角化易见其成立.) ▶

练习 5.2.14. 设方阵 A, B 可交换, λ_0 是 A 的一个特征值, V_{λ_0} 是 A 的特征值为 λ_0 的特征子空间. 证明, 对任意 $x \in V_{\lambda_0}$, 都有 $Bx \in V_{\lambda_0}$. 当 A, B 不可交换时, 结论是否成立?

◀ $ABx = BAx = B\lambda_0 x = \lambda_0 Bx$, 这说明 Bx 落在 A 的特征值 λ_0 的特征子空间中 (由于 Bx 可能为零向量, 不能说 Bx 是 A 的特征值 λ_0 的特征向量). 不成立. ▶

练习 5.2.16. 设 λ_1, λ_2 是 A 的两个不同特征值, x_1, x_2 是分别属于 λ_1, λ_2 的特征向量. 证明, $x_1 + x_2$ 不是 A 的特征向量.

◀ 由 x_1, x_2 线性无关, $A(x_1 + x_2) = \lambda(x_1 + x_2)$ 与 $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$ 导出矛盾. ▶

练习 5.3.1. 设三阶方阵 A 的特征值及对应特征向量是 $1,1,3$ 和 $\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, 求 A.

◀ $A\begin{bmatrix}2&-1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&3\end{bmatrix}$. 解得 $A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&-4&3\end{bmatrix}$. ▶

练习 5.3.2. 判断下列方阵是否可对角化.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

◀ 3 个特征值互不相同, 故可对角化. ▶

2. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

◀ 特征值全是 0 的对角阵仅有零矩阵, 故其不可对角化. (或: 特征值 0 有代数重数 3 和几何重数 1, 故其不可对角化.) ▶

练习 5.3.3. 计算 A^n.

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

◀ A 的特征值为 $1,0,0$ 且可对角化. $A^n = A$. (注意一个秩 1 矩阵 $A = ab^T$ 满足 $(ab^T)n = a(b^Ta)^{n-1}b^T = (b^Ta)^{n-1}ab^T = (b^Ta)^{n-1}A$.) ▶

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$.

◀ A 有特征值 $2,2,6$ 以及对应的特征向量 $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$. 故 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$.

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 6 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & & \\ & 2^n & \\ & & 6^n \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}.$$ ▶

练习 5.3.4. 设 $A=\begin{bmatrix}3&2&-2\\-k&-1&k\\4&2&-3\end{bmatrix}$. 当 k 取何值时, A 可对角化? 当 A 可对角化时, 写出其谱分解.

◀ A 的特征值为 $1,-1,-1$. 考虑 Jordan 标准形我们知道 A 相似于 $\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}1&&\\&-1&1\\&&-1\end{bmatrix}$, 二者的区别在于 $A+I$ 的秩为 1 或 2. 易见 $A+I$ 的秩为 1 当且仅当 $k=0$. 此时计算得 A 的特征值 $1,-1,-1$ 分别对应特征向量 $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$. 故 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-2&0\\1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-2&0\\1&0&2\end{bmatrix}^{-1}$.

▶

练习 5.3.7. 利用谱分解说明如下事实.

1. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{1024}$ 的每个元素都大于 10^{700}.

◀ 显然每个元素均为正实数. 谱分解给出 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \\ & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$, 故 $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{1024} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{1024} & \\ & 5^{1024} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$, 由 $5^{1024}/det(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}) > 10^{700}$ 即得. ▶

4. $\begin{bmatrix} 5 & 6.9 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}^{1024}$ 的每个元素都小于 10^{-70}.

◀ 谱分解给出矩阵的两个特征值为 $\frac{5 \pm 3\sqrt{5}i}{10}$, 其模为 $\sqrt{\frac{7}{10}}$. 计算对数易得. ▶

练习 5.3.8. 设有谱分解 $A = X\Lambda X^{-1}$, 求下列矩阵的谱分解.

1. A^{-1}.

◀ $X\Lambda^{-1}X^{-1}$. ▶

2. A^T.

◀ $X^{-T}\Lambda X^T$. ▶

3. $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & 2\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & X^{-1} \end{bmatrix}$. ▶

4. $\begin{bmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{bmatrix}$.

◀ 注意 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 有谱分解 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, 故 $\begin{bmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \\ & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & \\ & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda & \\ & -\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{-1} & \\ & X^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}X & \frac{1}{\sqrt{2}}X \\ \frac{1}{\sqrt{2}}X & -\frac{1}{\sqrt{2}}X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda & \\ & -\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}X^{-1} & \frac{1}{\sqrt{2}}X^{-1} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}X^{-1} & -\frac{1}{\sqrt{2}}X^{-1} \end{bmatrix}$ 给出了 $\begin{bmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{bmatrix}$ 的谱分解. ▶

练习 5.3.10. 证明:

1. n 阶方阵 $J_n(\lambda_0)=\begin{bmatrix}\lambda_0 & 1 & & \\ & \lambda_0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0\end{bmatrix}$ 只有一个特征值 λ_0, 其代数重数是 n, 几何重数是 1.

◀ $J_n(\lambda_0)$ 的特征多项式为 $(\lambda-\lambda_0)^n$, 故其仅有一个 n 重特征值 λ_0. 考虑线性方程组系数矩阵的秩知其特征子空间维数为 1. ▶

2. 分块对角矩阵 $A=\begin{bmatrix}J_{n_1}(\lambda_0) & \\ & J_{n_2}(\lambda_0)\end{bmatrix}$ 只有一个特征值 λ_0, 其代数重数是 n_1+n_2, 几何重数是 2.

◀ 与上一问类似. ▶

练习 5.3.12. 设 A 是实二阶方阵, 且 $det(A) < 0$, 证明 A 在 $\mathbb{R}$ 上可对角化.

◀ 由 A 的两个特征值均为实数, A 在 $\mathbb{C}$ 上相似于某个实对角阵. 下面证明一个有用的命题:

若两个实方阵 A, B 在 $\mathbb{C}$ 上相似, 则 A, B 也在 $\mathbb{R}$ 上相似.

证明. 设可逆复方阵 $P + iQ$ 将 A 相似到 B, 即 $(P + iQ)A = B(P + iQ)$. 分别考虑实部和虚部知 $PA = BP, QA = BQ$. 注意 $det(P + tQ)$ 作为 t 的多项式在 i 处的取值非零, 从而其不是零多项式, 故存在某个实数 t_0 使得 $det(P + t_0Q) \neq 0, P + t_0Q$ 可逆. 注意 $(P + t_0Q)A = B(P + t_0Q)$, 故可逆实方阵 $P + t_0Q$ 将 A 相似到 B. ▶

5.3.13

法1　可考虑特征值1和-1分别对应的特征子空间维度，从而证明其几何重数等于代数重数，从而它们都是半单特征值，从而可对角化.

法2 $$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ B & -I_{n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ B/2 & I_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ -B/2 & I_{n-r} \end{bmatrix}$$