第13章　电路中的谐振

13-1　当频率 f=500Hz 时，RLC 串联电路发生谐振，已知谐振时入端阻抗 Z=10Ω，电路的品质因数 Q=20。求各元件参数 R、L 和 C。

解　根据已知条件，有

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi f = 6.28\times 500 \\ R = 10\Omega \\ \dfrac{\omega L}{R} = \dfrac{6.28\times 500L}{R} = Q = 20 \end{cases}$$

解得 $R = 10\Omega$， $L = 63.7\text{mH}$， $C = 1.59\mu\text{F}$ 。

13-2　RLC 串联电路的端电压 $u_\text{S} = 10\sqrt{2}\sin 1000t\ \text{V}$ 。当电容 C=10μF 时，电路中电流最大，$I_{\max}$=2A。

（1）求电阻 R 和电感 L;

（2）求各元件电压的瞬时值表达式;

（3）画出各电压相量图。

解　（1）RLC 串联电路谐振时，电路中的电流最大，此时有

$$I_{\max} = 2 = \frac{U_\text{S}}{R} = \frac{10}{R}$$

解得 $R = 5\Omega$ 。此时有

$$\omega_0 = 1000 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

所以有

$$L = \frac{1}{1000^2\times 10\times 10^{-6}} = 0.1\ \text{H}$$

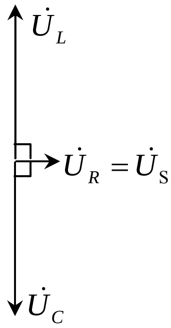
（2）各元件电压的瞬时值表达式为

$$u_R(t) = 2\sqrt{2}\sin 1000t\ \text{V=}2.828\sin 1000t\ \text{V}$$

$$u_L(t) = \omega_0 L\times 2\sqrt{2}\sin(1000t+90°)\ \text{V=}282.8\sin(1000t+90°)\ \text{V}$$

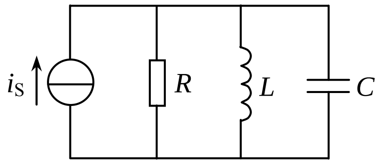
$$u_C(t) = \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0 C}\sin(1000t-90°)\ \text{V=}282.8\sin(1000t-90°)\ \text{V}$$

（3）各电压相量图示意图（未按比例）如题图 13-2(a)所示。



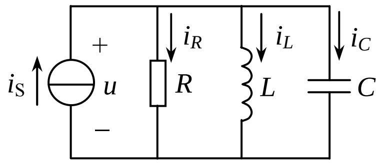
题图 13-2(a)

13-3 题图 13-3 所示电路中，$i_S = \sqrt{2}\sin(5000t + 30°)$A。当电容 C=20μF 时，电路中吸收的功率最大，P_{max}=50W。求 R、L 及流过各元件电流的瞬时值表达式，并画出各电流相量图。



题图 13-3

解 各电压、电流的参考方向如题图 13-3(a)所示。



题图 13-3(a)

由已知，电路中吸收的功率最大，因此此时电路处于谐振状态，且应有 $i_R = i_S$。所以有

$$R = \frac{P_{max}}{I_R^2} = \frac{50}{1} = 50\Omega$$

根据谐振条件，有

$$\omega_0 = 5000 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

所以有

$$L = \frac{1}{5000^2 \times 20 \times 10^{-6}} = 2\text{mH}$$

品质因数为 $Q = \dfrac{R}{\omega_0 L} = 5$。

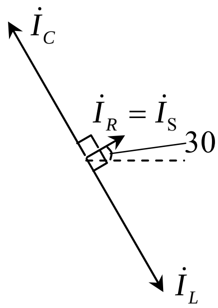
各电流的瞬时值表达式分别为

$$i_R(t) = \sqrt{2}\sin(5000t + 30°)\ \text{A=}1.414\sin(5000t + 30°)\ \text{A}$$

$$i_L(t)=QI_S\sqrt{2}\sin(5000t-60°)\ \text{A}=7.071\sin(5000t-60°)\ \text{A}$$

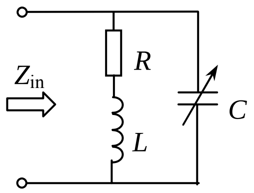
$$i_C(t)=QI_S\sqrt{2}\sin(5000t+120°)\ \text{A}=7.071\sin(5000t+120°)\ \text{A}$$

各电压相量图如题图 13-3(a)所示。



题图 13-3(a)

13-4 题图 13-4 所示并联谐振电路中，已知 R=10Ω，L=250μH，调节 C 使电路在 f=10^4Hz 时谐振。求谐振时的电容 C 及入端阻抗 Z_{in}。



题图 13-4

解　由题图 13-4 所示电路相量模型可得入端导纳为

$$Y_{in}=\frac{1}{Z_{in}}=\frac{1}{R+j\omega L}+j\omega C=\frac{R-j\omega L}{R^2+\omega^2L^2}+j\omega C$$

谐振时，应有

$$\frac{-j\omega_0 L}{R^2+\omega_0^2L^2}+j\omega_0 C=0$$

解得谐振条件为

$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{L^2}}$$

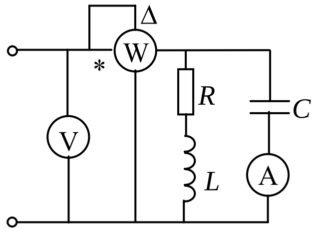
代入参数，可求得

$$C=\frac{L}{R^2+\omega_0^2L^2}=\frac{250\times10^{-6}}{10^2+(2\pi\times10^4\times250\times10^{-6})^2}=0.722\mu\text{F}$$

谐振时的入端阻抗为

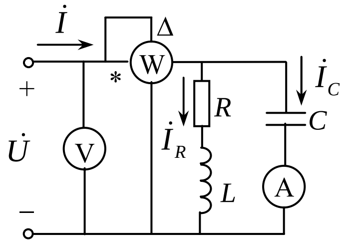
$$Z_{in}(j\omega_0)=\frac{R^2+\omega_0^2L^2}{R}=34.65\Omega$$

13-5　题图 13-5 所示电路发生谐振时，电流表读数为 0.3A，电压表读数为 20V，功率表读数为 8W。求 R、L 和 C。

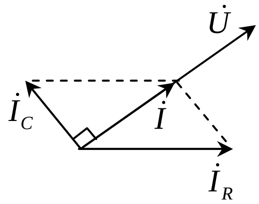


题图 13-5

解　各电压、电流的参考方向如题图 13-5(a)所示，电压、电流相量如题图 13-5(b)所示。



题图 13-5(a)



题图 13-5(b)

由电压表、电流表的读数及工频频率得

$$C=\frac{I_C}{\omega U}=\frac{0.3}{2\pi\times 50\times 20}=47.7\mu\text{F}$$

由功率表、电压表的读数得

$$I=\frac{8}{20\cos 0^{\circ}}=0.4\text{A}$$

由相量图可得

$$I_R=\sqrt{I_C^2+I^2}=\sqrt{0.3^2+0.4^2}=0.5\text{A}$$

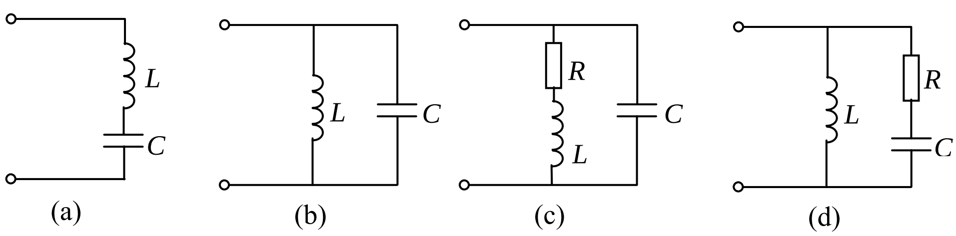
所以

$$R=\frac{8}{I_R^2}=32\Omega$$

$$\sqrt{32^2+(\omega L)^2}=\frac{20}{0.5}=40$$

解得 $L=76.4\text{mH}$。

13-6　求题图 13-6 各电路的谐振频率及谐振时的入端阻抗。



题图 13-6

解　各电路的谐振频率及谐振时的入端阻抗分别为

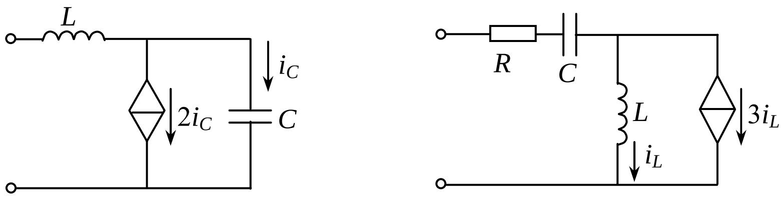
（a）$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$，$f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$，$Z(\mathrm{j}\omega_0) = 0$

（b）$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$，$f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$，$Z(\mathrm{j}\omega_0) = \infty$

（c）$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{L^2}}$，$f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{L^2}}$，$Z(\mathrm{j}\omega_0) = \dfrac{L}{RC}$

（d）$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC - R^2C^2}}$，$f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{1}{LC - R^2C^2}}$，$Z(\mathrm{j}\omega_0) = \dfrac{L}{RC}$

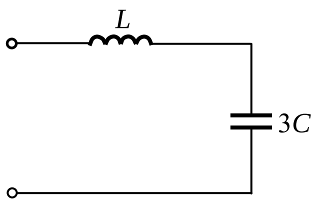
13-7　求题图 13-7 所示电路的谐振角频率。



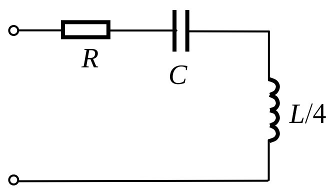
(a)　　(b)

题图 13-7

解　题图 13-7(a)、题图 13-7 (b)所示电路的等效电路分别如题图 13-7(c)、题图 13-7(d)所示。



题图 13-7(c)



题图 13-7(d)

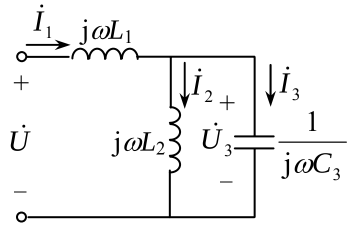
由题图 13-7(c)等效电路可得谐振角频率为

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{3LC}}$$

由题图 13-7(d)等效电路可得谐振角频率为

$$\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}}$$

13-8 求题图 13-8 所示电路发生串联谐振时的谐振角频率。设电容 C_3 的端电压 $\dot{U}_3 = U_3\angle 0°$，定性画出该谐振频率下电流 $\dot{I}_1$、$\dot{I}_2$、$\dot{I}_3$ 及电压 $\dot{U}$ 的相量图。问当 $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{L_2 C_3}}$ 时，电路的入端阻抗是多少？

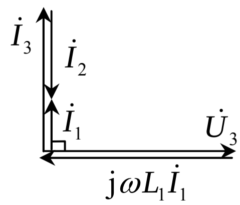


题图 13-8

解 （1）当电路发生串联谐振时，谐振角频率为

$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} C}}$$

（2）令 $\dot{U}_3 = U_3\angle 0°$，相量图如题图 13-8(a)所示。

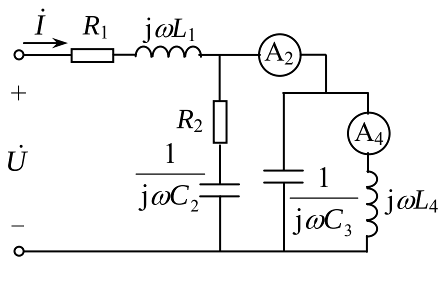


题图 13-8(a)

注意：此时电压 $\dot{U} = \dot{U} + \mathrm{j}\omega L_1 \dot{I}_1 = 0$。

（3）当 $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{L_2 C_3}}$ 时，电路为并联谐振，此时的入端阻抗为∞。

13-9 题图 13-9 所示电路中，电流表 A_2 的读数为零。已知 U=200V，R_1=50Ω，L_1=0.2H，R_2=50Ω，C_2=5μF，C_3=10μF，L_4=0.1H。求电流表 A_4 的读数。



题图 13-9

解 令 $\dot{U} = 200\angle 0°\ \mathrm{V}$。

因 A_2 的读数为零，所以此时 L_4，C_3 发生并联谐振。谐振角频率为

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{L_4C_3}}=\frac{1}{\sqrt{0.1\times10\times10^{-6}}}=1000\text{rad/s}$$

ω_0 即电路中电源的角频率。此时

$$\omega_0L_1=200\Omega\text{，}\ \omega_0L_4=100\Omega\text{，}\ \frac{1}{\omega_0C_2}=\frac{1}{1000\times5\times10^{-6}}=200\Omega$$

则

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{R_1+\mathrm{j}\omega_0L_1+R_2+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega_0C_2}}=\frac{\dot{U}}{R_1+R_2}=\frac{200\angle0^\circ}{50+50}=2\angle0^\circ\ \text{A}$$

L_4，C_3 并联部分两端的电压为

$$U_2=I\sqrt{R_2^2+(\frac{1}{\omega_0C_2})^2}=2\times\sqrt{50^2+200^2}=412.3\text{V}$$

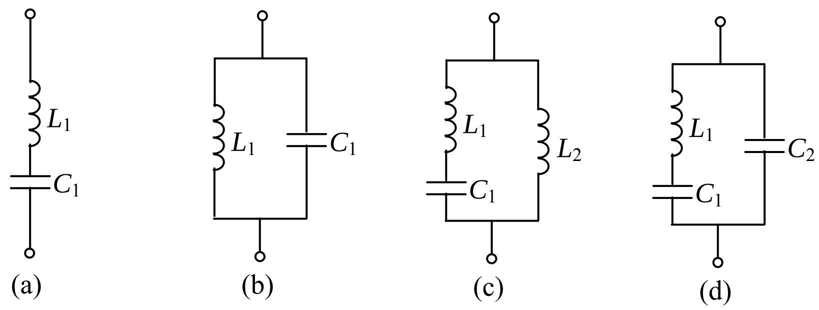
电流表 A_4 的读数为

$$I_4=\frac{U_2}{\omega_0L_4}=\frac{412.3}{100}=4.12\text{A}$$

13-10 题图 13-10 中有四个电路。

（1）当 $\omega=\omega_1=\dfrac{1}{\sqrt{L_1C_1}}$ 时，这四个电路哪些相当于开路？哪些相当于短路？

（2）有人认为在另一个频率 ω_2 的时候，(c)、(d)这两个电路相当于开路，可能吗？若可能，ω_2 是大于还是小于 ω_1？怎样计算 ω_2？



题图 13-10

解　（1）当 $\omega=\omega_1=\dfrac{1}{\sqrt{L_1C_1}}$ 时，（a）（c）（d）发生串联谐振，相当于短路，（b）发生并联谐振，相当于开路；

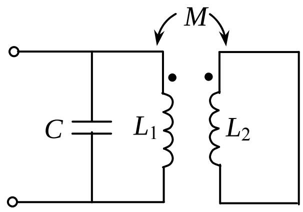
（2）可能。（c）（d）除了可以发生串联谐振外，还可以发生并联谐振。

并联谐振频率分别求解如下：

对于（c）：$Y(\mathrm{j}\omega)=0\Rightarrow\omega_2=\dfrac{1}{\sqrt{(L_1+L_2)C_1}}<\omega_1$

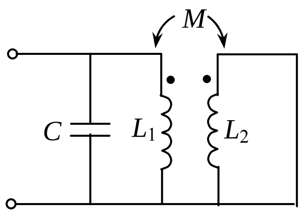
对于（d）：$Y(\mathrm{j}\omega)=0 \Rightarrow \omega_2=\dfrac{1}{\sqrt{L_1\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}}}>\omega_1$

13-11 已知题图 13-11 所示电路中，C=0.1μF，L_1=3mH，L_2=2mH，M=1mH。求电路的谐振频率(忽略电阻)。

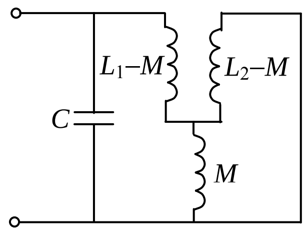


题图 13-11

解 题图 13-11 所示电路与题图 13-11(a)等效，题图 13-11(a)可去耦等效为题图 13-11(b)。



题图 13-11(a)



题图 13-11(b)

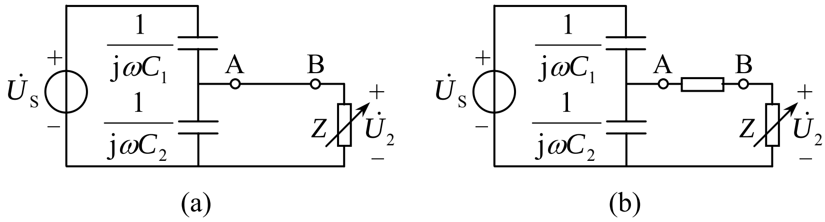
由题图 13-11(b)等效电路容易得到向电容右边看入等效电感为

$$L_{\mathrm{eq}}=L_1-M+\frac{M(L_2-M)}{M+L_2-M}=2.5\ \mathrm{mH}$$

所以，谐振频率为

$$f=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{L_{\mathrm{eq}}C}}=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2.5\times10^{-3}\times0.1\times10^{-6}}}=10.07\ \mathrm{kHz}$$

13-12 题图 13-12(a)所示电路中，C_1 与 C_2 组成一个电容分压器。这个分压器有一个缺点，即负载 Z 改变时，$\dot{U}_2$ 也随之改变。试问在原电路 A、B 之间接入一个什么样的元件可使 Z 变化时，$\dot{U}_2$ 不变？并说明该元件的参数有多大？已知电源频率为 f。



题图 13-12

解　当从 Z 两端向左看过去的戴维南等效电路的 $Z_i=0$ 时，$\dot{U}_2$ 不随 Z 的变化而变化。因此

$$\mathrm{j}X-\mathrm{j}\frac{1}{\omega(C_1+C_2)}=0$$

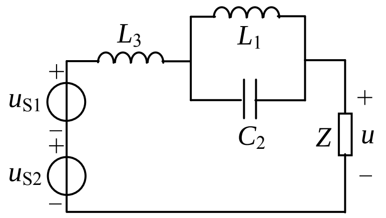
其中 X 是 A、B 间接入的元件的电抗

$$X=\frac{1}{\omega(C_1+C_2)}>0$$

因此所接入的元件是一电感，其电感值为

$$L=\frac{X}{\omega}=\frac{1}{(2\pi f)^2(C_1+C_2)}$$

13-13　题图 13-13 所示电路中，有两个不同频率的电源同时作用，其中 $u_{S1}=\sqrt{2}U_{S1}\sin\omega_1 t$，$\omega_1$=100π rad·s^{-1}，$u_{S2}=\sqrt{2}U_{S2}\sin\omega_2 t$，$\omega_2$=300π rad·s^{-1}。如要求电路负载 Z 上的电压 u 不包含频率为ω_1 的电压分量，而包含频率为ω_2 的全部电压分量，即 $u=u_{S2}=\sqrt{2}U_{S2}\sin\omega_2 t$，且已知 L_1=0.2H。试选择 C_2、L_3 的参数。若反之需保留频率为ω_1 的电压，应设计什么样的滤波电路？并求出相应的元件参数。



题图 13-13

解　（1）按题中要求，题图 13-13 所示电路中 L_1、C_2 和 L_3 构成的串并联网络应对频率为ω_1 的电压分量并联谐振，而频率为ω_2 的电压分量串联谐振，此时有

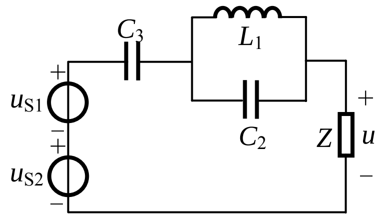
$$\omega_1=\frac{1}{\sqrt{L_1C_2}}\text{，}\quad \omega_2=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{L_1L_3}{L_1+L_3}C_2}}$$

选择合适的参数，可以满足要求。由上两式可求得

$$C_2=\frac{1}{\omega_1^2L_1}=\frac{1}{(100\pi)^2\times0.2}=50.66\mu\mathrm{F}$$

$$L_3=\frac{L_1}{\omega_2^2L_1C_2-1}=\frac{0.2}{(300\pi)^2\times0.2\times50.66\times10^{-6}-1}=25.00\mathrm{mH}$$

（2）若需保留频率为ω_1 的电压，应选择下图所示滤波电路。

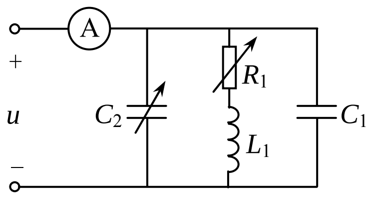


可列方程为

$$\begin{cases} \omega_1 = 100\pi = \dfrac{1}{\sqrt{L_1(C_2+C_3)}} \\ \omega_2 = 300\pi = \dfrac{1}{\sqrt{L_1C_2}} \end{cases}$$

解得 $C_2 = 5.63\mu\text{F}$， $C_3 = 45\mu\text{F}$ 。

13-14 已知题图 13-14 所示电路中，C_1=60μF，L_1=10mH，U=120V，ω=400 rad·s^{-1}，R_1、C_2 可调，电路谐振时电流表读数为 12A。求 R_1 和 C_2 的值。



题图 13-14

解 由题图 13-14 所示电路的相量模型，可得其入端导纳为

$$Y_{\text{in}} = \text{j}\omega C_1 + \frac{1}{R_1 + \text{j}\omega L_1} + \text{j}\omega C_2 = \text{j}\omega(C_1+C_2) + \frac{R_1 - \text{j}\omega L_1}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}$$

由谐振条件及题中已知，有

$$\begin{cases} \omega(C_1+C_2) + \dfrac{-\text{j}\omega L_1}{R_1^2+\omega^2L_1^2} = 0 \\ \dfrac{R_1}{R_1^2+\omega^2L_1^2} \times 120 = 12 \end{cases}$$

整理上式并代入已知参数，得

$$\begin{cases} C_2 = \dfrac{L_1}{R_1^2+\omega^2L_1^2} - C_1 = \dfrac{10^{-2}}{R_1^2+16} - 60\times10^{-6} \\ R_1^2 - 10R_1 + 16 = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} R_1 = 2\Omega \\ C_2 = 440\mu\text{F} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} R_1 = 8\Omega \\ C_2 = 65\mu\text{F} \end{cases}$$

第 13 章　电路中的谐振

13-1　R=10Ω，L=63.6mH，C=1.59μF

13-2　R=5Ω，L=0.1H，u_R=14.14sin1000tV，u_L=282.8sin(1000t+90°)V，u_C=282.8sin(1000t−90°)V

13-3　R=50Ω，L=2mH，i_R=1.414sin(5000t+30°)A，i_L=7.07sin(5000t−60°)A，i_C=7.07sin(5000t+120°)A

13-4　C=0.722μF，Z_0=34.6Ω

13-5　R=32Ω，L= 76.4mH，C= 47.7μF

13-6　（a）$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$，Z=0;（b）$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$，Z= ∞,（c）ω_0=$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{L^2}}$，$Z$= L/RC;（d）$\omega_0 = 1\big/\sqrt{LC - R^2C^2}$，$Z$=$L/RC$

13-7　（a）$\omega_0 = 1/\sqrt{3LC}$；（b）$\omega_0 = 2\big/\sqrt{LC}$

13-8　$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C_3}}$，$Z$=∞

13-9　4.12A

13-11　10.1kHz

13-12　$L = \dfrac{1}{(2\pi f)^2 (C_1 + C_2)}$

13-13　（1）C_2=50.7μF，L_3=25.0mH;（2）$C_2 = 5.63\mu\text{F}$，$C_3 = 45\mu\text{F}$

13-14　2Ω或 8Ω，440μF 或 65μF