线 性 代 数

第2讲，线性映射的基本概念

清华大学数学科学系　　梁 恒

荷二楼215

liangh@mail.tsinghua.edu.cn

什么是“线性”

若 $f(x)=x$，则 $f(x+y)=x+y=f(x)+f(y)$

$$f(kx)=kx=kf(x)$$

若 $f(x)=c$，则 $f(x+y)=c\neq f(x)+f(y)$

$$f(kx)=c\neq kf(x)$$

若 $f(x)=x^2$，则 $f(x+y)=(x+y)^2\neq x^2+y^2=f(x)+f(y)$

$$f(kx)=k^2x^2\neq kf(x)$$

线性就是1次，保持加法和数乘的运算关系

加法

若 $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}\right) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m$

则 $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_m + y_m \end{bmatrix}\right)$

$$= a_1(x_1 + y_1) + a_2(x_2 + y_2) + \cdots + a_m(x_m + y_m) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}\right)$$

数乘

若 $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}\right) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m$

则 $f\left(k \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ \vdots \\ kx_m \end{bmatrix}\right)$

$$= a_1(kx_1) + a_2(kx_2) + \cdots + a_m(kx_m) = k \cdot f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}\right)$$

向 量

定义 1.1.2 (向量) 一个 m 元有序数组 $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ 称为一个 m 维**向量**，实数 $a_1,\cdots,a_m$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**分量**或**坐标**.

分量都是实数的 m 维向量的全体构成的集合记为 $\mathbb{R}^m$.

注 1.1.3 分量都是复数的 m 维向量的全体构成的集合记为 $\mathbb{C}^m$. 分量也可以取其他范围内的数，本书主要讨论分量为实数和复数的两种情形.

两个向量**相等**是指二者的每个分量都相等. 向量常常用黑体小写字母表示[1]，如 $\boldsymbol{a}$. 由于分量纵向排列，向量又称为列向量. 根据问题需要，向量也可以把分量横向排列，称为行向量. 为了与列向量区分，用符号 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$ 表示，即如果 $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_m \end{bmatrix}$.

向量的加法和数乘运算

定义 1.1.4 (线性运算) 为 $\mathbb{R}^m$ 中的向量定义两种运算[2]

1. 两个 m 维向量的**向量加法**: $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_m + b_m \end{bmatrix}$;

2. 一个 m 维向量与一个数的**数乘**: $k \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} ka_1 \\ \vdots \\ ka_m \end{bmatrix}$;

向量的加法和数乘统称向量的**线性运算**.

带有线性运算的集合 $\mathbb{R}^m$, 称为**向量空间** $\mathbb{R}^m$ 或**线性空间** $\mathbb{R}^m$.

注意, "线性空间 $\mathbb{R}^m$" 中的向量能做加法和数乘, 而 "集合 $\mathbb{R}^m$" 则不能, 二者并不是同一个数学对象. 另外, 线性空间 $\mathbb{R}^n$ 和线性空间 $\mathbb{R}^m$ 中的向量在 $m \neq n$ 时无法做加法; 线性空间 $\mathbb{R}^m$ 上的数乘运算中的数, 需要是实数.

向量（线性）空间

用加法和数乘运算，对向量进行管理，将向量组织起来

$$\begin{bmatrix}13\\15\\18\end{bmatrix}=13\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+15\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+18\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=a\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+b\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

空间＝集合＋运算

m维向量空间＝m维向量＋加法与数乘运算

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_m + b_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + b_1 + c_1 \\ a_2 + b_1 + c_1 \\ \vdots \\ a_m + b_m + c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ \vdots \\ b_m + c_m \end{bmatrix} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

命题 1.1.5 向量加法和数乘满足如下八条运算法则:

1. 加法结合律: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

2. 加法交换律: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

3. 零向量: 存在 m 维**零向量** $\mathbf{0}=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$, 满足 $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$;

4. 负向量: 对任意 $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_1\\\vdots\\a_m\end{bmatrix}$, 记 $-\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}-a_1\\\vdots\\-a_m\end{bmatrix}$, 它满足 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$, 称它为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**;

5. 单位数: $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$;

6. 数乘结合律: $(kl)\boldsymbol{a}=k(l\boldsymbol{a})$;

7. 数乘关于数的分配律: $(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$;

8. 数乘关于向量的分配律: $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$.

合并同类项

$$2a + 4(2a + (3b + 0)) + 4((a + (2 + 3)c) - a) = 10a + 12b + 20c.$$

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

$$F_2\text{的作用效果}\quad f_1=\frac{(d-l_2)}{d}F_2$$

$$f_2=\frac{l_2}{d}F_2$$

叠加原理

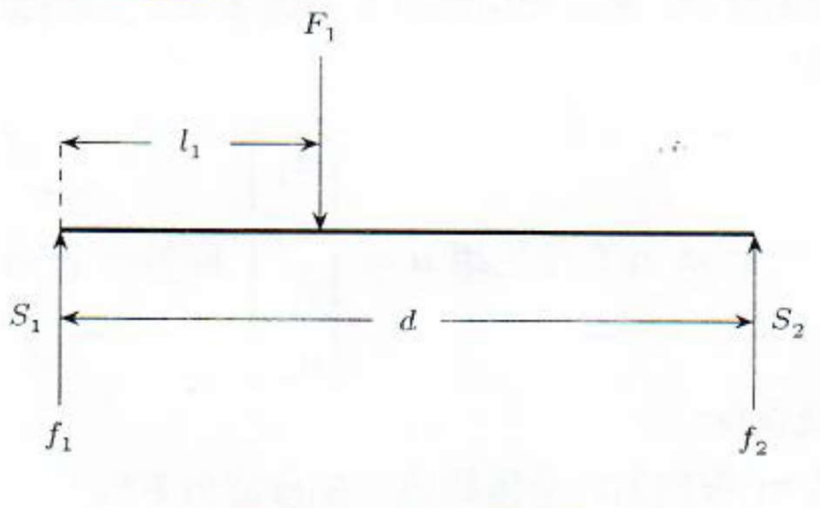


图 1.1.1: 桥墩载荷

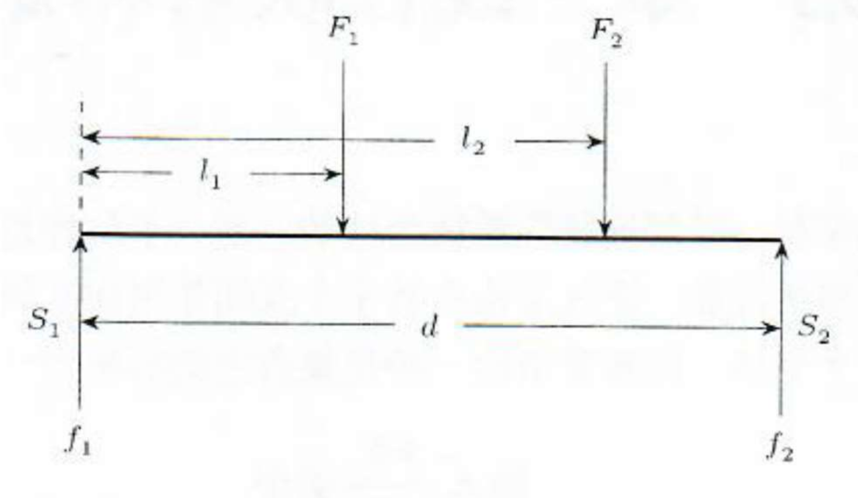


图 1.1.2: 桥墩载荷

$$F_1\cdot(d-l_1)=f_1\cdot d\Rightarrow f_1=\frac{(d-l_1)}{d}F_1$$

$$F_1\cdot l_1=f_2\cdot d\Rightarrow f_2=\frac{l_1}{d}F_1$$

两个重物的线性系统可以表示成如下映射:

$$\begin{array}{ccccc}\mathbb{R}^2 & \to & & & \mathbb{R}^2\\ \begin{bmatrix}F_1\\F_2\end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix}f_1\\f_2\end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix}\frac{d-l_1}{d}F_1+\frac{d-l_2}{d}F_2\\ \frac{l_1}{d}F_1+\frac{l_2}{d}F_2\end{bmatrix}\end{array}.$$

一般地，n 个输入 m 个输出的线性系统可以表示成如下映射：

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^n \quad &\rightarrow \quad \mathbb{R}^m \\ \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad &\mapsto \quad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') &= \begin{bmatrix} a_{11}(x_1+x_1')+\cdots+a_{1n}(x_n+x_n') \\ \vdots \\ a_{m1}(x_1+x_1')+\cdots+a_{mn}(x_n+x_n') \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}x_1'+\cdots+a_{1n}x_n' \\ \vdots \\ a_{m1}x_1'+\cdots+a_{mn}x_n' \end{bmatrix} = f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{x}'), \\ f(k\boldsymbol{x}) &= \begin{bmatrix} a_{11}kx_1+\cdots+a_{1n}kx_n \\ \vdots \\ a_{m1}kx_1+\cdots+a_{mn}kx_n \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \end{bmatrix} = kf(\boldsymbol{x}), \end{aligned}$$

其中[3]，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}'=\begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$. 由观察可知，等式左边的 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}', k\boldsymbol{x}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的线性运算，而等式右边的 $f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{x}'), kf(\boldsymbol{x})$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的线性运算.

定义 1.1.7 (线性映射) 映射 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，如果满足

1. 任取 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n$，都有 $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}')$；

2. 任取 $\boldsymbol{x}, \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$，都有 $f(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})$，

则称 f 为从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的**线性映射**.

定义域上的加法映射成陪域上的加法

定义域上的数乘映射成陪域上的数乘

$$f(ax+by) = af(x) + bf(y)$$

简单来说：线性映射保持线性运算

线性映射一定把零向量映射为零向量：$f(\mathbf{0}_n) = \mathbf{0}_m$

定义 1.1.9 (线性变换) 从 $\mathbb{R}^n$ 到自身的线性映射称为 $\mathbb{R}^n$ 上的**线性变换**.

特别地，$\mathbb{R}^n$ 上的 **恒同变换**

$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{I} = \mathrm{id}: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & \boldsymbol{x} & \mapsto & \boldsymbol{x} \end{array} \tag{1.1.2}$$

是线性变换.

线性映射的例子

超市里面买水果，苹果、香蕉、樱桃，
每公斤的价格分别是12.98、9.98和129.98元

设苹果 $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，香蕉 $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，和樱桃 $\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

苹果、香蕉、樱桃各买 x_1, x_2, x_3 公斤

$$\begin{aligned}\text{结账：}\quad \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R},\\ \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} &\mapsto 12.98x_1+9.98x_2+129.98x_3.\end{aligned}$$

线性映射的例子

假设每千克苹果含有 12 克纤维素和 135 克糖，每千克香蕉含有 12 克纤维素和 208 克糖．每千克樱桃含有 3 克纤维素和 99 克糖．所有纤维素和糖的含量的组合组成一个二维线性空间 $\mathbb{R}^2$，设纤维素 $\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，糖 $\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$．把每种水果组合映射到对应的纤维素和糖的含量，是一个从 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的映射，称为"营养"：

$$\begin{aligned} \text{营养：}\quad \mathbb{R}^3 \quad &\to \quad \mathbb{R}^2, \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} 12x_1 + 12x_2 + 3x_3 \\ 135x_1 + 208x_2 + 99x_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

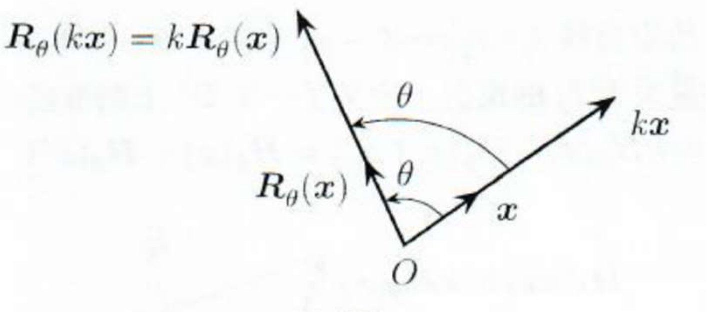
容易看出，这是一个线性映射．

例 1.1.10 考虑例 1.1.6 中由平面向量构成的线性空间 $\mathbb{R}^2$，下面讨论平面[4]上的几类线性变换.

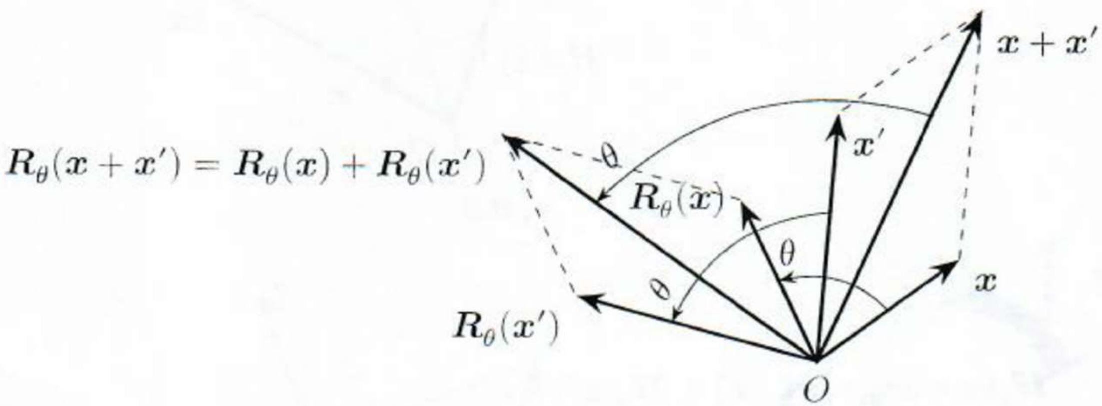
线性变换例1，旋转变换：

对任意实数 θ，将所有向量绕原点逆时针旋转 θ 大小的角

这是一个$\boldsymbol{R}^2$上的变换，记为$\boldsymbol{R}_\theta$。满足$\boldsymbol{R}_\theta(\boldsymbol{kx})=\boldsymbol{kR}_\theta(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{R}_\theta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}')=\boldsymbol{R}_\theta(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{R}_\theta(\boldsymbol{x}')$



(a) 数乘



(b) 加法

线性变换例1，旋转变换：

$$R_\theta\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=R_\theta\left(x_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=x_1R_\theta\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)+x_2R_\theta\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right).$$

容易知道，

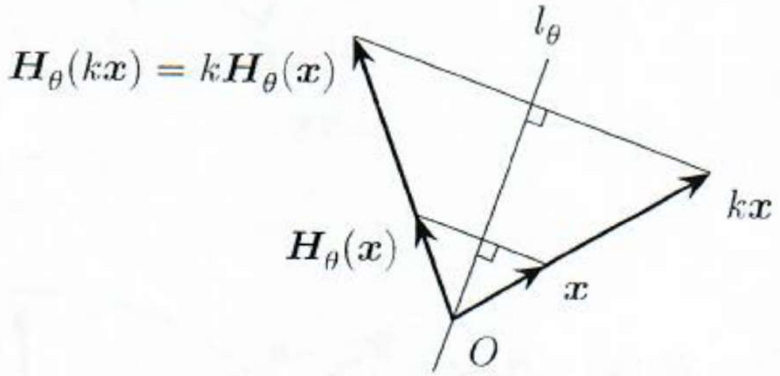
$$R_\theta\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{bmatrix},\quad R_\theta\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\cos(\theta+\frac{\pi}{2})\\\sin(\theta+\frac{\pi}{2})\end{bmatrix},$$

因此

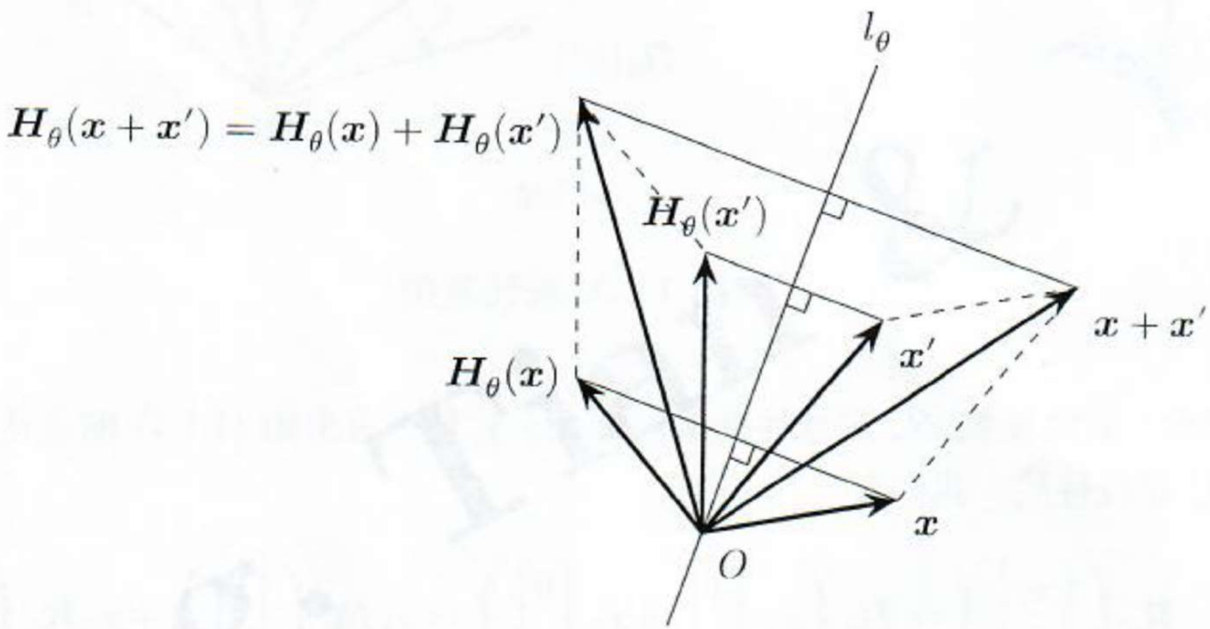
$$R_\theta\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=x_1\begin{bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\cos\theta-x_2\sin\theta\\x_1\sin\theta+x_2\cos\theta\end{bmatrix}.$$

注意，线性映射 R_θ 仅仅由它在 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 这两个向量上的取值决定. 这是线性映射最特殊的地方. 我们称 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 这两个向量为 $\mathbb{R}^2$ 的**标准坐标向量**.

2. **反射变换**：给定直线 l_θ: $x_2\cos\theta - x_1\sin\theta = 0$，其中 θ 是直线与 x_1 坐标轴的夹角．任意向量关于 l_θ 的反射，定义了一个 $\mathbb{R}^2$ 上的变换，记为 $\boldsymbol{H}_\theta$．图 1.1.4 证明了 $\boldsymbol{H}_\theta(k\boldsymbol{x}) = k\boldsymbol{H}_\theta(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{H}_\theta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{H}_\theta(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{H}_\theta(\boldsymbol{x}')$．



(a) 数乘



(b) 加法

因此，反射变换 $\boldsymbol{H}_\theta$ 是线性变换．类似地，由于

$$\boldsymbol{H}_\theta\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\cos 2\theta\\ \sin 2\theta\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{H}_\theta\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\cos(2\theta-\frac{\pi}{2})\\ \sin(2\theta-\frac{\pi}{2})\end{bmatrix},$$

因此

$$\boldsymbol{H}_\theta\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=x_1\begin{bmatrix}\cos 2\theta\\ \sin 2\theta\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}\sin 2\theta\\ -\cos 2\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\cos 2\theta+x_2\sin 2\theta\\ x_1\sin 2\theta-x_2\cos 2\theta\end{bmatrix}.$$

特别地，如果直线就是 x_1 坐标轴，即 $\theta=0$，则 $\boldsymbol{H}_\theta\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_1\\-x_2\end{bmatrix}$.

3. **对换变换**：对换 $\mathbb{R}^2$ 中向量的两个分量 x_1,x_2 也构成一个线性变换：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}:\quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2\\ \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix}x_2\\x_1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

可以看到，其实 $\boldsymbol{P}$ 也是关于直线 $x_2-x_1=0$ 的反射.

4. **伸缩变换**：设 $k \in \mathbb{R}$，定义一个 $\mathbb{R}^2$ 上的变换 $\boldsymbol{C}_k$，它把向量在 x_1 方向拉伸 k 倍，x_2 方向保持不变．其表达式为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}_k: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} kx_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

容易验证 $\boldsymbol{C}_k$ 是线性变换．它把单位正方形 $\{0 \leqslant x_1 \leqslant 1, 0 \leqslant x_2 \leqslant 1\}$ 映射成矩形 $\{0 \leqslant x_1 \leqslant k, 0 \leqslant x_2 \leqslant 1\}$．

5. **投影变换**：对伸缩变换 $\boldsymbol{C}_k$，取 $k=0$，得到的变换是对 x_2 轴的投影 $\boldsymbol{C}_0$．

6. **错切变换**：设 $k \in \mathbb{R}$，定义 $\mathbb{R}^2$ 上的一个变换 $\boldsymbol{S}_k$，它把 x_1 方向的 k 倍加到 x_2 方向上，并保持 x_1 方向不变，其表达式为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}_k: \quad \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ kx_1 + x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

容易验证 $\boldsymbol{S}_k$ 是线性变换．它把单位正方形 $\{0 \leqslant x_1 \leqslant 1, 0 \leqslant x_2 \leqslant 1\}$ 映射成平行四边形 $\{0 \leqslant x_1 \leqslant 1, kx_1 \leqslant x_2 \leqslant kx_1 + 1\}$，而面积保持不变． ☺

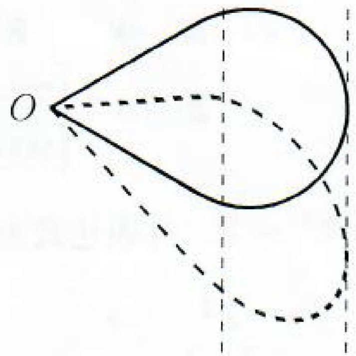


图 1.1.5: 错切变换

不是线性变换的例子

1. 平面上的平移变换：设 $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ 是平面向量，$\boldsymbol{T_a} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是关于向量 $\boldsymbol{a}$ 的平移．其表达式为：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T_a}: \quad \mathbb{R}^2 & \to \quad \mathbb{R}^2 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} & \mapsto \begin{bmatrix} x_1 + a_1 \\ x_2 + a_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

当 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{T_a}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$，即 $\boldsymbol{T_a}$ 不保持零向量，因此**不是**线性映射．

类似地，如果直线 l 不经过原点，那么关于 l 的反射变换就不是线性映射．

2. 取长度：定义映射 $l: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，它将平面上的任意向量 $\boldsymbol{x}$ 映射到这个向量的长度．其表达式为：

$$\begin{aligned} l: \quad \mathbb{R}^2 & \to \quad \mathbb{R} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} & \mapsto \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \end{aligned}$$

3. 绕圆旋转：定义映射 $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$，它将输入的角度映射到单位圆上对应的位置．如果将输入看作时间，那么这个映射就可以看作是一个点匀速绕定点旋转．

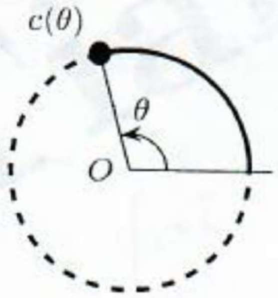


图 1.1.6: 匀速圆周运动

这个映射的表达式为：

$$
\begin{aligned}
c\colon \quad \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\
\theta &\mapsto \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

4. 齐次非线性：定义映射 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$．其表达式为：

$$
\begin{aligned}
f\colon \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &\mapsto (x_1^3 + x_2^3)^{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}
$$

注意，这个映射虽然满足 $f(k\boldsymbol{a}) = kf(\boldsymbol{a})$，但是 $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \neq f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})$． ☺

作 业（9月15日）

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

练习1.1

5(2, 3, 6, 8), 6, 9, 11, 12

9月18日提交

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

作业分组信息（按学号）

第一组：　学号≤2021010585

第二组：　2021010585＜学号≤2021011551

第三组：　2021011551＜学号≤2021012653

第四组：　2021012653＜学号