第十三周作业 参考解答

练习6.3

1(1,2,3,6), 2, 3, 4, 5, 6

练习7.1

3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12

练习 6.3.1. 求下列矩阵的奇异值分解.

(注意矩阵的奇异值不计排列顺序是唯一的, 但奇异值分解中选取的正交矩阵不必唯一.)

1. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \\ & & 1 \end{bmatrix}$. ▶

2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$. ▶

3. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. ▶

6. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

◀ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. ▶

练习 6.3.2. 矩阵 A 的 QR 分解 $A=QR$, 且 R 有奇异值分解 $R=U\Sigma V^T$, 求 A 的奇异值分解.

◀ $A=(QU)\Sigma V^T$. ▶

练习 6.3.3. 设 A 的奇异值分解为 $A=U\Sigma V^T$, 求矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}$ 的谱分解.

◀ $$\begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & V\Sigma U^T \\ U\Sigma V^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & \\ & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \Sigma \\ \Sigma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^T & \\ & U^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} V & \\ & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & \\ & -\Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^T & \\ & U^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}V & \frac{1}{\sqrt{2}}V \\ \frac{1}{\sqrt{2}}U & -\frac{1}{\sqrt{2}}U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & \\ & -\Sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}V & \frac{1}{\sqrt{2}}V \\ \frac{1}{\sqrt{2}}U & -\frac{1}{\sqrt{2}}U \end{bmatrix}^T.$$

(这里仅考虑了 A 为方阵的情况. 一般情况是类似的.) ▶

练习 6.3.4. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}$, 考虑单位圆 $C=\{v\in\mathbb{R}^2|\,\|v\|=1\}$ 及其在 A 对应的线性变换 A 下的像 $AC=\{Av\in\mathbb{R}^2|\,\|v\|=1\}$.

1. 设 $\omega\in A(C)$, 证明 $\omega^T(AA^T)^{-1}\omega=1$.

◀ 将 $\omega=Av$ 代入即得. ▶

2. 求 A 的奇异值分解 $A=U\Sigma V^T$.

◀ $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}&-\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}\\-\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}&-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}&0\\0&\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}&-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}\\-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}&-\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}\end{bmatrix}$. ▶

3. 注意 V,U 为二阶正交矩阵, 对应的线性变换是旋转或反射, 而 Σ 是对角矩阵, 对应伸缩变换. 从几何上看, 曲线 $V^T(C),\Sigma V^T(C),U\Sigma V^T(C)$ 分别是什么形状?

◀ 圆, 椭圆, 关于原点旋转某个角度的椭圆. (注意正交矩阵给出的变换是旋转和反射的复合.) ▶

练习 6.3.5. 设 A 的奇异值分解是 $A = U\Sigma V^T$.

1. 证明 $AA^T = U(\Sigma\Sigma^T)U^T$, $A^TA = V(\Sigma^T\Sigma)V^T$ 分别是这两个对称矩阵的谱分解, 并得到 AA^T 和 A^TA 的非零特征值相同.

◀ 这已经是谱分解的形式了. ▶

2. 对任意 A 的奇异值 $\sigma \neq 0$, 设 v 和 w 分别是 A^TA 和 AA^T 的属于 σ^2 的特征向量, 证明 Av 和 A^Tw 分别是 AA^T 和 A^TA 的属于 σ^2 的特征向量.

◀ 直接验证. ▶

练习 6.3.6 (极分解). 对 n 阶方阵 A, 存在正交矩阵 Q 和对称半正定矩阵 S, 使得 $A = QS$.

◀ 考虑 A 的奇异值分解 $A = U\Sigma V^T = (UV^T)(V\Sigma V^T)$. ▶

分解式 $A = QS$ 称为 A 的极分解. 容易看到, $A = S_1Q_1$, 即方阵分解为对称半正定矩阵和正交矩阵的乘积, 也存在.

练习 7.1.3. 把复数域 $\mathbb{C}$ 看作有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间, 子集 $\mathbb{R}$ 是否是子空间?

◀ 是的. 其对加法和 $\mathbb{Q}$ 上的数乘封闭. ▶

练习 7.1.4. 设 $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Q}\}$.

1. 证明 $\mathbb{Q}[i]$ 关于数的加法和数乘构成 $\mathbb{Q}$ 上的一个线性空间.

◀ 验证其为 $\mathbb{C}$ 的子空间. 我们只需考虑加法和数乘封闭. ▶

2. 证明 $\mathbb{Q}[i]$ 是数域.

◀ 其对乘法与非零元的取逆封闭. ▶

3. 把复数域 $\mathbb{C}$ 看作有理数域 $\mathbb{Q}[i]$ 上的线性空间, 子集 $\mathbb{R}$ 是否是子空间?

◀ 不是, 对 i 的数乘不封闭. ▶

练习 7.1.5. 设 V 是以 0 为极限的实数序列全体: $V=\{\{a_n\}|\lim_{n\to\infty}a_n=0\}$. 定义加法和数乘分别为: $(a_n)+b_n=a_n+b_n$; $k(a_n)=ka_n$, $k\in\mathbb{R}$. 证明 V 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

◀ 加法和数乘的运算律由 $\mathbb{R}$ 上加法和数乘的运算律给出. ▶

练习 7.1.6.

1. 其对加法和数乘封闭
2. $f(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{bmatrix}$

练习 7.1.7. 对 n 阶方阵 A, 令 $P(A)=\{f(A)|f(x)\in\mathbb{F}[x]\}$. 证明 $P(A)$ 关于矩阵的加法和数乘构成 $\mathbb{F}$ 上的线性空间.

◀ 我们需要验证加法和数乘的封闭性. 这由多项式加法和数乘的封闭性直接得到. ▶

练习 7.1.8. 对 n 阶方阵 A, 令 $Com(A)=\{n\text{阶方阵}B|AB=BA\}$.

1. 证明, $Com(A)$ 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间.

◀ 验证加法和数乘的封闭性. ▶

2. 证明, 对任意 $B,C\in Com(A)$, 都有 $BC\in Com(A)$; 由此证明对任意多项式 $f(x)$, 都有 $f(A)\in Com(A)$.

◀ 按定义验证. ▶

练习 7.1.10.

1. 是
2. 否（对加法不封闭）
3. 是
4. 否（对加法不封闭，如 $p_1(x)=x+1,\quad p_2(x)=x-1$）
5. 否（对加法不封闭，如 $p_1(x)=(x+1)^2,\quad p_2(x)=(x-1)^2$ ）

练习 7.1.11. 设 $M_1 = span(a_1, a_2)$, $M_2 = span(b_1, b_2)$, 其中 $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. 分别求 $M_1 + M_2$, $M_1 \cap M_2$ 的一组基和维数.

◀ $\{a_1, a_2, b_1\}, 3;\ \{2a_1 + a_2\}, 1.$ ▶

练习 7.1.12. 设 $\mathbb{F}_0^{n\times n}$ 是矩阵空间 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 中所有迹为零的矩阵构成的子集.

1. 证明 $\mathbb{F}_0^{n\times n}$ 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间.

◀ 其为线性函数 $trace : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$ 的核.▶

2. 求子空间 $\mathbb{F}_0^{n\times n}$ 和 $span(I_n)$ 的交与和.

◀ 交为零空间. 和为 $\mathbb{F}^{n\times n}$.▶