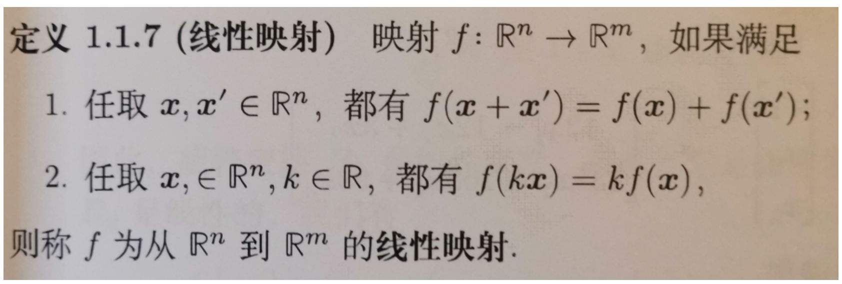
第一次作业参考解答

邓一理

这次作业几乎所有同学都优秀完成，大部分同学的错误主要集中在 1.1.6、1.1.11 的 3 和 5 以及 1.1.12 的 2。

练习 1.1.5

该题验证线性映射的定义即可。



定义 1.1.7 (线性映射) 映射 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，如果满足

1. 任取 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n$，都有 $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}')$;
2. 任取 $\boldsymbol{x}, \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$，都有 $f(k\boldsymbol{x}) = kf(\boldsymbol{x})$,

则称 f 为从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的**线性映射**.

图 1: 线性映射的定义

2. f 是线性映射。可参考下述证明。

证明. 对任意 $x, x' \in \mathbb{R}$，$f(x+x') = 2(x+x') = 2x+2x' = f(x)+f(x')$;

对任意 $x \in \mathbb{R}$ 和 $k \in \mathbb{R}$，$f(kx) = 2kx = k \cdot 2x = kf(x)$。 □

3. f 是线性映射。证明类似第 2 小题。

6. f 不是线性映射。反例：$f(0+1) = f(1) = 2^1 = 2 \neq 3 = 1+2 = 2^0+2^1 = f(0)+f(1)$

8. f 不是线性映射。反例：令 $x=0, k=2$，此时 $f(kx) = f(0) \neq 2f(0) = kf(x)$。

练习 1.1.6

点评：部分同学不懂得大学数学的证明思路，将结论当成条件，验证其成立，还有部分同学的证明有部分错误。该题思路不难，关键在于理清各个概念。可参考以下证明。

证明. 对任意 $x \in \mathbb{R}$，$f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = f(1)x$，令 $k = f(1)$ 即可。 □

练习 1.1.9

1. f 是线性映射。

证明. 对任意 $x, x' \in \mathbb{R}$，$f(x+x') = (x+x')\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{a} + x'\boldsymbol{a} = f(x)+f(x')$;

对任意 $x \in \mathbb{R}$ 和 $k \in \mathbb{R}$，$f(kx) = kx\boldsymbol{a} = k \cdot x\boldsymbol{a} = kf(x)$。 □

2. f 是线性映射。

证明. 对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x'} \in \mathbb{R}^m$，$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x'}) = k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x'}) = k\boldsymbol{x} + k\boldsymbol{x'} = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x'})$;

对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$，$f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda k \boldsymbol{x} = \lambda \cdot k\boldsymbol{x} = \lambda f(\boldsymbol{x})$。 □

3. f 不是线性映射。反例：令 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, k = 2$。

练习 1.1.11

面积均可确定。

1. 面积为 1。

2. 面积为 1。

3. 经过投影变换，任何三角形都会变成 x_2 轴上的一条线段，所以其面积为 0。

4. 面积为 3。

5. 面积为 1。注意对于错且变换前后的同一点，错切变换不改变该点在 x_1 或 x_2 方向的截面长度。

练习 1.1.12

1.

证明. $f(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot f(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$ □

2. 令 $h(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$，$g(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x+1 \\ y+2 \end{bmatrix}$

点评：部分同学在该题出现运算错误，将 $g(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x+1 \\ y+2 \end{bmatrix}$ 写为 $g(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x-1 \\ y+2 \end{bmatrix}$