第九次习题课题目

习题 1. 练习 5.2.19

如果复矩阵 A,B 可交换, 证明 A,B 至少有一个公共的特征向量.

习题 2. 练习 5.2.22

回顾例 5.1.1 中的矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0.4 & 0.9 \end{bmatrix}$, 以及稳定状态对应的矩阵 $A^{\infty}=\begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.8 & 0.8 \end{bmatrix}$.

1. 如果 A^n 和 A^{∞} 中对应的元素相差不超过 0.01, 那么 n 至少是多少?

2. 交换 A 的两行, 特征值是否不变?

习题 3. 练习 5.2.23

给定 m 阶矩阵 A_1, n 阶上三角矩阵 A_2 和 $m\times n$ 矩阵 B。证明如果 A_1 和 A_2 没有相同的特征值, 关于 $m\times n$ 矩阵 X 的矩阵方程 $A_1X-XA_2=B$ 有唯一解.

矩阵方程 $A_1X-XA_2=B$ 称为 Sylvester 方程, 在控制论中有不少应用.

习题 4. 练习 5.3.14

证明,

1. 若 $A^2=A$, 则 A 可对角化.

2. 若 $A^2=O$, 且 $A\neq O$, 则 A 不可对角化.

3. $A^2+A+I_n=O$, 则 A 在 $\mathbb{R}$ 上不可对角化.

习题 5. 练习 5.4.3

给定 n 阶方阵 A,B 满足 $AB=BA$.

1. 证明, 若 A 有 n 个不同的特征值, 则存在次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$, 使得 $B=f(A)$.

2. 证明, 若 $A=J_n(\lambda)$, 则存在次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$, 使得 $B=f(A)$.

3. 举例说明, 存在 A,B 满足 $AB=BA$, 但不存在多项式 $f(x)$, 使得 $B=f(A)$.

习题 6. 练习 5.4.6

给定 m 阶方阵 A_1,n 阶方阵 A_2 和 $m\times n$ 矩阵 B. 证明:

1. 如果 A_1 和 A_2 没有相同的特征值, 关于 $m\times n$ 矩阵 X 的 Sylvester 方程 $A_1X-XA_2=B$ 有唯一解.

2. 如果 A_1 和 A_2 没有相同的特征值, 则存在唯一的矩阵 X 满足

$$\begin{bmatrix} I_r & X \\ 0 & I_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & X \\ 0 & I_t \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

3 . 对 n 阶方阵 A, 存在可逆矩阵 X, 使得

$$X^{-1}AX = \begin{bmatrix} \lambda_1 I + N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s I + N_s \end{bmatrix}$$

其中 $N_1, \cdots, N_s$ 是严格上三角矩阵.

习题 7. 设 $A^2 = A$, 在 A 的四个子空间中, 哪个包含特征值 $\lambda = 1$ 的特征向量? 哪个包含特征值 $\lambda = 0$ 的特征向量? 从这些信息如何推出 A 可以对角化?

习题 8. 设 A, B 为 n 阶方阵, 且均可对角化。证明 $AB = BA$ 当且仅当它们有 n 个公共的线性无关的特征向量。

习题 9.

$$设 M = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) 证明 M 的特征值为纯虚数, 且 $|\lambda| = 1$.

(2) 通过 M 的 Trace 确定 M 的所有特征值.

习题 10. 练习 4.2.25

对函数 $f(t) = \det(I_n + tA)$ 在 $t = 0$ 处求导. 设 $A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$, 则 $I_n + tA$ 的第 i 列是 $e_i + ta_i$.

1. 当 $n = 1,2,3$ 时, 用 A 的元素表示 $f'(0)$; 分析其规律, 求 $f'(0)$ 的一般表达式.

2. 利用 $\det(I_n + AB) = \det(I_m + BA)$, 证明 $\mathrm{trace}(AB) = \mathrm{trace}(BA)$ (trace 的定义见练习 1.4.22).