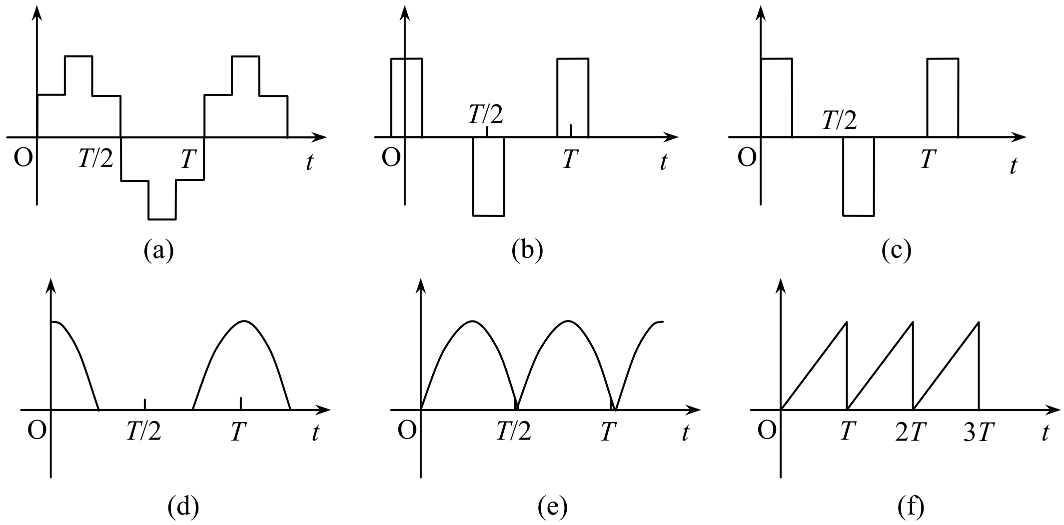
第15章　周期性激励下电路的稳态响应

15-1　说明题图 15-1 所示各非正弦周期波形包含哪些分量(正弦分量、余弦分量、奇次分量、偶次分量、直流分量)。



题图 15-1

解　（a）$f(t)=-f(-t)$，$f(t)=-f(t+T/2)$，因此波形包含正弦奇次分量；

（b）$f(t)=f(-t)$，$f(t)=-f(t+T/2)$，因此波形包含余弦奇次分量；

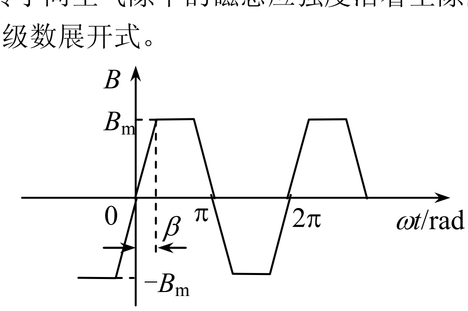
（c）$f(t)=-f(t+T/2)$，因此波形仅含奇次分量；

（d）$f(t)=f(-t)$，且一个周期内的平均值不为 0，因此波形包含直流分量和余弦分量；

（e）周期为 T，$f(t)=f(-t)$，$f(t)=f(t+T/2)$，且一个周期内的平均值不为 0，因此波形包含直流分量和余弦偶次分量；

（f）将时间轴向上平移至消去直流分量后，得到的函数为奇函数，因此原波形包含直流分量和正弦分量。

15-2　电机定子和转子间空气隙中的磁感应强度沿着空隙的圆周作等腰梯形分布(如题图 15-2 所示)。求其傅氏级数展开式。



题图 15-2

解　由波形可知，磁感应强度波形为奇函数，对称波形，其只含有正弦奇次分量，即

$$b_k=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\beta}\frac{B_m}{\beta}\omega t\sin k\omega t\mathrm{d}(\omega t)+\int_{\beta}^{\pi-\beta}B_m\sin k\omega t\mathrm{d}(\omega t)+\int_{\pi-\beta}^{\pi}\frac{B_m}{\beta}(\pi-\omega t)\sin k\omega t\mathrm{d}(\omega t)\right]$$

$$=\frac{2B_m}{\pi k\beta}\left(\beta\cos k\beta-\frac{1}{k}\sin k\beta\right)-\frac{2B_m}{\pi k}\left[\cos k(\pi-\beta)-\cos k\beta\right]-$$

$$\frac{2B_m}{k\beta}\left[\cos k\pi-\cos(\pi-\beta)\right]+$$

$$\frac{2B_m}{\pi k\beta}\left[\pi\cos k\pi-(\pi-\beta)\cos k(\pi-\beta)-\frac{\sin k\pi}{k}+\frac{\sin k(\pi-\beta)}{k}\right]$$

当 k 为奇数时，上式积分结果为

$$b_k=\frac{4B_m}{k^2\pi\beta}\sin k\beta$$

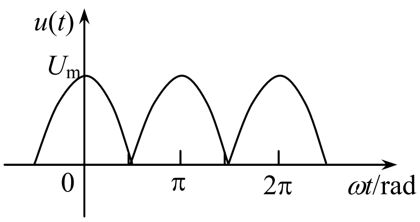
所以，其傅里叶级数为

$$f(t)=\frac{4B_m}{\pi\beta}[\sin\beta\sin\omega t+\frac{1}{9}\sin 3\beta\sin 3\omega t+\frac{1}{25}\sin 5\beta\sin 5\omega t+$$

$$\cdots\cdots+\frac{1}{(2k-1)^2}\sin((2k-1)\beta)\sin((2k-1)\omega t)+\cdots\cdots]$$

$$=\frac{4B_m}{\pi\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\sin((2k-1)\beta)\sin((2k-1)\omega t)$$

15-3　全波整流电路中输出的电压波形如题图 15-3 所示。已知 U_m=157V。为整流前电压的频率为 50Hz。求此整流后电压的傅氏级数展开式。



题图 15-3

解　由波形对称性可知该电压只含余弦偶次谐波和直流分量。所以

$$U_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}u(t)\mathrm{d}\omega t=\frac{U_m}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\omega t\mathrm{d}\omega t+\frac{U_m}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\omega t\mathrm{d}\omega t=\frac{2U_m}{\pi}$$

$$a_k=\frac{2U_{\mathrm{m}}}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\omega t\cos k\omega t\mathrm{d}\omega t+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\omega t\cos k\omega t\mathrm{d}\omega t\right]\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{U_{\mathrm{m}}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos(k+1)\omega t+\cos(1-k)\omega t]\mathrm{d}\omega t+$$

$$\frac{U_{\mathrm{m}}}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[\sin(k+1)\omega t+\sin(1-k)\omega t]\mathrm{d}\omega t$$

当 k 为 2，6，10，……时，有

$$a_k=\frac{-4U_{\mathrm{m}}}{\pi(1+k)(1-k)}$$

当 k 为 2，6，10，……时，有

$$a_k=\frac{4U_{\mathrm{m}}}{\pi(1+k)(1-k)}$$

所以，整流后电压的傅里叶展开式为

$$u(t)=\frac{4U_{\mathrm{m}}}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1\times3}\cos2\omega t-\frac{1}{3\times5}\cos4\omega t+\frac{1}{5\times7}\cos6\omega t+\cdots\cdots\right)$$
$$=100+66.7\cos2\omega t-13.3\cos4\omega t+5.71\cos6\omega t+\cdots\cdots$$

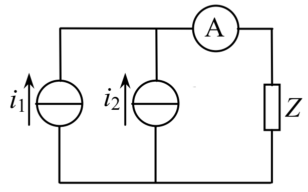
15-4 电路如题图 15-4 所示。已知 i_1、i_2。求电路中电流表(指示有效值)的读数。

(1) $i_1=10\sqrt{2}\sin314t\mathrm{A}$， $i_2=5\mathrm{A}$；

(2) $i_1=10\sqrt{2}\sin314t\mathrm{A}$， $i_2=\sqrt{2}\sin(628t+10°)\mathrm{A}$；

(3) $i_1=10\sqrt{2}\sin314t\mathrm{A}$， $i_2=5\sqrt{2}\sin(314t+36.9°)\mathrm{A}$；

(4) $i_1=10\sqrt{2}\sin314t\mathrm{A}$， $i_2=5+5\sqrt{2}\sin(314t+36.9°)\mathrm{A}$



题图 15-4

解　设电流表的读数为 I，则

（1） $I=\sqrt{10^2+5^2}=11.18\mathrm{A}$

（2） $I=\sqrt{10^2+1^2}=10.05\mathrm{A}$

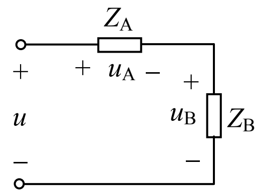
（3）这是同频率的正弦量，用相量求和有

$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=10\angle0°+5\angle36.9°=14.3\angle12.1°\mathrm{A}$$

则$I = 14.3\text{A}$。

（4）由（3）知，$I = \sqrt{14.3^2 + 5^2} = 15.17\text{A}$

15-5 电路如题图 15-5 所示。求电压 u 的有效值 U。已知 Z_A、Z_B 上电压分别为 $u_A = 9 + 8\sqrt{2}\sin\omega t + 4\sqrt{2}\sin(2\omega t + 60°)\text{V}$，$u_B = 10\sqrt{2}\sin(\omega t + 31.5°) - 5\sqrt{2}\sin 2\omega t\ \text{V}$。



题图 15-5

解　基波分量和二次谐波分量用相量求和：

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{A1} + \dot{U}_{B1} = 8\angle 0° + 10\angle 31.5° = 17.3\angle 17.5°\text{V}$$

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{A2} + \dot{U}_{B2} = 4\angle 60° + 5\angle -180° = 4.58\angle 131°\text{V}$$

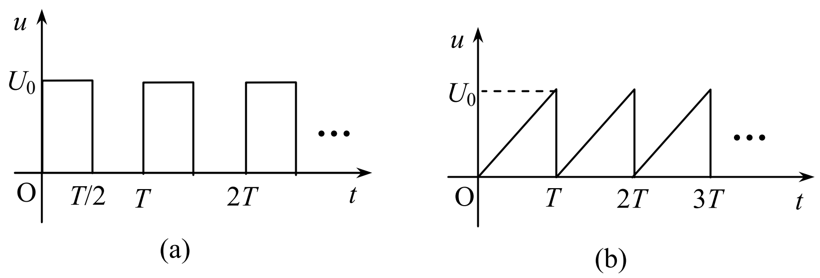
所以电压的瞬时值表达式为

$$u(t) = 9 + 17.3\sqrt{2}\sin(\omega t + 17.5°) + 4.58\sqrt{2}\sin(\omega t + 131°)\ \ \text{V}$$

其有效值为

$$U = \sqrt{9^2 + 17.3^2 + 4.58^2} = 20.0\text{V}$$

15-6 用电磁式表（指示有效值）测量题图 15-6 所示电压读数为 10V。求用磁电式表（指示直流分量）测量时读数为多少？



题图 15-6

解　（a）电磁式表测得的有效值为

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} U_0^2 \text{d}t} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = 10\text{V}$$

由此可得$U_0 = 10\sqrt{2}\text{V}$。

由此可得磁电式表测得的直流分量为

$$U_{\mathrm{DC}}=\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}U_0\mathrm{d}t=\frac{U_0}{2}=7.07\mathrm{V}$$

（b）电磁式表测得的有效值为

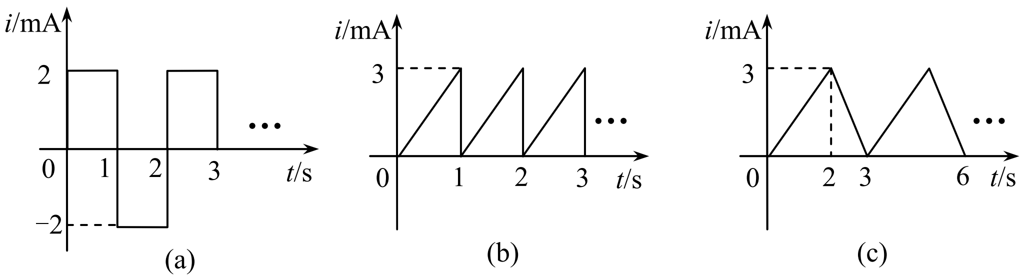
$$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{U_0}{t}\right)^2\mathrm{d}t}=\frac{U_0}{\sqrt{3}}=10\mathrm{V}$$

由此可得$U_0=10\sqrt{3}\mathrm{V}$。

由此可得磁电式表测得的直流分量为

$$U_{\mathrm{DC}}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{U_0}{T}\mathrm{d}t=\frac{U_0}{2}=8.66\mathrm{V}$$

15-7 当题图 15-7 所示电流通过 1MΩ电阻时，求电阻消耗的有功功率。



题图 15-7

解 电阻消耗的有功功率为$P=I^2R$，I 为非正弦电流的有效值。

（a）电流有效值为

$$I=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\int_0^1 2^2\mathrm{d}t+\int_1^2(-2)^2\mathrm{d}t\right)}=2\mathrm{mA}$$

1MΩ电阻消耗的有功功率为

$$P=\left(2\times10^{-3}\right)^2\times10^6=4\mathrm{W}$$

（b）电流有效值为

$$I=\sqrt{\frac{1}{1}\int_0^1(3t)^2\,\mathrm{d}t}=\sqrt{3}\ \mathrm{mA}$$

1MΩ电阻消耗的有功功率为

$$P=\left(\sqrt{3}\times10^{-3}\right)^2\times10^6=3\mathrm{W}$$

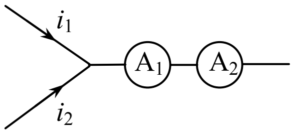
（c）电流有效值为

$$I=\sqrt{\frac{1}{3}\left[\int_0^2(1.5t)^2\,\mathrm{d}t+\int_0^2\left(-3(t-3)\right)^2\,\mathrm{d}t\right]}=\sqrt{3}\ \mathrm{mA}$$

1MΩ电阻消耗的有功功率为

$$P=\left(\sqrt{3}\times10^{-3}\right)^2\times10^6=3\mathrm{W}$$

15-8 题图 15-8 中，已知$i_1=10\sin314t\mathrm{A}$，$i_2=5\sin942t\mathrm{A}$。A_1为测量有效值的电压表，A_2为测绝对平均值的电流表。试求两电流表的读数。

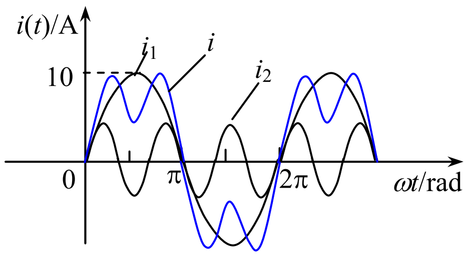


题图 15-8

解 流过电流表的电流为

$$i=i_1+i_2=10\sin314t+5\sin942t\ \mathrm{A}$$

其波形如题图 15-8(a)所示。



题图 15-8(a)

测有效值的电流表 A_1 的读数为

$$I=\sqrt{\left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2}=7.91\ \mathrm{A}$$

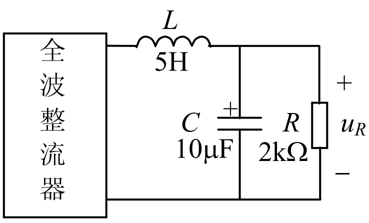
测绝对平均值的电流表 A_2 的读数为

$$I_{\mathrm{av}}=\frac{1}{T}\int_0^T\left|10\sin\omega t+5\sin3\omega t\right|\mathrm{d}\omega t$$

由波形可知，在基波的半周期内$i\geq0$，且绝对值在第一个半周期与第二个半周期内的值相同，所以有

$$I_{\mathrm{av}}=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}(10\sin\omega t+5\sin3\omega t)\mathrm{d}\omega t=\frac{1}{\pi}\left(20+\frac{10}{3}\right)=7.43\ \mathrm{A}$$

15-9 全波整流器输出电压如题图 15-3 所示。通过 LC 滤波电路作用于负载 R（见题图 15-9)。试求负载两端电压（谐波电压考虑到 4 次谐波）。ω=314rad·s^{-1}。



题图 15-9

解 由题 15-3 的结果可知，整流后加在滤波器输入端电压的傅里叶展开式为

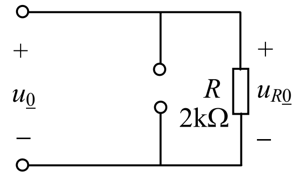
$$u(t)=100+66.7\cos 2\omega t-13.3\cos 4\omega t+5.71\cos 6\omega t+\cdots\cdots$$

考虑到 4 次谐波为

$$u(t)=100+66.7\cos 2\omega t-13.3\cos 4\omega t\ \text{V}$$

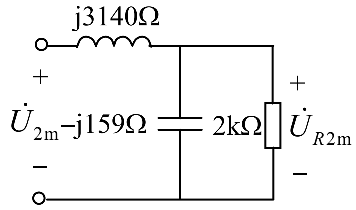
用叠加定理。当直流分量$u_0=100\text{V}$作用时，等效电路如题图 15-9(a)所示，可求得

$$u_{R0}=u_0=100\text{V}$$



题图 15-9(a)

当 2 次谐波分量$u_2=66.7\cos 2\omega t$ V 作用时，等效电路如题图 15-9(b)所示。

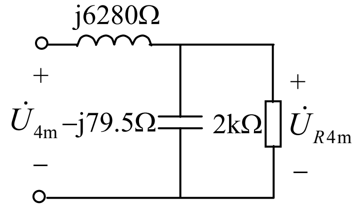


题图 15-9(b)

求解得

$$\begin{aligned}\dot{U}_{R2\text{m}}&=\frac{2000//(-\text{j}159)}{\text{j}3140+2000//(-\text{j}159)}\dot{U}_{2\text{m}}\\&=\frac{158.5\angle-85.45^\circ}{\text{j}3140+158.5\angle-85.45^\circ}\times 66.7\angle 0^\circ=3.55\angle-175^\circ\text{V}\end{aligned}$$

当 4 次谐波分量$u_4=-13.3\cos 4\omega t$ V 作用时，等效电路如题图 15-9(c)所示。



题图 15-9(b)

求解得

$$\dot{U}_{R4\mathrm{m}}=\frac{2000//(-\mathrm{j}79.5)}{\mathrm{j}6280+2000//(-\mathrm{j}79.5)}\dot{U}_{2\mathrm{m}}$$

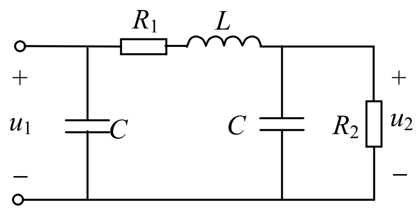
$$=\frac{79.44\angle-87.72^\circ}{\mathrm{j}6280+79.44\angle-87.72^\circ}\times13.3\angle-180^\circ=0.170\angle-2.31^\circ\mathrm{V}$$

所以

$$u_R(t)=100+3.55\cos(2\omega t-175^\circ)+0.170\cos(4\omega t-2.31^\circ)\ \mathrm{V}$$

说明：本题所涉及的电路整体应为非线性电路，严格地讲，叠加定理是不适用的。由于滤波电路的加入，整流输出波形与题 15-3 的波形由差异。所以上述处理仅为近似结果。

15-10 题图 15-10 所示为一低通滤波电路。设 L=32.5mH，C=10μF，R_1=160Ω，R_2=2kΩ。当电压 $u_1=400+100\cos\omega t-20\cos6\omega t$ V 时，求负载电阻 R_2 上电压 u_2。ω=628rad·s^{-1}。



题图 15-10

解 应用叠加定理。当直流分量单独作用时，u_2 的直流分量 $u_{2(0)}$ 为

$$u_{2(0)}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\times400=370.4\ \mathrm{V}$$

当基波分量 $100\cos\omega t$ V 单独作用时，由所对应电路的相量模型可得

$$\dot{U}_{2(1)\mathrm{m}}=\frac{R_2//\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R_1+\mathrm{j}\omega L+R_2//\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}\times100\angle0^\circ$$

$$=\frac{2000//(-\mathrm{j}159.2)}{160+\mathrm{j}20.41+2000//(-\mathrm{j}159.2)}\times100\angle0^\circ$$

$$=\frac{158.7\angle-85.45^\circ}{160+\mathrm{j}20.41+158.7\angle-85.45^\circ}\times100\angle0^\circ$$

$$=71.86\angle-46.85^\circ\mathrm{V}$$

当 6 次谐波分量 $20\cos6\omega t$ V 单独作用时，由所对应电路的相量模型可得

$$\dot{U}_{2(6)\mathrm{m}}=\frac{R_2//\dfrac{1}{\mathrm{j}6\omega C}}{R_1+\mathrm{j}6\omega L+R_2//\dfrac{1}{\mathrm{j}6\omega C}}\times 20\angle 0^\circ$$

$$=\frac{2000//(-\mathrm{j}26.54)}{160+\mathrm{j}122.46+2000//(-\mathrm{j}26.54)}\times 20\angle 0^\circ$$

$$=\frac{26.54\angle -89.24^\circ}{160+\mathrm{j}122.46+26.54\angle -89.24^\circ}\times 20\angle 0^\circ$$

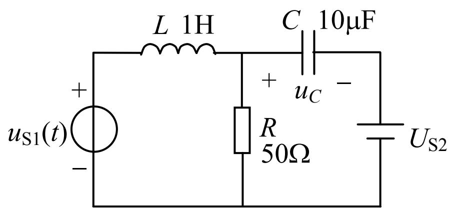
$$=\ 2.841\angle -120.1^\circ \mathrm{V}$$

所以负载电阻 R_2 上电压瞬时值为

$$u_2(t)=370+71.86\cos(\omega t-46.85^\circ)-2.841\cos(6\omega t-120.1^\circ)\ \mathrm{V}$$

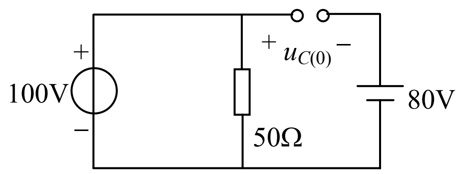
说明：原题中谐波分量为 3 次和 6 次，本题中 3 次变成了基波，所以后面的答案应修改。或修改题目。

15-11 题图 15-11 所示电路中，$u_{\mathrm{S1}}(t)=100+110\sqrt{2}\sin(\omega t+30^\circ)-30\sqrt{2}\sin 3\omega t\mathrm{V}$，其中$\omega$=314rad·s^{-1}；直流电源 U_{S2}=80V。求电容两端电压 u_C 及其有效值 U_C 。



题图 15-11

解 应用叠加定理。当直流分量单独作用时，电路如题图 15-11(a)所示。

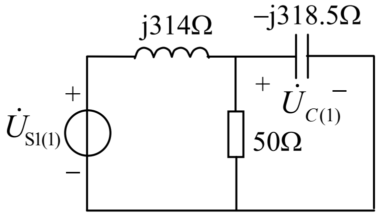


题图 15-11(a)

由题图 15-11(a)可求得

$$u_{C(0)}=100-80=20\mathrm{V}$$

当基波单独作用时，相量模型如题图 15-11(b)所示。

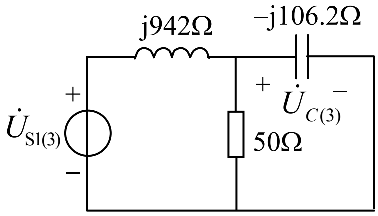


题图 15-11(b)

由题图 15-11(b)可求得

$$\begin{aligned}\dot{U}_{C(1)} &= \frac{50//(-\mathrm{j}318.5)}{\mathrm{j}314+50//(-\mathrm{j}318.5)}\times\dot{U}_{S1(1)}\\ &= \frac{49.40\angle-8.922^\circ}{\mathrm{j}314+49.40\angle-8.922^\circ}\times110\angle30^\circ\\ &= 17.52\angle-59.87^\circ\mathrm{V}\end{aligned}$$

当 3 次谐波单独作用时，相量模型如题图 15-11(c)所示。



题图 15-11(b)

由题图 15-11(c)可求得

$$\begin{aligned}\dot{U}_{C(3)} &= \frac{50//(-\mathrm{j}106.2)}{\mathrm{j}942+50//(-\mathrm{j}106.2)}\times\dot{U}_{S1(1)}\\ &= \frac{45.24\angle-25.21^\circ}{\mathrm{j}942+45.24\angle-25.21^\circ}\times(-30\angle0^\circ)\\ &= 1.469\angle67.33^\circ\mathrm{V}\end{aligned}$$

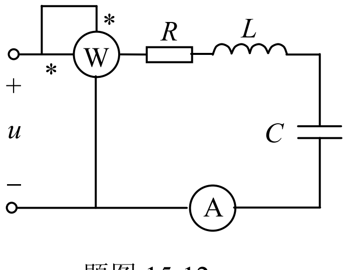
所以，电容两端电压的瞬时值表达式为

$$u_C(t) = 20+17.5\sqrt{2}\sin(\omega t-59.9^\circ)+1.47\sqrt{2}\sin(3\omega t+67.3^\circ)\ \mathrm{V}$$

其有效值为

$$U_C(t) = \sqrt{20^2+17.5^2+1.47^2} = 26.6\ \mathrm{V}$$

15-12 电路如题图 15-12 所示，已知 R=12Ω，ωL=2Ω，$\frac{1}{\omega C}=18\ \Omega$，$u = 10+80\sqrt{2}\sin\omega t+12\sqrt{2}\sin(3\omega t+30^\circ)\mathrm{V}$。求功率表和电磁式电流表的读数。



题图 15-12

解　对 RLC 支路，电压、电流取关联参考方向。则由叠加定理，并对基波和 3 次谐波单独作用时应用相量法可得

$$i_{(0)} = 0$$

$$\dot{I}_{(1)} = \frac{\dot{U}_{(1)}}{R + \mathrm{j}\omega L + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{80\angle 0°}{12 + \mathrm{j}2 - \mathrm{j}18} = 4\angle 53.1°\mathrm{A}$$

$$\dot{I}_{(3)} = \frac{\dot{U}_{(3)}}{R + \mathrm{j}3\omega L + \dfrac{1}{\mathrm{j}3\omega C}} = \frac{12\angle 30°}{12 + \mathrm{j}6 - \mathrm{j}6} = 1\angle 30°\mathrm{A}$$

电流的瞬时值表达式为

$$i(t) = 4\sqrt{2}\sin(\omega t + 53.1°) + \sqrt{2}\sin(\omega t + 30°)\ \mathrm{A}$$

电磁式电流表的读数为

$$I = \sqrt{4^2 + 1^2} = 4.12\ \mathrm{A}$$

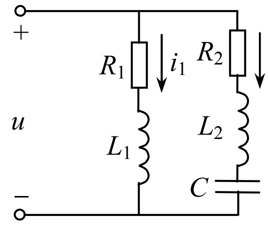
功率表的读数为

$$P = 80 \times 4\cos(-53.1°) + 12 \times 1\cos 0° = 204\ \mathrm{W}$$

功率表的读数也可由下式得到：

$$P = I^2 R = 4.12^2 \times 12 = 204\ \mathrm{W}$$

15-13　题图 15-13 所示电路中，电源电压 $u = 60 + 100\sin\omega t + 50\sin(3\omega t + 20°)\mathrm{V}$，$R_1$=6Ω，$L_1$=47.8mH，$R_2$=8Ω，$L_2$=21.1mH，$C$=53μF，$\omega$=314rad·s^{-1}。求电流 i_1、i_2 的瞬时值、有效值及电路消耗的有功功率。



题图 15-13

解　应用叠加定理，并对基波和 3 次谐波单独作用时用相量法得

$$i_{1(0)} = \frac{u_{(0)}}{R_1} = \frac{60}{6} = 10\ \mathrm{A}，\quad i_{2(0)} = 0$$

$$\dot{I}_{1(1)} = \frac{\dot{U}_{(1)}}{R_1 + \mathrm{j}\omega L_1} = \frac{\dfrac{100}{\sqrt{2}}\angle 0°}{6 + \mathrm{j}15.0} = 4.38\angle -68.2°\mathrm{A}$$

$$\dot{I}_{2(1)}=\frac{\dot{U}_{(1)}}{R_2+\mathrm{j}\omega L_2-\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}}=\frac{\dfrac{100}{\sqrt{2}}\angle 0^\circ}{8+\mathrm{j}6.63-\mathrm{j}60.1}=1.31\angle 81.5^\circ\mathrm{A}$$

$$\dot{I}_{1(3)}=\frac{\dot{U}_{(3)}}{R_1+\mathrm{j}3\omega L_1}=\frac{\dfrac{50}{\sqrt{2}}\angle 20^\circ}{6+\mathrm{j}45.0}=0.778\angle -62.4^\circ\mathrm{A}$$

$$\dot{I}_{2(3)}=\frac{\dot{U}_{(3)}}{R_2+\mathrm{j}3\omega L_2-\mathrm{j}\dfrac{1}{3\omega C}}=\frac{\dfrac{50}{\sqrt{2}}\angle 20^\circ}{8+\mathrm{j}19.9-\mathrm{j}20.0}=4.42\angle 20.7^\circ\mathrm{A}$$

由此得电流 i_1、i_2 的瞬时值分别为

$$\begin{aligned}i_1(t)&=10+4.38\sqrt{2}\sin(\omega t-68.2^\circ)+0.778\sqrt{2}\sin(3\omega t-62.4^\circ)\ \mathrm{A}\\&=10+6.19\sin(\omega t-68.2^\circ)+1.10\sin(3\omega t-62.4^\circ)\ \mathrm{A}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}i_2(t)&=1.31\sqrt{2}\sin(\omega t+81.5^\circ)+4.42\sqrt{2}\sin(3\omega t+20.7^\circ)\ \mathrm{A}\\&=1.85\sin(\omega t+81.5^\circ)+6.25\sin(3\omega t+20.7^\circ)\ \mathrm{A}\end{aligned}$$

电流 i_1、i_2 的有效值分别为

$$I_1=\sqrt{10^2+4.38^2+0.778^2}=10.9\mathrm{A}$$

$$I_2=\sqrt{1.31^2+4.42^2}=4.61\mathrm{A}$$

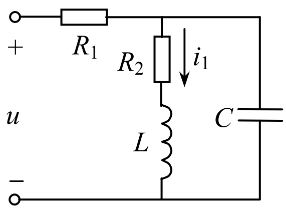
电路消耗的有功功率为

$$P=I_1^2R_1+I_2^2R_2=883\ \mathrm{W}$$

15-14 电路如题图 15-14 所示。已知 R_1=100Ω，R_2=80Ω，L=0.02H，C=1μF，ω=5024rad·s^{-1}，电流 $i_1=1+0.8\sqrt{2}\sin\omega t+0.3\sqrt{2}\sin(3\omega t-90^\circ)\mathrm{A}$。

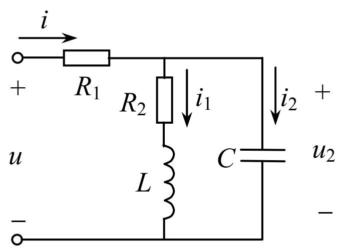
（1）求电源电压 u 的瞬时值及有效值；

（2）求电路消耗的总功率。



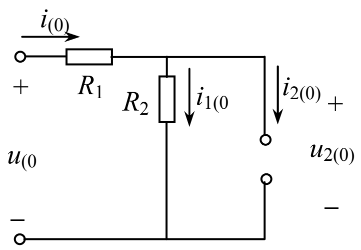
题图 15-14

解　各电压、电流的参考方向如题图 15-14(a)所示。



题图 15-14(a)

（1）用叠加定理求解。当直流分量单独作用是，其等效电路如题图 15-14(b)所示。

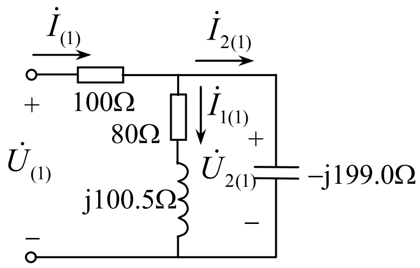


题图 15-14(b)

由题图 15-14(b)及已知条件，可得

$$i_{(0)} = i_{1(0)} = 1\text{A}\,，\ i_{2(0)} = 0\,，\ u_{(0)} = R_1 i_{(0)} + R_2 i_{1(0)} = 180\text{V}$$

当基波分量单独作用时，其相量模型如题图 15-14(c)所示。



题图 15-14(c)

由题图 15-14(c)及已知条件，可得

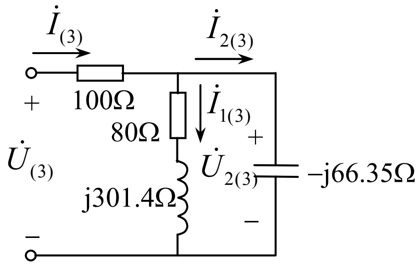
$$\dot{U}_{2(1)} = (80 + \text{j}100.5)\dot{I}_{1(1)} = (80 + \text{j}100.5) \times 0.8\angle 0° = 102.8\angle 51.48°\text{V}$$

$$\dot{I}_{2(1)} = \frac{\dot{U}_{2(1)}}{-\text{j}199.0} = 0.5166\angle 141.5°\text{A}$$

$$\dot{I}_{(1)} = \dot{I}_{1(1)} + \dot{I}_{2(1)} = 0.5100\angle 39.10°\text{A}$$

$$\dot{U}_{(1)} = 100\dot{I}_{(1)} + \dot{U}_{2(1)} = 153\angle 47.4°\text{V}$$

当 3 次分量单独作用时，其相量模型如题图 15-14(d)所示。



题图 15-14(d)

由题图 15-14(d)及已知条件，可得

$$\dot{U}_{2(3)} = (80 + \mathrm{j}301.4)\dot{I}_{1(3)} = (80 + \mathrm{j}301.4) \times 0.3\angle -90° = 93.55\angle -14.87°\mathrm{V}$$

$$\dot{I}_{2(3)} = \frac{\dot{U}_{2(3)}}{-\mathrm{j}66.35} = 1.410\angle 75.13°\mathrm{A}$$

$$\dot{I}_{(3)} = \dot{I}_{1(3)} + \dot{I}_{2(3)} = 1.123\angle 71.20°\mathrm{A}$$

$$\dot{U}_{(3)} = 100\dot{I}_{(3)} + \dot{U}_{2(3)} = 151\angle 33.0°\mathrm{V}$$

所以

$$\begin{aligned} u(t) &= u_{(0)} + u_{(1)} + u_{(3)} \\ &= 180 + 153\sqrt{2}\sin(\omega t + 47.4°) + 151\sqrt{2}\sin(3\omega t + 33.0°)\ \mathrm{V} \end{aligned}$$

其有效值为

$$U = \sqrt{180^2 + 153^2 + 151^2} = 280\ \mathrm{V}$$

（2）求电路消耗的总功率为

$$\begin{aligned} P &= 180 \times 1 + 153 \times 0.510\cos(47.4° - 39.1°) + 151 \times 1.12\cos(33.0° - 71.2°) \\ &= 180 + 77.2 + 133 = 390\ \mathrm{W} \end{aligned}$$

说明：此题可也可直接在时域求解。由题图 15-14(a)可得

$$\begin{aligned} u_2 = R_2 i_1 + L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} &= [80 + 64\sqrt{2}\sin\omega t + 24\sqrt{2}\sin(3\omega t - 90°)] + \\ &\quad [80.38\sqrt{2}\cos\omega t + 90.43\sqrt{2}\cos(3\omega t - 90°)]\ \mathrm{V} \\ &= 80 + 102.7\sqrt{2}\sin(\omega t + 51.47°) + 93.56\sqrt{2}\sin(3\omega t - 14.86°)\ \mathrm{V} \end{aligned}$$

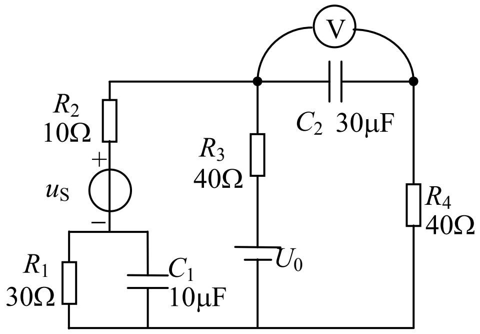
$$\begin{aligned} i_2 = C\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} &= 0.5160\sqrt{2}\cos(\omega t + 51.47°) + 1.410\sqrt{2}\cos(3\omega t - 14.86°)\ \mathrm{A} \\ &= 0.5160\sqrt{2}\sin(\omega t + 141.5°) + 1.410\sqrt{2}\sin(3\omega t + 75.14°)\ \mathrm{A} \end{aligned}$$

$$i = i_1 + i_2 = 1 + 0.5100\sqrt{2}\sin(\omega t + 39.04°) + 1.123\sqrt{2}\sin(3\omega t + 71.21°)\ \mathrm{A}$$

$$u = R_1 i + u_2 = 180 + 153\sqrt{2}\sin(\omega t + 47.4°) + 151\sqrt{2}\sin(3\omega t + 33.0°)$$

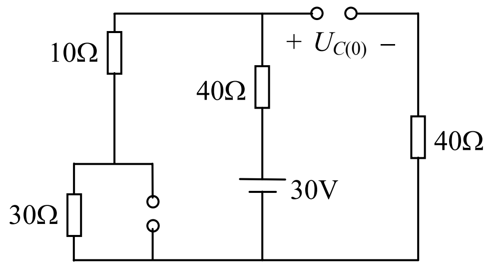
电压 u 的有效值和电路消耗的总功率与上述求法相同。

15-15 题图 15-15 所示电路中，u_S 为正弦交流电源，U_0 为直流电源，C 两端接一个电压表，指示其两端电压的有效值。已知 $u_S = 100\sqrt{2}\sin\omega t\text{V}$，$U_0$=30V，$\omega$=314rad·s^{-1}。求电压表的读数。



题图 15-15

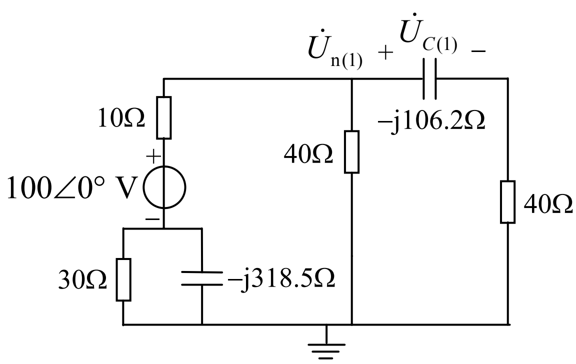
解　当直流电源 U_0 单独作用时，电路如题图 15-15(a)所示。



题图 15-15(a)

$$U_{C(0)} = \frac{10+30}{10+30+40} \times 30 = 15\text{V}$$

当交流电源单独作用时，电路如题图 15-15(b)所示。



题图 15-15(b)

用节点法列方程：

$$\left(\frac{1}{10+30//(-\text{j}318.5)} + \frac{1}{40} + \frac{1}{40-\text{j}106.2}\right)\dot{U}_{n(1)} = \frac{100\angle 0^\circ}{10+30//(-\text{j}318.5)}$$

整理得

$$\left(0.02510\angle 4.032° + 0.025 + 8.812\times 10^{-3}\angle 69.36°\right)\dot{U}_{\mathrm{n}(1)} = 2.510\angle 4.032°$$

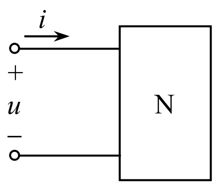
解得 $\dot{U}_{\mathrm{n}(1)} = 46.41\angle -6.636°\ \mathrm{V}$。可得

$$\dot{U}_{C(1)} = \frac{-\mathrm{j}106.2}{40-\mathrm{j}106.2}\dot{U}_{\mathrm{n}(1)} = 43.43\angle -27.27°\ \mathrm{V}$$

所以电压表的度数为

$$U_C = \sqrt{U_{C(0)}^2 + U_{C(1)}^2}\sqrt{15^2 + 43.34^2} = 45.9\mathrm{V}$$

15-16 已知无源网络 N 端口处的电压、电流分别为 $u = 30\sqrt{2}\sin(314t - 45°) + 9\sin(628t - 30°)\mathrm{V}$，$i = 10\sin 314t + 3\sin(628 - 30°)\mathrm{A}$。如果网络 N 可看作 *RLC* 串联电路，试求 *R*、*L*、*C* 的值。



题图 15-16

解　由二次谐波的电压、电流结果可知，二次谐波单独作用时端口处于串联谐振，此时有

$$628 = \frac{1}{\sqrt{LC}}，\quad R = \frac{9}{3} = 3\Omega$$

基波单独作用时，有相量法，有

$$\frac{30\angle -45°}{10/\sqrt{3}} = \frac{1}{R + \mathrm{j}\left(314L - \dfrac{1}{314C}\right)}$$

即有

$$\tan(-45°) = -1 = \frac{314L - \dfrac{1}{314C}}{R}$$

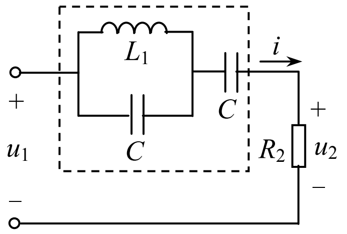
由上式及二次谐振条件可得

$$C = \frac{1 - 314^2 LC}{942} = \frac{1 - 314^2/628^2}{942} = 796\mu\mathrm{F}$$

则

$$L = \frac{1}{628^2 C} = 3.18\mathrm{mH}$$

15-17　题图 15-17 中，虚线框内为一滤波电路，输入电压 $u = U_{\rm m1}\sin\omega t + U_{\rm m3}\sin 3\omega t$ 。若 L_1=0.12H，ω=314rad·s^{-1}。要使输出电压 $u_2 = U_{\rm m1}\sin\omega t$ (即输出电压中没有三次谐波，而基波全部通过)，则 C_1 与 C_2 的值应取多少？并求此时负载电阻 R_2 中的电流 i。



题图 15-17

解　若 u_2 中不含三次谐波，需 L_1、C_1 对三次谐波电压产生并联谐振，即

$$3\omega = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}} \qquad C_1 = \frac{1}{9\omega^2 L_1} = 9.39\mu\text{F}$$

若使 u_1 中基波全部加到 R_2 上，需 L_1//C_1 与 C_2 对基波电压发生串联谐振，即

$$\frac{1}{\omega C_2} = \frac{\omega L_1\left(\dfrac{1}{\omega C_1}\right)}{\dfrac{1}{\omega C_1} - \omega L_1}$$

解得

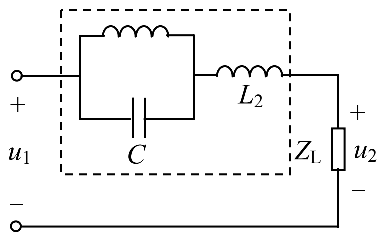
$$C_2 = \frac{1}{\omega^2 L_1} - C_1 = \frac{8}{9\omega^2 L_1} = 8C_1 = 75.1\mu\text{F}$$

此时负载电阻 R_2 中的电流为

$$i = \frac{U_{\rm 1m}\sin\omega t}{R_2}$$

15-18　题图 15-18 所示电路中，虚线框内为一滤波电路。电源电压为 $u_1 = U_{\rm m1}\sin\omega t + U_{\rm m9}\sin 9\omega t$ 。若使负载 $Z_{\rm L}$ 上电压 $u_2 = U_{\rm m9}\sin 9\omega t$ ，在 ω=1000rad·s^{-1}，C=1μF 时，电感 L_1、L_2 应为何值？

L_1



题图 15-18

解 根据题中要求，滤波电路应对基波并联谐振，对 9 次谐波串联谐振，则有

$$\begin{cases} \omega = \dfrac{1}{\sqrt{L_1 C}} \\ 9\omega = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{L_1 L_2}{L1 + L_2} C}} \end{cases}$$

解得

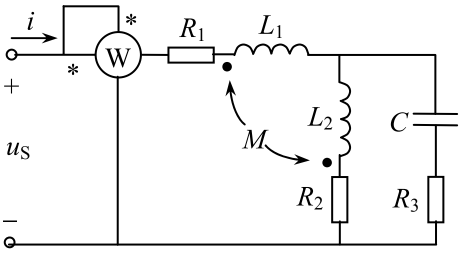
$$L_1 = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{10^6 \times 1 \times 10^{-6}} = 1\text{H}$$

$$L_2 = \frac{L_1}{9^2 \omega^2 C L_1 - 1} = 12.5\text{mH}$$

15-19 题图 15-19 所示电路中，电压 $u_S = 120\sqrt{2}\sin\omega t - 30\sqrt{2}\cos 2\omega t$ V，参数 R_1=60Ω，R_2= R_3=30Ω，ωL_1=40Ω，ωL_2=20Ω，ωL_1=40Ω，ωM=20Ω，$\dfrac{1}{\omega C} = 80\,\Omega$。

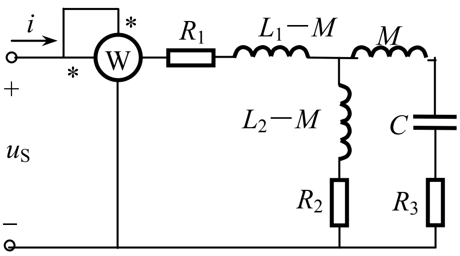
（1）求电流 $i(t)$；

（2）功率表的读数是多少？



题图 15-19

解 去耦等效电路如题图 15-19(a)所示。



题图15-19(a)

（1）当基波单独作用时，由所对应的相量模型，可得

$$Z_{(1)} = 60 + \text{j}20 + \frac{30(30 - \text{j}60)}{60 - \text{j}60} = 82.5 + \text{j}12.5\Omega$$

$$\dot{I}_{1\omega}=\frac{120\angle 0^\circ}{Z_{(1)}}=\frac{120\angle 0^\circ}{83.44\angle 8.62^\circ}=1.44\angle -8.62^\circ\text{A}$$

当二次谐波作用时，由所对应的相量模型，可得

$$Z_{(2)}=60+\text{j}40+15=75+\text{j}40\Omega$$

$$\dot{I}_{2\omega}=\frac{-30\angle 0^\circ}{85\angle 28.1^\circ}=-0.353\angle -28.1^\circ\text{A}$$

所以，有

$$\begin{aligned}i(t)&=1.44\sqrt{2}\sin(\omega t-8.62^\circ)-0.353\sqrt{2}\cos(2\omega t-28.1^\circ)\text{A}\\&=1.44\sqrt{2}\sin(\omega t-8.62^\circ)+0.353\sqrt{2}\cos(2\omega t+151.9^\circ)\text{A}\\&=1.44\sqrt{2}\sin(\omega t-8.62^\circ)+0.353\sqrt{2}\sin(2\omega t-118.1^\circ)\text{A}\\&=1.44\sqrt{2}\sin(\omega t-8.62^\circ)-0.353\sqrt{2}\sin(2\omega t+61.9^\circ)\text{A}\end{aligned}$$

（2）功率表的读数为

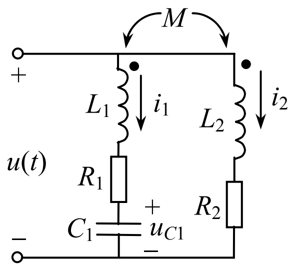
$$P=120\times 1.44\cos 8.62^\circ+30\times 0.353\cos 28.1^\circ=180\text{W}$$

15-20 题图 15-20 所示电路中，$\omega L_1=\dfrac{1}{\omega C_1}$=20Ω，$R_1$=1Ω，$R_2$=5Ω，$\omega L_2$=10Ω，$i_2=10+10\sin\omega t+5\sin 3\omega t$ A，ω=1000rad·s^{-1}，互感线圈的耦合系数 k=0.707。求：

（1）求电源电压 $u(t)$;

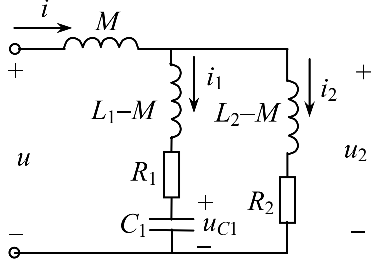
（2）求电容两端电压 $u_{C1}(t)$;

（3）求整个电路消耗的功率。



题图 15-20

解 可先作去耦等效，等效电路如题图 15-20(a)所示。



题图 15-20(a)

其中，

$$\omega M=\omega k\sqrt{L_1L_2}=k\sqrt{(\omega L_1)(\omega L_2)}=10.00\Omega$$

当直流分量单独作用时，即当$i_{2(0)}=10\text{A}$ 时，有

$$u_{(0)}=R_2 i_{2(0)}=5\times10=50\text{V}$$

$$i_{1(0)}=0\text{，}\ i_{(0)}=i_{1(0)}+i_{2(0)}=10\text{A}\text{，}\ u_{C(0)}=u_{(0)}=50\text{V}$$

当基波作用时，即$i_{2(1)}=10\sin\omega t$ A 时，由相量法可得

$$\dot{U}_{2(1)}=[R_2+\mathrm{j}\omega(L_2-M)]\dot{I}_{2(1)}=(5+\mathrm{j}0.00)\times\frac{10}{\sqrt{2}}\angle0°=35.36\angle0°\text{V}$$

$$\dot{I}_{1(1)}=\frac{\dot{U}_{(1)}}{R_1+\mathrm{j}\omega(L_1-M)-\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}}=\frac{35.36\angle0°}{1-\mathrm{j}10}=3.518\angle84.29°\text{A}$$

$$\dot{I}_{(1)}=\dot{I}_{1(1)}+\dot{I}_{2(1)}=3.518\angle84.29°+\frac{10}{\sqrt{2}}\angle0°=8.205\angle25.25°\text{A}$$

$$\dot{U}_{C(1)}=-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\dot{I}_{1(1)}=70.36\angle-5.71°\text{V}$$

$$\dot{U}_{(1)}=\dot{U}_{2(1)}+\mathrm{j}\omega M)\dot{I}_{(1)}=35.36\angle0°+\mathrm{j}10.00\times8.205\angle25.25°=74.21\angle89.72°\text{V}$$

当 3 次谐波作用时，即$i_{2(3)}=10\sin\omega t$ A 时，由相量法可得

$$\dot{U}_{2(3)}=[R_2+\mathrm{j}3\omega(L_2-M)]\dot{I}_{2(3)}=(5+\mathrm{j}0.00)\times\frac{5}{\sqrt{2}}\angle0°=17.68\angle0°\text{V}$$

$$\dot{I}_{1(3)}=\frac{\dot{U}_{(3)}}{R_1+\mathrm{j}3\omega(L_1-M)-\mathrm{j}\dfrac{1}{3\omega C}}=\frac{17.68\angle0°}{1+\mathrm{j}23.33}=0.7571\angle-87.55°\text{A}$$

$$\dot{I}_{(3)}=\dot{I}_{1(3)}+\dot{I}_{2(3)}=0.7571\angle-87.55°+\frac{5}{\sqrt{2}}\angle0°=3.647\angle-11.97°\text{A}$$

$$\dot{U}_{C(3)}=-\mathrm{j}\frac{1}{3\omega C}\dot{I}_{1(3)}=5.048\angle-177.6°\text{V}$$

$$\dot{U}_{(3)}=\dot{U}_{2(3)}+\mathrm{j}3\omega M\dot{I}_{(3)}=114.4\angle69.33°\text{V}$$

所以

$$u(t)=50+74.2\sqrt{2}\sin(\omega t+89.7°)+114\sqrt{2}\sin(3\omega t+69.3°)\ \text{V}$$
$$=50+105\sin(\omega t+89.7°)+162\sin(3\omega t+69.3°)\ \text{V}$$

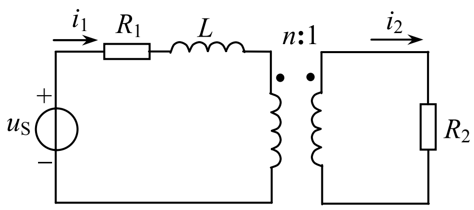
$$u_C(t)=50+70.36\sqrt{2}\sin(\omega t-5.71°)+5.05\sqrt{2}\sin(3\omega t-178°)\text{V}$$
$$=50+99.5\sin(\omega t-5.71°)+7.14\sin(3\omega t-178°)\text{V}$$

$$i(t)=10+8.21\sqrt{2}\sin(\omega t+25.3°)+3.65\sqrt{2}\sin(3\omega t-12.0°)\text{A}$$
$$=10+11.6\sin(\omega t+25.3°)+5.16\sin(3\omega t-12.0°)\text{A}$$

整个电路消耗的功率为

$$P=50\times10+74.2\times8.21\cos(89.7°-25.3°)+114\times3.65\cos(69.3°+12.0°)$$
$$=826\ \text{W}$$

15-21 题图 15-21 所示电路中，R_1=10Ω，R_2=5Ω，L=40mH，理想变压器变比 n=2，电源电压 $u_S=70+100\sin1000t+50\sin3000t\ \text{V}$。求电流 i_1、i_2 及其有效值 I_1、I_2。

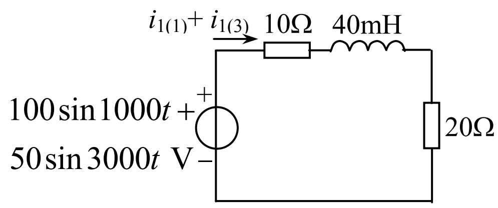


题图 15-21

解　对于直流分量，电感 L 和原边绕组相当于短路，所以

$$i_{1(0)}=\frac{u_{S(0)}}{R_1}=\frac{70}{10}=7\ \text{A}，\quad i_{2(0)}=0$$

对于基波和 3 次谐波，副边电阻可变换到原边，其值为 $n^2R_2=20\Omega$，等效电路如题图 15-21(a)所示。



题图 15-21(a)

对于基波，由等效电路及相量法可得

$$\dot{I}_{1m(1)}=\frac{100\angle0°}{30+\text{j}40}=2\angle-53.13°\text{A}$$

由原电路可得

$$\dot{I}_{2m(1)} = 2\dot{I}_{1m(1)} = 4\angle -53.13°\text{A}$$

对于 3 次谐波，由等效电路及相量法可得

$$\dot{I}_{1m(3)} = \frac{50\angle 0°}{30 + \text{j}120} = 0.4042\angle -75.96°\text{A}$$

由原电路可得

$$\dot{I}_{2m(3)} = 2\dot{I}_{1m(3)} = 0.8082\angle -75.96°\text{A}$$

电流的瞬时值表达式分别为

$$i_1(t) = 7 + 2\sin(\omega t - 53.1°) + 0.404\sin(3\omega t - 76.0°)\ \text{A}$$

$$i_2(t) = 4\sin(\omega t - 53.1°) + 0.808\sin(3\omega t - 76.0°)\ \text{A}$$

电流的有效值分别为

$$I_1 = \sqrt{7^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0.404}{\sqrt{2}}\right)^2} = 7.15\ \text{A}$$

$$I_2 = \sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0.808}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2.89\ \text{A}$$

15-22 三相发电机的三个绕组的相电压为对称三相非正弦电压，其中 A 相为 $u_\text{A} = 300\sin\omega t + 160\sin(3\omega t - 30°) + 100\sin(5\omega t + 45°) + 60\sin(7\omega t + 60°) + 40\sin(9\omega t + 23°)\text{V}$。

（1）如果三相绕组接成星形，求线电压和相电压(有效值);

（2）如果三相绕组接成三角形，求线电压和和相电压(有效值)。

解 （1）当三相绕组接成星形时，线电压中不含零序分量 3 次和 9 次谐波，则线电压和和相电压分别为

$$U_{线} = \sqrt{\left(\frac{300\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{60\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2} = 394.2\ \text{V}$$

$$U_{相} = \sqrt{\left(\frac{300}{\sqrt{2}}\right)^2 + + \left(\frac{160}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{100}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{60}{\sqrt{2}}\right)^2 + + \left(\frac{40}{\sqrt{2}}\right)^2} = 255.7\ \text{V}$$

（2）当三相绕组接成三角形时，零序分量在三角形中形成环流，线（相）电压中不含零序分量，线电压和和相电压相等，即

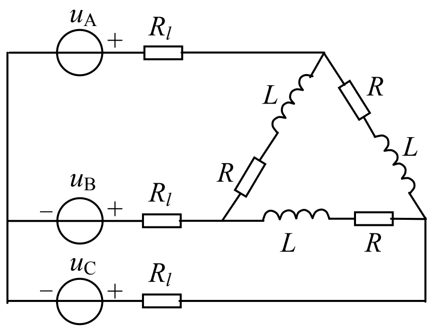
$$U_{线} = U_{相} = \sqrt{\left(\frac{300}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{100}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{60}{\sqrt{2}}\right)^2} = 227.6\ \text{V}$$

15-23 题图 15-23 所示电路中，已知对称三相电源 A 相电压为 $u_\text{A} = 120\sin\omega t + 30\sin 3\omega t + 20\sin 5\omega t\text{V}$，三相对称负载，$R$=60Ω，$\omega L$=30Ω，线路电阻

R_l=10Ω。

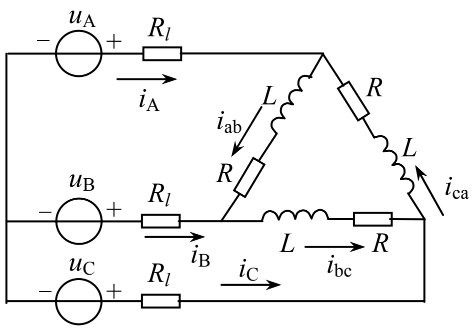
（1）求线电流和相电流的有效值与瞬时值；

（2）求负载消耗的有功功率。



题图 15-23

解　各电流的参考方向如题图 15-23(a)所示。



题图 15-23(a)

（1）线电压、线电流中不含 3 次谐波，所以三角形负载中也不含三次谐波；正序和负序分量是对称的。应用叠加定理和相量法，并利用线电流与相电流的关系有

$$\dot{I}_{\mathrm{Am(1)}} = \frac{\dot{U}_{\mathrm{Am(1)}}}{R_l + \frac{1}{3}\left(R + \mathrm{j}\omega L\right)} = \frac{120\angle 0°}{30 + \mathrm{j}10} = 3.795\angle -18.43° \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_{\mathrm{abm(1)}} = \frac{3.795}{\sqrt{3}}\angle(-18.43° + 30°)\mathrm{A}{=}2.191\angle 11.57°\ \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_{\mathrm{Am(5)}} = \frac{\dot{U}_{\mathrm{Am(5)}}}{R_l + \frac{1}{3}\left(R + \mathrm{j}5\omega L\right)} = \frac{20\angle 0°}{30 + \mathrm{j}50} = 0.3430\angle -59.04° \mathrm{A}$$

$$\dot{I}_{\mathrm{abm(5)}} = \frac{0.3430}{\sqrt{3}}\angle(-59.04° - 30°)\mathrm{A}{=}0.1980\angle -89.04° \mathrm{A}$$

由上述计算结果，并由对称性可得线电流、相电流的瞬时值分别为

$$i_{\mathrm{A}}(t) = 3.80\sin(\omega t - 18.4°) + 0.343\sin(5\omega t - 59.0°)\ \mathrm{A}$$

$$i_{\mathrm{B}}(t) = 3.80\sin(\omega t - 138°) + 0.343\sin(5\omega t - 61.0°)\ \mathrm{A}$$

$$i_{\mathrm{C}}(t)=3.80\sin(\omega t+102°)+0.343\sin(5\omega t-179°)\ \mathrm{A}$$

$$i_{\mathrm{ab}}(t)=2.19\sin(\omega t+11.6°)+0.198\sin(5\omega t-89.0°)\ \mathrm{A}$$

$$i_{\mathrm{bc}}(t)=2.19\sin(\omega t-108°)+0.198\sin(5\omega t-31.0°)\ \mathrm{A}$$

$$i_{\mathrm{ab}}(t)=2.19\sin(\omega t+132°)+0.198\sin(5\omega t+151°)\ \mathrm{A}$$

线电流、相电流的有效值分别为

$$I_l=I_{\mathrm{A}}=\sqrt{\left(\frac{3.795}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{0.3430}{\sqrt{2}}\right)^2}=2.69\ \mathrm{A}$$

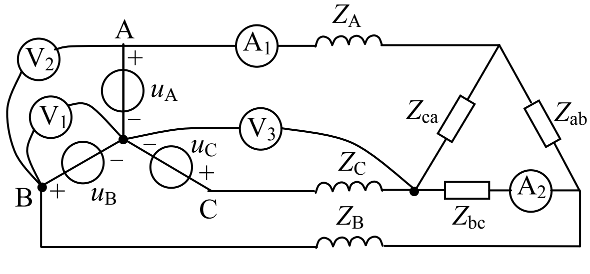
$$I_p=I_{\mathrm{ab}}=\sqrt{\left(\frac{2.191}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{0.1980}{\sqrt{2}}\right)^2}=1.56\ \mathrm{A}$$

此时应有 $I_l=\sqrt{3}I_p$。

（2）负载消耗的功率为

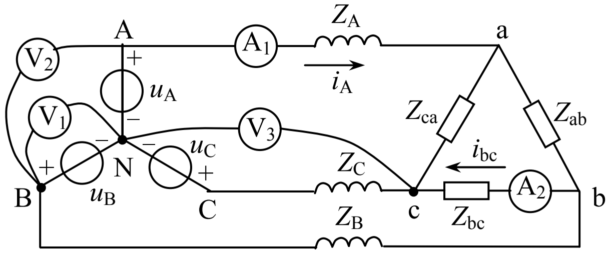
$$P=3I_p^2R=438\ \mathrm{W}$$

15-24 有一对称三相电源接成 Y 形（如题图 15-24 所示）。已知 A 相电源电压 $u_{\mathrm{A}}=28\sin 314t-82\sin(3\times 314t-\frac{\pi}{4})+42.3\sin(5\times 314t-\frac{\pi}{10})\mathrm{V}$，三相负载 $Z_{\mathrm{ab}}=Z_{\mathrm{bc}}=Z_{\mathrm{ca}}=R=12\Omega$，基波阻抗 $Z_{\mathrm{A}}=Z_{\mathrm{B}}=Z_{\mathrm{C}}=\mathrm{j}3\Omega$。求图中各电表的指示值(有效值)。



题图 15-24

解 各参考方向见题图 15-24(a)。



题图 15-24(a)

V_1 的读数为

$$U_{\mathrm{B}}=\sqrt{\left(\frac{28}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{82}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{42.3}{\sqrt{2}}\right)^2}=68.2\mathrm{V}$$

V_2表测的是线电压，线电压中不含 3 次谐波，所以其读数为

$$U_{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(\frac{28\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{42.3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2}=62.1\mathrm{V}$$

线电流和Δ接负载中的相电流不含 3 次谐波，对题图 15-24(a)应用叠加定理及相量法可得

$$\dot{I}_{\mathrm{Am(1)}}=\frac{\dot{U}_{\mathrm{Am(1)}}}{Z_{\mathrm{A}}+\frac{1}{3}R}=\frac{28\angle 0^\circ}{\mathrm{j}3+4}=5.6\angle -36.87^\circ\mathrm{A}$$

$$\dot{I}_{\mathrm{bcm(1)}}=\frac{\dot{I}_{\mathrm{Am(1)}}}{\sqrt{3}}\angle(-120^\circ+30^\circ)=3.233\angle -126.9^\circ\mathrm{A}$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_{\mathrm{cNm(1)}}&=-\dot{I}_{\mathrm{Cm(1)}}Z_{\mathrm{C}}+\dot{U}_{\mathrm{Cm(1)}}\\&=-5.6\angle 83.13^\circ\times\mathrm{j}3+28\angle 120^\circ=22.40\angle 83.13^\circ\mathrm{V}\end{aligned}$$

$$\dot{U}_{\mathrm{cNm(3)}}=-82\angle -45^\circ\mathrm{V}$$

$$\dot{I}_{\mathrm{Am(5)}}=\frac{\dot{U}_{\mathrm{Am(5)}}}{Z_{\mathrm{A}}+\frac{1}{3}R}=\frac{42.3\angle -18^\circ}{\mathrm{j}15+4}=2.725\angle -93.07^\circ\mathrm{A}$$

$$\dot{I}_{\mathrm{bcm(5)}}=\frac{\dot{I}_{\mathrm{Am(5)}}}{\sqrt{3}}\angle(120^\circ-30^\circ)=1.573\angle -3.07^\circ\mathrm{A}$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_{\mathrm{cNm(5)}}&=-\dot{I}_{\mathrm{Cm(5)}}\times 5Z_{\mathrm{C}}+\dot{U}_{\mathrm{Cm(5)}}\\&=-2.725\angle 146.9^\circ\times\mathrm{j}15+42.3\angle -138^\circ=10.88\angle 146.9^\circ\mathrm{V}\end{aligned}$$

所以，电流表 A_1、A_2 和电压表 V_3 的读数分别为

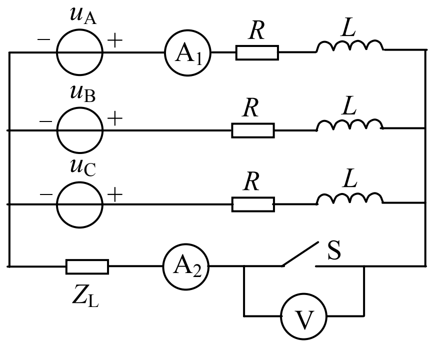
$$I_{\mathrm{A}}=\sqrt{\left(\frac{5.6}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{2.725}{\sqrt{2}}\right)^2}=4.40\ \mathrm{A}$$

$$I_{\mathrm{bc}}=\sqrt{\left(\frac{3.233}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1.573}{\sqrt{2}}\right)^2}=2.54\ \mathrm{A}$$

$$U_{\mathrm{cN}}=\sqrt{\left(\frac{22.40}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{82}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{10.88}{\sqrt{2}}\right)^2}=60.6\ \mathrm{V}$$

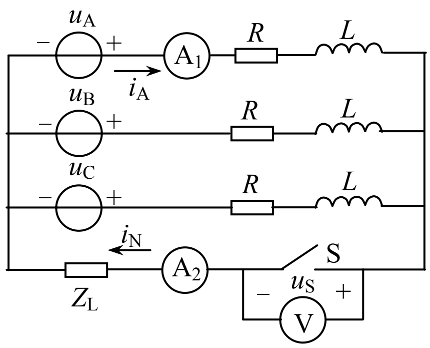
说明：第一版中，5 次谐波的幅值为 42.4V。

15-25 题图 15-25 所示电路中，已知电路参数为 R=6Ω，ωL=3Ω，Z_L=1Ω，对称三相电源相电压 $u_A = 120\sqrt{2}\sin\omega t + 30\sqrt{2}\sin 3\omega t + 10\sqrt{2}\sin 5\omega t$ V。分别求开关 S 断开和闭合时电表的读数（有效值）。



题图 15-25

解　电压、电流的参考方向如题图 15-25(a)所示。



题图 15-25(a)

（1）当开关 S 断开时，即中线断开，电流表 A_2 的读数为零。

对于基波分量，三相电路为正序，由相量法得

$$\dot{I}_{A1} = \frac{\dot{U}_{A1}}{R + j\omega L} = \frac{120\angle 0°}{6 + j3} = 17.9\angle -26.6° \text{A}，\quad \dot{U}_{S1} = 0$$

对于三次谐波，三相电路为零序，由相量法得

$$\dot{I}_{A3} = 0，\quad \dot{U}_{S3} = \dot{U}_{A3} = 30\angle 0° \text{V}$$

对于五次谐波，三相电路为负序，由相量法得

$$\dot{I}_{A5} = \frac{\dot{U}_{A5}}{R + j5\omega L} = \frac{10\angle 0°}{6 + j15} = 0.619\angle -68.2° \text{A}，\quad \dot{U}_{S5} = 0$$

所以

$$i_A(t) = 17.9\sqrt{2}\sin(\omega t - 26.6°) + 0.619\sqrt{2}\sin(5\omega t - 68.2°) \text{ A}$$

$$u_S(t) = 30\sqrt{2}\sin 3\omega t \text{ V}$$

电流表 A_1 的读数为

$$I_{\rm A}=\sqrt{17.9^2+0.619^2}=17.9\,{\rm A}$$

电压表 V 的读数为 30V。

（2）当开关 S 闭合时，即有中线情况，此时电压表的读数为零。

对于基波分量，由相量法得

$$\dot I_{\rm A1}=17.9\angle-26.6°{\rm A}\ （与与无中线时相同），\ \dot I_{\rm N1}=0$$

对于三次谐波，三相电路为零序，由相量法得

$$\dot I_{\rm N3}=\frac{\dot U_{\rm A3}}{(R+{\rm j}3\omega L)/3+Z_{\rm L}}=\frac{30\angle0°}{3+{\rm j}3}=7.07\angle-45.0°{\rm A}$$

$$\dot I_{\rm A3}=\frac{\dot I_{\rm N3}}{3}=2.36\angle-45.0°{\rm A}$$

对于五次谐波，三相电路为负序，由相量法得

$$\dot I_{\rm A5}=0.619\angle-68.2°{\rm A}\ （与与无中线时相同），\ \dot I_{\rm N5}=0$$

所以

$$i_{\rm A}(t)=17.9\sqrt2\sin(\omega t-26.6°)+2.36\sqrt2\sin(3\omega t-45.0°)+0.619\sqrt2\sin(5\omega t-68.2°)\ {\rm A}$$

$$i_{\rm A}(t)=7.07\sqrt2\sin(3\omega t-45.0°)\ \ {\rm A}$$

电流表 A_1 的读数为

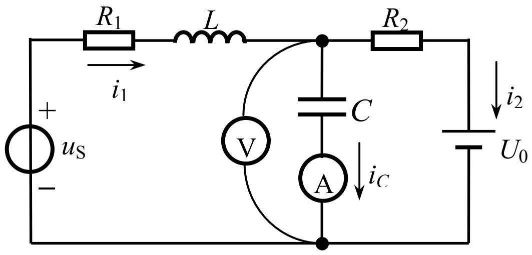
$$I_{\rm A}=\sqrt{17.9^2+2.36^2+0.619^2}=18.1\,{\rm A}$$

电流表 A_1 的读数为 7.07A。

补充题 图示电路中 $u_{\rm S}$ 是一角频率为ω的正弦交流电源，U_0 是直流电源。已知 R_1=1Ω，R_2=2Ω，ωL=1Ω，$\dfrac{1}{\omega C}=4\Omega$。电压表读数为 10V，电流表读数为 2A(均为有效值)。

（1）求直流电源电压 U_0 及交流电源电压有效值 $U_{\rm S}$;

（2）求每个电源发出的平均功率。

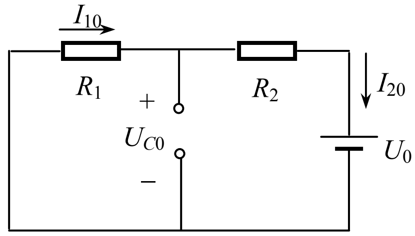


解　电流表无直流分量，两端电压有直流分量

设$u_C=U_{C0}+u_{C\sim}$，$i_C=i_{C0}+i_{C\sim}=i_{C\sim}$（$i_C$中无直流分量）。

$$U_{C\sim}=\frac{1}{\omega C}I_{C\sim}=4\times2=8\text{V}\qquad U_{C0}=\sqrt{U_C^2-U_{C\sim}^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6\text{V}$$

直流电源单独作用时的等效电路如图。



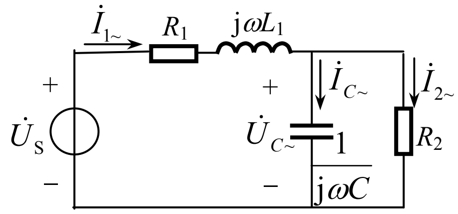
$$U_{C0}=\frac{R_1}{R_1+R_2}\times U_0=6\text{V}$$

求得

$$U_0=\frac{(R_1+R_2)U_{C0}}{R_1}=18\text{V}$$

$$I_{10}=I_{20}=-\frac{U_0}{R_1+R_2}=-\frac{18}{1+2}=-6\text{A}$$

交流电源单独作用时的等效电路如图。



令$\dot U_{C\sim}=8\angle0°\text{V}$，则$\dot I_{C\sim}=2\angle90°\text{A}$，

$$\dot I_{2\sim}=\frac{\dot U_{C\sim}}{R_2}=4\angle0°\text{A}$$

$$\dot I_{1\sim}=\dot I_{C\sim}+\dot I_{2\sim}=4+\text{j}2=4.47\angle26.6°\text{A}$$

$$\dot U_{\text{S}}=\dot I_{1\sim}(R_1+\text{j}\omega L_1)+\dot U_{C\sim}=11.7\angle31.0°\text{V}$$

所以

$$i_1=I_{10}+i_{1\sim}=-6+4.47\sqrt{2}\sin(\omega t+26.6°)\text{A}$$

$$i_2=I_{20}+i_{2\sim}=-6+4\sqrt{2}\sin\omega t\ \text{A}$$

（2）直流电源和交流电源发出的功率分别为

$$P_{U_0\text{发}}=U_0\times(-I_{20})=18\times6=108\text{W}$$

$$P_{u_{\text{S}}\text{发}}=U_{\text{S}}I_{1\sim}\cos\varphi_1=11.7\times4.47\times\cos(31.0°-26.6°)=52.1\text{W}$$

第 15 章　周期性激励下电路的稳态响应

15-1　（a）奇次正弦；（b）奇次余弦；（c）奇次正、余弦；（d）直流，奇、偶次余弦；（e）直流，偶次余弦；（f）直流，奇、偶次正弦

15-2　$f(t)=\dfrac{4B_{\mathrm{m}}}{\pi\beta}(\sin\beta\sin\omega t+\dfrac{1}{9}\sin 3\beta\sin 3\omega t+\dfrac{1}{25}\sin 5\beta\sin 5\omega t+\cdots)$

15-3　$u(t)=100+66.7\cos 2\omega t-13.33\cos 4\omega t+\cdots$

15-4　(1) 11.18A；(2) 10.05A；(3) 14.32 A；(4) 15.17A

15-5　U=20.0V

15-6　(a) 7.07V；(b) 8.66V

15-7　(a) 4 W；(b) 3 W；(c) 3W

15-8　A_1 7.91A，A_2 7.43A

15-9　$u=100+3.53\sin(2\omega t-85°)+0.171\sin(4\omega t-87°)$V

15-10　$u_2=370.4+33.15\cos(3\omega t-92.9°)-2.85\cos(6\omega t-121°)$V

15-11　$u_C=20+24.78\sin(\omega t-59.9°)-2.079\sin(3\omega t-112.7°)$V，$U_C$= 26.6V

15-12　204W，4.12A

15-13　$i_1=10+6.19\sin(\omega t-68.2°)+1.10\sin(3\omega t-62.4°)$A，$i_2=1.85\sin(\omega t+81.5°)+6.25\sin(3\omega t+20.7°)$A，$I_1$=10.95A，$I_2$=4.61A，$P$=883W

15-14　$u(t)=180+153\sqrt{2}\sin(\omega t+47.4°)+151\sqrt{2}\sin(3\omega t+33.0°)$ V，

$U=280$ V，$P=390$ W

15-15　45.9V

15-16　R=3Ω，L=3.18mH，C=796μF

15-17　C_1=9.39μF，C_2=75.1μF，$i=U_{1m}\sin\omega t/R_2$

15-18　L_1=1H，L_2=0.125H（谐波次数不同）

15-19　$i=2\sin(\omega t-8.62°)+0.499\sin(2\omega t-118°)$A，180W

15-20　（1）$u=50+105\sin(\omega t+89.8°)+162\sin(3\omega t+69.3°)$V；

（2）$u_C=50+100\sin(\omega t-5.71°)+7.14\sin(3\omega t-178°)$V；（3）826W

15-21　$i_1=7+2\sin(1000t-53.1°)+0.404\sin(3000t-76.0°)$A，$i_2=4\sin(1000t-53.1°)+0.808\sin(3000t-76.0°)$A，$I_1$=7.15A，$I_2$=2.89A

15-22　（1）$U_{相}$=255.7V，$U_{线}$=394.2V；（2）$U_{线}=U_{相}$=227.6V

15-23　$i_A=3.79\sin(\omega t-18.3°)+0.340\sin(5\omega t-59.0°)$A，

$i_B=3.79\sin(\omega t-138°)+0.340\sin(5\omega t+61.0°)$A，

$i_C=3.79\sin(\omega t+102°)+0.340\sin(5\omega t-179°)$A，

$i_{ab}=2.19\sin(\omega t+11.6°)+0.198\sin(5\omega t-89.0°)$A，

$i_{bc}=2.19\sin(\omega t-108°)+0.198\sin(5\omega t+31.0°)$A，

$i_{ca}=2.19\sin(\omega t+132°)+0.198\sin(5\omega t+151°)$A，

I_A=2.69A，I_{ab}=1.56A，P=438W

15-24　V_1 68.2V，V_2 62.1V，V_3=60.6V，A_1 4.40A，A_2 2.54A

15-25　有中线：A_1 18.1A，A_2 7.07A；无中线：A_1 17.9A，A_2 0，V 30V