第七次习题课题目

习题 1. 练习 4.2.6

$$\text{计算}\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

参考解答:

注意矩阵为两个秩不大于 1 的矩阵之和, 故其秩不大于 $2.n \geq 3$ 时行列式为 $0.n = 1$ 时行列式为 $1+x_1y_1 \cdot n = 2$ 时行列式为 $(x_1-x_2)(y_1-y_2)$.

习题 2. 练习 4.2.8

1. 令 A_n 是从右上到左下对角线上的元素全为 1, 其余元素全为 0 的 n 阶方阵. 求 A_2,A_3,A_4,A_5 的行列式, 分析共规律, 推断出 A_n 的行列式.

参考解答:

$$\text{归纳可得}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

2. 令 $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, 以此类推 A_n. 求 A_2,A_3,A_4 的行列式, 分析共$\boxed{F}$律, 推出 A_n 的行列式.

参考解答: 根据习题 1.7.1.2 进行 LU 分解, 答案为 1.

3. 设 A 具在 QR 分解 $A=Q\begin{bmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{bmatrix}$, 求 $\det(A)$ 的所有可能值.

参考解答:

± 24. 这是由于正交矩阵Q 满足$Q^TQ=I$, 求行列式知Q 的行列式为± 1.

4. 定义 Hilbert 矩阵 $H_n=\left[\frac{1}{i+j-1}\right]_{n\times n}$. 计算 $\det(H_2),\det(H_3)$. Hilbert 矩阵是一种常见的难于计算的矩阵, 常用来测试算法.

参考解答:

$$|H_2|=\frac{1}{12},|H_3|=\frac{1}{2160}$$

习题 3. 练习 4.2.22 和 4.2.23

1. 设 A,B 分别是 $m\times n,n\times m$ 矩阵, 证明, $\det(I_m+AB)=\det(I_n+BA)$. 由此推出, I_m+AB 可逆当且仅当 I_n+BA 可逆.

参考解答:

考虑$\begin{bmatrix}I_n&\\-A&I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n&\\&I_m+AB\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n&B\\&I_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_n&B\\-A&I_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_n&B\\&I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n+BA&\\&I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n&\\-A&I_m\end{bmatrix}$.

2. 计算 $\begin{vmatrix}1+a_1^2&a_1a_2&\dots&a_1a_n\\a_2a_1&1+a_2^2&\dots&a_2a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_na_1&a_na_2&\dots&1+a_n^2\end{vmatrix}$.

参考解答:

由上题, $\det\left(I_n+\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\end{bmatrix}\right)=\det\left(I_1+\begin{bmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}\right)=1+\sum_{i=1}^n a_i^2$.

习题 4. 练习 4.2.24

参考解答:

设 A 是三阶矩阵, 已知 $\det(A-I_3)=\det(A-2I_3)=\det(A-3I_3)=0$.

1. 证明存在非零向量 v_1,v_2,v_3, 满足 $Av_i=iv_i$.

这是因为 $A-iI_3$ 不可逆.

2. 设 $k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=0$, 证明 $k_1v_1+2k_2v_2+3k_3v_3=0, k_1v_1+4k_2v_2+9k_3v_3=0$.

两边同时用 A 作用.

3. 证明存在可逆 Vandermonde 矩阵 V, 使得 $\begin{bmatrix} k_1v_1 & k_2v_2 & k_3v_3 \end{bmatrix} V=0$.

$$V=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

4. 证明 v_1,v_2,v_3 构成 $\mathbb{R}^3$ 的一组基, 因此矩阵 $B=\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$ 可逆.

由上, 我们有 v_1,v_2,v_3 线性无关.

5. 证明存在对角矩阵 D, 使得 $AB=BD$, 并计算 $\det(A)$.

$D=\operatorname{diag}(1,2,3).\det(A)=\det(D)=6$

习题 5. 练习 4.3.8

给定 $A_n=\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}, B_n=\begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

1. 利用展开式得到 $\det(B_n)$ 关于 n 的递推关系, 并计算 $\det(B_n)$.

参考解答: 将第一行加到第二行知 $\det(B_n)=\det(B_{n-1}).\det(B_n)=1$.

2. 利用 $\det(A_n)$ 与 $\det(B_n)$ 的关系计算 $\det(A_n)$.

参考解答： $\det(A_n) = \det(B_n) + \det(A_{n-1}).\det(A_n) = n+1.$

习题 6. 练习 4.2.20

设 A 为可逆方阵，D 为方阵，证明：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|.$$

参考解答：

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}\right) = \det(A)\det\left(D - CA^{-1}B\right)$$

习题 7. 练习 4.3.10

求下列推广的 Vandermonde 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}.$$

参考解答： 这是 $n+1$ 阶 Vandermonde 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^{n-2} & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{vmatrix}$ 在 x_{n+1}^{n-1} 处的 n 阶余子式.

将 $n+1$ 阶 Vandermonde 行列式沿最后一行展开，知这个余子式的值是，$-\prod_{1\le i<j\le n+1}(x_j-x_i)$ 作为 x_{n+1} 的多项式的 $n-1$ 次项的系数.

$-\prod_{1\le i<j\le n+1}(x_j-x_i)=-\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\cdot\prod_{1\le i\le n}(x_{n+1}-x_i)=$
$-\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\cdot\left(x_{n+1}^n-\sum_{1\le i\le n}x_i\cdot x_{n+1}^{n-1}+\cdots+(-1)^n\prod_{1\le i\le n}x_i\right)$

所以这个行列式的值为 $\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\cdot\sum_{1\le i\le n}x_i$.

习题 8. 练习 4.3.12

设 Q 是 n 阶正交矩阵，即 $Q^TQ=QQ^T=I_n$。

(1) 若 $|Q|<0$，求证：$|Q+I_n|=0$，因此存在非零向量 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$，使得 $Q\mathbf{v}=-\mathbf{v}$。

参考解答:

$$|I_n+Q|=\left|(I_n+Q)^T\right|=\left|I_n+Q^T\right|=\left|I_n+Q^{-1}\right|=\left|Q^{-1}\right||I_n+Q|=-|I_n+Q|.$$

(2) 设 $|Q|>0$. 证明当 n 是奇数时等式 $|Q-I_n|=0$ 总成立. 当 n 是偶数时，判断等式 $|Q-I_n|=0$ 是否成立. 若成立，请给出证明；若不成立，请举出反例.

参考解答:

$|I_n-Q|=\left|(I_n-Q)^T\right|=|I_n-Q^T|=\left|I_n-Q^{-1}\right|=\left|-Q^{-1}\right||I_n-Q|=-|I_n-Q|.$

不成立，如 $\begin{bmatrix}\sin a & -\cos a\\ \cos a & \sin a\end{bmatrix},a=\frac{\pi}{6}$

习题 9. 设

$$D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0 & -1\\ -2 & 2 & -2 & -3\\ -1 & 2 & -2 & -3\end{vmatrix}$$

不直接计算 C_{ij}，求解以下各题：

(1) $-2C_{11}+2C_{21}+3C_{31}+4C_{41}$;

(2) $C_{13}+C_{23}+C_{33}+C_{43}$.

参考解答：

(1) 将 D 的第一列换成 $(-2,2,3,4)$ 再求行列式，等于 1；

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & -3 \\ 4 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

(2) 将 D 的第三列换成 $(1,1,1,1)$ 再求行列式, 等于 -1；

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

习题 10. 设

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

求 $S_1 = C_{21} + 2C_{22}$ 和 $S_2 = C_{23} + C_{24}$.

参考解答： 注意到 $S_1 + 2S_2 = 0$，具体计算过程如下：

$$S_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -1$$