线性代数 第8讲

10月6日

第一章第7讲　分块矩阵与LU分解

上一讲要点回顾

分块矩阵的初等变换

LU分解

第一章内容总结

逆矩阵的几个性质

命题1.5.6 若矩阵 A，B可逆

$(1)\ A^{-1}$ 可逆，且 $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$

$(2)\ (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ $\qquad (2')\ \left(A_1A_2\cdots A_k\right)^{-1}=A_k{}^{-1}\cdots A_2{}^{-1}A_1{}^{-1}$

$(3)\ A^T$ 可逆，且 $\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$，可记为$A^{-T}$

定理 1.5.7 设 A 是 n 阶方阵，以下叙述等价：

1. A 可逆；
2. 任取 n 维向量 $\boldsymbol{b}$，方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解唯一，且 $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$；
3. 齐次方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解；
4. A 对应的阶梯形矩阵有 n 个主元；
5. A 对应的行简化阶梯形矩阵一定是 I_n；
6. A 是有限个初等矩阵的乘积.

练习1.5.18，证明：如果 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=A$，则 $I-2A$ 可逆。

命题 1.5.10 上三角矩阵可逆当且仅当其对角元素都不为零. 此时，其逆矩阵也是上三角矩阵，逆矩阵的对角元素是该矩阵的对应对角元素的倒数.

下三角矩阵也有类似性质.

定义 1.5.11 (置换矩阵) 单位矩阵经一系列对换行变换得到的矩阵称为**置换矩阵**.

简单验证可以得到置换矩阵的一些性质.

命题 1.5.12

1. 单位矩阵经一系列对换列变换得到的矩阵也是置换矩阵；
2. 置换矩阵可以通过按某种次序排列单位矩阵的行来得到；
3. 置换矩阵可以通过按某种次序排列单位矩阵的列来得到；
4. 不同的 n 阶置换矩阵共有 $n!$ 个[7]；
5. 置换矩阵的乘积也是置换矩阵；
6. 置换矩阵的逆是其转置，也是置换矩阵.

6. $P_k \cdots P_2 \cdots P_1 A = I \quad \Rightarrow \quad P_k \cdots P_2 \cdots P_1 = A^{-1}$

$$P_k \cdots P_2 \cdots P_1 A = I \quad \Rightarrow \quad \left(P_1 P_2 \cdots P_k P_k \cdots P_2 \cdots P_1\right) A = P_1 P_2 \cdots P_k$$

$$A = P_1 P_2 \cdots P_k$$

$$A^{-1} = P_k \cdots P_2 P_1 = P_k^T \cdots P_2^T P_1^T = \left(P_1 P_2 \cdots P_k\right)^T = A^T$$

相抵标准形

定义 1.5.16 (左相抵) 如果矩阵 A 可以经过一系列初等行变换化成矩阵 B，则称 A 和 B **左相抵**.

命题 1.5.17 给定两个 $m \times n$ 矩阵 A, B. 那么二者左相抵，当且仅当存在 m 阶可逆矩阵 P，使得 $PA = B$.

证. A 与 B 左相抵 $\Leftrightarrow$ A 经一系列初等行变换得到 $B \Leftrightarrow$ 存在 m 阶初等矩阵 $P_1, \cdots, P_s$，使得 $P_s \cdots P_1 A = B \overset{\text{定理 1.5.7}}{\Longleftrightarrow}$ 存在 m 阶可逆矩阵 P，使得 $PA = B$. □

可以看到在所有和矩阵 A 左相抵的矩阵中，形式最简单的应该就是其行简化阶梯形，因此我们也可以称此矩阵为 A 的**左相抵标准形**.

等价关系

不难看出，左相抵关系满足如下三条基本性质：

1. 反身性：每个矩阵和自身左相抵；
2. 对称性：如果 A 和 B 左相抵，那么 B 和 A 左相抵；
3. 传递性：如果 A 和 B 左相抵，B 和 C 左相抵，那么 A 和 C 左相抵.

事实上，很多数学对象之间都存在类似的关系. 为此，我们抽象出一系列概念.

定义 1.5.18 (等价关系) 如果非空集合 S 的元素之间定义了一种二元关系 "$\sim$"，满足：

1. 反身性：对任意 $a \in S$，$a \sim a$；
2. 对称性：如果 $a \sim b$，那么 $b \sim a$；
3. 传递性：如果 $a \sim b, b \sim c$，那么 $a \sim c$，

则称此关系为 S 上的一个**等价关系**.

分块矩阵的运算

- 设分块矩阵 A 与 B 的行数和列数均相同，采用同样的分法，即

$$A=\begin{bmatrix}\boxed{A_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{s1} & \cdots & A_{sr}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}\boxed{B_{11}} & \cdots & \boxed{B_{1r}}\\ \vdots & & \vdots\\ B_{s1} & \cdots & B_{sr}\end{bmatrix}\qquad A+B=\begin{bmatrix}\boxed{A_{11}+B_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}+B_{1r}}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr}\end{bmatrix}.$$

其中 A_{ij} 与 B_{ij} 的行数和列数均相同

- 设 $A=\begin{bmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{s1} & \cdots & A_{sr}\end{bmatrix}$，λ 是数，则 $\lambda A=\begin{bmatrix}\lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr}\end{bmatrix}.$

- $A=\begin{bmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1s}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{r1} & \cdots & A_{rs}\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}B_{11} & \cdots & B_{1t}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{s1} & \cdots & A_{st}\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}C_{11} & \cdots & C_{1t}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ C_{r1} & \cdots & C_{rt}\end{bmatrix},$

$$C_{ik}=A_{i1}B_{1k}+A_{i2}B_{2k}+\cdots+A_{is}B_{sk}=\sum_{j=1}^{s}A_{ij}B_{jk},\ i=1,\cdots,r;\ k=1,\cdots,t.$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11}{}^{-1} & 0 \\ 0 & B_{22}{}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \color{red}{1} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} \\ 0 & \tilde{B}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}^{-1} = ?$$

分块矩阵的初等变换

对分块矩阵同样可以引进初等变换和初等矩阵的概念.
分块矩阵关于子块的一次初等变换，可以看作是关于元素的一批初等变换的合成.

我们只以分成4块的情况简单解释.

设 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$,

定义 下面三种针对分块矩阵 M 的变形，统称为分块矩阵的初等变换:

(1) 用可逆矩阵 P 左(右)乘 M 的某一行(列);

(2) 用矩阵 Q 乘 M 的某行(列)加到另外一行(列);

(3) 交换 M 的两行(列).

要求 P、Q 可逆?

定义 将单位矩阵分块成准对角形矩阵 $\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_s & 0\\ 0 & \boldsymbol{I}_t\end{bmatrix}$

对其进行一次初等变换，可以得到分块矩阵的初等矩阵:

$$(1)\begin{bmatrix}\boldsymbol{P} & 0\\ 0 & \boldsymbol{I}_t\end{bmatrix}\text{或}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_s & 0\\ 0 & \boldsymbol{P}\end{bmatrix};(2)\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_s & 0\\ \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{I}_t\end{bmatrix}\text{或}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{Q}\\ 0 & \boldsymbol{I}_t\end{bmatrix};\ (3)\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{I}_t\\ \boldsymbol{I}_s & 0\end{bmatrix}\text{或}\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{I}_s\\ \boldsymbol{I}_t & 0\end{bmatrix}.$$

- 对分块矩阵进行一次初等行(列)变换, 相当于给它左(右)乘以一个相应的分块初等矩阵:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{P} & 0\\ 0 & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{PA} & \boldsymbol{PB}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & 0\\ \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{QA}+\boldsymbol{C} & \boldsymbol{QB}+\boldsymbol{D}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{I} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}.$$

例 试判断矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\1&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$ 是否可逆? 若可逆, 求出 A^{-1}.

$$\begin{bmatrix}A_s & B_{s\times t}\\ 0 & C_t\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1}\\ 0 & C^{-1}\end{bmatrix}$$

行变换要左乘;
列变换要右乘.

$$\left[\begin{array}{cc|cc}A & B & I_s & 0\\ 0 & C & 0 & I_t\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc}I_s & A^{-1}B & A^{-1} & 0\\ 0 & C & 0 & I_t\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cc|cc}I_s & A^{-1}B & A^{-1} & 0\\ 0 & I_t & 0 & C^{-1}\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc}I_s & 0 & A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1}\\ 0 & I_t & 0 & C^{-1}\end{array}\right]$$

命题1.6.3 若矩阵 A_{11} 和 $A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ 可逆，则矩阵 $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ 可逆，且

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & \left(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}.$$

证明：$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & \left(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ 称为矩阵 A_{11} 的Schur补。

练习 1.6.10 给定 $m\times n, n\times m$ 矩阵 A, B，求证：I_m+AB 可逆当且仅当 I_n+BA 可逆.

提示：考虑分块矩阵.

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & -A \\ -B & I_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n+BA \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_m & -A \\ -B & I_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n+BA \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_m & -A \\ -B & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_m+AB & A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_m & -A \\ -B & I_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_m+AB & A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{bmatrix}$$

命题1.6.3 若矩阵 A_{11} 和 $A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ 可逆, $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & \left(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}$.

推论 1.6.4 若矩阵 A_{22} 和 $A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ 可逆，则矩阵 $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ 可逆，且

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{1.6.6}$$

证. 利用命题 1.6.3 和分块对换矩阵. □

下面再看两个稍微复杂的例子，来体会矩阵分块的用处.

例 1.6.5 (Sherman-Morrison-Woodbury 公式) 将 (1.6.3) 和 (1.6.6) 两式右端乘出来，有

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \\ -(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & (A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & -(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & A_{22}^{-1}+A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

比较对应左上角块，我们可以得到

$$(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} = A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1},$$

这给出了一定条件下一个可逆矩阵加上某个矩阵乘积后的逆的公式，常称为 **Sherman-Morrison-Woodbury 公式**，在矩阵分析、系统和控制论等领域中有广泛应用.

我们下面给出一个常用的简化版本，涉及的分块矩阵为 $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{u} \\ -\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}$，其中 A 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 是 n 维向量.

Sherman-Morrison 公式: 若 A 可逆, 则 $A+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$ 可逆, 当且仅当 $1+\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{u} \neq 0$, 且

$$(A+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}})^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}A^{-1}}{1+\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{u}}. \tag{1.6.7}$$

特别地，$I+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$ 可逆，当且仅当 $1+\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} \neq 0$，且

$$(I+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}})^{-1} = I - \frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}}{1+\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}}. \tag{1.6.8}$$

事实上，(1.6.7) 也可以由 (1.6.8) 来证明，留给读者思考.

来看一个简单例子. 给定可逆矩阵 A，若其 $(1,1)$ 元 a_{11} 有一微小变化 δ，变为 $a_{11}+\delta$，则新得矩阵是否可逆？如何计算？

不难看出新得矩阵为 $A+\delta\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}$. 根据 Sherman-Morrison 公式，该矩阵可逆，当且仅当 $1+\delta\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{e}_1 \neq 0$. 因此只要 $|\delta| < \frac{1}{|\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{e}_1|}$，即 δ 足够小时，该矩阵就可逆，且其逆为 $A^{-1} - \frac{1}{1+\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{e}_1}A^{-1}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}A^{-1}$. 可以看到逆的变化只和矩阵的逆的首行首列有关. 类似地，如果矩阵的 (i,j) 元发生微小改变，则逆的变化只需逆的第 j 行和第 i 列就可以得到. ☺

解方程 Ax = b

Gauss消去法等价于矩阵的LU分解

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A = LU$$

$Ax = b$ 等价为 $LUx = b$

先解 $Ly = b$

再解 $Ux = y$

计算量：

乘除≈ $n^3/3$ 加减≈ $n^3/3$

解方程 Ax = b

Gauss消去法等价于矩阵的LU分解

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1+a_{12}^{(1)}x_2+a_{13}^{(1)}x_3+\cdots+a_{1n}^{(1)}x_n=b_1^{(1)} \\ \qquad a_{22}^{(2)}x_2+a_{23}^{(2)}x_3+\cdots+a_{2n}^{(2)}x_n=b_2^{(2)} \\ \qquad a_{32}^{(2)}x_2+a_{33}^{(2)}x_3+\cdots+a_{3n}^{(2)}x_n=b_3^{(2)} \\ \qquad \qquad \cdots\cdots \\ \qquad a_{n2}^{(2)}x_2+a_{n3}^{(2)}x_3+\cdots+a_{nn}^{(2)}x_n=b_n^{(2)} \end{cases}$$

经过 k-1 步消元，$A^{(k)}x=b^{(k)}$

等价方程对应的增广矩阵

$$[A^{(k)} \mid b^{(k)}]=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2k}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&-l_{43}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&-l_{32}&1&\\&-l_{42}&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&&\\-l_{21}&1&&\\-l_{31}&&1&\\-l_{41}&&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}&u_{14}\\&u_{22}&u_{23}&u_{24}\\&&u_{33}&u_{34}\\&&&u_{44}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&\\-l_{21}&1&&\\-l_{31}&&1&\\-l_{41}&&&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&-l_{32}&1&\\&-l_{42}&&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&-l_{43}&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}&u_{14}\\&u_{22}&u_{23}&u_{24}\\&&u_{33}&u_{34}\\&&&u_{44}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&\\-l_{21}&1&&\\-l_{31}&&1&\\-l_{41}&&&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&-l_{32}&1&\\&-l_{42}&&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&-l_{43}&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}&u_{14}\\&u_{22}&u_{23}&u_{24}\\&&u_{33}&u_{34}\\&&&u_{44}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&&&\\l_{21}&1&&\\l_{31}&&1&\\l_{41}&&&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&l_{32}&1&\\&l_{42}&&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&l_{43}&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}&u_{14}\\&u_{22}&u_{23}&u_{24}\\&&u_{33}&u_{34}\\&&&u_{44}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&&&\\l_{21}&1&&\\l_{31}&l_{32}&1&\\l_{41}&l_{42}&l_{43}&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}&u_{14}\\&u_{22}&u_{23}&u_{24}\\&&u_{33}&u_{34}\\&&&u_{44}\end{bmatrix}$$

Gauss消去法的矩阵表示

$$L_1^{-1}=\begin{bmatrix}1&&&\\-l_{21}&1&&\\\vdots&&\ddots&\\-l_{n1}&&&1\end{bmatrix},\quad\cdots,\quad L_k^{-1}=\begin{bmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&-l_{k+1,k}&1&&\\&&\vdots&&\ddots&\\&&-l_{nk}&&&1\end{bmatrix}$$

$$A^{(2)}=L_1^{-1}A^{(1)},\cdots,A^{(n)}=L_{n-1}^{-1}L_{n-2}^{-1}\cdots L_2^{-1}L_1^{-1}A^{(1)}$$

$$L_k=\begin{bmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&l_{k+1,k}&1&&\\&&\vdots&&\ddots&\\&&l_{nk}&&&1\end{bmatrix},\cdots,L_1L_2\cdots L_{n-1}=\begin{bmatrix}1&&&&\\l_{21}&1&&&\\l_{31}&l_{32}&\ddots&&\\\vdots&\vdots&&1&\\l_{n1}&l_{n2}&\cdots&l_{n,n-1}&1\end{bmatrix}$$

$$A^{(n)}=L_{n-1}^{-1}L_{n-2}^{-1}\cdots L_2^{-1}L_1^{-1}A^{(1)}\quad\Rightarrow\quad A=A^{(1)}=L_1L_2\cdots L_{n-1}A^{(n)}=LU$$

例：用LU三角分解法解

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ & u_{22} & u_{23} \\ & & u_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix}$$

解：用分解计算得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix} = LU.$$

求解 $Ly = \begin{bmatrix} 14 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 14 \\ -10 \\ -72 \end{bmatrix}, \quad Ux = \begin{bmatrix} 14 \\ -10 \\ -72 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$

定理 1.7.1 (LU 分解) 如果 n 阶方阵 A 只使用倍加矩阵 $E_{ji;k}(j>i)$ 做行变换就可以化成阶梯形，那么存在 n 阶单位下三角矩阵 L 和 n 阶上三角矩阵 U，使得 $A=LU$.

分解 $A=LU$ 称为矩阵 A 的 **LU 分解**.

如果 A 有 LU 分解 $A=LU$，那么求解线性方程组 $A\boldsymbol{x}=b$，就化成了求解 $L\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$ 和 $U\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ 这两个方程组，而二者的系数矩阵都是三角矩阵，易于求解.

下面主要考虑可逆矩阵.

定义 1.7.2 (顺序主子阵) 方阵 A 的左上角 $k\times k$ 块，称为 A 的第 k 个**顺序主子阵**.

显然，n 阶方阵共有 n 个顺序主子阵.

定理 1.7.3 (可逆矩阵的 LU 分解) 对 n 阶可逆矩阵 A，A 有 LU 分解 $A = LU$，其中 L 是 n 阶单位下三角矩阵 L，U 是 n 阶上三角矩阵 U，当且仅当 A 的所有顺序主子阵可逆. 此时，A 的 LU 分解唯一.

证. 充分性: 已知 $A = LU$. A 可逆, L 为单位下三角阵也可逆, 因此 $U = L^{-1}A$ 也可逆, 于是 L, U 的所有对角元都不为零. 考虑分块矩阵 $L = \begin{bmatrix} L_{11} & O \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ O & U_{22} \end{bmatrix}$, 其中 L_{11}, U_{11} 是 $k \times k$ 矩阵. 显然 L_{11}, U_{11} 的对角元不为零，二者都可逆. 注意 $A = LU = \begin{bmatrix} L_{11}U_{11} & L_{11}U_{12} \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22} \end{bmatrix}$，即有 A 的第 k 个顺序主子阵是 $L_{11}U_{11}$，可逆.

必要性：采用数学归纳法. 当 $n = 1$ 时，显然. 假设命题对 $n-1$ 阶方阵成立，考虑 n 阶方阵 A，条件已知其所有顺序主子阵可逆.

考虑分块矩阵 $A = \begin{bmatrix} A_1 & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} & a \end{bmatrix}$，其中 A_1 是 $(n-1)$ 阶方阵，且显然满足归纳假设，因此有 LU 分解 $A_1 = L_1U_1$，而 L_1, U_1 可逆. 对分块矩阵消元，有

$$A = \begin{bmatrix} I_{n-1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}A_1^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & \boldsymbol{x} \\ 0 & a - \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}A_1^{-1}\boldsymbol{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}A_1^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & L_1^{-1}\boldsymbol{x} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & a - \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}A_1^{-1}\boldsymbol{x} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} L_1 & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}U_1^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & L_1^{-1}\boldsymbol{x} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & a - \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}U_1^{-1}L_1^{-1}\boldsymbol{x} \end{bmatrix},$$

此即 A 的 LU 分解.

唯一性：设 $A = L_1U_1 = L_2U_2$. 由 A 可逆，L_1, L_2 可逆知，U_1, U_2 可逆. 因此 $L_2^{-1}L_1 = U_2U^{-1}$，而前者是单位上三角矩阵，后者是下三角矩阵，因此二者必为单位矩阵，即 $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1} = I$，因此 $L_1 = L_2, U_1 = U_2$. □

命题 1.7.5 (LDU 分解) 如果 n 阶可逆方阵 A 存在 LU 分解，那么存在 n 阶单位下三角矩阵 L，对角元素均不为 0 的 n 阶对角矩阵 D，和 n 阶单位上三角矩阵 U，使得 $A = LDU$，且该分解唯一.

证. 只需证明唯一性. 假设 $A = L_1D_1U_1 = L_2D_2U_2$. 六个矩阵都可逆，因此 $L_2^{-1}L_1 = D_2U_2U_1^{-1}D_1^{-1}$，而前者是单位下三角矩阵，后者是上三角矩阵，因此二者必为单位矩阵. 立得 $L_1 = L_2, D_2^{-1}D_1 = U_2U_1^{-1}$. 类似地，$D_1 = D_2, U_1 = U_2$. □

分解 $A = LDU$ 称为矩阵 A 的 **LDU 分解**. 注意，事实上，我们只需要计算出 L 和 D，就可以直接得到 U，而不是真需要通过一系列倍加行变换来得到 U.

推论 1.7.6 可逆对称矩阵 A，如果有 LDU 分解 $A = LDU$，则 $L = U^{\mathrm{T}}$.

证. 由 A 对称，有 $LDU = A = A^{\mathrm{T}} = U^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}$. 注意到 $A = LDU = U^{\mathrm{T}}DL^{\mathrm{T}}$ 都是 A 的 LDU 分解，根据 LDU 分解的唯一性，$L = U^{\mathrm{T}}$. □

分解 $A = LDL^{\mathrm{T}}$ 称为对称矩阵 A 的 **LDL$^{\mathrm{T}}$ 分解**.

注意不是任意对称矩阵都有 LDL$^{\mathrm{T}}$ 分解.

第一章核心概念

1. 线性映射， 线性变换，线性运算（加法和数乘）
2. 矩阵，线性映射的矩阵
3. 矩阵的运算：加减法，数乘，转置，乘法，逆矩阵
4. 初等变换，解方程组和求逆矩阵的高斯-若当消去法
5. 初等矩阵与分块矩阵
6. 高斯消去法解线性方程组的矩阵表示，LU分解

特殊矩阵：单位矩阵，对角矩阵，对称矩阵，反对称矩阵，

上（下）三角矩阵，（严格）对角占优矩阵

作 业（10月6日）

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

练习1.6

3，4，5，12，14

练习1.7

1.(1,3,5)，2

10月11日提交

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~