电路原理

第7讲

电路的定理

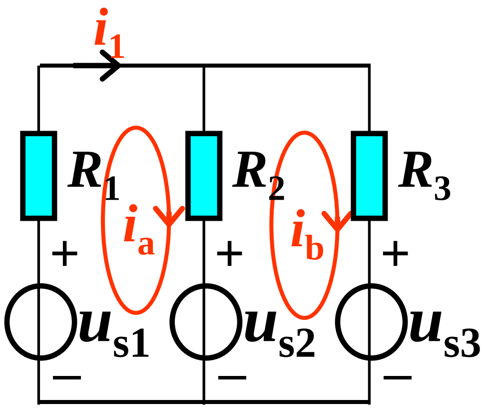
内容提要

1 叠加定理

2 戴维南定理和诺顿定理

3 替代定理(课后推送学习)

1 叠加定理 (*Superposition Theorem*)



由回路法

$$R_{11}i_a+R_{12}i_b=u_{s11}$$

$$R_{21}i_a+R_{22}i_b=u_{s22}$$

其中

$R_{11}=R_1+R_2$

$R_{12}= R_{21}= -R_2$

$R_{22}=R_2+R_3$

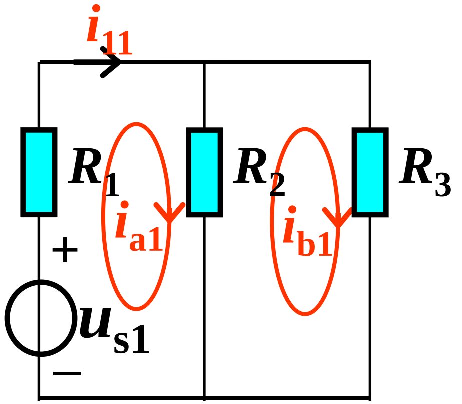
$u_{s11}=u_{s1}-u_{s2}$

$u_{s22}=u_{s2}-u_{s3}$

$$i_a=\frac{\begin{vmatrix} u_{s11} & R_{12} \\ u_{s22} & R_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}}=\frac{R_{22}}{\Delta}\underbrace{u_{s11}}_{u_{s1}-u_{s2}}+\frac{-R_{12}}{\Delta}\underbrace{u_{s22}}_{u_{s2}-u_{s3}}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}=R_{11}R_{22}-R_{12}R_{21}$$

$$=\frac{R_{22}}{\Delta}u_{s1}-\frac{R_{12}+R_{22}}{\Delta}u_{s2}+\frac{R_{12}}{\Delta}u_{s3}$$



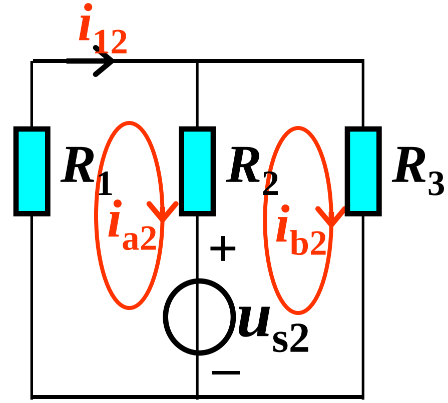
u_{S2}和u_{S3}不作用

$$R_{11}i_{a1}+R_{12}i_{b1}=u_{s1}$$

$$R_{21}i_{a1}+R_{22}i_{b1}=0$$

$$i_{a1}=\frac{\begin{vmatrix} u_{s1} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}}$$

$$=\boxed{\frac{R_{22}}{\Delta}u_{s1}}$$



u_{S1}和u_{S3}不作用

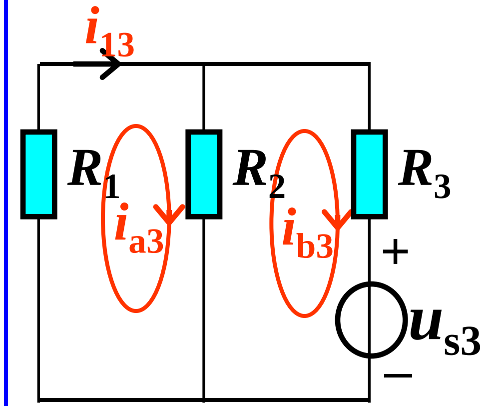
$$R_{11}i_{a2}+R_{12}i_{b2}=-u_{s2}$$

$$R_{21}i_{a2}+R_{22}i_{b2}=u_{s2}$$

$$i_{a2}=\frac{\begin{vmatrix} -u_{s2} & R_{12} \\ u_{s2} & R_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{R_{22}}{\Delta}(-u_{s2})+\frac{-R_{12}}{\Delta}u_{s2}$$

$$=\boxed{-\frac{R_{12}+R_{22}}{\Delta}u_{s2}}$$



u_{S1}和u_{S2}不作用

$$R_{11}i_{a3}+R_{12}i_{b3}=0$$

$$R_{21}i_{a3}+R_{22}i_{b3}=-u_{s3}$$

$$i_{a3}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & R_{12} \\ -u_{s3} & R_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}}$$

$$=-\frac{R_{12}}{\Delta}(-u_{s3})$$

$$=\boxed{\frac{R_{12}}{\Delta}u_{s3}}$$

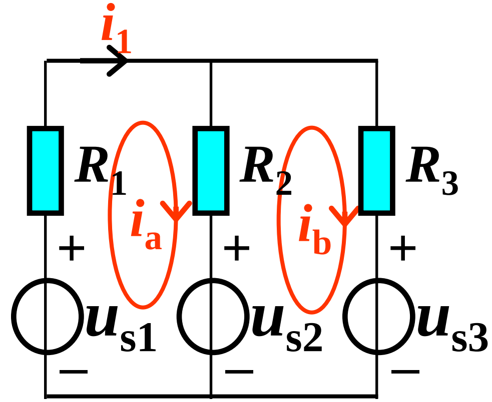
$$i_a = \frac{\begin{vmatrix} u_{s11} & R_{12} \\ u_{s22} & R_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}} = \frac{R_{22}}{\Delta} u_{s11} + \frac{-R_{12}}{\Delta} u_{s22} = \frac{R_{22}}{\Delta} u_{s1} - \frac{R_{12}+R_{22}}{\Delta} u_{s2} + \frac{R_{12}}{\Delta} u_{s3}$$

$$i_a = i_{a1} + i_{a2} + i_{a3}$$

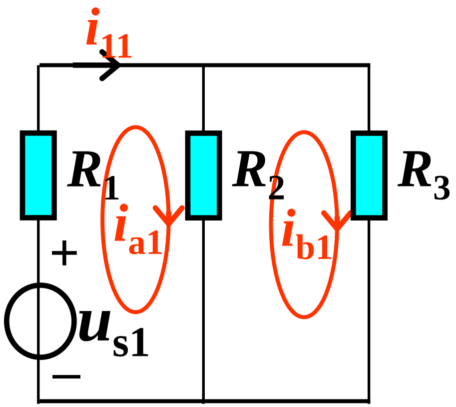
$$i_{a1} = \frac{\begin{vmatrix} u_{s1} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}} = \frac{R_{22}}{\Delta} u_{s1}$$

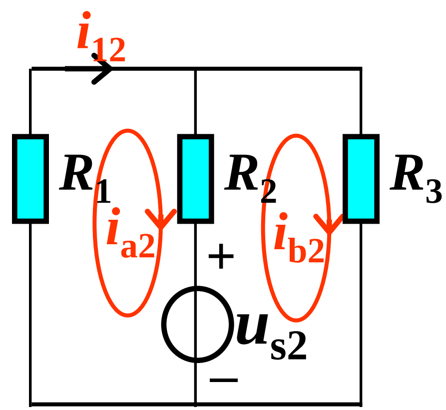
$$i_{a2} = \frac{\begin{vmatrix} -u_{s2} & R_{12} \\ u_{s2} & R_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}} = \frac{R_{22}}{\Delta}(-u_{s2}) + \frac{-R_{12}}{\Delta} u_{s2} = -\frac{R_{12}+R_{22}}{\Delta} u_{s2}$$

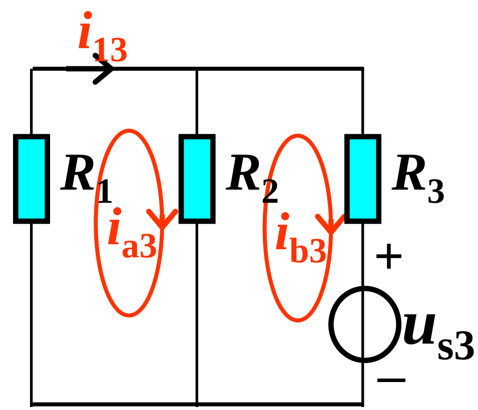
$$i_{a3} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & R_{12} \\ -u_{s3} & R_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}} = -\frac{R_{12}}{\Delta}(-u_{s3}) = \frac{R_{12}}{\Delta} u_{s3}$$



$i_a = i_{a1} + i_{a2} + i_{a3}$







u_{S2}和u_{S3}不作用

u_{S1}和u_{S3}不作用

u_{S1}和u_{S2}不作用

3个独立电源作用的效果与单个独立电源作用的效果之和相同

叠加定理

在线性电路中，任一支路电流(或电压)都是电路中各个独立电源单独作用时，在该支路产生的电流(或电压)的代数和。

单独作用：一个电源作用，其余电源不作用。

单选题 1分

设置

在应用叠加定理过程中，
不作用的电流源的处理方式是

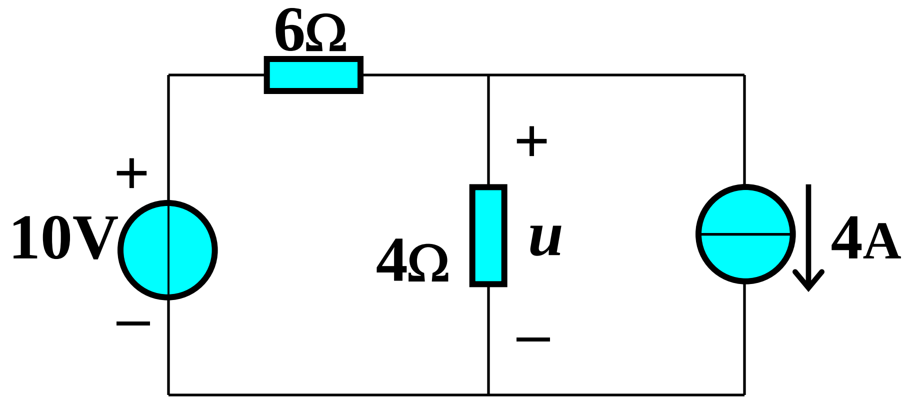
A 短路

B 开路

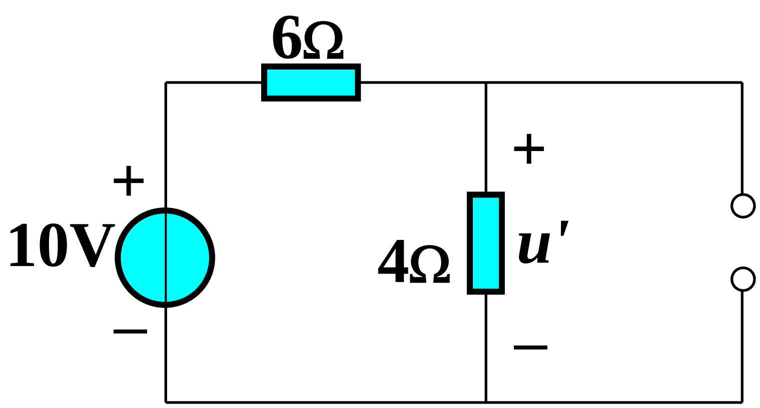
C 保留

提交

例1. 用叠加定理求图中电压u。

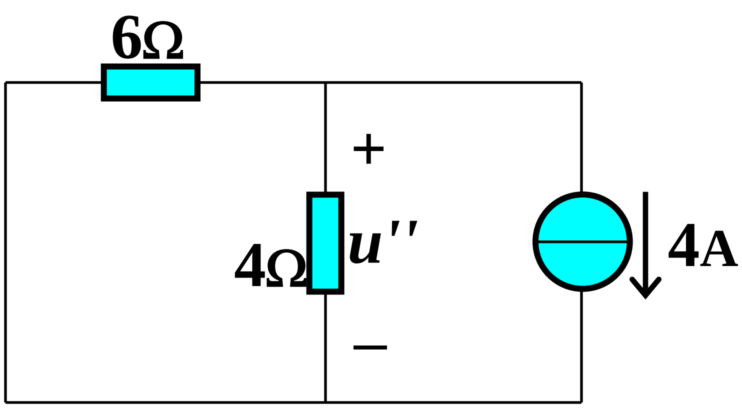


解：(1) 10V电压源单独作用，4A电流源开路



$u'=4V$

(2) 4A电流源单独作用，10V电压源短路



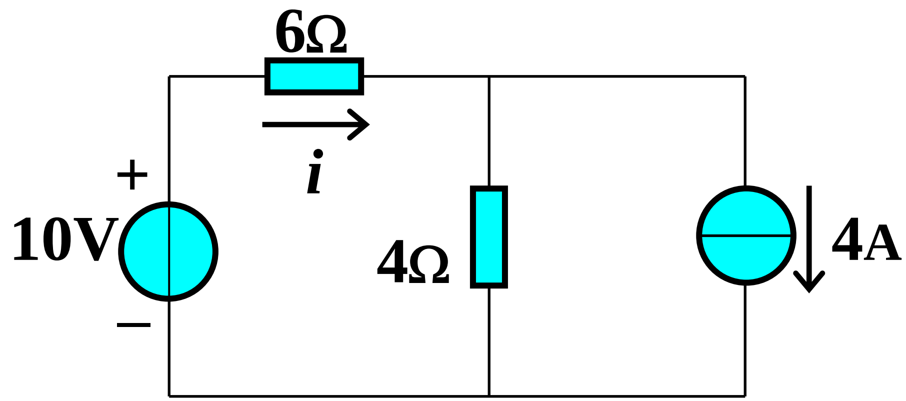
$u''= 4\times(-2.4)= -9.6V$

共同作用：$u=u'+u''= 4+(-9.6)= -5.6V$

单选题 1分

设置

i=__A



A　1.67

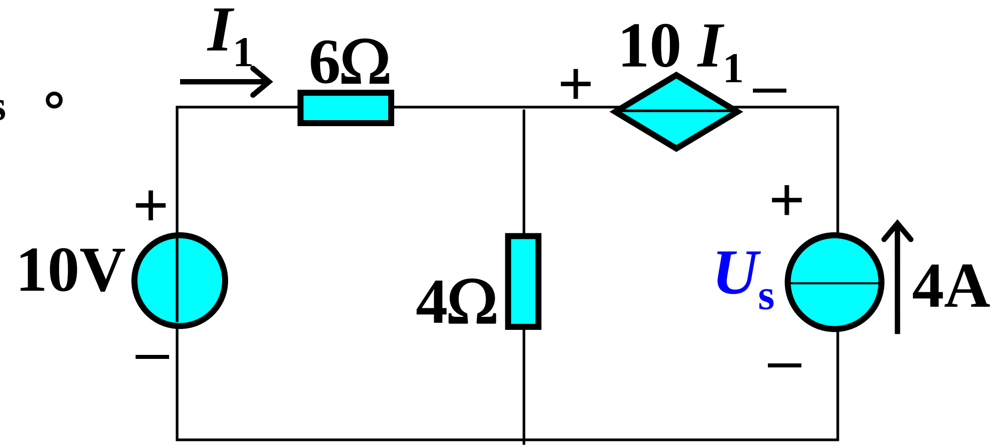
B　4

C　1.4

D　2.6

提交

例2　用叠加定理求电压U_s。

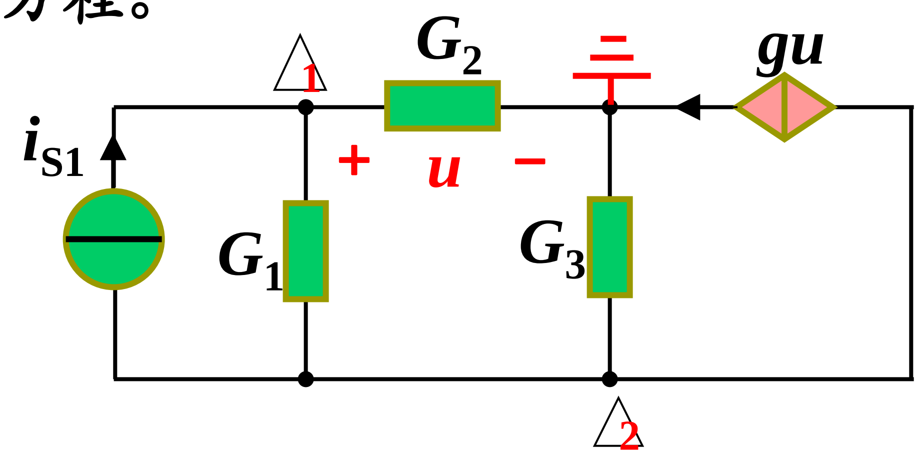


可以将CVVS看作独立源进行叠加吗?

不行
- 受控源不是能量和信号的“源”
- 受控源的系数在电路方程的变量侧

回顾上节课节点法

列写下图含VCCS电路的节点电压方程。

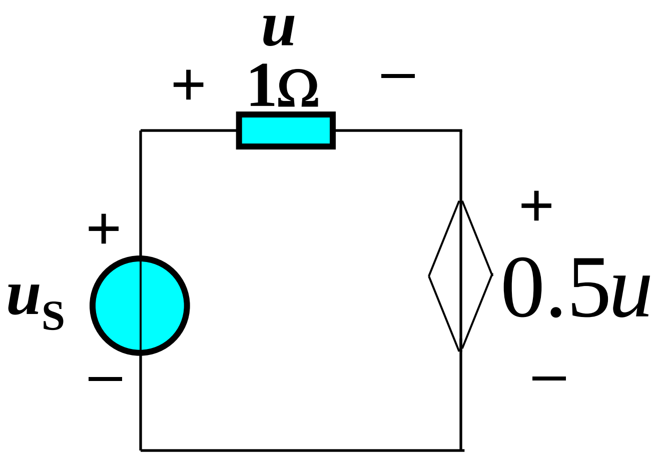


$$(G_1+G_2)u_{n1}-G_1u_{n2}=i_{S1}$$

$$(g-G_1)u_{n1}+(G_1+G_3)u_{n2}=-i_{S1}$$

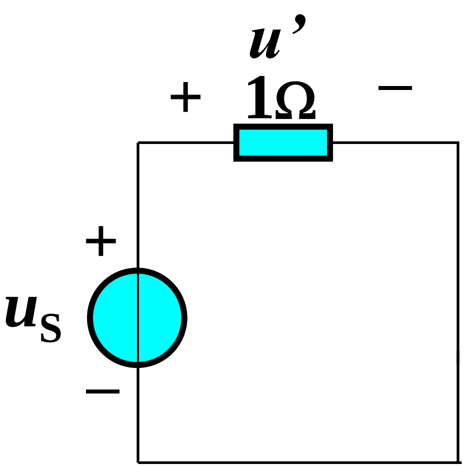
受控源的系数在电路方程的变量侧

一意孤行用受控源叠加求：u

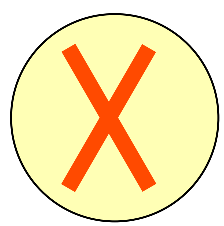


$$\boxed{u+0.5u=u_S \Rightarrow u=0.667u_S}$$

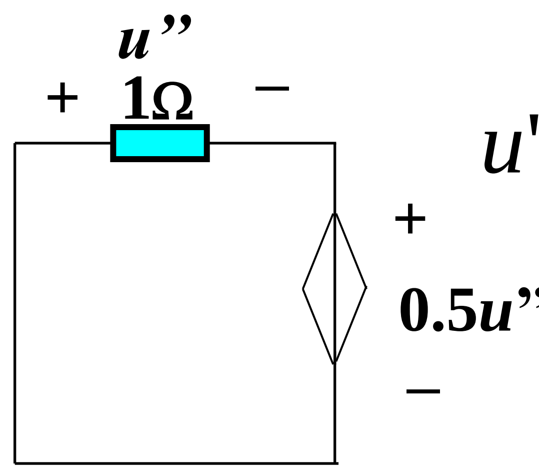
受控源不参与叠加



$$u'=u_S$$

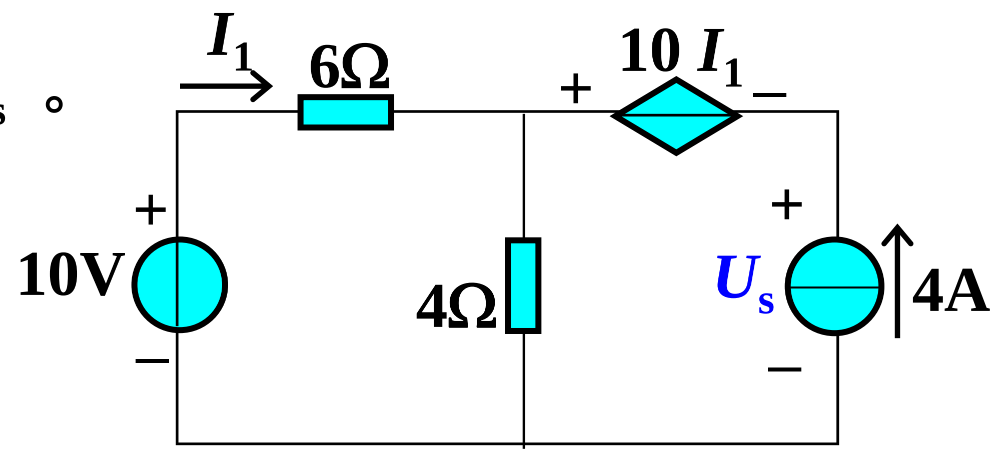


$$u=u'+u''=u_S$$

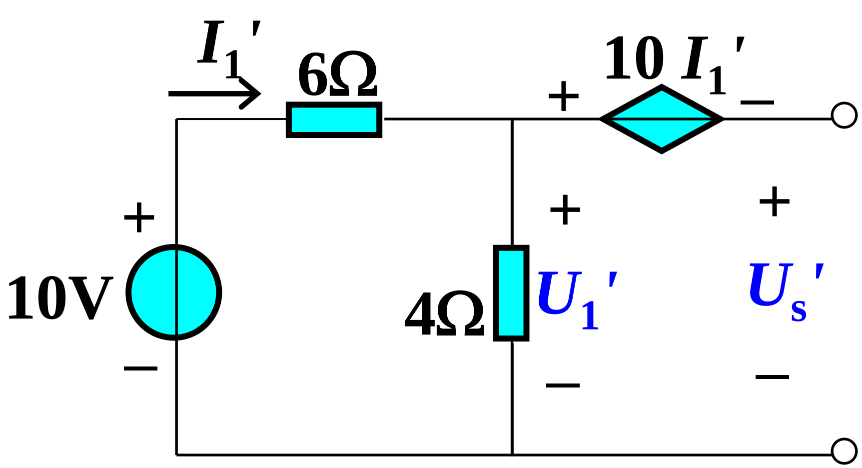


$$u''=0$$

例2　用叠加定理求电压U_s。



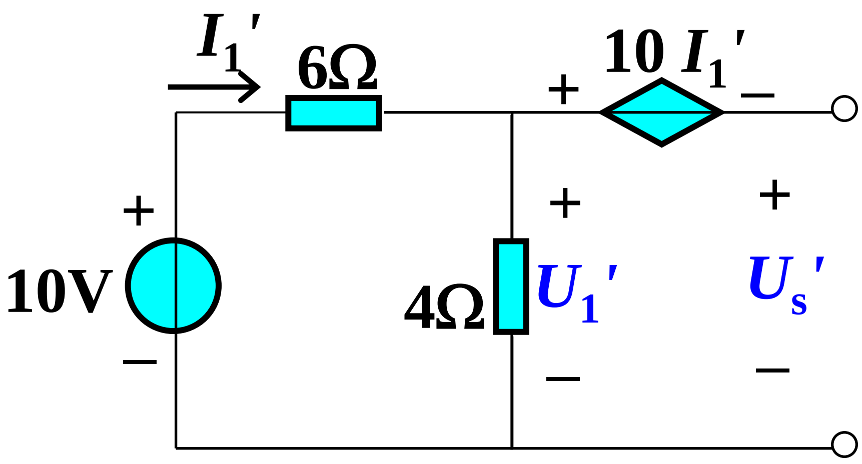
解：　(1) 10V电压源单独作用：



单选题 1分

设置

$U_S' =$ ___ V



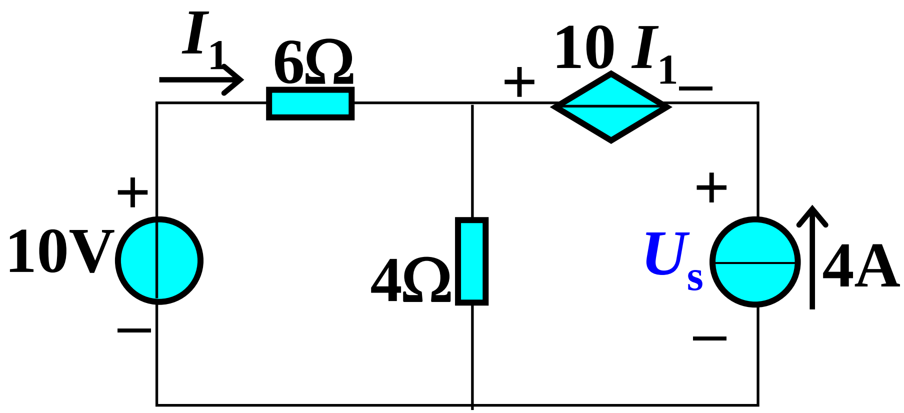
A 4

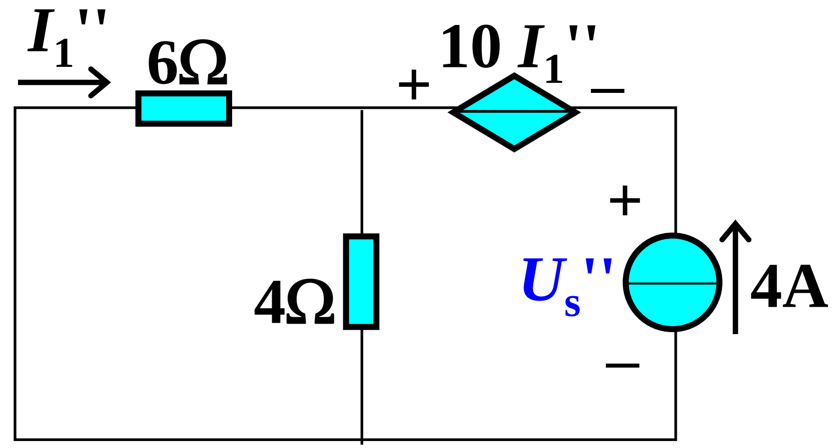
B −4

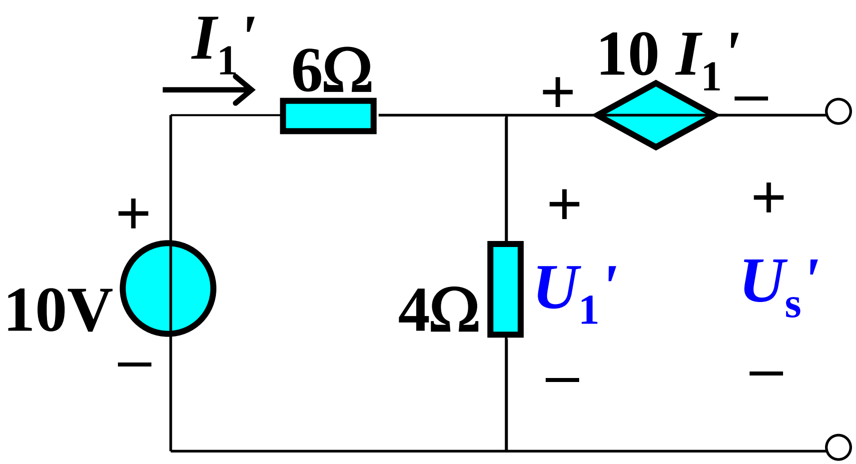
C 14

D −6

提交







$U_s' = -6\text{V}$

$U_s'' = -10I_1'' - 6I_1''$

$$I_1'' = -\frac{4}{4+6} \times 4 = -1.6\text{A}$$

$U_s'' = -10I_1'' - 6I_1'' = 25.6\text{V}$

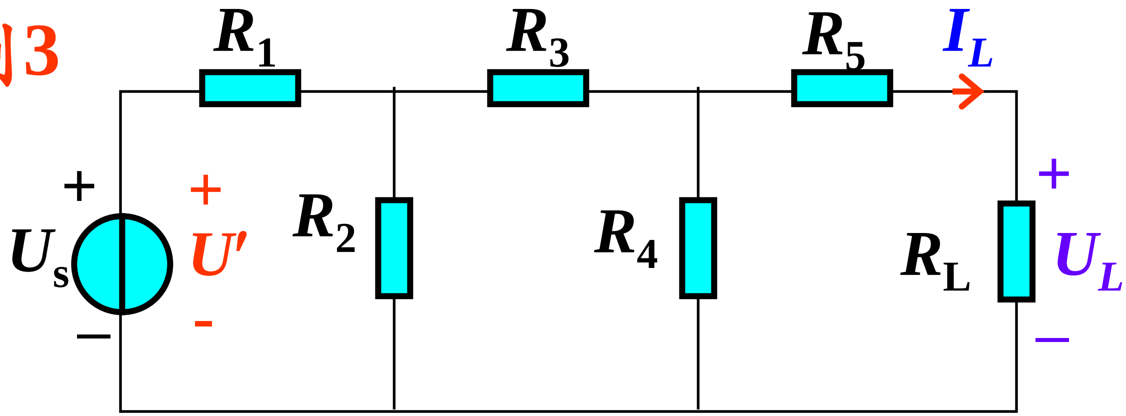
共同作用： $U_s = U_s' + U_s'' = -6 + 25.6 = 19.6\text{V}$

齐性原理（*homogeneity property*）

当电路中只有一个激励(独立源)时，则响应(电压或电流)与激励成正比。

$$u_s \longrightarrow \boxed{R} \longrightarrow r \qquad\qquad ku_s \longrightarrow \boxed{R} \longrightarrow kr$$

例3



已知：如图

求：电流 I_L

解

法一：分压、分流

法二：电源变换

法三：节点/回路

法四：齐性原理（单位电流法）

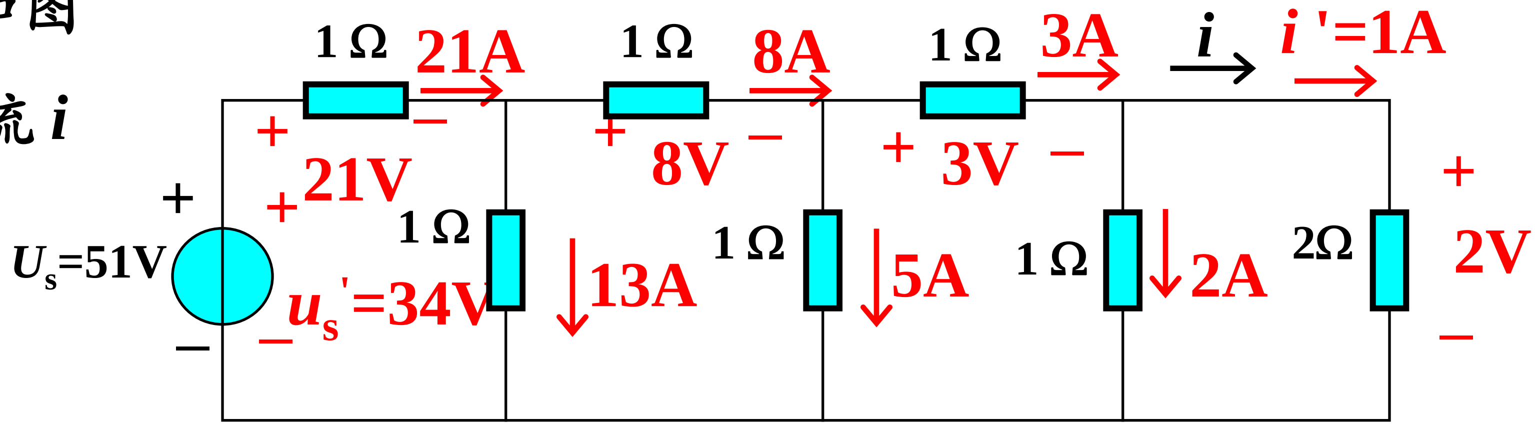
设 $I'_L = 1\text{A} \longrightarrow U'$

$U_S \longrightarrow I_L$

$$\frac{I_L}{1\text{A}} = \frac{U_s}{U'}$$

已知：如图

求：电流 i

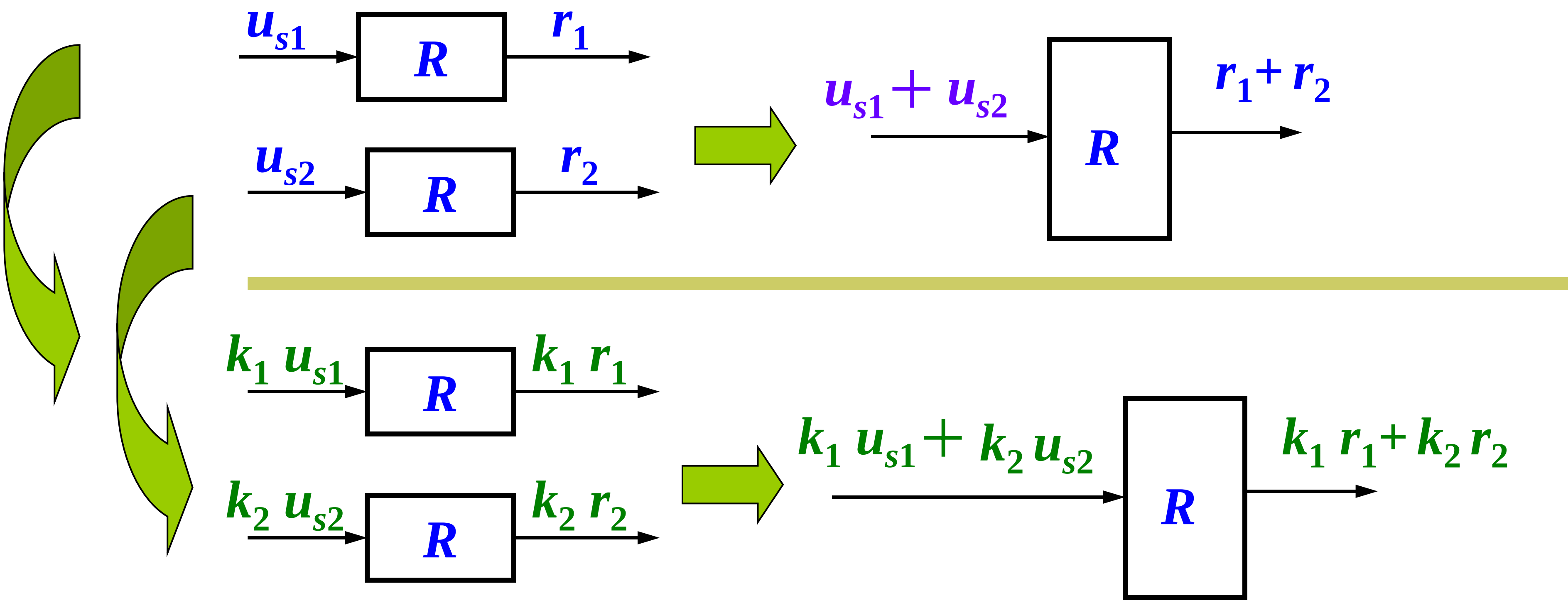


设 $i'=1\text{A}$

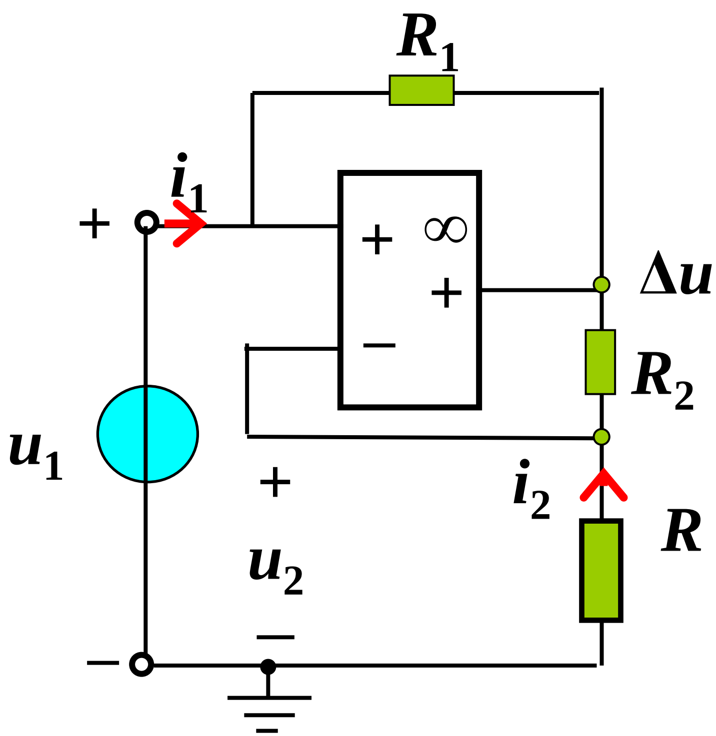
$$\frac{i}{i'}=\frac{u_s}{u_s'}$$

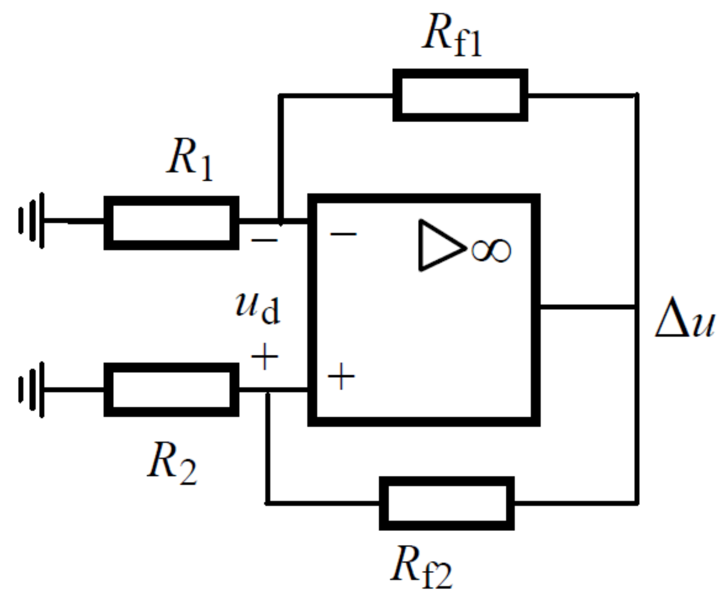
$$i=\frac{u_s}{u_s'}i'=\frac{51}{34}\times1=1.5\text{A}$$

可加性 (additivity property)



叠加定理的应用：运放的反馈深度分析

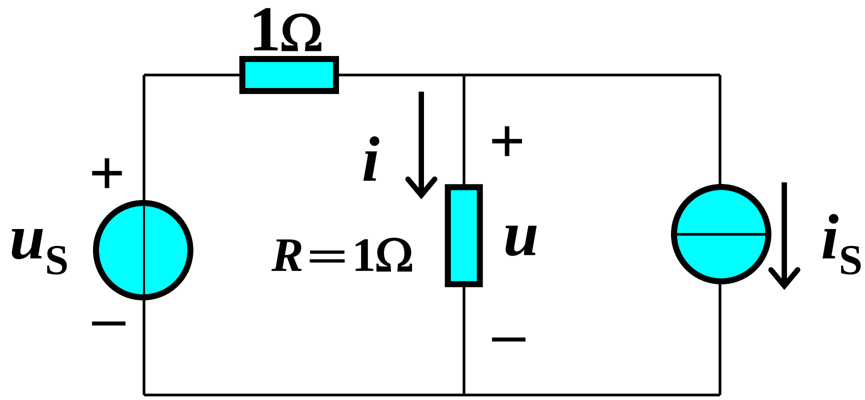




$u_+ = 0$ $\quad u_- = \dfrac{R}{R_2 + R}\Delta u$

$u_+ = \dfrac{R_2}{R_{f2} + R_2}\Delta u$ 谁大 $u_- = \dfrac{R_1}{R_{f1} + R_1}\Delta u$

求：电阻R吸收的功率



$$\begin{cases} u = i \\ (1+1)u = \dfrac{u_S}{1} - i_S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 0.5u_S - 0.5i_S \\ i = 0.5u_S - 0.5i_S \end{cases}$$

$$p_{\text{absorb}} = ui = 0.25u_S^2 + 0.25i_S^2 - 0.5u_S i_S$$

$$p\big|_{u_S=0} = 0.25i_S^2$$

$$p\big|_{i_S=0} = 0.25u_S^2$$

$$\Rightarrow \quad p_{\text{absorb}} \neq p\big|_{i_S=0} + p\big|_{u_S=0}$$

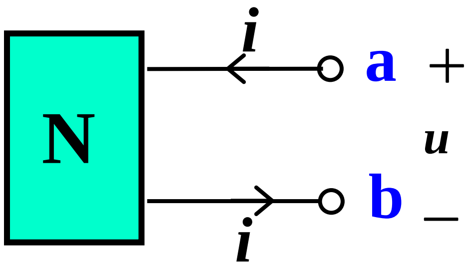
不能用叠加定理求功率

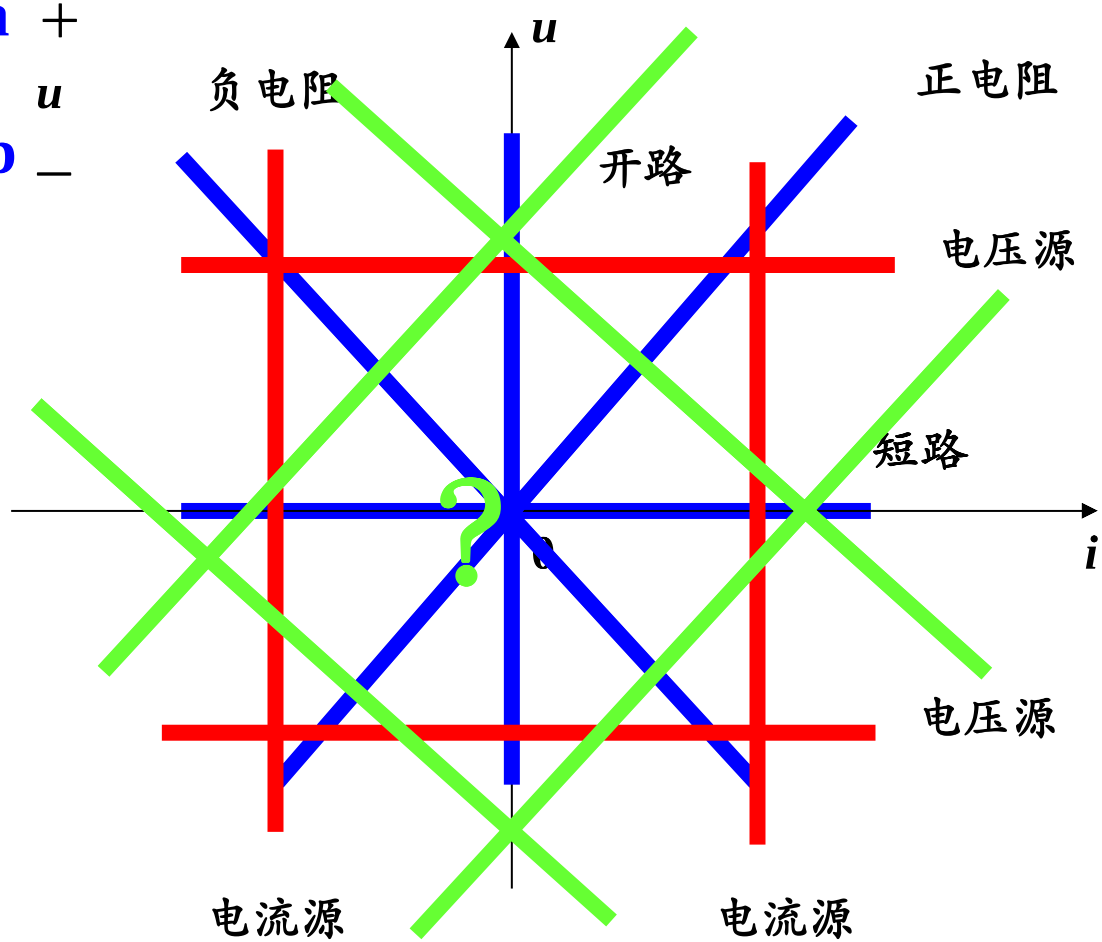
总结叠加定理

- 每个独立源单独作用
  - 电压源不作用：短路
  - 电流源不作用：开路
- 受控源不参与叠加
  - 受控源的系数在等号左边
- 叠加定理不能用于求功率
  - 功率是独立源系数的平方关系

讨论

一般线应该对应怎样的等效电路?





2　戴维南定理和诺顿定理 (*Thevenin-Norton　Theorem*)

戴维南定理

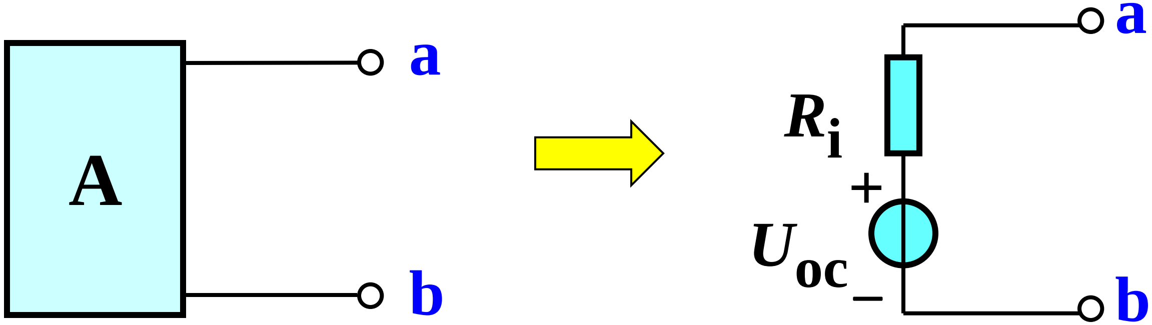
赫姆霍茨(Helmholtz)，1853，德国科学家
戴维南(Thevenin)，1883，法国工程师

物理领域里的希尔伯特

任何一个含有独立电源、线性电阻和线性受控源的一端口网络，

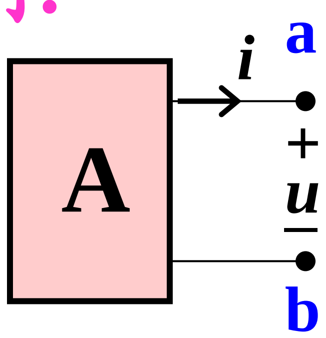
可以用一个独立电压源U_{oc}和电阻R_i的串联组合来等效替代，

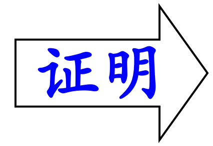
其中电压U_{oc}等于端口开路电压，
电阻R_i等于端口中所有独立电源置零后端口的入端等效电阻。

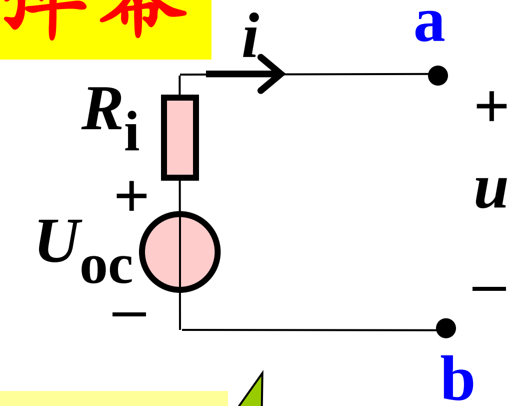


证明:

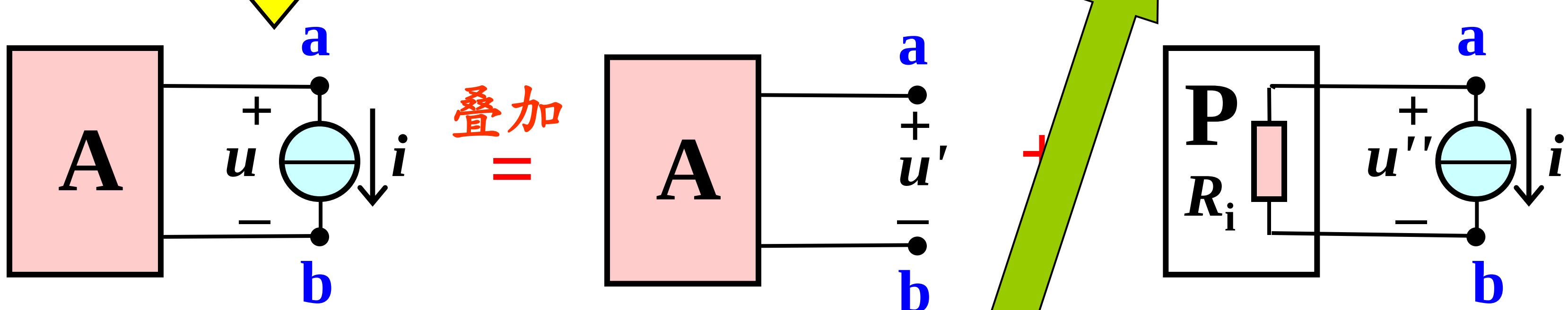
此处可以有弹幕







端口施加任意值电压源会怎么样?



电流源i为零　　网络A中独立源全部置零

$$\begin{cases} u' = U_{oc} & \text{(外电路开路时a、b间开路电压)} \\ u'' = -R_i\, i \end{cases}$$

得 $u = u' + u'' = U_{oc} - R_i\, i$

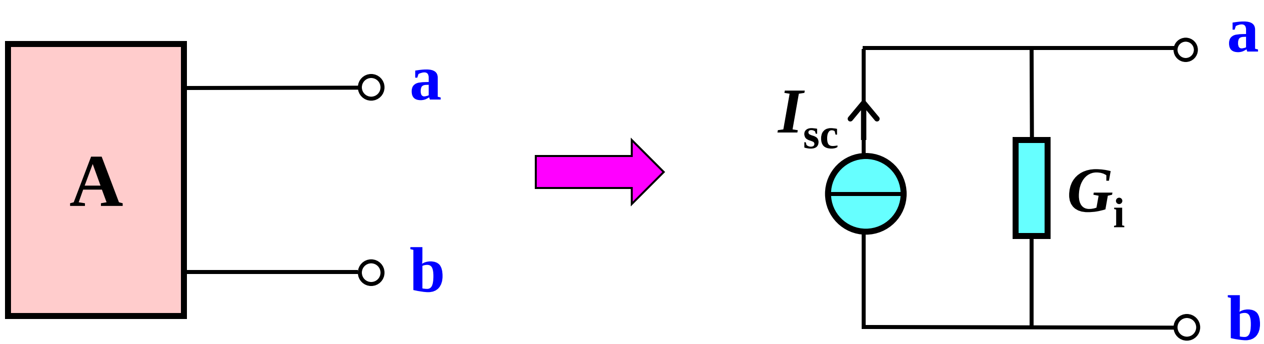
诺顿定理

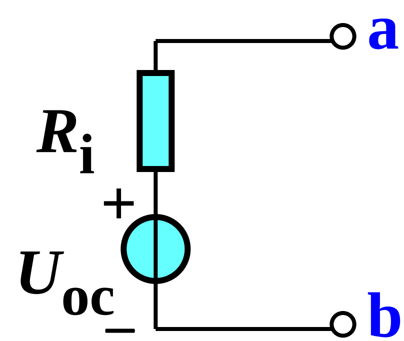
戴维南(Thevenin)，1883，法国工程师
诺顿(Norton)，1926，Bell实验室

任何一个含独立电源、线性电阻和线性受控源的一端口，

可以用一个**电流源和电导的并联**来等效替代，

其中电流源的电流等于该一端口的**短路电流**I_{sc}，
电阻等于把该一端口的全部独立电源置零后的**输入电导**G_i。





诺顿等效电路可由戴维南等效电路经电源等效变换得到。

求入端等效电阻的方法:

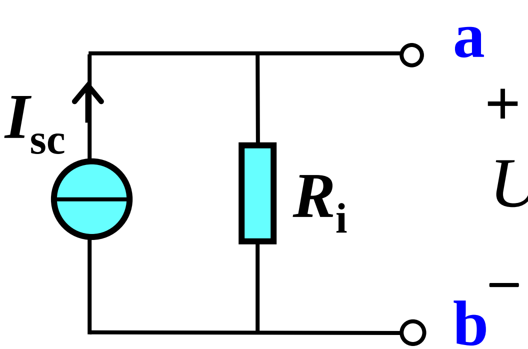
②③ 可用于含受控源的线性电路.

① 无受控源时电阻等效变换(独立源置零)

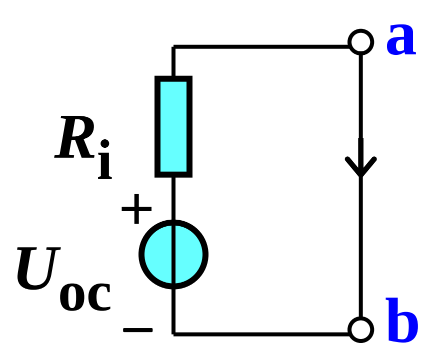
② 加压求流或加流求压(独立源置零)

③ 开路电压/短路电流

$$R_{\mathrm{i}} = \frac{U_{\mathrm{OC}}}{I_{\mathrm{SC}}}$$

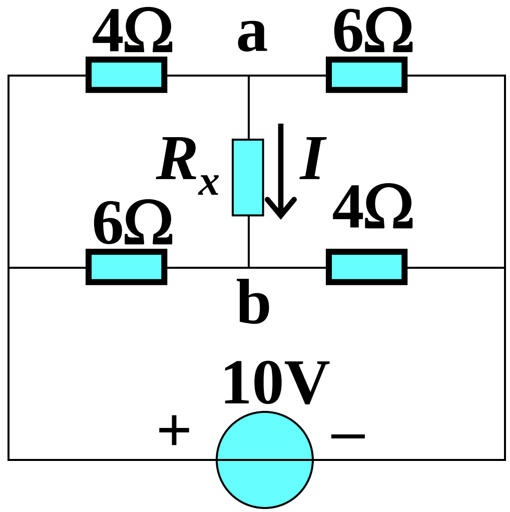


$$U_{\mathrm{OC}} = I_{\mathrm{SC}} R_{\mathrm{i}}$$



$$I_{\mathrm{SC}} = \frac{U_{\mathrm{OC}}}{R_{\mathrm{i}}}$$

例1.

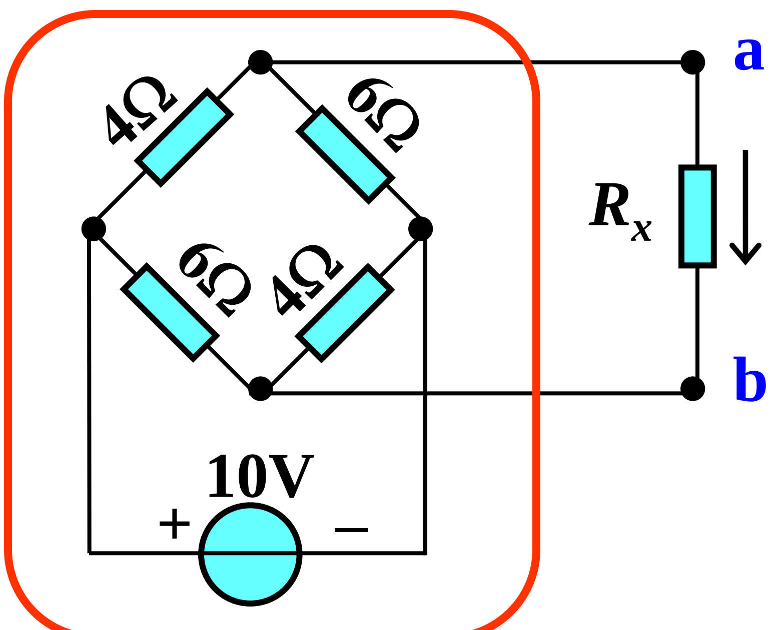


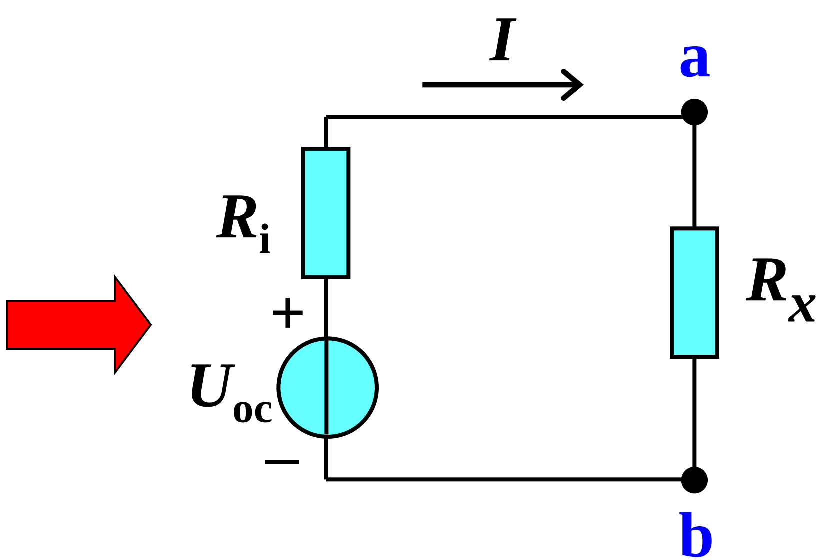
当 R_x=1.2Ω或 5.2Ω时计算I;

Y-Δ变换/节点法/回路法?

解：

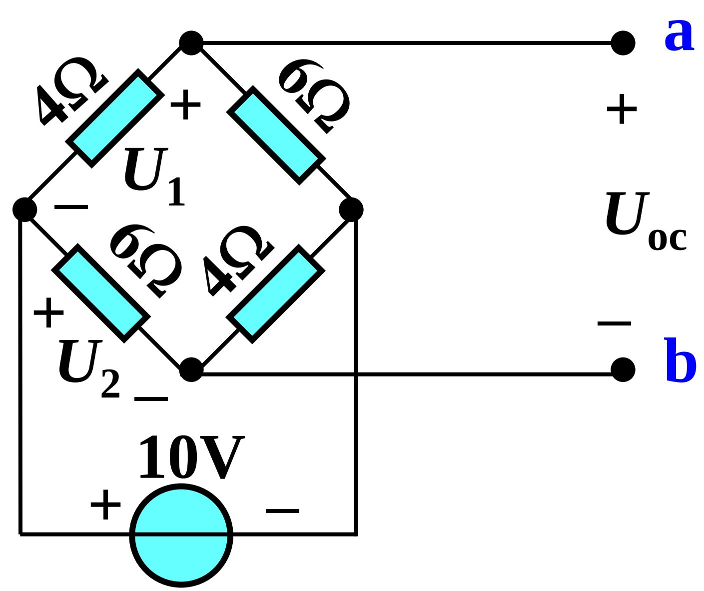
求从 R_x看进去的戴维南等效电路:





设置

U_{oc}=________V



A 10

B –10

C –2

D 2

提交

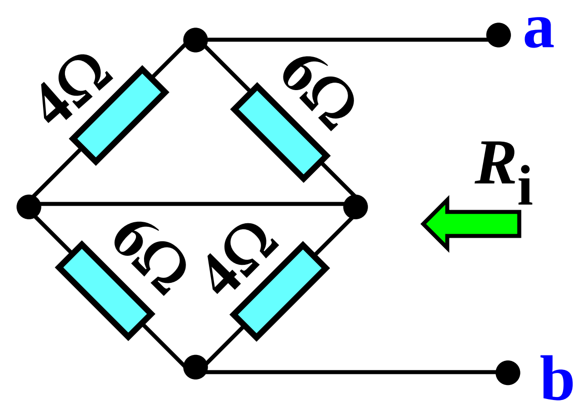
R_i=________Ω

A 4.8

B 10

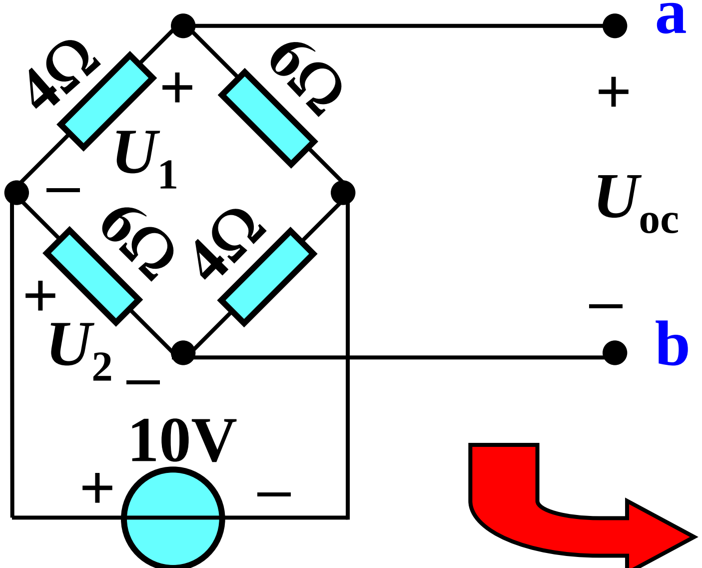
C 2.4

D 5



提交

(1) 开路电压

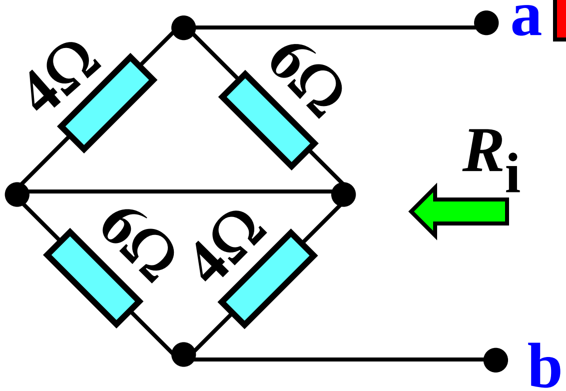


$$U_{oc} = U_1 + U_2$$

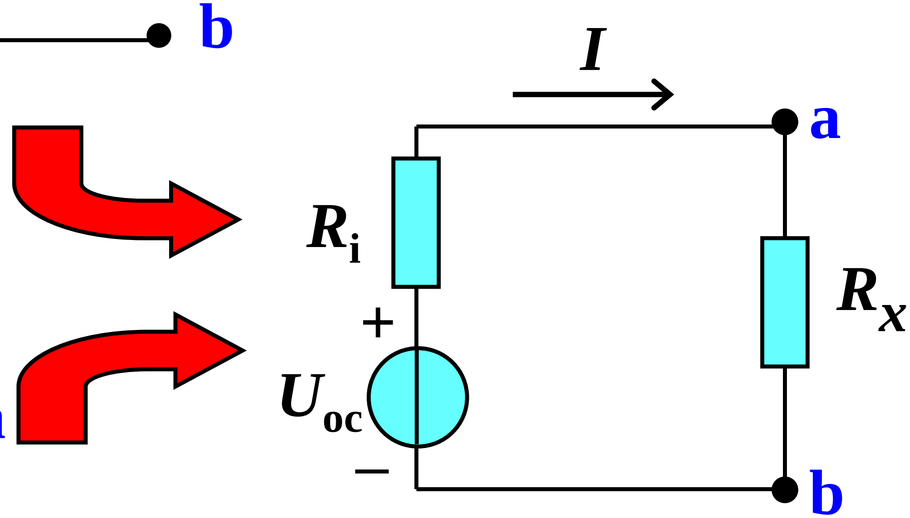
$$= -10\times4/(4+6)+10\times6/(4+6)$$

$$= -4+6=2V$$

(2) 等效电阻 R_i



R_i=4//6+6//4=4.8Ω

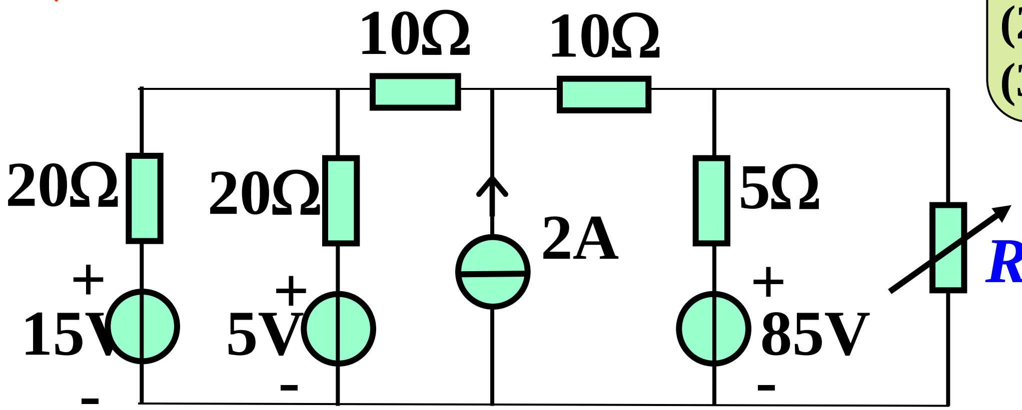


(3) R_x =1.2Ω时，$I= U_{oc}/(R_i + R_x)$ =0.33A

R_x =5.2Ω时，$I= U_{oc}/(R_i + R_x)$ =0.2A

总结戴维南定理适用的题型

例2



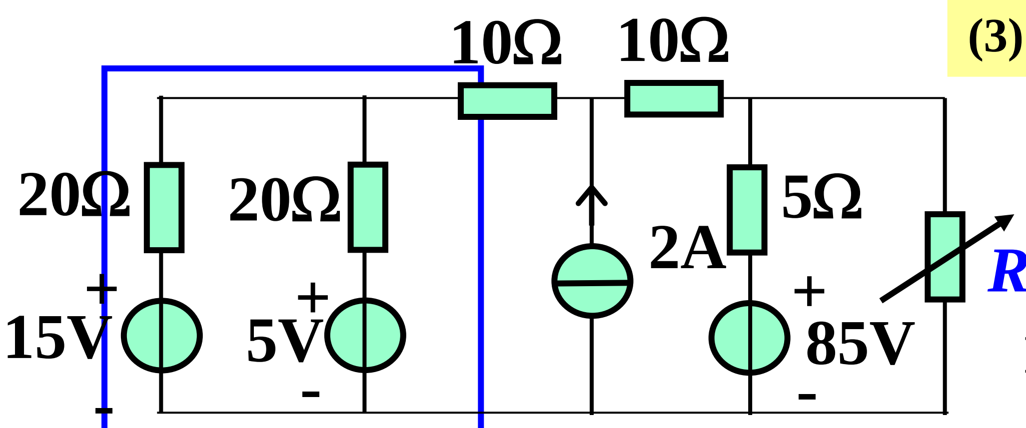
3种方法：
(1)写P与R的函数关系，求导。
(2)电源等效变换。
(3)戴维南定理。

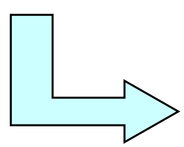
R多大时能从电路中获得最大功率，并求此最大功率。

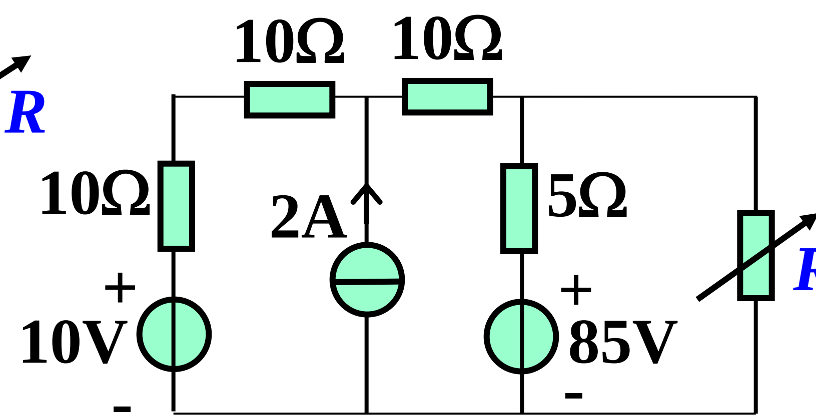
解：

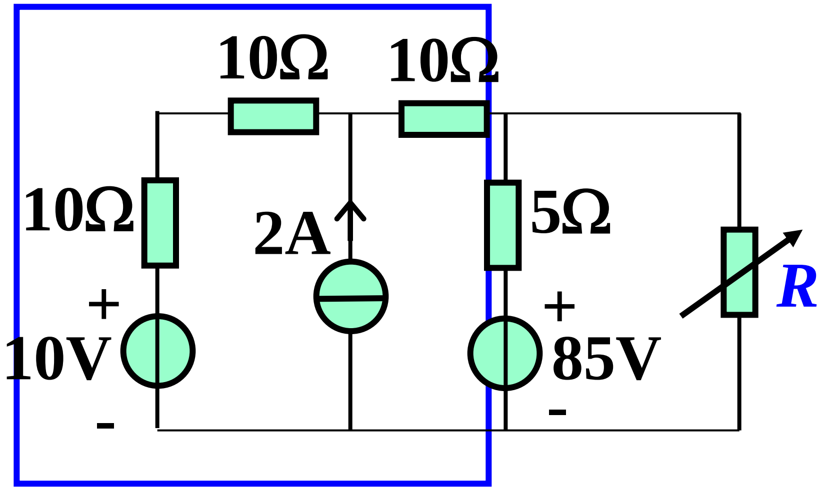
与戴维南定理相关的几个问题

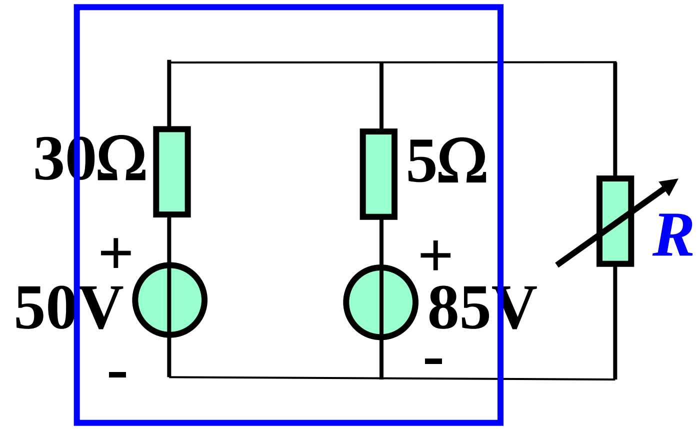
(1)何时用
(2)从哪看
(3)怎么求





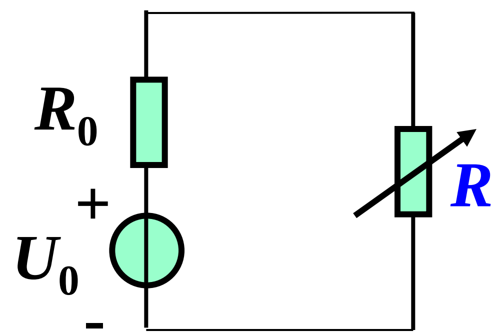






$$U_{oc}=\frac{5}{35}\times 50+\frac{30}{35}\times 85=80\text{V}$$

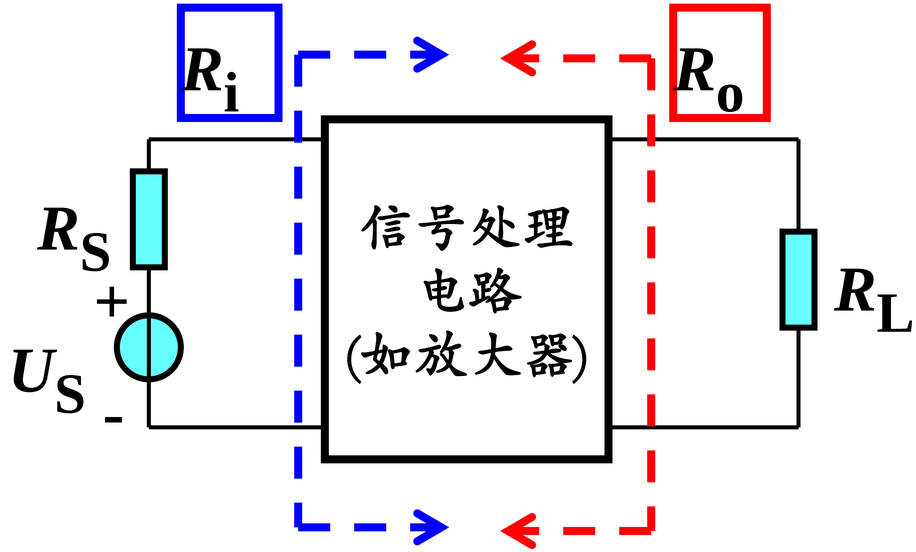
$$R_{i}=\frac{30\times 5}{35}=4.29\,\Omega$$



***R* =4.29Ω获最大功率。**

$$P_{max}=\frac{80^2}{4\times 4.29}=373\text{W}$$

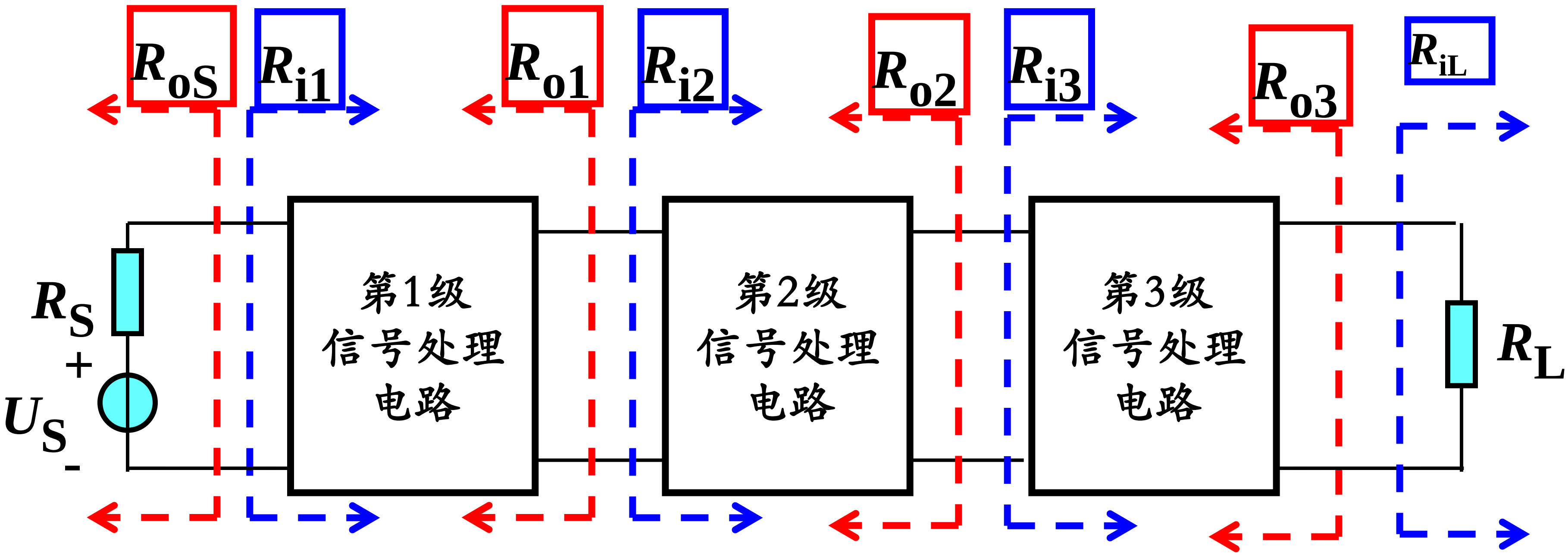
关于输入—输出电阻的讨论(电压型)

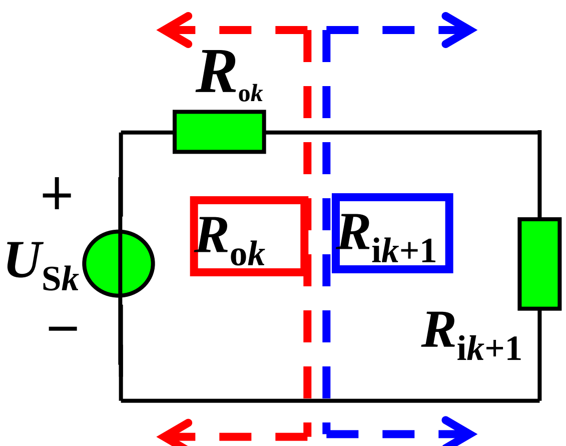


R_i和R_o其实分别是信号处理电路从输入/输出端口看入的戴维南等效电阻

R_i越大约好 ⟶ 对信号源的影响小

R_o越小约好 ⟶ 带载能力强





每一级信号处理电路的R_i为

从信号输入端看入的无独立源一端口等效电阻

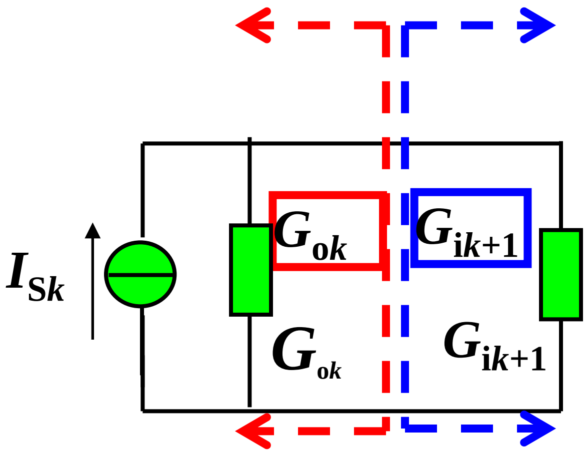
每一级信号处理电路的R_o为

从信号输出端看入的有独立源一端口戴维南等效电阻

R_i越大约好 → 从前一级信号处理电路获得的电压大 → 对前级影响小

R_o越小约好 → 给后一级信号处理电路的电压大 → 带载能力强

关于输入—输出电阻的讨论(电流型)



自己思考

G_i越大约好 ⟶ 从前一级信号处理电路获得的电流大

⟶ 对前级影响小

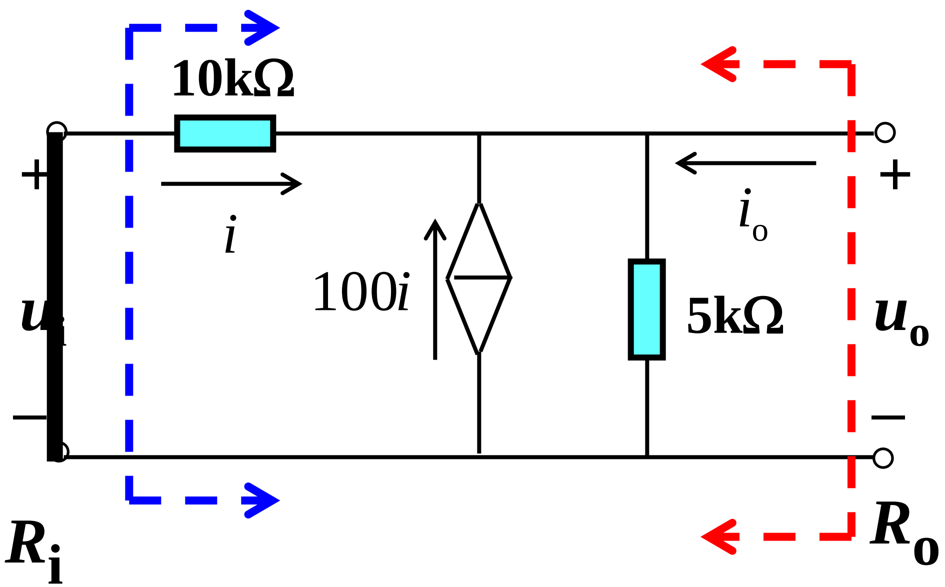
G_o越小约好 ⟶ 给后一级信号处理电路的电流大

⟶ 带载能力强

例3.

双极型晶体管共集放大器小信号等效电路

求图示放大器的输入和输出电阻



No free lunch

$$10\text{k}i + 5\text{k}(100+1)i = u_i \Rightarrow R_i = \frac{u_i}{i} = 515\text{k}\Omega$$

对信号源的影响小

$$\begin{cases} i = -\dfrac{u_o}{10\text{k}} \\ i_o + (100+1)i = \dfrac{u_o}{5\text{k}} \end{cases} \Rightarrow R_o = \frac{u_o}{i_o} = 97\Omega$$

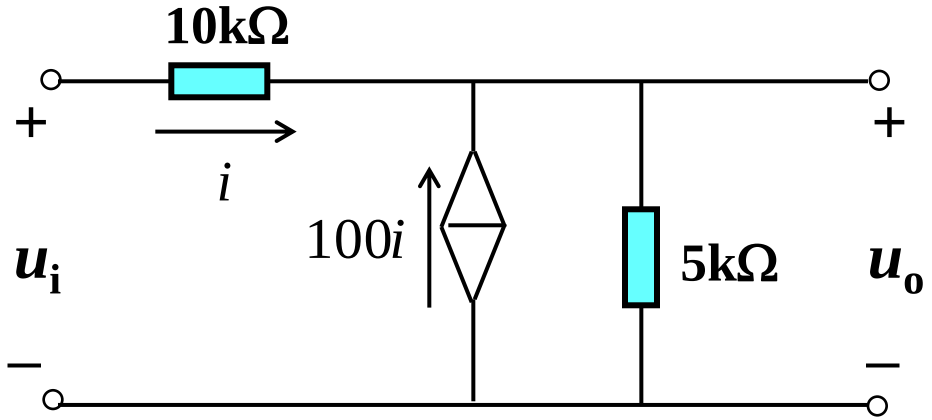
带载能力强

单选题 1分

设置

双极型晶体管共集放大器小信号等效电路的电压放大倍数 u_o/u_i=____.

最先答对的有红包



A 0.98

B 1.02

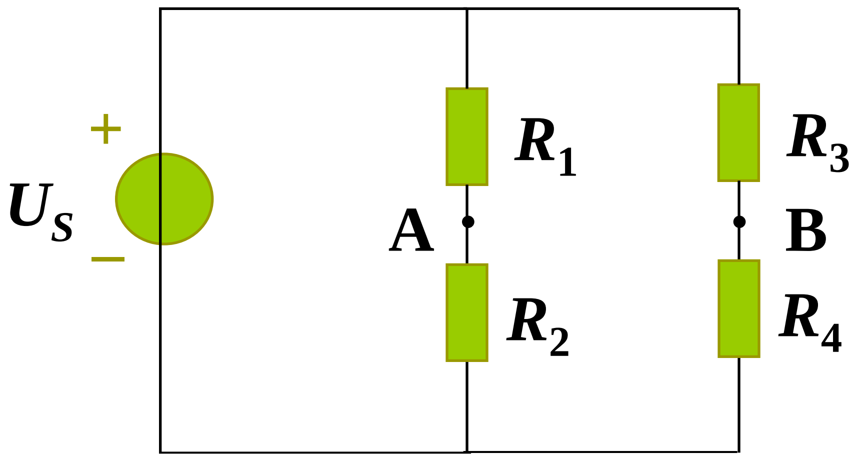
C 5

D 0.33

这说明什么？

提交

戴维南定理的应用：平衡电桥



$$U_A = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_s \qquad U_B = \frac{R_4}{R_3 + R_4} U_s$$

如果

$$R_1 R_4 = R_2 R_3$$

A-B等电位点 ⇨ **电桥平衡**

此处可以有弹幕

等电位点间接任意电阻(含开短路)不影响电路的电压电流分布？？？