线性代数 第24讲

12月1日

对称正定矩阵

上一讲要点回顾

正定矩阵

合同标准型

例题选讲

实对称矩阵的性质

1. 特征值均为实数

2. 属于不同特征值的特征向量互相正交

3. 对 n 阶实对称矩阵 A，存在 n 阶正交矩阵 Q 和实对角矩阵 Λ，使得 $A = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$.

意味着每个特征值的几何重数一定等于代数重数.

瑞雷（Rayleigh）商

定义 6.1.7 (Rayleigh 商) 给定实矩阵 A 和非零向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，实数 $\dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}$ 称为 $\boldsymbol{x}$ 关于 A 的 **Rayleigh 商**.

若 A 和 B 正交相似，即存在正交矩阵 Q 使得 $Q^{\mathrm{T}} A Q = B$，则

$$\frac{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} B \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}} = \frac{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} A Q \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}} = \frac{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} A Q \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} Q \boldsymbol{y}} = \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}},$$

即 $\boldsymbol{x} = Q\boldsymbol{y}$ 关于 A 的 Rayleigh 商等于 $\boldsymbol{y}$ 关于 B 的 Rayleigh 商.

命题 6.1.8 设实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$，相应的特征向量为 $\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_n$，则

$$\lambda_1 = \max_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}, \qquad \lambda_i = \max_{\substack{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \perp \mathrm{span}(\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_{i-1})}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}, i = 2, \cdots, n.$$

类似地，

$$\lambda_n = \min_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}, \qquad \lambda_i = \min_{\substack{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \perp \mathrm{span}(\boldsymbol{q}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{q}_n)}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}, i = 1, \cdots, n-1.$$

对称正定矩阵

定义6.2.1（正定矩阵） 给定 $\boldsymbol{n}$ 阶实矩阵 $\boldsymbol{A}$，如果对任意非零向量 $\boldsymbol{x} \in \mathrm{R}^n$，都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 正定.

命题 6.2.2 对实对称矩阵 A，以下叙述等价：

1. A 正定；
2. A 的特征值都是正数；
3. 存在可逆矩阵 T，使得 $A = TT^{\mathrm{T}}$；
4. A 有 $\mathrm{LDL^T}$ 分解，且 D 的对角元素都是正数；
5. A 的顺序主子式都是正数；
6. A 的顺序主子阵都正定.

命题 6.2.2 对实对称矩阵 A，以下叙述等价：

1. A 正定；
2. A 的特征值都是正数；
3. 存在可逆矩阵 T，使得 $A = TT^{\mathrm{T}}$；
4. A 有 $\mathrm{LDL^T}$ 分解，且 D 的对角元素都是正数；
5. A 的顺序主子式都是正数；

证. 采用轮转证法.

"$1 \Rightarrow 2$"：对任意特征值 λ，任取对应的特征向量 $\boldsymbol{x}$，则 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > 0$，于是 $\lambda > 0$.

"$2 \Rightarrow 3$"：对称矩阵 A 有谱分解 $A = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$，由于 Λ 的对角元素是特征值且都是正数，因此存在对角矩阵 D 使得 $D^2 = \Lambda$. 令 $T = QD$，即得结论.

"$3 \Rightarrow 4$"：设 T^{T} 的 QR 分解为 $Q\widetilde{L}^{\mathrm{T}}$，则 $A = \widetilde{L}Q^{\mathrm{T}}Q\widetilde{L}^{\mathrm{T}} = \widetilde{L}\widetilde{L}^{\mathrm{T}}$. 令 $\widetilde{L} = L\widetilde{D}$，其中 L 是单位下三角矩阵，$\widetilde{D}$ 是对角矩阵，则有 $A = L\widetilde{D}^2L^{\mathrm{T}}$. 令 $D = \widetilde{D}^2$ 即得.

"$4 \Rightarrow 5$"：由 A 有 $\mathrm{LDL^T}$ 分解，按第 i 个顺序主子阵对 A 分块，有

$$\begin{bmatrix} A_i & A_{21}^{\mathrm{T}} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = A = LDL^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} L_i & \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_i & \\ & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_i & \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

计算即得 $A_i = L_iD_iL_i^{\mathrm{T}}$，因此第 i 个顺序主子式

$$\det(A_i) = \det(L_i)\det(D_i)\det(L_i^{\mathrm{T}}) = \det(D_i) > 0.$$

顺序主子式

设 A∈M$_n$, 子式 $P_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}, i = 1,2,\cdots,n.$

称为矩阵 A 的第 i 阶顺序主子式.

例如三阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的各阶顺序主子式为

$$P_1 = 2, P_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3, P_3 = |A| = 1.$$

5. A 的顺序主子式都是正数；

6. A 的顺序主子阵都正定.

"$5 \Rightarrow 6$"：对 n 用数学归纳法．当 $n=1$ 时，显然，现假设命题对任意 $n-1$ 阶实对称矩阵成立．对 n 阶实对称矩阵 A，对 A 分块 $A=\begin{bmatrix} A_{n-1} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} & a_{nn} \end{bmatrix}$，则 A_{n-1} 的顺序主子式都是正数，$\det(A)$ 也是正数．根据归纳假设，A_{n-1} 的顺序主子阵都正定，只需再证 A 正定．由于 A_{n-1} 正定，利用 "$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$"，即得 A_{n-1} 可逆．做分块矩阵 LU 分解，如 (1.6.5)，有

$$A=\begin{bmatrix} A_{n-1} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & \\ \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} A_{n-1}^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{n-1} & \\ & a_{nn}-\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} A_{n-1}^{-1} \boldsymbol{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & A_{n-1}^{-1} \boldsymbol{a} \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

计算行列式即有 $a_{nn}-\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} A_{n-1}^{-1} \boldsymbol{a}=\frac{\det(A)}{\det(A_{n-1})}>0$．容易验证 $\begin{bmatrix} A_{n-1} & \\ & a_{nn}-\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} A_{n-1}^{-1} \boldsymbol{a} \end{bmatrix}$ 正定，因此 A 正定.

"$6 \Rightarrow 1$"：显然. □

定义 6.2.3 给定 n 阶实矩阵 A，如果对任意非零向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，都有

1. $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} > 0$，则称矩阵 A **正定**，如前定义；
2. $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} \geqslant 0$，则称矩阵 A **半正定**；
3. $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} < 0$，则称矩阵 A **负定**；
4. $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} \leqslant 0$，则称矩阵 A **半负定**；

如果 A 不满足以上任何一种条件，则称 A **不定**.

命题 6.2.4 对实对称矩阵 A，以下叙述等价：

1. A 半正定；
2. A 的特征值都是非负数；
3. 存在矩阵 T，使得 $A = TT^{\mathrm{T}}$；
4. A 存在 $\mathrm{LDL}^{\mathrm{T}}$ 分解，且 D 的对角元素都是非负数.

命题 6.2.5 对 n 阶实对称矩阵 A，如果存在 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$，使得 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} > 0, \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{y} < 0$，则存在非零向量 $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$，使得 $\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{z} = 0$.

证. 拟设 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + k\boldsymbol{y}$. 显然 $\boldsymbol{z} \neq \mathbf{0}$. 考虑 $\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} + 2k\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{y} + k^2 \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{y} = 0$. 注意判别式 $(2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{y})^2 - 4(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{y}) > 0$，故方程有实数根. 因此存在 $k \in \mathbb{R}$，使得拟设的 $\boldsymbol{z}$ 满足条件. $\square$

定义 6.2.6 (合同) 对方阵 A, 如果存在可逆矩阵 X 使得 $X^{\mathrm{T}}AX = B$, 则称 A 和 B **合同**, 或 A 合同于 B.

命题 6.2.7 方阵的合同关系是等价关系.

命题 6.2.8 对实对称矩阵 A, 存在可逆矩阵 X, 使得 $X^{\mathrm{T}}AX = J = \begin{bmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0 \end{bmatrix}$,

其中 $r = \operatorname{rank}(A), 0 \leqslant p \leqslant r$.

证. 根据实对称矩阵的谱分解, 存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ = \Lambda$. 取置换矩阵 P, 使得 $P^{\mathrm{T}}\Lambda P = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, 其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_p > 0, \lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_r < 0, \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$. 令 $Y = \operatorname{diag}(\frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{|\lambda_r|}}, 1, \cdots, 1)$, 易知 $Y^{\mathrm{T}}\Lambda Y = \begin{bmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0 \end{bmatrix} = J$. 令 $X = QPY$, 则 $X^{\mathrm{T}}AX = (QPY)^{\mathrm{T}}A(QPY) = J$. $\square$

命题 6.2.8 中的 J 称为实对称矩阵 A 的**合同标准形**.

定理6.2.9（Sylvester 惯性定律）实对称矩阵的合同标准形唯一，且它的合同标准形中正、负、零对角元的个数分别和它的正、负、零特征值的个数相等.

证明. 只需证明合同标准形唯一，就可以得到合同标准形中正、负、零对角元的个数与正、负、零特征值的个数分别相等.

设该实对称矩阵为 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，而 $r = \operatorname{rank}(A)$，且它有两个合同标准形

$J_1 = X_1^T AX_1$, $J_2 = X_2^T AX_2$

根据合同关系的等价性，J_1 合同于 J_2. 由于合同是特殊的相抵，因此 J_1, J_2 的秩相等，即零对角元的个数相等.

故可记 $J_1 = \begin{bmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0 \end{bmatrix}$, $J_2 = \begin{bmatrix} I_q & & \\ & -I_{r-q} & \\ & & 0 \end{bmatrix}$. 下面来证明 $p = q$，即可推出合同标准形唯一.

设 $\mathcal{M}$ 是 X_1 的前 p 列生成的子空间，$\mathcal{N}$ 是 X_2 的第 $q+1$ 到 n 列生成的子空间. 由于 X_1 是可逆矩阵，其列线性无关，因此 $\dim\mathcal{M} = p$. 类似地，$\dim\mathcal{N} = n-q$. 对任意非零 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}$，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} > 0$；对任意非零 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{N}$，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} \leqslant 0$. 因此 $\mathcal{M}\cap\mathcal{N} = \{\mathbf{0}\}$. 由此不难得到 $\mathcal{M}$ 的一组基与 $\mathcal{N}$ 的一组基线性无关. 于是 $p+n-q = \dim\mathcal{M} + \dim\mathcal{N} \leqslant \dim\mathbb{R}^n = n$. 由此立得 $p \leqslant q$. 由 J_1, J_2 地位相同，同理有 $q \leqslant p$，因此 $p = q$. □

实对称矩阵的合同标准形中，正对角元 1 的数目，即 p，称为 A 的**正惯性指数**；负对角元 -1 的数目，即 $r-p$，称为 A 的**负惯性指数**；三元组 $(p, r-p, n-r)$ 称为 A 的**惯性指数**或**惯量**. 因此，正负惯性指数是实对称矩阵在合同变换下的不变量，而实对称矩阵的合同标准形由它的正负惯性指数唯一决定. 容易看出，正惯性指数、负惯性指数分别等于正特征值、负特征值的个数. 特别地，由命题 6.2.2 可知，n 阶实对称矩阵 A 正定，当且仅当 A 的正惯性指数 $p=n$，当且仅当 A 的合同标准形是 I_n.

根据命题 6.2.8 和定理 6.2.9，n 阶实对称矩阵在合同变换下的等价类数目有限，只有 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 类.

命题 6.2.2 对实对称矩阵 A，以下叙述等价：

1. A 正定；
2. A 的特征值都是正数；
3. 存在可逆矩阵 T，使得 $A=TT^{\mathrm{T}}$；
4. A 有 $\mathrm{LDL}^{\mathrm{T}}$ 分解，且 D 的对角元素都是正数；
5. A 的顺序主子式都是正数；
6. A 的顺序主子阵都正定.

命题 6.2.8 对实对称矩阵 A，存在可逆矩阵 X，使得 $X^{\mathrm{T}}AX=J=\begin{bmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0 \end{bmatrix}$，

其中 $r=\operatorname{rank}(A), 0\leqslant p\leqslant r$.

定理6.2.9（Sylvester 惯性定律）实对称矩阵的合同标准形唯一，且它的合同标准形中正、负、零对角元的个数分别和它的正、负、零特征值的个数相等.

例 6.2.10 (配平方) 给定 $\mathbb{R}$ 上齐次二次函数 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$，证明 f 可以写成齐次线性函数的平方的和差形式. ☺

证. 令 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}, A=\left[\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}\right]$，则 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}$. 根据命题 6.2.8 ，存在可逆矩阵 $T=\left[t_{ij}\right]$，使得 $A=T^{\mathrm{T}}JT$. 因此 $f(\boldsymbol{x})=(T\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}JT\boldsymbol{x}$. 令 $\boldsymbol{y}=T\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$，那么 $y_i=\sum\limits_{j=1}^{n}t_{ij}x_j$ 是齐次线性函数，而 $f(\boldsymbol{x})=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$，其中 p 是 A 的正惯性指数，r 是 A 的秩. □

注 6.2.11 齐次二次函数 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ 称为自变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的 二次型。

例1　实对称矩阵满足 $A^2-3A+2I=0$，证明 A 是正定矩阵.

证明　设 λ 是 A 的任意一个特征值，x 是 λ 所属的特征向量，则 $Ax=\lambda x$，所以 $A^2x=A(\lambda x)=\lambda Ax=\lambda^2 x$，

利用已知条件 $A^2-3A+2I=0$，可知 $(\lambda^2-3\lambda+2)x=0$，

因为 x 为特征向量，所以 $x\neq 0$，故 $\lambda^2-3\lambda+2=0$，

所以 $\lambda=2$，或 $\lambda=1$. 由正定矩阵的性质可知 A 是正定矩阵.

例2　设 A 是正定矩阵，则存在正定阵 B 满足 $B^2=A$.

证明　实对称矩阵可正交对角化，存在正交阵 Q 使得 $A=Q^TDQ$，

其中 D 是对角线元素为 A 的所有特征值的对角矩阵，

由正定矩阵的特征值均为正，可知 D 的对角线上的所有数为正数，

所以存在对角线上数均为正数的对角矩阵 F 使得 $F^2=D$，

所以 $A=Q^TDQ=Q^TFQQ^TFQ=B^2$，

这里 $B=Q^TFQ$ 为正定矩阵.

例3　设 A 是 n 阶正定矩阵，B 是 n 阶实对称矩阵，则存在可逆矩阵 P 使得 $P^TAP = I$，P^TBP 为对角阵.

证明　由正定矩阵与单位矩阵相合，可知存在可逆矩阵 C，使得 $C^TAC = I$，$D = C^TBC$ 仍为实对称矩阵，

存在正交阵 Q 使得 $Q^TDQ = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$，

这里 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是 D 的所有特征值.

记 $P = CQ$，则 P 是可逆矩阵 P，且 $P^TAP = I$，

$P^TBP = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$，

例4　设 $A \in M_{m,n}(R)$，且 A 的秩为 n，证明 A^TA 正定.

证明　由 $(A^TA)^T = A^TA$ 知 A^TA 是 n 阶实对称阵，

因为 $x^TA^TAx = (Ax)^TAx \geq 0$，且 $(Ax)^TAx = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$.

由 $r(A) = n$ 知齐次线性方程组 $Ax = 0$ 只有零解.

从而有 $Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$，即 $(Ax)^TAx = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

所以 A^TA为正定矩阵.

作 业（12月1日）

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

练习6.2

1(4,5,6)，2，3(1,3,5,7)，4，5，6，10，11，15

12月6日提交

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~