第12讲
状态方程
任意激励作用下动态电路的求解（1）

本课程不讨论状态方程的解法

1 状态变量和状态方程

2 状态方程法和经典法的关系

3 单位阶跃函数与单位阶跃响应

4 单位冲激函数

1 状态变量与状态方程
—分析动态电路的另一种方法

(1) 状态变量

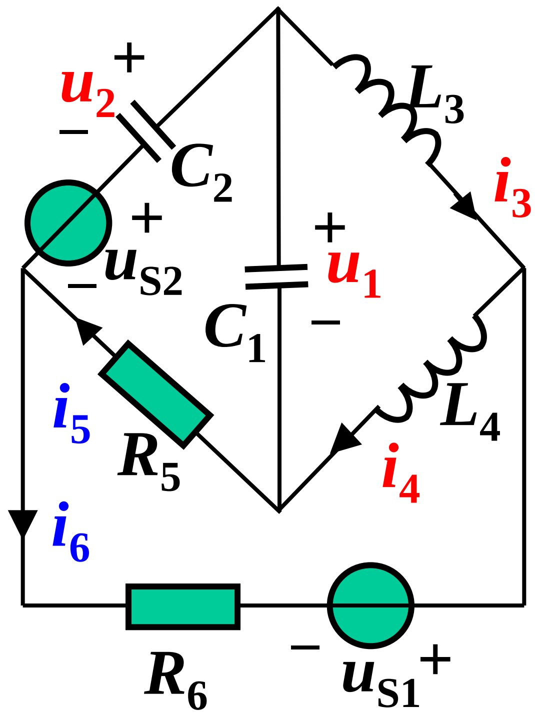
为什么要用另一种方法来分析动态电路?

分析动态过程的独立变量。

原因 1: 方程列写上的需要

原因 2: 容易描述多输入多输出系统

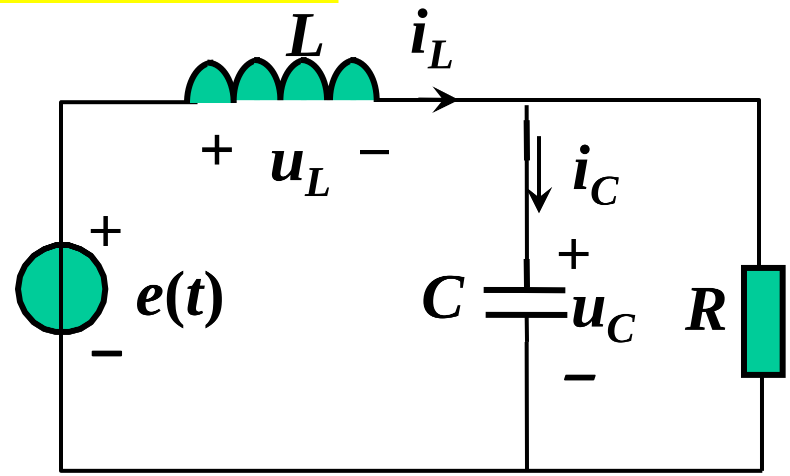
选定系统中一组最少数量的变量 $X=[x_1,x_2,\ldots x_n]^T$ ，如果当 $t=t_0$ 时这组变量 $X(t_0)$ 和 $t\geq t_0$ 后的输入 $e(t)$ 为已知，就可以确定 t_0 及 t_0 以后任何时刻系统的响应 $Y(t)$。



$$\left.\begin{array}{l} X(t_0) \\ e(t) \quad t\geq t_0 \end{array}\right\} Y(t) \qquad t\geq t_0$$

称这一组最少数目的变量为状态变量。

(2) 状态方程——求解状态变量的微分方程



设 u_C ，i_L 为状态变量

列微分方程

----用状态变量和激励的线性组合来表示状态变量的微分

$$i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = i_L - \frac{u_C}{R}$$

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = e(t) - u_C$$

改写

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC}u_C + \frac{1}{C}i_L$$

$$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{L}u_C + \frac{1}{L}e(t)$$

状态方程

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC}u_C + \frac{1}{C}i_L$$

$$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{L}u_C + \frac{1}{L}e(t)$$

特点

(1) 一阶微分方程组

(2) 左端为状态变量的一阶导数

(3) 右端仅含状态变量和输入量

矩阵形式

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{RC} & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} e(t)}$$

式中

$$[x]=[x_1 \;\; x_2 \;\; \cdots \;\; x_n]^{\mathrm{T}}$$

$$[\dot{x}]=[\dot{x}_1 \;\; \dot{x}_2 \;\; \cdots \;\; \dot{x}_n]^{\mathrm{T}}$$

$$[u]=[u_1 \;\; u_2 \;\; \cdots \;\; u_r]^{\mathrm{T}}$$

一般形式

$$\dot{x} = \underbrace{[A]}_{n\times n}\overbrace{[x]}^{n\times 1} + \underbrace{[B]}_{n\times r}\overbrace{[u]}^{r\times 1}$$

根据该方程和初值即可求解出 t_1 时刻的状态变量值。

几点说明：

(1) 过渡过程就是一个稳定的能量状态过渡到另一个稳定能量状态的过程。线性电路中的能量状态完全由电感电流和电容电压决定，因而很自然地选择它们为决定电路状态的量。

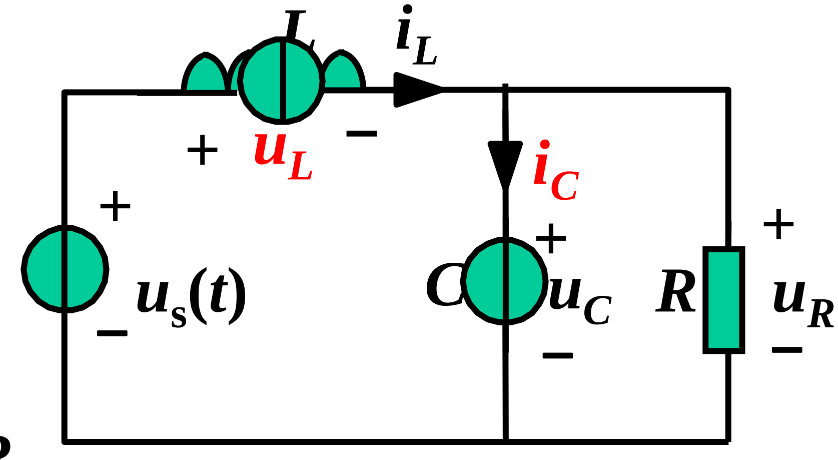
(2) 状态变量的个数等于独立的储能元件个数。

(3) 一般选择u_C和 i_L为状态变量。

也可以选 q 和ψ为状态变量。

状态变量的选择不唯一。

(3) 输出方程 —用状态变量表示输出的代数方程



设输出变量为u_L、i_C

如何用状态变量和激励表示输出?

本质上是替代定理

$u_L(t)=u_s(t)-u_C(t)$ $i_C(t)= i_L(t)- u_C(t)/R$

$$\begin{bmatrix} u_L \\ i_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1/R & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_S(t)$$

可用于描述输出为u_L、i_C的两输出系统

一般形式 $[y]=[C][x]+[D][u]$

根据该方程即可求解出 t_1时刻的输出变量值。

特点 (1) 代数方程

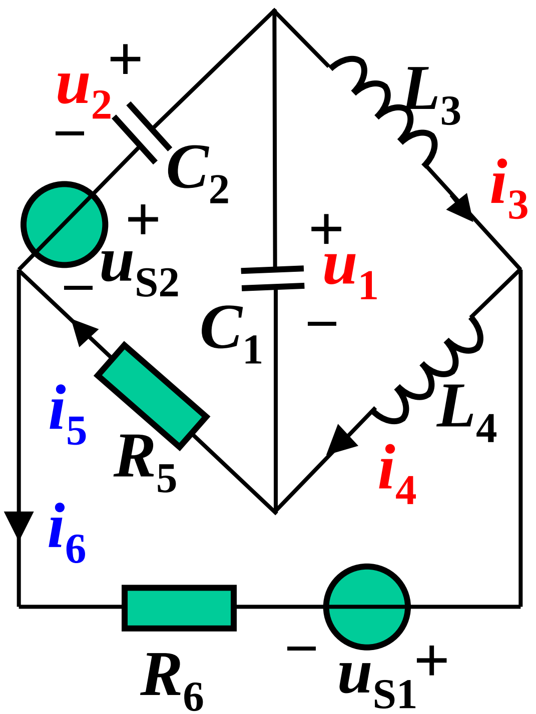
(2) 用状态变量和输入量的线性组合表示输出量

状态方程和输出方程配合求解多输入多输出系统

（1）列写状态方程

（2）求解状态，知状态量随时间变化
(不要求)

（3）根据输出方程知输出量随时间变化



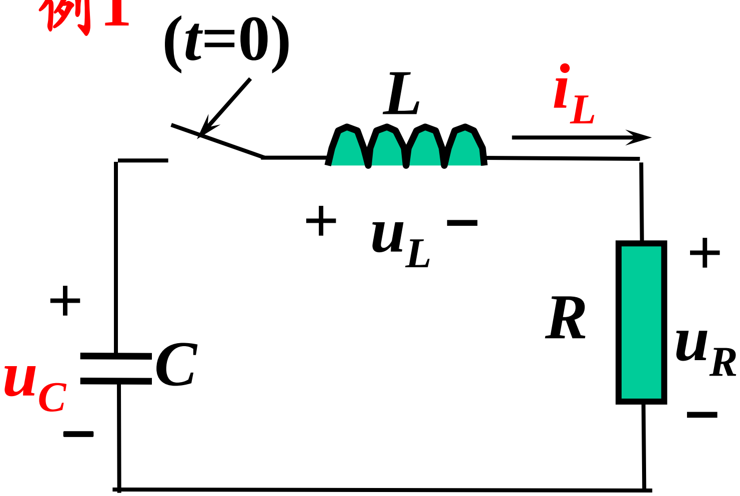
(4) 列写状态方程的方法

$$\begin{bmatrix}\dot{u}_C\\ \dot{i}_L\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}u_C\\ i_L\end{bmatrix}+B\begin{bmatrix}e\end{bmatrix}$$

a. 直观法

用电容电压和电感电流的线性组合来表示电容电流和电感电压

例1



$\mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t$ ⟶ 电容节点列KCL

$\mathrm{d}i_L/\mathrm{d}t$ ⟶ 电感回路列KVL

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-i_L$$

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=u_C-Ri_L$$

$u_C(0^-)=3\text{V}$

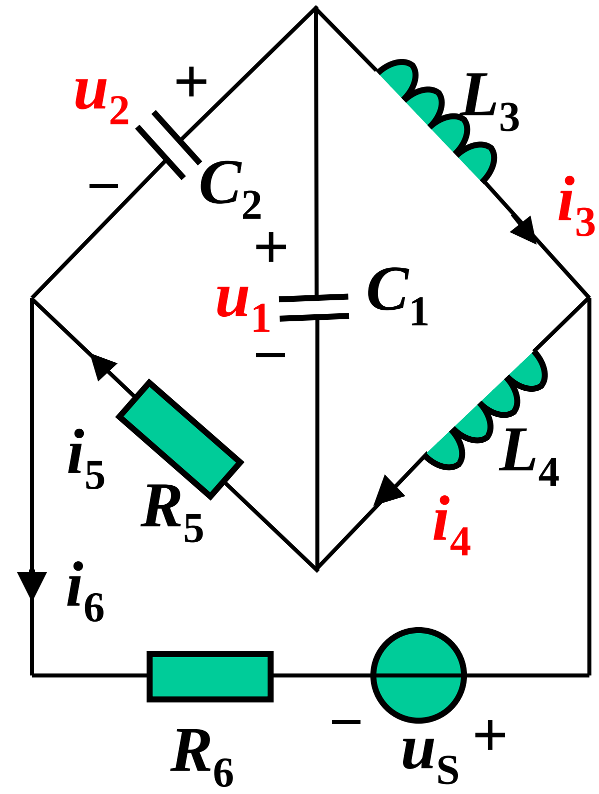
$i_L(0^-)=0$

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{1}{C}\\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C\\ i_L\end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix}u_C(0^+)\\ i_L(0^+)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix}$$

选 u_1 , u_2 , i_3 , i_4为状态变量

例2

du_C/dt ⟹ 电容节点列KCL

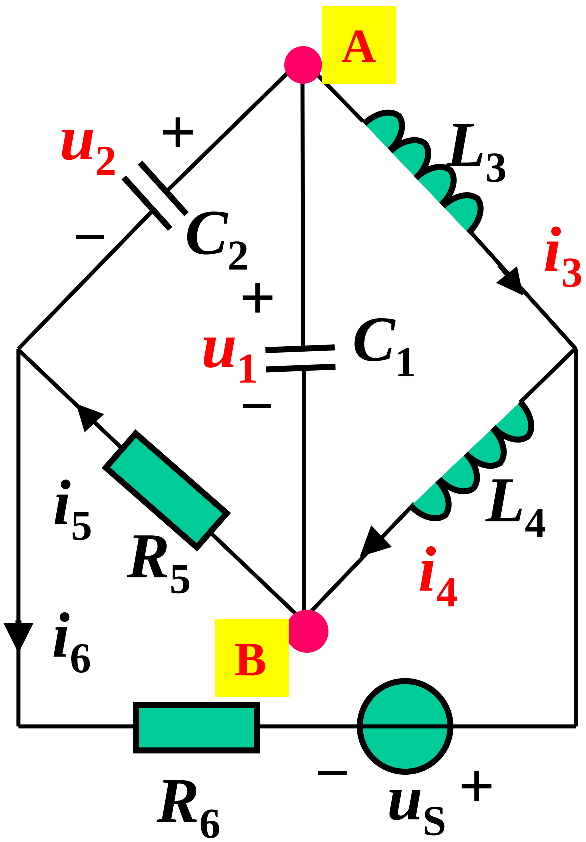


di_L/dt ⟹ 电感回路列KVL

单选题 1分

设置

对C_1用KCL(写u_1的状态方程)，
在哪个点上更容易？



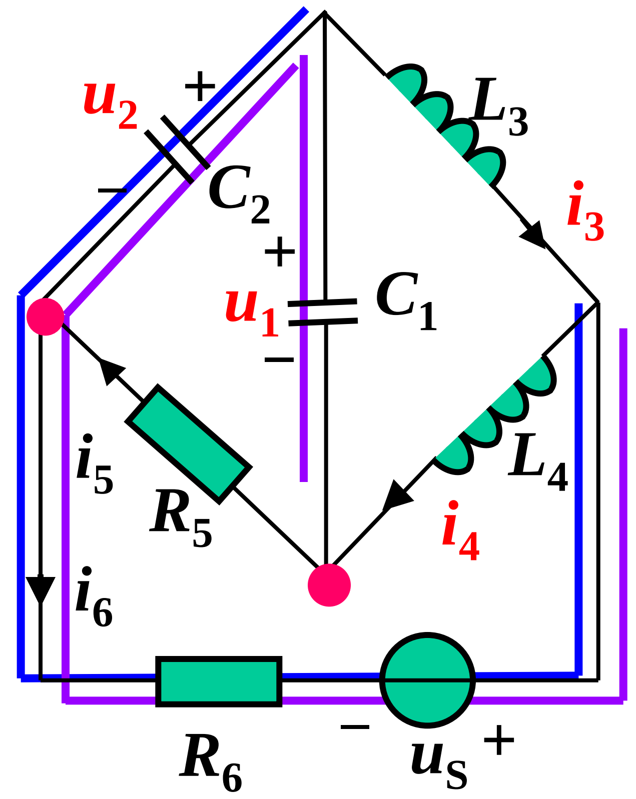
A A

B B

提交

选 u_1, u_2, i_3, i_4为状态变量

例2



du_C/dt ⟹ 电容节点列KCL

$$C_1 \frac{du_1}{dt} = \boxed{i_5} - i_4$$

$$C_2 \frac{du_2}{dt} = \boxed{i_6 - i_5}$$

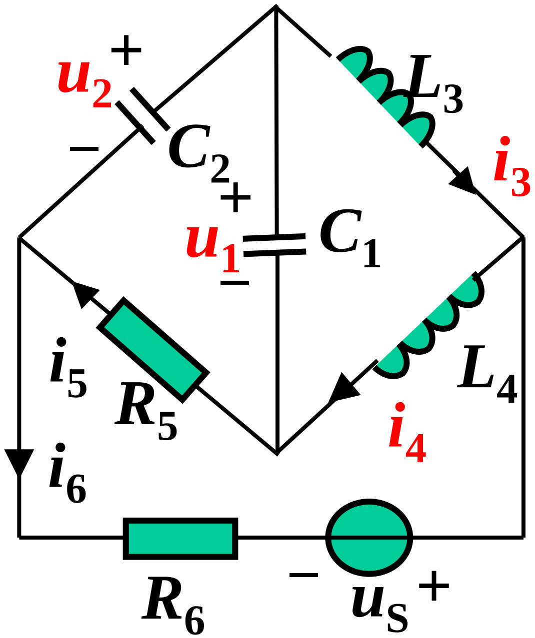
di_L/dt ⟹ 电感回路列KVL

$$L_3 \frac{di_3}{dt} = u_2 + \boxed{i_6} R_6 - u_S$$

$$L_4 \frac{di_4}{dt} = u_S - \boxed{i_6} R_6 - u_2 + u_1$$

非状态量

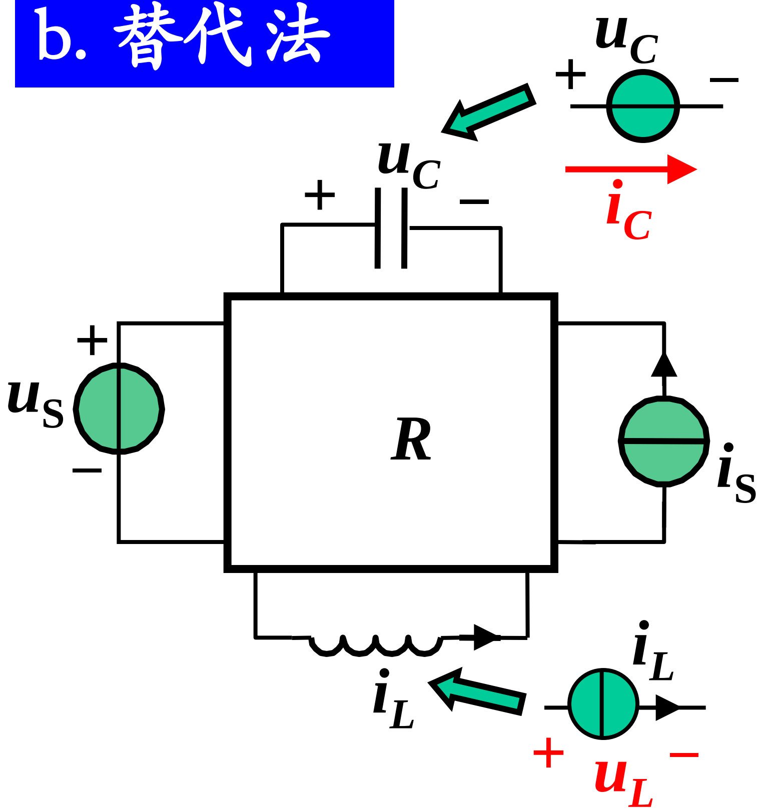
消去非状态量 i_5，i_6 → 有时不容易



$$\left.\begin{aligned} i_5 &= (u_2-u_1)/R_5 \\ i_6 &= i_4-i_3 \end{aligned}\right\}$$ 代入上式，整理

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{i}_3 \\ \dot{i}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_5C_1} & \dfrac{1}{R_5C_1} & 0 & -\dfrac{1}{C_1} \\ \dfrac{1}{R_5C_2} & -\dfrac{1}{R_5C_2} & -\dfrac{1}{C_2} & \dfrac{1}{C_2} \\ 0 & \dfrac{1}{L_3} & -\dfrac{R_6}{L_3} & \dfrac{R_6}{L_3} \\ \dfrac{1}{L_4} & -\dfrac{1}{L_4} & \dfrac{R_6}{L_4} & -\dfrac{R_6}{L_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{1}{L_3} \\ \dfrac{1}{L_4} \end{bmatrix} u_S$$

b. 替代法



(1) 将电源、电容、电感均抽到网络外。

(2) 电容用电压源替代，电感用电流源替代，构成电阻电路。

(3) 求 i_C , u_L。

则 u_S 、i_S 、u_C 、i_L共同作用下的 i_C , u_L为：

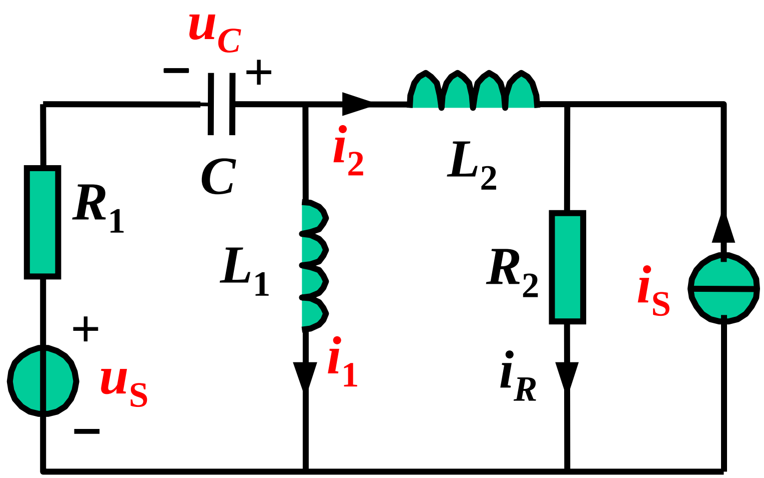
$$i_C = \boxed{C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}}$$

$$u_L = \boxed{L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}}$$

$$\begin{bmatrix} i_C \\ u_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \boxed{\begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix}} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \boxed{\begin{bmatrix} u_S \\ i_S \end{bmatrix}}$$

电阻电路

例3



选u_C，i_1，i_2为状态变量列状态方程。

替代定理

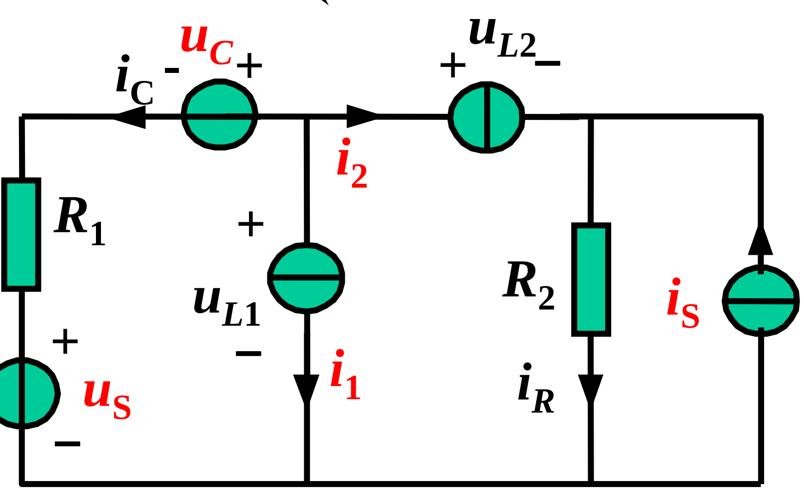
将电容看作电压源

电感看作电流源

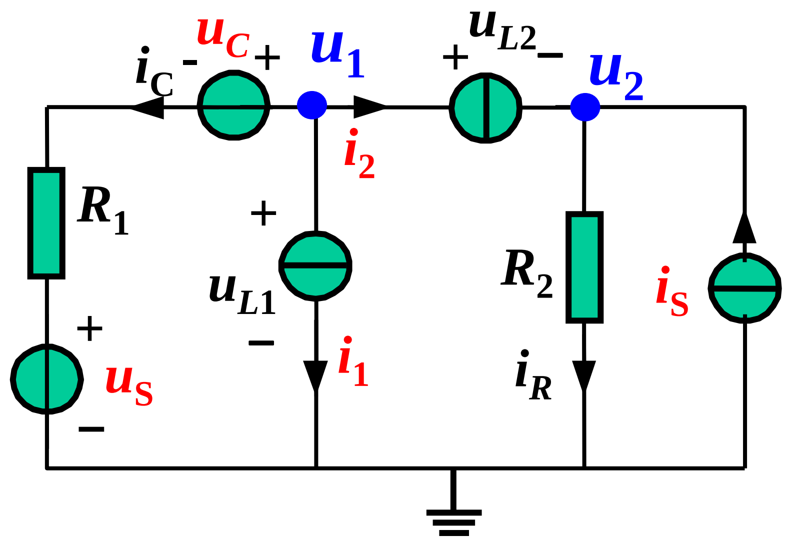
$$
\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L_1} & -\dfrac{R_1}{L_1} & -\dfrac{R_1}{L_1} \\ \dfrac{1}{L_2} & -\dfrac{R_1}{L_2} & -\dfrac{R_1+R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{L_1} & 0 \\ \dfrac{1}{L_2} & -\dfrac{R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_S \\ i_S \end{bmatrix}
$$

各种方法

求解出i_C、u_{L1}、u_{L2}



节点法



$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1}\right)u_1 = \frac{u_C + u_S}{R_1} - i_1 - i_2 \\ \left(\frac{1}{R_2}\right)u_2 = i_S + i_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = u_C + u_S - R_1 i_1 - R_1 i_2 \\ u_2 = R_2 i_S + R_2 i_2 \end{cases}$$

$$\boxed{i_C = -i_1 - i_2}$$

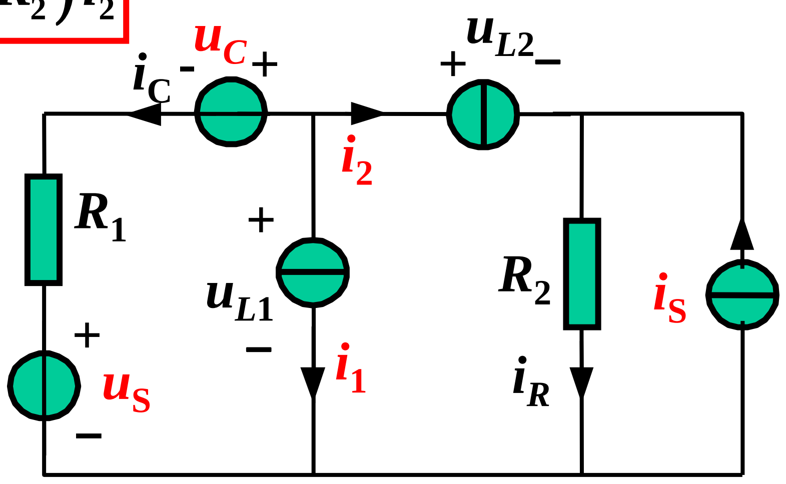
$$\boxed{u_{L1} = u_1 = u_C + u_S - R_1 i_1 - R_1 i_2}$$

$$\boxed{u_{L2} = u_1 - u_2 = u_C + u_S - R_2 i_S - R_1 i_1 - (R_1 + R_2) i_2}$$

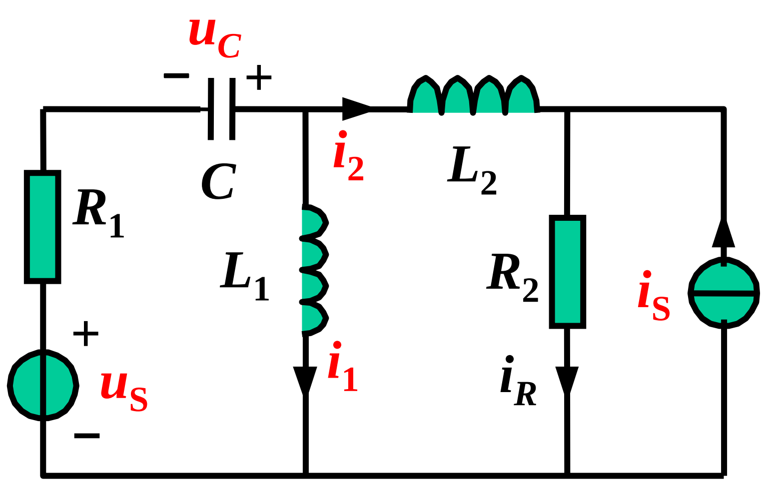
单选题 1分

设置

$$\boxed{u_{L2} = u_1 - u_2 = u_C + u_S - R_2 i_S - R_1 i_1 - (R_1 + R_2) i_2}$$



状态方程中， $\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = \qquad i_2$



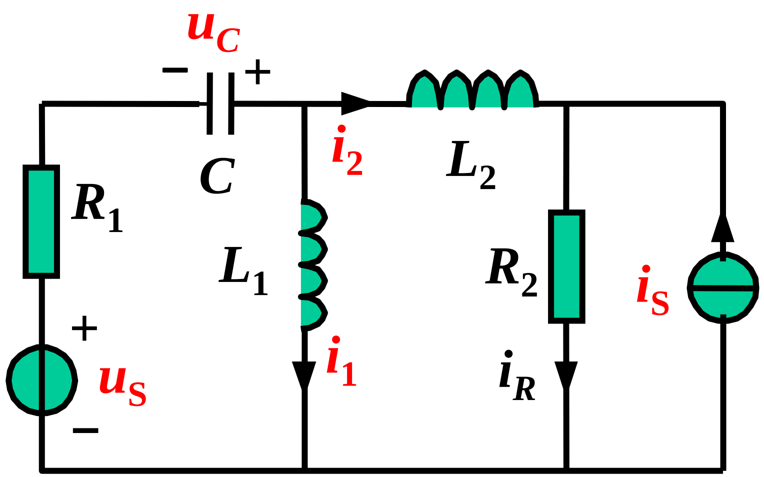
A $-R_2$

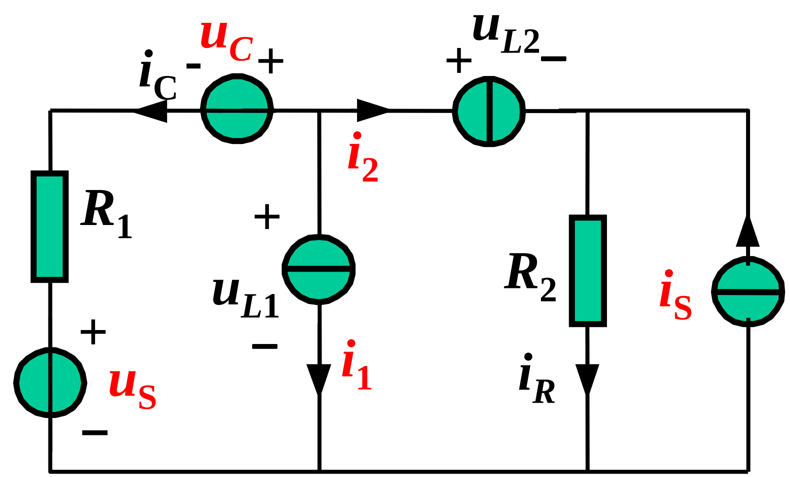
B $-R_1$

C $-R_1 - R_2$

D $\frac{-R_1 - R_2}{L_2}$

提交





$$\boxed{i_C = \frac{u_1 - u_C - u_S}{R_1} = -i_1 - i_2}$$

$$\boxed{u_{L1} = u_1 = u_C + u_S - R_1 i_1 - R_1 i_2}$$

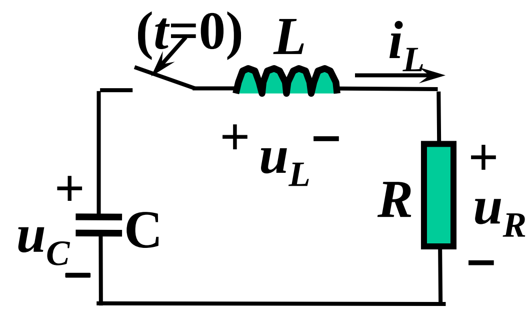
$$\boxed{u_{L2} = u_1 - u_2 = u_C + u_S - R_2 i_S - R_1 i_1 - \left(R_1 + R_2\right) i_2}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L_1} & -\dfrac{R_1}{L_1} & -\dfrac{R_1}{L_1} \\ \dfrac{1}{L_2} & -\dfrac{R_1}{L_2} & -\dfrac{R_1 + R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{L_1} & 0 \\ \dfrac{1}{L_2} & -\dfrac{R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_S \\ i_S \end{bmatrix}$$

2 状态方程法与经典法的关系

- 求响应形式
  - RLC串联、RLC并联
  - 状态方程 → （电阻电路）→ 求系数矩阵特征值
- 求稳态值 → 得通解表达式
  - 电阻电路
- 求初值
  - 电阻电路
- 求导数初值
  - 将支路量用独立源、u_C、i_L来表示
  - 输出方程（电阻电路）
- 用初值和导数初值确定通解待定系数

如何利用状态方程求特征根?



$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{LC}u_C=0$$

$$\begin{bmatrix}\frac{du_C}{dt}\\ \frac{di_L}{dt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{C}\\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C\\ i_L\end{bmatrix}$$

特征方程

$$p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}=0$$

求系数矩阵特征值的方程

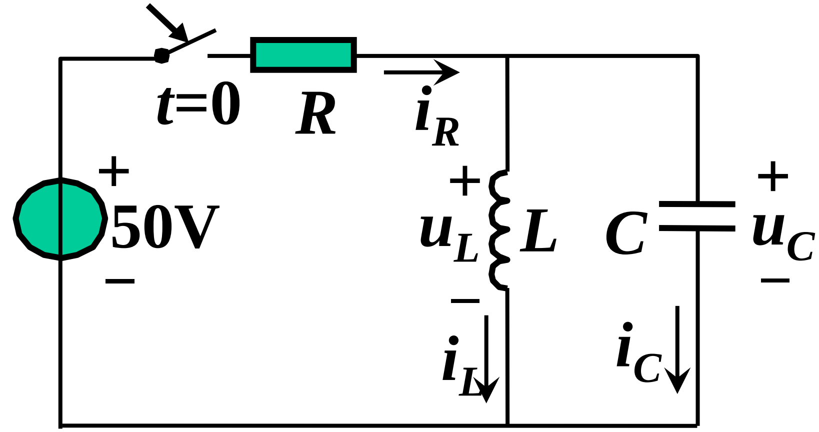
$$|\lambda I-A|=0$$

$$\begin{vmatrix}\lambda & \frac{1}{C}\\ -\frac{1}{L} & \lambda+\frac{R}{L}\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda^2+\frac{R}{L}\lambda+\frac{1}{LC}=0$$

用这两种方法得到的系统自由分量变化形式是一样的

状态变量的变化反映了系统能量的变化

$$p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0$$

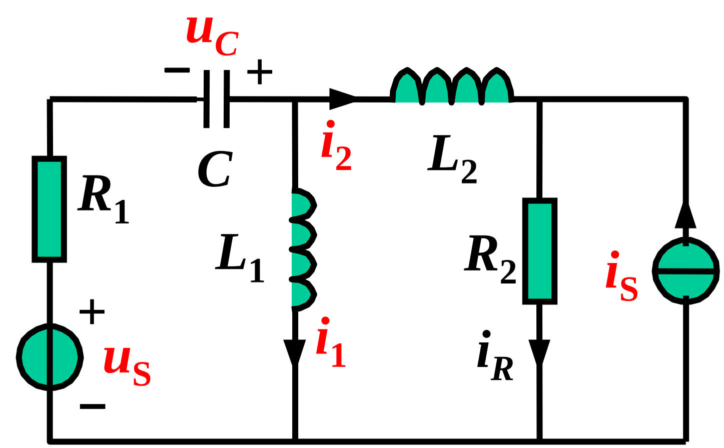


$$2\alpha = \frac{1}{RC} = 200 \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 20000$$

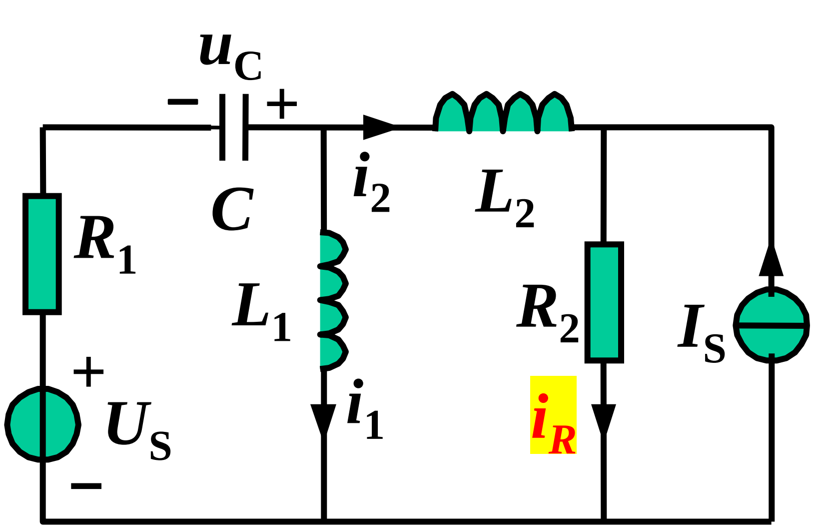
如果仅需判断过渡过程性质

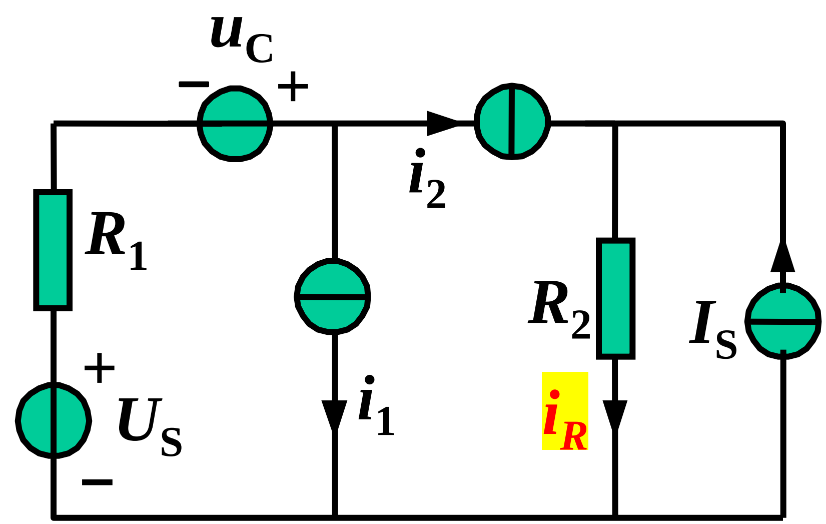
- 选**最容易**列写微分方程的支路量列方程 (零输入)
- 列写**状态方程**，求A矩阵的特征值

$$\begin{bmatrix} \dfrac{du_C}{dt} \\ \dfrac{di_1}{dt} \\ \dfrac{di_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L_1} & -\dfrac{R_1}{L_1} & -\dfrac{R_1}{L_1} \\ \dfrac{1}{L_2} & -\dfrac{R_1}{L_2} & -\dfrac{R_1+R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{L_1} & 0 \\ \dfrac{1}{L_2} & -\dfrac{R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_S \\ i_S \end{bmatrix}$$



如何利用输出方程、状态方程求任意支路量的导数初值?





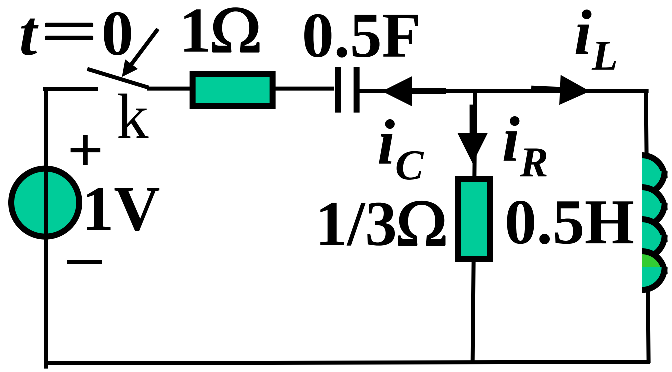
以待求支路量为输出的输出方程 $i_R = I_S + i_2$

→ 电容视为电压源，电感视为电流源（电阻电路）

→求导，得待求支路量的导数初值 $\left.\dfrac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+} = \left.\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+}$

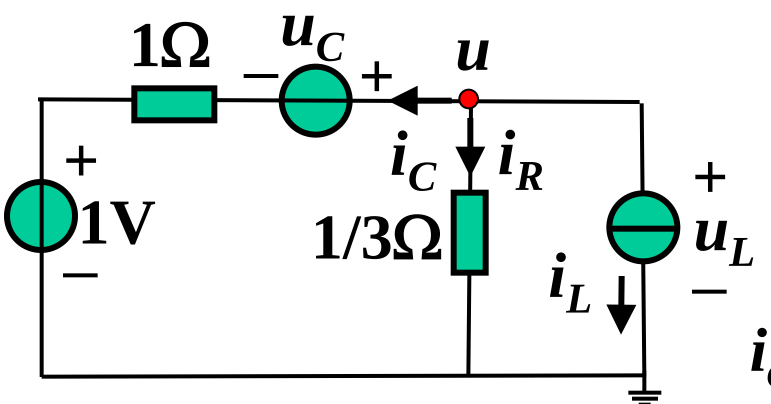
→利用状态方程得一阶导数初值

例



求电阻电流的零状态响应i_R。

Step1 求状态方程和输出方程



$$(1+3)u = u_C + 1 - i_L$$

$$u = 0.25u_C - 0.25i_L + 0.25$$

$$i_C = u - u_C - 1 = -0.75u_C - 0.25i_L - 0.75$$

$$u_L = u = 0.25u_C - 0.25i_L + 0.25$$

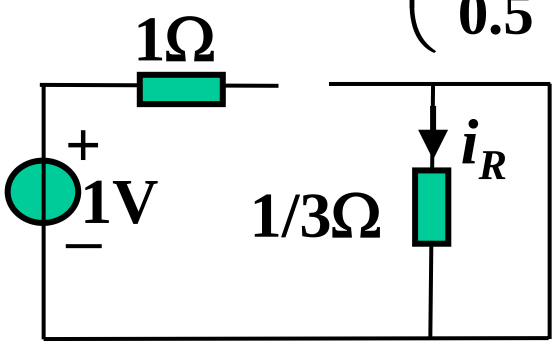
$$\boxed{i_R = 0.75u_C - 0.75i_L + 0.75}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_C \\ i_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}}$$

Step2 求全解

$$A=\begin{pmatrix}-1.5 & -0.5\\ 0.5 & -0.5\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix}p+1.5 & 0.5\\ -0.5 & p+0.5\end{vmatrix}=p^2+2p+1=0$$

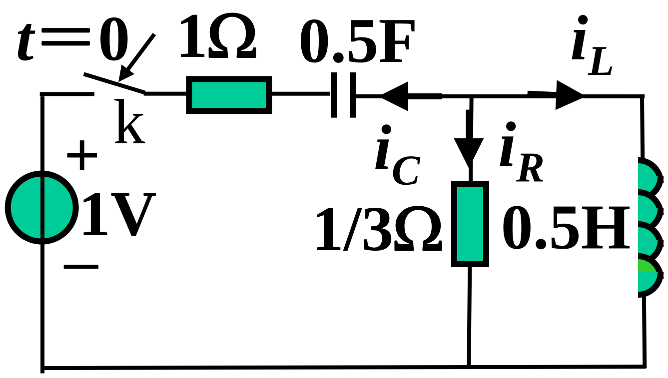
$$p_1=p_2=-1$$

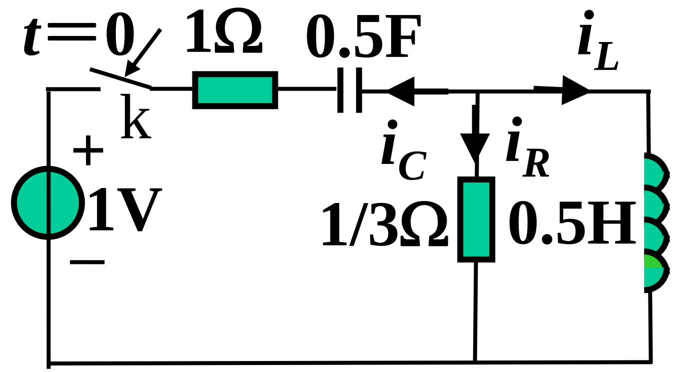


稳态电路

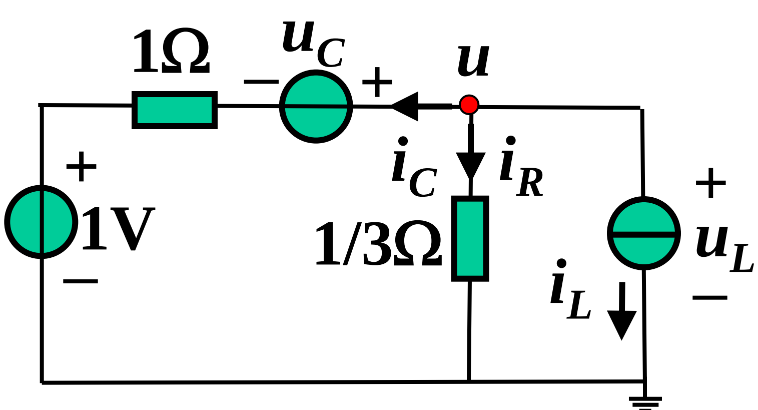
$$i_R(\infty)=0$$

$$\boxed{i_R=\left(A_1+A_2t\right)e^{-t}\quad t\geq 0^+}$$





Step3 求初值和一阶导初值



换路后
求状态方程输出方程
电路

$$\boxed{i_R = 0.75u_C - 0.75i_L + 0.75}$$ 输出方程

$$\boxed{\dot{i}_R = 0.75\dot{u}_C - 0.75\dot{i}_L}$$

$$\dot{u}_C = -1.5u_C - 0.5i_L - 1.5$$
$$\dot{i}_L = 0.5u_C - 0.5i_L + 0.5$$
状态方程

单选题 1分

设置

$$\frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t} = \qquad \mathrm{A/s}$$

“红包”

A -1.5

B 0.5

C 0.75

D -0.75

$$\boxed{\dot{i}_R = 0.75\dot{u}_C - 0.75\dot{i}_L}$$

$$\dot{u}_C = -1.5u_C - 0.5i_L - 1.5$$

$$\dot{i}_L = 0.5u_C - 0.5i_L + 0.5$$

零状态

提交

$$u_C(0^+) = 0\ \text{V}$$
$$i_L(0^+) = 0\ \text{A}$$

状态方程

$$\begin{cases} \dot{u}_C(0^+) = -1.5u_C - 0.5i_L - 1.5\big|_{t=0^+} = -1.5\ \text{V/s} \\ \dot{i}_L(0^+) = 0.5u_C - 0.5i_L + 0.5\big|_{t=0^+} = 0.5\ \text{A/s} \end{cases}$$

输出方程

$$\boxed{\begin{aligned} i_R(0^+) &= \left(0.75u_C - 0.75i_L + 0.75\right)\big|_{t=0^+} \\ &= 0.75\ \text{A} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{i}_R(0^+) &= \left(0.75\dot{u}_C - 0.75\dot{i}_L\right)\big|_{t=0^+} \\ &= -1.5\ \text{A/s} \end{aligned}}$$

比起上节课方法，这种方法无需画0^+电路

Step4 求待定系数

$$\begin{cases} i_R = \left(A_1 + A_2 t\right)\mathrm{e}^{-t} \quad t > 0^+ \\ i_R(0^+) = 0.75\text{A} \\ \dot{i}_R(0^+) = -1.5\ \text{A/s} \end{cases}$$

$$i_R = 0.75\left(1 - t\right)\mathrm{e}^{-t}\text{A} \quad t > 0^+$$

$$\dot{u}_C = -1.5u_C - 0.5i_L - 1.5 \qquad \dot{u}_C(0^+) = -1.5u_C - 0.5i_L - 1.5\Big|_{t=0^+} = -1.5\ \text{V/s}$$

$$\dot{i}_L = 0.5u_C - 0.5i_L + 0.5 \qquad \dot{i}_L(0^+) = 0.5u_C - 0.5i_L + 0.5\Big|_{t=0^+} = 0.5\ \text{A/s}$$

$$i_R = 0.75u_C - 0.75i_L + 0.75$$

$$\boxed{\dot{i}_R = 0.75\dot{u}_C - 0.75\dot{i}_L}$$

$$u_C(0^+) = 0\ \text{V}$$

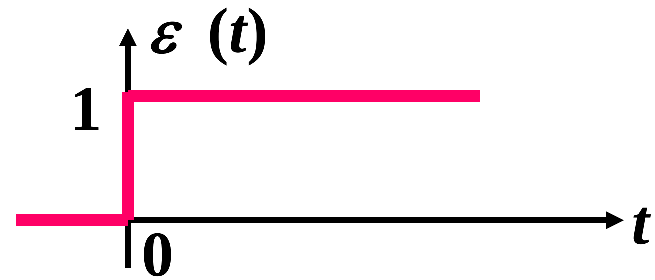
$$i_L(0^+) = 0\ \text{A}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{i}_R(0^+) &= \left(0.75\dot{u}_C - 0.75\dot{i}_L\right)\Big|_{t=0^+} \\ &= -1.5\ \text{A/s}\end{aligned}}$$

思考：如何用状态方程+输出方程求高阶导初值?

此处可以有弹幕

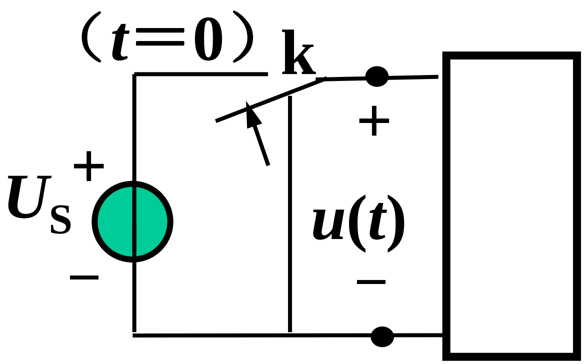
（1）单位阶跃函数(unit step) $\varepsilon(t)$

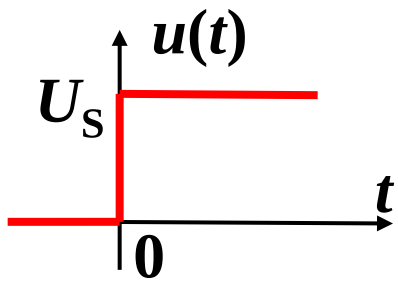


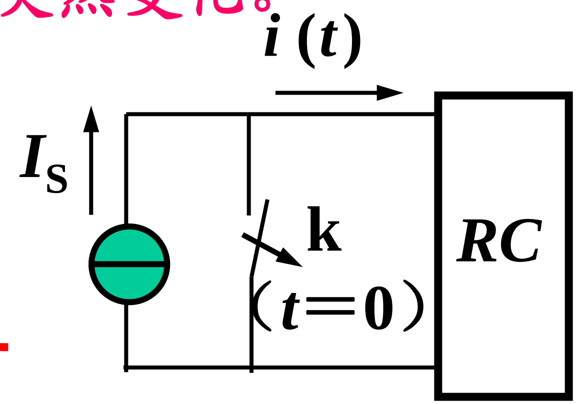
a） 定义

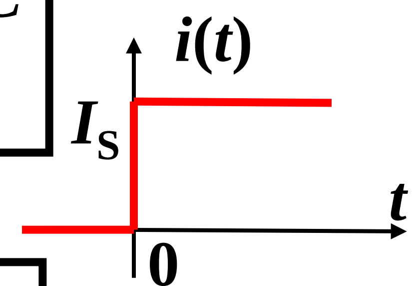
$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t>0)\end{cases}$$

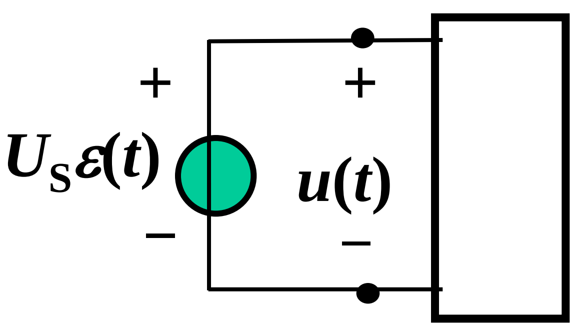
可用 $\varepsilon(t)$ 来表示电压/电流的突然变化。

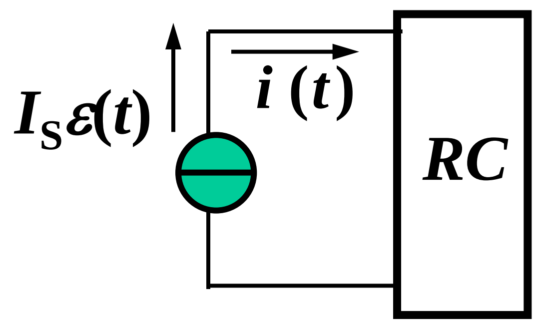




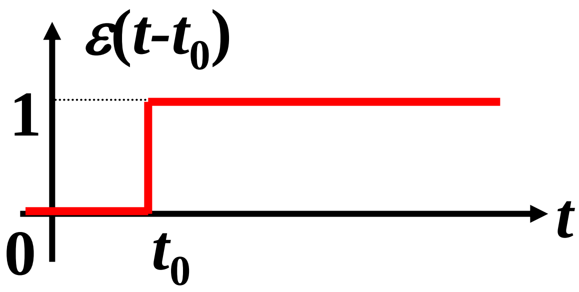








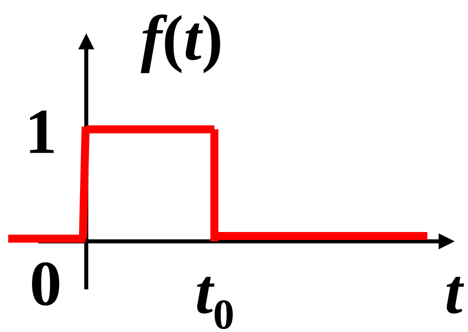
b） 单位阶跃函数的延迟

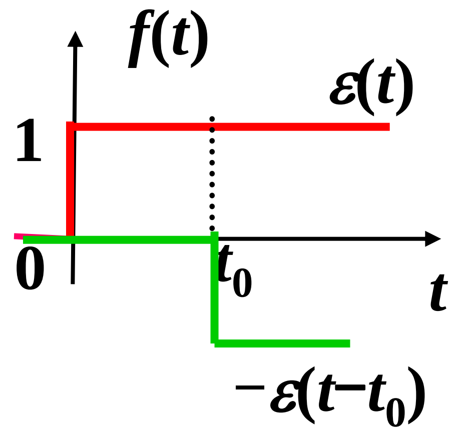


$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & (t<t_0)\\ 1 & (t>t_0)\end{cases}$$

c） 由单位阶跃函数可组成复杂的信号

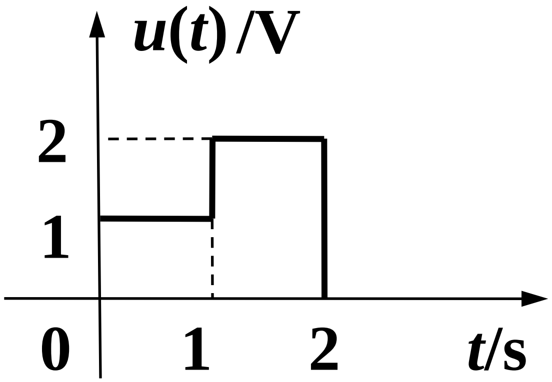
例 1

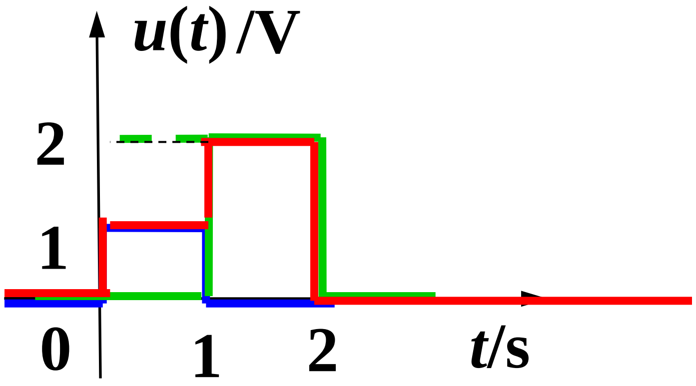




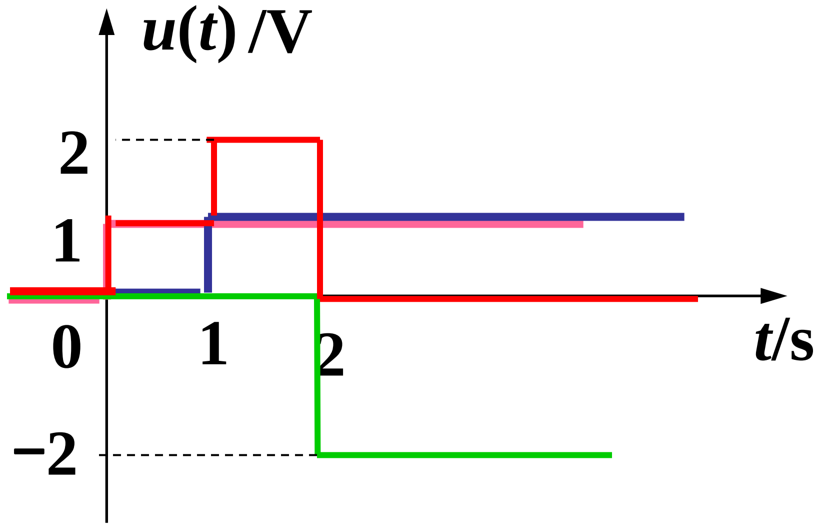
$$f(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-t_0)$$

例2





$$f(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)] + 2[\varepsilon(t-1) - \varepsilon(t-2)]$$



$$f(t) = \varepsilon(t) + \varepsilon(t-1) - 2\varepsilon(t-2)$$

单选题 1分

设置

$$f(t)=\varepsilon(t)+2\varepsilon(t-1)-2\varepsilon(t-2)$$

在t=3s时的值为

A **0**

B **1**

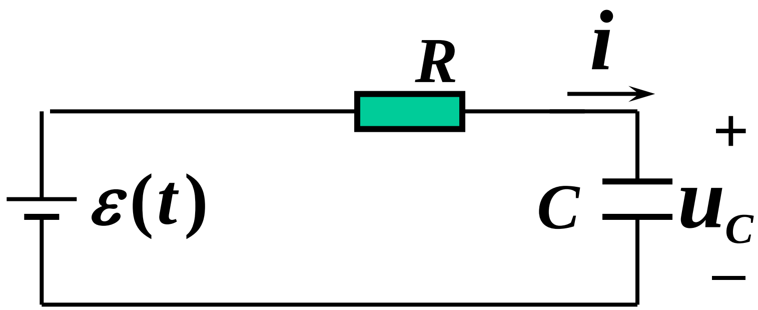
C **2**

D **3**

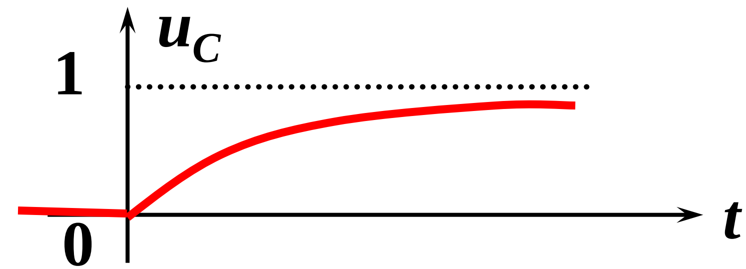
提交

（2） 单位阶跃响应

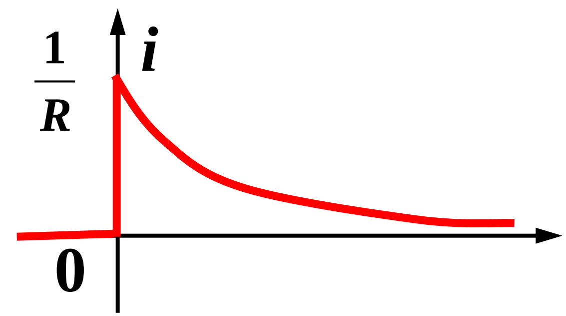
——单位阶跃激励下电路的零状态响应



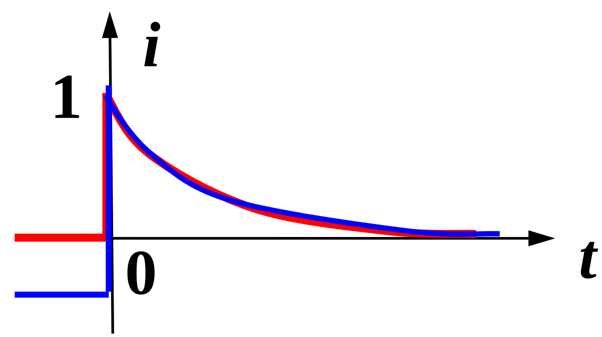
$u_C(0^-)=0$



$$u_C(t)=(1-e^{-\frac{t}{RC}})\ \varepsilon(t)$$



$$i(t)=\frac{1}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\ \varepsilon(t)$$



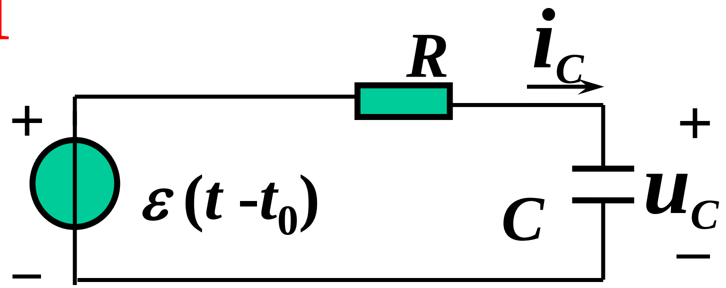
注意 $i=e^{-\frac{t}{RC}}\ \varepsilon(t)$ 和 $i=e^{-\frac{t}{RC}}\quad t\geq 0^+$ 的区别

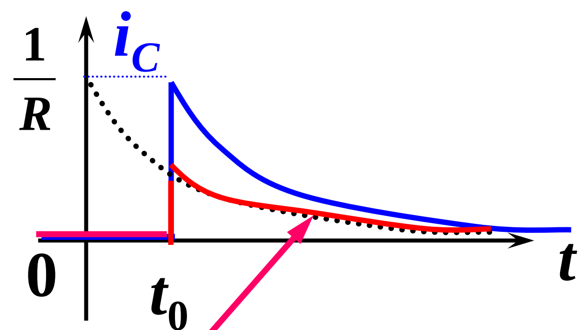
对线性非时变电路：

$$f(t) \rightarrow r(t)$$
$$f(t-t_0) \rightarrow r(t-t_0)$$

激励在 $t=t_0$ 时加入，则响应应从 $t=t_0$ 开始。

例1

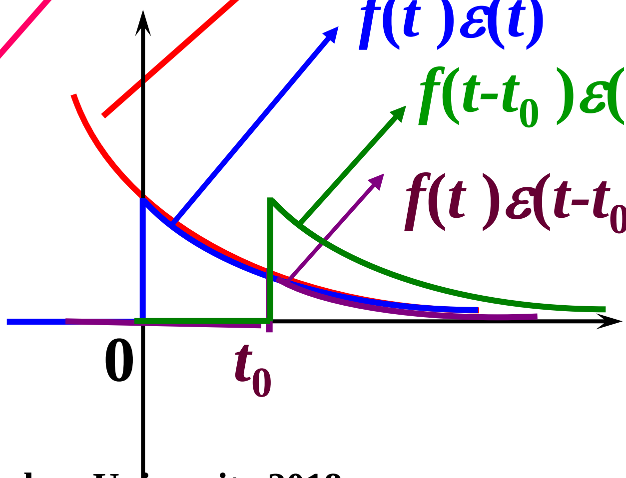




$$i_C = \frac{1}{R} e^{-\frac{t-t_0}{RC}} \varepsilon(t-t_0)$$

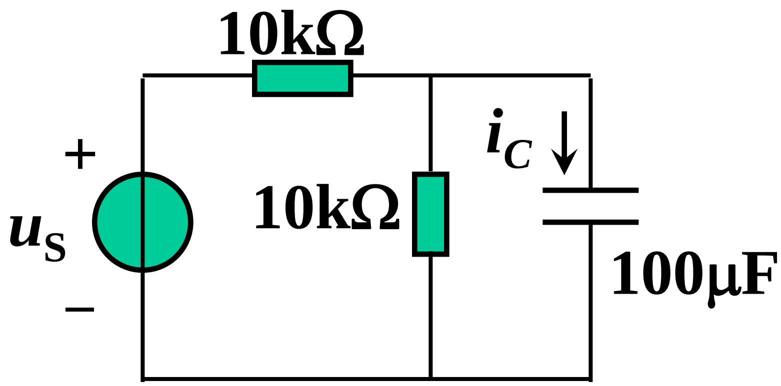
注意

不要写为 $\frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t-t_0)$

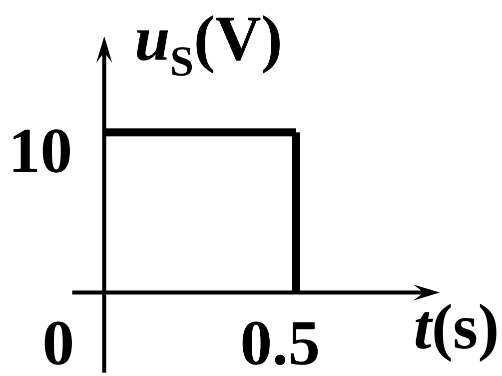


例2 求图示电路中电流 $i_C(t)$。

法一：二次换路，三要素法。



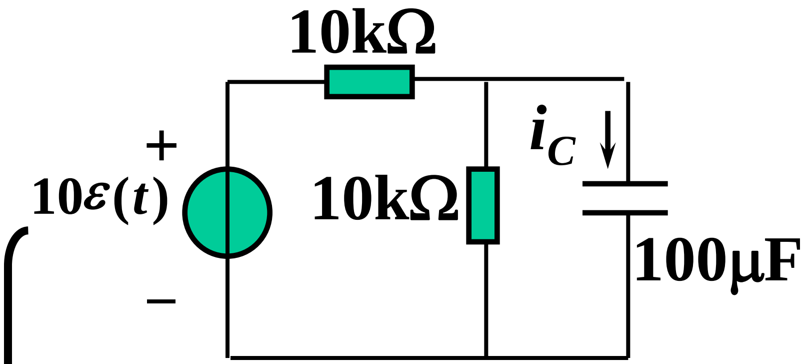
$u_C(0^-)=0$



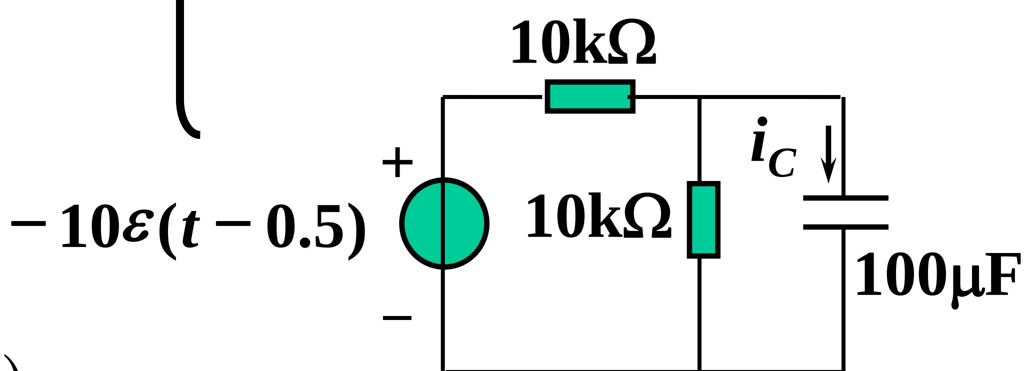
$$u_S = 10\left(\varepsilon(t) - \varepsilon(t-0.5)\right)$$

$$= 10\varepsilon(t) - 10\varepsilon(t-0.5)$$

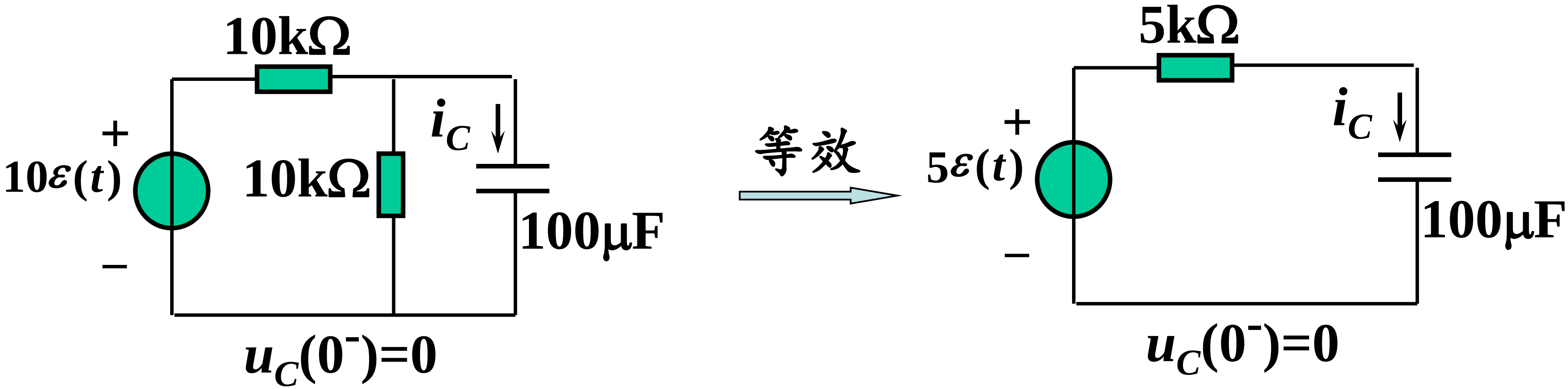
法二 叠加



$u_C(0^-)=0$



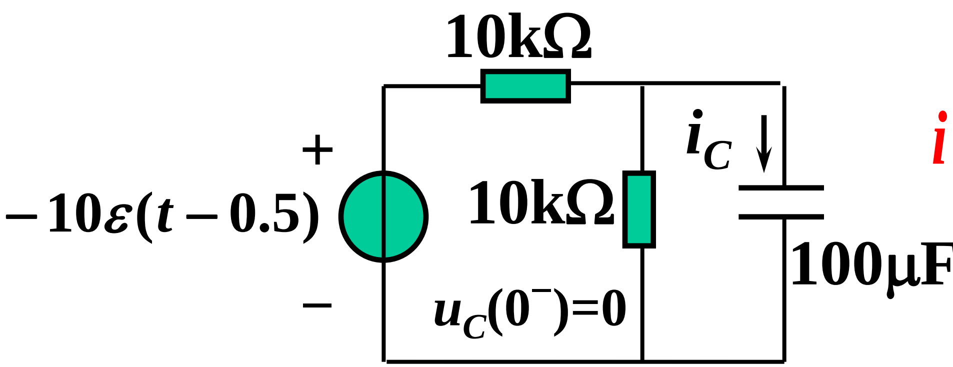
$u_C(0^-)=0$



$$\tau = RC = 100\times10^{-6}\times5\times10^{3} = 0.5\text{s}$$

$$i_C(0^+) = 1\text{mA}$$

$$i_C'(t) = \mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t) \quad \text{mA}$$

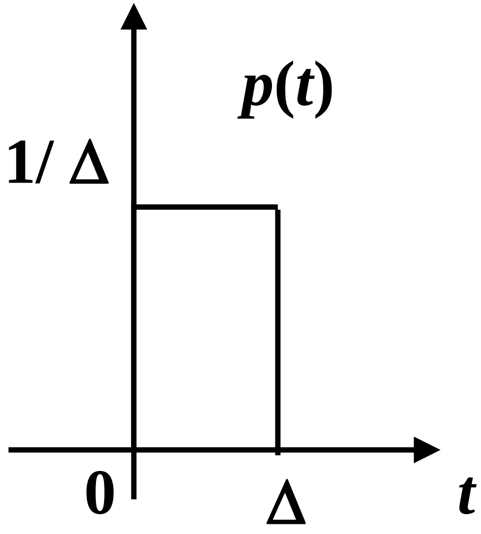


$$i_C''(t) = -\mathrm{e}^{-2(t-0.5)}\varepsilon(t-0.5) \ \text{mA}$$

$$\therefore\ i_C(t) = \mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t) - \mathrm{e}^{-2(t-0.5)}\varepsilon(t-0.5) \quad \text{mA}$$

4 单位冲激函数

（1） 单位脉冲函数 (unit pulse function) $p(t)$

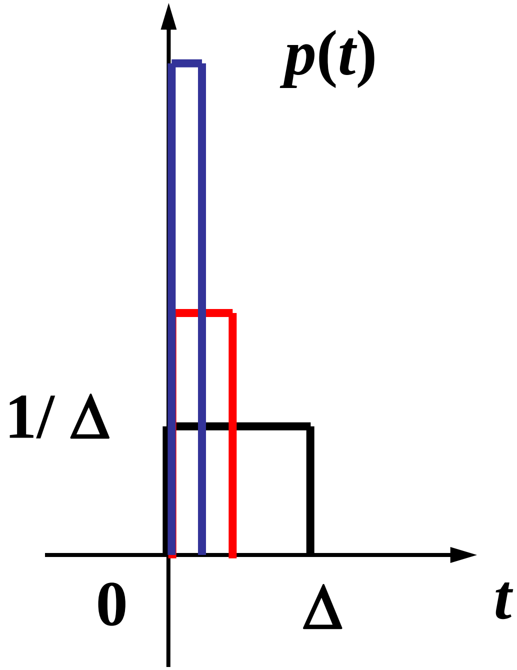


$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t)\mathrm{d}t = 1$$

如何用**单位阶跃函数**来表示**单位脉冲函数**?

$$p(t) = \frac{1}{\Delta}\left[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-\Delta)\right]$$

（2） 单位冲激函数 $\delta(t)$



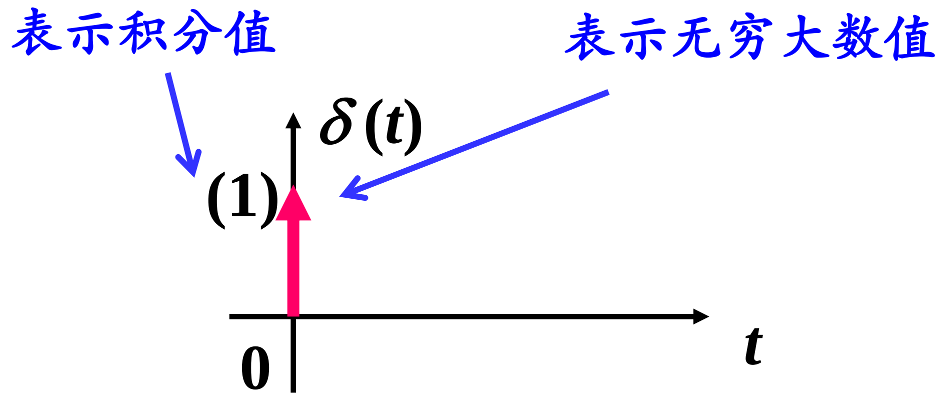
$$p(t)=\frac{1}{\Delta}\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\Delta)\right]$$

$$\Delta\to 0 \qquad \frac{1}{\Delta}\to\infty$$

$$\lim_{\Delta\to 0} p(t)=\delta(t)$$

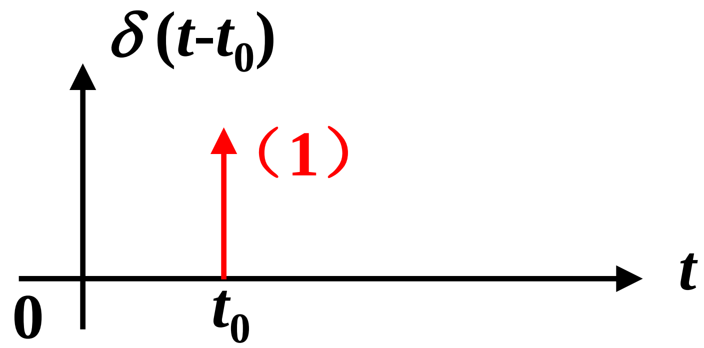
定义

$$\begin{cases}\delta(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 0 & (t>0)\end{cases}\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1\end{cases}$$



（3） 单位冲激函数的延迟 $\delta(t-t_0)$

$$\begin{cases} \delta(t-t_0)=0 \quad (t \neq t_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\mathrm{d}t = 1 \end{cases}$$



单选题 1分

设置

$$\int_{-1}^{1} \delta(t-2)\mathrm{d}t =$$

A 0

B 1

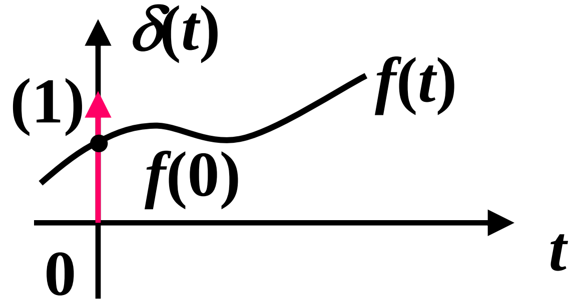
C 2

提交

（4） δ函数的筛分性

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(t)\delta(t)}_{f(0)\delta(t)}\mathrm{d}t = f(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t = f(0)$$

* $f(t)$在 $t=0$处连续



同理有： $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = f(t_0)$ * $f(t)$在 t_0 处连续

例 $$\int_{-\infty}^{\infty}(\sin t + t)\delta(t-\frac{\pi}{6})\mathrm{d}t = \sin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}+\frac{\pi}{6} = 1.02$$

单选题 1分

$$\int_{0^-}^{t} f(t-\tau)\delta(\tau)\mathrm{d}\tau =$$

A $f(\tau)$

B $f(t)$

C $f(t-\tau)$

提交

（5）$\delta(t)$与$\varepsilon(t)$的关系

$$t \le 0^- \quad \int_{-\infty}^{t} \delta(t)\mathrm{d}t = 0$$

$$t > 0^+ \quad \int_{-\infty}^{t} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$$

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau = \varepsilon(t) \iff \frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t} = \delta(t)$$