线 性 代 数

清华大学数学科学系　　　梁 恒

荷二楼215

liangh@mail.tsinghua.edu.cn

什么是线性代数

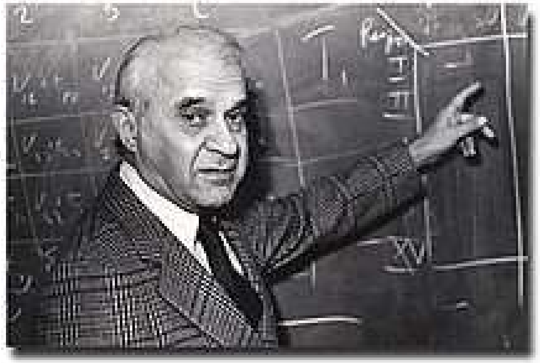
甲乙两地相距**750km**，船从甲到乙顺水航行需**30h,**
从乙到甲逆水航行需**50h**，问船的速度是多少。

用 x 表示船速，y 表示水速，列出方程：

$$(x+y)\times 30=750$$
$$(x-y)\times 50=750$$

求解得到 x=20，y=5. **答：船速为20km/h**

投入产出模型



- Wassily Leontief　哈佛大学教授
- 1973年的诺贝尔经济学奖

- 他把美国经济分解为500个部门，
- 例如煤炭工业、汽车工业、交通系统等。
- 对每个部门考察该部门的产出如何分配给其他
- 经济部门，利用这些关系列出线性方程组。

- 1949年夏， Leontief用Mark II计算机进行计算，
- 当时的计算机还无法处理500个未知量的线性方程组，Leontief只好将问题简化为42个未知量的线性方程组，

求解这个方程组，MarkII用了56小时

投入产出数学模型

x_i: 第i个部门的产出，

x_{ij}: 第i个部门对第 j个部门的投入，

d_i: 第i个部门的外部需求

产出 / 投入	部门 1	部门 i	部门 n	外部需求	总产出
部门 1	x_{11}	x_{1i}	x_{1n}	d_1	x_1
部门 *i*	x_{i1}	x_{ii}	x_{in}	d_i	x_i
部门 n	x_{n1}	x_{ni}	x_{xn}	d_n	x_n
初始投入	x_{01}	x_{0i}	x_{0n}		
总投入	x_1	x_i	x_n		

平衡关系

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + d_i = x_i (i = 1,2,\cdots,n)$$

投入系数 $a_{ij} = x_{ij} / x_j$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + d_i = x_i (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$\boxed{x = Ax + d}$$

$$\boxed{(I - A)x = d}$$

投入系数矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$

产出向量 $x = (x_1, \cdots x_n)^T$

需求向量 $d = (d_1, \cdots d_n)^T$

诺贝尔经济学奖（1969年起）

1973	华西里·列昂惕夫 Wassily Leontief （美国）	发展了投入产出方法，该方法在许多重要的经济问题中得到运用	美国哈佛大学	投入产出分析
1975	列奥尼德·康托罗维奇 Leonid Vitaliyevich Kantorovich（苏联）	前者在 1939 年创立了享誉全球的线性规划单纯形算法，后者将数理统计学成功运用于经济计量学他们对资源最优分配理论做出了贡献	俄罗斯科学院	资源优化配置理论
	佳林·库普曼斯 Tjalling C. Koopmans （美国）		美国耶鲁大学	

线性方程组 Linear equations

定义：关于 n 个变量$x_1, x_2 \cdots, x_n$的实（复）线性方程是如下形式的方程

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

其中$a_1, a_2, \cdots, a_n$与 b 是实（复）数。 $a_1, a_2, \cdots, a_n$被称为系数。

线性方程组由多个关于变量$x_1, x_2 \cdots, x_n$的线性方程组成 ，

可写作形式如下

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

线性方程组解的各种可能情况

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 5y = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\ x + 3\ y = 5 \\ 4\ x + 5\ y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\ x + 3\ y = 5 \\ 4\ x + 6\ y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\ x + 3\ y = 5 \\ 4\ x + 6\ y = 9 \end{cases}$$

矩阵

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 5y = 9 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

万年历　2021年 ▼　< 9月 ▼ >　节假日安排 ▼　返回今日

星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六	星期日
30 廿三	31 廿四	1 廿五	2 廿六	3 廿七	4 廿八	5 廿九
6 三十	7 白露	8 初二	9 初三	10 教师节	11 初五	12 初六
13 初七	14 初八	15 初九	16 初十	17 十一	18 十二	19 十三
20 十四	21 中秋节	22 十六	23 秋分	24 十八	25 十九	26 二十
27 廿一	28 廿二	29 廿三	30 廿四	1 国庆节	2 廿六	3 廿七

矩阵

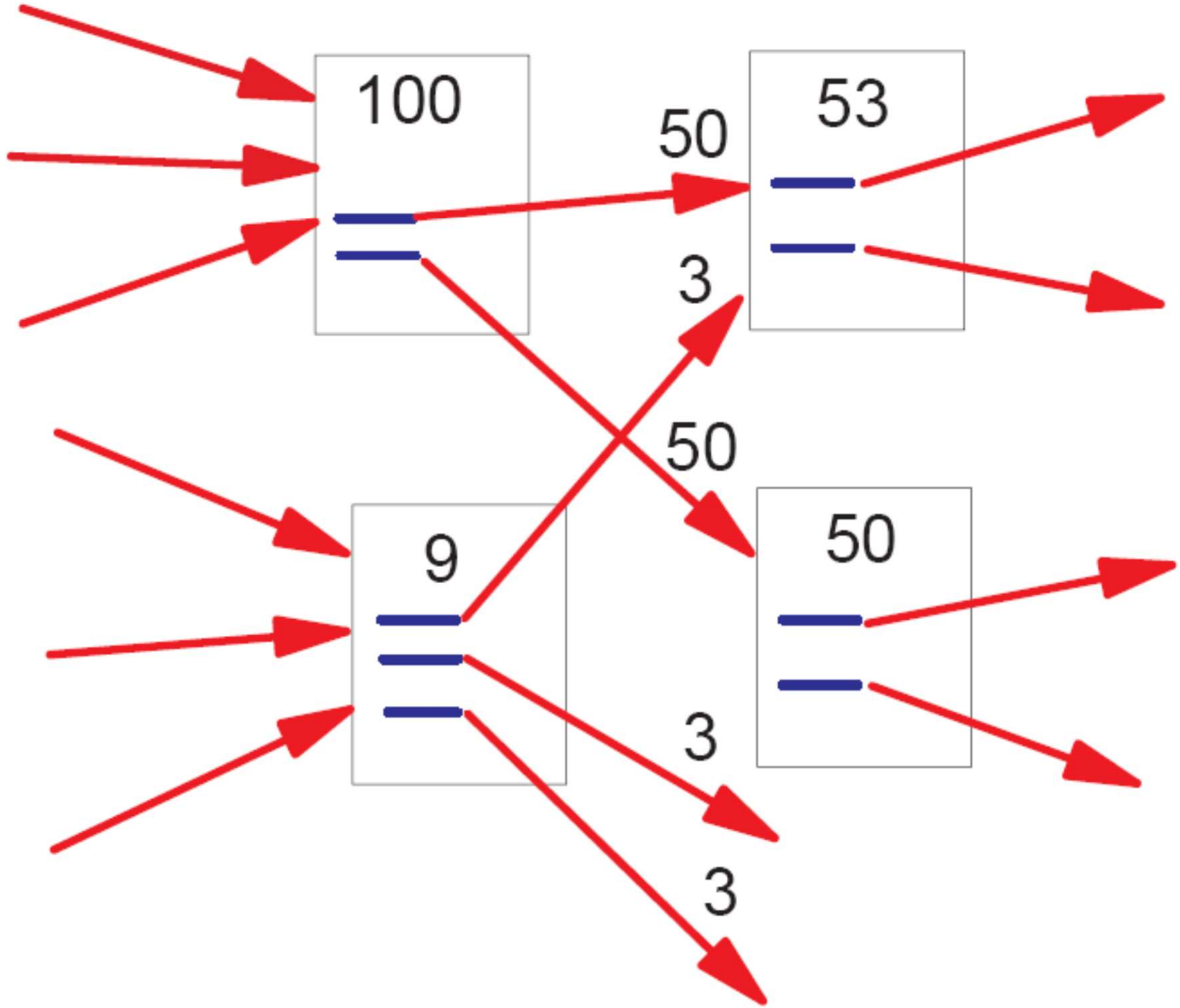
学生代码	数学	物理	化学	语文	历史	英语
1	65	61	72	84	81	79
2	77	77	76	64	70	55
3	67	63	49	65	67	57
4	80	69	75	74	74	63
5	74	70	80	84	81	74
6	78	84	75	62	71	64
7	66	71	67	52	65	57
8	77	71	57	72	86	71
9	83	100	79	41	67	50
…	…	…	…	…	…	…

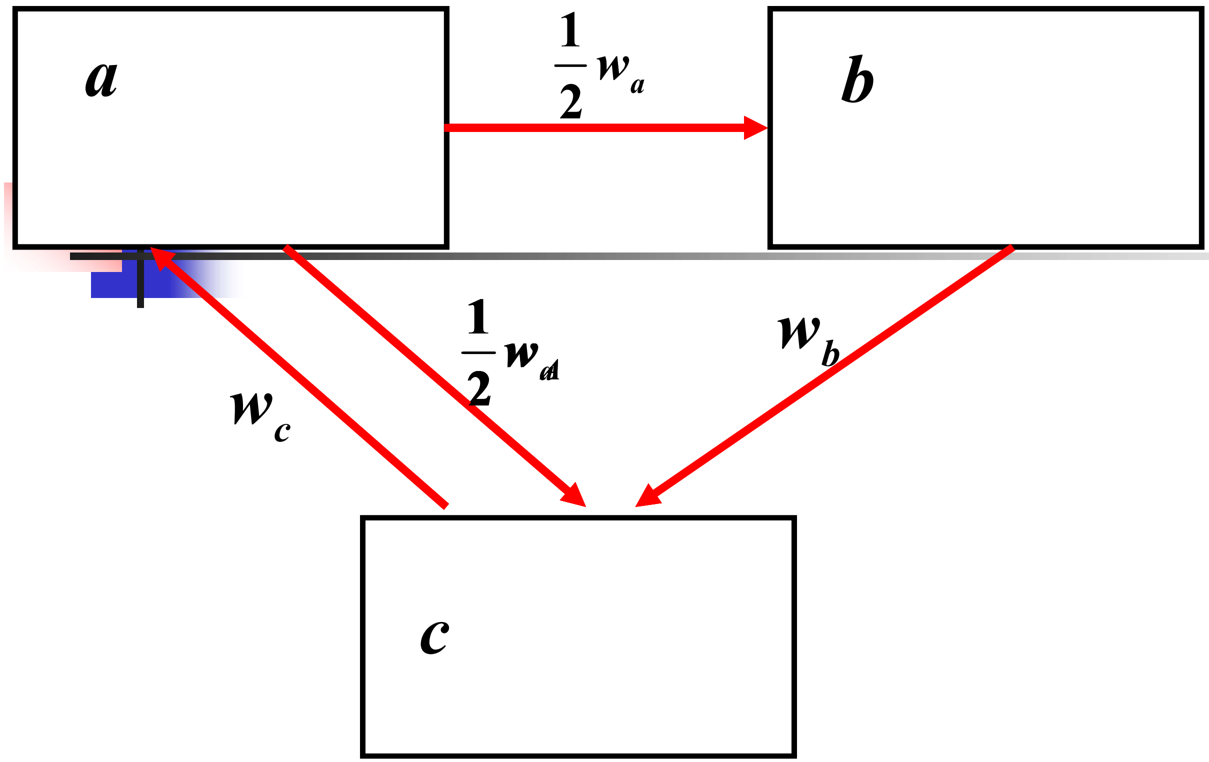
PageRank: Ranking Web Pages

PageRank模型的原始思想：依赖于网页的拓扑结构——网页间的相互链接关系

数学工具：Markov链，矩阵特征值

Cartoon illustrating basic principle of PageRank. The size of each face is proportional to the total size of the other faces which are pointing to it.

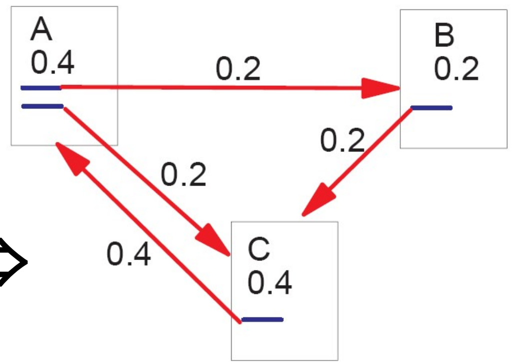

100
53
50
3
50
9
50
3
3



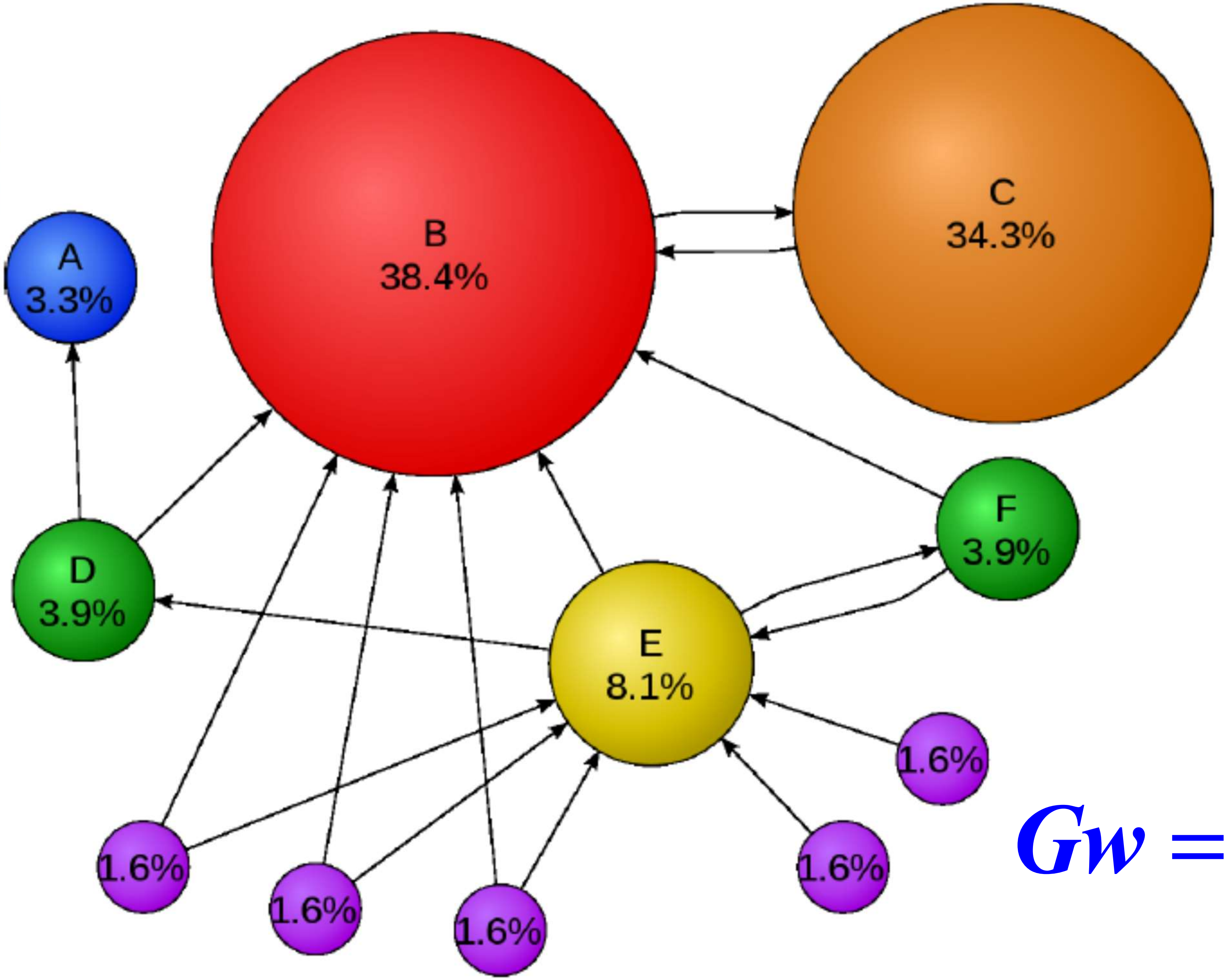
(1)	1/3	1/3	1/3
(2)	1/3	1/6	1/2
(3)	1/2	1/6	1/3
(4)	1/3	1/4	5/12
(5)	5/12	1/6	5/12
(6)	5/12	5/24	3/8

……

$$\begin{pmatrix} w_a^{(k)} & w_b^{(k)} & w_c^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_a^{(k+1)} & w_b^{(k+1)} & w_c^{(k+1)} \end{pmatrix} \Rightarrow$$



1	1/3	1/3	1/3
2	1/3	1/6	1/2
3	1/2	1/6	1/3
4	1/3	1/4	5/12
5	5/12	1/6	5/12
6	5/12	5/24	3/8
7	3/8	5/24	5/12
8	5/12	3/16	19/48
9	19/48	5/24	19/48
10	19/48	19/96	13/32



$$Gw = w$$

初等（数学）VS　高等（数学）

直观的、自然
的数学

人为构造的、
不自然的数学

古代 与 近现代

缓慢的积累与
迅速的扩充

丹皮尔《科学史》节选

开普勒深信上帝是依照完美的数的原则创造世界的，所以根本性的数学谐和，即所谓天体的音乐，乃是行星运动的真实的可以发现的原因。这是鼓励开普勒辛勤工作的真正动力。

给与他更大欣喜的另一种关系，即距离方面的关系。如果在包容土星轨道的天球里内接一个正六面体的话，木星的天球就恰好外切于这个六面体...上帝总是在运用几何学。

回到数的神秘学说，竟然会使哥白尼和开普勒建立这样一个体系，它通过伽利略与牛顿，把我们直接送到十八世纪法国百科全书派和十九世纪德国唯物主义的机械哲学那里去，这真可以算是历史的揶揄之一。

课程说明

- 总成绩比例：平时20%，期中20%，期末60%
- 期中考试时间：第八周周末（具体时间待定），2小时
- 期中考试范围：教材前三章（大约）
- 本学期学习范围：教材前八章
- 第4周开始有助教上习题课，每周一次（时间地点待定）
- 课堂收发作业：
- **为了保证收发作业尽量的井然有序，我们明确以下的收发作业的规则。**
- **1. 作业按学号分为*组，每组一个作业袋，袋子右上角有标记，**
- **2. 同学们在自己的作业首页的右上角标注一下自己的上课时间和组号；**
- **3. 交的作业和发的作业分别放在*个袋中，交和收的作业袋放在教室的不同区，以便作业的收发更有秩序。**

教学进度安排（暂定）

周次	月份	一	二	三	四	五	六	日	教学内容	教材参考章节	教学内容	教材参考章节	习题课与自测
1	9	13	14	15	16	17	18	19	预备知识		线性映射基本概念	1.1	
2	9	20	21	22	23	24	25	26	线性映射和矩阵	1.2	线性方程组	1.3	
3	9~10	27	28	29	30	1	2	3	矩阵的运算	1.4	可逆矩阵	1.5	
4	10	4	5	6	7	8	9	10	可逆矩阵	1.5	分块矩阵和LU分解	1.6, 1.7	习题课
5	10	11	12	13	14	15	16	17	子空间基本概念	2.1	基和维数	2.2	习题课
6	10	18	19	20	21	22	23	24	矩阵的秩	2.3	线性方程组	2.4	习题课
7	10	25	26	27	28	29	30	31	内积、标准正交基	3.1	正交矩阵和QR分解	3.2	习题课
8	11	1	2	3	4	5	6	7	正交投影和最小二乘法	3.3	复习		习题课，期中考试
9	11	8	9	10	11	12	13	14	行列式基本性质	4.1, 4.2	行列式的计算和应用	4.3	习题课
10	11	15	16	17	18	19	20	21	特征值与特征向量	5.1， 5.2	对角化	5.3	习题课
11	11	22	23	24	25	26	27	28	相似	5.4	实对称矩阵	6.1	习题课
12	12	29	30	1	2	3	4	5	正定矩阵	6.2	奇异值分解	6.3	习题课
13	12	6	7	8	9	10	11	12	奇异值分解	6.3	线性空间，基和维数	7.1　7.2	习题课
14	12	13	14	15	16	17	18	19	基和维数，线性映射	7.2　7.3	向量的坐标	7.4	习题课
15	12	20	21	22	23	24	25	26	线性映射的矩阵	7.5	复习		习题课
16	12~1	27	28	29	30	31	1	2					
17	1	3	4	5	6	7	8	9					
18	1	10	11	12	13	14	15	16					

淡紫色背景日期为普通工作日	绿色背景日期有课	黄色背景日期为休息日	红色为考试日期（待定）

数学归纳法

第一数学归纳法：给定一个与自然数 n 有关的命题 $P(n)$

1. 可以证明当 n 取初始值 n_0 时，命题 $P(n_0)$ 成立
2. 假设当 $n=k\left(k\geq n_0\right)$ 时，命题 $P(k)$ 成立，可以证明当 $n=k+1$ 时，命题 $P(k+1)$ 也成立。

则对一切自然数 $n\geq n_0$，命题 $P(n)$ 都成立。

证明：平方和公式：$1+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

证. 当 $n=1$ 时，命题显然成立，

假设当 $n=k$ 时，命题成立，即 $1+2^2+\cdots+k^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

当 $n=k+1$ 时, $1+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

则对一切自然数 $n\geq 1$，命题 $1+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 都成立。

第二数学归纳法：给定一个与自然数 n 有关的命题 $P(n)$

1. 可以证明当 n 取初始值 n_0 时，命题 $P(n_0)$ 成立
2. 假设当 $n \le k\ (k \ge n_0)$ 时，命题 $P(k)$ 成立，可以证明当 $n = k+1$ 时，命题 $P(k+1)$ 也成立。

则对一切自然数 $n \ge n_0$，命题 $P(n)$ 都成立。

例 0.2.7 令 p_n 为自然数中的第 n 个素数．我们来证明，第 n 个素数 p_n 一定小于等于 $2^{2^{n-1}}$．☺

证．当 $n = 1$ 时，命题显然成立．

假设当 $n \leqslant k$ 时命题成立，下面考虑 p_{k+1}．由例 0.2.2 可得，$p_{k+1} \leqslant p_1p_2\cdots p_k + 1$．根据归纳假设，我们有

$$p_{k+1} \leqslant p_1p_2\cdots p_k + 1 \leqslant 2^{2^0}2^{2^1}\cdots 2^{2^{k-1}} + 1 \leqslant 2^{2^0+2^1+\cdots+2^{k-1}} + 1 \leqslant 2^{2^k-1} + 1 \leqslant 2^{2^k}.$$

因此命题成立．□

0.3 映射

最后回顾关于映射的基本概念.

设有集合 X 和 Y, 如果 X 中的任意元素 x, 都以某种法则对应于 Y 中唯一一个元素, 则称这个对应的法则 f 是集合 X 到集合 Y 的一个**映射**, X 中的元素 X 所对应的 Y 中的元素常记作 $f(x)$.

两个映射 $f,g\colon X\to Y$ 相等, 当且仅当对任意 $x\in X$, $f(x)=g(x)$.

映射用如下记号表示:

$$\begin{aligned} f\colon\ X &\to Y,\\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

这里, 集合 X 称为映射 f 的**定义域**, 集合 Y 称为映射 f 的**陪域**. 设 $x\in X, y=f(x)\in Y$, 我们称 y 为 x 在映射 f 下的**像**, x 为 y 在 f 下的**原像**. 注意, Y 中的元素不一定都有原像; 有原像时, 原像也可能不唯一. 定义域 X 中所有元素在 f 下的像构成 Y 的一个子集 $\{f(x)\mid x\in X\}$, 称为映射 f 的**像集**或**值域**, 记作 $f(X)$.

根据映射的像集和原像的性质，我们考虑如下三种特殊情形：

1. 如果对 X 中的任意两个不同元素 x_1, x_2，都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 f 是一个**单射**；即，任何元素的原像至多只有一个.

2. 如果对 Y 中的任意元素 y，都存在 X 中的某个 x，使得 $y = f(x)$，则称 f 是一个**满射**；即，f 的像集 $f(X) = Y$.

3. 映射 f 既是单射又是满射，则称 f 是一个**双射**. 双射 f 给出了集合 X 和 Y 之间的一个一一对应.

映射之间最重要的运算是两个映射的复合. 设 X, Y, Z 是三个集合，$f: X \to Y$，$g: Y \to Z$ 是两个映射，则可以定义一个映射

$$\begin{aligned} h:\ X &\to Z, \\ x &\mapsto h(x) = g(f(x)). \end{aligned}$$

称其为 g 与 f 的**复合**，记作 $h = g \circ f$. 可以如下表示：

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z, \\ x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)). \end{array}$$