线性代数 第24讲

12月1日

对称正定矩阵

上一讲要点回顾

正定矩阵

合同标准型

例题选讲

实对称矩阵的性质

1. 特征值均为实数

2. 属于不同特征值的特征向量互相正交

3. 对 n 阶实对称矩阵 A，存在 n 阶正交矩阵 Q

   和实对角矩阵 Λ，使得 $A = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$.

意味着每个特征值的几何重数一定等于代数重数.

单选题 1分 设置

练习 6.1.7 计算下列矩阵及其特征值. 哪些是对称矩阵? 哪些矩阵的特征值是 ± 1? 由此看出正交相似的特殊性.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

A 对称矩阵为1,2,3， 特征值±1的为1,3

B 对称矩阵为1,3， 特征值±1的为1,3

C 对称矩阵为1, 3， 特征值±1的为2,3

提交

练习 6.1.7 计算下列矩阵及其特征值. 哪些是对称矩阵? 哪些矩阵的特征值是 ±1? 由此看出正交相似的特殊性.

1. $\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}$.

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\right)^T=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\neq\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}\right)^T\neq\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\right)^T=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}$$

填空题 2分

设置

若矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & x & 1\\ x & 1 & y\\ 1 & y & 1\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}$ 相似，则

x= [填空1]　　y= [填空2]

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & \boldsymbol{x} & 1\\ \boldsymbol{x} & 1 & \boldsymbol{y}\\ 1 & \boldsymbol{y} & 1\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}$ 相似，则

$$\begin{vmatrix}1 & \boldsymbol{x} & 1\\ \boldsymbol{x} & 1 & \boldsymbol{y}\\ 1 & \boldsymbol{y} & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & \boldsymbol{x} & 1\\ 0 & 1-\boldsymbol{x}^2 & \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\\ 0 & \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x} & 0\end{vmatrix}=-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2=0\Rightarrow \boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$$

$$\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}0 & -\boldsymbol{x} & -1\\ -\boldsymbol{x} & 0 & -\boldsymbol{x}\\ -1 & -\boldsymbol{x} & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -\boldsymbol{x} & -1\\ 0 & \boldsymbol{x}^2 & -\boldsymbol{x}\\ -1 & -\boldsymbol{x} & 0\end{vmatrix}=-2\boldsymbol{x}^2=0\Rightarrow \boldsymbol{x}=0$$

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -\boldsymbol{x} & -1\\ -\boldsymbol{x} & \lambda-1 & -\boldsymbol{x}\\ -1 & -\boldsymbol{x} & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda\cdot\left[2\boldsymbol{x}^2-(\lambda-1)(\lambda-2)\right]$$

瑞雷（Rayleigh）商

定义 6.1.7 (Rayleigh 商) 给定实矩阵 A 和非零向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，实数 $\dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}$ 称为 $\boldsymbol{x}$ 关于 A 的 Rayleigh 商.

若 A 和 B 正交相似，即存在正交矩阵 Q 使得 $Q^{\mathrm{T}} A Q = B$，则

$$\frac{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} B \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}} = \frac{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} A Q \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}} = \frac{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} A Q \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} Q \boldsymbol{y}} = \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}},$$

即 $\boldsymbol{x} = Q\boldsymbol{y}$ 关于 A 的 Rayleigh 商等于 $\boldsymbol{y}$ 关于 B 的 Rayleigh 商.

命题 6.1.8 设实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$，相应的特征向量为 $\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_n$，则

$$\lambda_1 = \max_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}, \qquad \lambda_i = \max_{\substack{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \perp \mathrm{span}(\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_{i-1})}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}, i = 2, \cdots, n.$$

类似地，

$$\lambda_n = \min_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}, \qquad \lambda_i = \min_{\substack{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \perp \mathrm{span}(\boldsymbol{q}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{q}_n)}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}, i = 1, \cdots, n-1.$$

对称正定矩阵

定义6.2.1 (正定矩阵) 给定 n 阶实矩阵 A, 如果对任意非零向量 $x \in R^n$, 都有 $x^T Ax > 0$, 则称 A 正定.

命题 6.2.2 对实对称矩阵 A，以下叙述等价：

1. A 正定；
2. A 的特征值都是正数；
3. 存在可逆矩阵 T，使得 $A = TT^{\mathrm{T}}$；
4. A 有 $\mathrm{LDL^T}$ 分解，且 D 的对角元素都是正数；
5. A 的顺序主子式都是正数；
6. A 的顺序主子阵都正定.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

顺序主子式

设 A∈M_n, 子式 $P_i=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix}, i=1,2,\cdots,n.$

称为矩阵 A 的第 i 阶**顺序主子式**.

例如三阶矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的各阶顺序主子式为

$$P_1=2, P_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3, P_3=|A|=1.$$

命题 6.2.2 对实对称矩阵 A，以下叙述等价：

1. A 正定；
2. A 的特征值都是正数；
3. 存在可逆矩阵 T，使得 $A = TT^{\mathrm{T}}$；
4. A 有 $\mathrm{LDL}^{\mathrm{T}}$ 分解，且 D 的对角元素都是正数；
5. A 的顺序主子式都是正数；

对实对称正定矩阵A，存在下三角矩阵L，使得 $A = LL^{\mathrm{T}}$，这称为 A 的 Cholesky 分解.

证. 采用轮转证法.

$1 \Rightarrow 2$: 对任意特征值 λ，任取对应的特征向量 x，则 $x^T Ax = \lambda x^T x > 0$，于是 $\lambda > 0$.

$2 \Rightarrow 3$: 对称矩阵 A 有谱分解 $A = Q\Lambda Q^T$，由于 A 的对角元素是特征值且都是正数，因此存在对角矩阵 D 使得 $D^2 = \Lambda$. 令 $T = QD$，即得结论.

$3 \Rightarrow 4$: 设 T^T 的 QR 分解为 $Q\tilde{L}^T$，则 $A = \tilde{L}Q^T Q\tilde{L}^T = \tilde{L}\tilde{L}^T$. 令 $\tilde{L} = L\tilde{D}$，其中 L 是单位下三角矩阵，$\tilde{D}$ 是对角矩阵，则有 $A = L\tilde{D}^2 L^T$. 令 $D = \tilde{D}^2$ 即得.

“$4 \Rightarrow 5$”：由 A 有 $\mathrm{LDL}^{\mathrm{T}}$ 分解，按第 i 个顺序主子阵对 A 分块，有

$$\begin{bmatrix} A_i & A_{21}^{\mathrm{T}} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = A = LDL^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} L_i & \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_i & \\ & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_i & \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

计算即得 $A_i = L_i D_i L_i^{\mathrm{T}}$，因此第 i 个顺序主子式

$$\det(A_i) = \det(L_i)\det(D_i)\det(L_i^{\mathrm{T}}) = \det(D_i) > 0.$$

5. A 的顺序主子式都是正数;

6. A 的顺序主子阵都正定.

如果 A 为正定，C 可逆，则 $C^T AC$ 也正定.
对任意 $x \neq 0$,则 $Cx \neq 0$,
$x^T C^T ACx = (Cx)^T ACx > 0$.

$5 \Rightarrow 6$: 对 n 用数学归纳法. 当 $n=1$时，显然，现假设命题对任意 $n-1$阶实对称矩阵成立 .
对 n 阶实对称矩阵 A, 对 A 分块 $A = \begin{bmatrix} A_{n-1} & a \\ a^T & a_{nn} \end{bmatrix}$, 则 A_{n-1} 的顺序主子式都大于0, 且 $|A| > 0$.
根据归纳假设，A_{n-1} 的顺序主子阵都正定，只需再证 A正定。

$$A = \begin{bmatrix} A_{n-1} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \\ \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} A_{n-1}^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{n-1} & \\ & a_{nn} - \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} A_{n-1}^{-1} \boldsymbol{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A_{n-1}^{-1} \boldsymbol{a} \\ & 1 \end{bmatrix}.$$

计算行列式即有 $a_{nn} - \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} A_{n-1}^{-1} \boldsymbol{a} = \frac{\det(A)}{\det(A_{n-1})} > 0$.

$\begin{bmatrix} x \\ x_n \end{bmatrix} \neq 0$时, $\begin{bmatrix} x^T & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn} - a^T A_{n-1}^{-1} a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_n \end{bmatrix} = x^T A_{n-1} x + \left(a_{nn} - a^T A_{n-1}^{-1} a\right) x_n^2 > 0$

所以 $\begin{bmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn} - a^T A_{n-1}^{-1} a \end{bmatrix}$正定，$A$为正定。

单选题 1分

设置

矩阵 $S=\begin{bmatrix} s & -4 & -4 \\ -4 & s & -4 \\ -4 & -4 & s \end{bmatrix}$，当 s 取值在什么范围是，S 为正定。

A s>8

B s>4 或 s<-4

C s>0

D s>4

提交

矩阵 $\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} s & -4 & -4 \\ -4 & s & -4 \\ -4 & -4 & s \end{bmatrix}$，当 s 取值在什么范围是，$\boldsymbol{S}$ 为正定。

$$P_1 = s > 0$$

$$P_2 = \begin{vmatrix} s & -4 \\ -4 & s \end{vmatrix} = s^2 - 16 > 0 \Rightarrow |s| > 4$$

$$P_3 = \begin{vmatrix} s & -4 & -4 \\ -4 & s & -4 \\ -4 & -4 & s \end{vmatrix} = (s+4)^2(s-8) > 0 \Rightarrow s > 8$$

定义 6.2.3 给定 n 阶实矩阵 A，如果对任意非零向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，都有

1. $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} > 0$，则称矩阵 A **正定**，如前定义；
2. $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} \geqslant 0$，则称矩阵 A **半正定**；
3. $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} < 0$，则称矩阵 A **负定**；
4. $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} \leqslant 0$，则称矩阵 A **半负定**；

如果 A 不满足以上任何一种条件，则称 A **不定**.

命题 6.2.4 对实对称矩阵 A，以下叙述等价：

1. A 半正定；
2. A 的特征值都是非负数；
3. 存在矩阵 T，使得 $A = TT^{\mathrm{T}}$；
4. A 存在 $\mathrm{LDL}^{\mathrm{T}}$ 分解，且 D 的对角元素都是非负数.

练习6.2.13 证明，
矩阵 A 为实对称矩阵半正定，
当且仅当它的所有主子式都非负

练习6.2.11 举例说明，
实对称矩阵 A 的所有顺序主子式
都非负，但 A 并不半正定

命题 6.2.5 对 n 阶实对称矩阵 A，如果存在 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$，使得 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} > 0, \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{y} < 0$，则存在非零向量 $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$，使得 $\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{z} = 0$.

证. 拟设 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + k\boldsymbol{y}$. 显然 $\boldsymbol{z} \neq \mathbf{0}$. 考虑 $\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} + 2k\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{y} + k^2 \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{y} = 0$. 注意判别式 $(2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{y})^2 - 4(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{y}) > 0$，故方程有实数根. 因此存在 $k \in \mathbb{R}$，使得拟设的 $\boldsymbol{z}$ 满足条件. $\square$

定义 6.2.6 (合同) 对方阵 A，如果存在可逆矩阵 X 使得 $X^{\mathrm{T}}AX=B$，则称 A 和 B **合同**，或 A 合同于 B.

命题 6.2.7 方阵的合同关系是等价关系.

合同变换

命题 6.2.8 对实对称矩阵 A，存在可逆矩阵 X，使得 $X^{\mathrm{T}}AX=J=\begin{bmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0 \end{bmatrix}$，其中 $r=\operatorname{rank}(A), 0\leqslant p\leqslant r$.

证. 根据实对称矩阵的谱分解，存在正交矩阵 Q，使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ=\Lambda$. 取置换矩阵 P，使得 $P^{\mathrm{T}}\Lambda P=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_p>0, \lambda_{p+1},\cdots,\lambda_r<0, \lambda_{r+1}=\cdots=\lambda_n=0$. 令 $Y=\operatorname{diag}(\frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}},\cdots,\frac{1}{\sqrt{|\lambda_r|}},1,\cdots,1)$，易知 $Y^{\mathrm{T}}\Lambda Y=\begin{bmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0 \end{bmatrix}=J$. 令 $X=QPY$，则 $X^{\mathrm{T}}AX=(QPY)^{\mathrm{T}}A(QPY)=J$. □

命题 6.2.8 中的 J 称为实对称矩阵 A 的**合同标准形**.

定理6.2.9 (Sylvester 惯性定律) 实对称矩阵的合同标准形唯一，且它的合同标准形中正、负、零对角元的个数分别和它的正、负、零特征值的个数相等.

证明. 只需证明合同标准形唯一，就可以得到合同标准形中正、负、零对角元的个数与正、负、零特征值的个数分别相等.

设该实对称矩阵为 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，而 $r = \operatorname{rank}(A)$，且它有两个合同标准形

$J_1 = X_1^T A X_1$, $J_2 = X_2^T A X_2$

根据合同关系的等价性，J_1 合同于 J_2. 由于合同是特殊的相抵，因此 J_1, J_2 的秩相等，即零对角元的个数相等.

故可记 $J_1 = \begin{bmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0 \end{bmatrix}$, $J_2 = \begin{bmatrix} I_q & & \\ & -I_{r-q} & \\ & & 0 \end{bmatrix}$. 下面来证明 $p = q$，即可推出合同标准形唯一.

设 M 是 $\boldsymbol{X}_1$ 的前 $\boldsymbol{p}$ 列生成的子空间，N 是 $\boldsymbol{X}_2$ 的第 $\boldsymbol{q}+1$ 到 $\boldsymbol{n}$ 列生成的子空间.

由于 $\boldsymbol{X}_1$ 是可逆矩阵，其列线性无关，因此 $\dim \mathrm{M} = \boldsymbol{p}$. 类似地，$\dim \mathrm{N} = \boldsymbol{n}-\boldsymbol{q}$.

对任意非零 $\boldsymbol{x} \in \mathrm{M}$，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$；对任意非零 $\boldsymbol{x} \in \mathrm{N}$，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant 0$.

因此 $\mathrm{M}\cap\mathrm{N} = \{\boldsymbol{0}\}$. 由此不难得到: M 的一组基与 N 的一组基线性无关.

于是 $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{n} - \boldsymbol{q} = \dim \mathrm{M} + \dim \mathrm{N} \leqslant \dim \mathrm{R}^n = \boldsymbol{n}$. 由此立得 $\boldsymbol{p} \leqslant \boldsymbol{q}$.

由 J_1, J_2 地位相同，同理有 $q \leqslant p$，因此 $p = q$.

实对称矩阵的合同标准形中，正对角元 1 的数目，即 p，称为A 的正惯性指数；

负对角元-1 的数目，即 $r-p$，称为 A 的负惯性指数；

三元组$(p, r-p, n-r)$ 称为 A 的惯性指数或惯量.

因此，正负惯性指数是实对称矩阵在合同变换下的不变量，

而实对称矩阵的合同标准形由它的正负惯性指数唯一决定.

容易看出，正惯性指数、负惯性指数分别等于正特征值、负特征值的个数.

特别地，n 阶实对称矩阵 A 正定，

当且仅当 A 的正惯性指数 $p=n$，当且仅当A 的合同标准形是 I_n.

n阶实对称矩阵在合同变换下的等价类数目有限，共有 $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$类 。

命题 6.2.8 对实对称矩阵 A，存在可逆矩阵 X，使得 $X^{\mathrm{T}}AX=J=\begin{bmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0 \end{bmatrix}$，

其中 $r=\operatorname{rank}(A), 0 \leqslant p \leqslant r$.

定理6.2.9（Sylvester 惯性定律）实对称矩阵的合同标准形唯一，且它的合同标准形中正、负、零对角元的个数分别和它的正、负、零特征值的个数相等.

单选题 1分

设置

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+x_2^2-x_3^2+2x_1x_2-x_1x_3+4x_2x_3$$

写为矩阵形式，是下面哪一项

A
$$(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix} 3 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

B
$$(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

C A,B均不对

提交

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+x_2^2-x_3^2+2x_1x_2-x_1x_3+4x_2x_3$$

$$=3x_1^2+x_1x_2-\tfrac{1}{2}x_1x_3+x_2x_1+x_2^2+2x_2x_3-\tfrac{1}{2}x_3x_1+2x_3x_2-x_3^2$$

$$=\left(x_1,x_2,x_3\right)\begin{bmatrix} 3x_1+x_2-\dfrac{1}{2}x_3 \\ x_1+x_2+2x_3 \\ -\dfrac{1}{2}x_1+2x_2-x_3 \end{bmatrix}$$

$$=\left(x_1,x_2,x_3\right)\begin{bmatrix} 3 & 1 & -\dfrac{1}{2} \\ 1 & 1 & 2 \\ -\dfrac{1}{2} & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

例 6.2.10 (配平方) 给定 $\mathbb{R}$ 上齐次二次函数 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$，证明 f 可以写成齐次线性函数的平方的和差形式. ☺

证. 令 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}, A=\left[\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}\right]$，则 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}$. 根据命题 6.2.8，存在可逆矩阵 $T=\left[t_{ij}\right]$，使得 $A=T^{\mathrm{T}}JT$. 因此 $f(\boldsymbol{x})=(T\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}JT\boldsymbol{x}$. 令 $\boldsymbol{y}=T\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$，那么 $y_i=\sum\limits_{j=1}^{n}t_{ij}x_j$ 是齐次线性函数，而 $f(\boldsymbol{x})=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$，其中 p 是 A 的正惯性指数，r 是 A 的秩. □

注6.2.11 齐次二次函数$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$，

称为自变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次型.

命题 6.2.8 对实对称矩阵 A，存在可逆矩阵 X，使得 $X^{\mathrm{T}}AX=J=\begin{bmatrix}I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0\end{bmatrix}$，

其中 $r=\operatorname{rank}(A), 0\leqslant p\leqslant r$.

例1　实对称矩阵满足 $A^2-3A+2I=0$，证明 A 是正定矩阵.

证明　设 λ 是 A 的任意一个特征值，x 是 λ 所属的特征向量，则 $Ax=\lambda x$，所以 $A^2x=A(\lambda x)=\lambda Ax=\lambda^2x$，

利用已知条件 $A^2-3A+2I=0$，可知 $(\lambda^2-3\lambda+2)x=0$，

因为 x 为特征向量，所以 $x\neq 0$，故 $\lambda^2-3\lambda+2=0$，

所以 $\lambda=2$，或 $\lambda=1$. 由正定矩阵的性质可知 A 是正定矩阵.

例2　设 A 是正定矩阵，则存在正定阵 B 满足 $B^2=A$.

证明　实对称矩阵可正交对角化，存在正交阵 Q 使得 $A=Q^TDQ$，

其中 D 是对角线元素为 A 的所有特征值的对角矩阵，

由正定矩阵的特征值均为正，可知 D 的对角线上的所有数为正数，

所以存在对角线上数均为正数的对角矩阵 F 使得 $F^2=D$，

所以 $A=Q^TDQ=Q^TFQQ^TFQ=B^2$，

这里 $B=Q^TFQ$ 为正定矩阵.

例3　设 A 是 n 阶正定矩阵， B 是 n 阶实对称矩阵， 则存在可逆矩阵 P 使得 $P^TAP = I$， P^TBP 为对角阵.

证明　由正定矩阵与单位矩阵相合，可知存在可逆矩阵 C，使得 $C^TAC = I$，$D = C^TBC$ 仍为实对称矩阵，

存在正交阵 Q 使得 $Q^TDQ = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$，

这里 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是 D 的所有特征值.

记 $P = CQ$， 则 P 是可逆矩阵 P， 且 $P^TAP = I$，

$P^TBP = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$，

例4　设 $A \in M_{m,n}(R)$， 且 A 的秩为 n， 证明 A^TA 正定.

证明　由 $(A^TA)^T = A^TA$ 知 A^TA 是 n 阶实对称阵，

因为 $x^TA^TAx = (Ax)^TAx \geq 0$，且 $(Ax)^TAx = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$.

由 $r(A) = n$ 知齐次线性方程组 $Ax = 0$ 只有零解.

从而有 $Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$， 即 $(Ax)^TAx = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

所以 A^TA为正定矩阵.

作 业（12月1日）

~~~~~~

练习6.2

1(4,5,6)，2，3(1,3,5,7)，4，5，6，10，11，15

12月6日提交

~~~~~~