线性代数 第26讲

12月8日

第七章第1讲　线性空间

第6章要点回顾

一般线性空间

子空间的交与子空间的和

子空间的直和

实对称矩阵的好的性质

1. 特征值均为实数

2. 属于不同特征值的特征向量互相正交

3. 对 n 阶实对称矩阵 A，存在正交矩阵 Q 和实对角矩阵 Λ，使得 $A = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$.

定义6.2.1 (正定矩阵) 给定 n 阶实矩阵 A，如果对任意非零向量 $x \in R^n$，都有 $x^T Ax > 0$，则称 A 正定.

命题 6.2.2 对实对称矩阵 A，以下叙述等价：

1. A 正定；
2. A 的特征值都是正数；
3. 存在可逆矩阵 T，使得 $A = TT^{\mathrm{T}}$；
4. A 有 $\mathrm{LDL}^{\mathrm{T}}$ 分解，且 D 的对角元素都是正数；
5. A 的顺序主子式都是正数；
6. A 的顺序主子阵都正定.

合同变换

定义 6.2.6 (合同) 对方阵 A，如果存在可逆矩阵 X 使得 $X^{\mathrm{T}}AX=B$，则称 A 和 B **合同**，或 A 合同于 B.

命题 6.2.7 方阵的合同关系是等价关系.

命题 6.2.8 对实对称矩阵 A，存在可逆矩阵 X，使得 $X^{\mathrm{T}}AX=J=\begin{bmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0 \end{bmatrix}$，

其中 $r=\mathrm{rank}(A), 0\leqslant p\leqslant r$.

命题 6.2.8 中的 J 称为实对称矩阵 A 的**合同标准形**.

定理6.2.9 (Sylvester 惯性定律) 实对称矩阵的合同标准形唯一，且它的合同标准形中正、负、零对角元的个数分别和它的正、负、零特征值的个数相等.

正惯性指数、负惯性指数，三元组$(p, r-p, n-r)$ 称为 A 的惯性指数或惯量.

正惯性指数、负惯性指数分别等于正特征值、负特征值的个数.

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+x_2^2-x_3^2+2x_1x_2-x_1x_3+4x_2x_3$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}3 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 1 & 1 & 2\\ -\frac{1}{2} & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

$$X^{\mathrm{T}}AX=J=\begin{bmatrix}I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0\end{bmatrix}$$

例 6.2.10 (配平方) 给定 $\mathbb{R}$ 上齐次二次函数 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$，证明 f 可以写成齐次线性函数的平方的和差形式. ☺

证. 令 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$, $A=\left[\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}\right]$, 则 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}$. 根据命题 6.2.8，存在可逆矩阵 $T=\left[t_{ij}\right]$，使得 $A=T^{\mathrm{T}}JT$. 因此 $f(\boldsymbol{x})=(T\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}JT\boldsymbol{x}$. 令 $\boldsymbol{y}=T\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}$，那么 $y_i=\sum\limits_{j=1}^{n}t_{ij}x_j$ 是齐次线性函数，而 $f(\boldsymbol{x})=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$，其中 p 是 A 的正惯性指数，r 是 A 的秩. □

注6.2.11 齐次二次函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$，称为自变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次型.

奇异值和左、右奇异向量

定义 6.3.1 (奇异值) 给定 $m \times n$ 矩阵 A，如果存在非零向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m, \sigma \geqslant 0$，使得 $A\boldsymbol{x} = \sigma\boldsymbol{y}, A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \sigma\boldsymbol{x}$，则称 σ 为 A 的一个**奇异值**，$\boldsymbol{x}$ 为 A 的属于 σ 的一个**右奇异向量**，$\boldsymbol{y}$ 为 A 的属于 σ 的一个**左奇异向量**.

A 的右奇异向量是 $A^{\mathrm{T}}A$ 的特征向量；A 的左奇异向量是 AA^{T} 的特征向量，

A 的奇异值是 $A^{\mathrm{T}}A$ 或 AA^{T} 的特征值的算术平方根.

定理 6.3.2 (奇异值分解) 给定 $m \times n$ 矩阵 A，存在 m 阶正交矩阵 U 和 n 阶正交矩阵 V，使得 $A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$，其中

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & O \\ O & O \end{bmatrix}, \quad \Sigma_r = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0.$$

奇异值分解，简称SVD（Singular Value Decomposition）

奇异值：$A^T A v_i = \sigma_i^2 v_i$， $AA^T u_k = \sigma_k^2 u_k$

$$A^T A = V\Lambda V^T = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Sigma_r^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = V_1\Sigma_r^2 V_1^T \Rightarrow V_1^T A^T A V_1 = \Sigma_r^2 \Rightarrow \Sigma_r^{-1} V_1^T A^T A V_1 \Sigma_r^{-1} = I$$

令 $U_1 = AV_1\Sigma_r^{-1}$，则 $U_1^T U_1 = I$， $A = U_1\Sigma_r V_1^T = U_r\Sigma_r V_r^T = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_r u_r v_r^T$

将 U_1 的各列扩充为一组标准正交基 $\begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix}$

$$U^T A V = \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^T A V_1 & U_1^T A V_2 \\ U_2^T A V_1 & U_2^T A V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = U\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^T.$$

$A = U_r \Sigma_r V_r^{\mathrm{T}} = \sigma_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} + \cdots + \sigma_r \boldsymbol{u}_r \boldsymbol{v}_r^{\mathrm{T}}$，这称为 A 的**简化奇异值分解**.

$$A = U_1\Sigma_r V_1^T \Rightarrow AA^T = U_1\Sigma_r V_1^T V_1 \Sigma_r U_1^T = U_1\Sigma_r^2 U_1^T = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Sigma_r^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix}$$

1. $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ 是 $\mathcal{R}(A)$ 的一组标准正交基；

2. $\boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ 是 $\mathcal{N}(A^{\mathrm{T}})$ 的一组标准正交基；

3. $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r$ 是 $\mathcal{R}(A^{\mathrm{T}})$ 的一组标准正交基；

4. $\boldsymbol{v}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ 是 $\mathcal{N}(A)$ 的一组标准正交基.

矩阵的广义逆

矩阵 A 的奇异值分解 $A=U_r\Sigma_r V_r^T$，U_r的列向量为$\mathbf{R}(A)$的一组标准正交基

关于矩阵 A 的正交投影矩阵 $P_A=U_rU_r^T$

记矩阵 $A^+=V_r\Sigma_r^{-1}U_r^T$，则 $AA^+=U_r\Sigma_rV_r^TV_r\Sigma_r^{-1}U_r^T=U_rU_r^T=P_A$

$A^+=V_r\Sigma_r^{-1}U_r^T$ 称为矩阵 A 的Moore-Penrose广义逆，简称广义逆。

当 A 可逆时，方程组有唯一解 $A^{-1}\boldsymbol{b}$. 此时，A^+ 就是 A 的逆A^{-1}.

$$\boldsymbol{b}=P_A\boldsymbol{b}+(I-P_A)\boldsymbol{b}=AA^+\boldsymbol{b}+(I-AA^+)\boldsymbol{b}$$

$\boldsymbol{b}$ 与 $P_A\boldsymbol{b}=AA^+\boldsymbol{b}$ 的关系，$A^+\boldsymbol{b}$ VS $A^{-1}\boldsymbol{b}$

当 $Ax=b$ 无解时，$\|b-AA^+b\|=\min\limits_{x\in R(A)}\|b-Ax\|$

当 $Ax=b$ 有无穷多解时，$b\in R(A)$，$AA^+b=b$

$A^+\boldsymbol{b}$ 是方程组所有解中长度最小的解. $\|A^+b\|=\min\limits_{x_0\in N(A)}\|A^+b+x_0\|$

矩阵的谱范数

定义 6.3.6 (矩阵的谱范数) 对任意矩阵 A，非负数 $\max\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\dfrac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$ 称为矩阵 A 的**谱范数**，记为 $\|A\|$.

命题 6.3.7 矩阵的谱范数满足：

1. $\|A\|\geqslant 0$，且 $\|A\|=0$ 当且仅当 $A=O$；
2. $\|kA\|=|k|\|A\|$；
3. $\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$；
4. $\|AB\|\leqslant\|A\|\|B\|$；
5. 如果 U,V 正交，则 $\|UAV^{\mathrm{T}}\|=\|A\|$.

命题 6.3.8 对任意矩阵 A，矩阵的谱范数 $\|A\|$ 等于 A 的最大奇异值.

命题 6.3.9 设实矩阵 A 的奇异值为 $\sigma_1\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n$，相应的右奇异向量为 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$，则

$$\sigma_1=\max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}}\frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|},\qquad \sigma_i=\max_{\substack{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{x}\perp\operatorname{span}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{i-1})}}\frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|},i=2,\cdots,n.$$

练习 6.3.9 ☕ 证明矩阵任意特征值的绝对值不大于其最大的奇异值.

练习 6.3.10 证明或者举出反例.

1. n 阶方阵 A 为正交矩阵当且仅当它有 n 个奇异值，值都是 1.
2. 如果 n 阶方阵有 n 个奇异值，则所有奇异值的乘积等于所有特征值的乘积.
3. 假设 n 阶方阵 A 的 SVD 分解为 $A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$, 而 $A+I_n$ 的 SVD 分解为 $A+I_n = U(\Sigma+I_n)V^{\mathrm{T}}$. 证明 A 是对称矩阵.
4. 如果 n 阶方阵 A 的 n 个奇异值就是它的 n 个特征值，则 A 是对称矩阵.

定义 1.1.4 (线性运算) 为 $\mathbb{R}^m$ 中的向量定义两种运算[2]

1. 两个 m 维向量的**向量加法**: $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_m+b_m \end{bmatrix}$;

2. 一个 m 维向量与一个数的**数乘**: $k\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} ka_1 \\ \vdots \\ ka_m \end{bmatrix}$;

向量的加法和数乘统称向量的**线性运算**.

带有线性运算的集合 $\mathbb{R}^m$, 称为**向量空间** $\mathbb{R}^m$ 或**线性空间** $\mathbb{R}^m$.

命题 1.1.5 向量加法和数乘满足如下八条运算法则:

1. 加法结合律: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;
2. 加法交换律: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;
3. 零向量: 存在 m 维**零向量** $\mathbf{0}=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, 满足 $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$;
4. 负向量: 对任意 $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$, 记 $-\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_m \end{bmatrix}$, 它满足 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$, 称它为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**;
5. 单位数: $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$;
6. 数乘结合律: $(kl)\boldsymbol{a}=k(l\boldsymbol{a})$;
7. 数乘关于数的分配律: $(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$;
8. 数乘关于向量的分配律: $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$.

数学中推广与抽象都是逐步完成的,都有一个历史过程, 这个变化过程在今天的学习中也往往能够体现出来.

从2、3维几何空间到一般的n维向量空间$\mathbb{R}^n$, 再到更加抽象的线性空间.

先把维数从2, 3推广到 n; 再把 n 元有序数组推广成抽象的元素. 把 n维向量空间推广成了一般的线性空间.

高抽象性是有广泛应用的前提.

定义 7.1.2 (线性空间) 给定非空集合 $\mathcal{V}$ 和数域 $\mathbb{F}$，如果 $\mathcal{V}$ 上定义了**加法**运算 $+\colon \mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathcal{V}$，$\mathcal{V}$ 的元素和 $\mathbb{F}$ 中的数定义了**数乘**运算 $\cdot\colon \mathbb{F}\times\mathcal{V}\to\mathcal{V}$，且这两种运算满足如下八条运算法则：

1. 加法结合律：对任意 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\mathcal{V}$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；
2. 加法交换律：对任意 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathcal{V}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；
3. 零元素：存在元素 $\boldsymbol{0}\in\mathcal{V}$，对任意 $\boldsymbol{a}\in\mathcal{V}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$，其中 $\boldsymbol{0}$ 称为**零元素**；
4. 负元素：对任意 $\boldsymbol{a}\in\mathcal{V}$，存在 $\boldsymbol{b}\in\mathcal{V}$，满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，称它为 $\boldsymbol{a}$ 的**负元素**，记为 $-\boldsymbol{a}$；
5. 单位数：对任意 $\boldsymbol{a}\in\mathcal{V}$，$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；
6. 数乘结合律：对任意 $\boldsymbol{a}\in\mathcal{V},k,l\in\mathbb{F}$，$(kl)\boldsymbol{a}=k(l\boldsymbol{a})$；
7. 数乘对数的分配律：对任意 $\boldsymbol{a}\in\mathcal{V},k,l\in\mathbb{F}$，$(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$；
8. 数乘对向量的分配律：对任意 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathcal{V},k\in\mathbb{F}$，$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$；

则称 $\mathcal{V}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的**向量空间**或**线性空间**，其中的元素可以称为**向量**，零元素和负元素可以称为零向量和负向量.

减法可以自然地定义：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

定义 7.1.1 (数域) 给定 $\mathbb{C}$ 的子集 $\mathbb{F}$，如果 $\mathbb{F}$ 中至少包含一个非零复数，且 $\mathbb{F}$ 对复数的加减乘除四则运算封闭，即对任意 $a,b\in\mathbb{F}$，都有 $a+b, a-b, ab\in\mathbb{F}$，且当 $b\neq 0$ 时 $\frac{a}{b}\in\mathbb{F}$，则称 $\mathbb{F}$ 是一个**数域**.

可以验证，$\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ 都是数域，而 $\mathbb{N},\mathbb{Z}$ 不是数域. 数域 $\mathbb{F}$ 上的线性方程组的解（如果存在）也在数域 $\mathbb{F}$ 上.

设 F 是一个数集. 如果 F 满足

(1) 1,0∈F;

(2) F对于加法、减法、乘法、除法（除数不为零）运算封闭;则称F为一个数域.

我们熟悉的Q(有理数),R(实数),C(复数)都是数域.

Q是最小数域.

$F=\left\{a+b\sqrt{2}\,\middle|\,a,b\in Q\right\}$ 是数域吗?

线性空间V的简单性质

- V中零向量唯一，记为0.

假若θ_1, θ_2都是V的零向量，那么由θ_1是零向量，有$\theta_2+\theta_1 = \theta_2$.

又因θ_2是零向量，有 $\theta_1+\theta_2 = \theta_1$，于是 $\theta_1 = \theta_1+\theta_2 = \theta_2+\theta_1 = \theta_2$.

- V中每个向量α的负向量唯一，记为$-\alpha$.

如果β，γ都是α的负向量，则 $\beta = \beta+0 = \beta+(\alpha+\gamma) = (\beta+\alpha)+\gamma = 0+\gamma = \gamma$.

线性空间V的简单性质

- $0\alpha = \theta.$

  由$\alpha+0\alpha = 1\alpha+0\alpha = (1+0)\alpha = 1\alpha=\alpha$，两边同时加 $-\alpha$，所以$0\alpha = \theta.$

- $(-1)\alpha = -\alpha.$

  由$\alpha+(-1)\alpha = 1\alpha+(-1)\alpha = (1-1)\alpha = 0\alpha = 0$，所以$(-1)\alpha = -\alpha.$

- $k\theta=\theta.$

  由$\alpha+k\theta = (k\ k^{-1})\alpha+k\theta = k(k^{-1}\alpha+\theta) = k(k^{-1}\alpha) = \alpha$，所以$k\theta = \theta.$

例 7.1.5 1. 坐标向量空间及其子集:

(a) m 维向量的全体 $\mathbb{F}^m$，加法和数乘运算由定义 1.1.4 给出.

(b) $\mathbb{F}$ 中数组成的矩阵诱导的坐标向量空间的子集,如列空间 $\mathcal{R}(A)$、零空间 $\mathcal{N}(A)$.

2. 矩阵空间及其子集:

(a) $m \times n$ 矩阵的全体，记为 $\mathbb{F}^{m\times n}$，加法和数乘运算由定义 1.4.3 给出.

(b) 矩阵空间的子集：n 阶上（下）三角矩阵的全体；n 阶对角矩阵的全体；n 阶(反) 对称矩阵的全体.

3. 函数空间及其子集:

(a) 定义域为 D 的实值函数 $f\colon D \to \mathbb{R}$ 的全体构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，其中加法是函数的加法，数乘是常数和函数的乘法，称为函数空间.

(b) 定义域相同的实值连续函数的全体也构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，称为连续函数空间，记为 $C(D)$.

(c) 定义域相同的实值无穷次可导函数的全体也构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，称为光滑函数空间，记为 $C^\infty(D)$.

(d) 实系数多项式的全体也构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，称为多项式空间，记为 $\mathbb{R}[x]$.

(e) 次数小于 n 的实系数多项式的全体添上零多项式也构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，记为 $\mathbb{R}[x]_n$.

(f) 类似地，系数取自 $\mathbb{F}$ 的多项式，其全体构成的线性空间记为 $\mathbb{F}[x]$，同样可有 $\mathbb{F}[x]_n$. ☺

定义 7.1.6 (子空间) 给定数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $\mathcal{V}$ 及其非空子集 $\mathcal{M}$. 如果 $\mathcal{M}$ 关于 $\mathcal{V}$ 上的加法和数乘也构成线性空间，则称 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{V}$ 的**子空间**.

命题 7.1.7 线性空间 $\mathcal{V}$ 的非空子集 $\mathcal{M}$ 是一个子空间，当且仅当它对加法和数乘封闭.

证. "$\Rightarrow$": 显然. "$\Leftarrow$": 八条运算法则中只需验证零向量和负向量的存在性. 由于 $\mathcal{M}$ 非空，则存在 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{M}$. 根据数乘的封闭性，$\mathbf{0} = 0\boldsymbol{a} \in \mathcal{M}, -\boldsymbol{a} = (-1)\boldsymbol{a} \in \mathcal{M}$. □

子空间的例子

1. 对任意 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，$\mathcal{R}(A)$ 是 $\mathbb{F}^m$ 的子空间，$\mathcal{N}(A)$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的子空间.

2. 矩阵空间的子空间的包含链:

$$\{n \text{ 阶对角矩阵的全体}\} \subseteq \{n \text{ 阶上（下）三角矩阵的全体}\} \subseteq \{n \text{ 阶方阵的全体}\};$$
$$\{n \text{ 阶（反）对称矩阵的全体}\} \subseteq \{n \text{ 阶方阵的全体}\}.$$

3. 函数空间的子空间的包含链:

$$\text{多项式空间} \subseteq \text{光滑函数空间} \subseteq \text{连续函数空间} \subseteq \text{函数空间}.$$ ☺

例 7.1.9 1. n 阶可逆矩阵的全体**不是**线性空间，更不是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间，因为它对矩阵的加法和数乘运算不封闭.

2. 次数等于 $n-1$ 的实系数多项式的全体**不是**线性空间，更不是 $\mathbb{R}[x]_n$ 的子空间，因为它对多项式的加法运算不封闭. 例如，$(x^{n-1}+x^{n-2})+(-x^{n-1}) = x^{n-2}$，其次数不是 $n-1$. ☺

子空间的交与子空间的和

定义 7.1.10 (子空间的交) 给定线性空间 $\mathcal{V}$ 的两个子空间 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$，集合 $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ 是 $\mathcal{V}$ 的子空间，称为子空间 $\mathcal{M}_1$ 与 $\mathcal{M}_2$ 的**交**.

定义 7.1.11 (子空间的和) 给定线性空间 $\mathcal{V}$ 的两个子空间 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$，集合

$$\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 := \{\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n} \,|\, \boldsymbol{m} \in \mathcal{M}_1, \boldsymbol{n} \in \mathcal{M}_2\}$$

是 $\mathcal{V}$ 的子空间，称为子空间 $\mathcal{M}_1$ 与 $\mathcal{M}_2$ 的**和**.

例 7.1.12 在坐标向量空间 $\mathbb{R}^3$ 中，设 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ 是两个不同的二维子空间. 几何上，二者是两个不重合的过原点的平面. 此时，$\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ 是过原点的一条直线，是一维子空间；而 $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ 是整个 $\mathbb{R}^3$.

设 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ 是两个不同的一维子空间，即两条不重合的过原点的直线，则 $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ 是原点，即零维子空间；而 $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ 是由两条直线生成的平面.

注意，$\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2, \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ 都不是子空间. ☺

例 7.1.13 矩阵的列空间的和容易描述. 设 A, B 分别是 $m \times n$ 矩阵和 $m \times p$ 矩阵, 则

$$\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(C),$$

其中 $C = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ 是 $m \times (n+p)$ 矩阵. 三个列空间都是 $\mathbb{F}^m$ 的子空间.

矩阵的零空间的交也容易描述. 设 A, B 分别是 $m \times n$ 矩阵和 $p \times n$ 矩阵, 二者的零空间 $\mathcal{N}(A), \mathcal{N}(B)$ 分别是齐次方程组 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}, B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解空间. 因此, 两个解空间的交集就是联立方程组 $D\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解空间, 其中 $D = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ 是 $(m+p) \times n$ 矩阵. 因此,

$$\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \mathcal{N}(D),$$

三个零空间都是 $\mathbb{F}^n$ 的子空间. ☺

例 7.1.14 考虑线性空间 $\mathbb{F}^{n\times n}$, 设 $\mathcal{U}, \mathcal{L}$ 分别是由所有上/下三角矩阵构成的子空间, 则 $\mathcal{U} \cap \mathcal{L}$ 是所有对角矩阵构成的子空间. 而 $\mathcal{U} + \mathcal{L} = \mathbb{F}^{n\times n}$, 因为任意方阵显然能分解为上三角矩阵和下三角矩阵的和, 记 $A = U + L$. 注意, 这个分解式并不唯一, 因为对任意非零对角矩阵 D, $A = (U + D) + (L - D)$ 是一个不同的分解式. ☺

子空间的直和

定义 7.1.15 (子空间的直和) 给定线性空间 $\mathcal{V}$ 的两个子空间 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$. 如果 $\mathcal{M}$ 的任意向量 $\boldsymbol{m}$ 的分解式

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2, \quad \boldsymbol{m}_1 \in \mathcal{M}_1, \boldsymbol{m}_2 \in \mathcal{M}_2,$$

唯一，则称 $\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{M}_1$ 与 $\mathcal{M}_2$ 的**直和**，也称 $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ 是直和，记作 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$.

定理7.1.16 对线性空间 V 的两个子空间 M_1，M_2，以下叙述等价：

1. $M_1 + M_2$ 是直和；
2. 零向量有唯一的分解式，即 $\mathbf{0} = \boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2$，$\boldsymbol{m}_1 \in M_1$，$\boldsymbol{m}_2 \in M_2$，推出 $\boldsymbol{m}_1 = \boldsymbol{m}_2 = \mathbf{0}$；
3. $M_1 \cap M_2 = \{\mathbf{0}\}$.

作 业（12月8日）

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

练习7.1

3， 4， 5， 6， 7， 8， 10， 11， 12

12月13日提交

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~