线性代数 第9讲

10月11日

第二章第1讲　线性相关与线性无关

第一章要点回顾

子空间的概念

线性相关与线性无关

子空间的基

例 试判断矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\1&2&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$ 是否可逆? 若可逆, 求出 A^{-1}.

$$\begin{bmatrix}A_s & B_{s\times t}\\ 0 & C_t\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1}\\ 0 & C^{-1}\end{bmatrix}$$

行变换要左乘;
列变换要右乘.

$$\left[\begin{array}{cc|cc}A & B & I_s & 0\\ 0 & C & 0 & I_t\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc}I_s & A^{-1}B & A^{-1} & 0\\ 0 & C & 0 & I_t\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{cc|cc}I_s & A^{-1}B & A^{-1} & 0\\ 0 & I_t & 0 & C^{-1}\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc}I_s & 0 & A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1}\\ 0 & I_t & 0 & C^{-1}\end{array}\right]$$

命题1.6.3 若矩阵 A_{11} 和 $A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ 可逆，则矩阵 $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ 可逆，且

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & \left(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}.$$

证明：$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & \left(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ 称为矩阵 A_{11} 的Schur补。

练习 1.6.10 ☕ 给定 $m \times n, n \times m$ 矩阵 A, B，求证：$I_m + AB$ 可逆当且仅当 $I_n + BA$ 可逆.

提示：考虑分块矩阵.

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n + BA \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n + BA \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m + AB & A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m + AB & A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{bmatrix}$$

命题1.6.3 若矩阵 A_{11} 和 $A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ 可逆, $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & \left(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}$.

推论 1.6.4 若矩阵 A_{22} 和 $A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ 可逆，则矩阵 $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ 可逆，且

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{1.6.6}$$

证. 利用命题 1.6.3 和分块对换矩阵. □

下面再看两个稍微复杂的例子，来体会矩阵分块的用处.

例 1.6.5 (Sherman-Morrison-Woodbury 公式) 将 (1.6.3) 和 (1.6.6) 两式右端乘出来，有

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \\ -(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & (A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & -(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & A_{22}^{-1}+A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

比较对应左上角块，我们可以得到

$$(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} = A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1},$$

这给出了一定条件下一个可逆矩阵加上某个矩阵乘积后的逆的公式，常称为 **Sherman-Morrison-Woodbury 公式**，在矩阵分析、系统和控制论等领域中有广泛应用.

我们下面给出一个常用的简化版本，涉及的分块矩阵为 $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{u} \\ -\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}$，其中 A 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 是 n 维向量.

Sherman-Morrison 公式: 若 A 可逆, 则 $A+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$ 可逆, 当且仅当 $1+\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{u} \neq 0$, 且

$$(A+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}})^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}A^{-1}}{1+\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{u}}. \tag{1.6.7}$$

特别地，$I+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$ 可逆，当且仅当 $1+\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} \neq 0$，且

$$(I+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}})^{-1} = I - \frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}}{1+\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}}. \tag{1.6.8}$$

事实上，(1.6.7) 也可以由 (1.6.8) 来证明，留给读者思考.

来看一个简单例子. 给定可逆矩阵 A，若其 $(1,1)$ 元 a_{11} 有一微小变化 δ，变为 $a_{11}+\delta$，则新得矩阵是否可逆? 如何计算?

不难看出新得矩阵为 $A+\delta\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}$. 根据 Sherman-Morrison 公式，该矩阵可逆，当且仅当 $1+\delta\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{e}_1 \neq 0$. 因此只要 $|\delta| < \frac{1}{|\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{e}_1|}$，即 δ 足够小时，该矩阵就可逆，且其逆为 $A^{-1} - \frac{1}{1+\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}A^{-1}\boldsymbol{e}_1}A^{-1}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}A^{-1}$. 可以看到逆的变化只和矩阵的逆的首行首列有关. 类似地，如果矩阵的 (i,j) 元发生微小改变，则逆的变化只需逆的第 j 行和第 i 列就可以得到. ☺

定理 1.7.1 (LU 分解) 如果 n 阶方阵 A 只使用倍加矩阵 $E_{ji;k}(j > i)$ 做行变换就可以化成阶梯形，那么存在 n 阶单位下三角矩阵 L 和 n 阶上三角矩阵 U，使得 $A = LU$.

分解 $A = LU$ 称为矩阵 A 的 **LU 分解**.

如果 A 有 LU 分解 $A = LU$，那么求解线性方程组 $A\boldsymbol{x} = b$，就化成了求解 $L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ 和 $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ 这两个方程组，而二者的系数矩阵都是三角矩阵，易于求解.

下面主要考虑可逆矩阵.

定义 1.7.2 (顺序主子阵) 方阵 A 的左上角 $k \times k$ 块，称为 A 的第 k 个**顺序主子阵**.

显然，n 阶方阵共有 n 个顺序主子阵.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -l_{43} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -l_{32} & 1 & \\ & -l_{42} & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -l_{21} & 1 & & \\ -l_{31} & & 1 & \\ -l_{41} & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ & & u_{33} & u_{34} \\ & & & u_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -l_{21} & 1 & & \\ -l_{31} & & 1 & \\ -l_{41} & & & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -l_{32} & 1 & \\ & -l_{42} & & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & -l_{43} & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ & & u_{33} & u_{34} \\ & & & u_{44} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ l_{31} & & 1 & \\ l_{41} & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & l_{32} & 1 & \\ & l_{42} & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & l_{43} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ & & u_{33} & u_{34} \\ & & & u_{44} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ & & u_{33} & u_{34} \\ & & & u_{44} \end{bmatrix}$$

例：用LU三角分解法解

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ l_{21} & 1 & \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ & u_{22} & u_{23} \\ & & u_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix}$$

解：用分解计算得

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix} = LU.$$

求解 $Ly = \begin{bmatrix} 14 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 14 \\ -10 \\ -72 \end{bmatrix}, \quad Ux = \begin{bmatrix} 14 \\ -10 \\ -72 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$

第一章核心概念

1. 线性映射， 线性变换，线性运算（加法和数乘）
2. 矩阵，线性映射的矩阵
3. 矩阵的运算：加减，数乘，转置，乘法，逆矩阵
4. 初等变换，解方程组和求逆矩阵的高斯-若当消去法
5. 初等矩阵与分块矩阵
6. 高斯消去法解线性方程组的矩阵表示，LU分解

特殊矩阵：单位矩阵，对角矩阵，对称矩阵，反对称矩阵，

上（下）三角矩阵，（严格）对角占优矩阵

向量（线性）空间

用加法和数乘运算，对向量进行管理，将向量组织起来

$$\begin{bmatrix}13\\15\\18\end{bmatrix}=13\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+15\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+18\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=a\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+b\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

空间＝集合＋运算

m维向量空间＝m维向量＋加法与数乘运算

线性子空间

定义 2.1.4 (子空间) 设 $\mathcal{M}$ 是线性空间 $\mathbb{R}^m$ 的非空子集，如果对任意 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathcal{M}, k \in \mathbb{R}$，都满足如下两个条件：

1. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$;
2. $k\boldsymbol{a} \in \mathcal{M}$;

则称 $\mathcal{M}$ 为 $\mathbb{R}^m$ 的一个**子空间**.

注意，定义 2.1.4 中的两个条件可以合并成一个条件：对任意 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathcal{M}, k, l \in \mathbb{R}$，都有 $k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$.

特别地，$\mathbb{R}^m$ 有两个**平凡**子空间，即 $\{\mathbf{0}\}$ 和 $\mathbb{R}^m$ 自身. 直观来看，二者分别是"最小"和"最大"的子空间. 二者之外的子空间，称为**非平凡**子空间. 由于 $\mathbf{0} = 0\boldsymbol{a}$，$\mathbb{R}^m$ 的**任意子空间都包含零向量**. 注意，空集**不是**子空间.

例 2.1.5 下面给出几个**不是**子空间的例子.

1. 平面 $\mathbb{R}^2$ 中的第一象限，其中的向量对加法封闭，对数乘不封闭；
2. 平面 $\mathbb{R}^2$ 中 x_1 轴和 x_2 轴的并集，对数乘封闭，但对加法不封闭.
3. 在 $\mathbb{R}^3$ 中，一个不经过原点的平面，例如 $x_1+x_2+x_3=1$，对加法和数乘都不封闭；
4. 在 $\mathbb{R}^3$ 中，锥面 $x_1^2+x_2^2=x_3^2$，对数乘封闭，但对加法不封闭. ☺

练习 2.1.1 判断下列子集是否是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

1. $\left\{\begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \,\middle|\, \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 0\right\}$.
2. $\left\{\begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \,\middle|\, \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1\right\}$.
3. $\left\{\begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \,\middle|\, \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 = 0\right\}$.
4. $\left\{\begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \,\middle|\, a_1 = 0\right\}$.
5. $\left\{\begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \,\middle|\, a_1 \geqslant 0\right\}$.

对于矩阵 $A_{m\times n}$，或是说线性映射A，定义像集 $R(A)$

$$R(A)=\left\{b\in\mathbb{R}^m \,\middle|\, \exists x\in\mathbb{R}^n,\ Ax=b\right\}=\left\{Ax \,\middle|\, x\in\mathbb{R}^n\right\}\subseteq\mathbb{R}^m$$

对于矩阵 $A_{m\times n}$，或是说线性映射A，定义集合 $N(A)$

$$N(A)=\left\{x\in\mathbb{R}^n \,\middle|\, Ax=0\right\}\subseteq\mathbb{R}^n$$

命题 2.1.6 给定 $m\times n$ 矩阵 A，则

1. $\mathcal{R}(A)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间，称为矩阵 A 的**列（向量）空间**；
2. $\mathcal{N}(A)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，称为矩阵 A 的**零空间**.

练习2.1.14 证明：$R(O_{m\times n})=\{0\},N(O_{m\times n})=\mathbb{R}^n$；

如果 n 阶方阵 A 可逆，则 $R(A)=\mathbb{R}^n,N(A)=\{0\}$。

定义 2.1.7 (线性生成) 设 $S:\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的向量组，其线性组合的全体构成 $\mathbb{R}^m$ 的一个子集，记作

$$\operatorname{span}(S)=\operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n):=\{k_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+k_n\boldsymbol{a}_n \mid k_1,\cdots,k_n\in\mathbb{R}\},$$

称为由向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$（**线性**）**生成**的子集，而 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 称为该集合的一组**生成向量**.

命题 2.1.8 设 $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}$，则

1. $\mathcal{R}(A)=\operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$.
2. 向量 $\boldsymbol{b}\in\mathcal{R}(A)$ 当且仅当它可以被 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性表示，这当且仅当方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解.

命题2.1.9 (1). 子集 $span(S)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间，

(2). 如果 S 中的向量都在 $\mathbb{R}^m$ 的某个子空间中，则 $span(S)$ 中的向量也都在该子空间中。

向量组线性相关与线性无关的概念

定义2.1.10　给定向量空间$\mathbb{R}^m$中的向量组$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，如果存在不全为零的一组数$k_1,k_2,\cdots,k_n\in\mathbb{R}$，使得$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}$，则称向量组$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$线性相关。

否则，若$k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}$，必然给出 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，则称向量组$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$线性无关。

换言之，$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性无关等价于零向量有唯一的线性表示，即平凡的表示，也等价于齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，其中 $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}$. 而 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性相关等价于零向量的线性表示不唯一，也等价于齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

练习2.1.16 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ $(m \geq 2)$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 其中有一个向量可由其余的向量线性表出.

证明 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性相关，由定义知存在不全为零的常数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$ 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$, 不妨设 $k_i \neq 0$, 于是

$$\alpha_i = -\frac{k_1}{k_i}\alpha_1 - \cdots - \frac{k_{i-1}}{k_i}\alpha_{i-1} - \frac{k_{i+1}}{k_i}\alpha_{i+1} - \cdots - \frac{k_m}{k_i}\alpha_m,$$

即有，α_i 可由 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_m$ 线性表出.

反之，如果 α_j 可由 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_m$ 线性表出，

$$\alpha_j = l_1\alpha_1 + \cdots + l_{j-1}\alpha_{j-1} + l_{j+1}\alpha_{j+1} + \cdots + l_m\alpha_m,$$

那么 $l_1\alpha_1 + \cdots + l_{j-1}\alpha_{j-1} - \alpha_j + l_{j+1}\alpha_{j+1} + \cdots + l_m\alpha_m = 0,$

所以向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性相关.

例 2.1.11 1. 平面 $\mathbb{R}^2$ 中的两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 线性相关当且仅当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线；空间 $\mathbb{R}^3$ 中的三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 线性相关当且仅当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面；

2. 向量组 $\boldsymbol{a}_1,k\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 线性相关：$-k\boldsymbol{a}_1+1(k\boldsymbol{a}_1)+0\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{0}$；

3. 如果一个向量组包含零向量，则它一定线性相关：$0\boldsymbol{a}_1+\cdots+k\boldsymbol{0}+\cdots+0\boldsymbol{a}_s=\boldsymbol{0}$，其中 $k\neq 0$；

4. 如果 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性相关，则任意包含它的向量组[1] $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{a}_{n+1},\cdots,\boldsymbol{a}_p$ 一定线性相关；反之，如果 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性无关，则它的任意部分组 $\boldsymbol{a}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{a}_{i_r}$ 一定线性无关. ☺

练习2.1.13，设向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性无关，证明向量组 $a_1,a_1+a_2,\cdots,a_1+a_2+\cdots+a_s$ 线性无关。

练习2.1.15 证明一个线性无关向量组的任意部分组也线性无关；如果一向量组有一个部分组线性相关，则该向量组也线性相关。

线性生成与线性相关（无关）

例 2.1.12 考虑平面 $\mathbb{R}^2$ 上的两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，以及二阶方阵 $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\end{bmatrix}$，则 $\mathcal{R}(A)=\operatorname{span}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\{k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}\mid k,l\in\mathbb{R}\}$ 有如下三种可能：

1. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 线性无关，即不共线，则 $\operatorname{span}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 是整个平面；
2. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 线性相关，即共线，且至少有一个不是零向量，则 $\operatorname{span}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 是一条过原点的直线；
3. 若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $\operatorname{span}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 只包含原点一个点.

练习 2.1.5 证明，对例 2.1.3 中的 $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{bmatrix}$，这三个向量中的任意两个都可以作为 $\mathcal{R}(A)$ 的一组生成向量，但是，其中任意单个向量都不能生成 $\mathcal{R}(A)$.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

将向量 b 表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}2\\1\\3\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\-1\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是否线性相关

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\\4\end{bmatrix},\ \alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\1\end{bmatrix},\ \alpha_3=\begin{bmatrix}1\\3\\0\\1\end{bmatrix},\ \alpha_4=\begin{bmatrix}0\\7\\3\\1\end{bmatrix}$$

例　a 取何值时，$\beta_1=(1,\ 3,\ 6,\ 2)^T$，$\beta_2=(2,\ 1,\ 2,\ -1)^T$，$\beta_3=(1,\ -1,\ a,\ -2)^T$ 线性无关？

解　设　$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$　　　　(*)

$$(\beta_1,\ \beta_2,\beta_3)=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&1&-1\\6&2&a\\2&-1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-5&-4\\0&-10&a-6\\0&-5&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-5&-4\\0&0&a+2\\0&0&0\end{bmatrix},$$

当 $a\neq-2$ 时，方程组(*)只有零解 $x_1=x_2=x_3=0$,

此时，β_1, β_2, β_3 线性无关.

子空间的基

定义 2.1.13 (子空间的基) 给定 $\mathbb{R}^m$ 的子空间 $\mathcal{M}$，若 $\mathcal{M}$ 中存在有限个向量 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 满足:

1. $\mathcal{M}$ 中的任意向量都可以被该向量组线性表示，即 $\mathcal{M}=\operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$;

2. 该向量组线性无关;

则称向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是子空间 $\mathcal{M}$ 的一组基.

命题 2.1.14 线性空间 $\mathbb{R}^m$ 中，如果 $n>m$，则任意 n 个向量都线性相关.

证. 考虑 $\mathbb{R}^m$ 中的向量组 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$. 令 $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}$，则齐次方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有 m 个方程，n 个未知数，而未知数个数大于方程个数. 由命题 1.3.12 可知，该方程组一定有非零解，即 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 线性相关. □

因此，$\mathbb{R}^m$ 的任意一组基不可能多于 m 个向量. 当恰好有 m 个向量时，我们有如下结果.

命题 2.1.15 设 m 阶方阵 $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_m\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的一组基当且仅当 A 可逆.

命题 2.1.16 如果向量 $\boldsymbol{b}$ 可以被向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性表示，则其表示法唯一当且仅当向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关.

由此可以给出基的一个等价描述.

命题 2.1.17 给定 $\mathbb{R}^m$ 的子空间 $\mathcal{M}$，则 $\mathcal{M}$ 中的向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$，是 $\mathcal{M}$ 的一组基，当且仅当该向量组满足：

1. $\mathcal{M}$ 中的任意向量都可以被 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性表示，即 $\mathcal{M} = \operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$；
2. 而且表示法唯一.

练习 2.1.1 判断下列子集是否是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 其中的子空间是否可以写成线性生成的子空间；如果可以，写出一组基.

1. $\left\{\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \,\middle|\, \sum_{i=1}^n a_i = 0\right\}$.
2. $\left\{\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \,\middle|\, \sum_{i=1}^n a_i = 1\right\}$.
3. $\left\{\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \,\middle|\, \sum_{i=1}^n a_i^2 = 0\right\}$.
4. $\left\{\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \,\middle|\, a_1 = 0\right\}$.

作 业 (10月11日)

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

练习2.1

1(6-10,13,14), 2, 3, 8, 9(1), 10(2),

11, 12, 14, 17

10月18日提交

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~