第二次作业参考解答

于子宏

练习 1.2.1

2. $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 3 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ (根据**定义 *1.2.5*** 题目是线性组合形式, 改写成列向量形式即可)

4. $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} & & & & 5 \\ & & & 4 & \\ & & 3 & & \\ & 2 & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ (根据**定义 *1.2.4*** 把 $k\boldsymbol{e}_{6-k}$ 按顺序排列即可得到表示矩阵.)

■ *这两个题目部分同学全都计算好了然后写成结果矩阵与全 1 向量相乘 (或单位矩阵与结果向量相乘) 的形式, 违背了题目的初衷:)*

练习 1.2.2

3. 是的. $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ 6. 是的. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (写成线性组合的过程略)

■ 良定义与否只需比较矩阵的**列数**是否等于向量的**行数**

练习 1.2.4

1. $\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_1 + x_2 \\ y_3 = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 - y_1 \\ y_3 = y_3 - y_2 \end{cases}$ 3. $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

4.

证明. 要证明 f, g 互为逆变换, 需要验证 $f \circ g$ 和 $g \circ f$ 均为单位映射. 这等价于验证 AB 与 BA 均为单位阵. 沿用前面的记号, 我们有

$$AB\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}\text{，以及 }BA\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=B\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

故 AB 与 BA 均为单位阵, 从而 f, g 互为逆变换. □

■ 证明的关键在于既要验证 $f\circ g$(或验证 AB), 又要验证 $g\circ f$(或验证 BA)(写同理可证也可以.) 但大部分同学都只证明了其中一个成立.

练习 1.2.5

1. $\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ (平面向 y 轴投影后, 仍然是 y 轴上的**点**, 因此是 $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$.)
2. $\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix}0&-3&2\\3&0&-1\\-2&1&0\end{bmatrix}$ (更一般地, 三维向量 $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$ 与任意三维向量的叉积所对应的表示矩阵为 $\begin{bmatrix}0&-a_3&a_2\\a_3&0&-a_1\\-a_2&a_1&0\end{bmatrix}$.)
4. $\begin{bmatrix}&&&&1\\&&&1&\\&&⋰&&\\&1&&&\\1&&&&\end{bmatrix}$

■ 部分同学写的表示矩阵维度出错. 映射 $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 对应的表示矩阵维度应为 n 行 m 列. (为什么?)