线性代数 第29讲

12月20日

第七章第4讲　　线性映射的矩阵表示

上一讲要点回顾

同构，向量的坐标，过渡矩阵

线性映射的矩阵表示

线性映射和线性变换的矩阵在基变换下的变化规律

线性映射

定义 7.3.1 (线性映射) 给定数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $\mathcal{U},\mathcal{V}$，如果从 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的映射 f 满足

1. 对任意 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathcal{U}$，有 $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=f(\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{b})$;
2. 对任意 $\boldsymbol{a}\in\mathcal{U},k\in\mathbb{F}$，有 $f(k\boldsymbol{a})=kf(\boldsymbol{a})$,

则称其为 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的**线性映射**，$\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的线性映射的全体记作 $\mathrm{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{V})$.

对任意线性映射 f，$f(\mathbf{0}_{U})=\mathbf{0}_{V}$. 对任意$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}\in U$，$k$，$l\in F$，有 $f(k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b})=kf(\boldsymbol{a})+lf(\boldsymbol{b})$.

如果 f 是 U 到 V 的线性映射，且为双射，证明：f^{-1} 也是线性映射.

由于 f 是线性映射，因此对任意 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2\in V$，

$f(k_1f^{-1}(\boldsymbol{x}_1)+k_2f^{-1}(\boldsymbol{x}_2))=k_1f(f^{-1}(\boldsymbol{x}_1))+k_2f(f^{-1}(\boldsymbol{x}_2))=k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2$.

由于 f 是双射，有 $f^{-1}(k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2)=k_1f^{-1}(\boldsymbol{x}_1)+k_2f^{-1}(\boldsymbol{x}_2)$.

因此 f^{-1} 是线性映射.

定义 7.3.3 (线性运算) 给定数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $\mathcal{U},\mathcal{V}$，$\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的线性映射全体是 $\mathrm{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{V})$. 规定

1. $\mathrm{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 上的**加法**：给定 $f,g\in\mathrm{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{V})$，定义

$$\begin{aligned} f+g\colon\ & \mathcal{U}\to\mathcal{V}, \\ & \boldsymbol{x}\mapsto f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x}), \end{aligned}$$

2. $\mathrm{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 上的**数乘**：给定 $f\in\mathrm{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{V})$，定义

$$\begin{aligned} kf\colon\ & \mathcal{U}\to\mathcal{V}, \\ & \boldsymbol{x}\mapsto kf(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

命题 7.3.4 集合 $\mathrm{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 关于加法和数乘两种运算构成线性空间.

定义 7.3.5 (乘法（复合）) 给定数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W}$，若 $f\in\mathrm{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{V}), g\in\mathrm{Hom}(\mathcal{V},\mathcal{W})$，则定义 f 与 g 的**复合**为

$$\begin{aligned} g\circ f\colon\ & \mathcal{U}\to\mathcal{W}, \\ & \boldsymbol{x}\mapsto g(f(\boldsymbol{x})), \end{aligned}$$

f 与 g 的复合运算又称为 g 与 f 的**乘法**，记为 gf.

定义 7.3.6 (核、像集) 给定数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $\mathcal{U},\mathcal{V}$，以及 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的线性映射 f. 则集合 $\mathcal{N}(f):=\{\boldsymbol{a}\in\mathcal{U}\mid f(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}\}$，称为线性映射 f 的**核**；集合 $\mathcal{R}(f):=\{f(\boldsymbol{a})\mid\boldsymbol{a}\in\mathcal{U}\}$，称为线性映射 f 的**像集**.

线性变换，特征值、特征向量

定义 7.3.8 (线性变换) 线性空间 $\mathcal{U}$ 到自身的线性映射称为 $\mathcal{U}$ 上的**线性变换**.

注意，$\mathcal{U}$ 上任意两个线性变换都可以复合，得到的还是 $\mathcal{U}$ 上的线性变换.

类似于 $\mathbb{F}^n$ 上的线性变换有特征值和特征向量，这两个概念也可以推广到一般线性空间的线性变换上.

定义 7.3.9 (特征值) 给定 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $\mathcal{U}$，以及其上的线性变换 f. 如果对 $\lambda \in \mathbb{F}$，存在非零向量 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}$，使得 $f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$，则称 λ 为线性变换 f 的一个**特征值**，而称非零向量 $\boldsymbol{x}$ 为 f 的一个属于特征值 λ 的**特征向量**.

二元组 $(\lambda, \boldsymbol{x})$ 常称为线性变换 f 的一个**特征对**.

非零向量 $\boldsymbol{x}$ 为 f 的属于特征值 $\boldsymbol{\lambda}$ 的特征向量，当且仅当 $\boldsymbol{x} \in \mathrm{N}(\boldsymbol{\lambda I} - f)$.
子空间 $\mathrm{N}(\boldsymbol{\lambda I} - f)$ 称为 f 的属于特征值 $\boldsymbol{\lambda}$ 的特征子空间.

命题7.3.10 对 U 上的线性变换 f，属于不同特征值的特征向量线性无关.

同构映射

定义 7.3.12 (线性空间的同构) 给定数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $\mathcal{U},\mathcal{V}$，如果存在 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的线性映射 f 是双射，则称 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ **同构**，称 f 为 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的**同构映射**.

特别地，$\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{U}$ 的同构映射称为 $\mathcal{U}$ 上的**自同构**.

例 7.3.13 定义 $\mathcal{V} := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$. 易见 $\mathcal{V}$ 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子空间. 可以验证，映射

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{C} \to \mathcal{V}, \\ a + b\mathrm{i} \mapsto & \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

是一个同构映射. ☺

命题 7.3.15 给定数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W}$，以及 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的同构映射 f，$\mathcal{V}$ 到 $\mathcal{W}$ 的同构映射 g，则

1. $g \circ f$ 是 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{W}$ 的同构映射;
2. f^{-1} 是 $\mathcal{V}$ 到 $\mathcal{U}$ 的同构映射.

命题7.3.16　线性空间的同构关系是等价关系.

向量的坐标

命题 7.4.1 向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 线性无关，如果 $\boldsymbol{b}$ 可以被其线性表示，则表示法唯一.

定义7.4.2（坐标） 对数域 F 上的 n 维线性空间 V，设 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 是它的一组基. 那么对任意向量$\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$，都有 $\boldsymbol{x}$ 可以被这组基线性表示且表示法唯一，

不妨写为 $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$.

有序数组$x_1, \cdots, x_n$ 称为向量 $\boldsymbol{x}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 下的坐标.

为书写简便，我们把它写作 $\boldsymbol{x} = (e_1, \cdots, e_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

注意：这并不是真正的矩阵乘法，而只是借用了记号来表示线性组合.
由表示法的唯一性，可以定义映射：

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

由表示法的唯一性，可以定义映射：

$$\sigma = \sigma_{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n}: \quad \mathcal{V} \to \mathbb{F}^n,$$
$$\boldsymbol{x} \mapsto \widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

映射 $\sigma_{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n}$ 就是把 $\mathcal{V}$ 中向量映射成它在一组基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 下的坐标组成的 n 维向量.

注意，坐标表示写成 $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ 后，基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 中的向量就不再能随便改换顺序，因为把基向量改换顺序将引入不同的映射 σ，而坐标表示也不同. 换言之，改换顺序的基被认为是不同的基.

定理 7.4.3 映射 $\sigma_{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n}: \mathcal{V} \to \mathbb{F}^n$ 是同构映射.

证. 如果 $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{e}_n$，则 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1)\boldsymbol{e}_1 + \cdots + (x_n + y_n)\boldsymbol{e}_n, k\boldsymbol{x} = (kx_1)\boldsymbol{e}_1 + \cdots + (kx_n)\boldsymbol{e}_n$. 因此，$\sigma(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \sigma(\boldsymbol{x}) + \sigma(\boldsymbol{y}), \sigma(k\boldsymbol{x}) = k\sigma(\boldsymbol{x})$. 于是 σ 是线性映射. 根据基的定义，σ 是双射. □

同构映射 σ 的逆映射

$$\sigma^{-1}_{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n}: \quad \mathbb{F}^n \to \mathcal{V},$$
$$\widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

就是在形式上推广的矩阵乘法. 它在形式上满足分配律:

$$(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)(\widehat{\boldsymbol{x}} + \widehat{\boldsymbol{y}}) = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\widehat{\boldsymbol{x}} + (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\widehat{\boldsymbol{y}}, \qquad (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)(k\widehat{\boldsymbol{x}}) = k(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\widehat{\boldsymbol{x}}.$$

例 7.3.13 定义 $\mathcal{V} := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$. 易见 $\mathcal{V}$ 是 $\mathbb{R}^{2\times 2}$ 的子空间. 可以验证, 映射

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{C} \to \mathcal{V}, \\ & a + b\mathrm{i} \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

是一个同构映射. ☺

由定理 7.4.3 可知，F 上的任意 n 维线性空间都同构：因为它们都和 F^n 同构，而同构又是等价关系.

线性空间的同构这个等价关系的唯一不变量就是维数，而标准形是 F^n.

例如，例 7.3.13 中的两个线性空间都和 R^2 同构，因此也互相同构.

同构映射能够保持线性运算，从而保持一切只与线性运算有关的性质.

因为，常常可以把一般向量空间中的问题转化到 F^n 上，例如如下结论.

命题 7.4.4 在数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 $\mathcal{V}$ 中取定一组基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$，设 $\mathcal{V}$ 内向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 在这组基下的坐标表示为 $\boldsymbol{a}_i = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\hat{\boldsymbol{a}}_i, i = 1, \cdots, m$，则 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 在 $\mathcal{V}$ 内线性无关，当且仅当 $\hat{\boldsymbol{a}}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{a}}_m$ 在 $\mathbb{F}^n$ 内线性无关.

证. $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 在 $\mathcal{V}$ 内线性相关 $\Leftrightarrow$ 存在 $\mathbb{F}$ 内不全为 0 的数 $k_1, \cdots, k_m$，使得 $k_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow$ 存在 $\mathbb{F}$ 内不全为 0 的数 $k_1, \cdots, k_m$，使得 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)(k_1\hat{\boldsymbol{a}}_1 + \cdots + k_m\hat{\boldsymbol{a}}_m) = \boldsymbol{0}$ $\xLeftrightarrow{\sigma\text{ 是双射}}$ 存在 $\mathbb{F}$ 内不全为 0 的数 $k_1, \cdots, k_m$，使得 $k_1\hat{\boldsymbol{a}}_1 + \cdots + k_m\hat{\boldsymbol{a}}_m = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \hat{\boldsymbol{a}}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{a}}_m$ 在 $\mathbb{F}^n$ 内线性相关. □

例 7.4.5　1. 考虑例 7.2.12 中矩阵空间 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 的一组基

$$E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},$$

矩阵 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}=a_{11}E_{11}+a_{12}E_{12}+a_{21}E_{21}+a_{22}E_{22}$，即 A 在这组基下的坐标表示为 $A=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{12}\\a_{21}\\a_{22}\end{bmatrix}$，故 A 在这组基下的坐标是 $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{12}\\a_{21}\\a_{22}\end{bmatrix}$.

$A=\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})+\frac{1}{2}(A-A^{\mathrm{T}})$

再考虑例 7.2.19 中线性空间 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 的一组基

$$E_{11},E_{22},E_{12}+E_{21}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},E_{12}-E_{21}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},$$

矩阵 A 在这组基下的坐标表示为 $A=(E_{11},E_{22},E_{12}+E_{21},E_{12}-E_{21})\tilde{\boldsymbol{a}}$，其中 $\tilde{\boldsymbol{a}}=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{22}\\\frac{a_{12}+a_{21}}{2}\\\frac{a_{12}-a_{21}}{2}\end{bmatrix}$ 是 A 在这组基下的坐标.

不同基下的坐标

多项式空间 $R[x]_n$ 在不同基下的坐标

多项式 $f=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$，它在基 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 下的坐标表示为

$f=(1,x,\cdots,x^{n-1})\boldsymbol{f}$，其中 $\boldsymbol{f}=\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$ 是 f 在这组基下的坐标.

它在基 $1,x-x_0,\cdots,(x-x_0)^{n-1}$ 下的坐标表示为 $f=(1,x-x_0,\cdots,(x-x_0)^{n-1})\widetilde{\boldsymbol{f}}$,

其中 $\widetilde{\boldsymbol{f}}=\begin{bmatrix} f(x_0) \\ f'(x_0) \\ \vdots \\ \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix}$ 是 f 在这组基下的坐标.

过渡矩阵

给定 n 维线性空间的两组基 $\boldsymbol{e}_1$, ⋯ , $\boldsymbol{e}_n$ 和 $\boldsymbol{t}_1$, ⋯ , $\boldsymbol{t}_n$, 设

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t}_1 &= t_{11}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + t_{n1}\boldsymbol{e}_n,\\ &\vdots\\ \boldsymbol{t}_n &= t_{1n}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + t_{nn}\boldsymbol{e}_n,\end{aligned}$$

可以形式地写成 $(\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n) = (\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ t_{n1} & \cdots & t_{nn}\end{bmatrix} =: (\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)T,$

其中 T 称为从基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 到基 $\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n$ 的**过渡矩阵**.

命题 7.4.6 给定数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 $\mathcal{V}$ 的一组基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$, 和 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵 T. 令 $(\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n) = (\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)T$, 则有:

1. 如果 $\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n$ 是一组基, 则 T 可逆;
2. 如果 T 可逆, 则 $\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n$ 是一组基.

1. 基变换公式: $(\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n) = (\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)T$, 其中 T 可逆;
2. 坐标变换公式: 若 $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n)\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{x}$, 则 $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}$.

矩阵空间 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 的两组基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 与 $E_{11},E_{22},E_{12}+E_{21},E_{12}-E_{21}$

易得 $(E_{11},E_{22},E_{12}+E_{21},E_{12}-E_{21})=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$，因此从 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 到 $E_{11},E_{22},E_{12}+E_{21},E_{12}-E_{21}$ 的过渡矩阵就是该四阶矩阵.

多项式空间 $\mathbb{R}[x]_n$ 的两组基 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 与 $1,x-x_0,\cdots,(x-x_0)^{n-1}$

易得 $(1,x-x_0,\cdots,(x-x_0)^{n-1})=(1,x,\cdots,x^{n-1})T$，其中

$$T=\begin{bmatrix}1&-x_0&x_0^2&\cdots&(-x_0)^{n-1}\\&1&-2x_0&\cdots&(n-1)(-x_0)^{n-2}\\&&\ddots&\ddots&\vdots\\&&&1&-(n-1)x_0\\&&&&1\end{bmatrix},$$

因此从 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 到 $1,x-x_0,\cdots,(x-x_0)^{n-1}$ 的过渡矩阵为上三角矩阵 T.

其次来看同一个向量在两组基下坐标表示的变化规律. 设 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}$ 在一组基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 下的坐标为 $x_1, \cdots, x_n$，在另一组基 $\boldsymbol{t}_1, \cdots, \boldsymbol{t}_n$ 下的坐标表示为 $y_1, \cdots, y_n$，那么坐标表示就是

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =: (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{t}_1, \cdots, \boldsymbol{t}_n)\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} =: (\boldsymbol{t}_1, \cdots, \boldsymbol{t}_n)\boldsymbol{y}.$$

设两组基之间的过渡矩阵为 T，即 $(\boldsymbol{t}_1, \cdots, \boldsymbol{t}_n) = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)T$，则

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{t}_1, \cdots, \boldsymbol{t}_n)\boldsymbol{y} = \Big((\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)T\Big)\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)(T\boldsymbol{y}). \tag{7.4.1}$$

而 $\boldsymbol{a}$ 在基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 下的表示法唯一，因此 $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}$. 可见，只要知道了向量在一组基下的坐标和这组基到另一组基的过渡矩阵，就能得到该向量在另一组基下的坐标.

1. 容易验证

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ \frac{a_{12}+a_{21}}{2} \\ \frac{a_{12}-a_{21}}{2} \end{bmatrix}.$$

2. 可以验证

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -x_0 & x_0^2 & \cdots & (-x_0)^{n-1} \\ & 1 & -2x_0 & \cdots & (n-1)(-x_0)^{n-2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & -(n-1)x_0 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f'(x_0) \\ \vdots \\ \frac{1}{(n-2)!} f^{(n-2)}(x_0) \\ \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix}.$$

练习 7.2.7 给定 $\mathbb{F}$ 中两两不等的数 $a_1, \cdots, a_n$.

1. 在线性空间 $\mathbb{F}[x]_n$ 中，令

$$f_i(x) = (x-a_1)\cdots(\widehat{x-a_i})\cdots(x-a_n), \quad i = 1, \cdots, n,$$

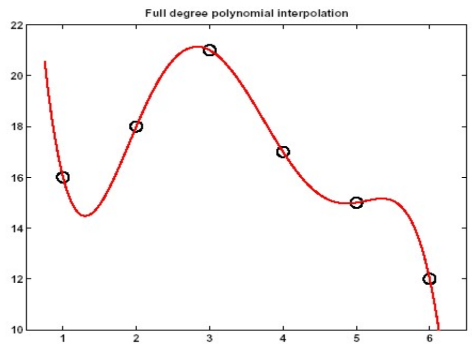
   其中 $(\widehat{x-a_i})$ 表示不含该项. 证明，$f_1(x), \cdots, f_n(x)$ 是 $\mathbb{F}[x]_n$ 的一组基.

2. 设 $b_1, \cdots, b_n$ 是 $\mathbb{F}$ 中任意 n 个数，找出 $f(x) \in \mathbb{F}[x]_n$，使得 $f(a_i) = b_i, i = 1, \cdots, n$.

练习 7.4.6 考虑练习 7.2.7 中的线性空间 $\mathbb{F}[x]_n$，考虑 $n = 3$ 的情形.

1. 给定 $\mathbb{F}$ 中两两不等的数 a_1, a_2, a_3，求由基 $1, x, x^2$ 到基 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ 的过渡矩阵.
2. 考虑练习 7.2.7 中的 $f(x)$，给定 $\mathbb{F}$ 中任意三个数 b_1, b_2, b_3，求 $f(x)$ 在两组基下的坐标.

插值问题：$n+1$ 个节点 (x_k, y_k)　$k = 0, 1, \cdots, n$, 确定过这些节点的多项式 $P_n(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$



$$\begin{cases} c_0 + x_0 c_1 + \cdots + x_0^{n-1} c_{n-1} + x_0^n c_n = y_0 \\ c_0 + x_1 c_1 + \cdots + x_1^{n-1} c_{n-1} + x_1^n c_n = y_1 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ c_0 + x_n c_1 + \cdots + x_1^{n-1} c_{n-1} + x_n^n c_n = y_n \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix}$$

线性映射的矩阵表示

命题7.5.1 给定数域 F 上有限维线性空间 U，V，而 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 U 的一组基，则

1. 任意 U 到 V 的线性映射 f 由 U 的基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 的像唯一确定；亦即，如果又有 U 到 V 的线性映射 g 使得 $g(\boldsymbol{e}_i)=f(\boldsymbol{e}_i)$，$i=1,\cdots,n$，则对任意 $\boldsymbol{a}\in$ U，$g(\boldsymbol{a})=f(\boldsymbol{a})$，即$g=f$；
2. 对任意 V 中 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，必存在唯一的 U 到 V 的线性映射$f$，使得 $f(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{a}_i$，$i=1,\cdots,n$.

根据命题7.5.1，f 被 $f(\boldsymbol{e}_1)$，…，$f(\boldsymbol{e}_n)$ 唯一确定. 设 $\boldsymbol{i}_1$，…，$\boldsymbol{i}_m$ 是 V 的一组基，

则 $f(\boldsymbol{e}_i)$ 可以被 $\boldsymbol{i}_1$，…，$\boldsymbol{i}_m$ 线性表示.

设
$$\begin{gathered} f(\boldsymbol{e}_1)=f_{11}\boldsymbol{i}_1+\cdots+f_{m1}\boldsymbol{i}_m, \\ \vdots \\ f(\boldsymbol{e}_n)=f_{1n}\boldsymbol{i}_1+\cdots+f_{mn}\boldsymbol{i}_m, \end{gathered}$$
令
$$F=\begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mn} \end{bmatrix},$$

则可形式上写成 $(f(\boldsymbol{e}_1),\cdots,f(\boldsymbol{e}_n))=(\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m)F$.

其中 $m\times n$ 矩阵 F 称为线性映射 f 在两组给定基下的（表示）矩阵.

为简便起见，引入记号 $f(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n):=(f(\boldsymbol{e}_1),\cdots,f(\boldsymbol{e}_n))$，

因此 $f(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=(\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m)F$.

线性映射的矩阵表示

命题7.5.1 给定数域 F 上有限维线性空间 U, V, 而 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 U 的一组基，则

1. 任意 U 到 V 的线性映射 f 由 U 的基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 的像唯一确定；亦即，如果又有 U 到 V 的线性映射 g 使得 $g(\boldsymbol{e}_i)=f(\boldsymbol{e}_i)$，$i=1,\cdots,n$，则对任意 $\boldsymbol{a}\in$ U，$g(\boldsymbol{a})=f(\boldsymbol{a})$，即$g=f$；
2. 对任意 V 中 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，必存在唯一的 U 到 V 的线性映射$f$，使得 $f(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{a}_i$，$i=1,\cdots,n$.

证. （1）对任意 $\boldsymbol{a}\in$ U，如果 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n$，

那么$f(\boldsymbol{a})=a_1f(\boldsymbol{e}_1)+\cdots+a_nf(\boldsymbol{e}_n)=a_1g(\boldsymbol{e}_1)+\cdots+a_ng(\boldsymbol{e}_n)=g(\boldsymbol{a})$.

（2）先定义映射

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathcal{U}\to\mathcal{V}, \\ & x_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n\mapsto x_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n. \end{aligned}$$

只需证明它是线性映射，因为显然 $f(\boldsymbol{e}_i)=\boldsymbol{a}_i$，$i=1$，$\cdots$，$n$，而唯一性由第 1 条保证. 对向量

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{y}=y_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+y_n\boldsymbol{e}_n,$$

$$\begin{aligned} f(k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{y}) &= f\Big((kx_1+ly_1)\boldsymbol{e}_1+\cdots+(kx_n+ly_n)\boldsymbol{e}_n\Big) \\ &= (kx_1+ly_1)\boldsymbol{a}_1+\cdots+(kx_n+ly_n)\boldsymbol{a}_n \\ &= k(x_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n)+l(y_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+y_n\boldsymbol{a}_n) \\ &= kf(\boldsymbol{x})+lf(\boldsymbol{y}). \end{aligned}$$

□

1. 矩阵 $E_{j1},E_{j2},j=1,\cdots,n$ 是 $\mathbb{F}^{n\times 2}$ 的一组基，$F_{i1},F_{i2},i=1,\cdots,m$ 是 $\mathbb{F}^{m\times 2}$ 的一组基. 设 $A=\begin{bmatrix}a_{ij}\end{bmatrix}\in\mathbb{F}^{m\times n}$，并记 $\boldsymbol{a}_j$ 为其第 j 列，考虑线性映射

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_A\colon\ \mathbb{F}^{n\times 2}&\to\mathbb{F}^{m\times 2},\\ X&\mapsto AX.\end{aligned}$$

则基向量 E_{j1} 的像为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_A(E_{j1})=AE_{j1}=A\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_j & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_j & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}&=a_{1j}F_{11}+\cdots+a_{mj}F_{m1}\\ &=(F_{11},\cdots,F_{m1},F_{12},\cdots,F_{m2})\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_j\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix},\end{aligned}$$

即基向量 E_{j1} 的像在基 $F_{11},\cdots,F_{m1},F_{12},\cdots,F_{m2}$ 下的坐标为 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_j\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$. 类似地，则基向量 E_{j2} 的像在基 $F_{11},\cdots,F_{m1},F_{12},\cdots,F_{m2}$ 下的坐标为 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{a}_j\end{bmatrix}$. 因此线性映射 $\boldsymbol{L}_A$ 在这两组基下的矩阵表示为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{L}_A(E_{11},\cdots,E_{n1},E_{12},\cdots,E_{n2})\\ &\qquad=\Big(\boldsymbol{L}_A(E_{11}),\cdots,\boldsymbol{L}_A(E_{n1}),\boldsymbol{L}_A(E_{12}),\cdots,\boldsymbol{L}_A(E_{n2})\Big)\\ &\qquad=(F_{11},\cdots,F_{m1},F_{12},\cdots,F_{n2})\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}\\ &\qquad=(F_{11},\cdots,F_{m1},F_{12},\cdots,F_{n2})\begin{bmatrix}A & \\ & A\end{bmatrix},\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{L}_A$ 在这两组基下的矩阵为 $L_A=\begin{bmatrix}A & \\ & A\end{bmatrix}$.

2. 矩阵 $E_{1j}, E_{2j}, j=1,\cdots,n$ 是 $\mathbb{F}^{2\times n}$ 的一组基，$F_{1i}, F_{2i}, i=1,\cdots,m$ 是 $\mathbb{F}^{2\times m}$ 的一组基. 设 $A=\begin{bmatrix}a_{ij}\end{bmatrix}\in\mathbb{F}^{m\times n}$，并记 $\tilde{\boldsymbol{a}}_i^{\mathrm{T}}$ 为其第 i 行，考虑线性映射

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_A:\ \ \mathbb{F}^{2\times m}&\to\mathbb{F}^{2\times n},\\ X&\mapsto XA.\end{aligned}$$

则基向量 F_{1i} 的像为

$$\boldsymbol{R}_A(F_{1i})=F_{1i}A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{a}}_i^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}=a_{i1}E_{11}+\cdots+a_{in}E_{1n}\ \ =(E_{11},\cdots,E_{1n},E_{21},\cdots,E_{2n})\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{a}}_i\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix},$$

即基向量 F_{1i} 的像在基 $E_{11},\cdots,E_{1n},E_{21},\cdots,E_{2n}$ 下的坐标为 $\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{a}}_i\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$. 类似地，则基向量 F_{2i} 的像在基 $E_{11},\cdots,E_{1n},E_{21},\cdots,E_{2n}$ 下的坐标为 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \tilde{\boldsymbol{a}}_i\end{bmatrix}$. 因此线性映射 $\boldsymbol{R}_A$ 在这两组基下的矩阵表示为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{R}_A(F_{11},\cdots,F_{1m},F_{21},\cdots,F_{2m})\\ &\qquad=\Big(\boldsymbol{R}_A(F_{11}),\cdots,\boldsymbol{L}_A(F_{1m}),\boldsymbol{L}_A(F_{21}),\cdots,\boldsymbol{L}_A(F_{2m})\Big)\\ &\qquad=(E_{11},\cdots,E_{1m},E_{21},\cdots,E_{2n})\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{a}}_1 & \cdots & \tilde{\boldsymbol{a}}_n & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \tilde{\boldsymbol{a}}_1 & \cdots & \tilde{\boldsymbol{a}}_n\end{bmatrix}\\ &\qquad=(E_{11},\cdots,E_{1n},E_{21},\cdots,E_{2n})\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}} & \\ & A^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{R}_A$ 在这两组基下的矩阵为 $R_A=\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}} & \\ & A^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$.

3. 在光滑函数空间的子空间 $\mathcal{V}=\operatorname{span}(1,\sin x,\cos x)$ 上考虑线性映射 $\boldsymbol{D}\colon f\mapsto f'$. 首先易得 $1,\sin x,\cos x$ 是一组基. 注意到 $\boldsymbol{D}1=0,\boldsymbol{D}\sin x=\cos x,\boldsymbol{D}\cos x=-\sin x$, 可知 $\boldsymbol{D}$ 可被定义为 $\mathcal{V}$ 上的线性变换.

于是 $\boldsymbol{D}(1,\sin x,\cos x)=(\boldsymbol{D}1,\boldsymbol{D}\sin x,\boldsymbol{D}\cos x)=(1,\sin x,\cos x)\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}$, 线性变换 $\boldsymbol{D}$ 在给定基下的矩阵就是该三阶矩阵. ☺

定义映射

$$\sigma=\sigma_{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n;\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m}\colon\ \begin{aligned}\operatorname{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{V})&\to\mathbb{F}^{m\times n},\\ f&\mapsto F,\end{aligned}$$

其中, F 是 $f\in\operatorname{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 在给定基下的矩阵.

定理 7.5.3 映射 $\sigma=\sigma_{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n;\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m}$ 是 $\operatorname{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 到 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 的同构映射. 特别地, $\dim\operatorname{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{V})=\dim\mathbb{F}^{m\times n}=mn$.

命题 7.5.5 给定线性空间 $\mathcal{U},\mathcal{V}$ 及各自一组基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n;\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m$. 设 $f\in\operatorname{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{V})$, 而 F 是 f 在给定基下的矩阵, 则

$$\sigma_{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n}\colon\ \mathcal{N}(f)\to\mathcal{N}(F),\qquad \sigma_{\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m}\colon\ \mathcal{R}(f)\to\mathcal{R}(F),$$

都是同构. 特别地, $\dim\mathcal{N}(f)=\dim\mathcal{N}(F),\dim\mathcal{R}(f)=\dim\mathcal{R}(F)$, 因此, $\dim\mathcal{N}(f)+\dim\mathcal{R}(f)=\dim\mathcal{U}$.

命题 7.5.4 给定线性空间 $\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W}$，分别取定一组基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n;\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m;\boldsymbol{j}_1,\cdots,\boldsymbol{j}_l$. 若 $f\in\mathrm{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{V}),g\in\mathrm{Hom}(\mathcal{V},\mathcal{W})$，则

$$\sigma_{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n;\boldsymbol{j}_1,\cdots,\boldsymbol{j}_l}(gf)=\sigma_{\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m;\boldsymbol{j}_1,\cdots,\boldsymbol{j}_l}(g)\sigma_{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n;\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m}(f).$$

证. 根据定义域的不同，我们可以放心地把不同的 σ 的下标省略，而信息可以从自变量中得出. 设 $\sigma(f)=F,\sigma(g)=G$，那么 $f(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=(\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m)F,g(\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m)=(\boldsymbol{j}_1,\cdots,\boldsymbol{j}_l)G$，于是

$$\begin{aligned}(gf)(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)&=(gf(\boldsymbol{e}_1),\cdots,gf(\boldsymbol{e}_n))\\&=g(f(\boldsymbol{e}_1),\cdots,f(\boldsymbol{e}_n))\\&=g\Big((\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m)F\Big)\\&=\Big(g(\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m)\Big)F\\&=\Big((\boldsymbol{j}_1,\cdots,\boldsymbol{j}_l)G\Big)F\\&=(\boldsymbol{j}_1,\cdots,\boldsymbol{j}_l)(GF),\end{aligned}$$

这就说明 $\sigma(gf)=GF=\sigma(g)\sigma(f)$. □

线性映射的矩阵在基变换下的变化规律

命题 7.5.6 给定数域 $\mathbb{F}$ 上线性空间 $\mathcal{U},\mathcal{V}$，和 $\mathcal{U}$ 的两组基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n;\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n$ 与 $\mathcal{V}$ 的两组基 $\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m;\boldsymbol{s}_1,\cdots,\boldsymbol{s}_m$. 记二者的过渡矩阵分别为 T,S，即

$$(\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n)=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)T,\quad (\boldsymbol{s}_1,\cdots,\boldsymbol{s}_m)=(\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m)S.$$

如果 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的线性映射 f 在基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n;\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m$ 下的矩阵为 F，则该映射在基 $\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n;\boldsymbol{s}_1,\cdots,\boldsymbol{s}_m$ 下的矩阵为 $S^{-1}FT$.

证. 设 f 在后两组基下的矩阵为 $\widetilde{F}$. 由定义，

$$f(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=(\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m)F,\quad f(\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n)=(\boldsymbol{s}_1,\cdots,\boldsymbol{s}_m)\widetilde{F}.$$

代入过渡矩阵，有 $f\Big((\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)T\Big)=\Big((\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m)S\Big)\widetilde{F}$. 利用形式上的结合律，有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m)(S\widetilde{F})=\Big((\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m)S\Big)\widetilde{F}&=f\Big((\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)T\Big)\\&=\Big(f(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\Big)T\\&=\Big((\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m)F\Big)T=(\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m)(FT).\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m$ 线性无关可得 $S\widetilde{F}=FT$. 而过渡矩阵可逆，因此 $\widetilde{F}=S^{-1}FT$. $\square$

命题 7.5.7 给定数域 $\mathbb{F}$ 上线性空间 $\mathcal{U},\mathcal{V}$ 及各自一组基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n;\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m$. 如果 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的线性映射 f 在其下的矩阵是 F，则对任意与 F 相抵的矩阵 $\widetilde{F}$，都存在 $\mathcal{U},\mathcal{V}$ 各自一组基，使得 f 在其下的矩阵是 $\widetilde{F}$.

证. 由于 $\widetilde{F}$ 与 F 相抵，根据命题 2.3.15 ，存在可逆矩阵 S,T，使得 $\widetilde{F}=S^{-1}FT$. 令

$$(\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n)=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)T,\quad (\boldsymbol{s}_1,\cdots,\boldsymbol{s}_m)=(\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m)S,$$

则 f 在基 $\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n;\boldsymbol{s}_1,\cdots,\boldsymbol{s}_m$ 下的矩阵为 $\widetilde{F}=S^{-1}FT$. □

命题 7.5.8 给定数域 $\mathbb{F}$ 上线性空间 $\mathcal{U},\mathcal{V}$，对任意 $f\in\mathrm{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{V})$，都存在 $\mathcal{U},\mathcal{V}$ 的一组基，使得 f 在其下的矩阵是 $D_r=\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}$，其中 $r=\dim\mathcal{R}(f)$.

证一. 矩阵的相抵是等价关系，任意秩为 r 的矩阵的相抵标准形是 D_r，利用命题 7.5.7 立得. □

证二. 由于 $\dim\mathcal{N}(f)=\dim\mathcal{U}-\dim\mathcal{R}(f)=n-r$，取 $\mathcal{N}(f)$ 的一组基 $\boldsymbol{e}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n$，扩充成 $\mathcal{U}$ 的一组基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n$.

可证 $f(\boldsymbol{e}_1),\cdots,f(\boldsymbol{e}_r)$ 线性无关. 事实上，设 $k_1f(\boldsymbol{e}_1)+\cdots+k_rf(\boldsymbol{e}_r)=\boldsymbol{0}$，则 $f(k_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{e}_r)=\boldsymbol{0}$，即 $k_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{e}_r\in\mathcal{N}(f)$. 而 $\boldsymbol{e}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 $\mathcal{N}(f)$ 的一组基，存在 $k_{r+1},\cdots,k_n\in\mathbb{F}$，使得 $k_1\boldsymbol{e}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{e}_r=k_{r+1}\boldsymbol{e}_{r+1}+\cdots+k_n\boldsymbol{e}_n$. 但 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性无关，因此 $k_1=\cdots=k_r=k_{r+1}=\cdots=k_n=0$.

设 $\boldsymbol{i}_1=f(\boldsymbol{e}_1),\cdots,\boldsymbol{i}_r=f(\boldsymbol{e}_r)$，将其扩充成 $\mathcal{V}$ 的一组基 $\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_r,\boldsymbol{i}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{i}_m$. 直接计算可得，

$$f(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n)=(\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_r,\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0})=(\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_r,\boldsymbol{i}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{i}_m)\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix},$$

即其矩阵为 D_r. □

线性变换在基下的坐标表示

设 f 是 $\mathcal{V}$ 上的线性变换，$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 是 $\mathcal{V}$ 的一组基，则 $f(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)F$，其中 n 阶方阵 F 称为线性变换 f 在给定基下的（表示）矩阵.

注意：线性映射在基下的矩阵需要在定义域和陪域各取一组基，而线性变换的矩阵在定义域和陪域取的是同一组基.

1. 设 $A = \left[a_{ij}\right] \in \mathbb{F}^{2\times 2}$，$\mathbb{F}^{2\times 2}$ 上的线性变换

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}_A = \boldsymbol{L}_A - \boldsymbol{R}_A:\quad \mathbb{F}^{2\times 2} &\to \mathbb{F}^{2\times 2},\\ X &\mapsto AX - XA,\end{aligned}$$

在基 $E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}$ 下的矩阵表示为

$$\boldsymbol{C}_A(E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}) = (E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})C_A,$$

其中 $C_A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & -a_{21} & 0 \\ a_{21} & a_{22}-a_{11} & 0 & -a_{21} \\ -a_{12} & 0 & a_{11}-a_{22} & a_{12} \\ 0 & -a_{12} & a_{21} & 0 \end{bmatrix}$ 是 $\boldsymbol{C}_A$ 在这组基下的矩阵.

2. $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 上的线性变换

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}:\quad \mathbb{F}^{2\times 2} &\to \mathbb{F}^{2\times 2}, \\ A &\mapsto \frac{1}{2}(A + A^{\mathrm{T}}). \end{aligned}$$

在基 $E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}$ 下的矩阵表示为

$$\boldsymbol{S}(E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}) = (E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})S,$$

其中 $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是 $\boldsymbol{S}$ 在这组基下的矩阵.

命题 7.5.10 给定 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $\mathcal{V}$ 及其一组基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$. 又设 f 是其上的线性变换，在给定基下的矩阵是 F. 对 $\lambda \in \mathbb{F}, \boldsymbol{x} \in \mathcal{V}$，若 $\widehat{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{F}^n$ 是 $\boldsymbol{x}$ 在该组基下的坐标，则 $(\lambda, \boldsymbol{x})$ 是 f 的特征对，当且仅当 $(\lambda, \widehat{\boldsymbol{x}})$ 是 F 的特征对，即

$$f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x} \Leftrightarrow F\widehat{\boldsymbol{x}} = \lambda \widehat{\boldsymbol{x}}.$$

1. 设 $A=\left[a_{ij}\right]\in\mathbb{F}^{2\times 2}$，$\mathbb{F}^{2\times 2}$ 上的线性变换

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}_A=\boldsymbol{L}_A-\boldsymbol{R}_A\colon\quad \mathbb{F}^{2\times 2}&\to\mathbb{F}^{2\times 2},\\ X&\mapsto AX-XA,\end{aligned}$$

在基 $E_{11},E_{21},E_{12},E_{22}$ 下的矩阵表示为

$$\boldsymbol{C}_A(E_{11},E_{21},E_{12},E_{22})=(E_{11},E_{21},E_{12},E_{22})C_A,$$

其中 $C_A=\begin{bmatrix}0&a_{12}&-a_{21}&0\\a_{21}&a_{22}-a_{11}&0&-a_{21}\\-a_{12}&0&a_{11}-a_{22}&a_{12}\\0&-a_{12}&a_{21}&0\end{bmatrix}$ 是 $\boldsymbol{C}_A$ 在这组基下的矩阵.

线性映射 $\boldsymbol{C}_A$ 在给定基下的矩阵是 C_A. 计算可得，C_A 的特征多项式为 $\lambda^2[\lambda^2-(a_{11}+a_{22})^2+4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})]=\lambda^2[\lambda^2-\operatorname{trace}(A)^2+4\det(A)]$. 设 A 的两个特征值为 λ_1,λ_2，则上面特征多项式为 $\lambda^2[\lambda^2-(\lambda_1-\lambda_2)^2]$.

(a) 若 $\lambda_1\neq\lambda_2$，容易验证 $\operatorname{rank}(C_A)=2$，因此 $\dim\mathcal{N}(\boldsymbol{C}_A)=2$.

(b) 若 $\lambda_1=\lambda_2$，但 $a_{12},a_{21},a_{11}-a_{22}$ 至少有一个不为零，则 $\dim\mathcal{N}(\boldsymbol{C}_A)=4-\operatorname{rank}(C_A)=2$.

(c) 若 $a_{12}=a_{21}=a_{11}-a_{22}=0$, 则 $\dim\mathcal{N}(\boldsymbol{C}_A)=4$, 此时 $A=a_{11}I_2$ 而 $\boldsymbol{C}_A=\boldsymbol{O}$ 是零映射.

不考虑 A 是数量矩阵的情形，通过计算属于 0 的特征向量，还能得到核 $\mathcal{N}(\boldsymbol{L}_A-\boldsymbol{R}_A)=\{X\in\mathbb{F}^{2\times 2}\mid AX=XA\}$ 的一组基，由两个矩阵（$\mathbb{F}^{2\times 2}$ 中的向量）组成，这比例 7.3.11 又深入了一步.

例 7.3.11 1. 设 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$，取左乘矩阵和右乘矩阵映射的差:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_A-\boldsymbol{R}_A\colon\quad \mathbb{F}^{n\times n}&\to\mathbb{F}^{n\times n},\\ X&\mapsto AX-XA,\end{aligned}$$

定义了 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上的线性变换. 其核 $\mathcal{N}(\boldsymbol{L}_A-\boldsymbol{R}_A)=\{X\in\mathbb{F}^{n\times n}\mid AX=XA\}$ 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 的子空间，包含了所有与 A 交换的 n 阶方阵.

2. $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 上的线性变换

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}:\quad \mathbb{F}^{2\times 2} &\to \mathbb{F}^{2\times 2},\\ A &\mapsto \tfrac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}}).\end{aligned}$$

在基 $E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}$ 下的矩阵表示为

$$\boldsymbol{S}(E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}) = (E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})S,$$

其中 $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是 $\boldsymbol{S}$ 在这组基下的矩阵.

线性映射 $\boldsymbol{S}$ 在给定基下的矩阵是 S. 而 S 是对称矩阵，可对角化，S 的四个线性无关的特征向量为：属于 0 的 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$；属于 1 的 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. 因此，核和像集分别为

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{S}) = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right), \quad \mathcal{R}(\boldsymbol{S}) = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

前者是全体反对称矩阵构成的子空间，后者是全体对称矩阵构成的子空间

命题 7.5.12 设 $\mathbb{F}$ 上 n 维线性空间 $\mathcal{V}$，f 是其上的线性变换，它在某组基下的矩阵是 F，则 F 可对角化当且仅当 f 有 n 个线性无关的特征向量.

下面讨论线性变换的矩阵在基变换下的变化规律.

命题 7.5.13 给定数域 $\mathbb{F}$ 上线性空间 $\mathcal{V}$ 和它的两组基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n;\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n$. 记过渡矩阵为 T，即 $(\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n)=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)T$. 如果 $\mathcal{V}$ 上线性变换 f 在基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 下的矩阵为 F，则 f 在基 $\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n$ 下的矩阵为 $T^{-1}FT$.

命题 7.5.14 数域 $\mathbb{F}$ 上两个 n 阶方阵 A,B 相似，当且仅当 A,B 是 n 维线性空间 $\mathcal{V}$ 上某个线性变换在两组基下的矩阵.

证. “$\Leftarrow$”：由命题 7.5.13 立得.

“$\Rightarrow$”：设 $B=T^{-1}AT$，其中 T 可逆. 根据定理 7.5.3 ，能构造 $\mathcal{V}$ 上线性变换 f 使得它在 $\mathcal{V}$ 的某组基下的矩阵为 A，记该组基为 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$. 令 $(\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n)=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)T$，由于 T 可逆，根据命题 7.4.6 ，$\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n$ 是 V 的一组基. 根据命题 7.5.13 ，f 在这组基下的矩阵就是 $T^{-1}AT=B$. □

作 业（12月20日）

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

练习7.5

1，2，3，4，5，8，11，14，15，16

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~