线性代数 第18讲

11月10日

第四章第2讲 行列式的展开式

上一讲内容回顾

行列式的Laplace展开

伴随矩阵和克莱姆（Carmer）法则

行列式的完全展开式

定义 4.2.1 (行列式) 定义在全体 n 阶方阵上的函数 δ，如果满足如下性质：

1. 列多线性性：对每个列向量都满足线性性，即对任意 $1 \leqslant i \leqslant n$，都有 $\delta(\cdots, k\boldsymbol{a}_i + k'\boldsymbol{a}_i', \cdots) = k\delta(\cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots) + k'\delta(\cdots, \boldsymbol{a}_i', \cdots)$；
2. 列反对称性：对任意 $1 \leqslant i < j \leqslant n$，都有 $\delta(\cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots) = -\delta(\cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots)$；
3. 单位化条件：$\delta(I_n) = 1$；

则 δ 就称为一个 n 阶**行列式函数**.

我们将证明 n 阶方阵的行列式函数存在且唯一. 这个唯一的行列式函数在矩阵 A 的值称为 A 的**行列式**，记为[1]$\det(A)$ 或 $|A|$.

某个 n 阶方阵的行列式可以直接称为一个 n 阶行列式.

$$det(A) \text{ 或 } |A| \text{ 或 } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

命题 4.2.3 1. 如果方阵 A 有两列相等，则 $\det(A) = 0$；

2. 如果方阵 A 不满秩，即不可逆，则 $\det(A) = 0$；

3. 如果方阵 A 有一列为零或有一行为零，则 $\det(A) = 0$.

$$\begin{vmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} d_{kk}$$

行列式函数的几个重要性质

命题4.2.4 行列式函数在初等矩阵上的取值均不为零，分别是：

1. $\det(P_{ij}) = -1$； **2.** $\det(E_{ii;k}) = k$； **3.** $\det(E_{ji;k}) = 1$.

命题4.2.5 行列式函数满足

1. 对 A 的第i, j 列位置互换， $\det(AP_{ij}) = -\det(A) = \det(A)\det(P_{ij})$；
2. 对 A 的第 i 列乘非零常数 k ， $\det(AE_{ii;k}) = k\det(A) = \det(A)\det(E_{ii;k})$；
3. 把 A 的第 j 列的 k 倍加到第 i 列， $\det(AE_{ji;k}) = \det(A) = \det(A)\det(AE_{ji;k})$.

定理4.2.6 行列式函数有如下性质：

1. 对初等矩阵E，则 $\det(AE) = \det(A)\det(E)$；
2. 设可逆矩阵 $A = E_1 \cdots E_m$，其中 E_i 为初等矩阵，则 $\det(A) = \det(E_1) \cdots \det(E_m)$；
3. $\det(A) \neq 0$ 当且仅当 A 可逆；
4. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$；
5. $\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A)$.

消去法计算行列式

1. 把 A 的某行的倍数加到另一行，或某列的倍数加到另一列，其行列式不变；
2. 把 A 的两行或两列对调，其行列式变为原来的相反数；
3. 把 A 的某行或某列乘以 k，其行列式变为原来的 k 倍.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 25$$

练习 4.2.21 设 A, B 是 n 阶方阵，证明，$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}\right) = \det(A+B)\det(A-B)$.

$$\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & I \\ B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ B & A-B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}\right) = det\left(\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}\right) = det\left(\begin{bmatrix} A+B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ B & A-B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = 2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & y & x+y \\ 1 & x+y & x \\ 1 & x & y \end{vmatrix} = 2(x+y)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & -y \\ 1 & x-y & -x \end{vmatrix}$$

$$= 2(x+y)\cdot\left(-x^2+xy-y^2\right) = -2\left(x^3+y^3\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -x & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & y & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{y} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix} = -x^2y^2$$

证明：n阶范德蒙(Vandermonde)行列式 $V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i).$

解 从第 n 行开始，每一行减去前一行的 x_1倍，目的是把第一列除1以外的元素化为零.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ 0 & (x_2-x_1)x_2^{n-2} & (x_3-x_1)x_3^{n-2} & \cdots & (x_n-x_1)x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & (x_2-x_1)x_2^{n-3} & (x_3-x_1)x_3^{n-3} & \cdots & (x_n-x_1)x_n^{n-3} \\ 0 & (x_2-x_1)x_2^{n-2} & (x_3-x_1)x_3^{n-2} & \cdots & (x_n-x_1)x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & (x_2 - x_1) x_2^{n-3} & (x_3 - x_1) x_3^{n-3} & \cdots & (x_n - x_1) x_n^{n-3} \\ 0 & (x_2 - x_1) x_2^{n-2} & (x_3 - x_1) x_3^{n-2} & \cdots & (x_n - x_1) x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

按第一列展开，并提取各列的公因子， 可以得到：

$$= (x_2 - x_1) \cdot (x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2^{n-3} & x_3^{n-3} & x_4^{n-3} & \cdots & x_n^{n-3} \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & x_4^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$V_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) V_{n-1}$$ 利用这个公式递推：

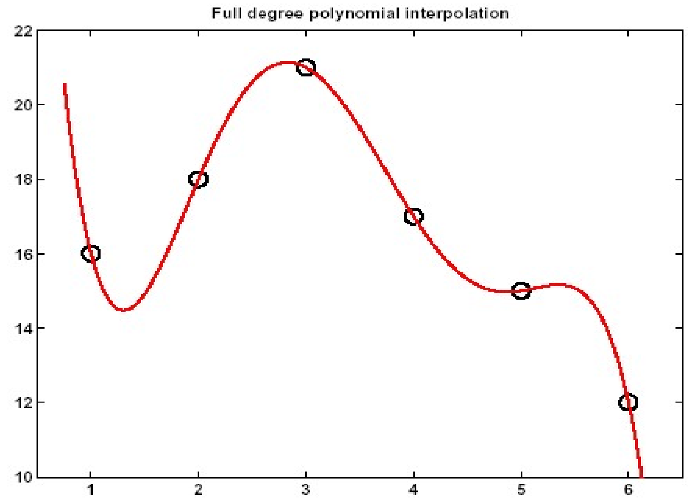
$$V_{n-1} = (x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \cdots (x_n - x_2) V_{n-2}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$V_3 = (x_n - x_{n-2})(x_{n-1} - x_{n-2}) V_2$$

$$V_2 = x_n - x_{n-1}$$ 由上述递推结果即可得到结论.

n 次插值多项式



n+1个插值节点

$$\left(x_k, y_k\right) \qquad k = 0,1,\cdots,n$$

$$P_n\left(x\right) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

$$\begin{cases} c_0 + x_0 c_1 + \cdots + x_0^{n-1} c_{n-1} + x_0^n c_n = y_0 \\ c_0 + x_1 c_1 + \cdots + x_1^{n-1} c_{n-1} + x_1^n c_n = y_1 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ c_0 + x_n c_1 + \cdots + x_1^{n-1} c_{n-1} + x_n^n c_n = y_n \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix}$$

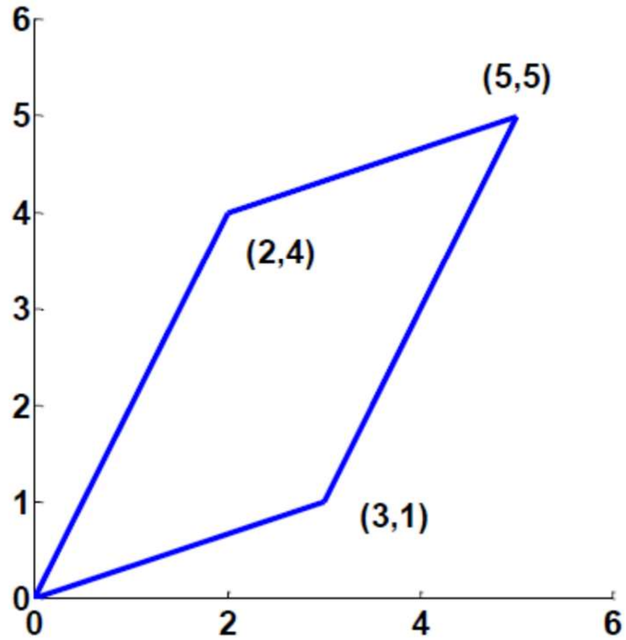
行列式的几何意义

说明：行列式的几何意义是线性变换下“体积”的变化率，设$e_1,e_2,\cdots,e_n$是R^n的一组标准正交基，A为一可逆矩阵，则$Ae_1,Ae_2,\cdots,Ae_n$也是R^n的一组基，由$Ae_1,Ae_2,\cdots,Ae_n$围成的n维平行超立方体的“体积”为$\left|\det(A)\right|$。线性变换$Y=AX$将区域D映射为D'，则$S(D')=S(D)\cdot\left|\det(A)\right|$。

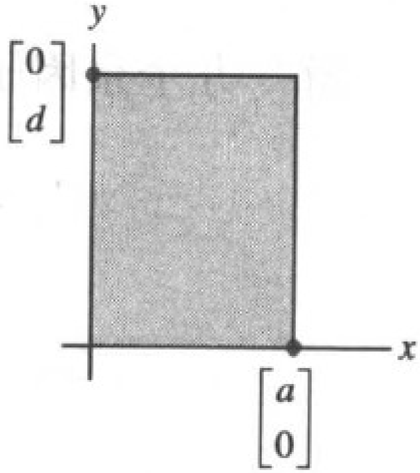
行列式的几何意义图示

$$A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right)=10$$



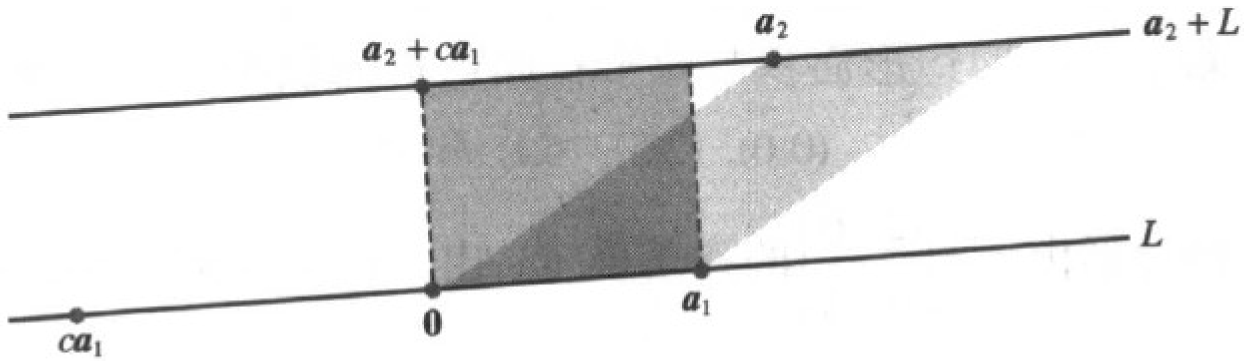
行列式的几何意义



若 A 为 2 阶对角矩阵，定理显然成立.

$$\left|\det\begin{bmatrix}a & 0\\0 & d\end{bmatrix}\right| = |ad| = \{\text{矩阵的面积}\}$$

设a_1和a_2为非零向量，则对任意常数c，由a_1和a_2确定的平行四边形面积等于由a_1和a_2+ca_1确定的平行四边形面积



行列式的（Laplace）展开

例 4.3.1 (三阶行列式) 根据列线性性和行反对称性，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} 1 & a_{32} & a_{33} \\ 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

定义 4.3.2 (代数余子式) 给定 n 阶方阵 A，令 $A\binom{i}{j}$ 表示从 A 划去第 i 行和第 j 列得到的 $n-1$ 阶方阵，则 $M_{ij} = \det\left(A\binom{i}{j}\right)$，称为元素 a_{ij} 的**余子式**；而 $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij} = (-1)^{i+j}\det\left(A\binom{i}{j}\right)$，称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

定义 4.3.2 (代数余子式) 给定 n 阶方阵 A，令 $A\left(\binom{i}{j}\right)$ 表示从 A 划去第 i 行和第 j 列得到的 $n-1$ 阶方阵，则 $M_{ij}=\det\left(A\left(\binom{i}{j}\right)\right)$，称为元素 a_{ij} 的**余子式**；而 $C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}=(-1)^{i+j}\det\left(A\left(\binom{i}{j}\right)\right)$，称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

$$(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = C_{ij}$$

定理 4.3.3 给定 n 阶方阵 $A=\left[a_{ij}\right]$，则函数 $a_{11}C_{11}+\cdots+a_{n1}C_{n1}$ 是行列式函数，即

$$\det(A)=a_{11}C_{11}+\cdots+a_{n1}C_{n1},$$

这称为行列式按第一列的展开式.

定理 4.3.3 给定 n 阶方阵 $A=\left[a_{ij}\right]$，则函数 $a_{11}C_{11}+\cdots+a_{n1}C_{n1}$ 是行列式函数，即

$$\det(A)=a_{11}C_{11}+\cdots+a_{n1}C_{n1},$$

这称为行列式按第一列的展开式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\cdot\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{21}\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + a_{n1}\cdot(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\cdot C_{11} + a_{21}\cdot C_{21} + \cdots + a_{n1}\cdot C_{n1}$$

例 4.3.4 计算 (3.2.1) 中的正交矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix}$$

的行列式. 按第一列展开，有

$$\det(Q) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{vmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{vmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = -1.$$

也可以利用倍加变换，

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ -\frac{3}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\frac{3}{\sqrt{6}}\sqrt{2}) = -1. \quad ☺$$

命题 4.3.5 行列式按任意一行或任意一列展开：

1. 按第 j 列展开：$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$；

2. 按第 i 行展开：$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + \cdots + a_{in}C_{in}$.

计算行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

解

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+5}\,2\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -2\cdot 5\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_1+r_3]{-2r_1+r_2} -10\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix} = -10\cdot(-2)\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 20(-42-12) = -1080.$$

计算行列式 $|A|=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\1&3&1&-1\\-1&0&2&1\\3&-1&0&1\end{vmatrix}$, 通过按第1行展开求 |A| 的值.

解

$M_{11}=\begin{vmatrix}3&1&-1\\0&2&1\\-1&0&1\end{vmatrix}=3,$

$C_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=3;$

$M_{12}=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&2&1\\3&0&1\end{vmatrix}=12,$

$C_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-12;$

$M_{13}=\begin{vmatrix}1&3&-1\\-1&0&1\\3&-1&1\end{vmatrix}=12,$

$C_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=12;$

$M_{14}=\begin{vmatrix}1&3&1\\-1&0&2\\3&-1&0\end{vmatrix}=21,$

$C_{14}=(-1)^{1+4}M_{14}=-21.$

$$\begin{aligned}|A|&=a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+a_{13}C_{13}\\&=1\times3+2\times(-12)+0\times12+1\times(-21)\\&=-42.\end{aligned}$$

$$a_{21}C_{11}+a_{22}C_{12}+a_{23}C_{13}+a_{24}C_{14}=1\times3+3\times(-12)+1\times12+(-1)\times(-21)=0.$$

$$a_{41}C_{11}+a_{42}C_{12}+a_{43}C_{13}+a_{44}C_{14}=3\times3+(-1)\times(-12)+0\times12+1\times(-21)=0.$$

命题 4.3.6 令 $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$，再记第 j 列元素的代数余子式组成的向量为 $\boldsymbol{c}_j = \begin{bmatrix} C_{1j} \\ \vdots \\ C_{nj} \end{bmatrix}$. 则当 $j' \neq j$ 时，$\boldsymbol{a}_{j'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_j = 0$；当 $j' = j$ 时，有 $\boldsymbol{a}_{j'}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_j = \det(A)$.

$$\boldsymbol{a}_{j'}^{T}\boldsymbol{c}_j = a_{j'1}C_{j1} + a_{j'2}C_{j2} + \cdots + a_{j'n}C_{jn}$$

$$\boldsymbol{a}_{j'}^{T}\boldsymbol{c}_j = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} \cdots & a_{1j'} & \cdots & a_{1j'} & \cdots \\ \cdots & a_{2j'} & \cdots & a_{2j'} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{nj'} & \cdots & a_{nj'} & \cdots \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} & j'\text{列} & & j\text{列} & \end{array} \end{array}, \quad \boldsymbol{a}_{j}^{T}\boldsymbol{c}_j = |A| = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} \cdots & a_{1j'} & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \cdots & a_{2j'} & \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{nj'} & \cdots & a_{nj} & \cdots \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} & j'\text{列} & & j\text{列} & \end{array} \end{array}$$

对矩阵 $A=[a_{ij}]$，记 $C=[C_{ij}]_{n\times n}$，即 C 的 (i,j) 元素是 a_{ij} 的代数余子式，矩阵 C^{T} 常称为 A 的**伴随矩阵**.

推论 4.3.7 (逆矩阵公式) 对可逆矩阵 A，$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}C^{\mathrm{T}}$.

证. 命题 4.3.6 说明 $C^{\mathrm{T}}A=\det(A)I_n$. 立得. □

矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=C^T=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$

$$AA^*=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}=|A|I$$

当 $|A|\neq 0$ 时，A 和 A^* 可逆，$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$，$(A^*)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A$

考虑线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$AX = b \Rightarrow A^*AX = A^*b$$

当 $|A| \neq 0$ 时，

$$AA^* = A^*A = |A|I$$

$$|A|X = A^*b = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1C_{11} + b_2C_{21} + \cdots + b_nC_{n1} \\ b_1C_{12} + b_2C_{22} + \cdots + b_nC_{n2} \\ \vdots \\ b_1C_{1n} + b_2C_{2n} + \cdots + b_nC_{nn} \end{bmatrix},$$

Cramer法则

$$b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \cdots + b_nC_{nj} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |B_j|, \quad X = \frac{1}{|A|}A^*b = \begin{bmatrix} |B_1| / |A| \\ |B_2| / |A| \\ \vdots \\ |B_n| / |A| \end{bmatrix}$$

推论 4.3.8 (Cramer 法则) 给定方阵 A，线性方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解，当且仅当 $\det(A) \neq 0$，且有唯一解时，唯一解为

$$x_1 = \frac{\det(B_1)}{\det(A)}, \cdots, x_n = \frac{\det(B_n)}{\det(A)},$$

其中 B_j 是把 A 的第 j 列换成 $\boldsymbol{b}$ 得到的矩阵.

用克莱姆法则求解线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 + -4x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$

解：$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 11$

克莱姆法则并不是求解线性方程组的实用算法，

求解线性方程组的实用算法：高斯若当消去

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -11 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 33,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 11,\ D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & -5 \end{vmatrix} = -22,$$

由*Cramer*法则可得到方程组的唯一解：$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -2 \end{cases}.$

行列式的完全展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)a_{21}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + (-1)a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}$$

$(1\ \ 2\ \ 3)$的6个排列:$(1\ \ 2\ \ 3),(1\ \ 3\ \ 2),(2\ \ 1\ \ 3),(2\ \ 3\ \ 1),(3\ \ 1\ \ 1),(3\ \ 2\ \ 1)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{31}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41}\cdot\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots\cdots$$

行列式的完全展开式

定义 4.3.9 (排列) 将正整数 $1,\cdots,n$ 按一定顺序排列起来得到 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$，称为一个**排列或置换**. 这里称为排列 σ.

对调排列中两个数的顺序，称为对该排列施加一次**对换**.

排列 σ，如果可以经过奇数次对换得到 $1,2,\cdots,n$，则称为**奇排列**；如果可以经过偶数次对换得到 $1,2,\cdots,n$，则称为**偶排列**.

定义 4.3.10 (排列的符号) 对排列 σ, 如果它是奇排列, 则定义其符号为 $\mathrm{sign}(\sigma)=-1$; 否则它是偶排列，定义其符号为 $\mathrm{sign}(\sigma)=1$.

命题 4.3.11 (行列式完全展开) 如下等式成立:

1. $\det(A)=\sum\limits_{\text{排列 }\sigma}\mathrm{sign}(\sigma)a_{\sigma_1 1}\cdots a_{\sigma_n n}$.

2. $\det(A)=\sum\limits_{\text{排列 }\sigma}\mathrm{sign}(\sigma)a_{1\sigma_1}\cdots a_{n\sigma_n}$.

命题 4.3.11 (行列式完全展开) 如下等式成立:

1. $\det(A) = \sum_{\text{排列 } \sigma} \mathrm{sign}(\sigma) a_{\sigma_1 1} \cdots a_{\sigma_n n}$.

2. $\det(A) = \sum_{\text{排列 } \sigma} \mathrm{sign}(\sigma) a_{1\sigma_1} \cdots a_{n\sigma_n}$.

练习 4.3.3 计算 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

练习 4.3.20 由 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$，证明，$1, \cdots, n$ 的所有排列中，奇、偶排列各占一半.

作 业（11月10日）

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

练习4.3

1，2，4，5，8，14，16，18（1），19

11月15日提交

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~