第五周作业参考解答

邓一理

练习 2.1.1

6. 是.$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T$.

7. 否.

8. 否.

9. 是.$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

10. 否

13. 是. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

14. 是. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{T'}$ · 注意反对称矩阵的对角元全为 0，所以该子空间维数为 1，而不是 3.

这道题做错的同学较多。要注意布置的习题包括第 13、14 题，不要漏题。另外看清题目，如果是子空间，请写出它的一组基。基是线性无关的向量组，写出一组基即可。

练习 2.1.2

1. 存在. 不是.

2. 存在. 例: $\left\{ \begin{bmatrix} k\cos\theta \\ k\sin\theta \\ k \end{bmatrix} \mid 0 \le \theta < 2\pi, k \in \mathbb{R} \right\}$.

都不是子空间.

3. 存在. 例: $\left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \mid a, b \ge 0 \right\}$

$\left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ 是子空间.

该题需要先判断 M 是否存在，然后判断哪些 M 是子空间。第一小题的 M 对数乘不封闭，第二小题的 M 对加法不封闭，都不是子空间。第三小题题目没有说当 $k < 0$ 时 kv 不属于 M，所有存在 M 为子空间。

练习 2.1.3

命题 2.1.8：

1. 子集 $\operatorname{span}(S)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

验证其非空且对加法和数乘封闭.

2. 如果 S 中的向量都在 $\mathbb{R}^n$ 的某个子空间中, 则 $\operatorname{span}(S)$ 中的向量也都在该子空间中.

由子空间含有其中向量的线性组合得到.

练习 2.1.8

1. 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, Ax_0 = b$, 我们有 $R\left(\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}\right) = R\left(\begin{bmatrix} A & Ax_0 \end{bmatrix}\right) = \{Ay + y_{n+1}Ax_0 \mid y \in \mathbb{R}^n, y_{n+1} \in \mathbb{R}\} = \{Ay \mid y \in \mathbb{R}^n\} = R(A)$.

2. 设 $Ax_0 = b, N\left(\begin{bmatrix} A^T \\ b^T \end{bmatrix}\right) = N\left(\begin{bmatrix} A^T \\ x_0^T A^T \end{bmatrix}\right) = \left\{x \mid A^T x = x_0^T A^T x = 0\right\} = \left\{x \mid A^T x = 0\right\} = N\left(A^T\right)$.

练习 2.1.9

1.

$$设b = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, 解得 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

练习 2.1.10

2. 是. 可转换为线性方程组的零解问题。

练习 2.1.11

否. 例: 对线性无关的两向量 $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 考虑向量组 $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, e_1 + e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

练习 2.1.12

$$由于a_2 = -\frac{k_1}{k_2}a_1 - \frac{k_3}{k_2}a_3 \text{ 以及}a_1 = -\frac{k_2}{k_1}a_2 - \frac{k_3}{k_1}a_3, \operatorname{span}(a_1, a_3) = \operatorname{span}(a_2, a_3) = \operatorname{span}(a_1, a_2, a_3).$$

练习 2.1.14

$$\begin{bmatrix} k_1Aa_1 & k_2Aa_2 & \cdots & k_sAa_s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} k_1a_1 & k_2a_2 & \cdots & k_sa_s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} k_1a_1 & k_2a_2 & \cdots & k_sa_s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

练习 2.1.17

1. 若向量组 $a_1, \cdots, a_n$ 线性相关, 则存在不全为 0 的常数 $k_1, \cdots, k_n$ 使得 $k_1a_1 + \cdots k_na_n = 0$. 从每个向量中去掉第 $i_1, \cdots, i_s$ 个分量后, 仍有 $k_1a_1' + \cdots k_na_n' = 0$, 故 $a_1', \cdots, a_n'$ 线性相关.

2. 这是上一问的逆否命题

练习 2.2.1

2.$\{a_1, a_2\}$ 是一个极大无关部分组. 秩为 2.

练习 2.2.2

3. 第 1, 4 个.

4. 第 4 个.

练习 2.2.3

筛选法留下了第 1, 2, 3 个方程.

练习 2.2.4

三个向量中的任意两个.

练习 2.2.6

我们可以用 S 和 T 的极大线性无关部分组 S' 和 T' 代替 S 和 T 而不改变秩. 此时仍有 S' 可以被 T' 线性表示, 故 $rank(S) = rank(S') \leq rank(T') = rank(T)$. (不等号由基扩充定理保证.)

练习 2.2.8

设向量组 S 与部分组 S' 的秩相同. 取 S' 的极大线性无关部分组 S'', 由 S'' 线性无关且 $\mathrm{rank}(S) = \mathrm{rank}\,(S'')$, 故 S'' 也是 S 的极大线性无关部分组. 故 S 与 S' 可以互相线性表示.

练习 2.2.10

1. 将线性无关的部分组 S 扩充成极大线性无关部分组 S'. 比较集合的秩知 $S = S'$.

2. 删去可以线性表示原向量组的向量组 S 中的某些向量得到原向量组的极大线性无关部分组 S''. 比较集合的秩知 $S = S''$.

练习 2.2.11

命题 2.2.17: 设 M 是 $\mathbb{R}^m$ 的 r 维子空间, 给定 M 中含有 r 个向量的向量组 $a_1, \cdots, a_r$.

1. 如果 $a_1, \cdots, a_r$ 线性无关, 则 $a_1, \cdots, a_r$ 是 M 的一组基.

将线性无关的向量组 $a_1, \cdots, a_r$ 扩充为 M 的一组基. 比较集合的秩知这组基正是 $a_1, \cdots, a_r$.

2. 如果 $M = \operatorname{span}(a_1, \cdots, a_r)$, 则 $a_1, \cdots, a_r$ 是 M 的一组基.

删去可以线性表示 M 的向量组 $a_1, \cdots, a_r$ 中的某些向量得到 M 的一组基. 比较集合的秩知这组基正是 $a_1, \cdots, a_r$.