线性代数 第23讲

11月29日

实对称矩阵

实对称矩阵的正交对角化

实对称阵对角化的方法

瑞雷（Rayleigh）商

例题选讲

- 对于一般 n 阶矩阵而言，只有少数能够对角化.
- 但是任何一个实对称阵一定可以对角化（在实数范围里）.
- 不仅如此，我们还可以得到一个更强的结论.
- 任意实对称阵 A 不仅可对角化，而且能找到一个正交阵 Q，

  使得 $Q^{-1}AQ = Q^{T}AQ$ 为对角阵. 即 A 可正交对角化.
- 思考：Q是否唯一？

实对称阵的特征值均为实数

命题6.1.1　设 A 是 n 阶实对称阵，则 A 的特征值都是实数.

证　设复数 λ 是 A 的特征值，在 C^n 中存在一个非零向量 X，

使得 AX=λX　(1)，　对(1)式两端取共轭有　$\overline{AX}=\overline{\lambda X}$

但是 A 是实矩阵，$\overline{A}=A$，故有　$A\overline{X}=\overline{\lambda}\,\overline{X}$　(2)

X^T左乘(2)式两端，　得到　$X^T A\overline{X}=\overline{\lambda}X^T\overline{X}$　(3)

因为 $A=A^T$，并注意到　$X^T A\overline{X}$ 及 $X^T\overline{X}$ 是数，

$$X^T A\overline{X}=(X^T A\overline{X})^T=\overline{X}^T AX=\overline{X}^T\lambda X=\lambda\overline{X}^T X=\lambda(\overline{X}^T X)^T=\lambda X^T\overline{X} \quad (4)$$

由(3)及(4)式，有 $(\lambda-\overline{\lambda})X^T\overline{X}=0$，由 $X\neq 0$ 知 $X^T\overline{X}\neq 0$. 所以 $\lambda-\overline{\lambda}=0$

即 λ 是实数.

实对称阵属于不同特征值的特征向量互相正交

设 A 是 n 阶实对称矩阵，λ_1，λ_2 是 A 的两个相异的特征值，X_1，X_2 分别是属于 λ_1和λ_2 的特征向量，则 X_1和X_2 必正交.

证明：设 λ_1 和 λ_2 是对称矩阵 A 的两个互不相等的特征值 x_1 和 x_2 分别是属于特征值 λ_1 和 λ_2 的特征向量，即 $Ax_1 = \lambda_1 x_1$，$\quad Ax_2 = \lambda_2 x_2$

$$x_2^T A x_1 = \lambda_1 x_2^T x_1$$

$$\left(x_2^T A x_1\right)^T = x_1^T A x_2 = \lambda_2 x_1^T x_2$$

$$\lambda_1 x_2^T x_1 = \lambda_2 x_1^T x_2 \Rightarrow x_1^T x_2 = 0.$$

定理6.1.2（实对称矩阵的谱分解）

对 n 阶实对称矩阵 A，存在 n 阶正交矩阵 Q 和实对角矩阵 Λ，使得 $A = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$.

证明：对 A的阶数用归纳法. 当 n=1 结论明显成立.

假定 n-1 命题成立，证 n的情形.

根据 A 实对称，设 （ λ_1 , q_1 ） 是 A 的一个实特征对，设 $\|\boldsymbol{q}_1\| = 1$.

把 $\boldsymbol{q}_1$ 扩充成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基 $\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_n$，令 $Q_1 = \begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1 & Q_{12}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 & \cdots & \boldsymbol{q}_n\end{bmatrix}$.
由于 $\boldsymbol{q}_1$ 与 Q_{12} 的列向量都正交，

$$Q_1^{\mathrm{T}} A Q_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}} A Q_{12} \\ Q_{12}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{q}_1 & Q_{12}^{\mathrm{T}} A Q_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q}_1 & \lambda_1 \boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}} Q_{12} \\ \lambda_1 Q_{12}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q}_1 & Q_{12}^{\mathrm{T}} A Q_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & Q_{12}^{\mathrm{T}} A Q_{12} \end{bmatrix}.$$

注意 $Q_{12}^{\mathrm{T}} A Q_{12}$ 是 $n-1$ 阶实对称矩阵，根据归纳假设，存在正交矩阵 Q_2 和实对角矩阵 Λ_2，使得 $Q_{12}^{\mathrm{T}} A Q_{12} = Q_2 \Lambda_2 Q_2^{\mathrm{T}}$. 因此

$$A = Q_1 \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & Q_2 \Lambda_2 Q_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} Q_1^{\mathrm{T}} = Q_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} Q_1^{\mathrm{T}}.$$

定义 6.1.5 (正交相似) 对实方阵 A, B，如果存在正交矩阵 Q 使得 $Q^{\mathrm{T}}AQ = B$，则称 A 和 B **正交相似**，或 A 正交相似于 B.

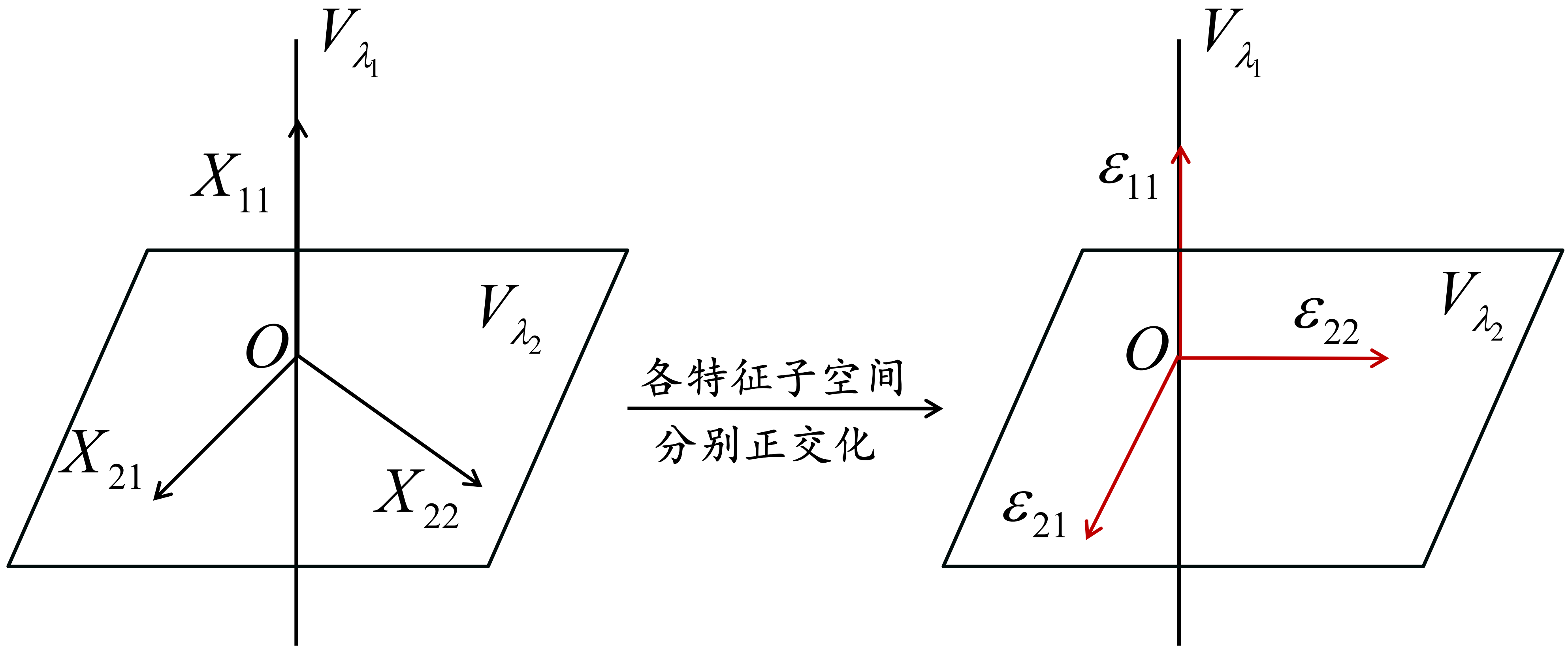
命题 6.1.6 实方阵的正交相似关系是等价关系.

- 这个定理的证明并没有使用矩阵可对角化的充分必要条件去证明.
- 定理说明实对称矩阵不仅特征值都是实数，而且每个特征值的几何重数一定等于代数重数.

问题：如何去求相应的正交矩阵Q?

- 我们需要A的n个彼此正交的特征向量，也就是有特征向量组成的 R^n 的标准正交基.

注记: 把 n 阶实对称阵 A 的每个特征子空间的标准正交基求出来,合在一起就构成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.以它们为列向量的矩阵 Q 为正交矩阵,通过它可将 A 正交相似对角化.



实对称阵对角化的方法

(1) 求A的特征值，得到 $f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$，其中$\lambda_i\neq\lambda_j, i\neq j.$

(2) 对每个λ_i，求方程组$(\lambda_i I-A)X=0$的基础解系，i=1, 2, …,s，得到

$$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{in_i}, i=1,2,\cdots,s.$$

(3) 对每组向量$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{in_i}$进行施密特正交化，得一个标准正交向量组：

$$\varepsilon_{i1},\varepsilon_{i2},\cdots,\varepsilon_{in_i}, i=1,2,\cdots,s.$$

(4) 令 $Q=(\varepsilon_{11},\cdots,\varepsilon_{1n_1},\varepsilon_{21},\cdots,\varepsilon_{2n_2},\cdots,\varepsilon_{s1},\cdots,\varepsilon_{sn_s})$，则 Q 是正交矩阵，而且

$$Q^{-1}AQ=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_2,\cdots,\lambda_s,\cdots,\lambda_s),\text{其中有}n_i\text{个}\lambda_i, i=1,2,\cdots,s.$$

例 题

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix},$$ 求正交阵Q，使得$Q^{-1}AQ$成对角阵.

解 (1) $$|\lambda I-A|=\begin{bmatrix}\lambda & -1 & -1 & 1\\ -1 & \lambda & 1 & -1\\ -1 & 1 & \lambda & -1\\ 1 & -1 & -1 & \lambda\end{bmatrix}=(\lambda-1)^3(\lambda+3).$$

得到 $\lambda_1=1, n_1=3; \lambda_2=-3, n_2=1.$

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{bmatrix},$$

(2) 将 $\lambda_1=1$, 代入$(\lambda I-A)X=0$, 得 $\begin{cases}x_1-x_2-x_3+x_4=0,\\-x_1+x_2+x_3-x_4=0,\\-x_1+x_2+x_3-x_4=0,\\x_1-x_2-x_3+x_4=0.\end{cases}$

求得基础解系： $\alpha_{11}=(1,0,0,-1)^T,\alpha_{12}=(0,1,-1,0)^T,\alpha_{13}=(1,1,0,0)^T.$

将 $\lambda_2=-3$ 代入$(\lambda I-A)X=0$，得 $\begin{cases}-3x_1-x_2-x_3+x_4=0,\\-x_1-3x_2+x_3-x_4=0,\\-x_1+x_2-3x_3-x_4=0,\\x_1-x_2-x_3-3x_4=0.\end{cases}$

解得基础解系 $\alpha_{21}=(1,-1,-1,1)^T.$

属于 $\lambda_1=1$ 的特征向量， $\alpha_{11}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}, \alpha_{12}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}, \alpha_{13}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}.$

(3) 施密特正交化

先正交化： $\beta_{11}=\alpha_{11}=(1,0,0,-1)^T,$

$$\beta_{12}=\alpha_{12}=(0,1,-1,0)^T,$$

$$\beta_{13}=\alpha_{13}-\frac{(\alpha_{13},\beta_{11})}{(\beta_{11},\beta_{11})}\beta_{11}-\frac{(\alpha_{13},\beta_{12})}{(\beta_{12},\beta_{12})}\beta_{12}=\frac{1}{2}(1,1,1,1)^T,$$

$$\beta_{21}=\alpha_{21}=(1,-1,-1,1)^T.$$

再单位化： $\varepsilon_{11}=\dfrac{\beta_{11}}{|\beta_{11}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,-1)^T, \varepsilon_{12}=\dfrac{\beta_{12}}{|\beta_{12}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0)^T,$

$$\varepsilon_{13}=\frac{\beta_{13}}{|\beta_{13}|}=\frac{1}{2}(1,1,1,1)^T, \varepsilon_{21}=\frac{\beta_{21}}{|\beta_{21}|}=\frac{1}{2}(1,-1,-1,1)^T.$$

(4) 令 $Q=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$,

则Q是正交阵，且 $Q^{-1}AQ=Q^{T}AQ=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix}$.

投票 最多可选1项

设置

设三阶实对称矩阵 A 的各行元素的和均为 3，且已知 $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\in N(A)$，则 A 可以唯一确定。

A 正确

B 不正确

提交

练习6.1.4 设三阶实对称矩阵 A 的各行元素的和均为 3, $a_1=\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}, a_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\in N(A)$, 则 A 的谱分解为

$a_1=\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}, a_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\in N(A)$, 所以 a_1,a_2 为矩阵 A 从属于特征值 0 的特征向量，

将 a_1,a_2 正交化， $a_2^T(a_2+ca_1)=0\Rightarrow c=\dfrac{2}{3}, a_2+ca_1=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$, 单位化得到 $a_1'=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$, $a_2'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$

A 的各行元素的和均为 3, 所以 $A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=3\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, A 的另一个特征值为3，对应的单位特征向量为 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

三阶实对称矩阵 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}^T$

瑞雷（Rayleigh）商

定义 6.1.7 (Rayleigh 商) 给定实矩阵 A 和非零向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，实数 $\dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}$ 称为 $\boldsymbol{x}$ 关于 A 的 **Rayleigh 商**.

若 A 和 B 正交相似，即存在正交矩阵 Q 使得 $Q^{\mathrm{T}} A Q = B$，则

$$\frac{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} B \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}} = \frac{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} A Q \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}} = \frac{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} A Q \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} Q^{\mathrm{T}} Q \boldsymbol{y}} = \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}},$$

即 $\boldsymbol{x} = Q\boldsymbol{y}$ 关于 A 的 Rayleigh 商等于 $\boldsymbol{y}$ 关于 B 的 Rayleigh 商.

命题 6.1.8 设实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$，相应的特征向量为 $\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_n$，则

$$\lambda_1 = \max_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}, \qquad \lambda_i = \max_{\substack{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \perp \mathrm{span}(\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_{i-1})}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}, i = 2, \cdots, n.$$

类似地，

$$\lambda_n = \min_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}, \qquad \lambda_i = \min_{\substack{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \perp \mathrm{span}(\boldsymbol{q}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{q}_n)}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}, i = 1, \cdots, n-1.$$

命题 6.1.8 设实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$，相应的特征向量为 $\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_n$，则

$$\lambda_1 = \max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}, \qquad \lambda_i = \max_{\substack{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x}\perp\mathrm{span}(\boldsymbol{q}_1,\cdots,\boldsymbol{q}_{i-1})}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}, i = 2, \cdots, n.$$

类似地，

$$\lambda_n = \min_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}, \qquad \lambda_i = \min_{\substack{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x}\perp\mathrm{span}(\boldsymbol{q}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{q}_{n})}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}, i = 1, \cdots, n-1.$$

证. 先说明后者能由前者简单得到. 考察 $-A$，注意 $-A$ 的特征值是 $-\lambda_n \geqslant \cdots \geqslant -\lambda_1$，由前者就得到 $-\lambda_n = \max\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(-A)\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$，于是 $\lambda_n = \min\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$. 另一等式类似.

下证 $\lambda_1 = \max\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$. 记 $A = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$ 为 A 的谱分解. 则

$$\max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}} = \max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}QQ^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}} = \max_{\boldsymbol{y}=Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\Lambda\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}} = \max_{\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2}{y_1^2 + \cdots + y_n^2} = \lambda_1,$$

最后一个等式成立，是因为 $\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \leqslant \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_1 y_n^2 = \lambda_1(y_1^2 + \cdots + y_n^2)$，而令 $y_1 = 1, y_2 = \cdots = y_n = 0$，等式成立.

命题 6.1.8 设实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$，相应的特征向量为 $\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_n$，则

$$\lambda_1 = \max_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}, \qquad \lambda_i = \max_{\substack{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \perp \operatorname{span}(\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_{i-1})}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}, i = 2, \cdots, n.$$

类似地，

$$\lambda_n = \min_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}, \qquad \lambda_i = \min_{\substack{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \perp \operatorname{span}(\boldsymbol{q}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{q}_n)}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}, i = 1, \cdots, n-1.$$

再证 $\lambda_i = \max\limits_{\substack{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \perp \operatorname{span}(\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_{i-1})}} \dfrac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}$. 注意 $\boldsymbol{x} \perp \operatorname{span}(\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_{i-1}) \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \operatorname{span}(\boldsymbol{q}_i, \cdots, \boldsymbol{q}_n)$.

$$\boldsymbol{x} = c_i \boldsymbol{q}_i + c_{i+1} \boldsymbol{q}_{i+1} + \cdots + c_n \boldsymbol{q}_n$$

$$Q^T \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_i^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_n^T \end{bmatrix} \cdot \left(c_i \boldsymbol{q}_i + c_{i+1} \boldsymbol{q}_{i+1} + \cdots + c_n \boldsymbol{q}_n \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = c_i \boldsymbol{e}_i + c_{i+1} \boldsymbol{e}_{i+1} + \cdots + c_n \boldsymbol{e}_n$$

$$\begin{aligned}
\max_{\substack{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \in \operatorname{span}(\boldsymbol{q}_i, \cdots, \boldsymbol{q}_n)}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}} &= \max_{\substack{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \in \operatorname{span}(\boldsymbol{q}_i, \cdots, \boldsymbol{q}_n)}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} Q \Lambda Q^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} Q Q^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}} \\
&= \max_{\substack{\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{y} \in \operatorname{span}(\boldsymbol{e}_i, \cdots, \boldsymbol{e}_n)}} \frac{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \Lambda \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}} \qquad (\text{变量替换} \boldsymbol{y} = Q^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}) \\
&= \max_{\substack{\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{y} \in \operatorname{span}(\boldsymbol{e}_i, \cdots, \boldsymbol{e}_n)}} \frac{\lambda_i y_i^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2}{y_i^2 + \cdots + y_n^2} = \lambda_i. \qquad \square
\end{aligned}$$

例题选讲

1. $A\in M_3$且是实对称矩阵，已知A的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$，又对应于$\lambda=1$的特征向量为 $\xi_1=(2,1,2)^T$，$\xi_2=(1,2,-2)^T$，则对应于$\lambda=-1$的特征向量为.

2. 已知矩阵A是三阶实对称阵，它的特征值分别是 1，1，2，且属于2 的特征向量是$(1,0,1)^T$，求A=?

3. 若A可逆且可对角化，则A^*是否可对角化？理由是?

例题选讲

1. $A \in M_3$ 且是实对称矩阵,已知 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1,$

又对应于 $\lambda = 1$ 的特征向量为 $x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, 则对应于 $\lambda = -1$ 的特征向量为

对应于 $\lambda = -1$ 的特征向量满足

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} x = 0 \Rightarrow x = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} A \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{对应于 } \lambda = -1 \text{ 的特征向量为} \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

例题选讲

2.已知矩阵 A 是三阶实对称阵,它的特征值分别是 1, 1, 2,且属于 2的特征向量是 $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, 求 $A=?$

属于1的特征向量满足 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=0$, 解得 $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}^T=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

例题选讲

3. 若A可逆且可对角化，则A*是否可对角化？ 理由是？

设 $A=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^{-1}$， $\lambda_1\cdots\lambda_n\neq 0$

$$A^*Ax_k=A^*\lambda_k x_k=|A|x_k\Rightarrow A^*x_k=\frac{|A|}{\lambda_k}x_k,\ k=1,\cdots,n$$

$$A^*=C^T=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix},\quad rank(A^*)=\begin{cases} n, & rank(A)=n \\ 1, & rank(A)=n-1 \\ 0, & rank(A)<n-1 \end{cases}$$

设 A、B 均为 n 阶矩阵，若 $AB=0$, 则 A、B 有公共的特征向量？

若 $rank(A)+rank(B)=n$, 则 A、B 不一定有公共的特征向量

若 $rank(A)+rank(B)<n$, 则 A、B 一定有公共的特征向量

$rank\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} < n \Rightarrow \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} x = 0$ 有非零解，

则非零解即为 A、B 公共的特征向量。

$rank\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ \mu I - B \end{bmatrix} < n \Leftrightarrow A$、$B$ 有公共的特征向量

设 $A \in R^{n\times n}$，若 $(\lambda_1 I - A)(\lambda_2 I - A) = 0$, 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

证明：A 相似于对角矩阵 $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_2 \end{bmatrix}$.

若 $rank(\lambda_1 I - A) = 0$, 或 $rank(\lambda_2 I - A) = 0$, 结论成立。

考虑 $rank(\lambda_1 I - A) = r_1 > 0, rank(\lambda_2 I - A) = r_2 > 0$ 的情况，

λ_1 的几何重数为 $N(\lambda_1 I - A) = n - r_1$, λ_2 的几何重数为 $N(\lambda_2 I - A) = n - r_2$

$n - r_1 + n - r_2 \leq n$

$(\lambda_1 I - A)(\lambda_2 I - A) = 0 \Rightarrow r_1 + r_2 \leq n$

$2n - n \leq n - r_1 + n - r_2 \leq n \Rightarrow n - r_1 + n - r_2 = n$

证法2：对任意 $a \in R^n$, $[(\lambda_1 I - A) - (\lambda_2 I - A)]a = (\lambda_1 - \lambda_2)a$

$$a = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 I - A)a - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_2 I - A)a$$

$(\lambda_2 I - A)(\lambda_1 I - A)a = 0 \Rightarrow (\lambda_1 I - A)a \in \lambda_2$的特征子空间

$(\lambda_1 I - A)(\lambda_2 I - A)a = 0 \Rightarrow (\lambda_2 I - A)a \in \lambda_1$的特征子空间

作 业（11月29日）

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

练习6.1

1(1,2,3)，2，3，5，6，9，10，14

12月6日提交

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~