第七周作业参考解答

邓一理

练习 3.1.2

1. $\frac{\pi}{2}$

2. $\frac{\pi}{4}$

3. $\arccos\frac{3}{\sqrt{77}}$

练习 3.1.6

$$\text{设}a=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\text{，则三个余弦为}\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.\text{ 平方和为}1.$$

练习 3.1.7 $[1,7]$

练习 3.1.8

$$a,b\text{ 夹角的余弦值为}\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\frac{\frac{1}{2}\left((x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right)}{x^2+y^2+z^2}=-\frac{1}{2}.\text{ 故夹角为}\frac{2}{3}\pi.$$

练习 3.1.11

这道题算错的同学较多，请细心计算。

$$\text{解线性方程组}x^T\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{bmatrix}=0\text{ 再将}x\text{ 单位化. 最后得到单位向量}x=\pm\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{bmatrix}4\\0\\1\\-3\end{bmatrix}$$

练习 3.1.15

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}-2\\1\\-1\\2\\0\end{bmatrix},\frac{1}{3\sqrt{35}}\begin{bmatrix}7\\-6\\6\\13\\5\end{bmatrix}$$

练习 3.1.16

这道题算错的同学较多，请细心计算。详细计算过程参考例 3.1.14。

1. $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

2. $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{70}}\begin{bmatrix} -12 \\ 13 \\ 14 \\ 11 \end{bmatrix}.$

练习 3.1.19

1. 线性由投影的线性得到. 将 a 扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组正交基, 易见这个线性变换在这组基上的作用与 A 确定的线性变换在这组基上的作用相同, 从而 A 是这个线性变换的表示矩阵.

2. 直接对 $A = \frac{aa^T}{a^T a}$ 验证.

练习 3.2.1

$$\text{列向量为}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{14}}\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

练习 3.2.5

这是由于其列向量构成单位正交基. (推论: 若 A, B 为满足 $A^T A = B^T B$ 的上三角阵, 则 $(AB^{-1})^T (AB^{-1}) = I$, 这说明 $A = \operatorname{diag}(\pm 1, \cdots, \pm 1)B$. 若进一步有 A, B 对角元非负, 则 $A = B$.

练习 3.2.8

$Qa_i = b_i, 1 \le i \le n$ 等价于$Q\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}.Q = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^{-1}$

为两个正交矩阵之积故正交.

练习 3.2.10

$Q^{-1}H_v Q = H_{Q^{-1}v}$. 将 v 扩充成一组标准正交基 $v_1 = v, v_2, \cdots, v_n$, 考察其在 $Q^{-1}v_1, \cdots, Q^{-1}v_n$ 上的作用.

练习 3.2.12

这道题算错的同学较多，请细心计算。详细计算过程参考 3.2.2。

1. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{bmatrix}.$

2. $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ & & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

练习 3.2.18

很多同学不会做，参考下述解答。

1. 对 A 进行 QR 分解, 证明 R 也保持向量之间的角度不变.

◀ 这是因为 Q 保持向量之间的角度不变以及 $R = Q^{-1}A$ 为两个保角变换的复合. ▶

2. 证明 R 为对角矩阵.

◀ R 保持向量之间的角度不变说明两两正交的向量 $e_1, \cdots, e_n$ 在 R 作用下的像 $Re_1, \cdots, Re_n$ 仍然两两正交. 由于上三角阵 $R = \begin{bmatrix} r_{11} & * & \cdots & * \\ & r_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix}$ 的第 1 列 Re_1 与其余列正交, 我们得到 $R = \begin{bmatrix} r_{11} & & & & \\ & r_{22} & * & \cdots & * \\ & & r_{33} & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & * \\ & & & & r_{nn} \end{bmatrix}$. 由 R 的第 2 列与其余列正交, 我们得到 $R = \begin{bmatrix} r_{11} & & & & & \\ & r_{22} & & & & \\ & & r_{33} & * & \cdots & * \\ & & & r_{44} & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & * \\ & & & & & r_{nn} \end{bmatrix}$. 对第 $3, \cdots, n-1$ 列做同样论证, 我们得到 R 为对角矩阵. ▶

3. 证明 $R = kI_n$, 这里 k 为常数. 由此得到, A 必是某个正交矩阵的倍数.

◀ R 不改变 e_i 与 $e_1 + \cdots + e_n$ 间的夹角, 即 $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{e_i^T(e_1+\cdots+e_n)}{\|e_i\|\|e_1+\cdots+e_n\|} = \frac{e_i^T R^T R(e_1+\cdots+e_n)}{\|Re_i\|\|R(e_1+\cdots+e_n)\|} =$(由 Re_i 垂直于 Re_j)$\frac{e_i^T R^T Re_i}{\|Re_i\|\|R(e_1+\cdots+e_n)\|} = \frac{\|Re_i\|}{\|R(e_1+\cdots+e_n)\|}$, 故 R 的所有对角元相等. ▶

图 1: 3.2.18