4.5.3

证明：由于多项式过原点，我们可设

$$f(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6.$$

由题意，我们有：

$$f(-1)=1,\ f(1)=1,\ f'(-1)=0,\ f'(1)=0,$$

$$f''(-1)=0,\quad f''(1)=0,$$

由此可解得：
$$\begin{cases} a_1=a_3=a_5=0 \\ a_2=3,\ a_4=-3 \\ a_6=1. \end{cases}$$

所以 $f(x)=3x^2-3x^4+x^6$.

经验证知 $f(x)$ 满足题设。 $\square$.

备注：$f'(x_0)=0$ 是 x_0 是 $f(x)$ 拐点的必要条件，所以为单调性，最后还需验证 $f(x)$ 是否满足题设。

4.5.4. 当 $t \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{9\sin^2 t\cos t}{9\cos^2 t(-\sin t)}$$

$$= -\tan t.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\frac{1}{\cos^2 t}}{9\cos^2 t(-\sin t)} = \frac{1}{9\sin t\cos^4 t}.$$

所以 $t \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时.

$y''(x) > 0$,

所以 $y(x)$ 分别在 $[-3, 0]$ $[0, 3]$ 上

下凸。 $\square$.

备注: $y(x)$ 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 时, 没有一阶导数.

在 $t = 0$ 或 π 时没有二阶夯数。

证明如下：

$t = \frac{\pi}{2}$ 时，$x = 0$，

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{9\sin^3 t - 9}{9\cos^3 t}$$

$$= \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin^2 t \cos t}{\cos^2 t (-\sin t)}$$

$$= \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin t}{-\cos t}$$

$$= -\infty.$$

同样 $\lim_{x \to 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x} = +\infty$.

所以 $y(x)$ 在 $x = 0$ 处没有导数.

同理，在 $t = 0$ 或 $t = \frac{\pi}{2}$ 时没有二阶导数。

备注2：函数 $y(x)$ 在 $[-3,3]$ 上不是下凸函数. 理由如下:

取 $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{3}$, $x_3=\frac{1}{2}$.

则 $$\frac{y(\frac{1}{3})-y(-\frac{1}{2})}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}>0.$$

而 $$\frac{y(\frac{1}{2})-y(\frac{1}{3})}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}<0.$$

所以在 $[-1,1]$ 上不是下凸函数。

4.5.4 (1).

证明: $\forall a>0$, 令 $f(x)=a^x$.

则 $f'(x) = \ln a \, a^x$

$f''(x) = (\ln a)^2 a^x$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 是下凸函数.

所以 $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right)$$

即为所证。 $\square$

4.5.8.

证明：因为 f 在 $[a,b]$ 是可微的下凸函数.

所以 $f'(x)$ 单调递增.

所以 $x > x_0$ 时, $f'(x) \geq f'(x_0) = 0$.

$x < x_0$ 时, $f'(x) \leq f'(x_0) = 0$.

用拉格朗日中值定理

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0).$$

当 $x > x_0$ 时, $\xi \in (x, x_0)$, $f'(\xi) \geq 0$.

所以 $f(x) \geq f(x_0)$.

同理, $x < x_0$ 时, $f(x) \geq f(x_0)$

所以 x_0 是 f 的最小值点。$\square$

备注，本题并没有说 $f(x)$ 二阶可导，所以证明若出现 $f''(x)$ 都是不对的。

4.6.1 (3).

因为 $x = \dfrac{3t}{1+t^3}$，$y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$，

所以 $x \to \infty$ 时，$t \to -1$.

$$\lim_{t\to -1} \frac{y}{x} = \lim_{t\to -1} t = -1.$$

$$\lim_{t\to -1} y + x = \lim_{t\to -1} \frac{3t+3t^2}{1+t^3}$$

$$= \lim_{t\to -1} \frac{3+6t}{3t^2}$$

$$= -1$$

所以有斜渐近线 $y=-x-1$.

$\lim\limits_{t\to 1} y=\infty$, 所以没有水平渐近线.

当 $y\to+\infty$ 时, $t\to -1^{+}$.

此时 $\lim\limits_{t\to -1^{+}} x=-\infty$

当 $y\to-\infty$ 时, $t\to -1^{-}$

此时 $\lim\limits_{t\to -1^{-}} x=+\infty$,

所以没有竖直渐近线. $\square$

4.6.2.(3).

首先, x 的定义域是 $(-1,1)$.

$\lim\limits_{x\to -1} \ln\frac{1+x}{1-x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1} \ln\frac{1+x}{1-x}=+\infty$.

所以原函数有两条竖直渐近线

$x=-1$ 和 $x=1$,

$y'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{2}{1-x^2} > 0$

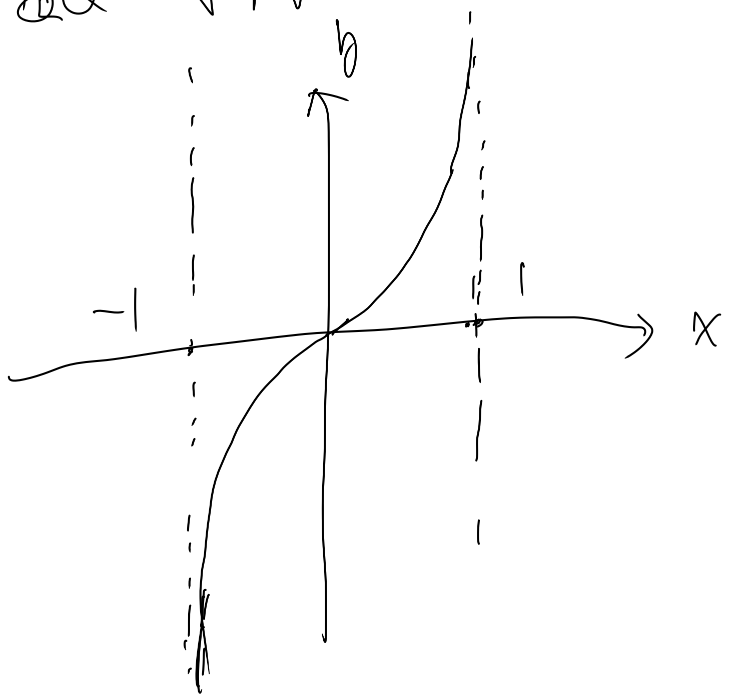
所以 $y(x)$ 严格单调递增.

$y''(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$,

所以 $y(x)$ 有拐点 $x=0$, $x>0$ 时, $y(x)$ 为下凸函数, $x<0$ 时, $y(x)$ 为上凸函数.

又 $y(x) = -y(-x)$, 所以 $y(x)$ 为奇函数.

函数图像如下:



$\square$