线性代数 第4讲

9月22日

第一章第3讲 线性方程组

上一讲要点回顾

增广矩阵的形式求解线性方程组，通解，主变量，自由变量

阶梯形矩阵

例题选讲

线性组合与线性表示

定义 1.2.1 (线性组合与线性表示) 给定 $\mathbb{R}^m$ 中向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 和一组数 $k_1, \cdots, k_n \in \mathbb{R}$，称向量 $k_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{a}_n$ 是向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 的一个**线性组合**.

设 $\boldsymbol{b}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的向量，如果存在一组数 $k_1, \cdots, k_n \in \mathbb{R}$，使得 $\boldsymbol{b} = k_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{a}_n$，则称 $\boldsymbol{b}$ 可以被向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ **线性表示**.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

$$x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{x_1 a_1} + \cdots + \boldsymbol{x_n a_n} = \boldsymbol{b},$

求解线性方程组本质上就是：$\boldsymbol{b}$ 是否可以用向量组 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性表示？如何表示？

矩阵乘向量的运算

$$x_1\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix}+\cdots+x_n\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{pmatrix},$$

( )、[ ]表示矩阵均可，不做区分

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \qquad (1.1.1)$$

线性映射是不是一定为1.1.1这样的形式呢?

命题1.2.2 设 $f,g:R^n \to R^m$ 是两个线性映射，如果 $f(e_i)=g(e_i), i=1,2,\cdots,n$ 则 $f=g$.

一个线性映射 $f:R^n \to R^m$ 完全由 $f(e_1),\cdots,f(e_n)$ 决定。

那么 $f(e_1),\cdots,f(e_n)$ 是否能够取到 R^m 中的任意向量呢？

也就是说，对 R^m 中的任意向量组 $a_1,\cdots,a_n$,
是否存在线性映射 $f:R^n \to R^m$，满足 $f(e_1)=a_1,\cdots,f(e_n)=a_n$.

命题1.2.3，任取 R^m 中的 n 个向量 $a_1,\cdots,a_n$,都存在唯一的线性映射 $f:R^n \to R^m$，满足 $f(e_1)=a_1,\cdots,f(e_n)=a_n$.

命题1.2.2 设 $f,g:R^n\to R^m$ 是两个线性映射，如果 $f(e_i)=g(e_i),i=1,2,\cdots,n$ 则 $f=g$.

一个线性映射 $f:R^n\to R^m$ 完全由 $f(e_1),\cdots,f(e_n)$决定。

定义 1.2.4 (线性映射的表示矩阵) 设线性映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{e}_i$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的标准坐标向量，若 $\boldsymbol{a}_i=f(\boldsymbol{e}_i)$，则称矩阵 $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}$ 为线性映射 f 在标准坐标向量下的**表示矩阵**.

$$a_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix},a_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix},\cdots,a_n=\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

$$f(x)=x_1a_1+x_2a_2+x_na_n=\begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=Ax$$

以后我们用 A 表示这个线性映射，$A(x)=x_1a_1+x_2a_2+x_na_n$

$A(x)=Ax$

线性方程组的表达形式

(1) 普通形式：$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

(2) 矩阵形式：$Ax = b$, 其中 $A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

(3) 向量形式：$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = b$, $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = A$

单位矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n} = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_n, \cdots, \boldsymbol{e}_n] = \boldsymbol{I}_n$$

标准坐标向量 $\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$

对角矩阵

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

上三角矩阵

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

下三角矩阵

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1n}x_n \\ u_{22}x_2 + \cdots + u_{2n}x_n \\ \vdots \\ u_{nn}x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}x_1 \\ l_{21}x_1 + l_{22}x_2 \\ \vdots \\ l_{n1}x_1 + l_{n2}x_2 + \cdots + l_{nn}x_n \end{bmatrix}$$

增广矩阵的形式求解线性方程组

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A}$ 称为系数矩阵，$\boldsymbol{b}$ 称为右端项

$$\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \equiv \left[A \,\middle|\, \boldsymbol{b} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

其中矩阵 $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ 称为方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的**增广矩阵**.

用增广矩阵的形式求解方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 = 22. \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 22 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{加到第 2 行}]{\text{第 1 行的 } -2 \text{ 倍}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{乘以 } \frac{1}{2}]{\text{第 2 行}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{加到第 1 行}]{\text{第 2 行的 } -1 \text{ 倍}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

例 1.3.2 求解

$$\begin{cases} \qquad\quad 2x_2 - \ x_3 = 1, \\ x_1 - \ x_2 + \ x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

在增广矩阵上计算:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{对换第 } 1,2 \text{ 行}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{加到第 } 3 \text{ 行}]{\text{第 } 1 \text{ 行的 } -2 \text{ 倍}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

注意到，第三个方程 $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$ 无解. 因此，原方程组无解.

定义 1.3.3 (初等变换) 对方程组施加的如下三类变换的每一类都称为方程组的**初等变换**:

1. **对换变换**: 互换两个方程的位置;
2. **倍乘变换**: 把某个方程两边同乘一个非零常数 k;
3. **倍加变换**: 把某个方程的 k 倍加到另一个方程上.

容易看到, 初等变换可逆:

1. 对换变换的逆变换是它本身;
2. 参数为 k 的倍乘变换的逆变换也是倍乘变换, 参数为 $\frac{1}{k}$;
3. 参数为 k 的倍加变换的逆变换也是倍加变换, 参数为 $-k$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{对换第 } 1,2 \text{ 行}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{加到第 } 3 \text{ 行}]{\text{第 } 1 \text{ 行的 } -2 \text{ 倍}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

定理 1.3.4 线性方程组经某个初等变换后得到的新方程组与原方程组同解.

例 1.3.6 求解

$$\begin{cases} \qquad\qquad 2x_3+x_4=1, \\ x_1-x_2+4x_3 \qquad =0. \end{cases}$$

在增广矩阵上计算:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{第 }1,2\text{ 行}]{\text{对换变换}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{第 }2\text{ 行}]{\text{倍乘变换}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{第 }1,2\text{ 行}]{\text{倍加变换}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

x_1, x_3： 主变量

x_2, x_4： 自由变量

原方程组变换为 $$\begin{cases} x_1-x_2 \qquad -2x_4=-2, \\ \qquad\qquad x_3+\frac{1}{2}x_4=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

通解（一般解）：

$$x_1 = x_2 + 2x_4 - 2$$
$$x_3 = -\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}$$

例 1.3.6 求解

$$\begin{cases} \qquad\qquad 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 \qquad = 0. \end{cases}$$

在增广矩阵上计算：

也可以选择 x_2, x_4 作为主变量进行消元

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{第 } 1,2 \text{ 行}]{\text{对换变换}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{第 } 1 \text{ 行}]{\text{倍乘变换}} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

通解为 $x_2 = x_1 + 4x_3, \quad x_4 = 1 - 2x_3.$

阶梯形矩阵

$$
\begin{bmatrix}
\bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & \cdots\cdots\cdots & * & * & \cdots & * \\
 & & & & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & \cdots\cdots\cdots & * & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & \bullet & * & \cdots & * & \cdots\cdots\cdots & * & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & & * & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & \bullet & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & & & &
\end{bmatrix},
$$

其中 “$*$” 表示可能不为 0 的数，“$\bullet$” 表示一定不为 0 的数，即 “$\bullet$” 处元素是主元.

一个阶梯形矩阵的非零行数称为它的 阶梯数

在线性方程组的系数矩阵中，化成阶梯形后 主元所在的列，对应主变量的系数 ，称为主列，其他列，对应自由变量 的系数，称为自由列。

1. 元素全为 0 的行（称为**零行**），只可能存在在下方；

2. 元素不全为 0 的行（称为**非零行**），从左数第一个不为 0 的元素（称为**主元**）的列指标随着行指标的增加而严格增加.

$$
\begin{bmatrix}
\bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & \cdots\cdots & * & * & \cdots & * \\
 & & & & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & \cdots\cdots & * & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & \bullet & * & \cdots & * & \cdots\cdots & * & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & & * & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & \bullet & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & & & &
\end{bmatrix},
$$

高斯消去法

其中 “$*$” 表示可能不为 0 的数，“$\bullet$” 表示一定不为 0 的数，即 “$\bullet$” 处元素是主元.

行简化阶梯形矩阵

1. 每个非零行的主元都是 1；
2. 每个主列除主元外的其他元素都是 0.

$$
\begin{bmatrix}
1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \cdots\cdots & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & \cdots\cdots & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * & \cdots\cdots & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * \\
 & & & & & & & & & & & & & & & &
\end{bmatrix}.
$$

高斯-若当消去法(Gauss-Jordan)

例 **求解线性方程组:** $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

阶梯形矩阵 $\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$

行简化阶梯形矩阵 $\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_4 = -5 \\ x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

通解为 $\begin{cases} x_1 = -x_2 + 5x_4 - 5 \\ x_3 = -x_4 + 2 \end{cases}$

例　**求下列方程组的通解:**
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$$

解 **用初等行变换化增广矩阵为阶梯形:**
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -2 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & -8 & -8 & -6 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

方程组的通解为:
$$x_1 = x_3 + x_4 + 5x_5 - 2$$
$$x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 + 3$$

例　设方程组AX=b的增广矩阵为: $(A,b)=\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & a & t & t-3 \\ 1 & 1 & 2 & t-2 & t+3 \end{array}\right]$

问: a, t取何值时, 方程组无解,有唯一解, 无穷多解? 有无穷多解时，求通解.

解　用初等行变换化增广矩阵为阶梯形:

$$(A,b)\to\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & a & t & t-3 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 & t+2 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 & t-3 & t-2 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 & t+2 \end{array}\right]$$

（1） 当a≠2， t≠1时， 解唯一

（2） 当t=1时， 无解;

(3) 当a=2, 而 $\dfrac{t-3}{t-1}=\dfrac{t-2}{t+2}$,　即**t=4**时,有无穷多解. 此时,

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases} x_1=10 \\ x_2=-7-2x_3, \\ x_4=2 \end{cases}$$

(4) a=2, t≠ 4时无解.

定理 1.3.7 任意矩阵都可以用对换行变换和倍加行变换化为阶梯形；任意矩阵都可以用初等行变换化为行简化阶梯形.

证. 先证明第一部分. 对 $m \times n$ 矩阵，对 m 用数学归纳法. $m = 1$ 时，矩阵只有一行，自然是阶梯形. 注意保持不变也是一种倍加变换，故 $m = 1$ 时，方程组可以通过倍加变换化为阶梯形. 现假设对任意 n，$(m-1) \times n$ 矩阵都可以通过对换变换和倍加变换化为阶梯形，考察 $m \times n$ 矩阵，分如下情形讨论.

1. 如果 $a_{11} \neq 0$，那么把第 1 行的 $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ 倍加到第 i 个方程上（倍加变换），就可以把其他行中的第一个元素化成 0. 那么第 2 到 m 行和第 2 到 n 列交叉点上的元素组成的矩阵，根据归纳假设，可以化为阶梯形. 从而原矩阵也可以化为阶梯形.

2. 否则 $a_{11} = 0$. 如果 $a_{21}, \cdots, a_{m1}$ 中有某个不为 0，记为 a_{i1}. 则把第 $1, i$ 两方程互换位置（对换变换），问题归于第一种情形.

3. 否则 $a_{11}, \cdots, a_{m1}$ 全为 0，即矩阵第一列元素全为 0. 类似前面情形考察矩阵的其他列. 如果存在 $j \leqslant n$ 使得矩阵的第 $2, \cdots, j-1$ 列全为 0 而第 j 列的元素不全为 0，类似第一二种情形，可以将原方程组化为阶梯形.

4. 否则矩阵的所有元素全为 0，自然是阶梯形.

定理 1.3.8 (判定定理) 1. 如果 $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ 对应的阶梯数比 A 对应的阶梯数多 1 (此时方程出现了矛盾)，则方程组无解；

2. 如果 $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ 和 A 对应的阶梯数相等，则方程组有解. 其中，

   (a) 如果阶梯形的阶梯数和未知数个数相等，则方程组有唯一解；

   (b) 如果阶梯形的阶梯数小于未知数个数，则方程组有无穷多组解.

线性方程组的四个基本问题：

- 存在问题 **何时方程组有解?**
- 个数问题 **无解、唯一解、无穷多解**
- 解法问题 **高斯消元法求出通解**
- 结构问题 **解集合结构如何?**

例 1.3.10 求解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0, \end{cases}$$

这个方程组的常数项全是 0，因此不论何种初等行变换，对应的计算结果全为 0．所以我们可以只对系数矩阵 A 做初等行变换：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

化为阶梯形后，我们知道方程组有无穷多解．继续化为行简化阶梯形：

$$\cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{6} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

于是通解为

$$x_1 = -x_3 + \frac{7}{6}x_5, \quad x_2 = x_3 + \frac{5}{6}x_5, \quad x_4 = \frac{1}{3}x_5,$$

其中 x_1, x_2, x_4 是主变量，x_3, x_5 是自由变量． ☺

一般线性方程组

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$

齐次线性方程组

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$

定理 1.3.8 (判定定理) 1. 如果 $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ 对应的阶梯数比 A 对应的阶梯数多 1 (此时方程出现了矛盾)，则方程组无解；

2. 如果 $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ 和 A 对应的阶梯数相等，则方程组有解. 其中，
   (a) 如果阶梯形的阶梯数和未知数个数相等，则方程组有唯一解；
   (b) 如果阶梯形的阶梯数小于未知数个数，则方程组有无穷多组解.

命题 1.3.11 一个齐次线性方程组只有零解当且仅当其系数矩阵的（行简化）阶梯形的阶梯数等于未知数个数. 等价地，一个齐次线性方程组有无穷多组解当且仅当它的（行简化）阶梯形的阶梯数小于未知数个数.

证. 由于常数项全为零，只需化简系数矩阵. 由定理 1.3.8 立得结论. □

由此容易得到如下推论.

命题 1.3.12 一个齐次线性方程组中的方程个数小于未知数个数，则一定存在非零解.

证. 齐次方程组对应的阶梯形矩阵的阶梯数小于等于方程的个数，因此小于未知数的个数，所以一定存在非零解. □

例. 设$X_1,X_2,\ldots,X_t$是非齐次线性方程组$AX=b\neq0$的解向量, 证明:

$$X_0=u_1X_1+u_2X_2+\ldots+u_tX_t \text{ 是} AX=b \text{的解当且仅当} u_1+u_2+\ldots+u_t=1.$$

证 如果X_0的是$AX=b$的解, 则有

$$b = AX_0 = A(u_1X_1+u_2X_2+\ldots+u_tX_t) = Au_1X_1+Au_2X_2+\ldots+Au_tX_t$$
$$= u_1AX_1+u_2AX_2+\ldots+u_tAX_t = u_1b+u_2b+\ldots+u_tb$$
$$= (u_1+u_2+\ldots+u_t)b$$

因为$b\neq0$, 所以 $u_1+u_2+\ldots+u_t=1$.

反过来, 如果$u_1+u_2+\ldots+u_t=1$, 同上,把 $X_0=u_1X_1+u_2X_2+\ldots+u_tX_t$

代入方程组$AX=b$即可证明X_0是解. ■

由此可见, 非齐次方程组解对于线性组合并不一定封闭,只有组合系数和等于1时,解向量组的组合才是解!

练习 1.3.4 求证：齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0, \end{cases}$$

有非零解当且仅当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$.

练习1.3.5 7. 方程组 $\begin{bmatrix} b & 2 & 3 \\ b & b & 4 \\ b & b & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 有非零解（求三个不同的 b）.

练习 1.3.14 ☕ 证明用倍加变换与倍乘变换可以实现对换变换.

定义 1.3.3 (初等变换) 对方程组施加的如下三类变换的每一类都称为方程组的**初等变换**：

1. **对换变换**：互换两个方程的位置；
2. **倍乘变换**：把某个方程两边同乘一个非零常数 k；
3. **倍加变换**：把某个方程的 k 倍加到另一个方程上.

定义 1.3.5 (初等行（列）变换) 对矩阵施加的如下三类变换的每一类都称为矩阵的**初等行（列）变换**:

1. **对换变换**: 互换两行（列）的位置;
2. **倍乘变换**: 某一行（列）乘以非零常数 k;
3. **倍加变换**: 把某个行（列）的 k 倍加到另一个行（列）上.

练习 1.3.17 (初等列变换在方程组上的含义) 考虑方程组 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$. 进行下列换元，写出 x', y' 满足的方程组. 对比原方程组，其系数矩阵做了哪种初等变换?

1. $x' = y, y' = x$.
2. $x' = 2x, y' = y$.
3. $x' = x, y' = x + y$.
4. $x' = x + 1, y' = y$.

作 业（9月22日）

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

练习1.3

2.（8，9），5（2,4,6），6，7，

13，18，19(5,6,7)

9月27日提交

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~