线性代数 第13讲

10月25日

第三章第1讲　　内积与标准正交基

上一讲要点回顾

内积与正交

标准正交基

Gram-Schmidt 正交化方法

线性方程组解的结构

一般地，设 $\mathbf{A}$ 是 $\mathbf{m}\times\mathbf{n}$ 矩阵，$\mathbf{rank}(\mathbf{A})=\mathbf{r}$，它的行简化阶梯形包括 $\mathbf{r}$ 个主变量，$\mathbf{n}-\mathbf{r}$ 个自由变量。对齐次方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$，设 $\mathbf{k}_i$ 是第 $\mathbf{i}$ 个自由变量取 $\mathbf{1}$，其余自由变量都取 $\mathbf{0}$ 时得到的解，由此得到 $\mathbf{n}-\mathbf{r}$ 个解 $\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\cdots,\mathbf{k}_{n-r}$。

定理2.4.1　对 $\mathbf{m}\times\mathbf{n}$ 矩阵 $\mathbf{A}$，上述 $\mathbf{n}-\mathbf{r}$ 个解 $\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\cdots,\mathbf{k}_{n-r}$ 是零空间 $\mathbf{N}(\mathbf{A})$ 的一组基，其中 $\mathbf{r}=\mathbf{rank}(\mathbf{A})$. 进一步地，$\dim \mathbf{N}(\mathbf{A})=\mathbf{n}-\mathbf{rank}(\mathbf{A})$.

通常，将 $\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2,\cdots,\boldsymbol{k}_{n-r}$ 称为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系。

定理 2.4.2　设线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解是 $\boldsymbol{k}_0$，其导出方程组的解空间 $\mathcal{N}(A)$ 的一组基是 $\boldsymbol{k}_1,\cdots,\boldsymbol{k}_{n-r}$，其中 $r=\operatorname{rank}(A)$，则 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解集就是

$$\{\boldsymbol{k}_0+c_1\boldsymbol{k}_1+\cdots+c_{n-r}\boldsymbol{k}_{n-r}\mid c_1,\cdots,c_{n-r}\in\mathbb{R}\}.$$

注意只要 $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$，这个解集就不是一个子空间.

第三章　内积和正交性

第 1 至 2 章主要介绍了线性映射和线性空间的基本概念，其中重要的是：

1. 方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的求解，帮助判断线性映射是否单射或满射；　结构
2. 子空间的基的计算，进一步明确线性映射单射或满射的性质.

本章将处理与之相关的两个问题：

1. 在方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解时，如何找到最佳的逼近解，即找到 $\widehat{\boldsymbol{x}}$，使得 $A\widehat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{b}$ 尽量小？
2. 如果把基类比于坐标系的坐标向量，有没有类似于直角坐标系所具有的两两正交的坐标向量的基？

度量

前者需要刻画向量的大小，后者需要刻画向量的夹角.

内积

定义3.1.2(内积)　定义 R^n 上的两个向量 a,b 的内积为实数 $a^T b$,

即如果 $a=\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, 则 a,b 的内积为 $a_1b_1+\cdots+a_nb_n$.

命题 3.1.3　向量内积满足如下性质:

1. **对称性**: $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$;
2. **双线性性**: $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}(k_1\boldsymbol{b}_1+k_2\boldsymbol{b}_2)=k_1\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1+k_2\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_2, (k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=k_1\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}+k_2\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$;
3. **正定性**: $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}\geqslant 0$, 且 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

向量 $a=\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ 的长度定义为: $\|a\|=\sqrt{a^T a}=\sqrt{a_1{}^2+\cdots+a_n{}^2}$,

$\|a-b\|$ 称为向量 a,b 间的距离。

Cauchy-Schwarz（柯西-施瓦茨）不等式

$\left|a^T b\right| \le \|a\| \cdot \|b\|$, 等号成立当且仅当 a,b 线性相关(或是说共线)。

证. 设 $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, 则

$$\|\boldsymbol{a}\|^2 \|\boldsymbol{b}\|^2 - \left|\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b}\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \geqslant 0.$$

等号成立当且仅当对任意 $1 \le i < j \le n$, 都有 $a_i b_j - a_j b_i = 0$

当 $b_i \ne 0$, $b_j \ne 0$ 时，$a_i b_j - a_j b_i = 0 \Rightarrow \dfrac{a_i}{b_i} = \dfrac{a_j}{b_j} = k$,

若 $b_i \ne 0, b_j = 0$, 则 $a_i b_j - a_j b_i = 0 \Rightarrow a_j = 0$

所以 $b \ne 0$ 时，对所有 $1 \le i \le n, a_i = k b_i$, 即 $a = kb$, a,b 线性相关，
当 $b = 0$ 时，a,b 线性相关仍然成立。

练习 3.1.5 (Cauchy-Schwarz 不等式的其他证明) 1. 先证明 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 都是单位向量的情形: $|\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}| \leqslant 1$，且等号成立当且仅当 $\boldsymbol{a} = \pm\boldsymbol{b}$. 再由单位向量的情形推广到一般的情形.

提示: 利用均值不等式 $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$.

2. 根据内积的正定性，对任意实数 t，都有 $(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} + 2t\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} + t^2\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \geqslant 0$. 利用判别式证明结论.

$$(a+tb)^T(a+tb) = a^Ta + 2a^Tb\cdot t + b^Tb\cdot t^2 \ge 0 \Rightarrow \Delta = \left(2a^Tb\right)^2 - 4b^Tb\cdot a^Ta \le 0 \Rightarrow \left(a^Tb\right)^2 \le a^Ta\cdot b^Tb$$

$$(a+tb)^T(a+tb) = a^Ta + 2a^Tb\cdot t + b^Tb\cdot t^2 = b^Tb\left(t^2 + 2\frac{a^Tb}{b^Tb}\cdot t + \frac{a^Ta}{b^Tb}\right)$$

$$= b^Tb\left[\left(t+\frac{a^Tb}{b^Tb}\right)^2 + \frac{a^Ta}{b^Tb} - \frac{\left(a^Tb\right)^2}{\left(b^Tb\right)^2}\right] = b^Tb\left(t+\frac{a^Tb}{b^Tb}\right)^2 + a^Ta - \frac{\left(a^Tb\right)^2}{b^Tb}$$

当 $t = \frac{a^Tb}{b^Tb}$ 时, $\left(a - \frac{a^Tb}{b^Tb}b\right)^T\left(a - \frac{a^Tb}{b^Tb}b\right) = a^Ta - \frac{\left(a^Tb\right)^2}{b^Tb}$

$$\left(a^Tb\right)^2 = a^Ta\cdot b^Tb \Leftrightarrow a^Ta - \frac{\left(a^Tb\right)^2}{b^Tb} = 0 \Leftrightarrow \left(a - \frac{a^Tb}{b^Tb}b\right)^T\left(a - \frac{a^Tb}{b^Tb}b\right) \Leftrightarrow a = \frac{a^Tb}{b^Tb}b$$

练习 3.1.3 求证:

1. 在 $\mathbb{R}^n$ 中的非零向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 夹角为 0，当且仅当存在 $k > 0$，使得 $\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b}$.
2. 在 $\mathbb{R}^n$ 中的两向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 正交，当且仅当对任意实数 t，有 $\|\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}\| \geqslant \|\boldsymbol{a}\|$.
3. 在 $\mathbb{R}^n$ 中的非零向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 正交，当且仅当 $\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|$.

向量的夹角与正交

根据Cauchy-Schwarz不等式，$|a^T b| \le \|a\| \cdot \|b\|$，对于非零向量 a,b，$\left|\dfrac{a^T b}{\|a\| \cdot \|b\|}\right| \le 1$，

定义非零向量 a,b 的夹角为 $\arccos \dfrac{a^T b}{\|a\| \cdot \|b\|}$.

如果向量 a,b 满足 $a^T b = 0$，称二者正交或垂直，记为 $a \perp b$.
零向量与任何向量都正交。

定义 3.1.8 (正交向量组) 设 $a_1, \cdots, a_r$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的向量组，如果这些向量都非零且两两正交，则称该向量组为**正交向量组**. 特别地，如果正交向量组中的向量都是单位向量，则称其为**正交单位向量组**.

命题 3.1.9 正交向量组线性无关.

$\mathbb{R}^n$中的三角形

在 $\mathbb{R}^n$ 中的三角形的三条边能写成向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，而三角不等式说明两边（长度）之和大于第三边（长度）.

推论 3.1.5 (三角不等式) $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leqslant \|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|$，等号成立当且仅当 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线.

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^T(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{a}\leq\|\boldsymbol{a}\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2+2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|=(\|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|)^2$$

定理 3.1.6 (勾股定理) 向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 正交，则 $\|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}\|^2=\|\boldsymbol{a}\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2$.

证. 根据定义，$\|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}\|^2=(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}\pm2\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|^2+\|\boldsymbol{b}\|^2$. □

练习 3.1.22 1.（平行四边形法则）证明 $\mathbb{R}^n$ 中任意平行四边形的两条对角线长度的平方和，等于其四条边长的平方和.

正交投影

设 $a,b\in R^n$，$a\neq 0$，则有 $b=\frac{a^Tb}{a^Ta}a+\left(b-\frac{a^Tb}{a^Ta}a\right)$

$a^T\left(b-\frac{a^Tb}{a^Ta}a\right)=0$，$\frac{a^Tb}{a^Ta}$ 称为向量 b 向直线 $\text{span}(a)$ 的正交投影。

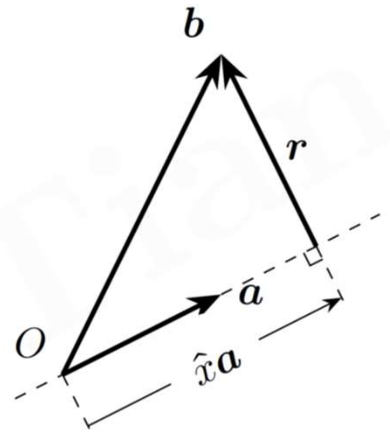

图 3.1.1: 平面向量的逼近

命题 3.1.7 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个向量，$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\left\|\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}\right\|=\min\limits_{x\in\mathbb{R}}\|\boldsymbol{b}-x\boldsymbol{a}\|$.

证一. 设 $\hat{x}=\frac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}}$，则向量 $(\hat{x}-x)\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}-\hat{x}\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}-x\boldsymbol{a}$ 组成一个直角三角形，

前两个向量 是直角边. 根据勾股定理，$\|\boldsymbol{b}-x\boldsymbol{a}\|\geqslant\|\boldsymbol{b}-\hat{x}\boldsymbol{a}\|$.

证二. 利用一元函数的性质. 考虑

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{b}-x\boldsymbol{a}\|^2&=(\boldsymbol{b}-x\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b}-x\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a})x^2-2(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})x+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\\&=(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a})(x-\frac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}})^2+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}-(\frac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}})^2,\end{aligned}$$

其中 $x=\frac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}}$ 时达到最小值. □

标准正交基

定义 3.1.8 (正交向量组) 设 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的向量组，如果这些向量都非零且两两正交，则称该向量组为**正交向量组**. 特别地，如果正交向量组中的向量都是单位向量，则称其为**正交单位向量组**.

命题 3.1.9 正交向量组线性无关.

定义 3.1.10 (标准正交基) 设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，如果它的一组基是正交向量组，则称之为 $\mathcal{M}$ 的一组**正交基**；如果它的一组基是正交单位向量组，则称之为 $\mathcal{M}$ 的一组**标准正交基**.

例 3.1.11 标准基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

$\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_2, \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基.

练习 3.1.9 1. 找到 $\mathbb{R}^4$ 中的四个两两正交的向量，且每个向量的每个分量只能是 ± 1.

2. $\mathbb{R}^n$ 中最多有多少个两两正交的向量?

Gram-Schmidt 正交化

将任意一组基改造为标准正交基

设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，从 $\mathcal{M}$ 的任意一组基 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r$ 出发，

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{q}}_1 &= \boldsymbol{a}_1, \\
\tilde{\boldsymbol{q}}_2 &= \boldsymbol{a}_2 - \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2}{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_1}\tilde{\boldsymbol{q}}_1, \\
\tilde{\boldsymbol{q}}_3 &= \boldsymbol{a}_3 - \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_3}{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_1}\tilde{\boldsymbol{q}}_1 - \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_3}{\tilde{\boldsymbol{q}}_2^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_2}\tilde{\boldsymbol{q}}_2, \\
&\vdots \\
\tilde{\boldsymbol{q}}_r &= \boldsymbol{a}_r - \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_r}{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_1}\tilde{\boldsymbol{q}}_1 - \cdots - \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_{r-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_r}{\tilde{\boldsymbol{q}}_{r-1}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_{r-1}}\tilde{\boldsymbol{q}}_{r-1}.
\end{aligned}
$$

为了得到标准正交基，只要再把正交基中的每个向量都单位化即可：$\boldsymbol{q}_i = \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_i}{\|\tilde{\boldsymbol{q}}_i\|}$.

例 3.1.14 给定 $\mathbb{R}^3$ 中的一组基:

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},$$

利用 Gram-Schmidt 正交化方法计算 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基. 过程如下:

$$\tilde{\boldsymbol{q}}_1=\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{q}}_2=\boldsymbol{a}_2-\frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2}{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_1}\tilde{\boldsymbol{q}}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}-\frac{2}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{bmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{q}}_3=\boldsymbol{a}_3-\frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_3}{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_1}\tilde{\boldsymbol{q}}_1-\frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_3}{\tilde{\boldsymbol{q}}_2^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_2}\tilde{\boldsymbol{q}}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}-\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}.$$

把向量单位化得到标准正交基: $\boldsymbol{q}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix},\boldsymbol{q}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix},\boldsymbol{q}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix}.$

命题 3.1.12 设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，则 $\mathcal{M}$ 存在一组正交基，从而存在一组标准正交基.

证. 对 $\mathcal{M}$ 的维数应用数学归纳法. 维数是 1 的子空间中的任意非零向量都构成一组正交基. 假设任意 r 维的子空间都存在一组正交基，下面证明 $r+1$ 维的子空间 $\mathcal{M}$ 也存在一组正交基. 任取 $\mathcal{M}$ 中一组基 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_{r+1}$，其包含的子空间 $\mathcal{N} = \operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r)$ 是 r 维的. 根据归纳假设，$\mathcal{N}$ 存在一组正交基 $\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_r$. 我们希望找到一个非零向量 $\boldsymbol{q}_{r+1}$，它与 $\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_n$ 都正交. 这样 $\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_r, \boldsymbol{q}_{r+1}$ 就是一个 $r+1$ 个向量组成的正交向量组，从而是 $\mathcal{M}$ 的一组正交基.

显然 $\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_r, \boldsymbol{a}_{r+1}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一组基. 设 $\boldsymbol{q}_{n+1} = k_1\boldsymbol{q}_1 + \cdots + k_r\boldsymbol{q}_r + \boldsymbol{a}_{r+1}$. 假设 $\boldsymbol{q}_{r+1}$ 与 $\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_n$ 都正交. 对 $i = 1, \cdots, n$，两边和 $\boldsymbol{q}_i$ 做内积可得 $0 = k_i\|\boldsymbol{q}_i\|^2 + \boldsymbol{q}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_{r+1}$，因此 $k_i = -\frac{\boldsymbol{q}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_{r+1}}{\|\boldsymbol{q}_i\|^2}$. 于是 $\boldsymbol{q}_{n+1} = \boldsymbol{a}_{r+1} - \frac{\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_{r+1}}{\|\boldsymbol{q}_1\|^2}\boldsymbol{q}_1 - \cdots - \frac{\boldsymbol{q}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_{r+1}}{\|\boldsymbol{q}_r\|^2}\boldsymbol{q}_r \neq 0$. 容易验证它与 $\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_n$ 都正交.

综上即得，任意子空间都存在一组正交基. 至于标准正交基，只需将正交基的每个向量单位化即得. $\square$

基扩张定理也可以推广到标准正交基的情形，证明留给读者.

命题 3.1.13 设 $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间，如果 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$，则 $\mathcal{M}$ 的任意一组标准正交基都可以扩充成 $\mathcal{N}$ 的一组标准正交基.

作 业（10月25日）

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

练习3.1

2，6，7，8，11，15，16，19

11月1日提交

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~