习题 1.9

注意x =0 和 x = pi的情况讨论

1.(3)令 $\mathrm{grad}\,u=\left[u_x',u_y',u_z'\right]=\left[\cos x-\cos(x+y+z),\cos y-\cos(x+y+z),\cos z-\cos(x+y+z)\right]=\mathbf{0}$；

即 $\cos(x+y+z)=\cos x=\cos y=\cos z$；由于 $x,y,z\in[0,\pi]$，故 $\cos x=\cos y=\cos z\Leftrightarrow x=y=z$，

那么 $\cos x=\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$，即 $\cos x\sin^2 x=0$，由此解得 $x=\pi/2=y=z$，

因此 $u(x,y,z)$ 在区域 $\{(x,y,z)|x,y,z\in[0,\pi]\}$ 内有唯一驻点 $P(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$；函数 u 的 Hesse 矩阵为

$$H(u)=\begin{bmatrix}u_{xx}'' & u_{xy}'' & u_{xz}''\\ u_{xy}'' & u_{yy}'' & u_{yz}''\\ u_{xz}'' & u_{yz}'' & u_{zz}''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin(x+y+z)-\sin x & \sin(x+y+z) & \sin(x+y+z)\\ \sin(x+y+z) & \sin(x+y+z)-\sin y & \sin(x+y+z)\\ \sin(x+y+z) & \sin(x+y+z) & \sin(x+y+z)-\sin z\end{bmatrix},$$

在点 P 处，$H(u)=\begin{bmatrix}-2 & -1 & -1\\ -1 & -2 & -1\\ -1 & -1 & -2\end{bmatrix}$ 负定；故 $u(x,y,z)$ 在点 $P(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 有极大值 $u(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})=4$.

2.由于 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$，故 $4x+2zz_x'+8(z+xz_x')-z_x'=0$，$4y+2zz_y'+8xz_y'-z_y'=0$；

可得 $z_x'=-\dfrac{4x+8z}{8x+2z-1}$，$z_y'=-\dfrac{4y}{8x+2z-1}$；令 $\mathrm{grad}\,z=\left[z_x',z_y'\right]=\mathbf{0}$，可得 $x+2z=0$ 且 $y=0$，

代入原方程可解得 $z(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有两个驻点 $P_1(-2,0)$ 与 $P_2(\frac{16}{7},0)$；

函数 $z(x,y)$ 在点 P_1 处的 Hesse 矩阵 $H_1(z)=\begin{bmatrix}4/15 & 0\\ 0 & 4/15\end{bmatrix}=\frac{4}{15}I_{2\times2}$ 正定，故 P_1 为 $z(x,y)$ 的极小值点；

函数 $z(x,y)$ 在点 P_2 处的 Hesse 矩阵 $H_2(z)=\begin{bmatrix}-28/135 & 0\\ 0 & -4/15\end{bmatrix}$ 负定，故 P_2 为 $z(x,y)$ 的极大值点；

因此 $z=z(x,y)$ 在 $P_1(-2,0)$ 处有极小值 $z_{极小}=1$，在 $P_2(\frac{16}{7},0)$ 处有极大值 $z_{极大}=-\frac{8}{7}$.

建议将二阶导数的计算式显示给出

7.(3)构造拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2-\lambda(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}-1)$，其驻点满足：

$\frac{\partial L}{\partial x}=(2-\frac{\lambda}{8})x=0$，$\frac{\partial L}{\partial y}=(2-\frac{2}{9}\lambda)y=0$，$\frac{\partial L}{\partial z}=(2-\frac{\lambda}{2})z=0$，$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=1-(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4})=0$；

由约束条件可知 x,y,z 不能同时为零，而 $2-\frac{\lambda}{8},2-\frac{2}{9}\lambda,2-\frac{\lambda}{2}$ 中至多一个为零，因此：

①当 $\lambda=16$ 时，$y=z=0$，$x=\pm4$，L 有驻点 $(\pm4,0,0,16)$，此时 $u=16$；

②当 $\lambda=9$ 时，$x=z=0$，$y=\pm3$，L 有驻点 $(0,\pm3,0,9)$，此时 $u=9$；

③当 $\lambda=4$ 时，$x=y=0$，$z=\pm2$，L 有驻点 $(0,0,\pm2,4)$，此时 $u=4$；

由于在有界闭集 $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\middle|\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1\right\}$ 上 $u=x^2+y^2+z^2$ 存在最大值与最小值，

故 u 在点 $(\pm4,0,0)$ 处取得最大值 $u_{\max}=16$，在点 $(0,0,\pm2)$ 取得最小值 $u_{\min}=4$.

8.①令 $\mathrm{grad}\,u=\left[u_x',u_y',u_z'\right]=\left[2x-2y,4y-2x-2z,2z-2y\right]=\mathbf{0}$，解得 $x=y=z$，此时 $u\equiv 0$，

注意到 $u=x^2+2y^2+z^2-2xy-2yz=(x-y)^2+(y-z)^2\ge 0$，故 u 在点 (a,a,a) 处有极小值 $u_{极小}=0$

落在区域 $\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\middle|x^2+y^2+z^2\le 4\right\}$ 的内部的点为 (a,a,a)，其中 $3a^2<4$；

②而在 Ω 的边界 $\bar{\Omega}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\middle|x^2+y^2+z^2=4\right\}$ 上，此时为条件极值问题，构造拉格朗日函数

$L(x,y,z,\lambda)=(x-y)^2+(y-z)^2-\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$，其驻点满足：$L_\lambda'=4-(x^2+y^2+z^2)=0$，

$L_x'=2(x-y)-2\lambda x=0$，$L_y'=2(y-x)+2(y-z)-2\lambda y=0$，$L_z'=2(z-y)-2\lambda z=0$；

即 $x-y=\lambda x$，$z-y=\lambda z$，$2y-x-z=\lambda y$，整理可得 $(x-z)(\lambda-1)=0$，

(a) 当 $x=z$ 时，$\lambda y=2y-x-z=2(y-x)=-2\lambda x$，即 $\lambda(2x+y)=0$，

- 若 $\lambda=0$，则 $x=y=z$，代入约束条件可解得 $(x,y,z)=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$，此时 $u=0$；
- 若 $2x+y=0$，则 $-\dfrac{y}{2}=x=z$，代入约束条件可解得 $(x,y,z)=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}(1,-2,1)$，此时 $u=12$；

(b) 当 $\lambda=1$ 时，$y=0$ 且 $x=-z$，代入约束条件可解得 $(x,y,z)=\pm\sqrt{2}(1,0,-1)$，此时 $u=4$；

由于在有界闭集 $\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\middle|x^2+y^2+z^2\le 4\right\}$ 上 $u=(x-y)^2+(y-z)^2$ 存在最大值与最小值，

故 u 在 $\Omega\bigcap\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\middle|x=y=z\right\}$ 上有最小值 $u_{\min}=0$，在点 $\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}(1,-2,1)$ 上有最大值 $u_{\max}=12$.

9.(3)设长方体的一个顶点为 (x,y,z)，$x,y,z\ge 0$；由对称性可知，其体积函数 $V(x,y,z)=8xyz$，

构造拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)=8xyz-\lambda(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1)$，其驻点满足：

$\dfrac{\partial L}{\partial x}=8yz-\dfrac{2\lambda x}{a^2}=0$，$\dfrac{\partial L}{\partial y}=8xz-\dfrac{2\lambda y}{b^2}=0$，$\dfrac{\partial L}{\partial z}=8xy-\dfrac{2\lambda z}{c^2}=0$，$\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=1-(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2})=0$；

解得 $(x,y,z)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(a,b,c)$ 或 $xyz=0$，两类解分别对应着 $V=\dfrac{8\sqrt{3}}{9}abc$ 与 $V=0$ 的情况；

由于在有界闭集 $\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\middle|\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,x,y,z\ge 0\right\}$ 内 V 存在最大值与最小值，

故 V 在 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}(a,b,c)$ 处有最大值 $V_{\max}=\dfrac{8\sqrt{3}}{9}abc$，在 $\Omega\bigcap\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\middle|xyz=0\right\}$ 上有最小值 $V_{\min}=0$；

但由于实际问题中，长方体边长不能为零，即 $xyz\ne 0$，故最小值 $V_{\min}=0$ 无法取到；

综上所述，当 $(x,y,z)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(a,b,c)$ 时长方体体积有最大值 $\dfrac{8\sqrt{3}}{9}abc$，体积没有最小值.

10.(1)设该等腰梯形的面积为 S，上底长为 x，下底长为 $y(y>x>0)$，高为 $h(h>0)$；

则其面积 $S=\dfrac{1}{2}h(x+y)$，需要抹水泥的长度 $u(x,y,h)=x+2\sqrt{h^2+(\dfrac{y-x}{2})^2}=x+\sqrt{4h^2+(y-x)^2}$；

构造拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)=x+\sqrt{4h^2+(y-x)^2}-\lambda(2S-h(x+y))$，其驻点满足：

$\dfrac{\partial L}{\partial x}=1+\dfrac{x-y}{\sqrt{4h^2+(y-x)^2}}+\lambda h=0\cdots\cdots①$，$\dfrac{\partial L}{\partial y}=\dfrac{y-x}{\sqrt{4h^2+(y-x)^2}}+\lambda h=0\cdots\cdots②$，

$\dfrac{\partial L}{\partial h}=\dfrac{4h}{\sqrt{4h^2+(y-x)^2}}+\lambda(x+y)=0\cdots\cdots③$，$\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=h(x+y)-2S=0\cdots\cdots④$，

由前两式易得 $\dfrac{y-x}{\sqrt{4h^2+(y-x)^2}}=\dfrac{1}{2}\cdots\cdots⑤$，$\lambda h=-\dfrac{1}{2}$，则 $\dfrac{(y-x)^2}{\sqrt{4h^2+(y-x)^2}}=\dfrac{y-x}{2}\cdots\cdots⑥$；

由第三式可知 $\dfrac{4h^2}{\sqrt{4h^2+(y-x)^2}}+\lambda h(x+y)=0$，即 $\dfrac{4h^2}{\sqrt{4h^2+(y-x)^2}}=\dfrac{1}{2}(x+y)\cdots\cdots⑦$；

将y=2x代入到S = 1/2(x+y)h中求解得到x和y的表达式

⑥+⑦可得$\dfrac{4h^2+(y-x)^2}{\sqrt{4h^2+(y-x)^2}}=\sqrt{4h^2+(y-x)^2}=\dfrac{y-x}{2}+\dfrac{y+x}{2}=y$，代入⑤式，可得$y=2x$；

进一步可以得到$y=2x=\dfrac{4}{3}\sqrt{\sqrt{3}S}$，即$(x,y)=\dfrac{2}{3}\sqrt{\sqrt{3}S}(1,2)$，此时$u=3x=2\sqrt{\sqrt{3}S}$；

接下来考虑延拓后的区域$\Omega=\left\{(x,y,h)\in\mathbb{R}^3\middle|y\geq x\geq 0,h\geq 0\right\}$的边界：

- 当$x=0$时，$S=hy/2$，$u=\sqrt{4h^2+y^2}\geq 2\sqrt{hy}=2\sqrt{2S}$，$y=2h$时等号成立，故$u_{\min}=2\sqrt{2S}$；
- 当$y=x$时，$S=hx$，$u=x+2h\geq 2\sqrt{2xh}=2\sqrt{2S}$，在$x=2h$时等号成立，故$u_{\min}=2\sqrt{2S}$；
- 当$h=0$时，$S=0$，$u=x+y-x=x\geq 0$，在$x=0$时等号成立，故$u_{\min}=0$；

由区域Ω的开放性，显然在任何情况下$u(x,y,h)$都不存在最大值；

而在边界$x=0$，$y=x$上取得的最小值均大于$2\sqrt{\sqrt{3}S}$，$h=0$可归为$u=2\sqrt{\sqrt{3}S}$的特殊情况，

综上所述，当$(x,y)=\dfrac{2}{3}\sqrt{\sqrt{3}S}(1,2)$时，有$u_{\min}=2\sqrt{\sqrt{3}S}$；此时上底:下底:腰$=2:1:1$.

由前面条件此处应为上底：下底：腰=1：2：1

习题 2.2

1.(1)由于$f(x,a)=\sqrt{x^2+a^2}\in C[-1,1]\times[-1,1]$，故$\lim\limits_{a\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\lim\limits_{a\to 0}\sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}|x|\mathrm{d}x=1$.

2.(4) $F'(t)=\int_0^t\dfrac{\partial f}{\partial t}(x+t,x-t)\mathrm{d}x+f(2t,0)=\int_0^t f_1'(x+t,x-t)\mathrm{d}x-\int_0^t f_2'(x+t,x-t)\mathrm{d}x+f(2t,0)$.

4. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{a}{2}[\varphi'(x+at)-\varphi'(x-at)]+\dfrac{1}{2}[\psi(x+at)+\psi(x-at)]$，

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{a^2}{2}[\varphi''(x+at)+\varphi''(x-at)]+\dfrac{a}{2}[\psi'(x+at)-\psi'(x-at)]$；

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{2}[\varphi'(x+at)+\varphi'(x-at)]+\dfrac{1}{2a}[\psi(x+at)-\psi(x-at)]$，

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{1}{2}[\varphi''(x+at)+\varphi''(x-at)]+\dfrac{1}{2a}[\psi'(x+at)-\psi'(x-at)]$；显然$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，证毕.