# 第三次作业参考解答

于子宏

**练习 1.3.2**

8. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 20 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & 15 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & 15 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. 解为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

9. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 & -20 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. 解为 $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

■ 仔细！耐心！小部分同学算错数)

**练习 1.3.5**

2. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 10 \\ 6 & 4 & c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & c-20 \end{bmatrix}$. 方程组无解当且仅当 $c-20 \neq 0$, 即 $c \neq 20$.

4. $\begin{bmatrix} 3 & b & -6 \\ b & 3 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & b & -6 \\ 0 & 3-b^2/3 & 6+2b \end{bmatrix}$. 方程组有无穷组解当且仅当 $\begin{cases} 3-t^2/3=0 \\ 6+2b=0 \end{cases}$. 解得 $b=-3$.

6. $\begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & b+2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & b+1 & 0 \end{bmatrix}$. 齐次方程组有非零解当且仅当 $b+1=0$, 即 $b=-1$.

■ 加深对**定理 *1.3.8*** 和**命题 *1.3.11*** 的理解.

**练习 1.3.6**

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ a & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3a-1 \end{bmatrix}.$$

齐次方程组有非零解当且仅当 $a = \frac{1}{3}$. 通解为 $\begin{cases} x_1 = 3x_3 \\ x_2 = -7x_3 \end{cases}$

**练习 1.3.7**

$p = 1$ 时有无穷组解, 通解为 $x_1 = 1 - x_2 - x_3$. 下设 $p \neq 1$. $\begin{bmatrix} p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 & p \\ 1 & 1 & p & p^2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & p & 1 & p \\ 1 & 1 & p & p^2 \\ p & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to$

$$\begin{bmatrix} 1 & p & 1 & p \\ 0 & 1-p & p-1 & p^2-p \\ 0 & 1-p^2 & 1-p & 1-p^2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & p & 1 & p \\ 0 & 1 & -1 & -p \\ 0 & 1+p & 1 & 1+p \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & p & 1 & p \\ 0 & 1 & -1 & -p \\ 0 & 0 & p+2 & (1+p)^2 \end{bmatrix}.$$

$p = -2$ 时无解. $p \neq 1$ 且 $p \neq -2$ 时, 有唯一解为 $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{p+1}{p+2} \\ x_2 = \dfrac{1}{p+2} \\ x_3 = \dfrac{(p+1)^2}{p+2} \end{cases}.$

■ 直接看出 $p = 1$ 时原方程组三个方程完全相同可以一定程度简化步骤, 但没看出来的话在计算增广矩阵带着系数 $(1-p)$ 也可以做. 有的同学漏讨论了情况, 有的同学多讨论了 $p = -1$ 和 $p = 0$ 的情况 (包含于唯一解的情况), 有的同学计算错误, 有的同学没化简结果...

**练习 1.3.13**

$$\begin{bmatrix} 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & & & 1 \\ 0 & 1 & & -1 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & & & & 1 \\ & 1 & & & -1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & (-1)^n \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & & & & 1 \\ & 1 & & & -1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & (-1)^n \\ & & & & 1-(-1)^n \end{bmatrix}.$$

$n$ 为奇数时只有 0 解, $n$ 为偶数时有解 $x_i = (-1)^i x_n$.

■ 部分同学没有分奇偶讨论, 部分同学认为 $n$ 为奇数时无解.

**练习 1.3.18**

1.

证明. 由于 $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ 是平面法向量, 所以 $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ 垂直于 $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}$. 则 $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \cdot (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) = 0$, 即 $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \boldsymbol{q}$ $\square$

(注意平面法向量与**平面内的向量**垂直. $\boldsymbol{p}$ 即向量 $\overrightarrow{OP}$ 并不是平面内的向量. 部分同学认为 $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \boldsymbol{q} = 0$ 是错误的.)

2.

证明. 对平面上任一点 $\boldsymbol{q}$, 由第 1 问知 $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \boldsymbol{p} = d$. 所以 $\boldsymbol{q}$ 也在 $ax + by + cz = d$ 的解集中.

反之, 对满足方程 $ax + by + cz = d$ 的点 $\boldsymbol{q}$, 可知 $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ 垂直于 $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}$, 说明 $\boldsymbol{q}$ 在平面上. □

(注意要有既证明充分性也证明必要性的意识. 平面上的点都是方程的解, 方程的解都在平面上.)

3. 两平面平行当且仅当法向量 $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$ 平行. 由于题目中已设非零向量, 故等价于存在 $k \in \mathbb{R}$, 使得 $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = k$.

(这里使用的平行的定义是法向量平行. 无须排除平面重合的情况. 部分同学多加了 $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{d_1}{d_2}$, 反倒说明这两个平面始终重合, 就不对了.)

4.

证明. 这是由于方程组 $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)y + (c_1 + c_2)z = d_1 + d_2 \end{cases}$ 与方程组 $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}$ 同解. □

(**定理 *1.3.4***)

**练习 1.3.19**

5. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$. 无解. 即三个平面无交点. (最复杂的那个矩阵是在求三个平面方程的三个常数项.)

6. 直线与向量垂直, 即直线在某一个以该向量为法向量的平面内. 所以题设直线是两个平面的交线. 由于

直线过原点, 则两个平面过原点. 有 $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$. 解得直线方程为 $\begin{cases}x = z\\y = -z\end{cases}$. 或直线上的点都为 $k\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}$. (需要注意空间中的直线方程是由两个平面方程联立的.)

7. 与该平面垂直的向量垂直于平面内的任何向量. 因此可利用平面经过的三个点作差得到两个向量进行求解. $\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$. 解得 $\begin{cases}x = z\\y = z\end{cases}$. 或所有与该平面垂直的向量都为 $k\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}$.