第18讲　谐振电路的品质因数，互感

1 谐振电路的品质因数

2 互感和互感电压

3 同名端

4 计算举例

计算器

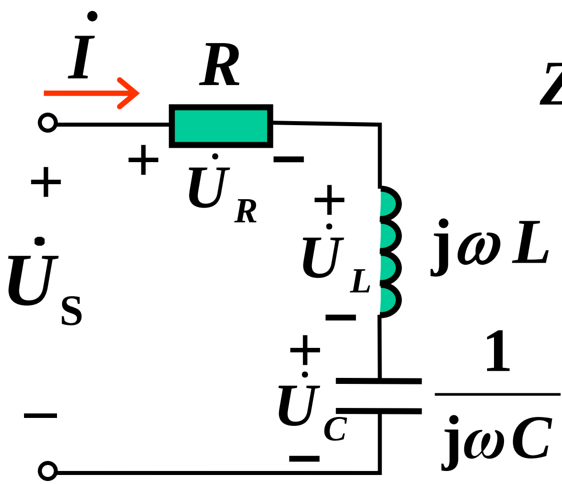
根据绕线方式确定同名端

根据同名端确定互感电压

1 谐振电路的品质因数（Quality Factor）

(1) 从支路量幅值角度考虑

以串联谐振为例

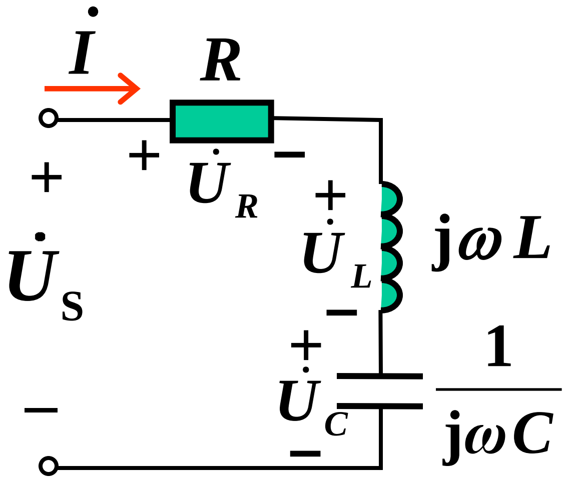


$$Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\left.\begin{aligned} U_{L0} &= \frac{\omega_0 L}{R} U_S \\ U_{C0} &= \frac{1}{\omega_0 CR} U_S \end{aligned}\right\} \text{二者相等}$$

$$Q \overset{\text{def}_1}{=} \frac{U_{L0}}{U_S} = \frac{U_{C0}}{U_S} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

无量纲



$$Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

品质因数Q与ω无关

特性阻抗　　单位：Ω

(characteristic impedance)

$$\boxed{\rho \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

$$\dot{U}_R=\dot{U}_S$$

$$\dot{U}_L=\mathrm{j}Q\dot{U}_S \qquad \dot{U}_C=-\mathrm{j}Q\dot{U}_S$$

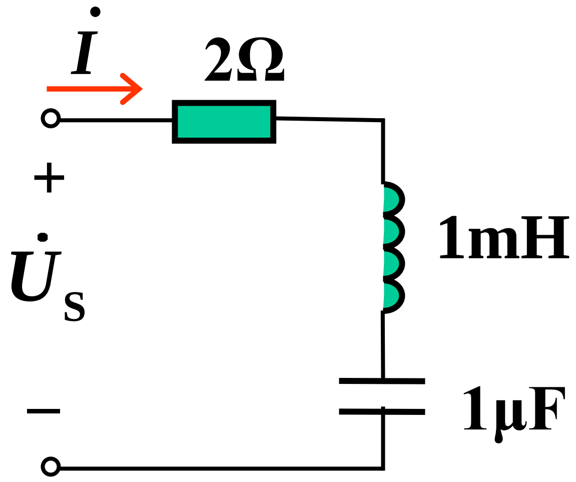
串联谐振又称电压谐振

L 和 *C* 上可能出现高电压 → 利用 / 避免

单选题 1分

设置

图示电路谐振时的品质因数Q为



A 12.8

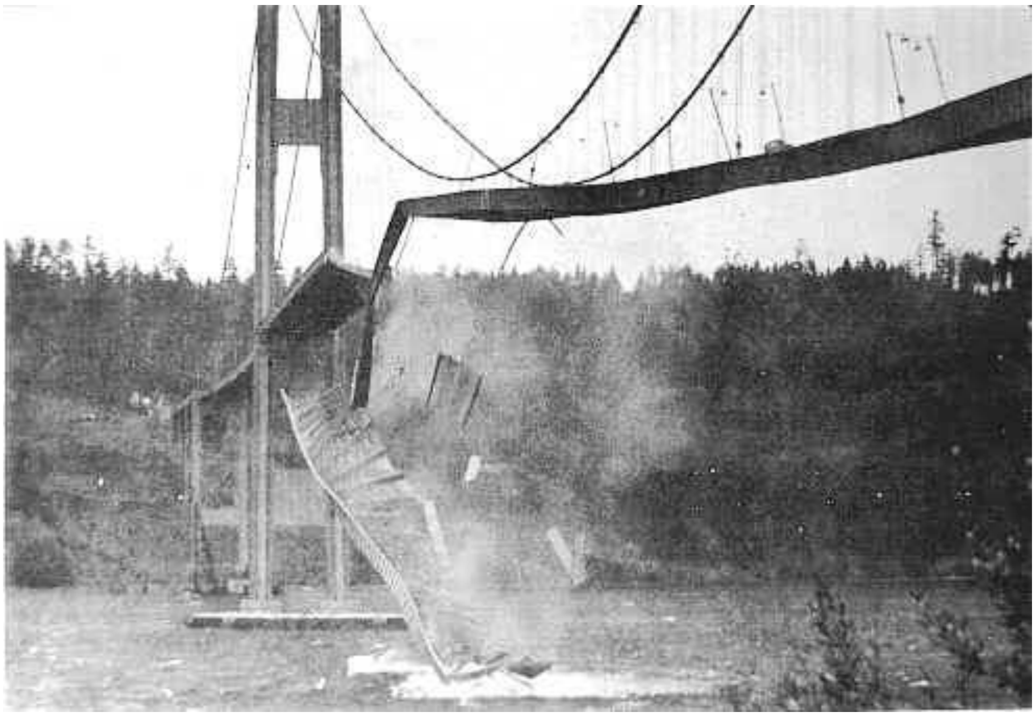
B 15.2

C 15.8

D 19.2

提交

Tacoma大桥为什么会垮掉?

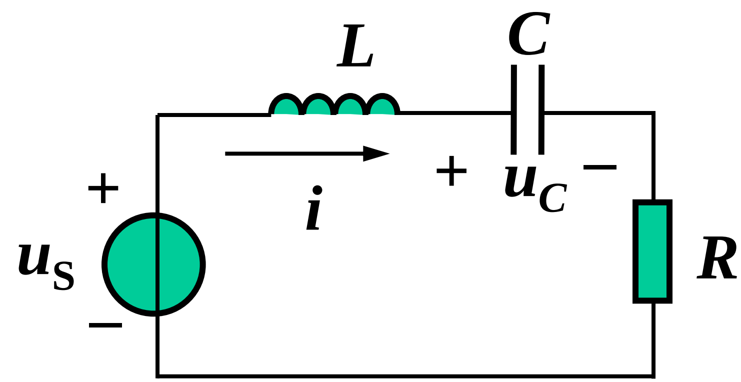


原因:

风的频率≈桥的自振频率

桥自振的Q大

(2）从能量角度考虑



设 $u_S = U_m \sin \omega_0 t$

则 $i = \dfrac{U_m}{R} \sin \omega_0 t = I_m \sin \omega_0 t$

电感存储的磁场能量 $w_L = \dfrac{1}{2} L i^2 = \dfrac{1}{2} L I_m^2 \sin^2 \omega_0 t$

U_{Cm}

$$u_C = U_{Cm} \sin(\omega_0 t - 90^\circ) = \frac{1}{\omega_0 C} I_m \sin(\omega_0 t - 90^\circ) = -\sqrt{\frac{L}{C}} I_m \cos \omega_0 t$$

$\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

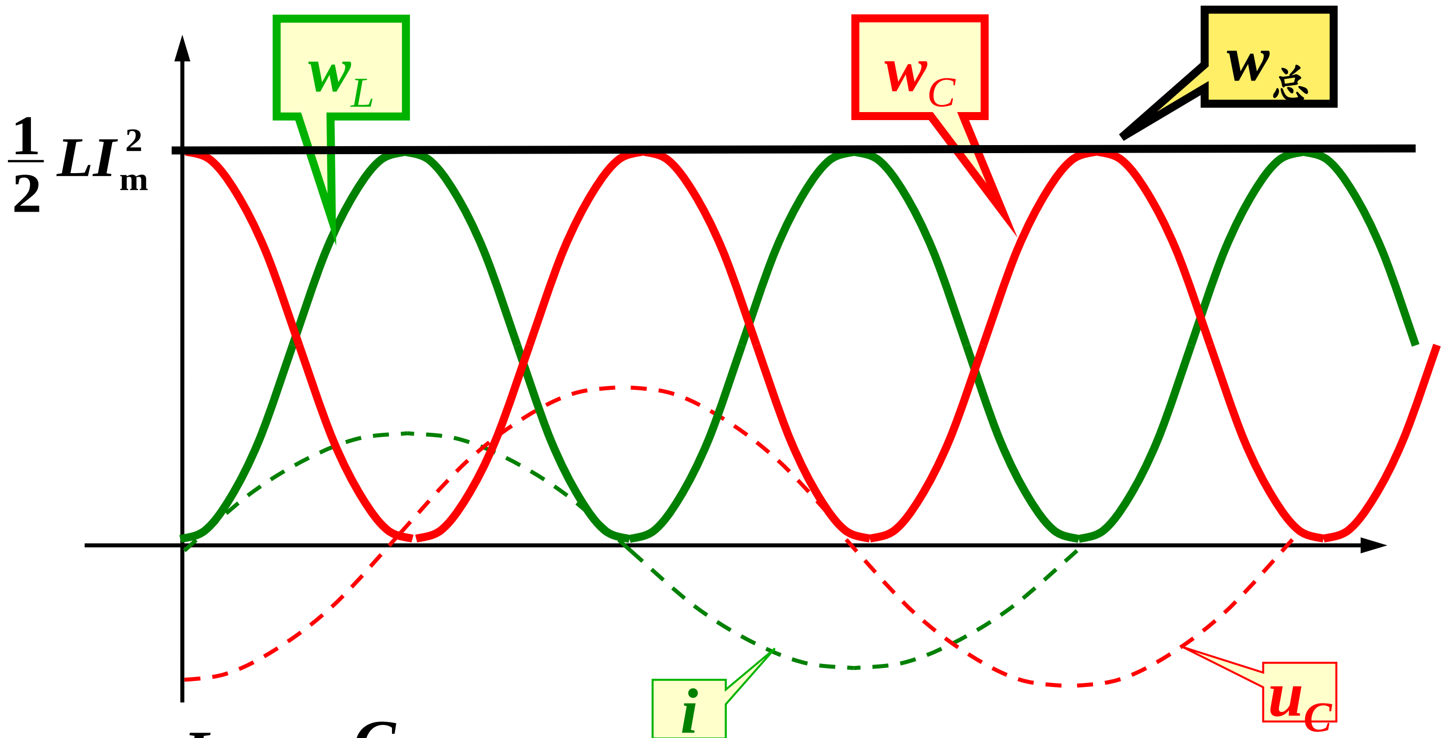
电容存储的电场能量

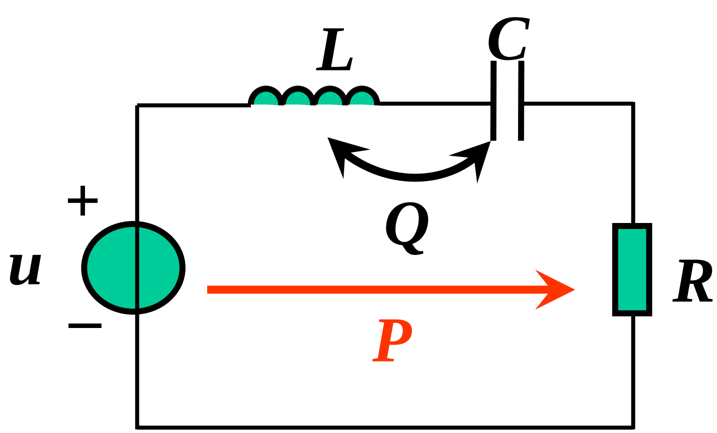
$$w_C = \frac{1}{2} C u_C^2 = \frac{1}{2} L I_m^2 \cos^2 \omega_0 t$$

电感和电容能量按2倍频正弦规律变化，最大值相等 $w_{Lm}=w_{Cm}$。

$$w_{\text{Total}} = w_L + w_C = \frac{1}{2} L I_m^2 = \frac{1}{2} C U_{Cm}^2$$

磁场能量 $w_L = \frac{1}{2} L I_m^2 \sin^2 \omega_0 t$　　电场能量 $w_C = \frac{1}{2} L I_{Lm}^2 \cos^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} C U_{Cm}^2 \cos^2 \omega_0 t$



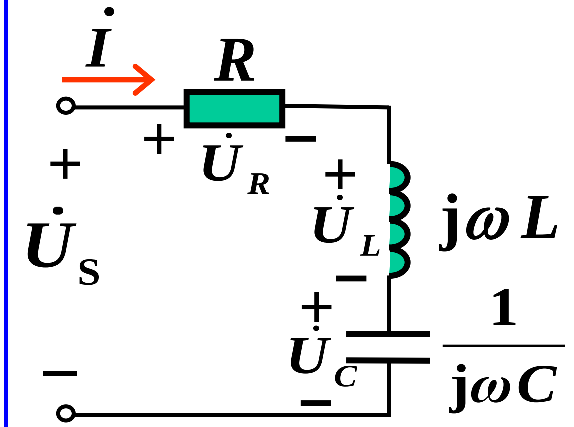


电磁场总能量

$$w_{\mathrm{Total}} = w_C + w_L = \frac{1}{2} L I_m^2 = \frac{1}{2} C U_{Cm}^2$$

$$Q \overset{\text{def}_2}{=} 2\pi \frac{\text{电路中储存的电磁场总能量}}{\text{谐振时一个周期内电路消耗的能量}}$$

$$= 2\pi \frac{LI^2}{RI^2 T_0} = \frac{\omega_0 L}{R}$$



$$w_{\text{Total}} = w_C + w_L = \frac{1}{2} C U_{C\text{m}}^2 = \frac{1}{2} L I_\text{m}^2 = LI^2$$

Q的定义1和定义2吻合

Q大 ⟶ 谐振时储能大，消耗能量少。

Q是反映谐振回路中电磁振荡程度的量

谐振时，
电路中储存的电磁场总能量为

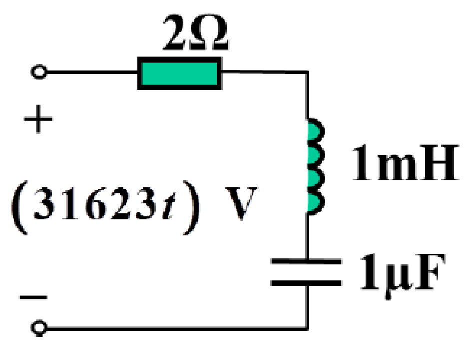
A 12.5 mJ

B 20 mJ

C 25 mJ

D 50 mJ

$u_S = 10\sqrt{2}\sin(31623t)$ V



$$w_{\text{Total}} = w_C + w_L = \frac{1}{2}LI_{\text{m}}^2 = \frac{1}{2}CU_{C\text{m}}^2$$

提交

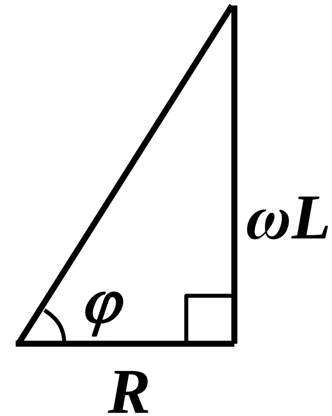
谐振电路的品质因数

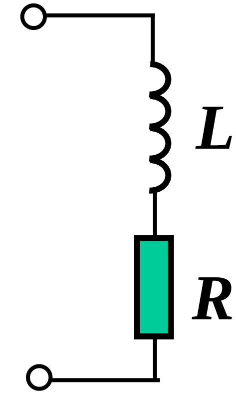
$$Q \overset{\text{def}_2}{=} 2\pi\frac{\text{电路中储存的电磁场总能量}}{\text{谐振时一个周期内电路消耗的能量}}$$

电感线圈的品质因数Q_L(某个频率下)

$$Q_L \overset{\text{def}}{=} 2\pi\frac{\text{线圈中储存的最大磁场能量}}{\text{一个周期内线圈电阻消耗的能量}}$$

$$= 2\pi\frac{\frac{1}{2}L(\sqrt{2}I)^2}{I^2RT} = \frac{\omega L}{R}$$



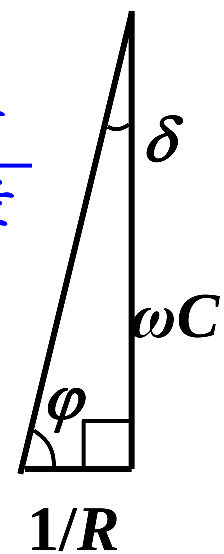


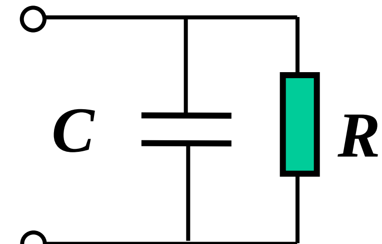
注意：
这不是谐振！！

电容器的介质损耗角(某个频率下)

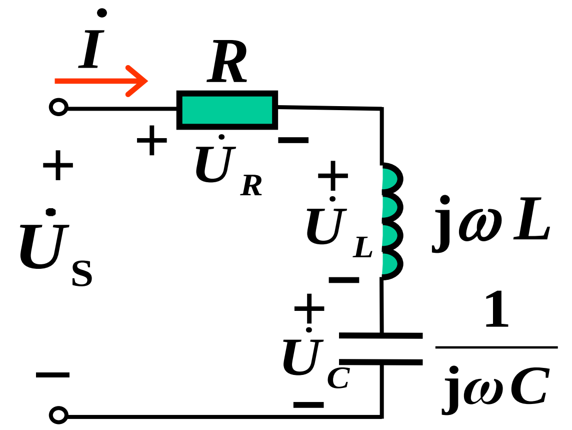
$$\tan\delta = \frac{1}{Q_C} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi}\frac{\text{一个周期内电容消耗的能量}}{\text{电容中储存的最大电场能量}}$$

$$= \frac{(U^2/R)T}{2\pi\frac{1}{2}C(\sqrt{2}U)^2} = \frac{1}{\omega CR}$$





(3) 从频率特性角度考虑

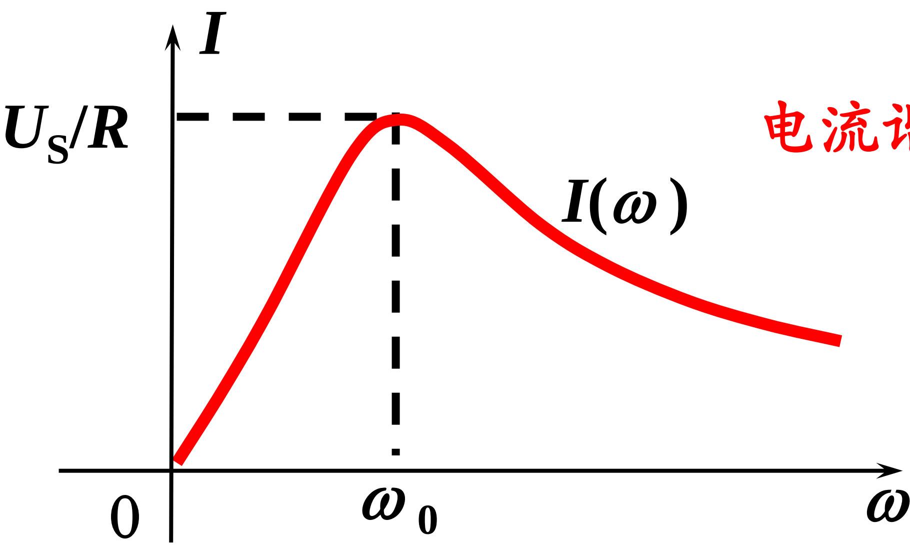


电流频率特性

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_S}{R + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

幅值关系

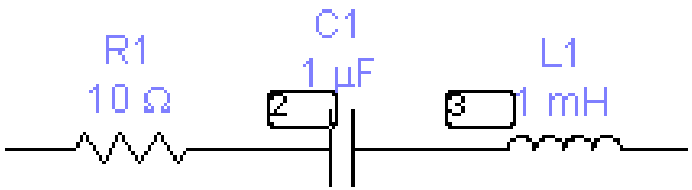
$$I(\omega) = \frac{U_S}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \le \frac{U_S}{R}$$

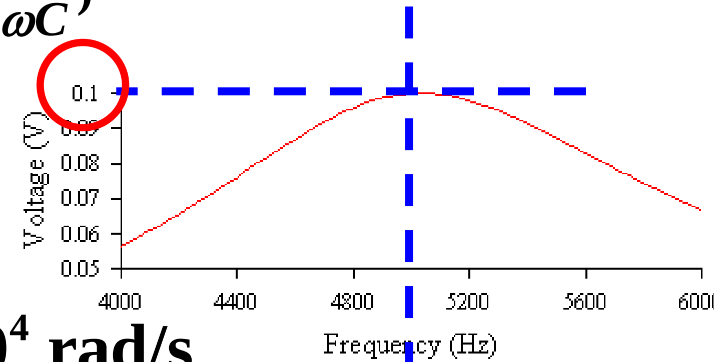


电流谐振曲线

如何从
电流谐振曲线
看出Q来?

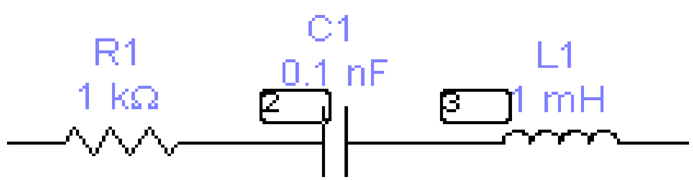
$$I(\omega)=\frac{U_S}{\sqrt{R^2+(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})^2}}$$

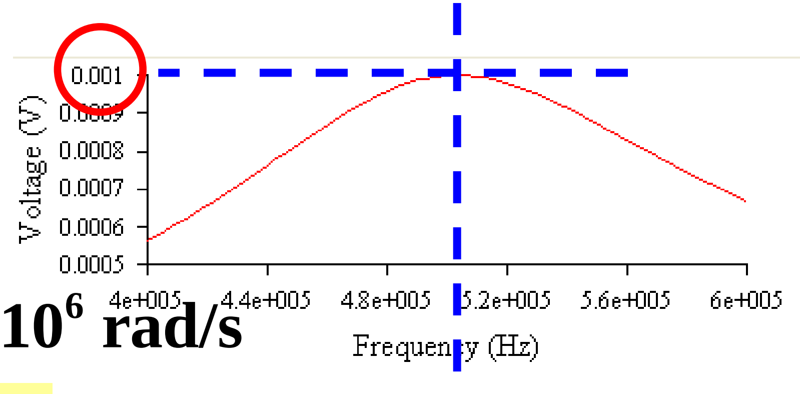




$$Q=3.16$$

$$\omega_0=3.16\times10^4\ \text{rad/s}$$





$$Q=3.16$$

$$\omega_0=3.16\times10^6\ \text{rad/s}$$

如何比较谐振频率不同、幅频特性最大幅值不同的两个谐振电路的Q?

希望：

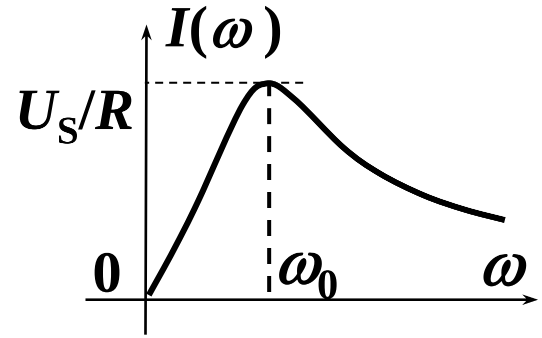
谐振点处幅频特性的幅值都为1。
在同一点发生谐振。

进行归一化处理！

纵轴变量的归一化

$$\frac{I(\omega)}{I(\omega_0)}=\frac{U_S/|Z|}{U_S/R}$$

$$I(\omega)=\frac{U_S}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}$$



$$=\frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega L}{R}-\frac{1}{\omega RC})^2}}$$

横轴变量的归一化

$$=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega_0 L}{R}\cdot\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{1}{\omega_0 RC}\cdot\frac{\omega_0}{\omega})^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(Q\frac{\omega}{\omega_0}-Q\frac{\omega_0}{\omega})^2}}$$

令 $\eta=\frac{\omega}{\omega_0}$

Q的定义1

$$\omega=\omega_0\longrightarrow\eta=1\longrightarrow\frac{I(\eta)}{I_0}=1$$

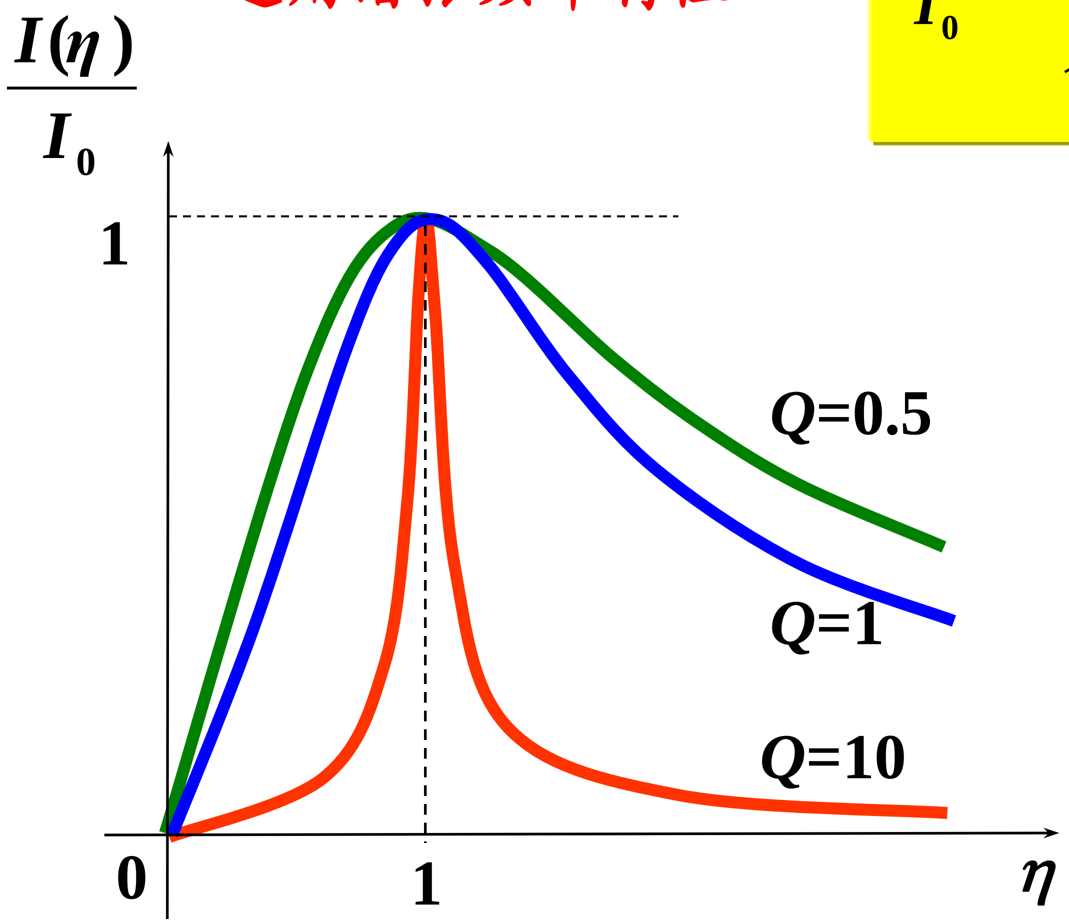
$$\frac{I(\eta)}{I_0}=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2(\eta-\frac{1}{\eta})^2}}$$

任何谐振，都在$\eta=1$处发生，
谐振点处幅频特性的幅值都为1。

归一化完成！

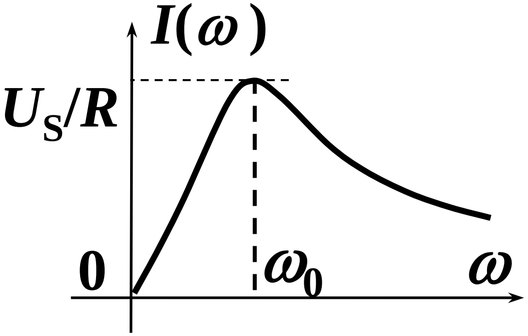
通用谐振频率特性

$$\frac{I(\eta)}{I_0}=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2(\eta-\frac{1}{\eta})^2}}$$



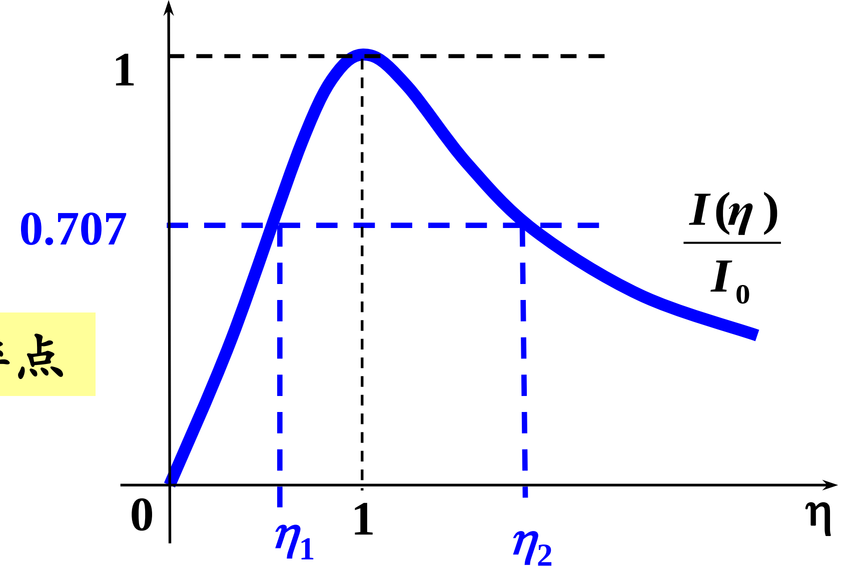
Q大 → 归一化后电流谐振曲线尖

谐振电路的选择性好



–3 dB

半功率点



$$\frac{I(\eta)}{I_0}=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2(\eta-\frac{1}{\eta})^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\eta_1=-\frac{1}{2Q}+\sqrt{\frac{1}{4Q^2}+1}$$

$$\eta_2=\frac{1}{2Q}+\sqrt{\frac{1}{4Q^2}+1}$$

$$\eta_2-\eta_1=\frac{1}{Q}$$

$$Q\overset{\text{def}_3}{=}\frac{1}{\eta_2-\eta_1}=\frac{\omega_0}{\omega_2-\omega_1}=\frac{f_0}{f_2-f_1}$$

$$\eta=\frac{\omega}{\omega_0}$$

带宽**Band Width** (BW)

可利用频率特性求Q

看仿真

品质因数Q定义的归纳

- 从信号幅值的变化来衡量

$$Q \overset{\mathrm{def}_1}{=} \frac{U_{L0}}{U_S} = \frac{U_{C0}}{U_S}$$

Q大 $\longrightarrow$ 谐振时电容电压和电感电压大。

- 从电磁能量的转换来衡量

$$Q \overset{\mathrm{def}_2}{=} 2\pi \frac{\text{电路中储存的电磁场总能量}}{\text{谐振时一个周期内电路消耗的能量}}$$

Q大 $\longrightarrow$ 谐振时储能大，消耗能量少。

- 从频率特性的形状来衡量

$$Q \overset{\mathrm{def}_3}{=} \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$$

Q大 $\longrightarrow$ 谐振电路的选择性好

单选题 1分

设置

在通用谐振频率特性曲线中，**曲线越宽**，则

A 品质因数越大，谐振电路选择性越差

B 品质因数越小，谐振电路选择性越差

C 品质因数越大，谐振电路选择性越好

D 品质因数越小，谐振电路选择性越好

提交

2 互感和互感电压（Mutual Inductance）

复习——电感(inductance)

载流回路中的电流 i

安培环路定律

$$\int_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu \sum i_{\mathrm{int}}$$

磁感应强度 $\boldsymbol{B}$

磁通Φ的定义

$$\Phi = \iint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

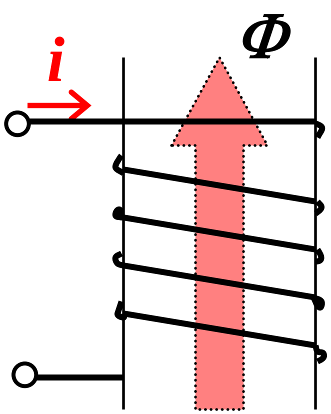
磁通 Φ

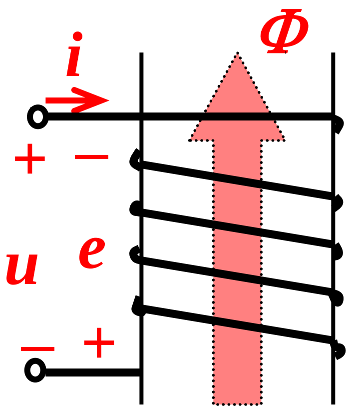
磁链ψ的定义

$$\psi = N\,\Phi$$

磁链 ψ

$$L \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\psi}{i}$$





i，Φ 右螺旋

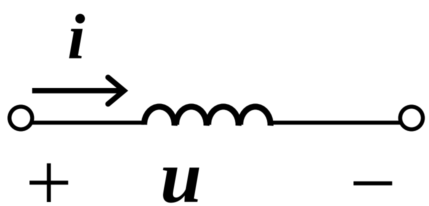
e，Φ 右螺旋

u，i 关联

由电磁感应定律

$$e = -\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$u = -e = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

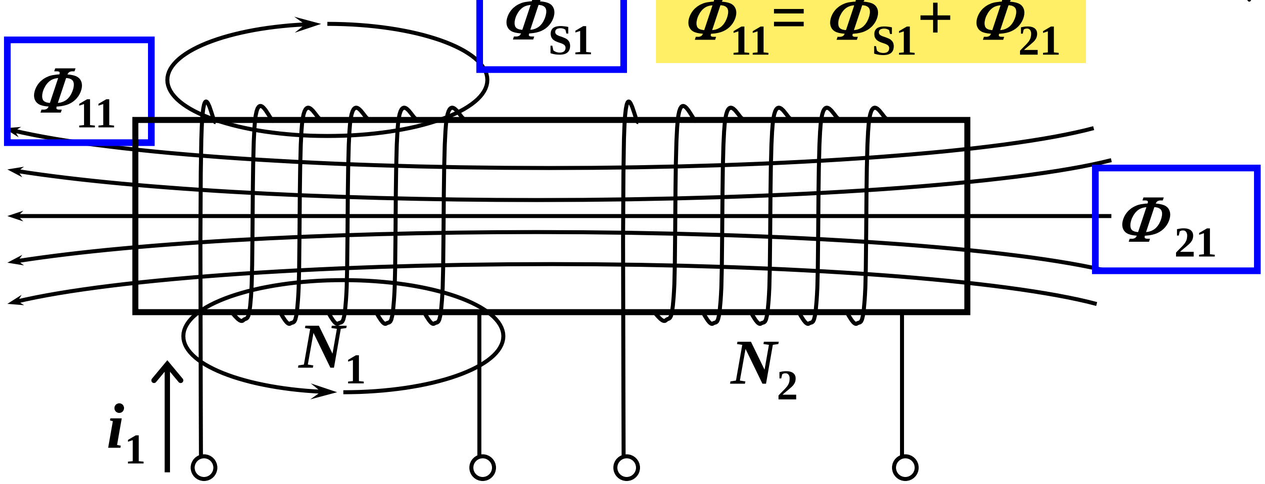


$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

电感确定u-i关系无需考虑线圈绕向

(1) 互感的定义

$$\Phi_{11} = \Phi_{S1} + \Phi_{21}$$



同理有线圈2的自感

$$L_2 = \frac{\psi_{22}}{i_2}$$

线圈2对1的互感

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_2}$$

载流回路1中的电流 i_1 → 磁感应强度 B → 磁通 Φ_{11}

磁通 Φ_{11} = 主磁通 Φ_{21} + 漏磁通 Φ_{S1}

$\psi_{11} = N_1 \Phi_{11}$ → 磁链 ψ_{11}

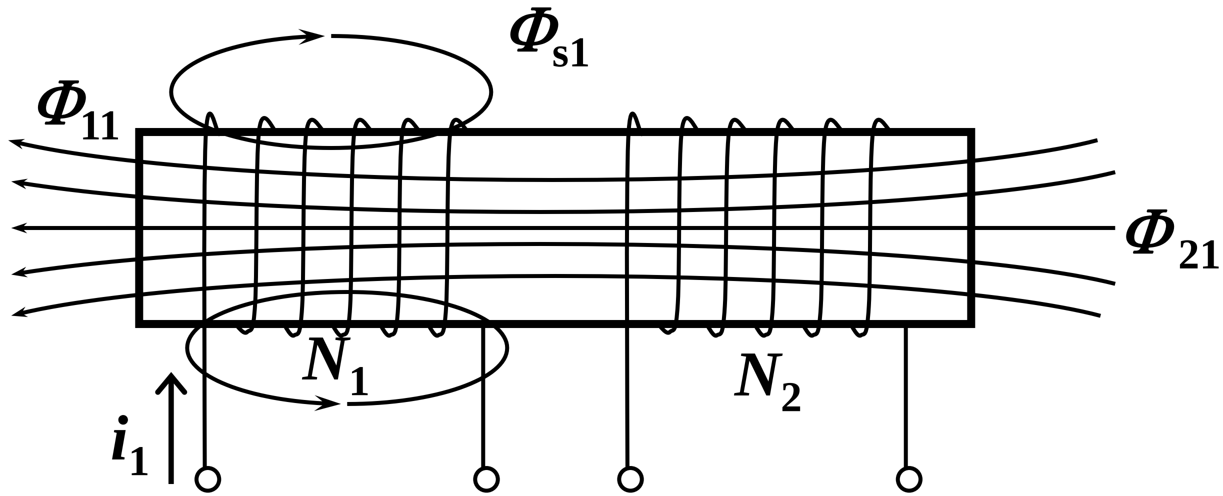
$$L_1 \overset{\text{def}}{=} \frac{\psi_{11}}{i_1}$$

线圈1的自感

$\psi_{21} = N_2 \Phi_{21}$ → 磁链 ψ_{21}

$$M_{21} \overset{\text{def}}{=} \frac{\psi_{21}}{i_1}$$

线圈1对2的互感



$$L_1 = \frac{\Psi_{11}}{i_1} \qquad L_2 = \frac{\Psi_{22}}{i_2}$$

单位 亨 (H)

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1} \qquad M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_2}$$

(2) 互感的性质

$$\boxed{M \propto N_1 N_2 \quad (L \propto N^2)}$$

a） 对于线性电感 $M_{12}=M_{21}=M$

b）互感系数 M 只与两个线圈的几何尺寸、匝数、相互位置和周围的介质磁导率有关。

(3) 耦合系数*k* (*coupling coefficient*)

$$k \overset{\text{def}}{=} \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

$$M^2 \le L_1 L_2 \Rightarrow k \le 1$$

互感不大于两个自感的几何平均值。

$$L_1 = \frac{N_1 \Phi_{11}}{i_1}$$

$$L_2 = \frac{N_2 \Phi_{22}}{i_2}$$

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1}$$

$$M_{12} = \frac{N_1 \Phi_{12}}{i_2}$$

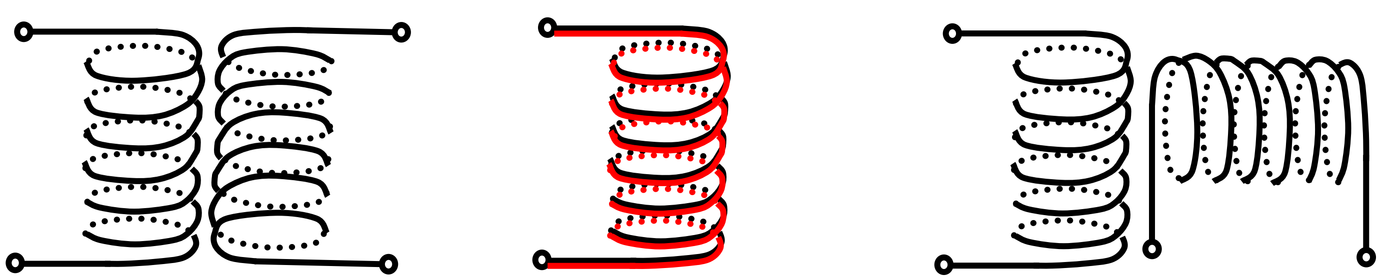
全耦合： $k = 1 \Rightarrow \Phi_{S1} = \Phi_{S2} = 0$

$$\Phi_{11} = \Phi_{S1} + \Phi_{21}$$

$$\Phi_{22} = \Phi_{S2} + \Phi_{12}$$

互感现象
- 利用——变压器，信号和功率的传递
- 避免——干扰

克服：合理布置线圈相互位置减少互感作用



$k<1$　　$k=1$　　$k=0$

单选题 1分

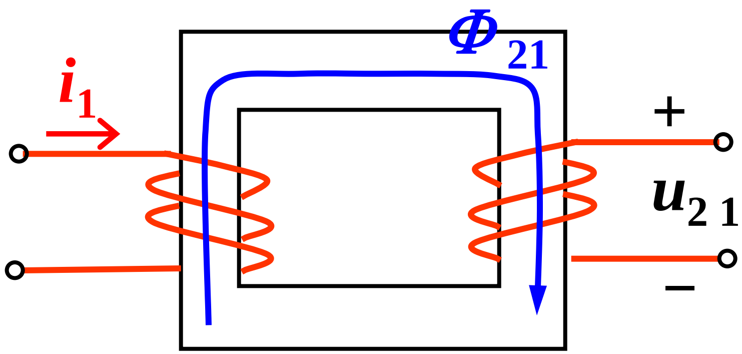
设置

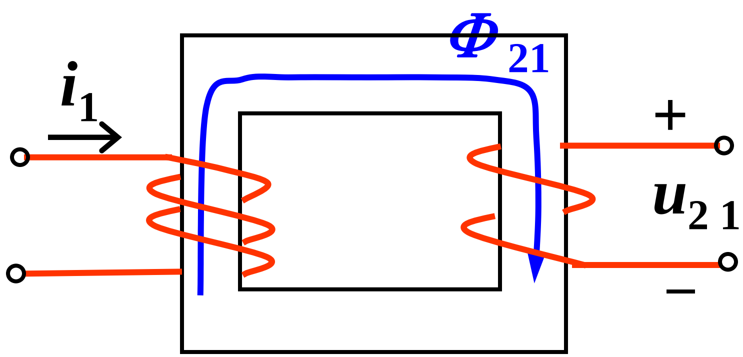
对于两个耦合的电感线圈，假定其电感分别为2mH和8mH，两者间可能的最大互感为

- A 2mH
- B 4mH
- C 6mH
- D 8mH

提交

(4) 互感电压





i_1，Φ_{21} 右手螺旋定则

Φ_{21}, e_{21} ,右手螺旋定则

i_1，Φ_{21} 右手螺旋定则

Φ_{21}, e_{21} ,右手螺旋定则

由电磁感应定律

$$e_{21} = -\frac{\mathrm{d}\psi_{21}}{\mathrm{d}t} = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

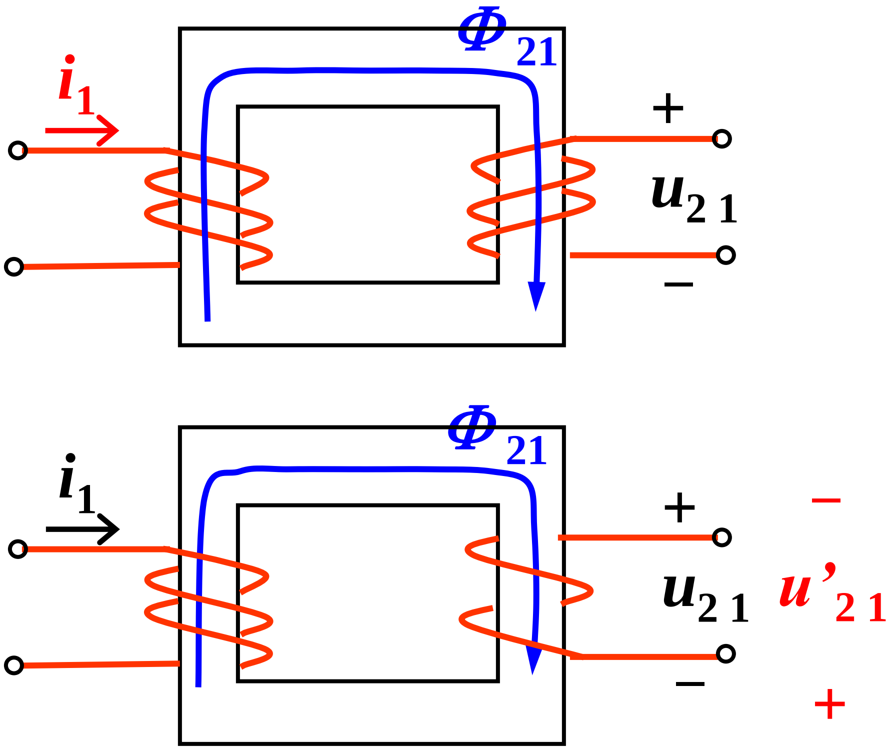
$$u_{21} = -e_{21} = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

$$e_{21} = -\frac{\mathrm{d}\psi_{21}}{\mathrm{d}t} = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

$$u_{21} = e_{21} = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

互感电压的方向与
互感线圈的绕向有关！！

3 同名端（Dot Convention）



$$u_{21} = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

$$u_{21} = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

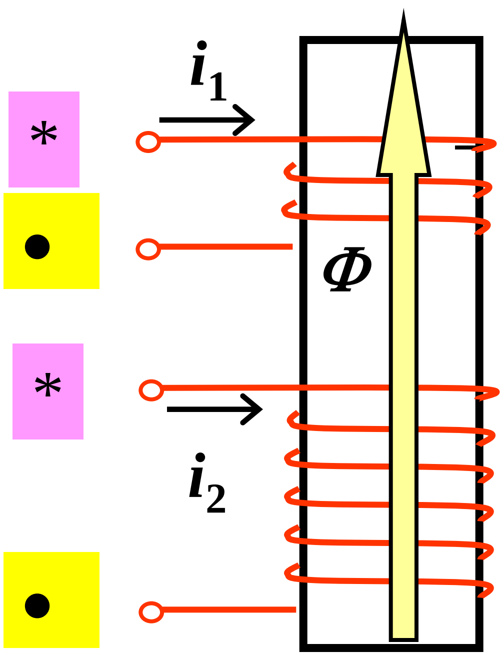
$$\boxed{u'_{21} = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}}$$

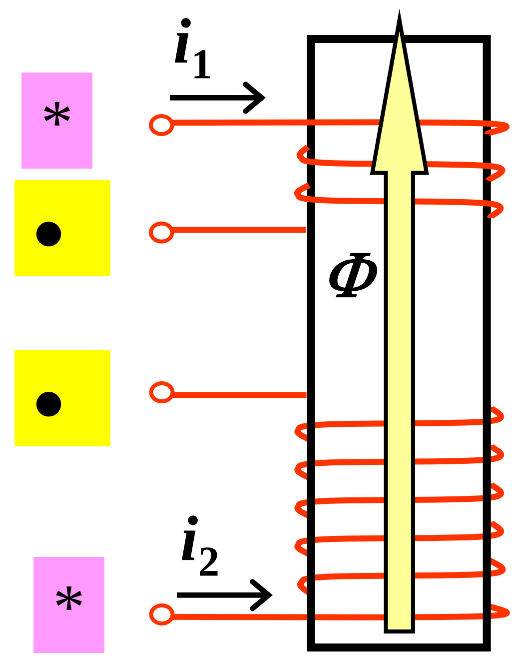
如何规定i_1和u_{21}/u'_{21}的参考方向关系，使得互感电压总是正的?

此处可以有弹幕

同名端：当两个电流分别从两个线圈的对应端子流入，其所产生的**磁场相互加强**时，则这两个对应端子称为同名端。

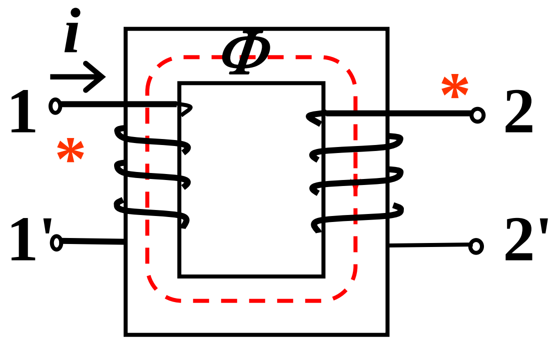
需要解决的问题1：如何根据绕法确定同名端?

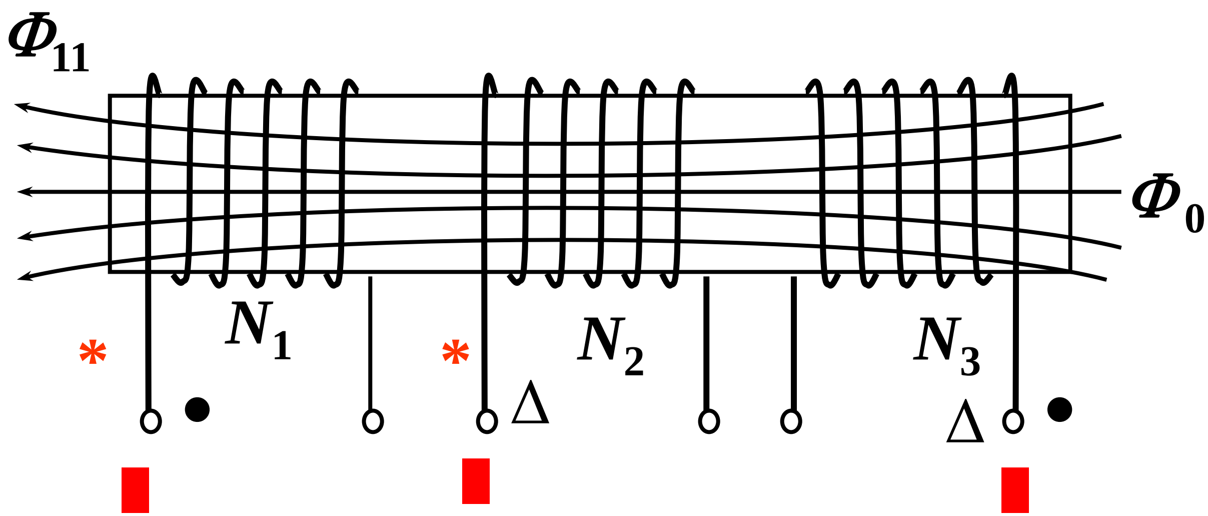




注意：线圈的同名端必须两两确定。

例1



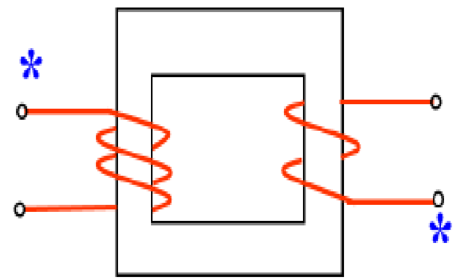


如果3个绕组根据线圈之间的两组关系可以确定另一组关系，则可以用3个点来代替6个点。

单选题 1分

设置

如图标注的同名端是



A 正确的

B 错误的

提交

需要解决的问题2：如何根据同名端确定互感电压？

$$u_{21} = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

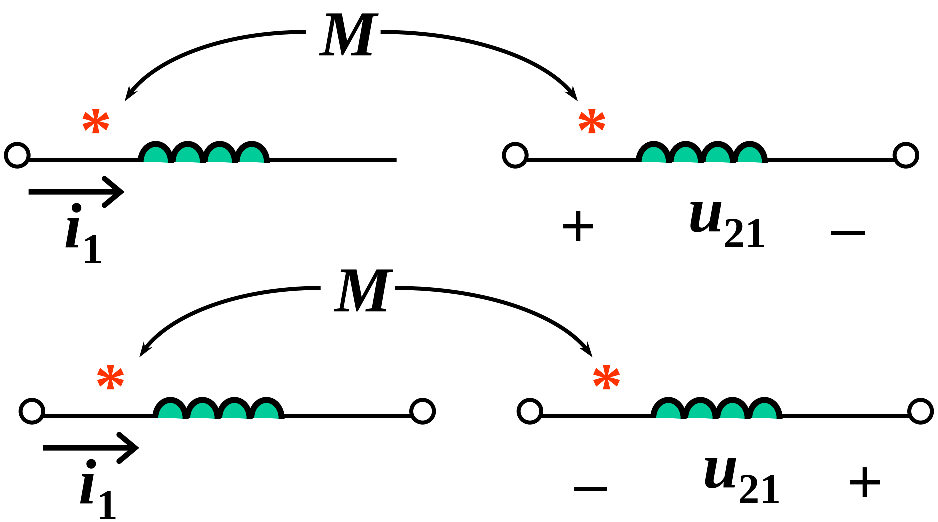
$$u_{21} = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

规律： 如果电流参考方向从同名端流入，互感电压参考方向在同名端为正。

则 $u = M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

重要！！

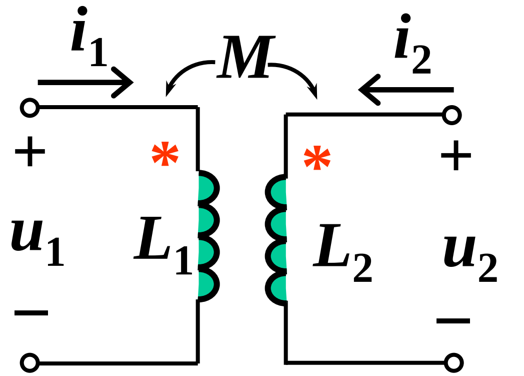
例2

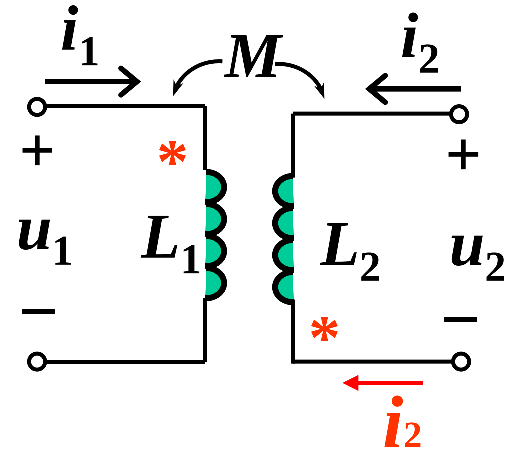


$$u_{21} = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

$$u_{21} = \boxed{-}M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

例3





时域形式

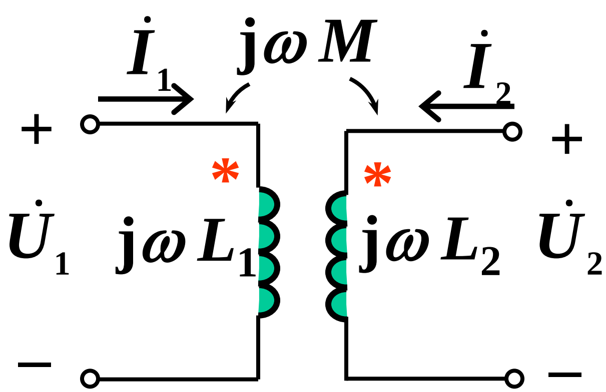
$$u_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$u_2 = M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$u_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$u_2 = -M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

在正弦稳态分析中，其相量形式的方程为

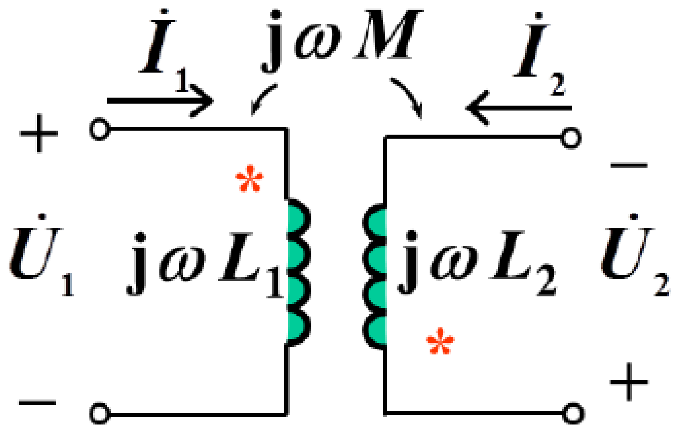


$$\dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1 \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = \mathrm{j}\omega M \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2$$

下列公式正确的是

“红包”



A
$$\dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1\dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M\dot{I}_2$$
$$\dot{U}_2 = \mathrm{j}\omega M\dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega L_2\dot{I}_2$$

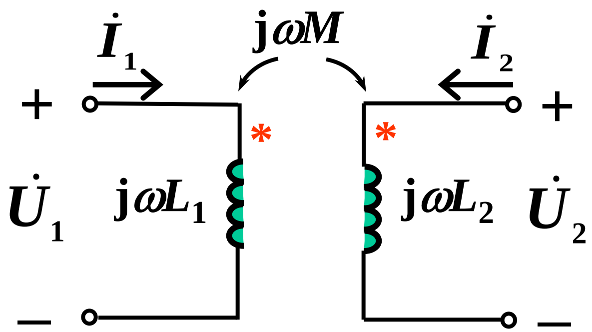
B
$$\dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1\dot{I}_1 - \mathrm{j}\omega M\dot{I}_2$$
$$\dot{U}_2 = \mathrm{j}\omega M\dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega L_2\dot{I}_2$$

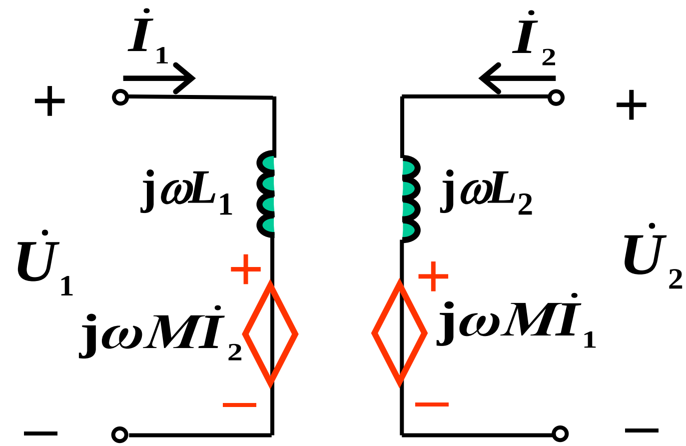
C
$$\dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1\dot{I}_1 - \mathrm{j}\omega M\dot{I}_2$$
$$\dot{U}_2 = \mathrm{j}\omega M\dot{I}_1 - \mathrm{j}\omega L_2\dot{I}_2$$

D
$$\dot{U}_1 = -\mathrm{j}\omega L_1\dot{I}_1 - \mathrm{j}\omega M\dot{I}_2$$
$$\dot{U}_2 = -\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega L_2\dot{I}_2$$

提交

互感线圈的等效电路



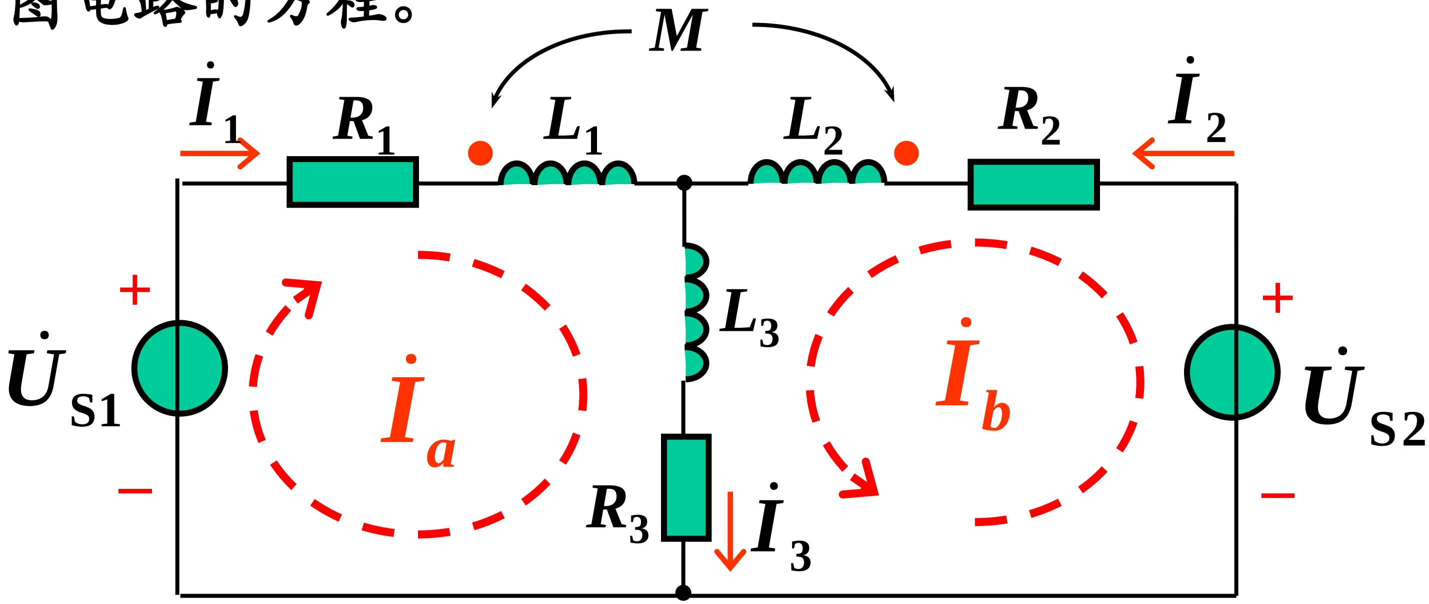


CCVS

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1 \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_1 \end{cases}$$

4 计算举例

例1 列写下图电路的方程。



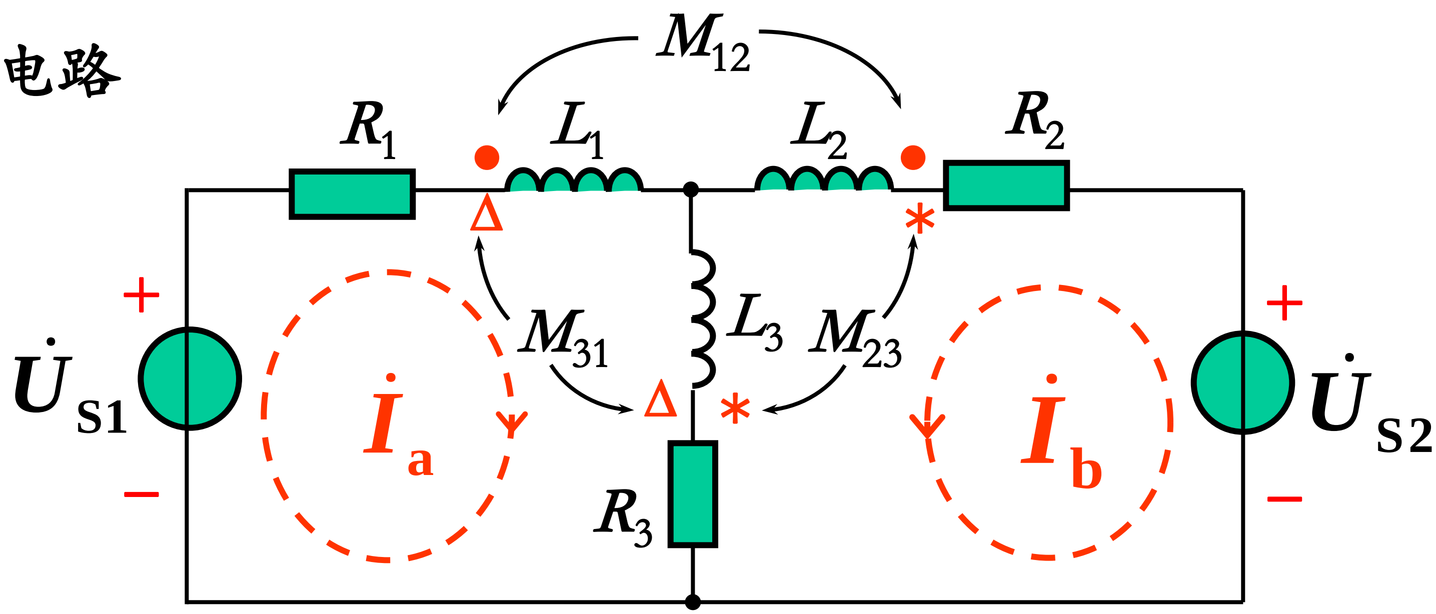
回路电流法： (1) 不考虑互感 (2) 考虑互感

$$(R_1+j\omega L_1+R_3+j\omega L_3)\dot{I}_a+(R_3+j\omega L_3)\dot{I}_b+j\omega M\dot{I}_b=\dot{U}_{S1}$$

$$(R_2+j\omega L_2+R_3+j\omega L_3)\dot{I}_b+(R_3+j\omega L_3)\dot{I}_a+j\omega M\dot{I}_a=\dot{U}_{S2}$$

含互感的电路，直接用节点法列写方程不方便。 为什么？

例2 求解电路



回路法

$$(R_1 + \mathrm{j}\omega L_1 + \mathrm{j}\omega L_3 + R_3)\dot{I}_a + (R_3 + \mathrm{j}\omega L_3)\dot{I}_b$$

$$= \dot{U}_{S1}$$

回路1对应的KVL中，有几个互感电压项？

$$(R_1 + \mathrm{j}\omega L_1 + \mathrm{j}\omega L_3 + R_3)\dot{I}_a + (R_3 + \mathrm{j}\omega L_3)\dot{I}_b$$

$$= \dot{U}_{S1}$$

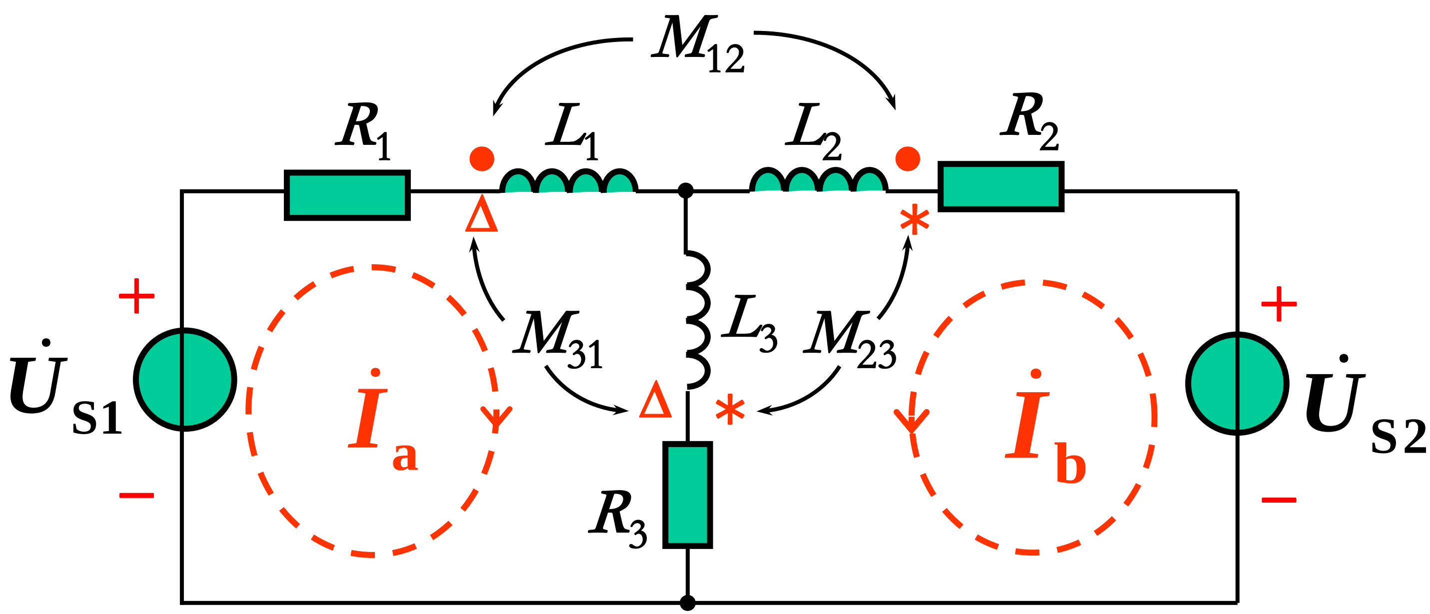
A 2

B 3

C 4

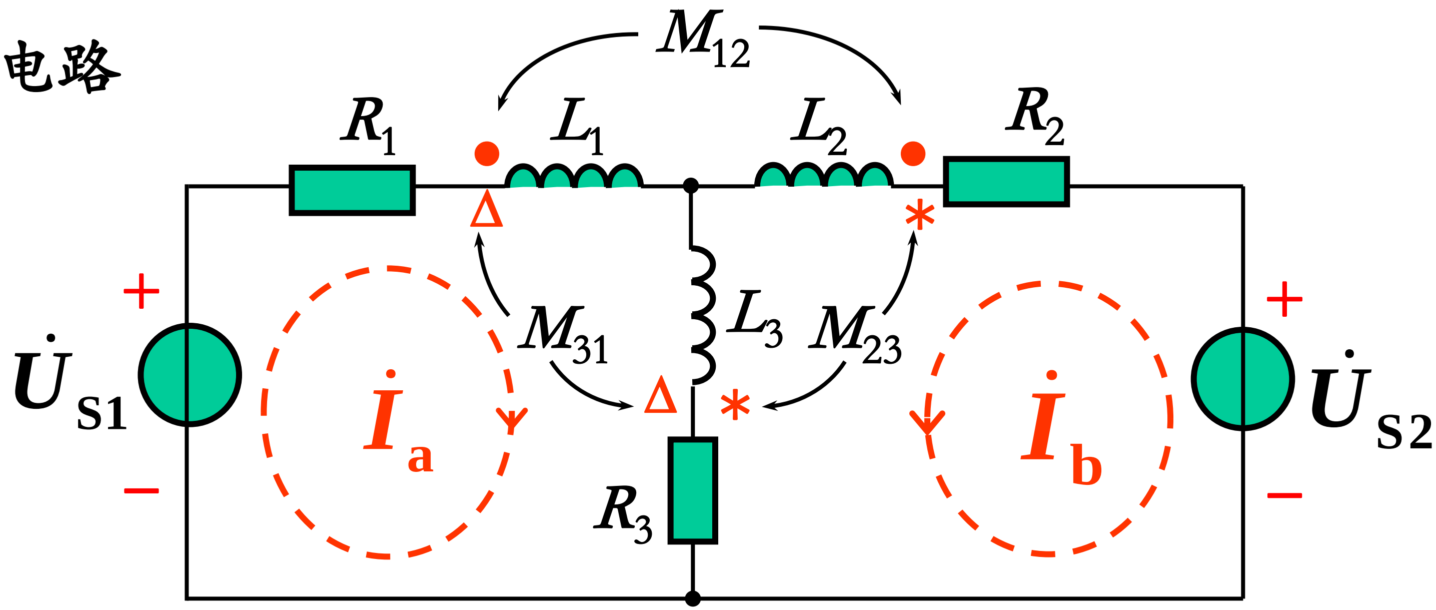
D 5

E 6



提交

例2 求解电路



回路法

$$\begin{cases}(R_1+j\omega L_1+j\omega L_3+R_3)\dot{I}_a+(R_3+j\omega L_3)\dot{I}_b \\ -j\omega M_{31}\dot{I}_a-j\omega M_{31}\dot{I}_a+j\omega M_{12}\dot{I}_b-j\omega M_{23}\dot{I}_b-j\omega M_{31}\dot{I}_b=\dot{U}_{S1} \\ (R_2+j\omega L_2+j\omega L_3+R_3)\dot{I}_b+(R_3+j\omega L_3)\dot{I}_a \\ +j\omega M_{12}\dot{I}_a-j\omega M_{31}\dot{I}_a-j\omega M_{23}\dot{I}_a-j\omega M_{23}\dot{I}_b-j\omega M_{23}\dot{I}_b=\dot{U}_{S2}\end{cases}$$

注意：① 不丢互感电压项；② 互感电压的正、负。