第十二周作业 参考解答

练习6.1

1(1,2,3), 2, 3, 5, 6, 9, 10, 14

练习6.2

1(4,5,6), 2, 3(1,3,5,7), 4, 5, 6, 10, 11, 15

练习 6.1.1. 求下列实对称矩阵的谱分解.

1. $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$;

◀ $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^T$. ▶

2. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$;

◀ $\begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}^T$. ▶

3. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

◀ $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & & & \\ & 3 & & \\ & & -3 & \\ & & & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^T$. ▶

需要注意**实对称矩阵的谱分解**形式为 $A = Q\Lambda Q^T$，其中Q为正交矩阵

方阵的谱分解形式为 $A = X\Lambda X^{-1}$

练习 6.1.2. 设三阶实对称矩阵 A 的特征值是 $0,3,3$, $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \in V_{\lambda=0}$, $\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} \in V_{\lambda=3}$, 求 A.

◀ $\lambda = 3$ 的特征子空间与 $\lambda = 1$ 的特征子空间正交. 将 $\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ 添加向量 $\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$ 扩充为 $\lambda = 3$ 的特征子空间的基. $A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & & \\ & 3 & \\ & & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 0 & -2\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\-1 & 2 & -1\\-1 & -1 & 2\end{bmatrix}$. ▶

练习 6.1.3. 设实对称矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$ 有一个单特征值 -3, 求 a 的值和 A 的谱分解.

◀ A 有三重特征值 $a+1$ 和单特征值 $a-3$. 故 $a=0$.

$$A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T.$$ ▶

练习 6.1.5. 求下列实对称矩阵 A 的谱分解.

1. A 满足 $A^3=0$.

◀ A 的特征值全为 0. A 可以正交相似到零矩阵, 故 $A=0=I0I$. ▶

2. $A=a_1x_1x_1^T+a_2x_2x_2^T$, 其中 x_1,x_2 是 $\mathbb{R}^2$ 的一组标准正交基, a_1,a_2 为实数.

◀ $A=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1 & \\ & a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}^T$. ▶

3. $A=\begin{bmatrix}0 & M\\ M & 0\end{bmatrix}$, 其中 M 是 n 阶对称矩阵, 有谱分解 $M=Q\Lambda Q^T$.

◀ $A=(\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I\\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M & \\ & -M\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I\\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I\end{bmatrix}^T$

$=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I\\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q & \\ & Q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Lambda & \\ & -\Lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q & \\ & Q\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I\\ \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{1}{\sqrt{2}}I\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}Q & \frac{1}{\sqrt{2}}Q\\ \frac{1}{\sqrt{2}}Q & -\frac{1}{\sqrt{2}}Q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Lambda & \\ & -\Lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}Q & \frac{1}{\sqrt{2}}Q\\ \frac{1}{\sqrt{2}}Q & -\frac{1}{\sqrt{2}}Q\end{bmatrix}^T$. ▶

练习 6.1.6. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. 计算满足下列条件的 b 的取值范围.

1. A 不可逆.

◀ $det(A) = 0$. $b = 0$. ▶

2. A 可以正交对角化.

◀ A 为对称阵. $b = 1$. ▶

3. A 不可对角化.

◀ A 有某个非半单的二重特征值. A 的特征多项式 $\lambda^2 - 2\lambda - b$ 有重根给出 $b = -1$. 由 $A - I \neq 0$ 知特征值 1 非半单. (注: 前面给出的是在 $\mathbb{C}$ 上不可对角化的条件. 若考虑的基域是 $\mathbb{R}$, 则 A 不可对角化当且仅当 A 有某个非半单的二重特征值或有复特征值. 前者等价于特征多项式有重根或 $b = -1$, 后者等价于特征多项式的判别式小于 0 或 $\lambda < -1$.) ▶

练习 6.1.9. 证明, 两个实对称矩阵正交相似, 当且仅当它们具有相同的特征多项式.

◀ 正交相似标准形说明两个实对称阵正交相似当且仅当其有不计排列顺序时相同的特征值, 而特征多项式确定了矩阵的所有特征值. ▶

练习 6.1.10. 设实对称矩阵 A 满足 $A^5 = I_n$, 证明 $A = I_n$.

◀ A 的任意特征值 λ 为满足 $\lambda^5 = 1$ 的实数, 故 $\lambda = 1$. A 正交相似于 I_n, 故 $A = I_n$. ▶

6.1.14

1. 令$\boldsymbol{x}=[x \quad y]^T$,则$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$,特征值分别为2和4

因此原式最大值为4，最小值为2

2. 令$\boldsymbol{x}=[x \quad y]^T$,则$A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 4 & 16\end{bmatrix}$,特征值分别为0和17

因此原式最大值为17，最小值为0

练习 6.2.1. 判断下列矩阵是否正定.

4. $\begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 101 \end{bmatrix}$.

◀ 是. 全部顺序主子式为正. ▶

5. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

◀ 否. 第 2 个顺序主子式非正. ▶

6. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

◀ 否. 第 2 个顺序主子式非正. ▶

(注: 计算顺序主子式即可! 这比特征值的计算量小.)

练习 6.2.2. 考虑实矩阵 $S = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{bmatrix}$. 求使得下列条件成立的 b 的取值范围.

1. S 不正定但是半正定.

◀ $1 - b^2 = 0$, $b = \pm 1$. (注意若某个对称阵的前 $n-1$ 个顺序主子式均为正, 则其正定, 半正定, 不定当且仅当其行列式即第 n 个顺序主子式为正, 为 0, 为负.) ▶

2. S 不定.

◀ $1 - b^2 < 0$, $b > 1$或$b < -1$. ▶

1. S 半负定.

◀ 第 1 个顺序主子式为正, 这不可能. ▶

练习 6.2.3. 下列实矩阵中未知元素满足什么条件时,矩阵正定? 半正定?

1. $\begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 9 \end{bmatrix}$.

◀ $-3 < b < 3$; $b = \pm 3$. ▶

3. $\begin{bmatrix} c & b \\ b & c \end{bmatrix}$.

◀ $c > 0, |c| > |b|$; $c \pm 0, |c| \geq |b|$. (使用练习 6.2.14 的结论: 实对称矩阵半正定,当且仅当它的所有主子式都非负. 下面同理.) ▶

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & d & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

◀ 我们等价地考虑 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & d \end{bmatrix}$. 第 1 个顺序主子式为正, 第 2 个顺序主子式非正, 故不定. ▶

7. $\begin{bmatrix} t & 3 & 0 \\ 3 & t & 4 \\ 0 & 4 & t \end{bmatrix}$.

◀ $t > 5$; $t \geq 5$. ▶

练习 6.2.4. 设 A 对称正定, B 是实矩阵.

1. 证明, 对任意整数 k, A^k 也正定.

◀ 注意 A^{k-2} 被 A 相合到 A^k. 故我们只需考虑 $A^0=I$ 和 $A^1=A$ 正定.▶

2. 若存在正整数 r, 使得 $A^rB=BA^r$, 证明 $AB=BA$.

◀ 设 A 正交相似到 $diag(\lambda_1 I,\cdots,\lambda_k I)$, B 被相同矩阵正交相似到 B'. 我们要说明 $A'^rB'=B'A'^r$ 蕴涵 $A'B'=B'A'$. 将 B 分块为 $[B_{ij}]$ 易见对 $i\neq j$ 有 $B_{ij}=0$, 故 $A'B'=B'A'$.▶

(2) 设A $QAQ^T=\Lambda$, $QBQ^T=B'$ 式中: $\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 I & & & \\ & \lambda_2 I & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n I\end{bmatrix}$ $B'=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n}\\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n}\\ \vdots & & & \\ B_{n1} & \cdots & & B_{nn}\end{bmatrix}$

$A^rB=BA^r$

$\Leftrightarrow QAQ^TQAQ^T\cdots QBQ^T=QBQ^TQAQ^T\cdots QAQ^T$ 而 $\Lambda^rB'=B'\Lambda^r$ 可得 $B'=\begin{bmatrix}B_{11} & & \\ & B_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & B_{nn}\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \Lambda^rB'=B'\cancel{A^r}\Lambda^r$ 那么 $\Lambda B'=B'\Lambda \Leftrightarrow Q^T\Lambda QQ^TB'Q=Q^TB'QQ^T\Lambda Q \Leftrightarrow AB=BA$.

练习 6.2.5. 对 n 阶实对称矩阵 A, 证明, 当实数 t 充分大时, $tI_n + A$ 正定.

◀ 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 则 $tI_n + A$ 的特征值是 $t + \lambda_1, \cdots, t + \lambda_n$. 故 $t > max_{1\le i\le n}(-\lambda_i)$ 时 $tI_n + A$ 的全部特征值为正, 从而其正定. ▶

练习 6.2.6. 对 n 阶实对称矩阵 A, 证明, 存在正实数 c, 使得对任意 n 维列向量 x, 都有 $|x^t Ax| \le cx^T x$.

◀ 将 A 正交相似到对角阵可以看出, 若 A 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 选取 $c = max_{1\le i\le n}|\lambda_i|$ 即可. ▶

练习 6.2.10. 设 A, B 是实对称矩阵, 如果 $A - B$ 正定, 则记作 $A \succ B$. 求证:

1. $A \succ B$, $B \succ C$ 可以推出 $A \succ C$.

◀ 这是由于正定矩阵的和正定. ▶

2. $A \succ B$ 和 $B \succ A$ 不可能同时成立.

◀ 这是由于 $A - B$ 和 $B - A$ 不可能同时正定. ▶

3. 对任意实对称矩阵 A, 都存在实数 k_1, k_2 使得 $k_1 I_n \succ A \succ k_2 I_n$.

◀ 将 A 正交相似到单位阵知可取 k_1 大于 A 的最大特征值, k_2 小于 A 的最小特征值. ▶

练习 6.2.11. 举例说明, 实对称矩阵 A 的所有顺序主子式都非负, 但 A 并不半正定.

◀ $A = diag(0, -1)$. ▶

练习 6.2.15. 证明,若实对称矩阵对角占优,且对角元素全为正数,则该矩阵正定.

◀ 设 A 为实对称对角占优矩阵，且对角元均大于 0. 设 λ 为其任一特征值.

若 $\lambda \leqslant 0$, 则 $\lambda I - A$ 仍为对角占优矩阵，则 $|\lambda I - A| \neq 0$, 与 λ 是特征值矛盾.

从而有 $\lambda > 0$, 所以 A 正定. ▶