期中样题二

1. (10 分) 找出方程组 $Ax=x$ 的所有解，其中 $A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -6\\ -2 & 1 & -4\\ 2 & 1 & 6\end{bmatrix}$.

2. (15 分) 设 $T=\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}-3 & 20 & 12\\ 2 & -9 & -6\\ -4 & 20 & 13\end{bmatrix}$.

   (1) (5 分) 证明 T 可逆，并求 T^{-1}.

   (2) (5 分) 计算 $T^{-1}AT$.

   (3) (5 分) 计算 A^5.

3. (15 分) 考虑线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \qquad\quad +x_3=1,\\ 2x_1+3x_2+(\lambda+2)x_3=3,\\ x_1+\lambda x_2 \qquad\quad -2x_3=0. \end{cases}$$

   λ 取何值时，该方程组无解？λ 取何值时，该方程组有唯一解？λ 取何值时，该方程组有无穷多解？并证明你的论断.

4. (10 分) 设 $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34}\end{bmatrix}$，已知 $Ax=b$ 的三个特解为 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}$，讨论 A 的秩并写出 $Ax=b$ 的解集.

5. (21 分) 考察 4×6 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -200 & -180\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 8 & 0 & 1 & 11\end{bmatrix}$.

   (1) (3 分) 求 A 的行简化阶梯形.

   (2) (3 分) 求 A 的列空间的维数，并取 A 的一些列组成它的一组基.

   (3) (3 分) 求 A 的行空间的维数，并取 A 的一些行组成它的一组基.

(4) (5 分) 求 A 的零空间的维数，和它的一组基.

(5) (4 分) 在 A 的第二列和第三列之间加入一列零得到矩阵 B. 写出 B 的行空间的维数和一组基，以及 B 的零空间的维数和一组基.

(6) (3 分) 在 A 的第二行和第三行之间加入一行零得到矩阵 C. 写出 C 的列空间的维数和一组基，以及 C 的零空间的维数和一组基.

6. (9 分) 判断下列陈述正误 (每个 1 分)，并简要说明理由 (每个 2 分).

(1) 可以找到一个 7×7 实矩阵，它的零空间和列空间相同.

(2) 存在一个 2×5 实矩阵 A 使得 $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}5\\4\\3\\2\\1\end{bmatrix}$ 构成零空间的一组基.

(3) 设 A 为 3×3 实方阵，如果 A 与 A^T 具有相同的零空间和相同的列空间，那么 A 一定是对称矩阵.

7. (10 分) 令 A_1, A_2 为 2 阶方阵，且

$$A_i\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4b_i+a_i\\4b_i-a_i\end{bmatrix},\qquad A_i\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2b_i-a_i\\2b_i+a_i\end{bmatrix},\qquad i=1,2,$$

其中 a_i, b_i 为固定实数. 求证:

(1) $A_1A_2=A_2A_1$;

(2) $A_i^2-(a_i+b_i)A_i+a_ib_iI_2=O,\ i=1,2.$

8. (10 分) 令 $X_\epsilon=\begin{bmatrix}A & \epsilon B_1\\ B_2 & C\end{bmatrix}$, 其中 $\epsilon\in\mathbb{R}$, 而 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\\0&1&4\end{bmatrix}$, C 为 n 阶对角占优方阵，B_1 为任意给定的 $3\times n$ 矩阵，B_2 为任意给定的 $n\times 3$ 矩阵.

(1) (5 分) 求 A 的 LU 分解.

(2) (5 分) 先说明 A 可逆，再试找一个常数 $\epsilon_0>0$ (依赖于 C, B_1, B_2)，使得对任意满足条件 $|\epsilon|\le\epsilon_0$ 的 ϵ, X_ϵ 均可逆.

提示：若 $C=[c_{ij}]_{n\times n}$ 满足 $\forall i\in\{1,\cdots,n\}, |c_{ii}|>\sum_{j\neq i}|c_{ij}|$, 则称 C 为对角占优方阵，这类矩阵可逆.