线性代数 第30讲

12月22日

综合复习与样题解答

考场信息（按学号）

六教-6A211：学号 ≤ 2021011110

六教-6A213：2021011131 ≤ 学号 ≤ 2021012304

六教-6A214：2021012409 ≤ 学号

考试时间：1月2日 9：00 — 11：00

第三章　　内积和正交性

1. 内积，向量的长度与向量间的距离
2. Cauchy-Schwarz不等式，向量的夹角
3. 正交向量组，标准正交基，正交矩阵
4. Gram-Schmidt 正交化，QR分解
5. 子空间的正交补空间
6. 正交投影，正交投影矩阵
7. 最小二乘

第四章　　行列式

1. 行列式函数
2. 行列式的消去与展开（递推式）
3. 代数余子式，伴随矩阵
4. Cramer法则

第五章 特征值与特征向量

- （矩阵A的）特征值、特征向量、特征子空间和特征多项式
- （特征值的）代数重数与几何重数，几何重数小于等于代数重数
- 相似矩阵，相似矩阵的特征值、特征值对应的几何重数均相同
- 属于不同特征值的特征向量线性无关，相似对角化，谱分解
- 相似对角化的充分必要条件
- 任何方阵都可以相似变换为上三角矩阵（约当标准型）
- 特征多项式系数与矩阵元素的关系，迹与行列式
- Hamilton-Cayley定理

第六章 实对称矩阵

- 实对阵矩阵的优良性质
- 正定矩阵，顺序主子式
- 合同变换，合同标准型，惯性指数
- 奇异值分解
- 广义逆
- 矩阵的谱范数

第七章 线性空间和线性映射

- 一般线性空间，数域F上的线性空间V
- 子空间，子空间的直和
- 线性相关、线性无关、极大线性无关不分组
- 线性空间的基和维数，维数公式
- 线性映射，同构映射，向量的坐标
- 线性映射的表示矩阵，线性映射空间与矩阵空间同构
- 不同基下的坐标，过渡矩阵
- 不同基下的线性映射的表示矩阵
- 线性变换的表示矩阵，特征值与特征向量

题1 (8分). 判断以下矩阵是否可以相似对角化，并简单说明理由。

$$(a)\begin{bmatrix}3&4\\0&5\end{bmatrix}\qquad(b)\begin{bmatrix}100&200\\0&100\end{bmatrix}\qquad(c)\begin{bmatrix}23&69&188\\69&45&202\\188&202&68\end{bmatrix}\qquad(d)\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\4&8&12\end{bmatrix}$$

解1. (a) 可对角化，因为有两个互异特征值。

(b) 不可对角化，因为特征值唯一，但是*100*的几何重数是*1*，小于它的代数重数*2*.

(c) 可对角化，因为实对称阵都可对角化。

(d) 可对角化。这是一个秩为*1*的矩阵，故*0*的几何重数是*2*，迹是*17*，故第三个特征值是*17*，*17*的几何和代数重数都为*1*，*0*的几何和代数重数都为*2*.

题2 (8分). 判断以下实对称阵是否正定，并简单说明理由。

五、六章

$$(a)\begin{bmatrix}1&2\\2&6\end{bmatrix}\qquad(b)\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{bmatrix}$$

$$(c)\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&-2&0\\3&3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&-2&3\\0&0&3\end{bmatrix}\qquad(d)\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&0&0\\0&-6&0\\0&0&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}$$

1. 是，顺序主子式； 2. 不是，不满秩； 3. 是，验证x^TAx； 4. 不是，惯性指数

题3 (10分). 设$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&3&0\\4&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}$，分别找出$N(A)$, $N(A^T)$, $C(A)$, $C(A^T)$的一组基。

第二章

解3. *(1)* $(1,0,1,1,1)$, $(0,1,1,1,1)$, $(0,0,0,1,1)$ 是$C(A^T)$ 的一组基。

(2) $N(A)$ 的基是$(-1,-1,1,0,0)$, $(0,0,0,-1,1)$.

(3) $\mathbb{R}^3$ 的任意一组基均为$C(A)$ 的基。

(4) 基是空集。$N(A^T)$

题4 (5分). 设$P=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\2&3\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\2&3\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&3\end{bmatrix}$. 求$P$ 的特征多项式，并说明理由。

五、六章

解4. 特征多项式是$\lambda(\lambda-1)^2$。

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\2&3\end{bmatrix}=U\begin{bmatrix}\sigma_1&0\\0&\sigma_2\\0&0\end{bmatrix}V^T$$

$$A\left(A^TA\right)^{-1}A^T=U\begin{bmatrix}\sigma_1&0\\0&\sigma_2\\0&0\end{bmatrix}V^TV\begin{bmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2}&0\\0&\frac{1}{\sigma_2^2}\end{bmatrix}V^TV\begin{bmatrix}\sigma_1&&0\\&\sigma_2&0\end{bmatrix}U^T=U\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}U^T$$

题5 (16分). 设

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

第三章

第一个矩阵记为Q，第二个矩阵记为R.

(1) (2分) 验证$Q^TQ=I$.

(2) (6分) 求到$C(A)$ 的投影矩阵。

(3) (8分) 设$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}4\\0\\0\\0\end{bmatrix}$. 求$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的最小二乘解。 求 $\hat{x}=\min\limits_{x\in R^n}\|b-Ax\|$

解5. *(1)* 略。

(2) 到$C(A)$ 的投影矩阵是

$$P_A=QQ^T=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

$$b=P_Ab+\left(I-P_A\right)b$$

$$A\hat{x}=P_Ab,\quad 则\ \hat{x}=\min_{x\in R^n}\|b-Ax\|$$

(3) 最小二乘解是$\hat{\boldsymbol{x}}=(2\sqrt{2}+4,-2,2)$.

$$A\hat{x}=P_Ab\Rightarrow QR\hat{x}=QQ^Tb\Rightarrow R\hat{x}=Q^Tb=\begin{bmatrix}2\sqrt{2}\\0\\2\end{bmatrix}$$

题6 (6分). 已知：整数1653, 2581, 3451, 4582可以被29整除. 证明下面的四阶行列式值被29整除.

第四章

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 8 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{1000}\cdot\begin{vmatrix} 1000 & 600 & 50 & 3 \\ 2000 & 500 & 80 & 1 \\ 3000 & 400 & 50 & 1 \\ 4000 & 500 & 80 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{10^6}\cdot\begin{vmatrix} 1653 & 600 & 50 & 3 \\ 2581 & 500 & 80 & 1 \\ 3451 & 400 & 50 & 1 \\ 4582 & 500 & 80 & 2 \end{vmatrix} = \frac{29}{10^6}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & 600 & 50 & 3 \\ a_2 & 500 & 80 & 1 \\ a_3 & 400 & 50 & 1 \\ a_4 & 500 & 80 & 2 \end{vmatrix}$$

题7 (6分). 解关于x的方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0.$$

解7. $x = 1, 2,$ 或-2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & 3 & -9 \\ 0 & x-1 & x^2-1 & x^3-1 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & -3 \\ x-1 & x^2-1 & x^3-1 \end{vmatrix}$$

$$3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 4 \\ x-1 & x^2-1 & x^3-1 \end{vmatrix} = 12\cdot\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x^2-1 & x^3-1 \end{vmatrix} + (x-1)\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = 12(x-1)\left(x^2+x+1-x-1-4\right)$$

题8 (6分). 定义$M_2(\mathbb{R})$上线性变换$T: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ 满足

$$T(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求T在基$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$下的矩阵。

解8. T 在基$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵是$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第六章

题9 (20分). 设$A=\begin{bmatrix}2&0\\1&1\\0&2\end{bmatrix}$.

(a) (10分) 求A的奇异值分解$A=U\Sigma V^T$，其中U 是3阶正交阵，V 是2阶正交阵。

(b) (2分) 应用(a)写出A的四个基本子空间的一组标准正交基。

(c) (8分) 设$M=\begin{bmatrix}0&A\\A^T&0\end{bmatrix}$. 若$A\boldsymbol{v}=\sigma\boldsymbol{u}$, 其中$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$是奇异向量(singular vector), σ是奇异值(singular value), 证明$\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{v}\end{bmatrix}$是$M$的特征向量，并由此应用奇异向量给出5阶正交阵$Q$，使得$Q^TMQ$是对角阵.

解9. (a) $U=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&-\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\end{bmatrix}$, $\Sigma=\begin{bmatrix}\sqrt6&0\\0&2\\0&0\end{bmatrix}$, $V=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$

1. $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_r$ 是 $\mathcal{R}(A)$ 的一组标准正交基；
2. $\boldsymbol{u}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{u}_m$ 是 $\mathcal{N}(A^{\mathrm{T}})$ 的一组标准正交基；
3. $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r$ 是 $\mathcal{R}(A^{\mathrm{T}})$ 的一组标准正交基；
4. $\boldsymbol{v}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{u}_n$ 是 $\mathcal{N}(A)$ 的一组标准正交基.

(b) $A=U_r\Sigma_rV_r^T$

(c) $Au_1=\sigma_1v_1$, $A^Tv_1=\sigma_1u_1$; $Au_2=\sigma_2v_2$, $A^Tv_2=\sigma_2u_2$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{0}&A\\A^T&\mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_k\\v_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^Tv_k\\Au_k\end{bmatrix}=\sigma\begin{bmatrix}u_k\\v_k\end{bmatrix},\quad k=1,2$$

$\begin{bmatrix}u_k\\v_k\end{bmatrix},\begin{bmatrix}u_k\\-v_k\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-u_k\\v_k\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-u_k\\-v_k\end{bmatrix}$均满足，$\begin{bmatrix}u_1\\v_1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}u_1\\-v_1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}u_2\\v_2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}u_2\\-v_2\end{bmatrix}$为线性无关的特征向量；

0 特征值对应的特征向量为$\begin{bmatrix}u_3\\\mathbf{0}\end{bmatrix}$

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac12&\frac12&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}&0&0&-\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac12&-\frac12&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac12&-\frac12&\frac12&-\frac12&0\\\frac12&-\frac12&-\frac12&\frac12&0\end{bmatrix}.$$

题10 (10分). 在以下两题中选且仅选一道题完成。

(1) $C: 3x_1^2+4x_1x_2+6x_2^2=1$ 是实平面上哪种二次曲线，椭圆、双曲还是抛物线？若C 是椭圆，请算出它的长、短轴长，以及长、短轴所在的直线方程；若C 是双曲线，请算出它的虚、实轴长以及虚、实轴所在的直线方阵，以及两条渐近线方程；若C 是抛物线，请算出它的顶点以及对称轴方程。

(2) 令 $A=\begin{bmatrix} \frac12 & 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & \frac13 & 0 & \frac23 \\ \frac12 & 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & \frac23 & 0 & \frac13 \end{bmatrix}$. 求4阶正交阵$Q$ 和对角阵Λ 使得$Q^TAQ=\Lambda$.

第六章

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & & 1/2 & \\ & 1/3 & & 2/3 \\ 1/2 & & 1/2 & \\ & 2/3 & & 1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ & & 1/3 & 2/3 \\ & & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_1^T & \\ & Q_2^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & -\frac{1}{3} \end{bmatrix},\quad Q_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, Q_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix}, \Lambda=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & -\frac13 \end{bmatrix}$$

题11 (5分). 设$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, A 的算子范数(operator norm) 是

$$\|A\| = \max_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n\\ \|\boldsymbol{v}\|=1}} \|A\boldsymbol{v}\| = \max_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n\\ \boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}}} \frac{\|A\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|}.$$

试证:

$$\|A\| = \max_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^m,\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n\\ \|\boldsymbol{u}\|=\|\boldsymbol{v}\|=1}} \boldsymbol{u}^T A\boldsymbol{v}.$$

解11. 先证对任意的$\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m$, 有

$$\max_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^m\\ \|\boldsymbol{u}\|=1}} \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w} = \|\boldsymbol{w}\|.$$

当$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ 时, 等式显然成立。当$\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$ 时, 一方面由*Cauchy-Schwarz*不等式知

$$\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w} \leq |\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w}| \leq \|\boldsymbol{u}\|\ \|\boldsymbol{w}\| = \|\boldsymbol{w}\|.$$

另一方面, 若令$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|}$, 则$\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{w}^T}{\|\boldsymbol{w}\|}\boldsymbol{w} = \|\boldsymbol{w}\|$. 故等式得证。

回到原命题有

$$\max_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^m,\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n\\ \|\boldsymbol{u}\|=\|\boldsymbol{v}\|=1}} \boldsymbol{u}^T A\boldsymbol{v} = \max_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n\\ \|\boldsymbol{v}\|=1}} \|A\boldsymbol{v}\| = \|A\|.$$

第二个等号用的是$\|A\|$ 的定义。

题11 (5分). 设$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, A 的算子范数(operator norm) 是

$$\|A\| = \max_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n \\ \|\boldsymbol{v}\|=1}} \|A\boldsymbol{v}\| = \max_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|A\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|}.$$

试证:

$$\|A\| = \max_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^m, \boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n \\ \|\boldsymbol{u}\|=\|\boldsymbol{v}\|=1}} \boldsymbol{u}^T A\boldsymbol{v}.$$

$$Au_k = \sigma v_k, \quad A^T v_k = \sigma u_k;$$

对任意单位向量$v \in R^n, \|v\|=1, \quad v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n, \quad \|c\| = 1$

$$Av = \left(\sum_{k=1}^{r} \sigma_k u_k v_k^T\right)(c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n) = \sum_{k=1}^{r} c_k \sigma_k u_k$$

对任意单位向量$u \in R^m, \|u\|=1, \quad u = d_1 u_1 + \cdots + d_m u_m, \quad \|d\| = 1$

$$u^T Av = (d_1 u_1 + \cdots + d_m u_m)^T \sum_{k=1}^{r} c_k \sigma_k u_k = \sum_{k=1}^{r} c_k d_k \sigma_k$$

$$u^T Av = \sum_{k=1}^{r} c_k d_k \sigma_k \le \sigma_1 \sum_{k=1}^{r} |c_k d_k| \le \sigma_1 \|c\| \cdot \|d\| = \sigma_1, \quad u_1^T A v_1 = \sigma_1$$

$$\|A\| = \max_{v\in R^n \text{且} \|v\|=1} \|Av\| = \max_{v\in R^n \text{且} \|v\|=1} \left(v^T A^T A v\right)^{\frac{1}{2}} = \sigma_1$$

第三章　　内积和正交性

1. 内积，向量的长度与向量间的距离
2. Cauchy-Schwarz不等式，向量的夹角
3. 正交向量组，标准正交基，正交矩阵
4. Gram-Schmidt 正交化，QR分解
5. 子空间的正交补空间
6. 正交投影，正交投影矩阵

QR分解

设 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，Gram-Schmidt 正交化的计算过程分为两步，

第一步正交化，得到一组正交基

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{q}}_1 &= \boldsymbol{a}_1,\\
\tilde{\boldsymbol{q}}_2 &= \boldsymbol{a}_2 - \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2}{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_1}\tilde{\boldsymbol{q}}_1,\\
\tilde{\boldsymbol{q}}_3 &= \boldsymbol{a}_3 - \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_3}{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_1}\tilde{\boldsymbol{q}}_1 - \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_3}{\tilde{\boldsymbol{q}}_2^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_2}\tilde{\boldsymbol{q}}_2,\\
&\vdots\\
\tilde{\boldsymbol{q}}_n &= \boldsymbol{a}_n - \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_n}{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_1}\tilde{\boldsymbol{q}}_1 - \cdots - \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_{n-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_n}{\tilde{\boldsymbol{q}}_{n-1}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_{n-1}}\tilde{\boldsymbol{q}}_{n-1}.
\end{aligned}$$

设 $A = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}, \widetilde{Q} = \begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{q}}_1 & \cdots & \tilde{\boldsymbol{q}}_n\end{bmatrix}$

$$A = \widetilde{Q}\widetilde{R}, \quad \widetilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2}{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_1} & \cdots & \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_n}{\tilde{\boldsymbol{q}}_1^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_1} \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_{n-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_n}{\tilde{\boldsymbol{q}}_{n-1}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{q}}_{n-1}} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

第二步再单位化每个向量，得到标准正交基：$\boldsymbol{q}_i = \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_i}{\|\tilde{\boldsymbol{q}}_i\|}$.

$$A = Q\,\mathrm{diag}(\|\tilde{\boldsymbol{q}}_i\|)\widetilde{R} = QR$$

定理 3.2.7 (可逆矩阵的 QR 分解) 设 A 是 n 阶可逆矩阵，则存在唯一的分解 $A = QR$，其中 Q 是正交矩阵，R 是对角元都是正数的上三角矩阵.

正交投影

定义3.3.10 给定 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 $\mathscr{M}$，对任意 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$

都有唯一的分解 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$，其中 $\boldsymbol{a}_1 \in \mathcal{M}, \boldsymbol{a}_2 \in \mathcal{M}^{\perp}$.

线性变换$\boldsymbol{P}_{\mathscr{M}}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}_1$称为子空间 $\mathscr{M}$ 上的**正交投影（变换）**，

而 $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{P}_{\mathscr{M}}(\boldsymbol{a})$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\mathscr{M}$ 上的**正交投影.**

特别地，$\boldsymbol{a} \in \mathcal{M}$ 当且仅当 $\boldsymbol{P}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$，而 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{M}^{\perp}$ 当且仅当 $\boldsymbol{P}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$.

线性变换 $\boldsymbol{P}_{\mathcal{M}^{\perp}}: \boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{a}_2$ 是 $\mathcal{M}^{\perp}$ 上的**正交投影（变换）**，

而 $\boldsymbol{a}_2$ 是 $\boldsymbol{a}$ 在 $\mathcal{M}^{\perp}$ 上的正交投影.

注意，$\boldsymbol{a}_1 \perp \boldsymbol{a}_2$，因此一个向量在一个子空间上的正交投影，

与其在该子空间的正交补上的投影总正交，这就是这种变换称为正交投影的原因.

显然 $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{P}_{\mathcal{M}} + \boldsymbol{P}_{\mathcal{M}^{\perp}}$.

命题 3.3.12 给定 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 $\mathcal{M}$ 和向量 $\boldsymbol{a}$，而 $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{P}_{\mathcal{M}}(\boldsymbol{a})$ 为 $\boldsymbol{a}$ 在 $\mathcal{M}$ 上的正交投影，则 $\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_1\| = \min_{\boldsymbol{x} \in \mathcal{M}} \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}\|$.

因此正交投影$\boldsymbol{P}_{\mathcal{M}}$ 的表示矩阵就是 $Q_rQ_r^{\mathrm{T}}$，记为$P_{\mathcal{M}}$

下面讨论 $\mathcal{M} = \mathcal{R}(A)$ 的情形，此时 $\mathcal{R}(A)^{\perp} = \mathcal{N}(A^{\mathrm{T}})$.

定义3.3.13 给定矩阵 A，其列空间上的正交投影的表示矩阵 $P_{\mathcal{R}(A)}$，称为关于 A 的正交投影矩阵，简记为 P_A.

当 A 是可逆方阵时，$\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^n$，此时正交投影就是恒同变换，因此 $P_A = I_n$.

如果 P 是关于 A 的正交投影矩阵，则 $P = P_{\mathcal{R}(A)}$，

例 3.3.1 考虑方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$，

例 3.3.15 继续讨论例 3.3.1，取 $\mathcal{R}(A)$ 的一组标准正交基并列排成的矩阵是

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.\ \text{正交投影矩阵}\ P_A = QQ^{\mathrm{T}} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{13}{15} & -\frac{1}{15} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{15} & \frac{29}{30} \end{bmatrix}.$$

向量 $\boldsymbol{b}$ 的正交投影分解为 $\boldsymbol{b} = P_A\boldsymbol{b} + (I_3 - P_A)\boldsymbol{b}$，

第四章　　行列式

1. 行列式函数
2. 行列式的消去与展开（递推式）
3. 代数余子式，伴随矩阵
4. Cramer法则

定理4.2.6 行列式函数有如下性质：

1. 对初等矩阵E，则 $\det(AE) = \det(A)\det(E)$；
2. 设可逆矩阵 $A = E_1 \cdots E_m$，其中 E_i 为初等矩阵，则 $\det(A) = \det(E_1) \cdots \det(E_m)$；
3. $\det(A) \neq 0$ 当且仅当 A 可逆；
4. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$；
5. $\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A)$.

行列式的（Laplace）展开

例 4.3.1 (三阶行列式) 根据列线性性和行反对称性，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} 1 & a_{32} & a_{33} \\ 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

定义 4.3.2 (代数余子式) 给定 n 阶方阵 A，令 $A\binom{i}{j}$ 表示从 A 划去第 i 行和第 j 列得到的 $n-1$ 阶方阵，则 $M_{ij} = \det\left(A\binom{i}{j}\right)$，称为元素 a_{ij} 的**余子式**；而 $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij} = (-1)^{i+j}\det\left(A\binom{i}{j}\right)$，称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

对矩阵 $A=\left[a_{ij}\right]$，记 $C=\left[C_{ij}\right]_{n\times n}$，即 C 的 (i,j) 元素是 a_{ij} 的代数余子式，矩阵 C^{T} 常称为 A 的**伴随矩阵**.

推论 4.3.7 (逆矩阵公式) 对可逆矩阵 A，$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}C^{\mathrm{T}}$.

证. 命题 4.3.6 说明 $C^{\mathrm{T}}A=\det(A)I_n$. 立得. □

矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=C^T=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$

$$AA^*=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}=|A|I$$

当 $|A|\neq 0$ 时，A 和 A^* 可逆，$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$，$\left(A^*\right)^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A$

考虑线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

$$AX = b \Rightarrow A^* AX = A^* b$$

当 $|A| \neq 0$ 时，

$$AA^* = A^* A = |A| I$$

$$|A| X = A^* b = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 C_{11} + b_2 C_{21} + \cdots + b_n C_{n1} \\ b_1 C_{12} + b_2 C_{22} + \cdots + b_n C_{n2} \\ \vdots \\ b_1 C_{1n} + b_2 C_{2n} + \cdots + b_n C_{nn} \end{bmatrix},$$

Cramer法则

$$b_1 C_{1j} + b_2 C_{2j} + \cdots + b_n C_{nj} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |B_j|, \quad X = \frac{1}{|A|} A^* b = \begin{bmatrix} |B_1| / |A| \\ |B_2| / |A| \\ \vdots \\ |B_n| / |A| \end{bmatrix}$$

推论 4.3.8 (Cramer 法则) 给定方阵 A，线性方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解，当且仅当 $\det(A) \neq 0$，且有唯一解时，唯一解为

$$x_1 = \frac{\det(B_1)}{\det(A)}, \cdots, x_n = \frac{\det(B_n)}{\det(A)},$$

其中 B_j 是把 A 的第 j 列换成 $\boldsymbol{b}$ 得到的矩阵.

第五章 特征值与特征向量

- （矩阵A的）特征值、特征向量和特征多项式
- 特征子空间
- （特征值的）代数重数与几何重数，半单的概念
- 相似矩阵，相似变换，相似标准型
- 相似对角化，谱分解
- 若当标准型，化零多项式

重要结论和运算

- 特征多项式系数与矩阵元素的关系，迹与行列式
- 属于不同特征值的特征向量线性无关
- 矩阵可对角化的充分必要条件
- 特征值、特征向量、相似对角化的计算
- 几何重数小于等于代数重数
- 相似矩阵的特征值、特征值对应的几何重数均相同
- 任何方阵都可以相似变换为上三角矩阵（若当标准型）
- Hamilton-Cayley定理

第六章 实对称矩阵

- 实对阵矩阵的优良性质
- 正定矩阵，顺序主子式
- 合同变换，合同标准型，惯性指数
- 奇异值分解
- 广义逆
- 矩阵的谱范数

实对称矩阵的好的性质

1. 特征值均为实数

2. 属于不同特征值的特征向量互相正交

3. 对 n 阶实对称矩阵 A，存在正交矩阵 Q 和实对角矩阵 Λ，使得 $A = Q\Lambda Q^{\mathsf{T}}$.

定义6.2.1 (正定矩阵) 给定 n 阶实矩阵 A，如果对任意非零向量 $x \in R^n$，都有 $x^T Ax > 0$，则称 A 正定.

命题 6.2.2 对实对称矩阵 A，以下叙述等价：

1. A 正定；
2. A 的特征值都是正数；
3. 存在可逆矩阵 T，使得 $A = TT^{\mathrm{T}}$；
4. A 有 $\mathrm{LDL^T}$ 分解，且 D 的对角元素都是正数；
5. A 的顺序主子式都是正数；
6. A 的顺序主子阵都正定.

合同变换

定义 6.2.6 (合同) 对方阵 A，如果存在可逆矩阵 X 使得 $X^{\mathrm{T}}AX=B$，则称 A 和 B **合同**，或 A 合同于 B.

命题 6.2.7 方阵的合同关系是等价关系.

命题 6.2.8 对实对称矩阵 A，存在可逆矩阵 X，使得 $X^{\mathrm{T}}AX=J=\begin{bmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0 \end{bmatrix}$，

其中 $r=\operatorname{rank}(A), 0\leqslant p\leqslant r$.

命题 6.2.8 中的 J 称为实对称矩阵 A 的**合同标准形**.

定理6.2.9 (Sylvester 惯性定律) 实对称矩阵的合同标准形唯一，且它的合同标准形中正、负、零对角元的个数分别和它的正、负、零特征值的个数相等.

正惯性指数、负惯性指数，三元组(p, $r-p$, $n-r$) 称为 A 的惯性指数或惯量.

正惯性指数、负惯性指数分别等于正特征值、负特征值的个数.

奇异值分解 $A=\begin{bmatrix}U_1 & U_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Sigma_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1^T\\ V_2^T\end{bmatrix}=U_1\Sigma_r V_1^T$

定义 6.3.1 (奇异值) 给定 $m\times n$ 矩阵 A，如果存在非零向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m,\sigma\geqslant 0$，使得 $A\boldsymbol{x}=\sigma\boldsymbol{y},A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\sigma\boldsymbol{x}$，则称 σ 为 A 的一个**奇异值**，$\boldsymbol{x}$ 为 A 的属于 σ 的一个**右奇异向量**，$\boldsymbol{y}$ 为 A 的属于 σ 的一个**左奇异向量**.

A 的右奇异向量是 $A^{\mathrm{T}}A$ 的特征向量；A 的左奇异向量是 AA^{T} 的特征向量，

A 的奇异值是 $A^{\mathrm{T}}A$ 或 AA^{T} 的特征值的算术平方根.

定理 6.3.2 (奇异值分解) 给定 $m\times n$ 矩阵 A，存在 m 阶正交矩阵 U 和 n 阶正交矩阵 V，使得 $A=U\Sigma V^{\mathrm{T}}$，其中

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\Sigma_r & O\\ O & O\end{bmatrix},\quad \Sigma_r=\begin{bmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r\end{bmatrix},\quad \sigma_1\geqslant\cdots\geqslant\sigma_r>0.$$

$A=U_r\Sigma_r V_r^{\mathrm{T}}=\sigma_1\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}+\cdots+\sigma_r\boldsymbol{u}_r\boldsymbol{v}_r^{\mathrm{T}}$，这称为 A 的**简化奇异值分解**.

矩阵的谱范数

定义 6.3.6 (矩阵的谱范数) 对任意矩阵 A，非负数 $\max\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \dfrac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$ 称为矩阵 A 的**谱范数**，记为 $\|A\|$.

命题 6.3.7 矩阵的谱范数满足：

1. $\|A\| \geqslant 0$，且 $\|A\| = 0$ 当且仅当 $A = O$;
2. $\|kA\| = |k|\|A\|$;
3. $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$;
4. $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$;
5. 如果 U, V 正交，则 $\|UAV^{\mathrm{T}}\| = \|A\|$.

命题 6.3.8 对任意矩阵 A，矩阵的谱范数 $\|A\|$ 等于 A 的最大奇异值.

命题 6.3.9 设实矩阵 A 的奇异值为 $\sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n$，相应的右奇异向量为 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$，则

$$\sigma_1 = \max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}, \qquad \sigma_i = \max_{\substack{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x}\perp\mathrm{span}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{i-1})}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}, i = 2, \cdots, n.$$

第七章 线性空间和线性映射

- 一般线性空间，数域F上的线性空间V
- 子空间，子空间的直和
- 线性相关、线性无关、极大线性无关不分组
- 线性空间的基和维数，维数公式
- 线性映射，同构映射，向量的坐标
- 线性映射的表示矩阵，线性映射空间与矩阵空间同构
- 不同基下的坐标，过渡矩阵
- 不同基下的线性映射的表示矩阵
- 线性变换的表示矩阵，特征值与特征向量

定义 7.1.2 (线性空间) 给定非空集合 $\mathcal{V}$ 和数域 $\mathbb{F}$，如果 $\mathcal{V}$ 上定义了**加法**运算 $+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$，$\mathcal{V}$ 的元素和 $\mathbb{F}$ 中的数定义了**数乘**运算 $\cdot : \mathbb{F} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$，且这两种运算满足如下八条运算法则：

1. 加法结合律：对任意 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathcal{V}$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；
2. 加法交换律：对任意 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathcal{V}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；
3. 零元素：存在元素 $\mathbf{0} \in \mathcal{V}$，对任意 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}$，$\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$，其中 $\mathbf{0}$ 称为**零元素**；
4. 负元素：对任意 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}$，存在 $\boldsymbol{b} \in \mathcal{V}$，满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$，称它为 $\boldsymbol{a}$ 的**负元素**，记为 $-\boldsymbol{a}$；
5. 单位数：对任意 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}$，$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；
6. 数乘结合律：对任意 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}, k, l \in \mathbb{F}$，$(kl)\boldsymbol{a}=k(l\boldsymbol{a})$；
7. 数乘对数的分配律：对任意 $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}, k, l \in \mathbb{F}$，$(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$；
8. 数乘对向量的分配律：对任意 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathcal{V}, k \in \mathbb{F}$，$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$；

则称 $\mathcal{V}$ 是 $\mathbb{F}$ 上的**向量空间**或**线性空间**，其中的元素可以称为**向量**，零元素和负元素可以称为零向量和负向量.

减法可以自然地定义：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

$$\boldsymbol{b} = k_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{a}_n$$

线性映射

定义 7.3.1 (线性映射) 给定数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $\mathcal{U},\mathcal{V}$，如果从 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的映射 f 满足

1. 对任意 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\mathcal{U}$，有 $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=f(\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{b})$；
2. 对任意 $\boldsymbol{a}\in\mathcal{U},k\in\mathbb{F}$，有 $f(k\boldsymbol{a})=kf(\boldsymbol{a})$，

则称其为 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的**线性映射**，$\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的线性映射的全体记作 $\mathrm{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{V})$.

对任意线性映射 f，$f(\mathbf{0}_U)=\mathbf{0}_V$. 对任意$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}\in U$，$k$，$l\in F$，有 $f(k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b})=kf(\boldsymbol{a})+lf(\boldsymbol{b})$.

命题 7.3.4 集合 $\mathrm{Hom}(\mathcal{U},\mathcal{V})$ 关于加法和数乘两种运算构成线性空间.

定义 7.3.6 (核、像集) 给定数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $\mathcal{U},\mathcal{V}$，以及 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的线性映射 f. 则集合 $\mathcal{N}(f):=\{\boldsymbol{a}\in\mathcal{U}\mid f(\boldsymbol{a})=\mathbf{0}\}$，称为线性映射 f 的**核**；集合 $\mathcal{R}(f):=\{f(\boldsymbol{a})\mid\boldsymbol{a}\in\mathcal{U}\}$，称为线性映射 f 的**像集**.

线性空间向量在不同基下的坐标变换

可以形式地写成 $(\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n)=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\begin{bmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}=:(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)T,$

其中 T 称为从基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 到基 $\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n$ 的**过渡矩阵**.

1. 基变换公式：$(\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n)=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)T$，其中 T 可逆;
2. 坐标变换公式：若 $\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n)\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{x}$，则 $\boldsymbol{x}=T\boldsymbol{y}$.

命题 7.5.6 给定数域 $\mathbb{F}$ 上线性空间 $\mathcal{U},\mathcal{V}$，和 $\mathcal{U}$ 的两组基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n;\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n$ 与 $\mathcal{V}$ 的两组基 $\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m;\boldsymbol{s}_1,\cdots,\boldsymbol{s}_m$. 记二者的过渡矩阵分别为 T,S，即

$$(\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n)=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)T,\quad (\boldsymbol{s}_1,\cdots,\boldsymbol{s}_m)=(\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m)S.$$

如果 $\mathcal{U}$ 到 $\mathcal{V}$ 的线性映射 f 在基 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n;\boldsymbol{i}_1,\cdots,\boldsymbol{i}_m$ 下的矩阵为 F，则该映射在基 $\boldsymbol{t}_1,\cdots,\boldsymbol{t}_n;\boldsymbol{s}_1,\cdots,\boldsymbol{s}_m$ 下的矩阵为 $S^{-1}FT$.

$$f(e_1,\cdots,e_n)=(i_1,\cdots,i_m)F$$

$$f(t_1,\cdots,t_n)=f((e_1,\cdots,e_n)T)=f(e_1,\cdots,e_n)T=(i_1,\cdots,i_m)FT=(s_1,\cdots,s_m)S^{-1}FT$$

$$f((e_1,\cdots,e_n)T)=f\left((e_1,\cdots,e_n)\begin{bmatrix}t_{11}&\cdots&t_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ t_{n1}&\cdots&t_{nn}\end{bmatrix}\right)=f(t_{11}e_1+\cdots+t_{n1}e_n,\cdots,t_{1n}e_1+\cdots+t_{nn}e_n)$$

$$=(t_{11}f(e_1)+\cdots+t_{n1}f(e_n),\cdots,t_{1n}f(e_1)+\cdots+t_{nn}f(e_n))=(f(e_1),\cdots,f(e_n))\begin{bmatrix}t_{11}&\cdots&t_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ t_{n1}&\cdots&t_{nn}\end{bmatrix}$$

设 f 是 $\mathcal{V}$ 上的线性变换，$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 $\mathcal{V}$ 的一组基，则 $f(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)F$，其中 n 阶方阵 F 称为线性变换 f 在给定基下的（表示）矩阵.

注意：线性映射在基下的矩阵需要在定义域和陪域各取一组基，而线性变换的矩阵在定义域和陪域取的是同一组基.

$$f(t_1,\cdots,t_n)=f((e_1,\cdots,e_n)T)=f(e_1,\cdots,e_n)T=(e_1,\cdots,e_n)FT=(t_1,\cdots,t_n)T^{-1}FT$$