第14讲 正弦稳态分析导论

（正弦激励下动态电路的稳态分析）

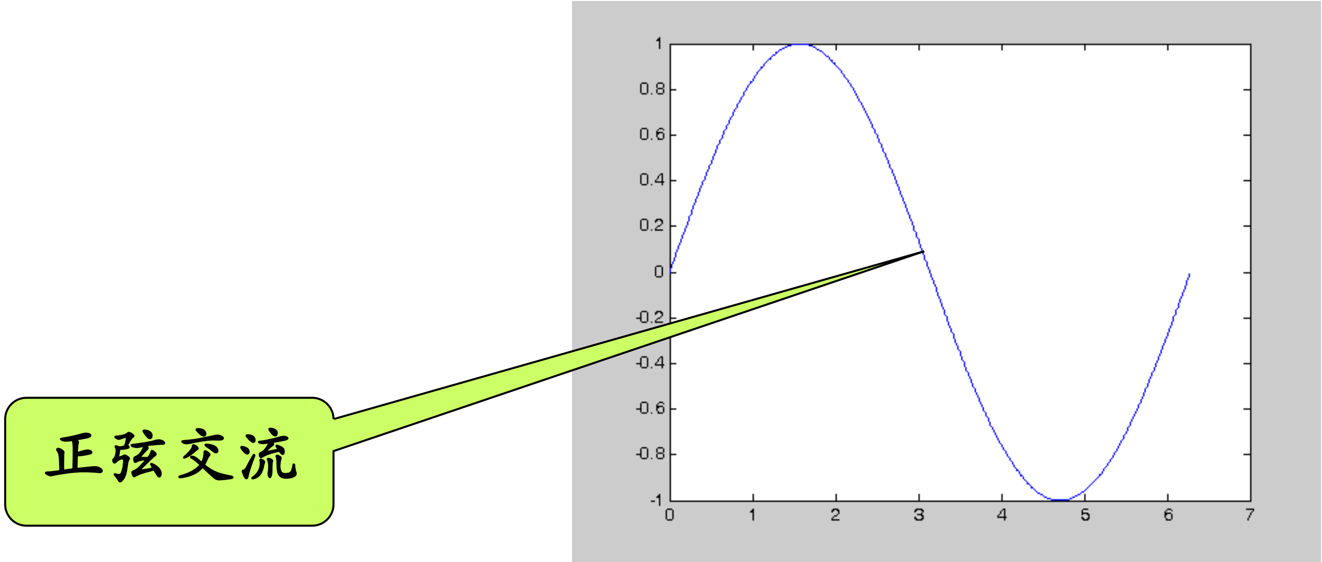
1 电力系统简介

2 正弦量的基本概念

3 正弦稳态分析的关键 → 相量

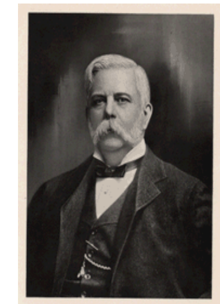
重点

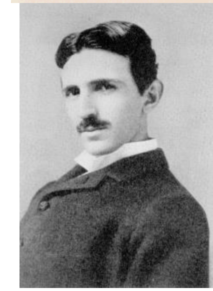
1 电力系统（Power System）简介

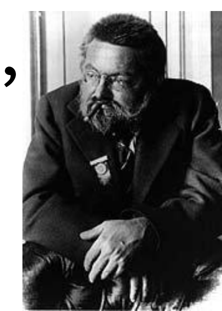


- AC系统和DC系统谁先诞生?
- 为什么用AC系统?
- 目前的AC系统是怎样的?

AC系统和DC系统谁先诞生(电流大战)?





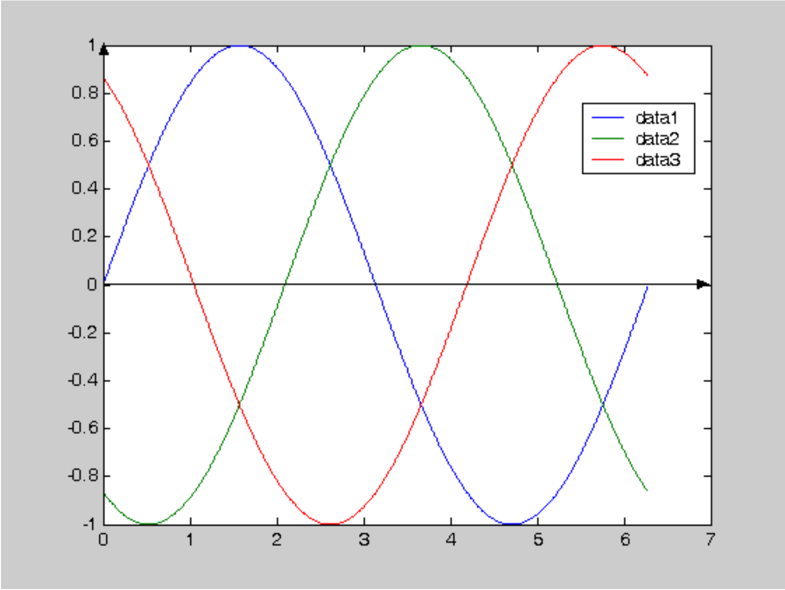


- 爱迪生发明了白炽灯和直流发电机，该发明成为1881年巴黎电气博览会的奇迹之一。1882年爱迪生在欧洲和美国建设了若干直流中心发电站。
- 西屋于1885年获得了特斯拉多相交流系统专利的独家使用权，并且说服特斯拉加入了西屋电气公司。
- 俄国人多里沃—多勃列沃列斯基于1891年在法兰克福举行的国际电工技术展览会上建造了长度为175公里的交流输电系统。
- Steinmetz于1895年获得了专利“交流配电系统”，解决了交流系统的分析问题。
- 1895年西屋获得了在尼亚加拉瀑布安装交流发电机的合同，该项目于1896年向32公里外的布法罗市供电。

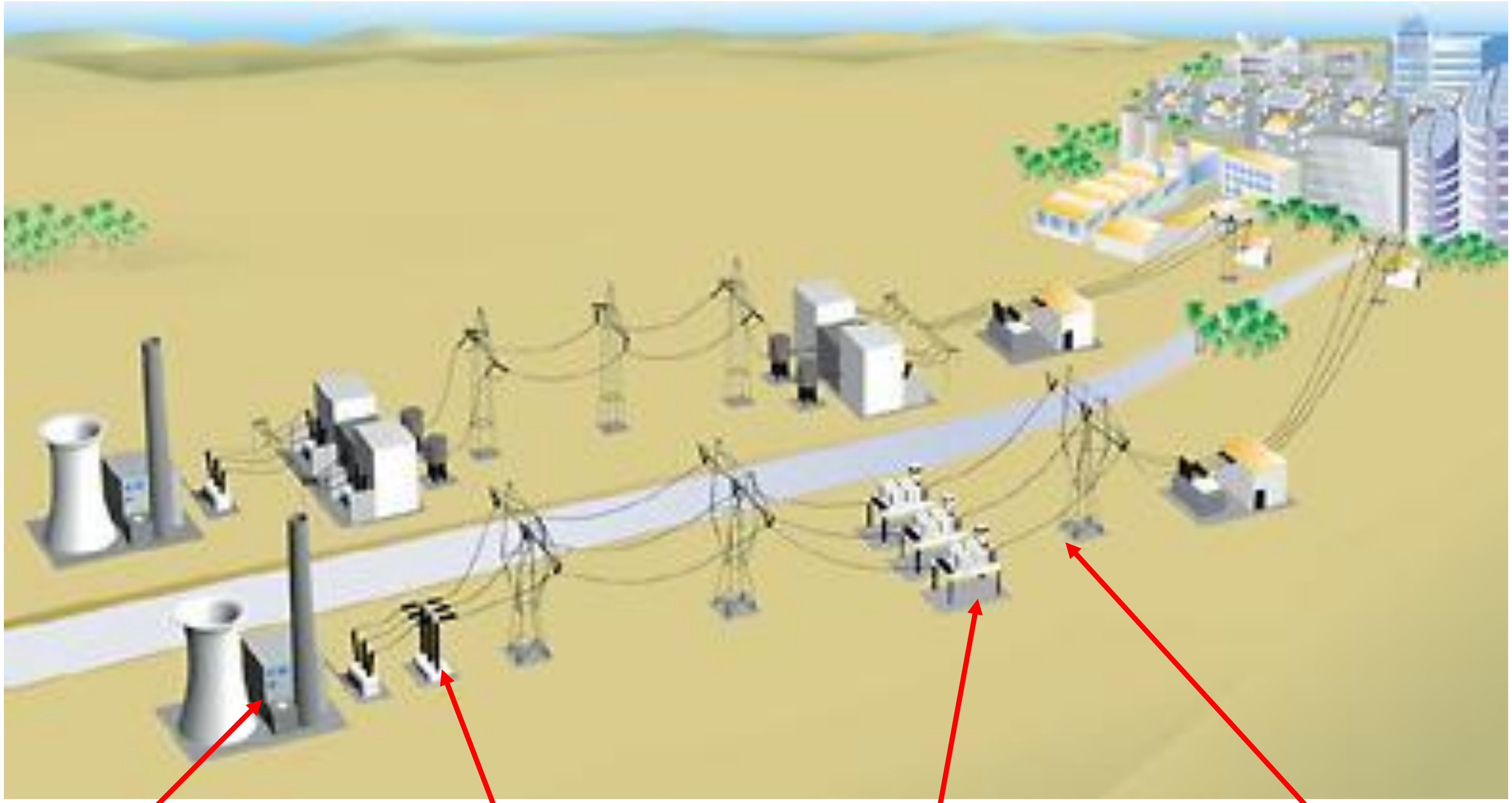
- 为什么选择AC?
  - 发电机
  - 变压器

目前采用哪种类型的交流?

- 电压
  - **1000kV-500 kV-220 kV-110 kV**
  - **35 kV-10 kV-380 V-220 V**
- 三相正弦交流
  - 效率
  - 瞬时功率



电力系统



电厂(发电机)
Power Plant
Generator

变压器
Transformer

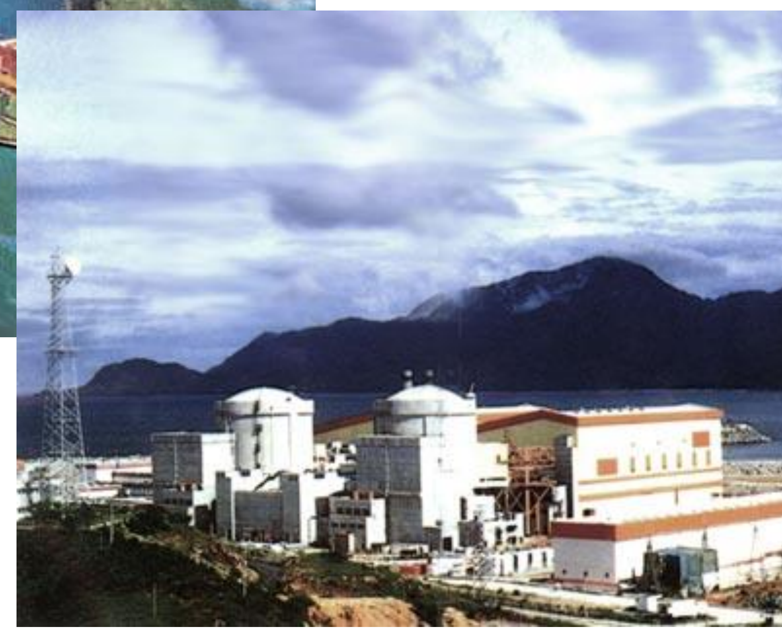
(输)电线
Power Line

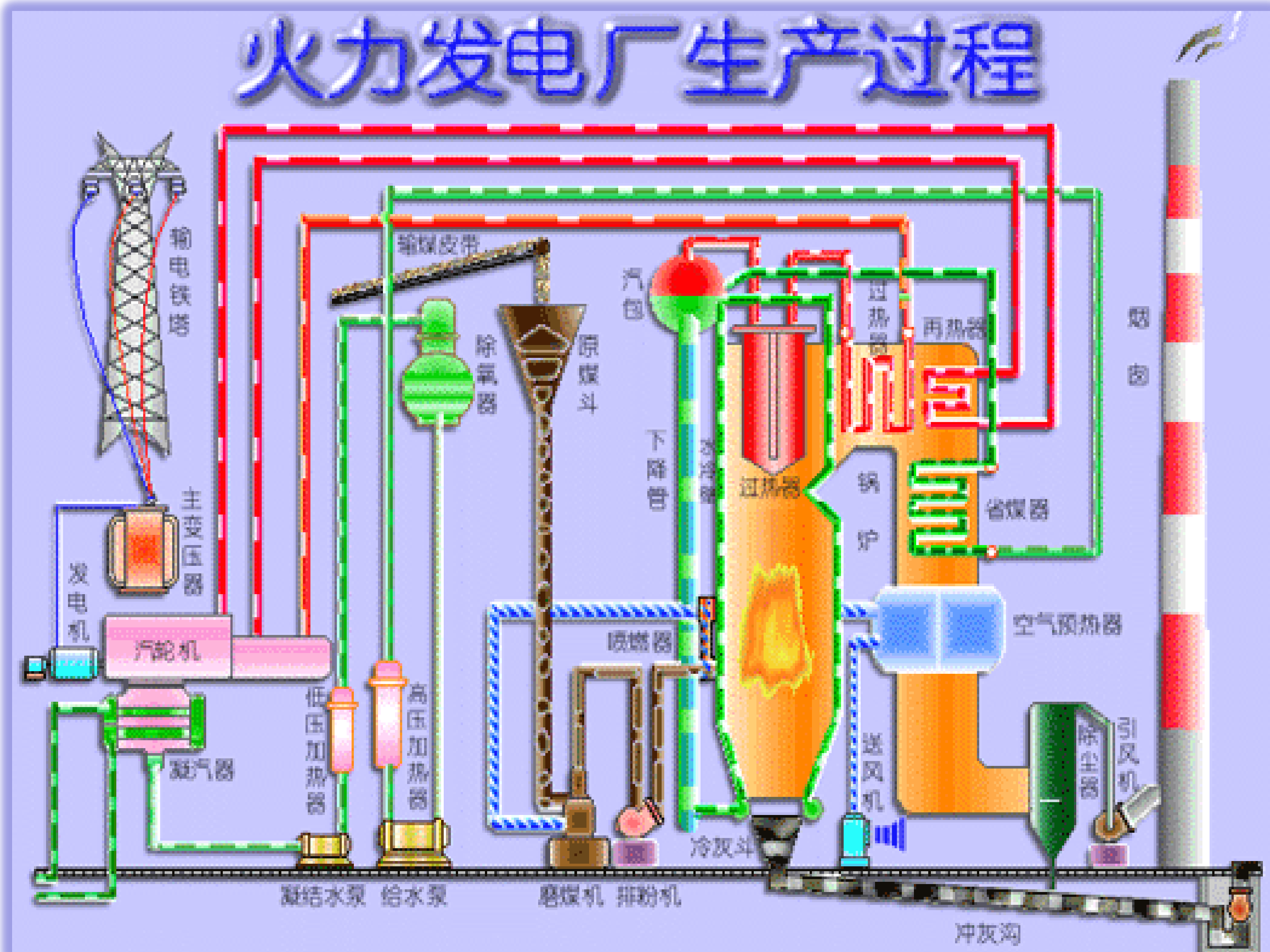
发电厂实例

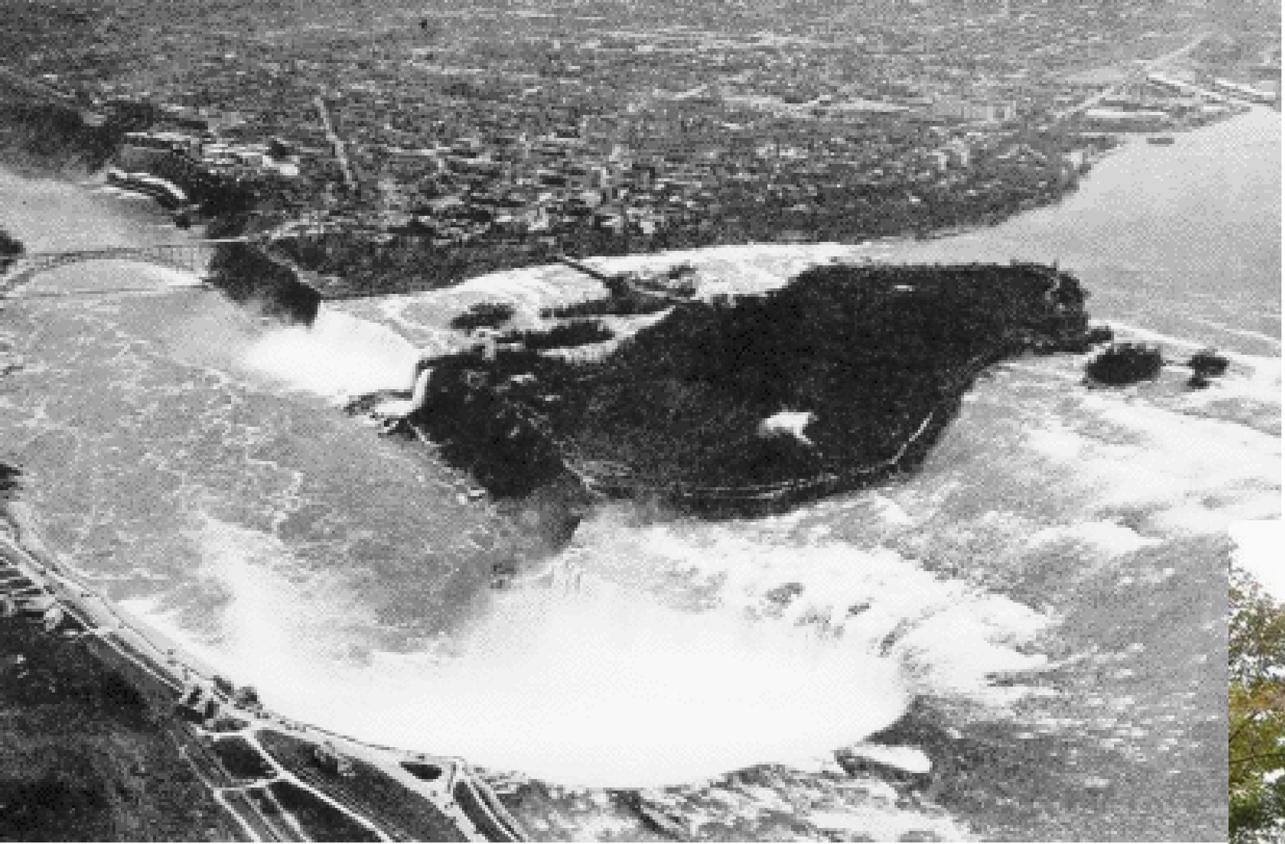
上海浦东外高桥发电厂是我国目前最大的现代化火力发电厂，总装机容量500万千瓦(2×1000MW/900MW/600MW)

三峡水电站
装机容量22.5GW
(32×700MW
+2×50MW)

岭澳核电厂
装机 2*1000MW

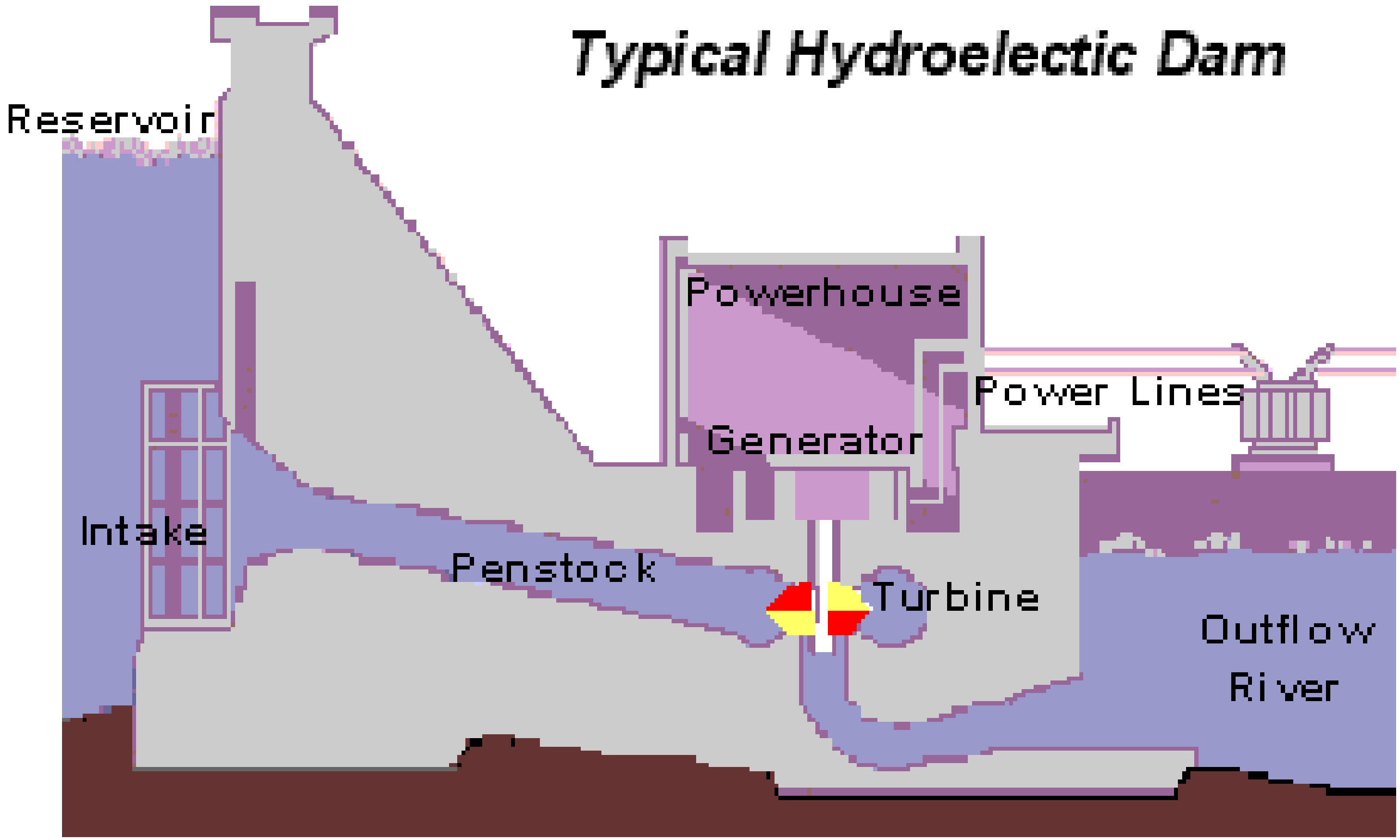



火力发电厂生产过程
输电铁塔
主变压器
发电机
汽轮机
凝汽器
低压加热器
高压加热器
除氧器
输煤皮带
原煤斗
汽包
下降管
水冷壁
过热器
过热器
再热器
锅炉
省煤器
空气预热器
喷燃器
送风机
除尘器
引风机
烟囱
冷灰斗
凝结水泵
给水泵
磨煤机
排粉机
冲灰沟




NIKOLA TESLA
INVENTOR

水力发电示意图



Typical Hydroelectic Dam
Reservoir
Powerhouse
Power Lines
Generator
Intake
Penstock
Turbine
Outflow
River

三峡水轮发电机的转子和定子

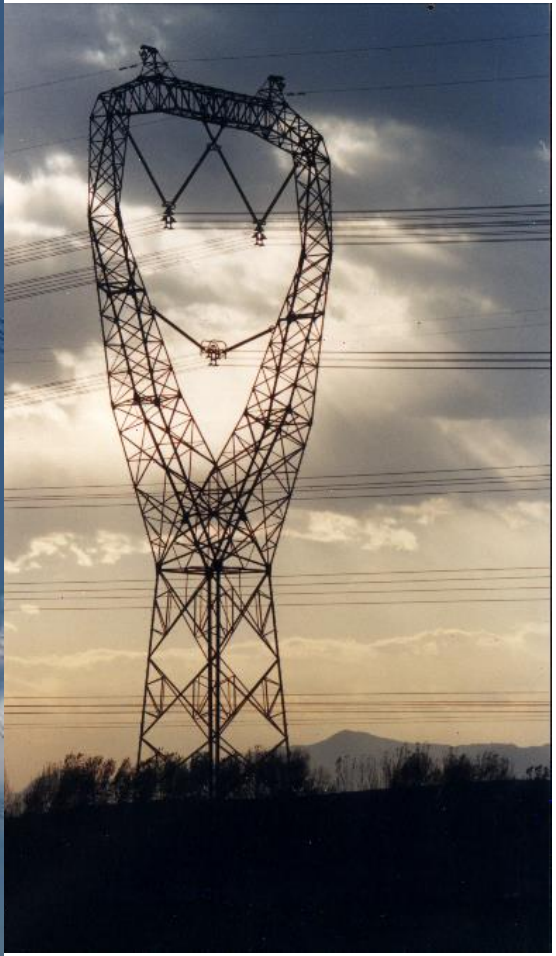
直径21.42m

500kV三相输变电变压器

220kV单相变压器

高压输电线





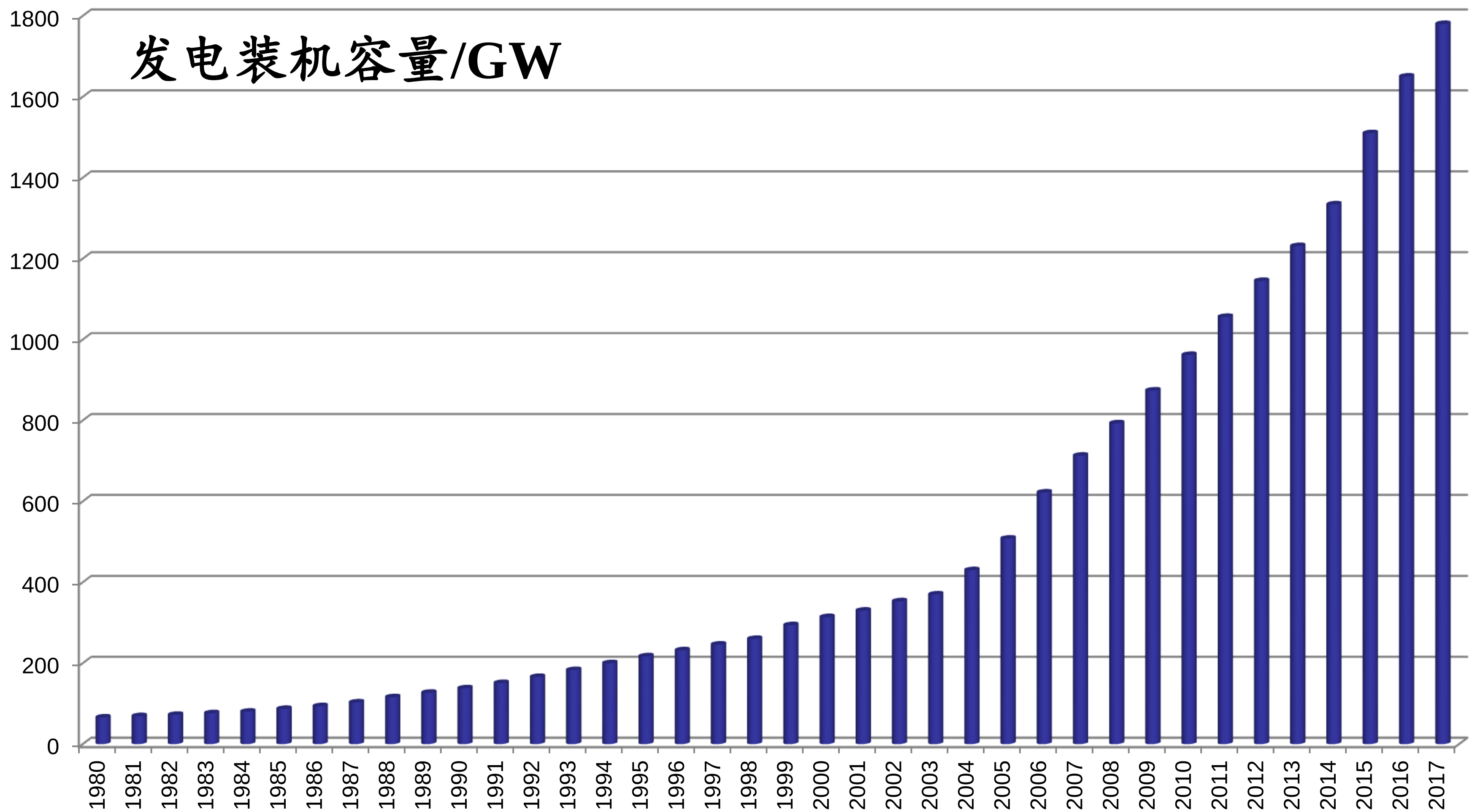
500kV直流四分裂传输线

分裂导线：

减小趋肤效应

减小电晕

快速增长的中国电力工业



2004年至今，我国每年新增装机都超过英国全国装机

2008年，我国年发电量超过日、加、德、法、英、意总和

2012年超过美国成为世界第一

The State-of-the-art

- 至2017年底我国发电装机总容量达到1780GW （世界第一），非化石能源发电装机容量690GW，占总发电装机容量的比重为38.7%
- 2017年我国用电量6.42万亿kWh，居世界第一
  - 相当于我国13亿人平均每人每小时用电0.56度（kWh）
  - 2000年法国用电量5150亿kWh，相当于6000万人平均每人每小时用电0.98度（kWh）
- 世界最大的水电厂：三峡，总装机22.5GW
- 我国1000kV交流和800kV直流特高压输电线已商业运行，电压等级均为世界第一

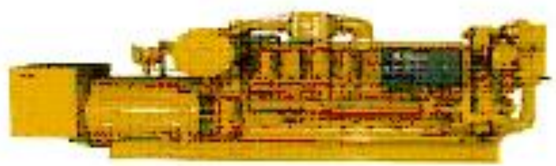
电力系统的特殊问题

- 绝缘问题
  - 开关带载动作的例子
- 稳定运行问题
  - 美国东北电网的大停电
  - 2003.8.14，俄亥俄→密歇根
- 经济运行问题
  - 电力市场

电力系统未来发展方向之一

新（可再生）能源发电

储能



往复运动发动机

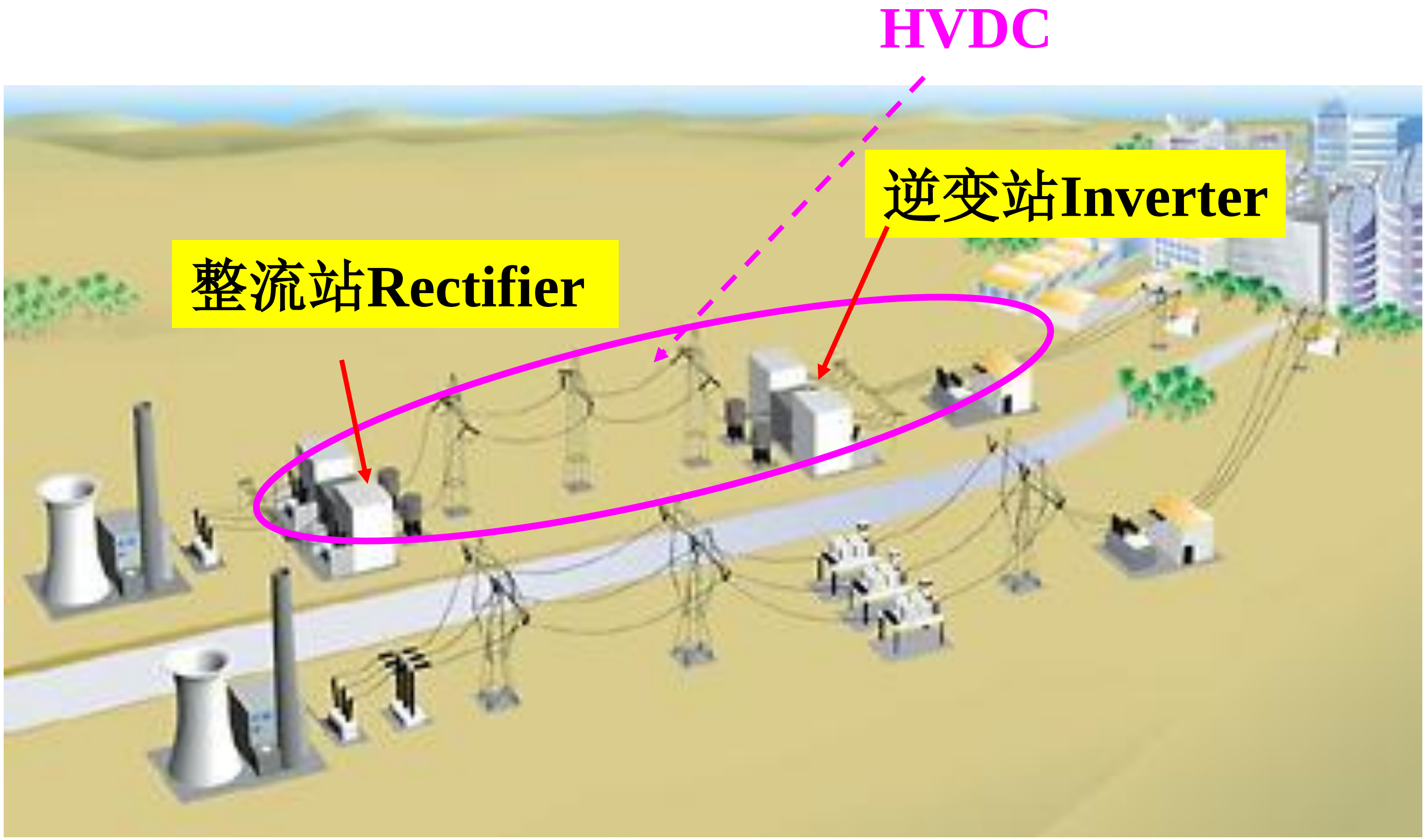
光伏发电

微透平

燃料电池

电力系统未来发展方向之二

直流+交流



Siemens的HVDC换流站

广州HVDC换流站

Why正弦激励下动态电路的稳态响应?
(正弦稳态分析)

自然界本身具有正弦性质：无阻尼二阶系统

电能远距离传输的需要（便于升压）

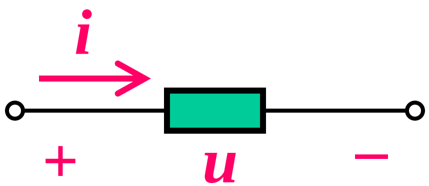
正弦信号的完备性：正弦量的+、—、微分、积分均为正弦量

周期信号 $\xrightarrow{\text{傅里叶分析}}$ 一系列正弦信号

2 正弦量的基本概念

(1) 正弦量的三要素

课前预习



$i(t)=I_m\sin(\omega t+\psi)$ → 相位

(a) 幅值 (amplitude) (振幅、 最大值) I_m

(b) 角频率(angular frequency) ω

$$\omega = \mathrm{d}(\omega t+\psi)/\mathrm{d}t$$

相位随时间的变化率

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$$

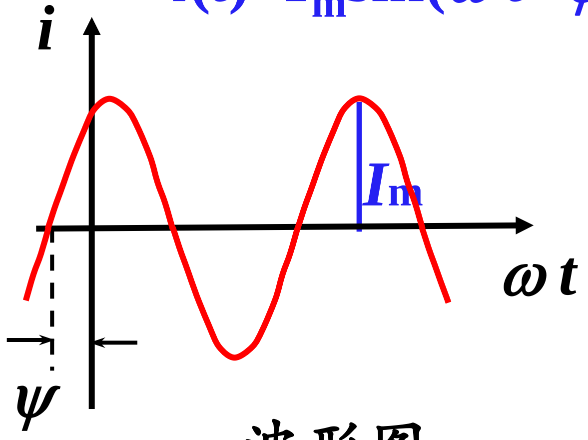
单位： rad/s

(c) 初相位/角(initial phase angle) ψ

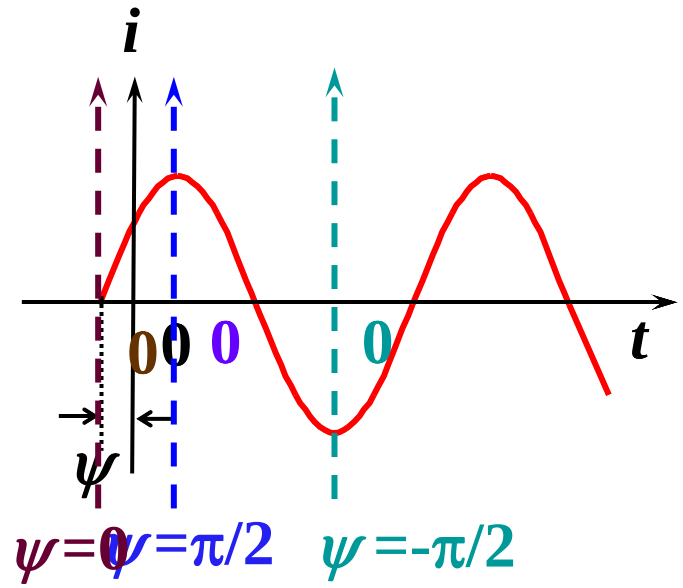
$t=0$时的相位

$$i(t)\big|_{t=0} = I_m \sin\psi$$

$$i(t)=I_m\sin(\omega t+\psi)$$



波形图



一般 $|\psi| \le \pi$

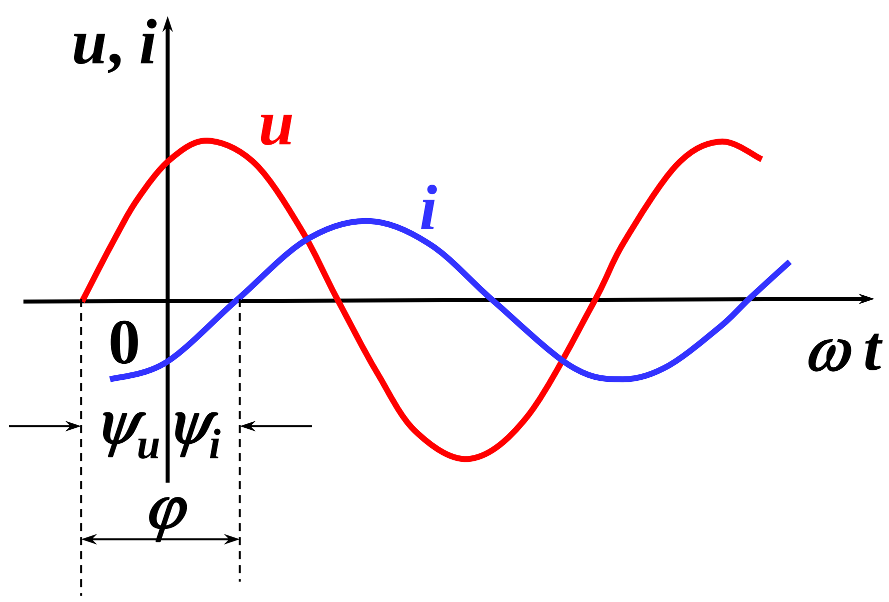
(2) 同频率正弦量的相位差 (phase difference)。

设 $u(t)=U_m\sin(\omega t+\psi_u)$, $i(t)=I_m\sin(\omega t+\psi_i)$

相位差 $\varphi = (\omega t+\psi_u)-(\omega t+\psi_i)= \psi_u-\psi_i$

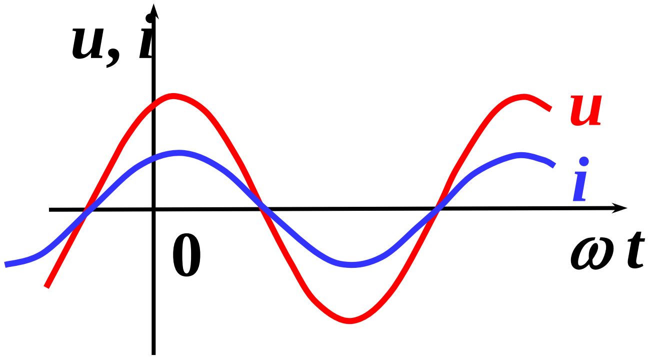
$\varphi>0$， u 领先(lead)(超前)i，或i 落后(lag)(滞后) u

$\varphi<0$， i 领先(超前) u，或u 落后(滞后) i

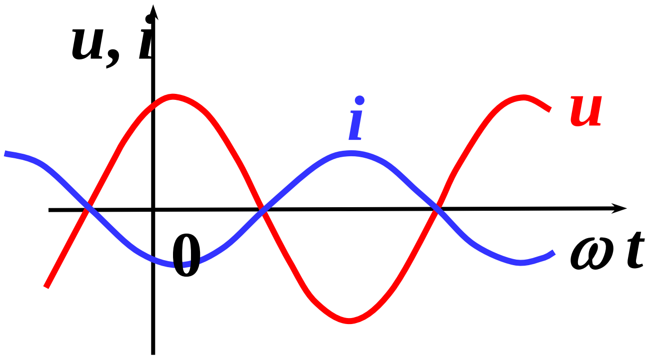


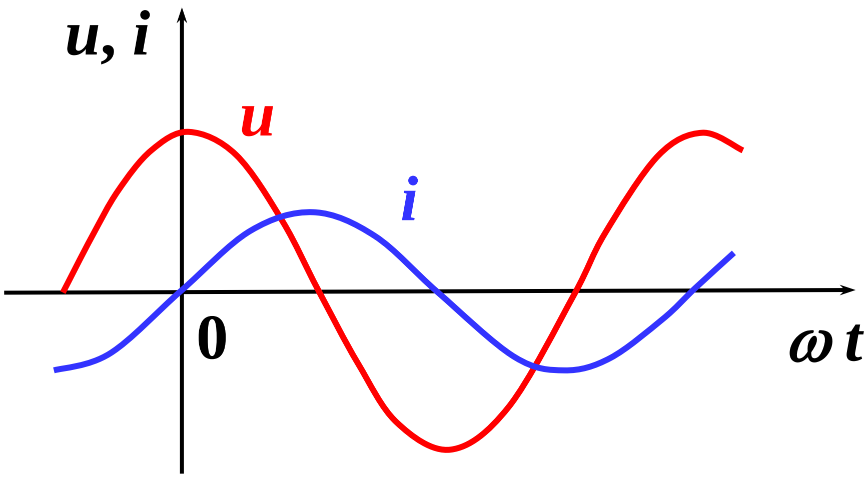
特殊相位关系

$\varphi = 0$， 同相



$\varphi = \pm\pi\ (\pm 180^{\circ})$， 反相





$\varphi = 90^{\circ}$

u 领先 i 90°

或 i 落后 u 90°

不说 u 落后 i 270°

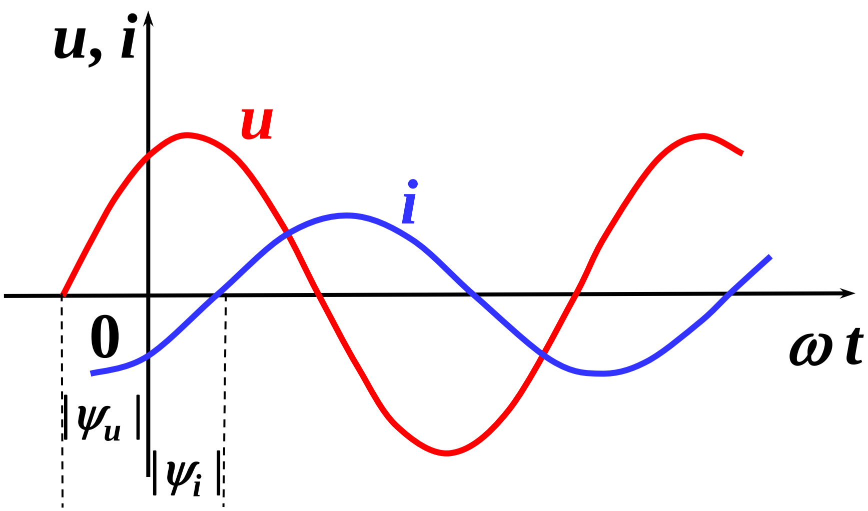
或 i 领先 u 270°

规定： $|\varphi| \leq \pi\ (180^{\circ})$

单选题 1分

设置

图中u 和 i 之间的相位关系是



A u 超前 i $|\psi_u|-|\psi_i|$

B u 滞后 i $|\psi_u|-|\psi_i|$

C u 超前 i $|\psi_u|+|\psi_i|$

D u 滞后 i $|\psi_u|+|\psi_i|$

提交

(3) 周期量的有效值(effective value)

课前预习

(a) 定义

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\mathrm{d}t}$$

$$U \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t}$$

有效值也称方均根值

(root-meen-square，简记为rms)

(b) 正弦电流、电压的有效值

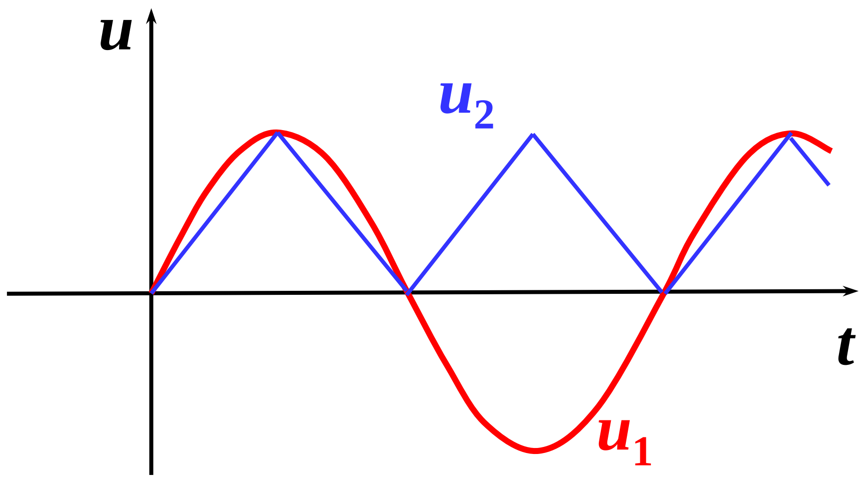
$$i(t)=I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\psi)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\psi)$$

$$I_{\mathrm{m}}=\sqrt{2}I$$

单选题 1分

设置

标准正弦波电压信号u_1和
整流三角波电压信号u_2
之间的有效值大小关系是



A $U_1 > U_2$

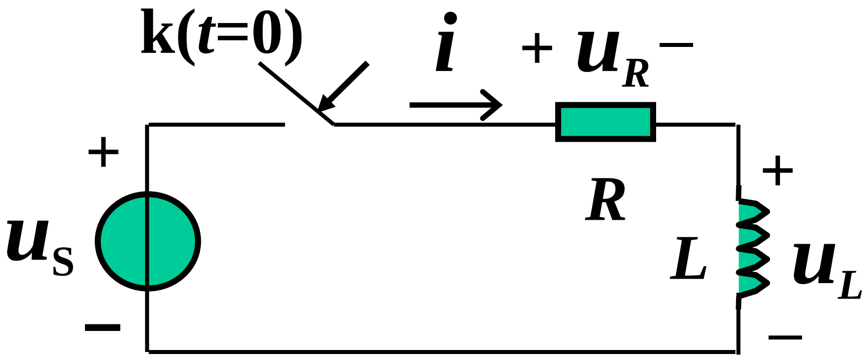
B $U_1 = U_2$

C $U_1 < U_2$

提交

3 正弦稳态分析的关键→相量(phasor)

(1) 问题



$$u_S = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

求：$i(t)$, $u_L(t)$, $u_R(t)$的稳态解。

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

一阶常系数线性微分方程

强制分量（非齐次特解）

自由分量（齐次通解）

$$i = i' + i''$$

t→∞：稳态

t→∞：0

$$i'' = A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

求特解/稳态解　　查表寻找特解的函数类型

激励　　特解类型

$$\sin\omega t \xrightarrow{\text{查表}} C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t \quad \text{或} \quad A\sin(\omega t + B)$$

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = U_\mathrm{m}\sin(\omega t + \psi_u) \xrightarrow{\text{设特解为}} i = A\sin(\omega t + B)$$

代入

$$LA\omega\cos(\omega t + B) + RA\sin(\omega t + B) = U_\mathrm{m}\sin(\omega t + \psi_u)$$

$$A\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\sin(\omega t + B) + \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\cos(\omega t + B)\right)$$

$$= U_m\sin(\omega t + \psi_u)$$

$$RA\sin(\omega t+B)+LA\omega\cos(\omega t+B)=U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\psi_u)$$

$$A\sqrt{R^2+(\omega L)^2}\left(\frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t+B)+\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\cos(\omega t+B)\right)$$

$$=U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\psi_u)$$

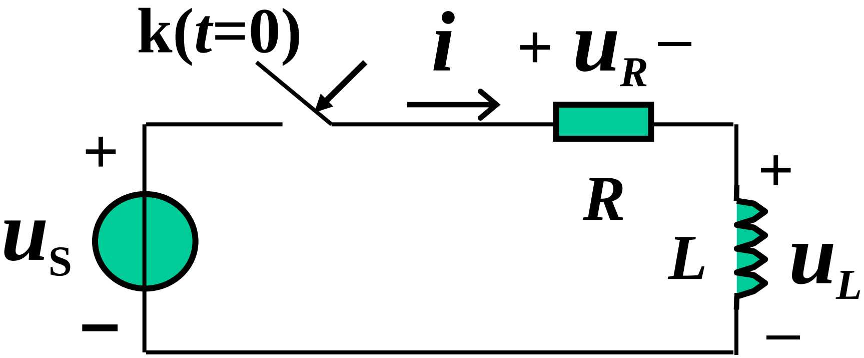
$$\cos(\arctan\frac{\omega L}{R}) \qquad \sin(\arctan\frac{\omega L}{R}) \qquad \sin(\omega t+B+\arctan\frac{\omega L}{R})$$

$$\begin{cases} A\sqrt{R^2+(\omega L)^2}=U_{\mathrm{m}} \\ B+\arctan(\dfrac{\omega L}{R})=\psi_u \end{cases}$$

$$\boxed{A=\frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}=I_{\mathrm{m}}}$$

$$\boxed{B=\psi_u-\arctan\frac{\omega L}{R}=\psi_u-\varphi}$$

$$i'(t)=\frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t+\psi_u-\arctan\frac{\omega L}{R})$$



$$u_S = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

求：$i(t)$, $u_L(t)$, $u_R(t)$的稳态解。

求微分方程特解

$$i'(t) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \psi_u - \arctan\frac{\omega L}{R})$$

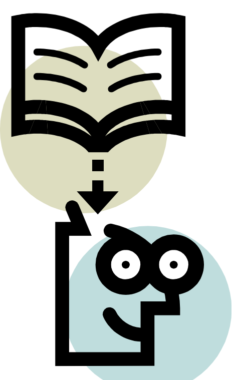
麻烦1：求特解的待定系数

求导

$$u_L'(t) = L\frac{\mathrm{d}i'(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{L\omega U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \psi_u - \arctan\frac{\omega L}{R} + 90°)$$

KCL、KVL
元件约束

麻烦2：正弦量的微分/积分计算



$$u_R'(t) = u_S - u_L'(t) = \frac{RU_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \psi_u - \arctan\frac{\omega L}{R})$$

搞定！！！

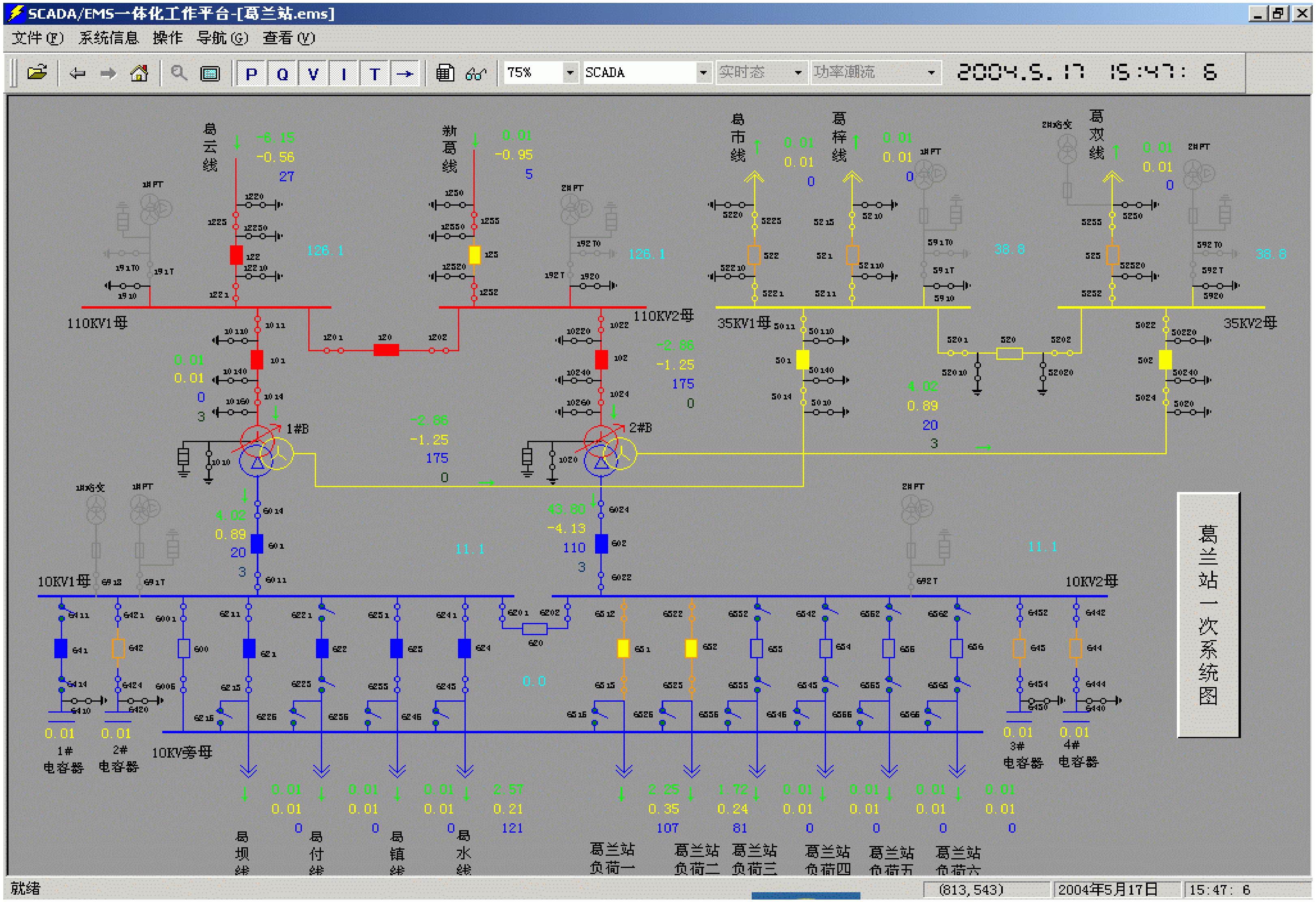
麻烦3：正弦量的±计算

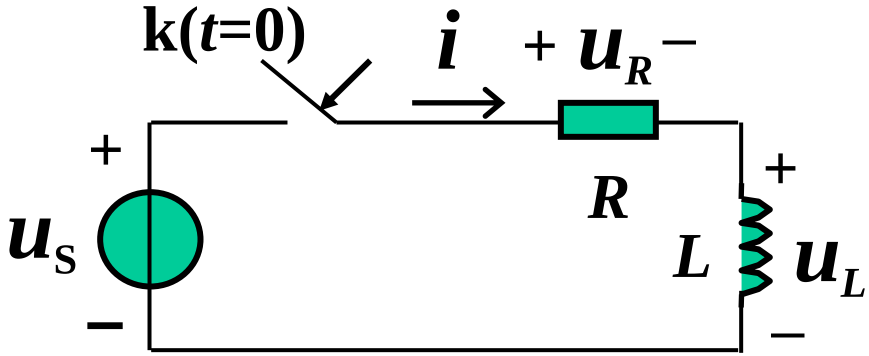
怎么求解该电路?

求特解待定系数

正弦量微分/积分

正弦量加减






Charles Steinmetz

(1865-1923)

$$i'(t)=\frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t+\psi_u-\arctan\frac{\omega L}{R})$$

$$u_L'(t)=\frac{L\omega U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t+\psi_u-\arctan\frac{\omega L}{R}+90°)$$

$$u_R'(t)=\frac{RU_{\mathrm{m}}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t+\psi_u-\arctan\frac{\omega L}{R})$$

3个支路量有何特点?

所有支路电压电流均以相同频率变化!!

接下来……

$i(t)=I_m\sin(\omega t+\psi)$

所有支路电压电流均以相同频率变化!!

此处可以有弹幕

(b) 幅值 (I_m)

(c) 初相角(ψ)

用什么可以同时表示幅值和相位?

问题1： 如何用它来表示正弦量?

问题2：

求微分方程特解

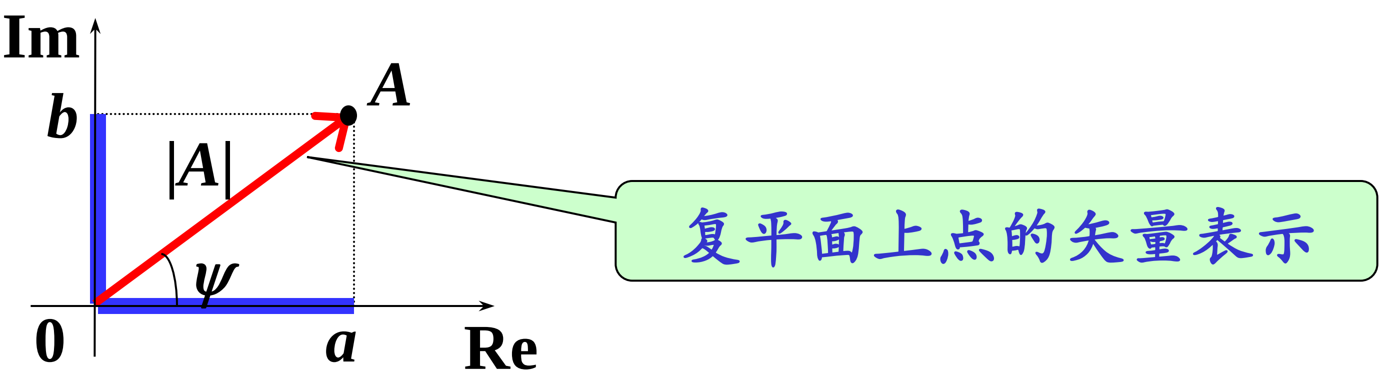
正弦量微分/积分

正弦量加减

→ ?

(2) 复数的复习

(a) 复数的表示形式



直角坐标 $A = a + \mathrm{j}b$

极坐标 $A = |A|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} = |A|\angle\psi$

转换关系

$$a = |A|\cos\psi \qquad b = |A|\sin\psi$$

$$|A| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \psi = \arctan\frac{b}{a}$$

(b) 复数的运算

加减运算——直角坐标　　$A_1 \pm A_2 = (a_1 \pm a_2) + \mathrm{j}(b_1 \pm b_2)$

乘除运算——极坐标　　$A_1 \cdot A_2 = |A_1||A_2|\angle(\psi_1 + \psi_2)$

(c) 旋转因子

欧拉公式

复数 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} = \cos\psi + \mathrm{j}\sin\psi = 1\angle\psi$

$$A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} = |A|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} \triangleq |A|\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta+\psi)}$$

$\Longrightarrow$ A逆时针旋转一个角度ψ，模不变

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{j}\sin\frac{\pi}{2} = +\mathrm{j}$$

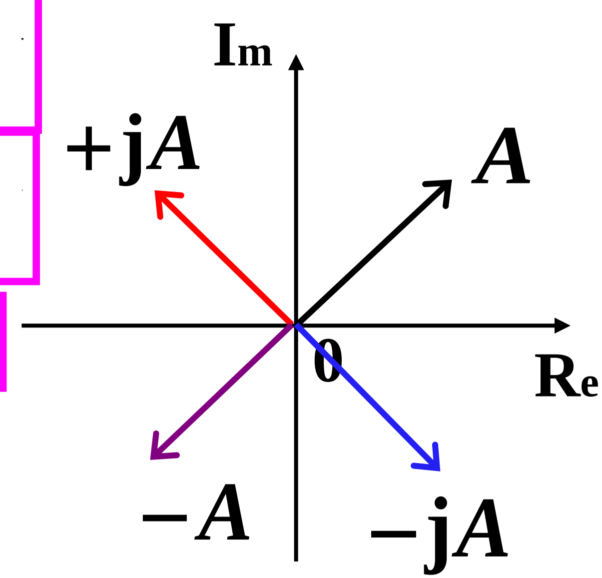
jA

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}(-\frac{\pi}{2})} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + \mathrm{j}\sin(-\frac{\pi}{2}) = -\mathrm{j}$$

-jA

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\pm\pi)} = \cos(\pm\pi) + \mathrm{j}\sin(\pm\pi) = -1$$

-A



+j，–j，−1 都可以看成旋转因子

“一乘(j/-j/-1)就转”

(3) 用复数来表示正弦量

复函数

$$A(t)=\sqrt{2}I\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\psi)}$$

$$=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi)+\mathrm{j}\sqrt{2}I\sin(\omega t+\psi)$$

欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=\cos\theta+\mathrm{j}\sin\theta$$

$$\mathrm{Im}[A(t)]=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\psi)=i(t)$$

$$\boxed{i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\psi)} \Leftrightarrow A(t)=\sqrt{2}I\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\psi)}$$

一一映射

一一映射

一一映射

$$\boxed{\dot{I}=I\angle\psi}$$

$$A(t)=\sqrt{2}\,\boxed{I\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}=\sqrt{2}\,\dot{I}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

相量Phasor
(phase vector)

也可以定义 $\dot{I}_{\mathrm{m}}=\sqrt{2}I\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}$

$$u(t)=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\theta) \Leftrightarrow \dot{U}=U\angle\theta$$

例1 $i(t)=141.4\sin(314t+30^{\circ})\text{A}$ 用相量表示 $i(t), u(t)$。

$u(t)=311.1\sin(314t-60^{\circ})\text{V}$

解 $\dot{I}=100\angle 30^{\circ}\text{ A}$，$\dot{U}=220\angle -60^{\circ}\text{ V}$

例2 $\dot{I}=50\angle 15^{\circ}\text{ A}$，$f=50\text{Hz}$

写出该相量对应的时间表达式。

解 $i(t)=50\sqrt{2}\sin(314t+15^{\circ})\text{ A}$

单选题 1分

设置

已知 $u(t) = 311\sin(314t - 60^\circ)\mathrm{V}$

求电压相量 $\dot{U}$

A $\dot{U} = 311\angle 60^\circ$ V

B $\dot{U} = 311\angle -60^\circ$ V

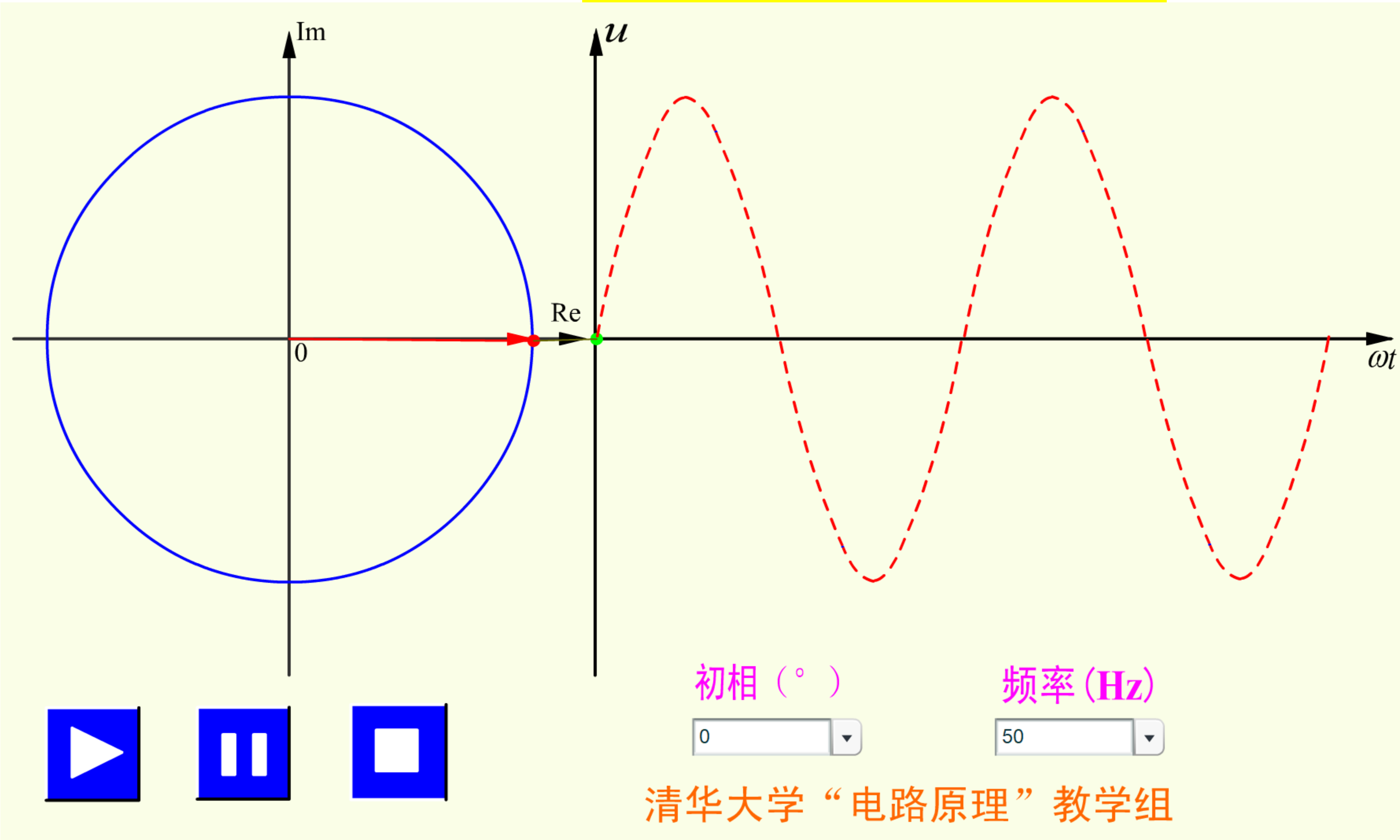
C $\dot{U} = 220\angle -60^\circ$ V

D $\dot{U} = 220\angle 30^\circ$ V

提交

$$A(t)=\sqrt{2}\,U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}=\sqrt{2}\,\dot{U}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \qquad u(t)=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\psi)$$

相量和矢量的联系与区别



(4) 相量的计算

正弦量+、－ ⟹ 复数+、－

(a) 同频正弦量的“＋”和 “－”

$$u_1(t)=\sqrt{2}\,U_1\sin(\omega t+\psi_1)=\mathrm{Im}(\sqrt{2}\dot{U}_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

$$u_2(t)=\sqrt{2}\,U_2\sin(\omega t+\psi_2)=\mathrm{Im}(\sqrt{2}\dot{U}_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

$$u(t)=u_1(t)+u_2(t)=\mathrm{Im}(\sqrt{2}\dot{U}_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})+\mathrm{Im}(\sqrt{2}\dot{U}_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

$$=\mathrm{Im}(\sqrt{2}\dot{U}_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+\sqrt{2}\dot{U}_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})=\mathrm{Im}[\sqrt{2}(\underbrace{\dot{U}_1+\dot{U}_2}_{\dot{U}})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$$\boxed{\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2}$$

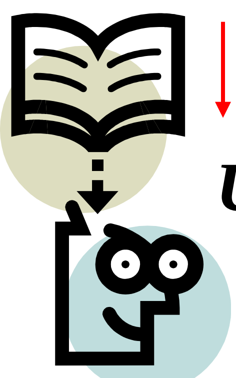
$$u_1(t)\pm u_2(t)=u_3(t)$$

$$\dot{U}_1\pm\dot{U}_2=\dot{U}_3$$

类比

$$x^{1.5}=4 \qquad x=2.52$$

$$1.5*\lg x=\lg 4 \longrightarrow \lg x=0.40$$



(2) 正弦量的微分和积分

微分/积分 关系 ⇨ **代数关系**

$$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\psi_i)=\mathrm{Im}(\sqrt{2}\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

微分

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{Im}(\sqrt{2}\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})\right)$$

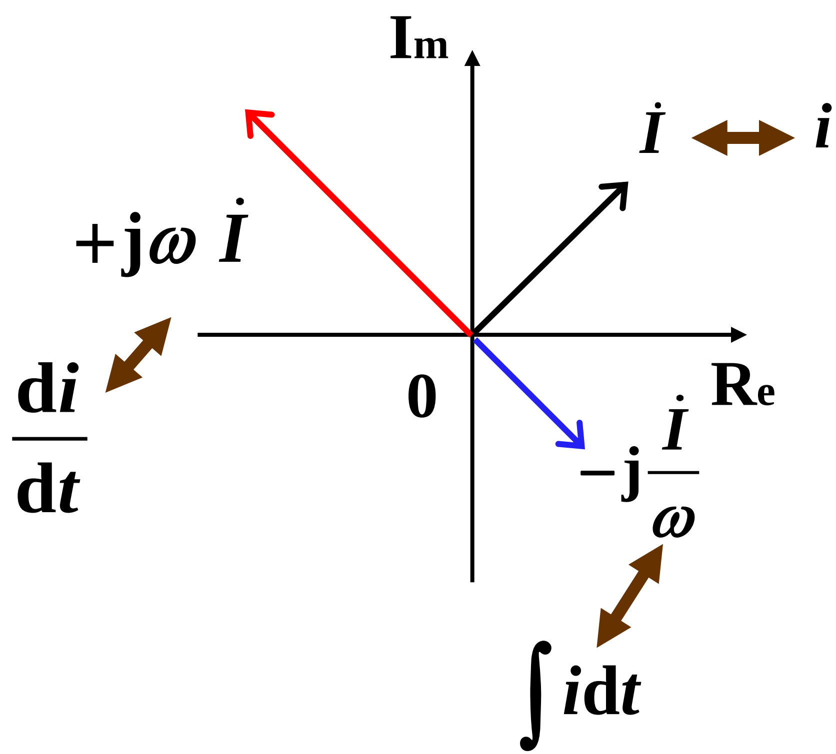
$$=\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sqrt{2}\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})\right)$$

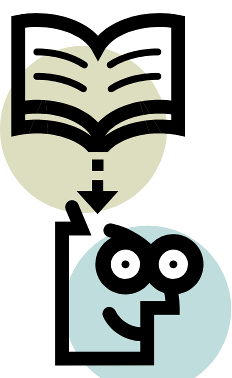
$$=\mathrm{Im}(\sqrt{2}\,\mathrm{j}\omega\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\rightarrow \mathrm{j}\omega\dot{I}$$

积分

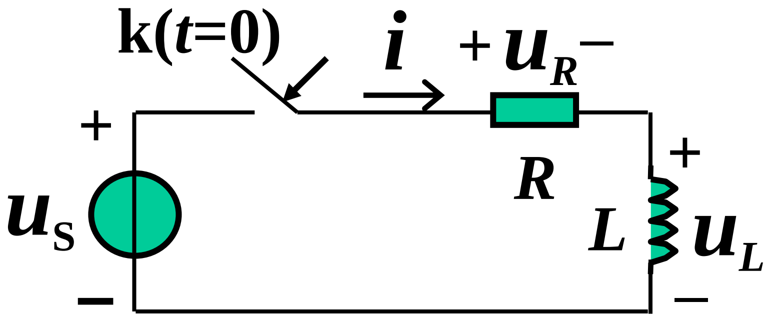
$$\int i\mathrm{d}t\rightarrow\frac{\dot{I}}{\mathrm{j}\omega}$$





“一乘就转”

(5) 相量的应用



$$u_S = \sqrt{2}U\sin(\omega t + \psi_u)$$

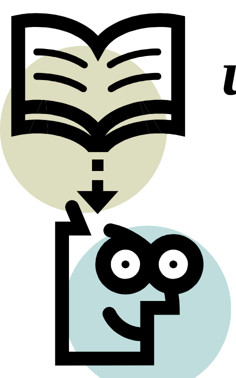
求：$i(t), u_L(t), u_R(t)$的稳态解。

$$u_S(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \dot{U}_S = R\dot{I} + \mathrm{j}\omega L\dot{I}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + \mathrm{j}\omega L} = \frac{U\angle\psi_u}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\angle\arctan\frac{\omega L}{R}} = \frac{U}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\angle\left(\psi_u - \arctan\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \dot{U}_L = \mathrm{j}\omega L\dot{I} = \frac{\omega LU}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\angle\left(\psi_u - \arctan\frac{\omega L}{R} + 90^\circ\right)$$

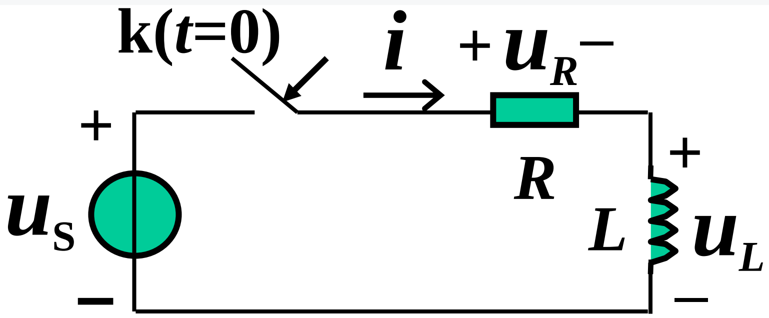
$$u_R = Ri_L \Rightarrow \dot{U}_R = R\dot{I} = \frac{RU}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\angle\left(\psi_u - \arctan\frac{\omega L}{R} + 90^\circ\right)$$



搞定！！！

单选题 1分

设置



已知$u_S(t)=\sin 2t$ A,

L=0.5H, R=1Ω

求$i(t)$ 的稳态解。

A $i(t)=\sin 2t\ \text{A}$

B $i(t)=\sin\left(2t-45°\right)\ \text{A}$

C $i(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(2t-45°\right)\ \text{A}$

D $i(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(2t+45°\right)\ \text{A}$

提交

求解顺序

- 列写 ODE
- 将ODE变换为复系数代数方程
- 求解复系数代数方程
- 反变换得到时间表达式

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t + \psi_u - \arctan\frac{\omega L}{R})$$

$$\dot{U} = R\dot{I} + \mathrm{j}\omega L\dot{I}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R+\mathrm{j}\omega L} = \frac{U}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\angle(\psi_u - \arctan\frac{\omega L}{R})$$

• 下节课讨论如何直接列写复系数代数方程！！