第七次习题课题目

习题 1. 练习 4.2.6

$$
\text{计算}\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.
$$

习题 2. 练习 4.2.8

1. 令 A_n 是从右上到左下对角线上的元素全为 1, 其余元素全为 0 的 n 阶方阵. 求 A_2,A_3,A_4,A_5 的行列式, 分析共规律, 推断出 A_n 的行列式.

2. 令 $A_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, A_3=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, 以此类推 A_n. 求 A_2,A_3,A_4 的行列式, 分析共$\boxed{\text{F}}$律, 推出 A_n 的行列式.

3. 设 A 具在 QR 分解 $A=Q\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, 求 $\det(A)$ 的所存可能值.

4. 定义 Hilbert 矩阵 $H_n=\left[\frac{1}{i+j-1}\right]_{n\times n}$. 计算 $\det(H_2),\det(H_3)$. Hilbert 矩阵是一种常见的难于计算的矩阵, 常用来测试算法.

习题 3. 练习 4.2.22 和 4.2.23

1. 设 A,B 分别是 $m\times n, n\times m$ 矩阵, 证明, $\det(I_m+AB)=\det(I_n+BA)$. 由此推出, I_m+AB 可逆当且仅当 I_n+BA 可逆.

2. 计算 $\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \dots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \dots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \dots & 1+a_n^2 \end{vmatrix}$.

习题 4. 练习 4.2.24

设 A 是三阶矩阵, 已知 $\det(A-I_3)=\det(A-2I_3)=\det(A-3I_3)=0$.

1. 证明存在非零向量 v_1, v_2, v_3 ，满足 $Av_i = iv_i$.
2. 设 $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = \mathbf{0}$, 证明 $k_1v_1 + 2k_2v_2 + 3k_3v_3 = \mathbf{0}, k_1v_1 + 4k_2v_2 + 9k_3v_3 = \mathbf{0}$.
3. 证明存在可逆 Vandermonde 矩阵 V, 使得

$$\begin{bmatrix} k_1v_1 & k_2v_2 & k_3v_3 \end{bmatrix} V = O$$

4. 证明 v_1, v_2, v_3 构成 R^3 的一组基, 因此矩阵 $B = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$ 可逆.
5. 证明存在对角矩阵 D, 使得 $AB = BD$, 并计算 $\det(A)$.

习题 5. 练习 4.3.8

给定 $A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}, B_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

1. 利用展开式得到 $\det(B_n)$ 关于 n 的递推关系, 并计算 $\det(B_n)$.
2. 利用 $\det(A_n)$ 与 $\det(B_n)$ 的关系计算 $\det(A_n)$.

习题 6. 练习 4.2.20

设 A 为可逆方阵，D 为方阵，证明:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|.$$

习题 7. 练习 4.3.10

求下列推广的 Vandermonde 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}.$$

习题 8. 练习 4.3.12

设 Q 是 n 阶正交矩阵，即 $Q^TQ = QQ^T = I_n$。

(1) 若 $|Q| < 0$，求证：$|Q + I_n| = 0$，因此存在非零向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$，使得 $Q\mathbf{v} = -\mathbf{v}$。

(2) 设 $|Q| > 0$. 证明当 n 是奇数时等式 $|Q - I_n| = 0$ 总成立. 当 n 是偶数时, 判断等式 $|Q - I_n| = 0$ 是否成立. 若成立, 请给出证明; 若不成立, 请举出反例.

习题 9. 设

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

不直接计算 C_{ij}, 求解以下各题:

(1) $-2C_{11}+2C_{21}+3C_{31}+4C_{41}$;

(2) $C_{13}+C_{23}+C_{33}+C_{43}$.

习题 10. 设

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

求 $S_1=C_{21}+2C_{22}$ 和 $S_2=C_{23}+C_{24}$.