第19讲 互感的去耦等效，变压器

本节课需要用复数计算器

1 互感的去耦等效

串联

并联

单点联

互感的去耦等效

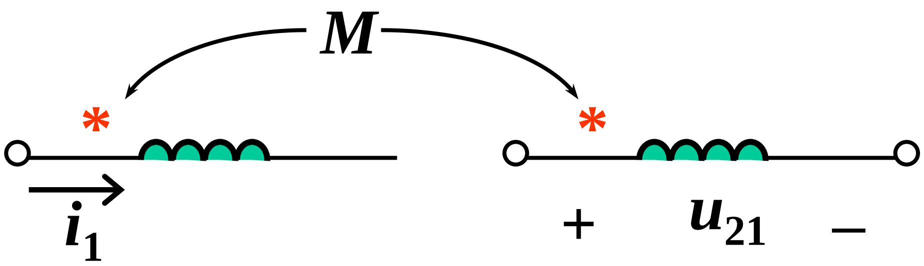
2 变压器

空心变压器

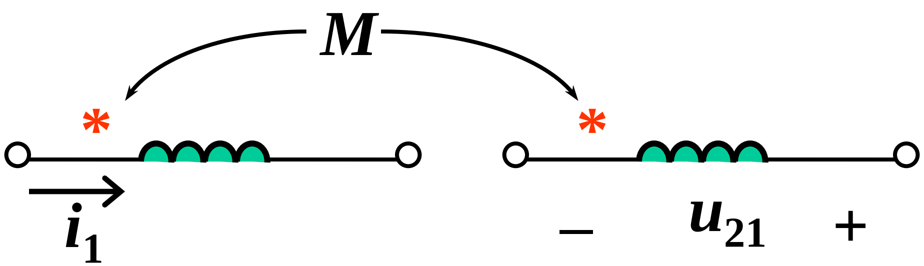
理想变压器

含理想变压器电路的计算

复习



$$u_{21} = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

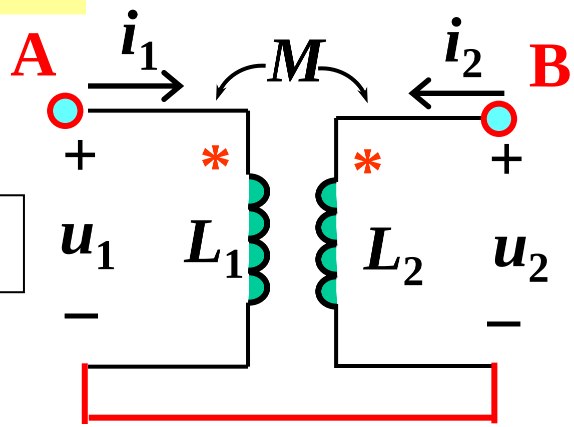


$$u_{21} = \boxed{-}M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

1 互感的去耦等效

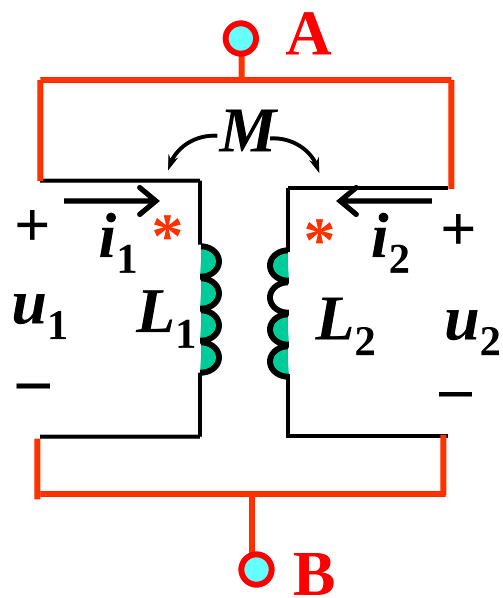
串联

4端→2端



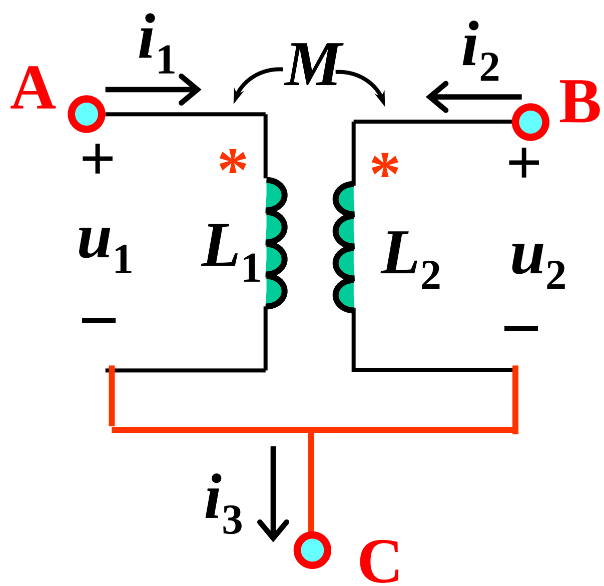
并联

4端→2端



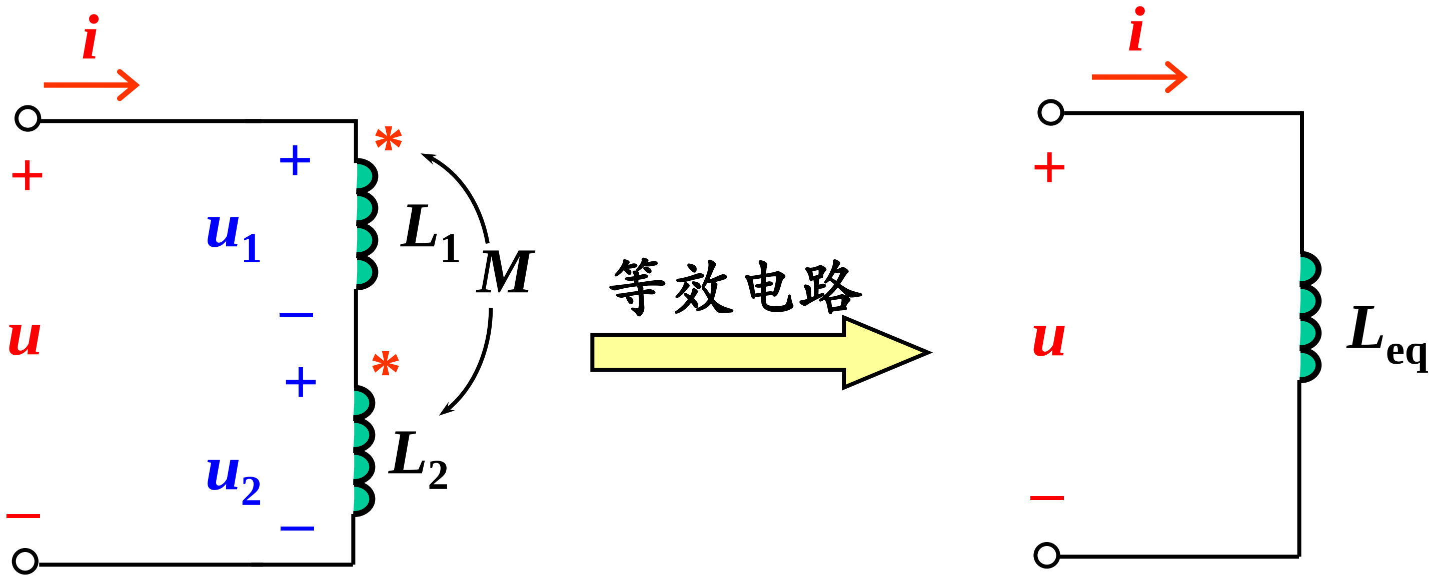
单公共节点联

4端→3端



(1) 互感线圈的串联

同名端顺串连接



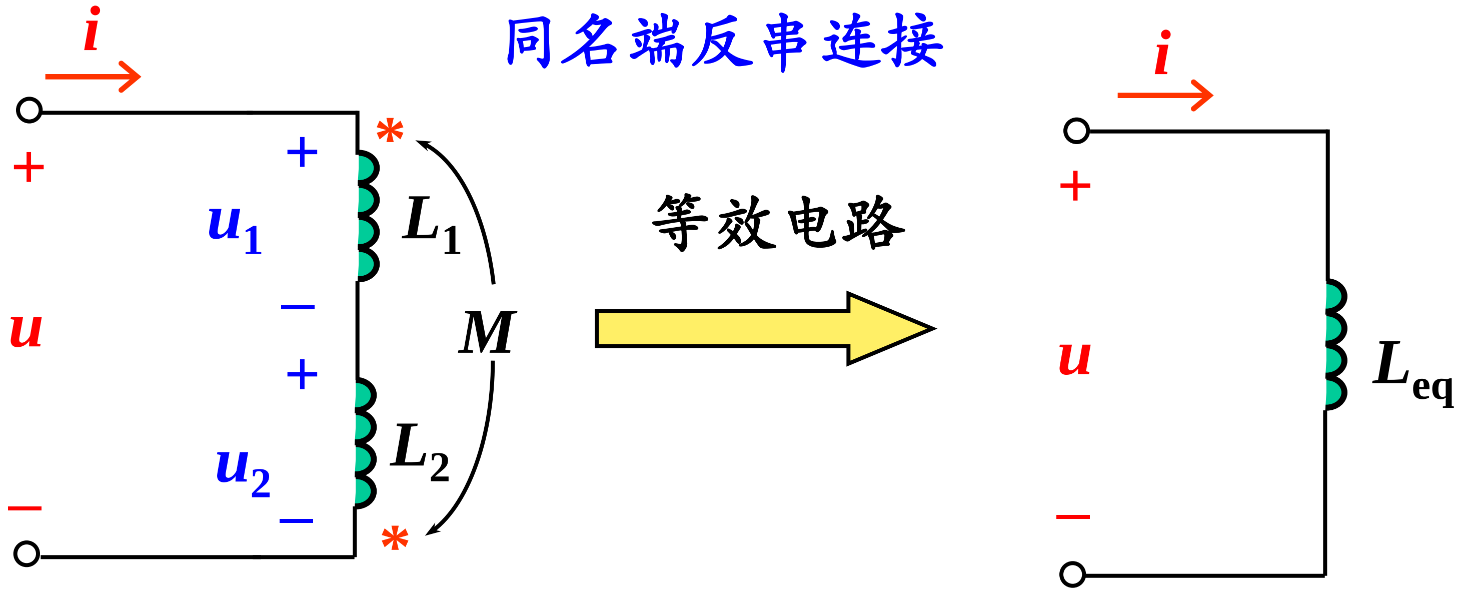
$$u = L_1\frac{di}{dt}\boxed{+M\frac{di}{dt}}+L_2\frac{di}{dt}\boxed{+M\frac{di}{dt}}$$

$$=(L_1+L_2+2M)\frac{di}{dt}$$

$$=L_{eq}\frac{di}{dt}$$

$$L_{eq}=L_1+L_2+2M$$

同名端反串连接



$$u = L_1\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \boxed{-M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}} + L_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \boxed{-M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$$

$$= (L_1 + L_2 - 2M)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$= L_{\mathrm{eq}}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{L_{\mathrm{eq}} = L_1 + L_2 - 2M \geq 0}$$

问题：你手头有一个电感测量装置

（比如你作业中设计的电桥），

如何测量两线圈之间的互感值?

$$L_{顺} = L_1 + L_2 + 2M \qquad L_{反} = L_1 + L_2 - 2M$$

此处可以有弹幕

问题：如何测量互感值?

$$L_{顺} = L_1 + L_2 + 2M \qquad L_{反} = L_1 + L_2 - 2M$$

* 顺接一次，反接一次，就可以测出互感：

$$M = \frac{L_{顺} - L_{反}}{4}$$

* 全耦合 $M = \sqrt{L_1 L_2}$

当 $L_1 = L_2 = L$ 时 ，$M = L$

$$L_{eq} = \begin{cases} 4M & 顺串 \\ 0 & 反串 \end{cases}$$

单选题 1分

设置

两电感线圈同名端顺串连接时电感值为10mH，同名端反串连接时电感值为2mH。则其互感为

A 8 mH

B 2 mH

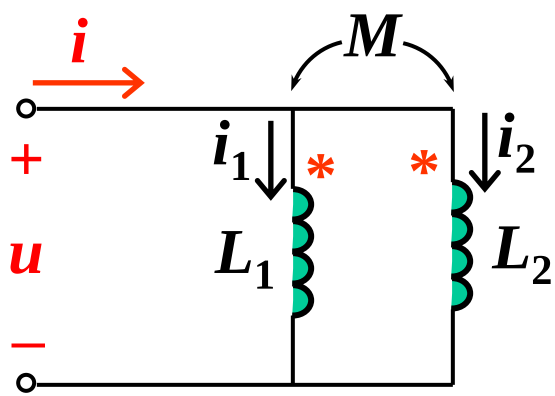
C 4 mH

D 5 mH

提交

(2) 互感线圈的并联

同名端在同侧



$$
\begin{cases}
u = L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\
\quad = L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \\
i = i_1 + i_2
\end{cases}
$$

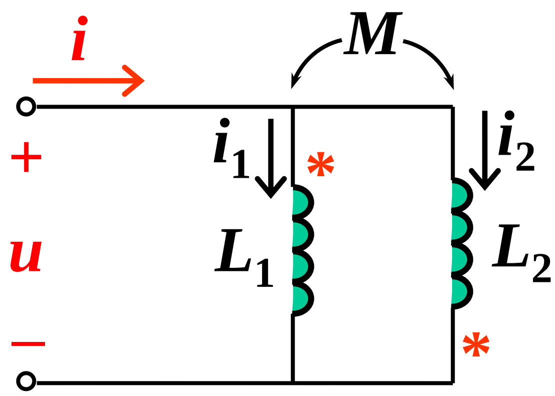
解得u, i的关系

$$u = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$L_{\mathrm{eq}} = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 - 2M}$$

记不住

同名端在异侧



$$
\begin{cases}
u = L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\
\quad = L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \\
i = i_1 + i_2
\end{cases}
$$

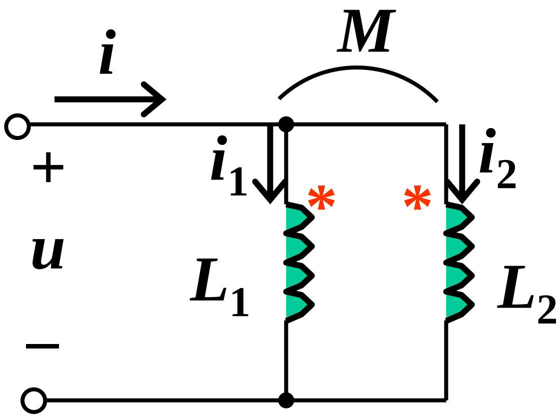
解得u, i的关系

$$u = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 + 2M} \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$L_{\mathrm{eq}} = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 + 2M} \geq 0$$

还是记不住

同名端在同侧互感并联电路的去耦等效分析



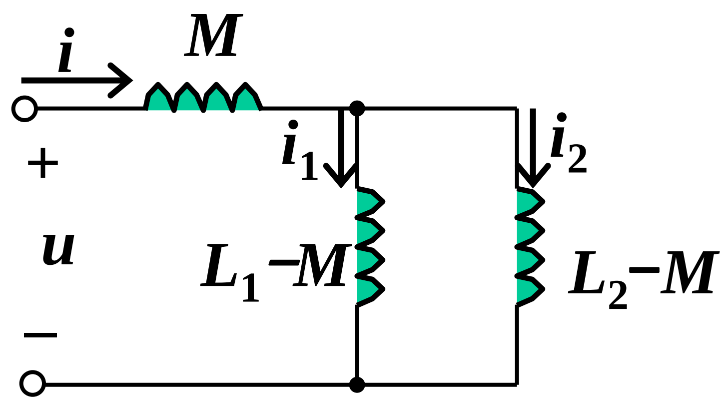
$$\begin{cases} u = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\ u = L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

$i_2 = i - i_1$

$i_1 = i - i_2$

$$\begin{cases} u = (L_1 - M)\dfrac{di_1}{dt} + M\dfrac{di}{dt} \\ u = (L_2 - M)\dfrac{di_2}{dt} + M\dfrac{di}{dt} \end{cases}$$

画等效电路

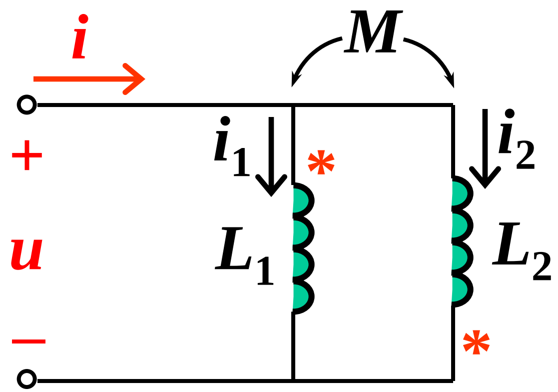


$(L_1-M)//(L_2-M)+M$

$$L_{eq} = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 - 2M}$$

于歆杰等，关于全耦合的一道习题的讨论，电气电子教学学报，2012

同理可推得同名端在异侧互感并联电路的去耦等效分析

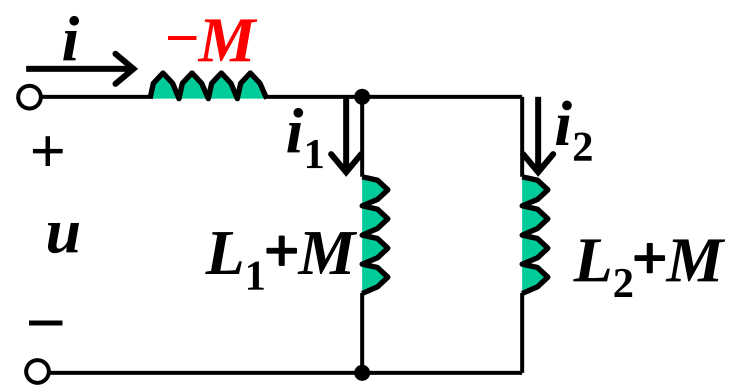


$$\begin{cases} u=(L_1+M)\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}-M\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ u=(L_2+M)\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}-M\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

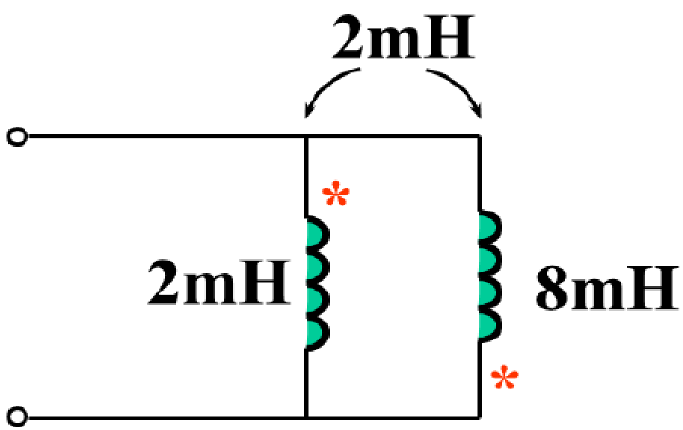
等效电路

$(L_1+M)//(L_2+M)-M$

$$L_{\mathrm{eq}}=\frac{(L_1L_2-M^2)}{L_1+L_2+2M}$$



该端口的去耦等效电感为



A 0.857 mH

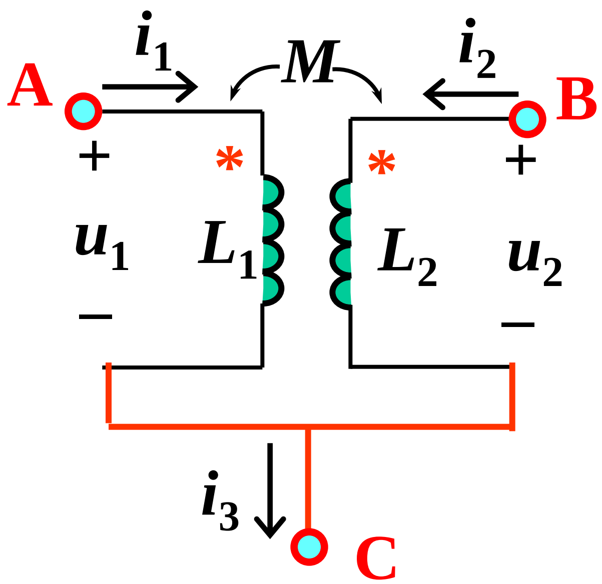
B 0.962 mH

C 4.857 mH

D 2 mH

提交

(3) 有一个公共节点互感线圈的去耦等效电路



2个同名端都靠近（远离）公共节点

$$i_3 = i_1 + i_2$$

$$u_{AC} = u_1$$

$$= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

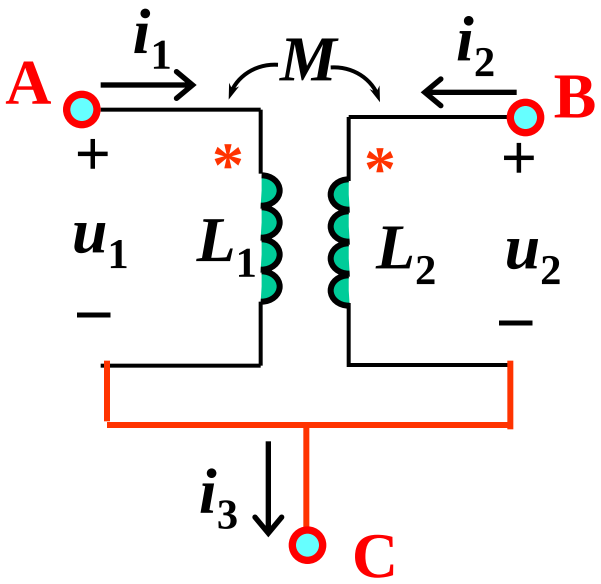
$$= (L_1 - M)\frac{di_1}{dt} + M \frac{di_3}{dt}$$

$$i_3 = i_1 + i_2$$

$$u_{BC} = u_2$$

$$= L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

$$= (L_2 - M)\frac{di_2}{dt} + M \frac{di_3}{dt}$$

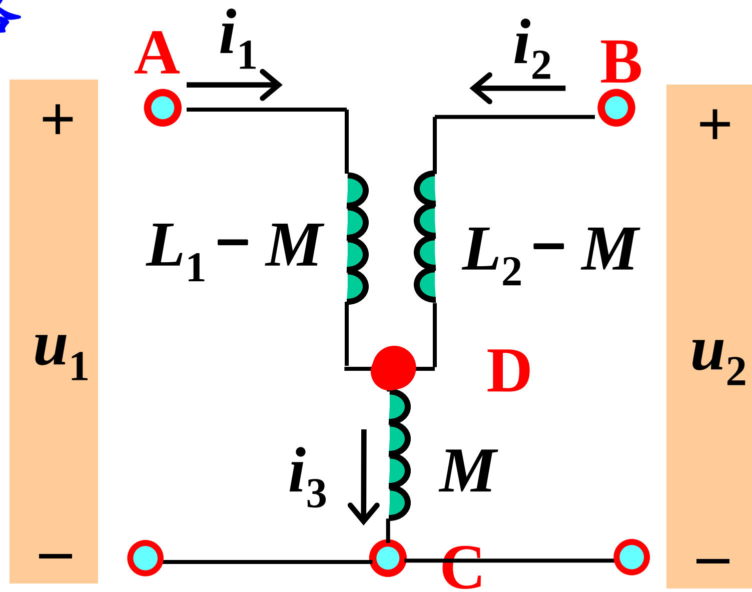


$$u_{AC} = (L_1 - M)\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_3}{dt}$$

$$u_{BC} = (L_2 - M)\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_3}{dt}$$

$$i_3 = i_1 + i_2$$

等效电路

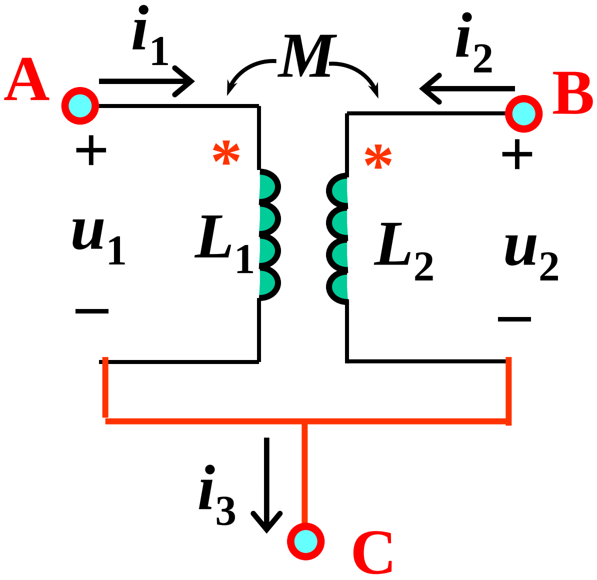


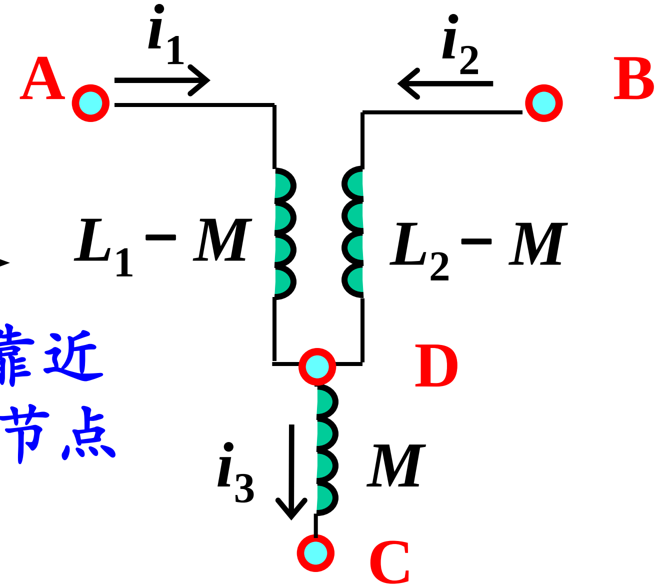
强调:

多了个节点D

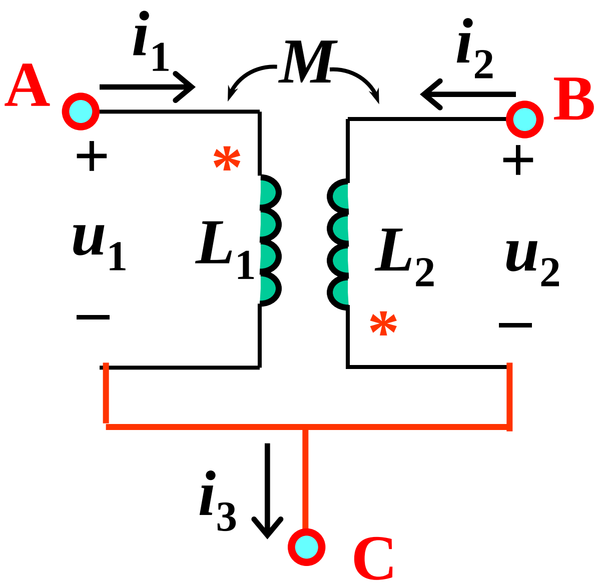
$u_1 = u_{AC} \neq u_{AD}$

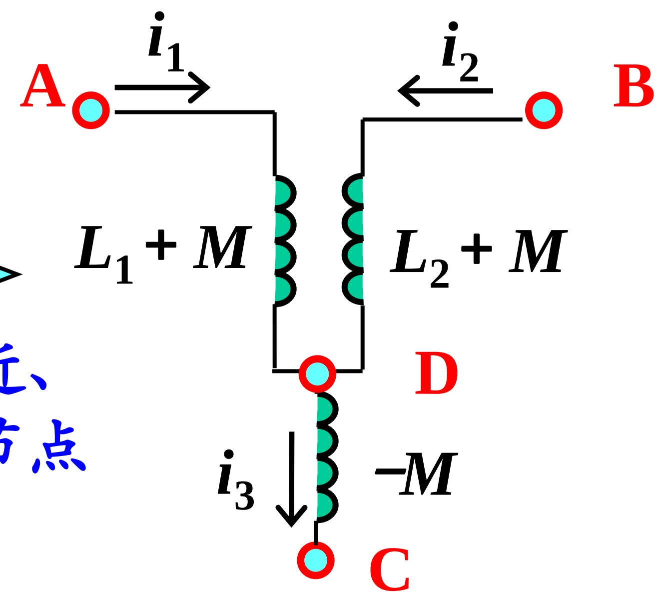
$u_2 = u_{BC} \neq u_{BD}$





2个同名端都靠近
（远离）公共节点



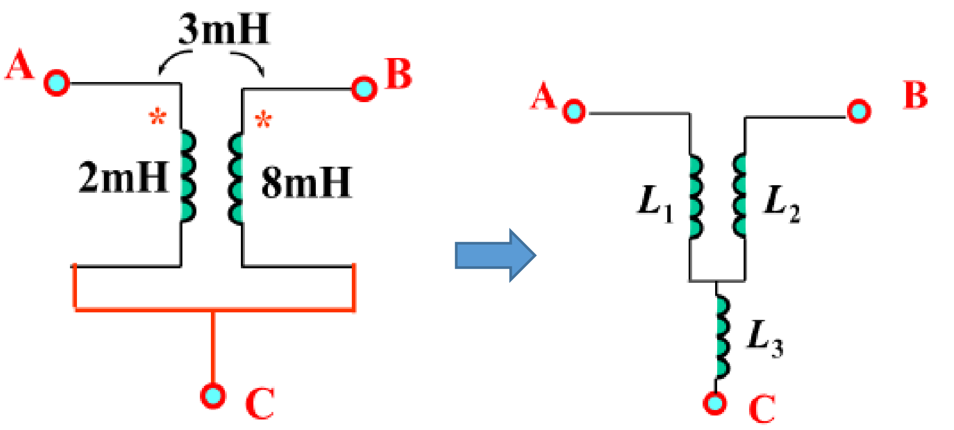


同名端1个靠近、
1个远离公共节点

单选题 1分

设置

如图所示，去耦等效电路中，L_1的电感值为



A 1mH

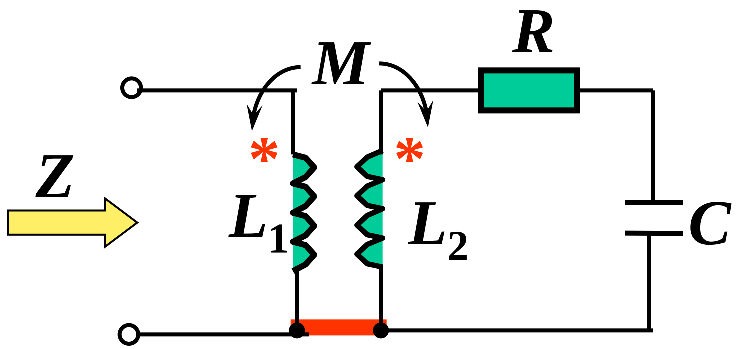
B −1mH

C 5mH

D 3mH

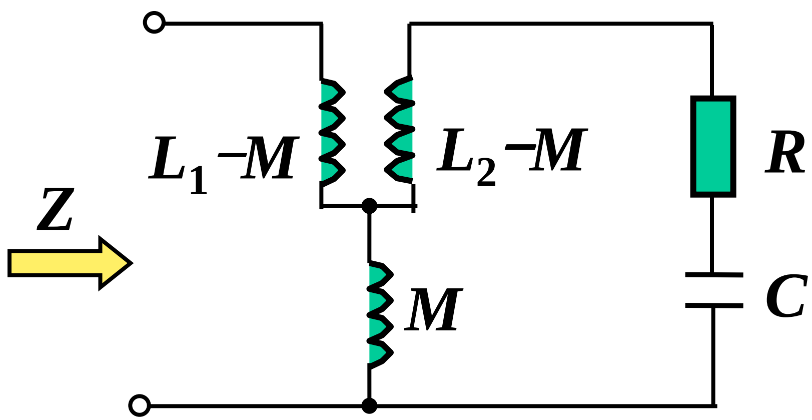
提交

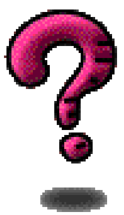
例1 已知如图，求入端阻抗 Z=?



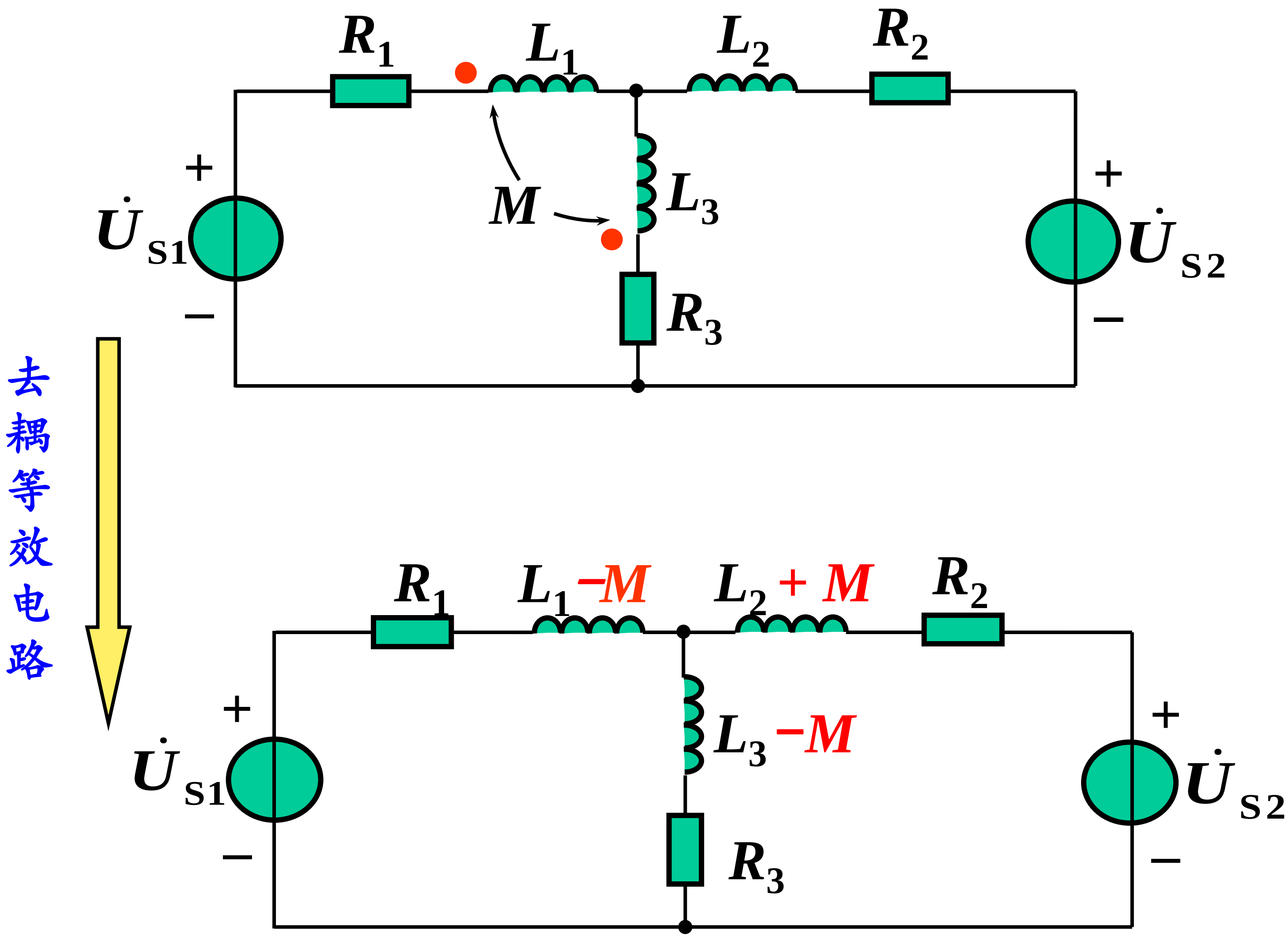
法一 端口加压求流

法二 去耦等效

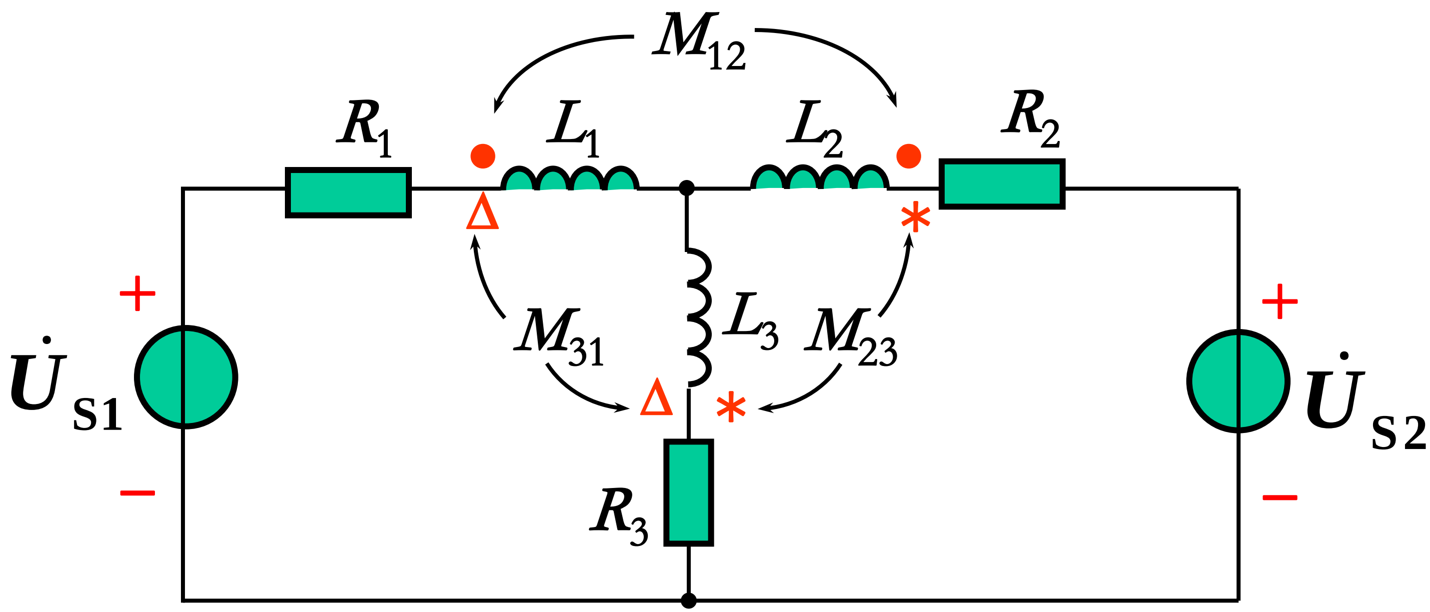




例2 画出下图电路的去耦等效电路。

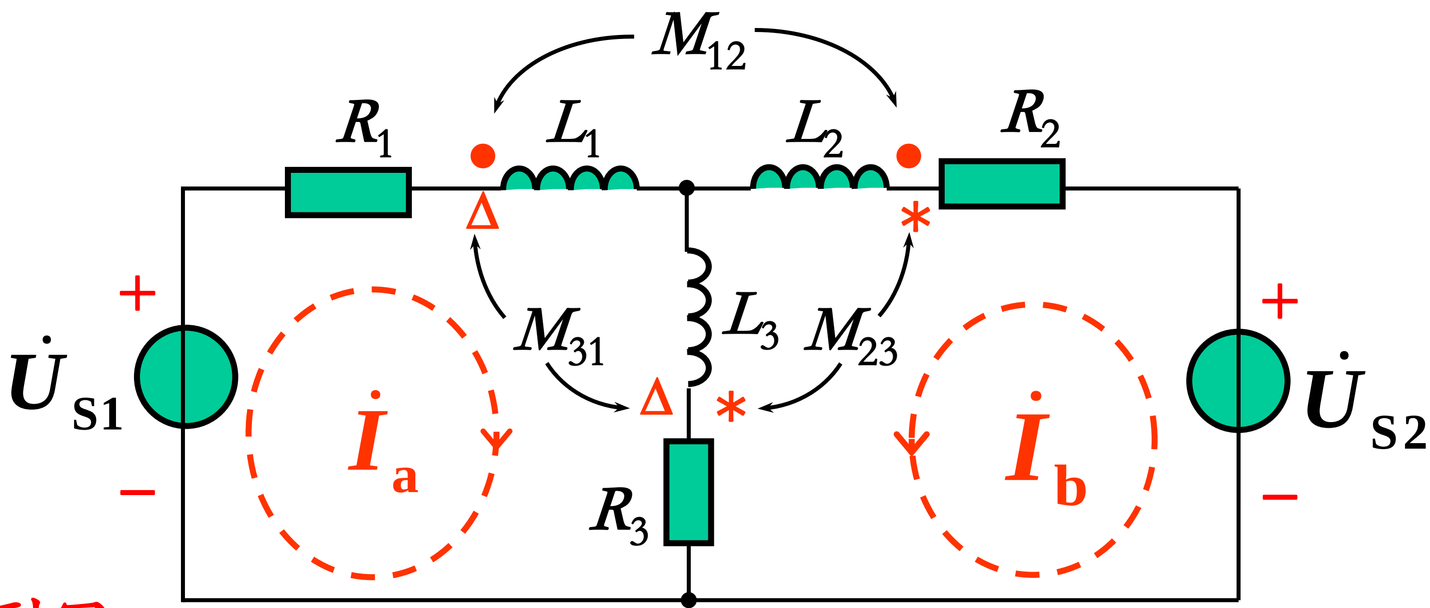


例3 列写电路的回路电流方程。



法1：直接列写

法2：去耦等效

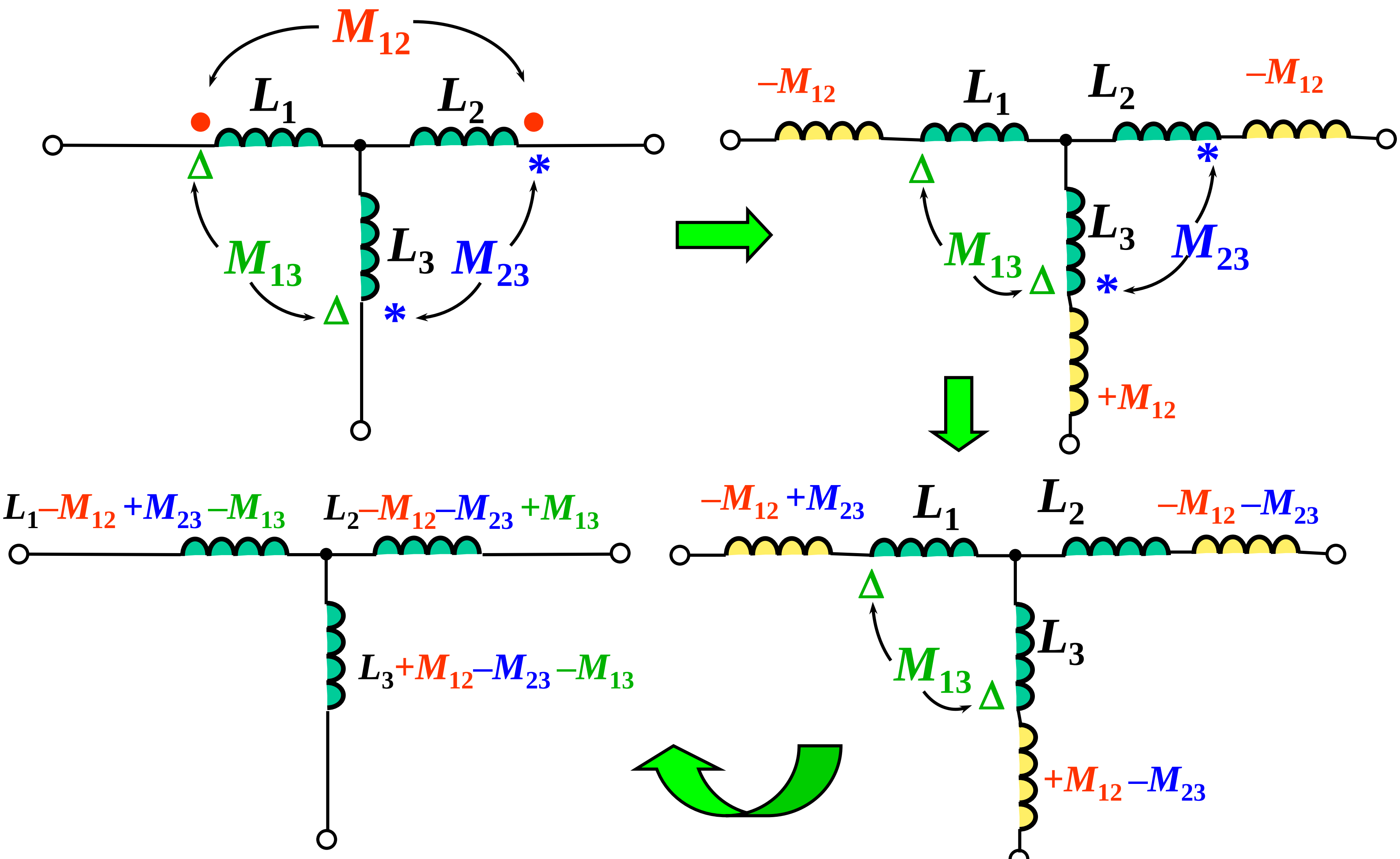


法1：直接列写

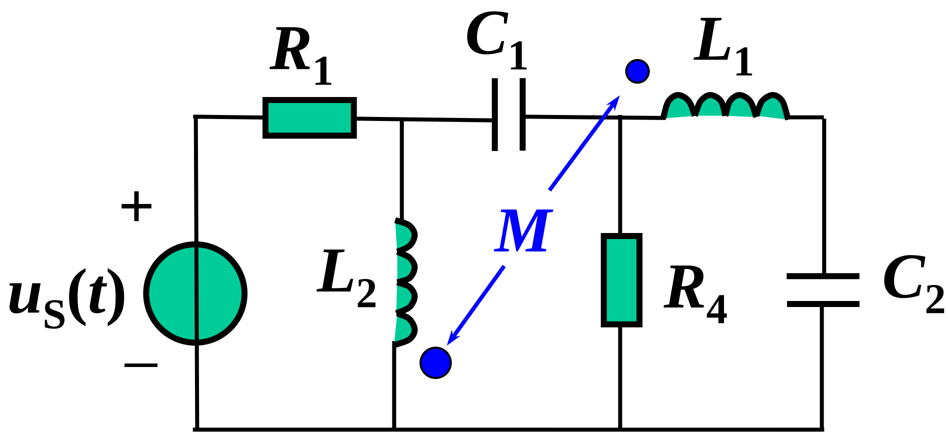
$$
\begin{cases}
(R_1+j\omega L_1+j\omega L_3+R_3)\dot I_a+(R_3+j\omega L_3)\dot I_b \\
-j\omega M_{31}\dot I_a-j\omega M_{31}\dot I_a+j\omega M_{12}\dot I_b-j\omega M_{23}\dot I_b-j\omega M_{31}\dot I_b=\dot U_{S1} \\
(R_2+j\omega L_2+j\omega L_3+R_3)\dot I_b+(R_3+j\omega L_3)\dot I_a \\
+j\omega M_{12}\dot I_a-j\omega M_{31}\dot I_a-j\omega M_{23}\dot I_a-j\omega M_{23}\dot I_b-j\omega M_{23}\dot I_b=\dot U_{S2}
\end{cases}
$$

注意：① 不丢互感电压项；② 互感电压的正、负。

法2　去耦等效电路(一对一对消)



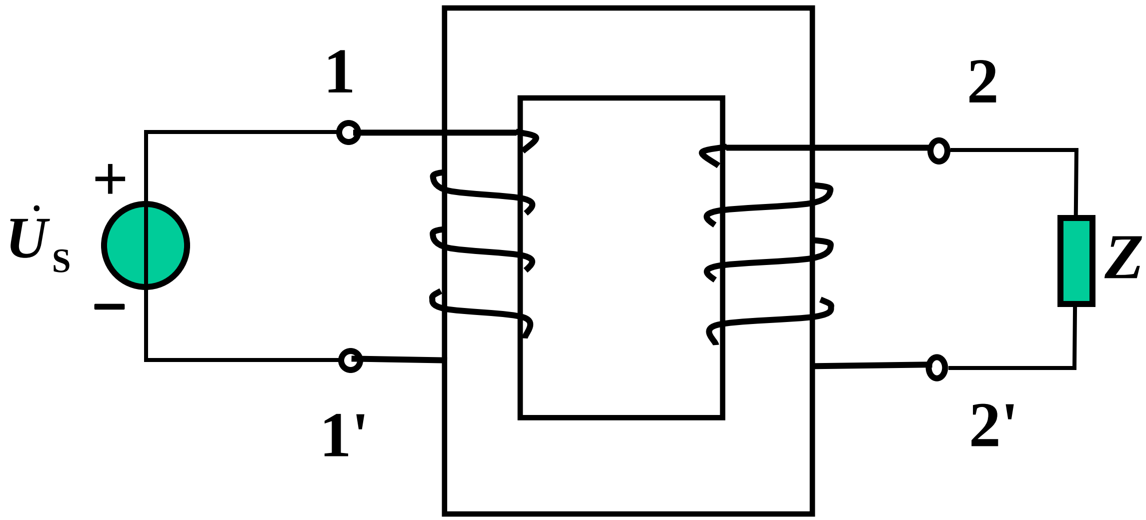
去耦等效不是万能的



没有公共点

怎么办?

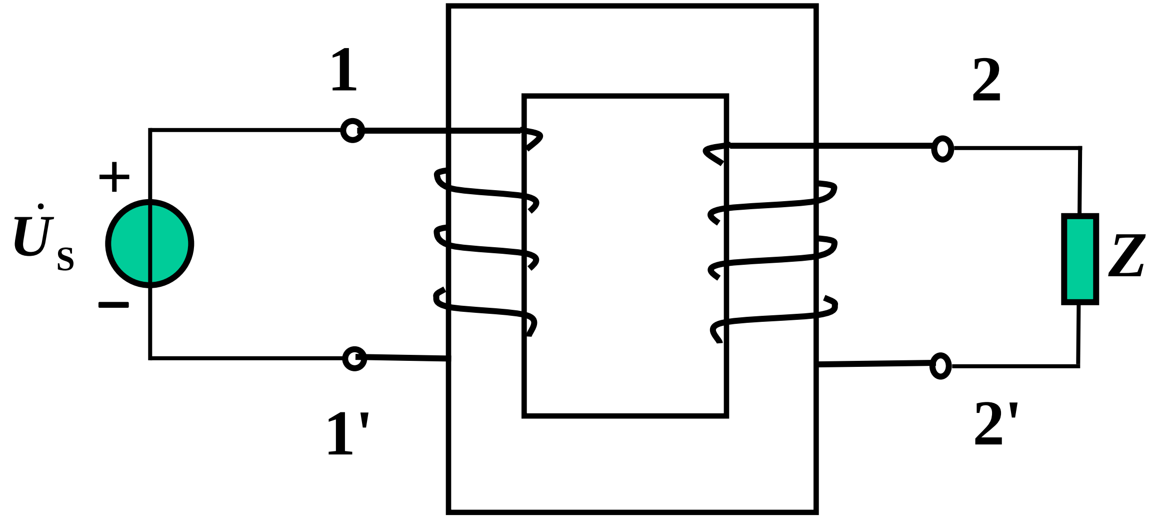
2 变压器 (Transformer)



利用互感的作用来传递能量

- 交流变压、变流
- 电隔离
- 传送功率
- 阻抗匹配

研究思路



1 考虑线圈内阻，求从原边(副边)看的等效电路

⇩ 空芯变压器模型

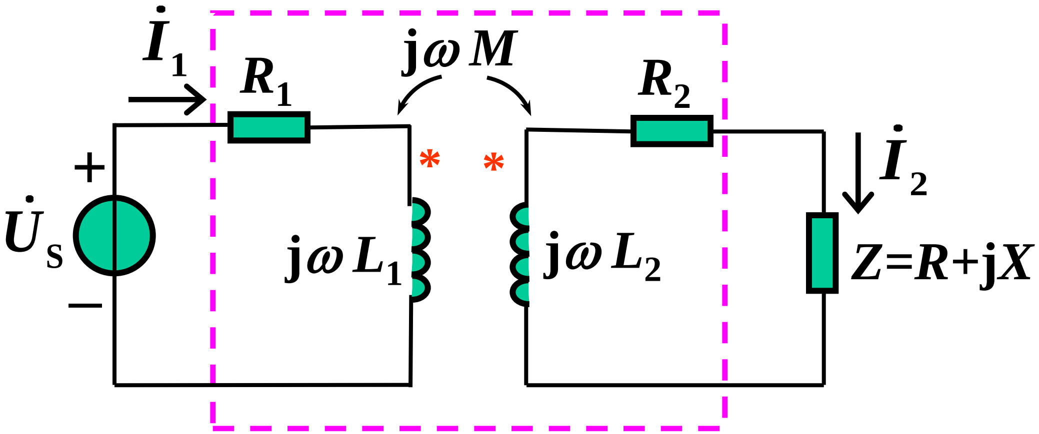
2 忽略考虑线圈内阻，耦合系数为1

⇩ 全耦合变压器模型

3 感值趋向于无穷大

理想变压器模型

(1) 空心变压器



原边回路总抗阻

$Z_{11}=R_1+\mathrm{j}\omega L_1$

副边回路总阻抗

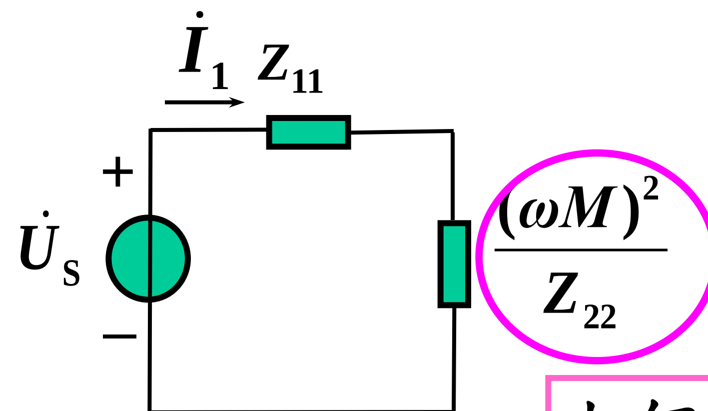
$Z_{22}=(R_2+R)+\mathrm{j}(\omega L_2+X)$

$$\begin{cases} Z_{11}\dot{I}_1-\mathrm{j}\omega M\dot{I}_2=\dot{U}_\mathrm{S} \\ -\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1+Z_{22}\dot{I}_2=0 \end{cases}$$

$$Z_\mathrm{in}=\frac{\dot{U}_\mathrm{S}}{\dot{I}_1}=Z_{11}+\frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$$

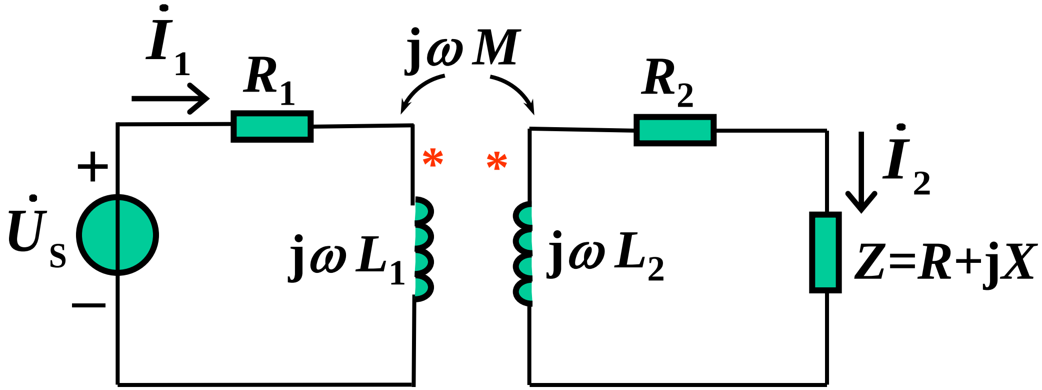
$$\dot{I}_2=\frac{\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1}{Z_{22}}$$

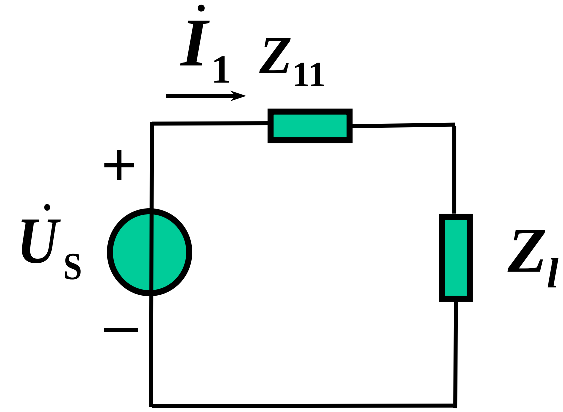
$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_\mathrm{S}}{Z_{11}+\dfrac{(\omega M)^2}{Z_{22}}}$$



原边等效电路

如何理解?





原边等效电路

$$Z_{in}=\frac{\dot{U}_S}{\dot{I}_1}=Z_{11}+\frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$$

引入电阻　　引入电抗

$$Z_l \overset{\text{def}}{=} \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}=\frac{\omega^2 M^2}{R_{22}+\mathrm{j}X_{22}}=\frac{\omega^2 M^2 R_{22}}{R_{22}^2+X_{22}^2}-\mathrm{j}\frac{\omega^2 M^2 X_{22}}{R_{22}^2+X_{22}^2}=R_l+\mathrm{j}X_l$$

$Z_l= R_l+\mathrm{j}\, X_l$　副边反映在原边回路中的阻抗（引入阻抗）。

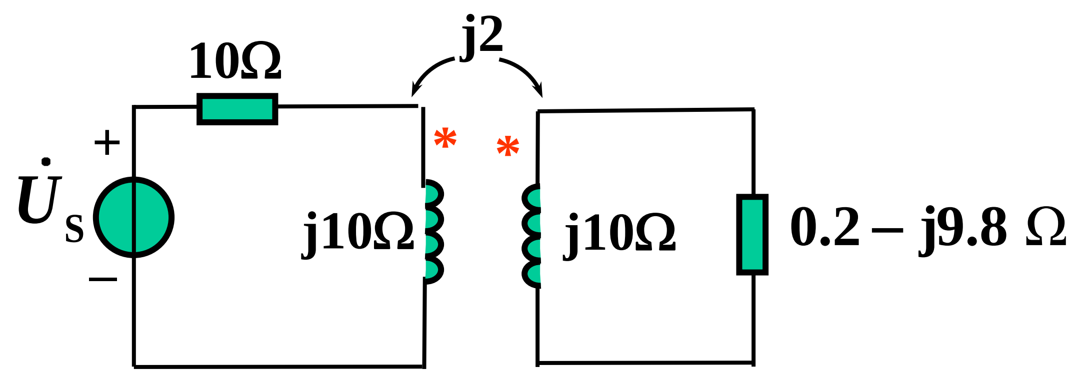
当$\dot{I}_2=0$,　即副边开路，$Z_{in}=Z_{11}$

当$\dot{I}_2\neq 0$,　$Z_{in}=Z_{11}+Z_l$

单选题 1分

设置

副边反映在原边回路中的引入阻抗为



A 10 + j10 Ω

B 8.32 + j0.41 Ω

C — j0.4 Ω

D 10 — j10 Ω

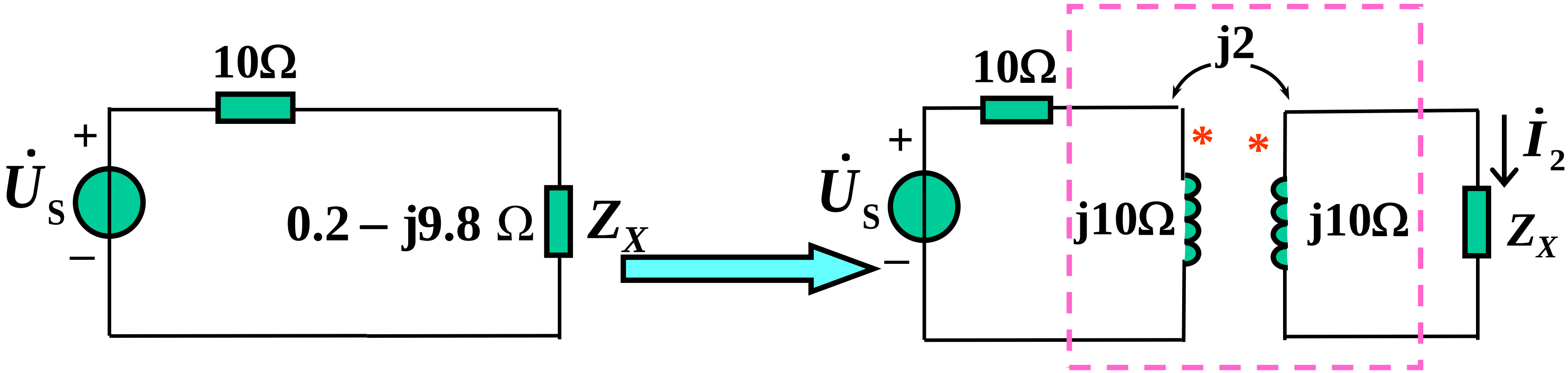
$Z_{11}=R_1+\mathrm{j}\omega L_1$

$Z_{22}=(R_2+R)+\mathrm{j}(\omega L_2+X)$

$$Z_l \overset{\text{def}}{=} \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$$

提交

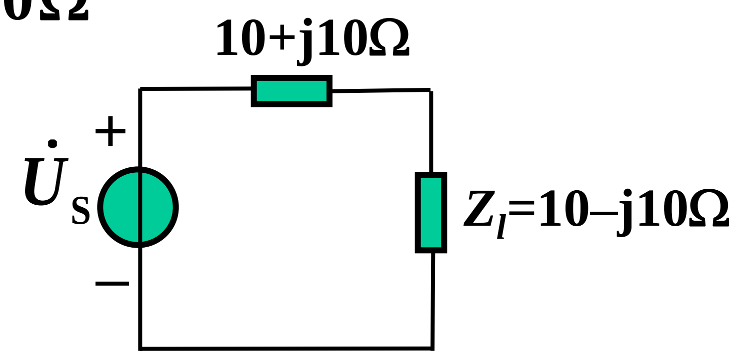
例　已知：电压源U_S=20 V。在电源和负载间加入变压器（如图），验证电路处于最佳匹配；并求此时负载获得的有功功率。



引入阻抗

$$Z_l = \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} = \frac{4}{0.2 - \mathrm{j}9.8 + \mathrm{j}10} = 10 - \mathrm{j}10\Omega$$

$$Z_l = Z_{11}^*$$　　**最佳匹配**



此时负载Z_X获得的有功功率

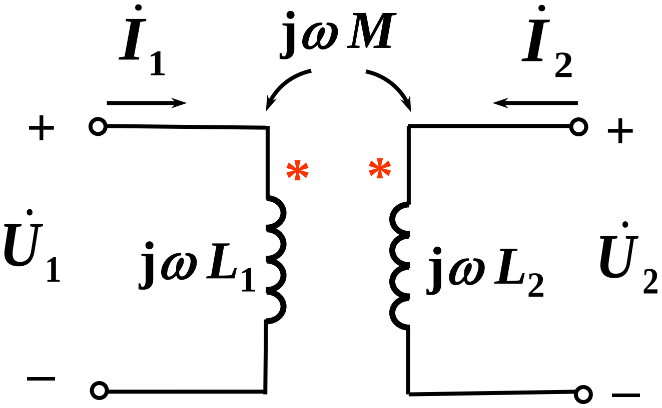
$$P = P_{R引入} = \frac{20^2}{4\times 10} = 10\ \mathrm{W}$$

变压器实现共轭匹配

(2) 全耦合变压器 (unity-coupled transformer)

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

忽略电阻



$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega\sqrt{L_1 L_2}\,\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 = j\omega\sqrt{L_1 L_2}\,\dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2$$

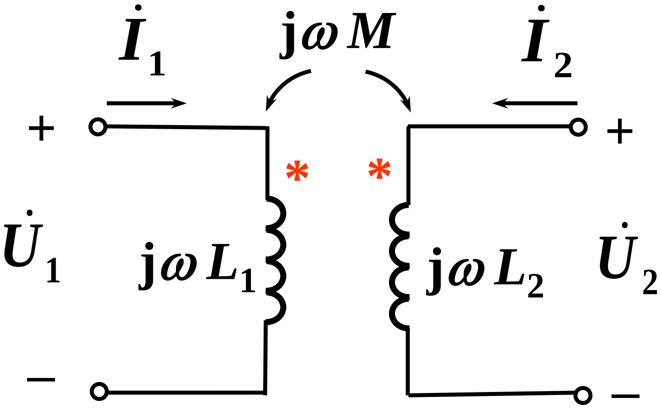
$$\dot{U}_2 \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \dot{U}_1$$

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{N_1}{N_2} = n \rightarrow \text{变比}$$

变压器实现变压

全耦合变压器电压、电流关系

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$



$$\boxed{\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = n}$$

$$\dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1 \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\mathrm{j}\omega L_1} - \frac{M}{L_1}\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1}{\mathrm{j}\omega L_1} - \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{L_1}\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1}{\mathrm{j}\omega L_1} - \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\dot{I}_2$$

$$\boxed{\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\mathrm{j}\omega L_1} - \frac{1}{n}\dot{I}_2}$$

单选题 1分

设置

全耦合变压器原边线圈1000匝，副边线圈5000匝，原边电压有效值为______时，副边电压有效值为1100V。

- A 1100V
- B 5500V
- C 220V
- D 条件不足，无法计算

提交

原边1000匝，副边5000匝的变压器

和原边1匝，副边5匝的变压器

有什么区别?

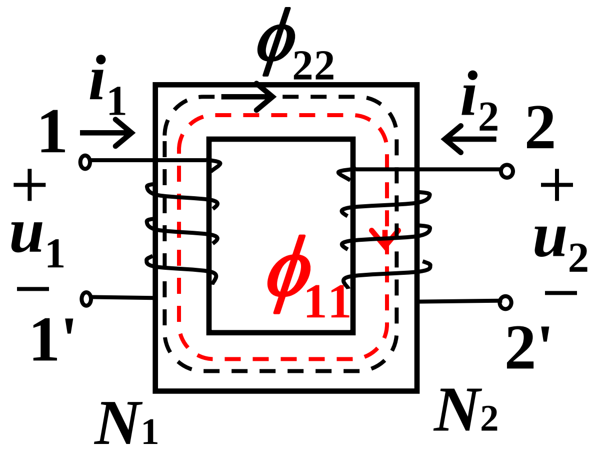
此处可以有弹幕

全耦合变压器电压、电流关系

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = n \\ \dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}_1}{\mathrm{j}\omega L_1} - \dfrac{1}{n}\dot{I}_2 \end{cases}$$

(3) 理想变压器 (ideal transformer)

$$n = \frac{N_1}{N_2}$$

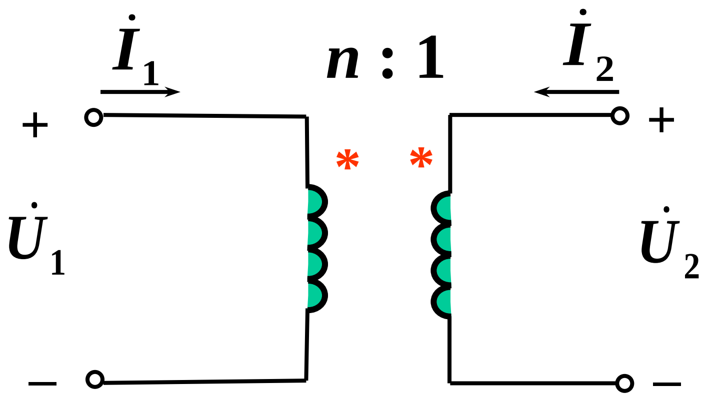


全耦合变压器 $\begin{cases} \dfrac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = n \\ \dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}_1}{\mathrm{j}\omega L_1} - \dfrac{1}{n}\dot{I}_2 \end{cases}$

若$L_1 \to \infty$(原因可以是磁导率 $\mu \to \infty$或者匝数$N_1 \to \infty$)，同时确保L_1/L_2比值不变($L_2 \to \infty$)，且全耦合($M \to \infty$)，有

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = n\dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 = -\dfrac{1}{n}\dot{I}_2 \end{cases}$$

理想变压器的元件特性



理想变压器的电路模型

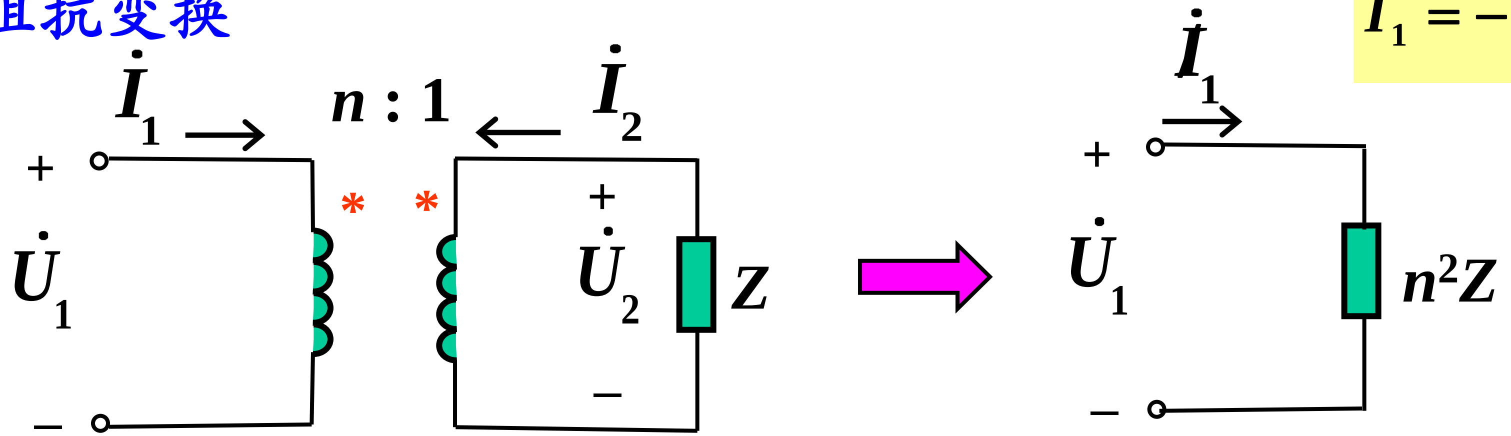
理想变压器模型看不出电感！

$$\dot{U}_1 = n\dot{U}_2$$

$$\dot{I}_1 = -\frac{1}{n}\dot{I}_2$$

理想变压器的性质：

(a) 阻抗变换



$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{n\dot{U}_2}{-\frac{1}{n}\dot{I}_2} = n^2\left(-\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}\right) = n^2 Z$$

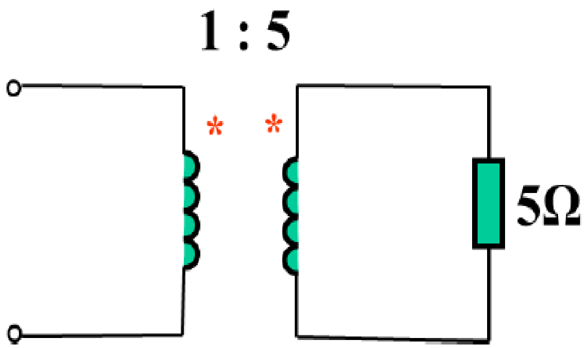
(b) 功率消耗

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 = nu_2 \times \left(-\frac{1}{n}\right) i_2 + u_2 \times i_2 \;\; = 0$$

理想变压器既不储能，也不耗能，

在电路中只起传递信号和能量的作用。

从理想变压器原边看进去，等效电阻为



A 0.2 Ω

B 1 Ω

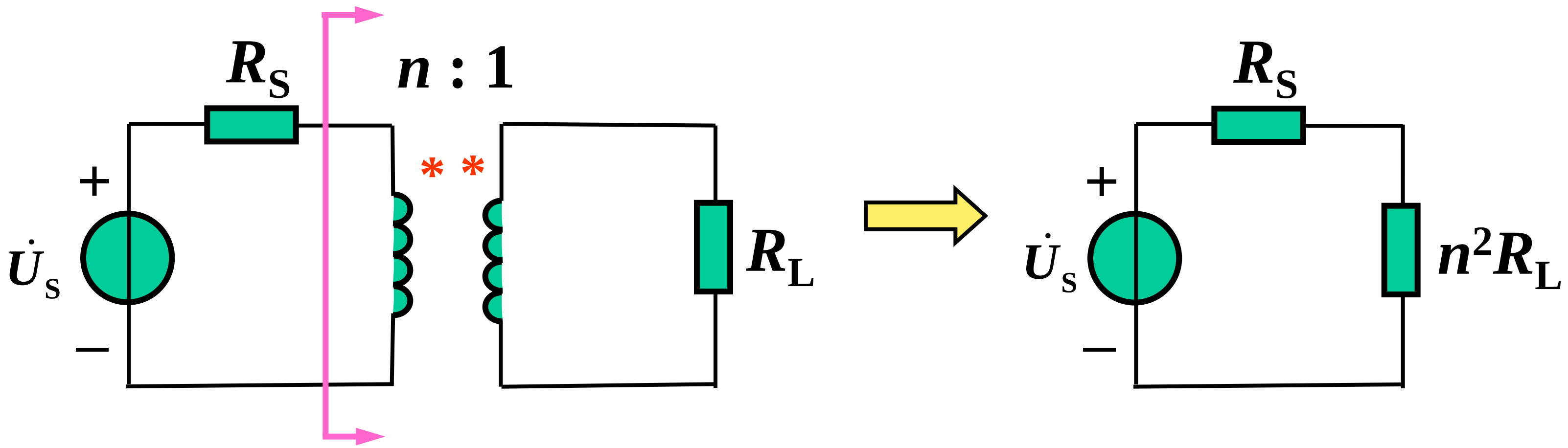
C 25 Ω

D 125 Ω

提交

例1

已知电阻R_S=1kΩ，负载电阻R_L=10Ω。为使R_L上获得最大功率，求理想变压器的变比n。

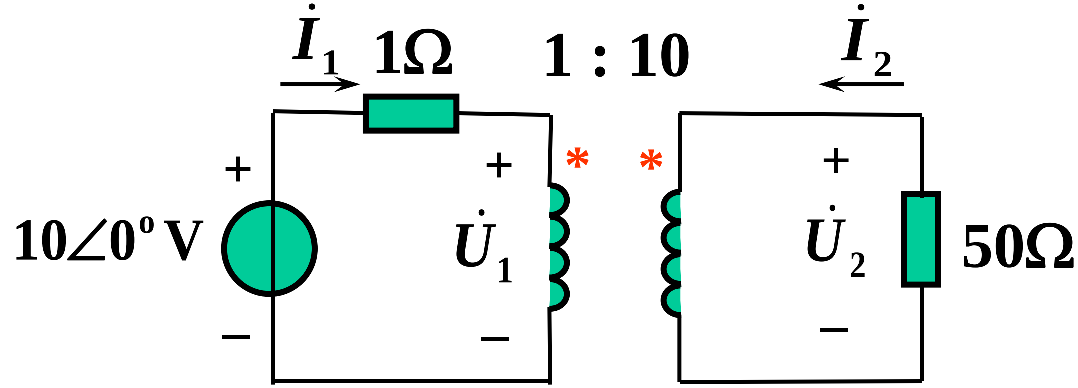


当 $n^2R_L=R_S$时匹配，即

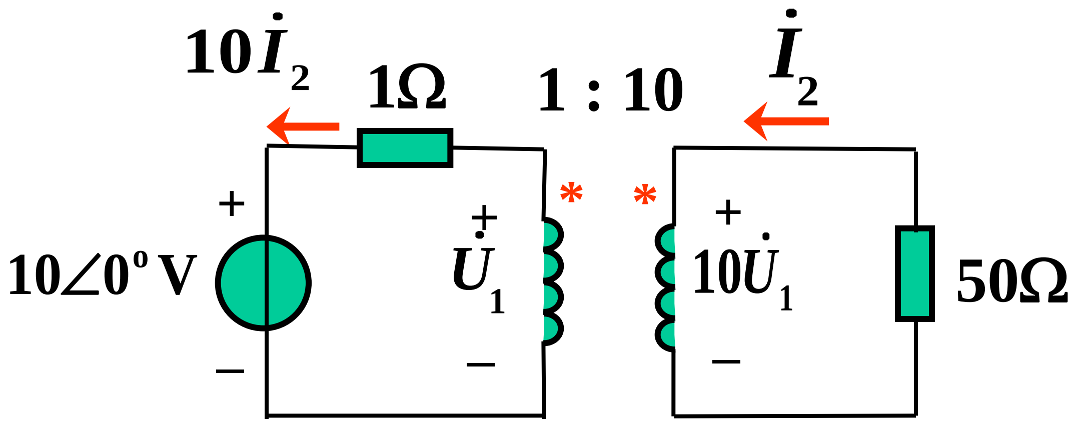
$$10n^2=1000$$

$$n=10$$

例2 求图中电压$\dot{U}_2$。



解：



$$\begin{cases} 10\dot{U}_1 = -50\dot{I}_2 \\ 10\dot{I}_2 + 10 = \dot{U}_1 \end{cases}$$

$$\dot{U}_2 = 33.3\angle 0^\circ \text{ V}$$