线性代数 第7讲

10月4日

第一章第6讲 可逆矩阵与分块矩阵

上一讲要点回顾

可逆矩阵的性质

相抵标准型与等价关系

分块矩阵

定义 1.5.1 (初等矩阵) 对恒同矩阵 I_n 做一次初等变换，得到的矩阵统称为**初等矩阵**：

1. 对换行变换：把 I_n 的第 i,j 行位置互换，得到**对换矩阵**

$$P_{ij}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} \ddots &&&&&&&& \\ & 1 &&&&&&& \\ && 0 &&&& 1 && \\ &&& 1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& 1 &&& \\ && 1 &&&& 0 && \\ &&&&&&& 1 & \\ &&&&&&&& \ddots \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} i & \qquad\qquad & j \end{matrix}\end{array};$$

2. 倍乘行变换：第 i 行乘非零常数 k，得到**倍乘矩阵**

$$E_{ii;k}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} \ddots &&&& \\ & 1 &&& \\ && k && \\ &&& 1 & \\ &&&& \ddots \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix} \\ i \end{array};$$

3. 倍加行变换：把第 i 行的 k 倍加到第 j 行上，得到**倍加矩阵**

$$E_{ji;k}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} \ddots &&&& \\ & 1 &&& \\ && \ddots && \\ & k && 1 & \\ &&&& \ddots \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} i & \qquad & j \end{matrix}\end{array}(j>i),\quad E_{ji;k}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} \ddots &&&& \\ & 1 && k & \\ && \ddots && \\ &&& 1 & \\ &&&& \ddots \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ j \\ \\ i \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} j & \qquad & i \end{matrix}\end{array}(j<i).$$

命题 1.5.2 1. 若矩阵 I_m 经过某一初等行变换得到矩阵 T，则任意 $m\times n$ 矩阵 A 经过相同初等行变换得到矩阵 TA.

2. 若矩阵 I_n 经过某一初等列变换得到矩阵 T，则任意 $m\times n$ 矩阵 A 经过相同初等列变换得到矩阵 AT.

对单位矩阵做一次初等行变换，左乘矩阵A，则结果为A做相应行变换得到的矩阵

对单位矩阵做一次初等列变换，右乘矩阵A，则结果为A做相应列变换得到的矩阵

可逆矩阵

- 在解方程 $ax = b$ 的时候，如果 $a \neq 0$，等式两边同乘以 a^{-1}，得 $x = a^{-1}b$.
- 线性方程组 $AX = b$，能否在一定条件下引进 A^{-1} 的概念，使得解为 $X = A^{-1}b$？
- 由 $a^{-1}a = 1$ 到 $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

定义1.5.3（逆矩阵）设 A 是 n 阶方阵，如果存在 n 方阵 B，使得 $AB = BA = I_n$，则称 A 是可逆矩阵或非奇异矩阵，并称 B 是 A 的逆（矩阵）。

A 的逆矩阵唯一，表示为 A^{-1}

不可逆的矩阵称为奇异矩阵。

命题 1.5.4 初等矩阵可逆，且 $P_{ij}^{-1} = P_{ij}, E_{ii;k}^{-1} = E_{ii;k^{-1}}, E_{ji;k}^{-1} = E_{ji;-k}$.

命题 1.5.5 对角矩阵 D 可逆当且仅当对角元素都不为零，且 D 可逆时有

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} d_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^{-1} \end{bmatrix}.$$

1. 对换行变换：把 I_n 的第 i, j 行位置互换，得到**对换矩阵**

$$P_{ij}=\begin{array}{l}\left[\begin{array}{ccccccccc} \ddots &&&&&&&& \\ & 1 &&&&&&& \\ && 0 &&&& 1 && \\ &&& 1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& 1 &&& \\ && 1 &&&& 0 && \\ &&&&&&& 1 & \\ &&&&&&&& \ddots \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccccc} & & i & & & & j & & \end{array}\end{array};$$

$$P_{ij} \cdot P_{ij} = I,$$

$$P_{ij}^{T} = P_{ij}$$

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}^{T} = P_{ij}$$

命题1.5.4 初等矩阵可逆且逆还是初等矩阵:

$$E_{ji,k} = \begin{array}{c@{}c} \begin{array}{ccccccc} & & \text{第 } i \text{ 列} & & \text{第 } j \text{ 列} & & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & k & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$E_{ji,k}E_{ji,-k} = I,$$

$$E_{ji,-k}E_{ji,k} = I,$$

$$E_{ji,k}^{-1} = E_{ji,-k}.$$

求逆矩阵的初等变换法（Gauss-Jordan消去法）

可逆方阵 A 可仅经过一系列行初等变换化为单位阵.

$$P_s \cdots P_1 A = I, \qquad P_s \cdots P_1 = A^{-1}$$

所以完全相同的变换可以把 I 化为 A^{-1}. $A^{-1}[A, I] = [I, A^{-1}]$

构造一个分块矩阵: $[A, I] \xrightarrow{\boxed{\text{仅用行初等变换}}} [I, A^{-1}]$

$Gauss-Jordan$ 消去法求 A 的逆矩阵，$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

解　先将 A 化为阶梯形矩阵，再化为单位阵：

$$[A,I]=\left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & -3/2 & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right], \qquad A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ -1 & 1 & -3\end{bmatrix}$，试判断 A 是否可逆.

解 $$[A,I]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1\end{array}\right],$$

练习 1.5.8 求下列矩阵方程的解: $\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

逆矩阵与解线性方程组

考虑线性方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$A = (a_{ij})_{n\times n}, X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T, b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$$

写成矩阵形式　AX = b.

$$AX = b \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}b \Rightarrow X = A^{-1}b$$

逆矩阵的几个性质

命题1.5.6 若矩阵A，B可逆

(1) A^{-1}可逆，且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$

(2) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(3) A^{T}可逆，且$(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$，记为$A^{-T}$

(2′) $(A_1A_2\cdots A_k)^{-1}=A_k^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$

定理 1.5.7 设 A 是 n 阶方阵，以下叙述等价：

1. A 可逆；
2. 任取 n 维向量 $\boldsymbol{b}$，方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解唯一，且 $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$；
3. 齐次方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解；
4. A 对应的阶梯形矩阵有 n 个主元；
5. A 对应的行简化阶梯形矩阵一定是 I_n；
6. A 是有限个初等矩阵的乘积.

练习1.5.18，证明： 如果 n 阶矩阵 A 满足 $A^2=A$，则 $I-2A$ 可逆。

命题 1.5.10 上三角矩阵可逆当且仅当其对角元素都不为零．此时，其逆矩阵也是上三角矩阵，逆矩阵的对角元素是该矩阵的对应对角元素的倒数．

下三角矩阵也有类似性质．命题1.5.10：练习1.5.11，习题课题目

定义 1.5.11 (置换矩阵) 单位矩阵经一系列对换行变换得到的矩阵称为**置换矩阵**．

简单验证可以得到置换矩阵的一些性质．

命题 1.5.12

1. 单位矩阵经一系列对换列变换得到的矩阵也是置换矩阵；
2. 置换矩阵可以通过按某种次序排列单位矩阵的行来得到；
3. 置换矩阵可以通过按某种次序排列单位矩阵的列来得到；
4. 不同的 n 阶置换矩阵共有 $n!$ 个[7]；
5. 置换矩阵的乘积也是置换矩阵；
6. 置换矩阵的逆是其转置，也是置换矩阵．

练习 1.5.7 求 $A = \begin{bmatrix} & a_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n-1} \\ a_n & & & \end{bmatrix}$ 的逆矩阵，其中 $a_i \neq 0$．

（严格）对角占优矩阵

定义 1.5.13 (对角占优) 如果矩阵 $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ 对 $i=1,\cdots,n$, 都有 $|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$, 则称其为（行）**对角占优矩阵**.

命题 1.5.14 对角占优矩阵一定可逆.

练习 1.5.6 说明 $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ 可逆，并计算其逆.

相抵标准形

定义 1.5.16 (左相抵) 如果矩阵 A 可以经过一系列初等行变换化成矩阵 B, 则称 A 和 B **左相抵**.

命题 1.5.17 给定两个 $m\times n$ 矩阵 A, B. 那么二者左相抵, 当且仅当存在 m 阶可逆矩阵 P, 使得 $PA = B$.

证. A 与 B 左相抵 $\Leftrightarrow$ A 经一系列初等行变换得到 B $\Leftrightarrow$ 存在 m 阶初等矩阵 $P_1, \cdots, P_s$, 使得 $P_s\cdots P_1 A = B \overset{\text{定理 1.5.7}}{\Longleftrightarrow}$ 存在 m 阶可逆矩阵 P, 使得 $PA = B$. $\square$

可以看到在所有和矩阵 A 左相抵的矩阵中, 形式最简单的应该就是其行简化阶梯形, 因此我们也可以称此矩阵为 A 的**左相抵标准形**.

等价关系

不难看出，左相抵关系满足如下三条基本性质：

1. 反身性：每个矩阵和自身左相抵；
2. 对称性：如果 A 和 B 左相抵，那么 B 和 A 左相抵；
3. 传递性：如果 A 和 B 左相抵，B 和 C 左相抵，那么 A 和 C 左相抵.

事实上，很多数学对象之间都存在类似的关系．为此，我们抽象出一系列概念.

定义 1.5.18 (等价关系) 如果非空集合 S 的元素之间定义了一种二元关系 “$\sim$”，满足：

1. 反身性：对任意 $a \in S$，$a \sim a$；
2. 对称性：如果 $a \sim b$，那么 $b \sim a$；
3. 传递性：如果 $a \sim b, b \sim c$，那么 $a \sim c$，

则称此关系为 S 上的一个**等价关系**.

S 中所有与其中某一元素 a 等价的元素组成的集合称为 a 所在的**等价类**. 由元素 a 变成与其等价的元素 b 的过程称为对应于这一等价关系的**等价变换**. 同一等价类中的元素共享的某个属性称为这一等价关系中（或这一等价变换下）的**不变量**. 同一等价类中的形式最简单、性质最好的元素往往称为这一等价关系中（或这一等价变换下）的**标准形**.

显然，S 等于所有等价类的无交并. 等价类的数目可以有限，也可以无限.

例 1.5.19 平面上所有三角形组成的集合上，相似是一个等价关系，三个角的角度是等价关系中的不变量.

由等价关系得到等价类，进而对集合进行划分的举例，

定义（x,y）的二元关系：x-y能够被3整除。

此关系为整数集合上的一个等价关系。

由这个等价关系得到3个等价类：{3k}，{3k+1}，{3k+2}，

是对整数集合的一个划分。

分块矩阵的概念

- 处理有结构特点的大矩阵，有时需要进行分块
- 分法：将矩阵用纵线和横线分成若干小矩阵，每个小矩阵称为原矩阵的子块，分为子块的矩阵叫分块矩阵.

例 $A=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ \hdashline 0 & 1 & 1 & b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$，即 $A=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ \hdashline 0 & 1 & 1 & b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$

常用分块方式

- 分成四块，例如：$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$
- 按列分块，例如：$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$
- 按行分块，例如：$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$

(1) 体现原矩阵特点，(2)根据问题需要，(3) 能够把块看作元素进行运算

分块矩阵的运算

- 设分块矩阵 A 与 B 的行数和列数均相同，采用同样的分法，即

$$A=\begin{bmatrix}\boxed{A_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{s1} & \cdots & A_{sr}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}\boxed{B_{11}} & \cdots & \boxed{B_{1r}}\\ \vdots & & \vdots\\ B_{s1} & \cdots & B_{sr}\end{bmatrix}\qquad A+B=\begin{bmatrix}\boxed{A_{11}+B_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1r}+B_{1r}}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr}\end{bmatrix}.$$

其中 A_{ij} 与 B_{ij} 的行数和列数均相同

- 设 $A=\begin{bmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{s1} & \cdots & A_{sr}\end{bmatrix}$，λ 是数，则 $\lambda A=\begin{bmatrix}\lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{sr}\end{bmatrix}.$

分块矩阵的乘法 C = AB（ $A_{m\times p}$，$B_{p\times n}$ ）

A 的列数 = B 的行数

A 的列的分法 = B 的行的分法

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1s}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \boldsymbol{A}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{rs}\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1t}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \boldsymbol{C}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{rt}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_{ik}=\boldsymbol{A}_{i1}\boldsymbol{B}_{1k}+\boldsymbol{A}_{i2}\boldsymbol{B}_{2k}+\cdots+\boldsymbol{A}_{is}\boldsymbol{B}_{sk}=\sum_{j=1}^{s}\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{B}_{jk},\ \boldsymbol{i}=1,\cdots,\boldsymbol{r};\ \boldsymbol{k}=1,\cdots,\boldsymbol{t}.$$

分块矩阵

在矩阵乘法中，我们经常把矩阵写成列向量组或者行向量组并排的形式．例如，设 $A = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_l^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$，其中 $\tilde{\boldsymbol{a}}_i^{\mathrm{T}}$ 是 m 维行向量，$\boldsymbol{b}_1$ 是 m 维列向量，则

$$AB = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_l^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \tilde{\boldsymbol{a}}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}.$$

另一方面，若 $n = l$，我们有

$$BA = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_l^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}_1\tilde{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{T}} + \cdots + \boldsymbol{b}_n\tilde{\boldsymbol{a}}_l^{\mathrm{T}}.$$

准三角形矩阵

- 准上三角矩阵: $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$

其中 $A_{11},\cdots,A_{nn}$ 都是小方阵，上三角矩阵可作为准上三角矩阵的特殊情形.

- 准下三角矩阵: $\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$

其中 $A_{11},\cdots,A_{nn}$ 都是小方阵，下三角矩阵可作为准下三角矩阵的特殊情形.

准三角形矩阵具有下列性质:

两个具有相同分块的准上(下)三角形矩阵的和, 乘积仍是准上(下)三角形角矩阵,

数与准上(下)三角形矩阵的乘积

准上(下)三角形矩阵的转置仍是准上(下)三角形矩阵

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ 0 & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1n}+B_{1n} \\ 0 & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2n}+B_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn}+B_{nn} \end{bmatrix}, \quad AB=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & A_{22}B_{22} & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{nn}B_{nn} \end{bmatrix},$$

● 准对角矩阵: $\begin{bmatrix} A_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & A_{nn} \end{bmatrix} = diag(A_{11}, \cdots, A_{nn})$

其中 $A_{11}, \cdots, A_{nn}$ 都是小方阵，对角矩阵可作为准对角矩阵的特殊情形.

如下列矩阵都是准对角矩阵：

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & 0 \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & B_{22} \end{array}\right]$$

例 试判断矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ 是否可逆? 若可逆, 求出 A^{-1}.

作 业（10月4日）

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

练习1.5

12(1,2,3,4,5)，15，17，23

更正：第17题第3问是：设f(x)=p(x)+q(x)…

练习1.6

2，6，13

10月11日提交

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~