第八次习题课题目

习题 1 (练习 2.4.24). 给定 n 阶方阵 A.

1. 对任意 k, 证明 $\mathscr{R}(A^k) \geqslant \mathscr{R}(A^{k+1})$;
2. 假设 $\mathscr{R}(A^k) = \mathscr{R}(A^{k+1})$, 求证 $\mathscr{R}(A^{k+1}) = \mathscr{R}(A^{k+2})$;
3. 求证: 存在 $k \leqslant n$, 满足 $\operatorname{rank}(A^k) = \operatorname{rank}(A^{k+1}) = \cdots$. 由此证明, 如果存在 p 使得 $A^p = O$, 则 $A^n = O$.

习题 2 (练习 5.2.7). 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 1,2,3, 求下列矩阵的特征值.

1. $2A, A+I_3, A^2, \overline{A}, A^T, A^{-1}$($A$ 为何可逆)?. 2. $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & A \\ 0 & A \end{bmatrix}$.

习题 3 (练习 5.2.22). 求矩阵 A 的稳态矩阵 A^∞. 比较它们的特征值和特征向量, 并说明为何 A^{2021} 近似于 A^∞. 如果 A^n 和 A^∞ 中对应的元素相差不超过 0.01, n 至少是多少? A 的两行互相交换, 特征值是否不变?

1. $A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}$. 2. $A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0.4 & 0.9 \end{bmatrix}$.

习题 4 (练习 5.2.13). 对方 A, 若多项式 $f(x)$ 满足 $f(A) = O$, 则称 $f(x)$ 是 A 的化零多项式. 给定 A 的特征值 λ, 证明, 若 $f(x)$ 是 A 的化零多项式, 则 $f(\lambda) = 0$.

习题 5 (练习 5.2.18). 设 A, B 分别是 $m \times n, n \times m$ 阶矩阵, 证明,

$$\lambda^n \det(\lambda I_m - AB) = \lambda^m \det(\lambda I_n - BA)$$

特别地, 当 $m = n$ 时, $\det(\lambda I_m - AB) = \det(\lambda I_n - BA)$.

习题 6 (练习 5.3.9). 利用特征值计算下列 n 阶矩阵的行列式.

1. $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1}b_n \\ a_nb_1 & \cdots & a_nb_{n-1} & 1+a_nb_n \end{vmatrix}$.

习题 7. 设 A, B 分别为 $m \times n$ 阶和 $n \times m$ 阶矩阵. 证明若 $\lambda \neq 0$ 是 AB 的特征值, 则 λ 也是 BA 的特征值. 举例说明 $\lambda = 0$ 时, 结论不一定对.

习题 8 (练习 5.2.21). 设方阵 A 的每个元素都是整数, 证明 $\dfrac{1}{2}$ 一定不是 A 的特征值.

习题 9. 设 A 是 n 阶实方阵, 且任意非零向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 均为其特征值, 证明 $A = \lambda I_n$.

习题 10. 已知一个三阶方阵的特征值为 0, 1, 2. 那么下列哪些项就可以确定?

1. $\operatorname{rank}(B)$ 2. $\det(B^T B)$ 3. $B^T B$ 的特征值 4. $(B^2 + I)^{-1}$ 的特征值