第六周作业参考解答

于子宏

练习 2.3.1

1. 设 u_i, v_i 的第 j 个元素为 u_{ij}, v_{ij}.A 的列空间 $R(A)$ 是 $Ae_1 = u_1v_1^Te_1 + u_2v_2^Te_1 = v_{11}u_1 + v_{21}u_2$ 和 $Ae_2 = u_1v_1^Te_2 + u_2v_2^Te_2 = v_{12}u_1 + v_{22}u_2$ 生成的子空间. A 的行空间 $R\left(A^T\right)$ 是 $A^Te_1 = v_1u_1^Te_1 + v_2u_2^Te_1 = u_{11}v_1 + u_{21}v_2$ 和 $A^Te_2 = v_1u_1^Te_2 + v_2u_2^Te_2 = u_{12}v_1 + u_{22}v_2$ 生成的子空间.

2. $\mathrm{rank}(A)$ 可能的取值为 0, 1, 2.

3. $u_1v_1^T$ 和 $u_2v_2^T$ 各可以提供秩 1.

■ 很多同学忽略了秩可能为 *0*.

练习 2.3.2

1. 第 1, 2, 4 列.　　2. 第 1, 2, 3 列.　　3. 第 1, 2, 3, 4, 5 列.

练习 2.3.3

1. A 对应的行简化梯形矩阵对应零空间 $N(A)$ 满足的一组线性无关的线性方程. 设 $N(A)$ 的一组基为 $a_1, \cdots, a_k$, 解方程 $x^T \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_k \end{bmatrix} = 0$ 得到一组线性无关的行向量 x^T, 再做行变换化为行简化阶梯形即为 A 的行简化阶梯形. (解方程时选取适当的解, 可以直接得到行简化阶梯形.) 解得 A 的行简化阶梯形为 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ & & 1 & -6 \end{bmatrix}$. $\mathrm{rank}(A) = 2$.

2. A 的行简化阶梯形为 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$. $\mathrm{rank}(A) = 1$.

3. A 的行简化阶梯形为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ & 1 & 2 & 3 \\ & & & \end{bmatrix}$. $\mathrm{rank}(A) = 2$.

4. A 的行简化阶梯形为 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$. $\mathrm{rank}(A) = 1$.

■ 注意第 3 问部分同学写成 $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\&1&2&3\\&&&\end{bmatrix}$, 并不是行简化阶梯形.

练习 2.3.5

1. $A=\begin{bmatrix}1&2&4\\2&4&8\\4&8&16\end{bmatrix}$. 2. $A=\begin{bmatrix}3&9&-9/2\\1&3&-3/2\\2&6&-3\end{bmatrix}$. 3. $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&bc/a\end{bmatrix}$. 4. $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&4&7\\4&5&9\end{bmatrix}$.

练习 2.3.6

1. $\begin{bmatrix}0&1&1&1&1&1&1\\&&&1&1&1&1\\&&&&1&1&1\\&&&&&&\end{bmatrix}$. 2. $\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1\\&&1&1&1&1&1\\&&&&&1&1\\&&&&&&1\end{bmatrix}$. 3. $\begin{bmatrix}0&0&0&1&1&1&1\\&&&&&1&1\\&&&&&&\\&&&&&&\end{bmatrix}$.

4. $\begin{bmatrix}1&1&0&1&1&1&0&0\\&&1&1&1&1&0&0\\&&&&&&1&0\\&&&&&&&1\end{bmatrix}$. 5. $\begin{bmatrix}0&1&1&0&0&1&1&1\\&&&1&0&1&1&1\\&&&&1&1&1&1\\&&&&&&&\end{bmatrix}$.

练习 2.3.7

1. 不存在. 主列的数量即为矩阵的秩, 而 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(A^T)$.

2. 不存在. 非零的阶梯形矩阵第 1 行非零.

练习 2.3.12

由 A 的秩为 1, A 的某列 $\boldsymbol{a}\neq 0$, 且 A 的任意两列线性相关. 设 A 的第 i 列等于 $\boldsymbol{a}$ 的 b_i 倍, 取 $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1&\cdots&b_n\end{bmatrix}^T$, 则 $A=ab^T$.

练习 2.3.18

第一个断言是第二个的转置, 只证第二个断言. 考虑 A 的行简化阶梯形, 其必形如 $\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}$.

练习 2.3.23

1. $u=\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix}, v=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$.

2. m 行 r 列. r 行 n 列. 若 A 为行简化阶梯形, 不难看出 $A=CR$. 对一般的矩阵 A', 我们有 $A'=PA$, 其中 P 可逆, A 为某个行简化阶梯形矩阵. 则 $A'=PCR$. 取 $C'=PC$, 则有 $A'=C'R$.

3. 由第 2 问即得.

练习 2.4.1

1. $\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-2\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\-6\\0\\0\\1\end{bmatrix}$. 2. $\begin{bmatrix}4\\-2\\2\\-3\\7\end{bmatrix}$. 3. $\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-5\\0\\0\\3\end{bmatrix}$.

■ 部分同学计算出错.

练习 2.4.2

$$\begin{bmatrix}2/3\\1/6\\0\\0\\0\end{bmatrix} + c_1\begin{bmatrix}0\\1/2\\1\\0\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0\\-1/2\\0\\1\\0\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}1/3\\5/6\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \text{其中 } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

■ 部分同学计算出错.

练习 2.4.4

对 A 做可逆行变换不改变 A 的零空间, A 的零空间即为 $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\&1&2&3\\&&1&2\end{bmatrix}$ 的零空间, 一组基为 $\begin{bmatrix}0\\1\\-2\\1\end{bmatrix}$.

对 A 做可逆列变换不改变 A 的列空间, A 的列空间即为 $\begin{bmatrix}1&&\\6&1&\\9&8&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&&\\6&1&\\9&8&1\end{bmatrix}$ 的列空间, 一组基为 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.

A 的行空间即为 A^T 的列空间, 对 A 做可逆行变换不改变 A^T 的列空间, A^T 的列空间即为 $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\&1&2&3\\&&1&2\end{bmatrix}^T$ 的列空间, 一组基为 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\2\end{bmatrix}$.

A 的左零空间即为 A^T 的零空间, 对 A 做可逆列变换不改变 A^T 的零空间, A^T 的零空间即为 $\begin{bmatrix}1&&\\6&1&\\9&8&1\end{bmatrix}^T$ 的零空间, 为 $\{\mathbf{0}\}$, 没有基.

■ 注意平凡子空间 $\{\mathbf{0}\}$ 没有基, 不能写成基为 $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$.

练习 2.4.5

对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的通解为 $x=k\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, 故可解出 A 的行简化阶梯形为 $\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$, A 的每行是 $\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$ 的线性组合. 代入特解 $x=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 解得 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 0\end{bmatrix}$.

练习 2.4.6

考察特解 $\begin{bmatrix}a\\0\\0\end{bmatrix}$ 得 $a=12$. 对应的齐次线性方程组 $\begin{bmatrix}1 & -3 & -1\end{bmatrix}x=0$ 的解形如 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b\\1\\0\end{bmatrix}x_2+\begin{bmatrix}c\\0\\1\end{bmatrix}x_3$, 解得 $b=3, c=1$.

练习 2.4.8

$b_1=\begin{bmatrix}5\\17\\1\end{bmatrix}, b_2=\begin{bmatrix}11\\23\\0\end{bmatrix}, b_3=\begin{bmatrix}38\\86\\1\end{bmatrix}.\quad v_3=v_1+3v_2.$

■ 部分同学计算出错.

练习 2.4.13

注意到 $c_0x_0+c_1x_1+\cdots+c_tx_t=x_0+c_1k_1+\cdots+c_tk_t$.

练习 2.4.21

设这个子空间的基为 $a_1,\cdots,a_r$, 将其扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $a_1,\cdots,a_r,b_1,\cdots,b_{n-r}$, 则线性映射 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n-r}, k_1a_1+\cdots+k_ra_r+l_1b_1+\cdots+l_{n-r}b_{n-r}\mapsto l_1e_1+\cdots+l_{n-r}e_{n-r}$ 对应的矩阵的零空间即为这个子空间.

练习 2.4.22

$N(A)\subseteq N(B)\iff B$ 的行可被 A 的行线性表示 $\iff$ 存在 $m\times l$ 矩阵 C, 使得 $B=CA$.

练习 2.4.23

$N(A)=N(B)\iff A,B$ 的行可以互相线性表示 $\iff$ 存在 m 阶可逆矩阵 T, 使得 $B=TA$.