第十一次习题课题目

一 求以下矩阵的奇异值分解：

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(2) $A = uv^T$, 其中 $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| = \|v\| = 1$;

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

(5) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

二 设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 的奇异值分解是 $A = U\Sigma V^T$，满足 $U = (u_1, \cdots, u_m)$ 是 m 阶正交矩阵，$V = (v_1, \cdots, v_n)$ 是 n 阶正交矩阵，$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & \end{bmatrix}_{m\times n}$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$, 其中 $r = rank(A)$.

(1) 证明 $\|Av_1\| = \sigma_1 = max_{\|v\|=1}\|Av\|$.

(2) 证明 $\|Av_2\| = \sigma_2 = max_{v\perp v_1, \|v\|=1}\|Av\|$.

三 讨论特征值与奇异值的差异：

(1) 特征值适用的矩阵?

(2) 奇异值适用的矩阵?

(3) 对给定的一个 n 阶方阵，其对应的特征值和奇异值相同吗?

(4) 对给定的一个实对称矩阵, 其对应的特征值和奇异值相同吗?

(5) 对给定的一个 n 阶方阵，对应的特征值和奇异值的共性?

四 (1) 设 $A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $A,B,A+B$ 的最大奇异值分别是 r,s,t. 证明 $r+s\geq t$..

(2) 设 $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R}),B\in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, A,B,AB 的最大奇异值分别是 r,s,t. 证明 $rs\geq t$.

(3) 设 $A\in M_n(\mathbb{R}),\sigma_1$ 是 A 的最大奇异值，σ_r 是最小 (正) 奇异值，λ 是 A 的任意实特征值。证明 $\sigma_r\leq|\lambda|\leq\sigma_1$.

五 设 $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 的奇异值分解是 $A=U\Sigma V^T$, 满足 $U=(u_1,\cdots,u_m)$ 是 m 阶正交矩阵, $V=(v_1,\cdots,v_n)$ 是 n 阶正交矩阵，$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \\ & & \end{bmatrix}_{m\times n}$, $\sigma_1\geq\sigma_2\geq\cdots\geq\sigma_r>0$, 其中 $r=rank(A)$. 求 $A-\sigma_1u_1v_1^T$ 的奇异值分解.

六 设 A 是 n 阶非零实矩阵. 证明: A 的奇异值与 A 的特征值相同当且仅当 A 是正定阵或半正定阵.

七 设 A 是一个 $m\times n$ 阶实数矩阵. 令 $\tilde{A}=\begin{bmatrix}0 & A\\ A^T & 0\end{bmatrix}$. 证明:

(1) $|\lambda I_{m+n}-\tilde{A}|=\lambda^{m-n}|\lambda^2I_n-A^TA|$.

(2) 设 A 的奇异值分解是 $A=U\Sigma V^T$, 满足 $U=(u_1,\cdots,u_m)$ 是 m 阶正交矩阵，$V=(v_1,\cdots,v_n)$ 是 n 阶正交矩阵，$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \\ & & \end{bmatrix}_{m\times n}$, $\sigma_1\geq\sigma_2\geq\cdots\geq\sigma_r>0$, 其中 $r=rank(A)$. 令 U_1,V_1 分别是 U,V 的前 r 列构成矩阵, U_2 是 U 的后 $m-r$ 列构成矩阵，V_2 是 V 的后 $n-r$ 列构成矩阵, 令

$$W=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}U_1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}U_1 & U_2 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}V_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}V_1 & 0 & V_2\end{bmatrix}.$$

则

$$W^T\tilde{A}W = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \sigma_r & & & & & & \\ & & & -\sigma_1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -\sigma_r & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

八 设 A 是一个 $m\times n$ 阶实矩阵，$b\in\mathbb{R}^m$. 证明：$Ax=b$ 的全部最小二乘解的集合是

$$\{A^+b+(I_n-A^+A)y \mid y\in\mathbb{R}^n\}.$$

展示 A^+b 是长度最小的最小二乘解.

九 设 A 是 $m\times n$ 阶阵，B 是 $p\times q$ 阶阵，C 是 $m\times q$ 阶阵. 考虑矩阵方程 $AXB=C$，其中 X 是 $n\times p$ 阶未知矩阵. 假设 $rank(A,C)=rank(A)$ 且 $rank\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix}=rank(B)$. 证明：给定任意 $n\times p$ 阶矩阵 W，$A^+CB^+ + W - A^+AWBB^+$ 是 $AXB=C$ 的解.

十 Moore-Penrose(M-P) 广义逆的定义：设 $A\in\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, 若存在 $M\in\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ 满足 (1) $AMA=A$, (2) $MAM=M$, (3) AM 与 MA 均为对称矩阵, 则称 M 为 A 的 M-P 广义逆, 记成 A^+.

(1) M-P 广义逆存在性证明. 对奇异值分解 $AV=U\Sigma$, $V=(V_1,V_2)$ 和 $U=(U_1,U_2)$ 为正交矩阵, $\Sigma=\begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, Σ_r 所有正奇异值, 且 $A=U_1\Sigma_r V_1^T$, 证明: $V_1\Sigma_r^{-1}U_1^T$ 是一个 M-P 广义逆.

(2) 证明: A^+ 唯一.

(3) 证明: $x=V_1\Sigma_r^{-1}U_1^Tb$ 为 $Ax=b$ 的一个解, 由此得到满足 M-P 的广义逆 A^+ 对应的 $x=A^+b$ 为 $Ax=b$ 的一个解.

(4) 一般的广义逆 A^- 定义为满足 $AA^-A=A$, 谈谈你的认识.