

§ 2. 第二型曲线积分

1. 第二型曲线积分的物理背景与定义

设 L 为空间有向曲线(规定了正方向的曲线),从 A 到 B 的方向为正方向. 质点在点 (x, y, z) 处所受力为: $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. 求单位质量的质点沿曲线 L 从 A 运动到 B 时力对质点所做的功.



- Step1.分划: 在曲线 L 上依次插入节点

$$A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$$

将曲线 L 分成 n 段弧 $\Delta L_1, \Delta L_2, \dots, \Delta L_n$.

Δl_i : ΔL_i 的长度,

$\vec{\tau}(M_i)$: 曲线 L 在点 M_i 处的正向单位切向量.

- Step2.取点、求和: 力 F 所做的功

$$W \approx \sum_{i=1}^n \vec{F}(M_{i-1}) \cdot \vec{\tau}(M_{i-1}) \Delta l_i.$$

- Step3.取极限: 若 $\lim_{\max\{\Delta l_i\} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{F}(M_{i-1}) \cdot \vec{\tau}(M_{i-1}) \Delta l_i$

存在, 则该极限为 $\int_L \vec{F} \cdot \vec{\tau} dl$, 即 F 所做的功.

Def. Ω 为 R^3 中区域, 设

$$\vec{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

为 Ω 中向量场, L 是 Ω 中一条逐段光滑的有向曲线 (由有限条光滑曲线连接而成), $\vec{\tau}$ 是 L 的正向单位切向量. 如果第一型曲线积分 $\int_L \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl$ 存在, 则称这个积分为向量场 \vec{v} 在有向曲线 L 上的第二型曲线积分, 记作

$$\int_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_L \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl.$$



2.第二型曲线积分 $\int_L \vec{v} \cdot d\vec{l}$ 的计算

设 $L: x = x(t), y = y(t), z = z(t) (\alpha \leq t \leq \beta)$, 且参数 t 增加的方向与 L 的正向一致. 则 L 在点 $M(x, y, z)$ 处的单位切向量为

$$\vec{\tau}(x, y, z) = \frac{(x'(t), y'(t), z'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}},$$

弧长微元为

$$dl = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

设 $\vec{v} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$, 则

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot d\vec{l} &= \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl \\ &= (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) \cdot (x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}) dt \\ &= (Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)) dt\end{aligned}$$

$$\int_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_L \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl = \int_{\alpha}^{\beta} [Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)] dt$$

Remark: 若参数 t 增加的方向与 L 的正向相反, 则

$$\begin{aligned}\int_L \vec{v} \cdot d\vec{l} &= -\int_{\alpha}^{\beta} [Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)] dt \\ &= \int_{\beta}^{\alpha} [Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)] dt\end{aligned}$$

积分下限对应于曲线的起点, 上限对应于终点.

Remark: L^- 与 L 反向, 则 $\int_{L^-} \vec{v} \cdot d\vec{l} = -\int_L \vec{v} \cdot d\vec{l}$.

Remark:

$$\vec{v} \cdot d\vec{l} = \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl$$

$$= (Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t))dt$$

$$= Pdx + Qdy + Rdz$$

因此, 也将 $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ 沿曲线 L 的第二型曲线积分记为

$$\int_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_L Pdx + Qdy + Rdz.$$



3. 第二型曲线积分的性质

第二型曲线积分 $\int_L \vec{v} \cdot d\vec{l}$ 可以化为第一型曲线积分 $\int_L \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl$ 来计算, 因而具有以下性质:

(1)(积分存在的充分条件) 当 L 逐段光滑且 \vec{v} 的分量函数 P, Q, R 在 L 上连续时, $\int_L \vec{v} \cdot d\vec{l}$ 存在.

(2)(对积分曲线的可加性) 设曲线 L 由曲线 L_1, L_2, \dots, L_k 连接而成, 则

$$\int_L \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \int_{L_2} \vec{v} \cdot d\vec{l} + \dots + \int_{L_k} \vec{v} \cdot d\vec{l}.$$

(3)(线性性质) 设 $\int_L \vec{u} \cdot d\vec{l}$ 和 $\int_L \vec{v} \cdot d\vec{l}$ 存在, 则 \forall 实数 α, β , 积分 $\int_L (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \cdot d\vec{l}$ 存在, 且

$$\int_L (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \cdot d\vec{l} = \alpha \int_L \vec{u} \cdot d\vec{l} + \beta \int_L \vec{v} \cdot d\vec{l}.$$

特别地,

$$\begin{aligned} & \int_L Pdx + Qdy + Rdz \\ &= \int_L Pdx + \int_L Qdy + \int_L Rdz. \square \end{aligned}$$



例: $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}, L: x^2 + y^2 = R^2$, 顺时针方向.

解: $L: x = R \cos t, y = R \sin t, t \in [0, 2\pi]$, 参数增加与曲线逆向一致.

$$I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_{2\pi}^0 dt = -2\pi. \square$$

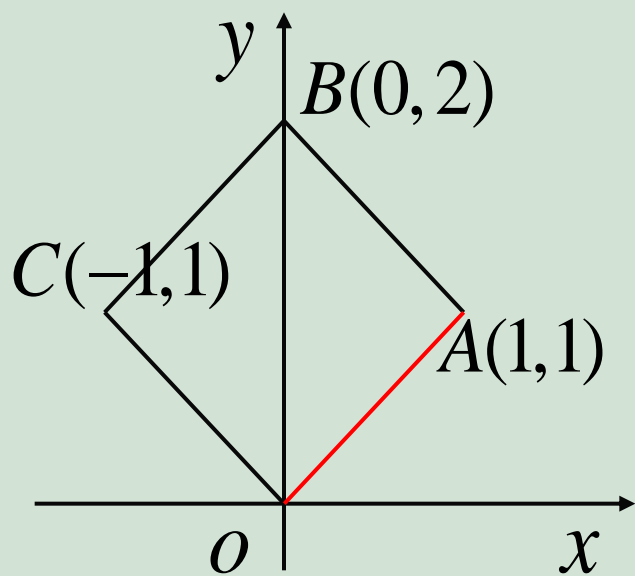
Question: 若 $L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 如何计算以上积分?

$$L: x = a \cos t, y = b \sin t, t \in [0, 2\pi]$$

$$I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_{2\pi}^0 \frac{ab}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = \dots\dots$$

例: $I = \oint_L (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, 其中 L 是由 $O(0,0), A(1,1), B(0,2), C(-1,1)$ 为顶点的正方形的逆时针方向边界.

解: $I = \left(\int_{\overrightarrow{OA}} + \int_{\overrightarrow{AB}} + \int_{\overrightarrow{BC}} + \int_{\overrightarrow{CO}} \right) (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$.



$\overrightarrow{OA}: \begin{cases} x = x, \\ y = x, \end{cases} (0 \leq x \leq 1),$ 参数增加

的方向与曲线的正向一致. 于是

$$\begin{aligned} \int_{\overrightarrow{OA}} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy \\ = \int_0^1 2x^2 dx = 2/3. \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AB}: \begin{cases} x = x, \\ y = 2 - x, \end{cases} \quad (0 \leq x \leq 1), \text{ 参数增加}$$

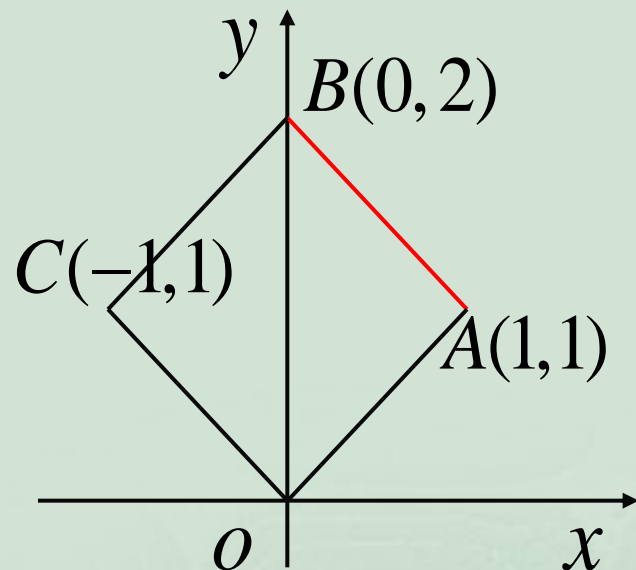
的方向与曲线的反向一致. 于是

$$\begin{aligned} & \int_{\overrightarrow{AB}} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy \\ &= \int_1^0 \left\{ \left[x^2 + (2-x)^2 \right] - \left[x^2 - (2-x)^2 \right] \right\} dx = -14/3, \end{aligned}$$

$$\text{同理 } \int_{\overrightarrow{BC}} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy = -2/3,$$

$$\int_{\overrightarrow{CO}} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy = 2/3,$$

$$\text{于是 } I = 2/3 + (-14/3) + (-2/3) + 2/3 = -4. \square$$



例. $I = \oint_L (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, 其中 L 是柱面 $x^2 + y^2 = ax (a > 0)$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z > 0)$ 的交线 (从 $x > a$ 看 L 取逆时针方向).

解: L 的参数方程为

$$x = \frac{a}{2}(1 + \cos t), \quad y = \frac{a}{2}\sin t, \quad z = a \sin \frac{t}{2}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

t 增加的方向与曲线的正向一致.

$$I = \frac{a^2}{4} \int_0^{2\pi} \left[(\sin t - 2 \sin \frac{t}{2}) \cdot (-\sin t) + (2 \sin \frac{t}{2} - 1 - \cos t) \cdot \cos t + (1 + \cos t - \sin t) \cdot \cos \frac{t}{2} \right] dt = -\frac{a^2}{6} (3\pi + 8). \square$$

例. $I = \oint_L ydx + zdy + xdz$, 其中 L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 从 x 轴正向看去为逆时针方向.

解: L 的参数方程为 $x = \frac{\sqrt{6}}{3} R \cos t$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2} R \sin t - \frac{\sqrt{6}}{6} R \cos t$,
 $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} R \sin t - \frac{\sqrt{6}}{6} R \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$, t 增加与曲线正向一致.

$$\begin{aligned} I = R^2 \int_0^{2\pi} & \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t - \frac{\sqrt{6}}{6} \cos t \right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{3} \sin t \right) \right. \\ & + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin t - \frac{\sqrt{6}}{6} \cos t \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t + \frac{\sqrt{6}}{6} \sin t \right) \\ & \left. + \frac{\sqrt{6}}{3} \cos t \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t + \frac{\sqrt{6}}{6} \sin t \right) \right\} dt = -\sqrt{3}\pi R^2. \square \end{aligned}$$

例. 设 L 为曲线 $x^2 + y^2 = 4$, 逆时针方向为正, 则 L 上点 (x, y) 处的(正)单位切向量 $\vec{\tau}$ 为_____, $\oint_L \frac{dx}{y} - \frac{dy}{x} =$ _____, $\oint_L ydx - xdy =$ _____.

解: $\vec{\tau} = \frac{1}{2}(-y, x)$, 记 $\vec{v} = (\frac{1}{y}, -\frac{1}{x})$, 则

$$\oint_L \frac{dx}{y} - \frac{dy}{x} = \oint_L \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl = -\oint_L dl = -4\pi.$$

记 $\vec{v} = (y, -x)$, 则

$$\oint_L ydx - xdy = \oint_L \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl = -\oint_L \frac{x^2 + y^2}{2} dl = -\oint_L 2dl = -8\pi. \square$$

作业： 习题4.4 No. 2, 4

