习题6.3 答案

1. (4) $\sum_{n=1}^{\infty} n4^{n-1}x^{2n}$

需要注意这里是 x^{2n}，只有偶数项
通常用换元 $y=x^2$ 处理

令 $y=x^2$，考虑幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n4^{n-1}y^n$

记 $a_n=n4^{n-1}$ $\quad \sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\frac{n}{4}}\cdot 4 \longrightarrow 4 \quad (n\to+\infty)$

从而幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n4^{n-1}y^n$ 的收敛半径为 $\frac{1}{4}$，且显然 $y=\frac{1}{4}$ 发散

从而原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n4^{n-1}x^{2n}$ 的收敛域为 $x^2\in[0,\frac{1}{4})$

$\Rightarrow$ $x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 收敛半径为 $\frac{1}{2}$.

(5). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}x^n$

记 $a_n=\frac{\ln n}{n}$ $\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\ln n}{n}}=1$ 收敛半径为1

有关幂级数的收敛域，切记求出收敛半径R后验证 $\pm R$ 是否收敛.

$x=1$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ 发散 $\quad (n\geq 3$ 时 $\frac{\ln n}{n}>\frac{1}{n})$

$x=-1$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}(-1)^n$ 收敛 $\quad$ (Leibniz 判别法)

从而收敛域为 $[-1,1)$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\frac{x}{2})^n+(4x)^n\right]$

记 $a_n=(\frac{1}{2})^n+4^n$ $\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=4$ 收敛半径为 $\frac{1}{4}$.

$x=\frac{1}{4}$ $\quad (\frac{x}{2})^n+(4x)^n=1+(\frac{1}{8})^n \to 1\neq 0$ 发散

$x=-\frac{1}{4}$ $\quad (\frac{x}{2})^n+(4x)^n=(-\frac{1}{8})^n+(-1)^n \not\to 0$ 发散

从而收敛域为 $(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}(x-1)^n \quad (p>0)$ 注意这里 $x_0=1$.

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^p}}=1 \Rightarrow$ 收敛半径为1.

$x-1=1$，即 $x=2$ 时，原式 $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $\begin{cases}\text{收敛} & p>1\\ \text{发散} & p\le 1\end{cases}$

$x-1=-1$，即 $x=0$ 时 原式 $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 收敛 (Leibniz)

从而当 $p\in(0,1]$ 收敛域为 $[0,2)$

$p\in(1,+\infty)$ 收敛域为 $[0,2]$

2. (1). $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n(n-1)}}=1 \Rightarrow$ 收敛半径 $=1$

$x=1$ 时 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1$ 收敛

$x=-1$ 时 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ 收敛 (Leibniz)

故收敛域为 $[-1,1]$. 下求和函数 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}$

$S'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ $\quad S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$ $(x\in[-1,1))$

(注意这里 $x\neq 1$，故 $x=1$ 要单独讨论)

$\Rightarrow S'(x)=-\ln(1-x)+C_1$

由 $S'(0)=0 \Rightarrow C_1=0$，$S'(x)=-\ln(1-x)$ $x\in[-1,1)$

$S(x)=(1-x)\ln(1-x)+x+C_2$

由 $S'(0)=0 \Rightarrow C_2=0 \Rightarrow S(x)=(1-x)\ln(1-x)+x$

$x\in[-1,1)$

最后由于 $S(x)$ 在 $(-1,1)$ 内连续且在1处收敛

$\Rightarrow S(x)$ 在 $x=1$ 处左连续 $\Rightarrow S(1)=\lim_{x\to1^-}S(x)=1$ (本题直接计算 $S(1)$ 亦可)

$$S(x)=\begin{cases}(1-x)\ln(1-x)+x & x\in[-1,1)\\ 1 & x=1\end{cases}$$

(5). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1}$

收敛半径 $\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n(n+1)}{2}}}=1$ 且由于 $\frac{n(n+1)}{2} \not\to 0$ 从而 $x=\pm1$ 均发散

$\Rightarrow$ 收敛域 $(-1,1)$. 下求和函数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1}$

$S_1(x)=\int_0^x S(t)dt=\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} t^{n-1} dt=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2} x^n,\ x\in(-1,1)$

$S_2(x)=\int_0^x S_1(t)dt=\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2} t^n dt=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} x^{n+1}=\frac{x^2}{2(1-x)}$

$x\in(-1,1)$

$\Rightarrow$ $S_1(x)=S_2'(x)=\frac{2x-x^2}{2(1-x)^2},\ x\in(-1,1)$

$S(x)=S_1'(x)=\frac{1}{(1-x)^3},\ x\in(-1,1)$.

3.(5). 将 $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 在0处展开为幂级数并求收敛域.

注意到 $(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$=1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-1)^n \cdot x^{2n}$ 收敛半径为1.

从而由逐项积分可得:

$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$

收敛半径也为1. 为求收敛域需要判断 $x=\pm1$ 是否收敛.

只需看 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}$ 是否收敛.

此由 $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}$ 单调递减且趋于0 即可知.

从而收敛域为 $[-1,1]$

5. $f(x)=\frac{x^2-x}{x+2}$ $g(x)=\frac{x}{(x-1)(x+2)}$，求 $f^{(n)}(0)$，$g^{(n)}(0)$

注1：有部分同学用了老版书，$f(x)=\frac{x+2}{x^2-x}$，$g(x)$ 相同，求 $f^{(n)}(0)$，$g^{(n)}(1)$

这题求不出来，因为 $f^{(n)}(x)$ 在 0，$g^{(n)}(x)$ 在 1 无定义。

方法：在 $x=0$ 处展成幂级数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，则 $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$$f(x)=\frac{x^2-x}{x+2}=\frac{x^2+2x-3x-6+6}{x+2}=x-3+\frac{3}{1+\frac{x}{2}}$$

$$=-3+x+3\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n$$

故 $a_n=\begin{cases}0 & n=0\\ -\frac{1}{2} & n=1\\ 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n & n\geq 2\end{cases}\Rightarrow f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & n=0\\ -\frac{1}{2} & n=1\\ 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n n! & n\geq 2\end{cases}$

$$g(x)=\frac{x}{(x-1)(x+2)}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{x+2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+\frac{x}{2}}-\frac{1}{1-x}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(-\frac{x}{2}\right)^n-x^n\right)$$

故 $a_n=\frac{1}{3}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1\right]\Rightarrow g^{(n)}(0)=\frac{n!}{3}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1\right]$

有同学用 $f(x)=(x^2-x)\cdot\frac{1}{x+2}=\frac{x^2-x}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n$

再用高阶导数公式 $(fg)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$

但要注意不要漏了二项式系数 C_n^k