UB4 – Tutorium Mathe A WS19/20

Anton Hanke

Tutorium: 14/11/2019

Aufgabe 1.

rechen operationen

Es seien die Komplexen Zahlen $v = a_v \cdot ib_v$ und $u = a_u \cdot ib_u$.

Multiplikation

Wir sollen zeigen, dass:

$$||uv|| = ||u|| \cdot ||v||$$

Wir berechnen nun alle beträge und multiplkationen auf beiden Seiten der Gleichung:

$$\begin{aligned}
||uv|| &= ||\,(a_u \cdot ib_u) \cdot (a_v \cdot ib_v)\,|| \qquad \text{Ausmultiplizieren} \\
||uv|| &= \left|a_u a_v + i a_u b_v + i b_u a_v + i^2 b_u b_v\right| \\
||uv|| &= |a_u a_v - b_u b_v + i(a_u b_v + b_u a_v)| \\
||uv|| &= \sqrt{\left(a_u a_v - b_u b_v\right)^2 + \left(a_u b_v + b_u a_v\right)^2} \qquad |z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} \\
||uv|| &= \sqrt{(a_u a_v)^2 + (b_u b_v)^2 - 2a_u a_v b_u b_v + (a_u b_v)^2 + (b_u a_v)^2 + 2a_u a_v b_u b_v} \\
&= \sqrt{(a_u a_v)^2 + (b_u b_v)^2 + (a_u b_v)^2 + (b_u a_v)^2}.
\end{aligned}$$

Dies machen wir auch für die einzelnen Zahlen:

$$\begin{aligned}
|u||v| &= \sqrt{a_u^2 + b_u^2}\sqrt{a_v^2 + b_v^2} \\
&= \sqrt{(a_u a_v)^2 + (a_u b_v)^2 + (b_u a_v)^2 + (b_u b_v)^2}.
\end{aligned}$$

Diese beiden expressionen sind gleich.

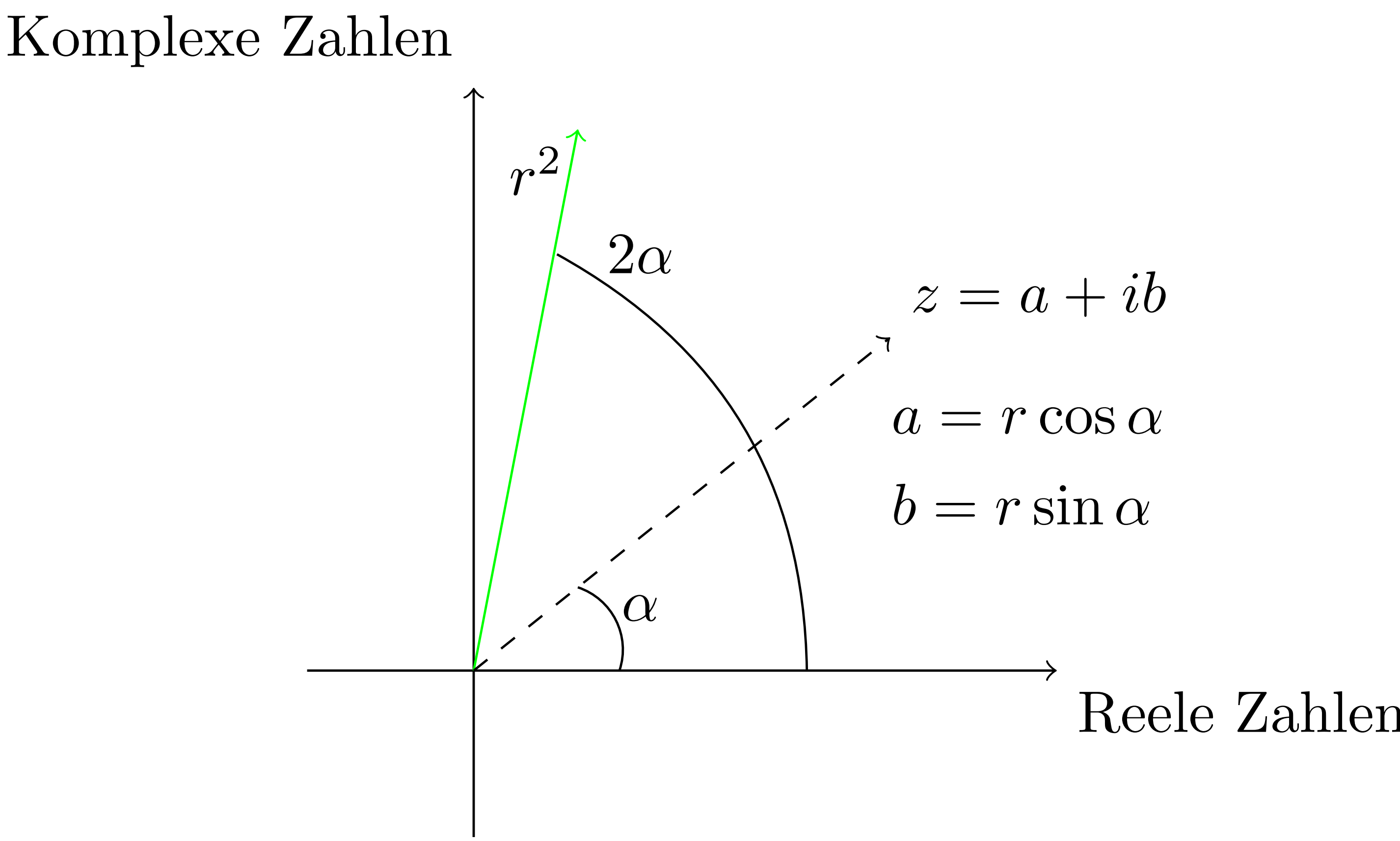
Alternativ Lösung

Komplexe Zahlen lassen sich auch in ihrer Polarform darstellen.

$$v = Re^{i\Phi}$$

$$u = R'e^{i\Phi'}$$

Von der Geometrischen Darstellung Komplexer Zahlen wissen wir, dass $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist.



Demnach lässt sich der Betrag der beiden Vektoren wie folgt aufstellen:

$$||uv|| = |RR'e^{i(\Phi\Phi')}| = RR'$$

$$\left.\begin{array}{rcc} |u| = & |Re^{i\Phi}| = & R \\ |v| = & |R'e^{i\Phi'}| = & R' \end{array}\right\} |u||v| = RR'$$

Addition

Wir sollen zeigen, dass:

$$||u+v|| \leq ||u|| + ||v||$$

Nun berechnen wir alle Beträge und addieren:

$$|u| + |v| = \sqrt{a_u^2 + b_u^2} + \sqrt{a_v^2 + b_v^2}$$

$$\begin{aligned} |u+v| &= |(a_u + ib_u) + (a_v + ib_v)| \\ &= \underbrace{a_u + a_v}_{x} + i \cdot \underbrace{(b_u + b_v)}_{y} \\ &= \sqrt{(a_u + a_v)^2 + (b_u + b_v)^2} \\ &= \sqrt{a_u^2 + a_v^2 + 2a_u a_v + b_u^2 + b_v^2 + 2b_u b_v} \end{aligned}$$

Wir setzen nun zusammen und stellen um:

$$\begin{array}{ll|l}
|u+v|^2 \overset{?}{\leq} (|u|+|v|)^2 & & \text{Quadrieren um sqrt zu entfernen} \\
\Leftrightarrow a_u^2 + a_v^2 + 2a_u a_v + b_u^2 + b_v^2 + 2b_u b_v \overset{?}{\leq} a_u^2 + a_v^2 + b_u^2 + b_v^2 + 2\sqrt{(a_u^2+b_u^2)(a_v^2+b_v^2)} & & \text{umformen} \\
\Leftrightarrow a_u a_v + b_u b_v \overset{?}{\leq} \sqrt{(a_u^2+b_u^2)(a_v^2+b_v^2)} & & \text{Quadrieren um sqrt zu entfernen} \\
\Leftrightarrow (a_u a_v + b_u b_v)^2 \overset{?}{\leq} (a_u^2+b_u^2)(a_v^2+b_v^2) & & \text{umformen} \\
\Leftrightarrow 2a_u b_u a_v b_v \overset{?}{\leq} a_u^2 b_v^2 + a_v^2 b_u^2 & & \\
\Leftrightarrow 0 \overset{?}{\leq} a_u^2 b_v^2 + a_v^2 b_u^2 - 2a_u b_u a_v b_v & & \text{Zusammenfassen} \\
\Leftrightarrow 0 \leq (a_u b_v - a_v b_u)^2 & & \blacksquare
\end{array}$$

trigonomische Formen

Trignometrische Form z

Schreiben Sie $z = 3 - i8$ in trigonometrischer Form, also als $z = r \cdot e^{i\Theta}$.
Von dem Graphen in der ersten Teilaufgabe ist erkenntlich:

$$\cos\alpha = \frac{a}{r} \qquad \sin\alpha = \frac{b}{r}$$

Auch wissen wir, dass $r = |z|$. Damit können wir nun r berechnen und daraus folgend den cosinus und sinus von alpha berechnen. Dies setzen wir folgend in die Polarkoordinatenform ein.

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{73} \\
\cos\alpha = \frac{3}{r} &\qquad \sin\alpha = \frac{-8}{r} \\
\Leftrightarrow z &= \sqrt{73}\left(\frac{3}{\sqrt{73}} - \frac{8}{\sqrt{73}}i\right) \\
\Leftrightarrow z &= \sqrt{73}e^{i\cdot\sin^{-1}\left(\frac{-8}{\sqrt{73}}\right)}
\end{aligned}$$

Finde u

Es soll eine Zahl existieren: $u = Re^{i\Phi} = R(\cos\Phi + i\sin\Phi)$
für die gilt: $u^2 = z$.
Hierbei muss gelten: $\sin\Phi < 0 \to \Phi \in [-\pi, 0]$.
Nach der Ersten Bedingung können wir folgend aufstellen:

$$R^2 e^{2i\Phi} = \sqrt{73}e^{i\sin^{-1}\left(\frac{-8}{\sqrt{73}}\right)}$$

Dies ermöglicht die Auflösung von den variablen:

$$\left\{\begin{array}{lll} R = \sqrt{r} & & = (73)^{\frac{1}{4}} \\ 2\Phi = \sin^{-1}\left(\frac{-8}{\sqrt{73}}\right) & = & \Phi = \frac{\sin^{-1}\left(\frac{-8}{\sqrt{73}}\right)}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow u = (73)^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\sin^{-1}\left(\frac{-8}{\sqrt{73}}\right)}{2}}$$

Punktemengen in der komplexen Ebene

(a) Im$(z) = |z|$

Wir wissen $R = |z|$ und $\mathrm{Im}(z) = R\sin\alpha$. Somit:

$$R\sin\alpha = R \Leftrightarrow \sin\alpha = 1$$

daraus:

$$z = Re^{i\pi/2} = iR$$

Damit entspricht z der y-Achse und ist element der complexen Zahlen.

(b) $z = |z|$

$$\begin{aligned} z = |z| &\Leftrightarrow R\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right) = R \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = & 1 \\ \sin\alpha = & 0 \end{cases} \qquad \alpha = 0. \\ z = \mathbb{R}^{+} & \end{aligned}$$

(c) $z = \bar{z}$

$$\begin{aligned} a + ib &= a - ib \\ \Rightarrow z &= \{a \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

(d) $|z| = 3$

Kreis mit Radius 3.
Siehe Abbildung in 1a)

(e) $|z + 3 - 4i| > 5$

$$\begin{aligned} |a + 3 + i(b-4)| &> 5 \\ (a+3)^2 + (b-4)^2 &> 25 \end{aligned}$$

Somit ist z ein Kreis mit dem Mittelpunkt $(-3, 4)$ und einem radius > 5. Hierbei muss erkannt werden, dass:

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad & \text{Kreisfunktion} \\ (a+3)^2 &= (x - x_0)^2 \\ (b-4)^2 &= (y - y_0)^2 \end{aligned}$$

(f) $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 = -1$

Hier muss umgestellt werden:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 &= -1 \\ \frac{1+z}{1-z} &= \pm i \\ 1 + z &= \pm i(1 - z) \\ 1 + z &= \pm i \mp zi \\ z \pm zi &= -1 \pm i \\ z(1 \pm i) &= -1 \pm i \\ z &= \frac{-1 \pm i}{1 \pm i} = \frac{(1 \mp i)(-1 \pm i)}{2} \\ &= \frac{1 \pm 2i - 1}{2} = i \end{aligned} \tag{1}$$

Aufgabe 2.

(a) $z_1 = z + \frac{1}{z}$

$$\begin{aligned}
z_1 &= a + ib + \frac{1}{a-ib} \cdot \frac{\bar{\bar{z}}}{\bar{\bar{z}}} \\
\Rightarrow z_1 &= a + ib + \frac{a+ib}{(a+ib)(a-ib)} \\
\Rightarrow \quad &= a + ib + \frac{a+ib}{a^2+b^2} \\
\Rightarrow \quad &= a + ib + \frac{a}{a^2+b^2} + ib + \frac{ib}{a^2+b^2} \\
\Rightarrow z_1 &= \left(a + \frac{a}{a^2+b^2}\right) + i\left(b + \frac{b}{a^2+b^2}\right)
\end{aligned} \tag{2}$$

(b) $z_2 = \bar{z}^2 + \frac{1}{z^2}$

Gleiche vorgehensweise wie bei der Aufgabe (a).

$$\begin{aligned}
z_2 &= (a+ib)^2 + \frac{1}{(a+ib)^2} \\
\Rightarrow \quad &= \underbrace{a^2 - b^2 - 2iab}_{c} + \frac{(a-ib)^2}{(a-ib)^2(a+ib)^2} \\
\Rightarrow \quad &= c + \frac{\overbrace{a^2 - b^2 - 2iab}^{c}}{(a^2+b^2)^2} \\
\Rightarrow z_2 &= \underbrace{a^2 - b^2 + \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}}_{a_2} \underbrace{-2\left(ab + \frac{ab}{(a^2+b^2)^2}\right)}_{b_2} i
\end{aligned} \tag{3}$$

Aufgabe 3.

(a) $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{t}\right)}$

Wir erinnern uns: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ Auch erinnern wir uns:

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a
\end{aligned} \tag{4}$$

Dies verwenden wir im folgenden:

$$\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\alpha\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha$$

$$\Rightarrow = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha - \cos\alpha)$$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha)$$

$$\Rightarrow \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha - \cos\alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha)}$$

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)}$$

Diese Gleichungen setzen wir in die Uhrsprungsgleichung ein und erhalten:

$$\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{t}\right)} = \frac{(\sin\alpha - \cos\alpha)}{(\cos\alpha + \sin\alpha)} + \frac{(\cos\alpha - \sin\alpha)}{(\sin\alpha + \cos\alpha)} = 0.$$

(b) $\frac{(\sin\alpha - \cos\alpha)}{(\cos\alpha + \sin\alpha)}$

Hier erinnern wir uns an die erste Teilaufgabe und sehen das folgendes gilt:

$$\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$