UB10 – Tutorium Mathe A WS19/20

A. Hanke

Tutorium: 19/12/2019

Aufgabe 1

Wollen Grenzwerte der Folgen bestimmen:

$$(1)\ a_n = \tfrac{n^2}{(n+1)(n+2)};\quad (2) a_n = \tfrac{n^2}{n+1} - \tfrac{n^3}{(n+1)(n+2)};\quad (3) a_n = n - 5 - \tfrac{n^3}{n^2+5}$$
$$(4) a_n = \cos n\pi;\quad (5) a_n = \cos n(n+1)\pi$$

(1)

$$a_n = \frac{n^2}{n^2+3n+2} = \frac{n^2}{n^2(1+\frac{3n}{n^2}+\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

(2)

$\lim_{n\to\infty} = 2$

(3)

$\lim_{n\to\infty} = -5$

(4)

$a_n = \cos n\pi$ hat folgende Werte zu begin:

- $a_0 = 1$
- $a_1 = -1$
- $a_2 = 1$

Entspricht der Folge: $(-1)^n$. Diese Konvergiert nicht.

(5)

Hier von interesse ist die enthaltene Reihe:

$$a'_n = n(n+1)$$

Diese Reihe beinhaltet nur gerade Zahlen. Daher ist die Folge a_n:

$$a_n = \cos(n(n+1)\pi) = 1 \qquad \forall n$$

Aufgabe 2

$$a_{n+1} = \frac{|a_n|}{2a_n - 1} \qquad a_1 = b \quad b = \left\{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\}$$

(a)

Annahme: $a_n \to a$
Bedingung an a nach rekursionsformel:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{2a_n - 1} = \frac{|a|}{2a-1}$$

Nun gilt das a_n gegen a läuft, also: $\lim a_n = a$.

$$a = \frac{|a|}{2a-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - a = |a| \\ 2a^2 - a - |a| = 0 \end{cases}$$

Nun können wir zwei Fälle betrachten:

1) Die Folge strebt einen Positiven Wert an $a \geq 0$: $\quad a = |a|$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 2a^2 - 2a \\ &= a(a-1) \end{aligned}\right\} a = \{0,\ 1\}$$

2) Die Folge strebt einen negativen Wert an $a < 0$: $\quad a = -|a| \Leftrightarrow -a = |a|$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 2a^2 - a - (-a) \\ &= 2a^2 \end{aligned}\right\} a = \{0\}$$

(b)

Wir Berechnen der ersten drei weiteren a_n:

```
## n = 1 -> -0.25
```

```
## n = 2 -> -0.166666666666667
```

```
## n = 3 -> -0.125
```

```
## n = 4 -> -0.1
```

Die obere Beschränktheit zeigen wir nun über die Definition dieser $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a$.
Also zeigen, dass $a_n < 0$

- $a_1 < 0$
- Annahme: $a_n < 0$

$$a_{n+1} = \frac{|a_n|}{2a_n - 1} = \frac{\overbrace{-a_n}^{>0}}{\underbrace{2a_n - 1}_{<0}} < 0.$$

Nun zeigen, dass Folge monoton steigt. Dies ist der Fall, wenn $a_{n+1} - a_n > 0$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{-a_n}{2a_n - 1} - a_n \\ &= \frac{-a_n - 2a_n^2 - a_n}{2a_n - 1} \\ &= \frac{\overbrace{-2a_n^2}^{<0}\ \overbrace{-2a_n}^{>0}}{\underbrace{2a_n - 1}_{<0}} \\ &> 0 \end{aligned}$$

(c)

Wir beachten den Hinweis:

```
## n = 1 -> 0.25
```

```
## n = 2 -> -0.5
```

```
## n = 3 -> -0.25
```

```
## n = 4 -> -0.166666666666667
```

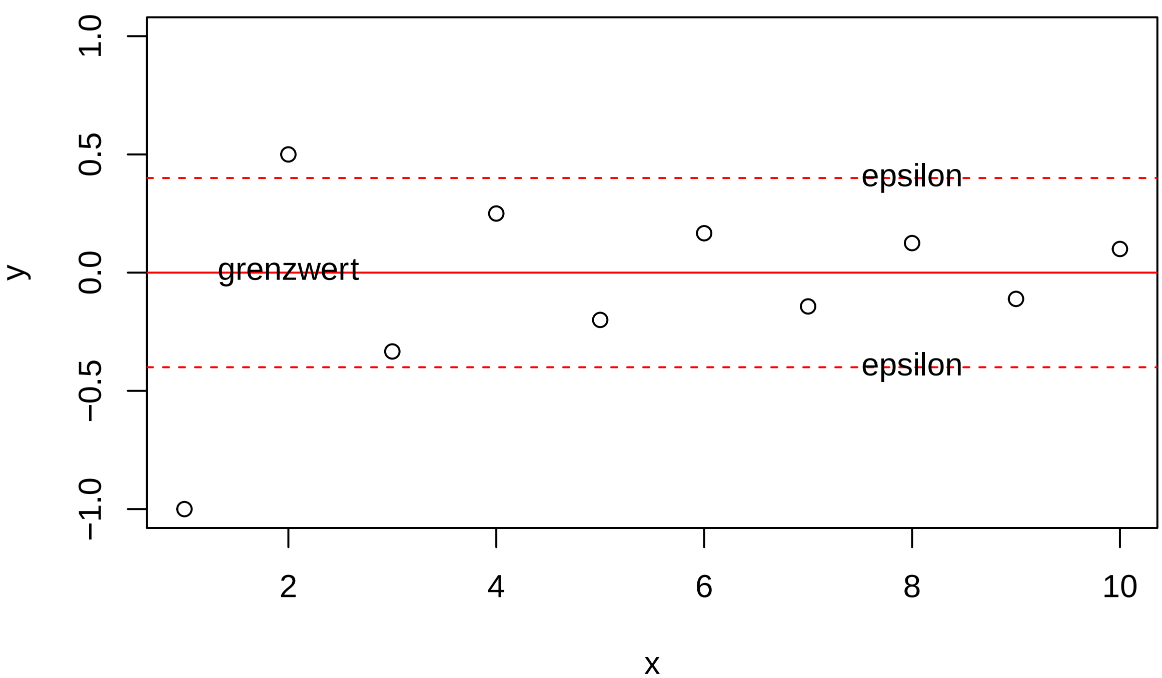
Und sehen das die Reihe nicht Monoton ist. Auffällig ist, das ab $n = 2$ die Folge negativ ist und das:

$$a_3^{b=\frac{1}{4}} = a_1^{b=-\frac{1}{2}}$$

Somit gilt:

$$a_{n+2}^{b=\frac{1}{4}} = a_n^{b=-\frac{1}{2}}$$

Konvergenz nicht gleich Monotonie und/oder Beschränktheit!



Diese folge ist nicht monoton und nicht beschränkt aber konvergiert.

(d)

Für $a = -\frac{1}{4}$ konvergiert die Folge (oben beschränkt und monoton steigend). Aus (a) Fall 2 wissen wir, das diese Reihe den Grenzwert 0 hat. Da die Reihe für beide b gleiches verhalten zeigt gilt dies auch für das andere b.

Aufgabe 3