

Übungsblatt 2 : Logik

Aufgabe 1:

a) Assoziativgesetz

$$(A \wedge B) \wedge C \stackrel{?}{=} A \wedge (B \wedge C)$$

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \wedge C$	$(B \wedge C)$	$A \wedge (B \wedge C)$
w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f
w	f	w	f	f	f	f
w	f	f	f	f	f	f
f	w	w	f	f	w	f
f	w	f	f	f	f	f
f	f	w	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f

Äquivalent!

$$(A \vee B) \vee C \stackrel{?}{\iff} A \vee (B \vee C)$$

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \vee C$	$(B \vee C)$	$A \vee (B \vee C)$
w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	w
w	f	w	w	w	w	w
w	f	f	w	w	f	w
f	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	w	w	w
f	f	w	f	w	w	w
f	f	f	f	f	f	f

Äquivalent!

$$5. (A \wedge (A \Rightarrow B)) \stackrel{?}{\implies} B$$

A	B	$A \Rightarrow B$	$(A \wedge (A \Rightarrow B))$	$\dots \Rightarrow \dots$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	w
f	f	w	f	w

c. $(B \wedge (A \Rightarrow B)) \stackrel{?}{\Rightarrow} A$

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \wedge (A \Rightarrow B)$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	f	w	f

↑ nicht äquivalent! ↑

Aufgabe 2:

$$A: \Leftrightarrow (\neg \text{schockiert} \Rightarrow \neg \text{verstehen})$$

$$B: \Leftrightarrow (\neg \text{verstehen})$$

Frage: gilt: $(\neg \text{schockiert} \Rightarrow \neg \text{verstehen})$

$$(*) \quad \neg (\neg \text{verstehen}) \stackrel{?}{\Rightarrow} \neg \text{schockiert}?$$

In 1.c: wurde gezeigt:

$$b \wedge (a \Rightarrow b) \not\Rightarrow a$$

Wenn $a: \Leftrightarrow \neg \text{schockiert}$

$b: \Leftrightarrow \neg \text{verstehen}$

dann gilt $(*)$ nicht!!

Aufgabe 3

$$\neg (\forall x \in X, \exists y \in Y: \forall z \in Z: x \cdot y \leq z)$$

$$\exists x \in X: \forall y \in Y: \exists z \in Z: x \cdot y > z$$

Aufgabe 4

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: \sum_{i=1}^n (2i-1)^2 \stackrel{?}{=} \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

Induktionsanfang:

$$n=1: (2 \cdot 1 - 1)^2 = 1$$
$$\frac{1(2 \cdot 1 - 1)(2 \cdot 1 + 1)}{3} = 1 \quad \checkmark$$

Induktionsschritt

Angenommen $\sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

Gilt auch? $\sum_{i=1}^{n+1} (2i-1)^2 \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$

$$n \rightarrow n+1: \sum_{i=1}^{n+1} (2i-1)^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^n (2i-1)^2}_{= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}} + (2(n+1)-1)^2$$

$$= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} + (2n+1)^2$$

$$= (2n+1) \left[\frac{n(2n-1)}{3} + \frac{3(2n+1)}{3} \right]$$

$$= (2n+1) \left[\frac{2n^2 - n + 6n + 3}{3} \right]$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}$$

$$\frac{(n+1)(2n+3)}{3}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} \quad \square$$