UB8 – Tutorium Mathe A WS19/20

M. Kohnen, F. Schnabel, A. Hanke

Tutorium: 19/12/2019

Aufgabe 1

Wir erinnern uns an das letzte Mathetutorium.

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \\
\det|A - \lambda I| &= 0 \\
\Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha_1 - \lambda & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\
\xrightarrow{\text{Lap. Entwicklungssatz}} &\begin{cases} (\alpha_1 - \lambda)(\alpha_4 - \lambda) - \alpha_2\alpha_3 = 0 \\ \lambda = \left\{\mu \in \mathbb{R} \,|\, \alpha_1\alpha_4 + \lambda^2 - \lambda\,(\alpha_1 + \alpha_4) - \alpha_2\alpha_3 = 0\right\} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ebenso erinnern wir uns: $X :\Leftrightarrow \{x|\lambda_i \in \{\lambda\} : (A - \lambda_i I)x = 0\}$

(a)

Hier ergibt sich die Menge der Eigenwerte wie folgt:

$$
\det\left|\begin{pmatrix} \frac{13}{8} & \frac{3\sqrt{3}}{8} \\ \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| \stackrel{!}{=} \begin{cases} \left(\frac{13}{8} - \lambda\right)\left(\frac{7}{8} - \lambda\right) - \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^2 = 0 \\ \lambda = \left\{\lambda \in \mathbb{R} \,\middle|\, \lambda^2 - \frac{5}{2} \cdot \lambda + \underbrace{\frac{13 \cdot 7}{8^2} - \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^2}_{=1} = 0\right\} \end{cases}
$$

Diese Gleichung folgt aus der oben erwähnten charakteristischen Gleichung.

(b)

Für dir folgende Menge soll überprüft werden, ob die Werte Eigenwerte der Matrix sind:

$$\lambda = \{0.5, 2\}$$

Hierfür müssen wir einfach nur in die in (a) bestimmte Gleichung einsetzen.

- $f(0.5) = 0$
- $f(2) = 0$

Alternativ über die pq-Formel.

(c)

Wir erinnern uns das für Eigenvektoren gilt: $Au_i = \lambda u_i$.

1) Für u_1:

$$\begin{pmatrix} \frac{13}{8} & \frac{3\sqrt{3}}{8} \\ \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

2) Für u_2:

$$\begin{pmatrix} \frac{13}{8} & \frac{3\sqrt{3}}{8} \\ \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Hier dann jeweils die linke Seite Auflösen.

Alternativ folgender Ansatz:

1) Für u_1:

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{13}{8} & \frac{3\sqrt{3}}{8} \\ \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right] \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

2) Für u_2:

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{13}{8} & \frac{3\sqrt{3}}{8} \\ \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right] \times \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Aufgabe 2)

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t+2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

(a)

Da hier die Matrix A_t eine Diagonalmatrix ist, können die Eigenwerte einfach abgelesen werden (Eigenwerte = Pivotelemente).

Man kann die Eigenwerte aber auch klassisch über die charakteristische Gleichung $\det|\, A_t - \lambda I \,| = 0$ berechnen.

$$\det|\, A_t - \lambda I \,| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & t+2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Somit ergibt sich:

$$\det|\, A_t - \lambda I \,| = (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

Und dementsprechend erhalten wir die Eigenwerte:

1) $\lambda_1 = 1$ (mult. 2)
2) $\lambda_2 = 3$ (mult. 1)

(b)

Hier müssen wir zunächst unsere Eigenvektoren bestimmen.
Für $\lambda = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & t+2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{3-\frac{2}{3}2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{\text{t+2}} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\text{II.} \quad 3x_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_3 = 0$$

In Gleichung I. einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} \text{II.} \quad (t+2)x_2 + (-1) \cdot 0 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \text{wenn} \quad t = -2 \quad \text{dann} \quad x_2 \quad \text{frei wählbar} \\ &\Longrightarrow \quad \text{wenn} \quad t \neq -2 \quad \text{dann} \quad x_2 = 0 \end{aligned}$$

Nachdem x_1 frei wählbar ist, ergeben sich folgende Mengen an Eigenvektoren je nachdem, was t ist:

$$\begin{array}{cc} \text{Für} \quad t = -2: & \text{Für} \quad t \neq -2: \\ x = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} & x = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x_1 \in \mathbb{R} \right\} \end{array}$$

Wir erkennen, dass für $t = -2$ die Menge der Eigenvektoren den Raum $\mathbb{R}^2$ aufspannen, während für $t \neq -2$ die Menge der Eigenvektoren nur den Raum $\mathbb{R}$ aufspannt.

Für $\lambda = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & t+2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\text{II.} \quad -2x_2 + 3x_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \frac{3}{2}x_3$$

In Gleichung I. einsetzen ergibt:

$$\text{I.} \quad -2x_1 + (t+2) \cdot \frac{3}{2}x_3 - x_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \left(\frac{3}{4}t + 1\right)x_3$$

Nachdem x_3 frei wählbar ist, ergibt sich folgende Eigenvektormenge:

$$x = \left\{ \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{4}t + 1\right)x_3 \\ \frac{3}{2}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Wir erkennen, dass die Menge dieser Eigenvektoren den Raum $\mathbb{R}$ aufspannt. Nachdem diese Mange der Eigenvektoren auch linear unabhängig von der Menge der Eigenvektoren für $\lambda = 1$ ist, spannt die Menge aller Eigenvektoren nur für den Fall $t = -2$ den Raum $\mathbb{R}^3$ auf, während für $t = 2$ nur der Raum $\mathbb{R}^2$ aufgespannt wird.

(c)

Da die Matrix B keine Diagonalmatrix ist, müssen wir die Eigenwerte über die charakteristische Gleichung bestimmen:

$$\det |\, B - \lambda I \,| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & t+2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \implies \quad (1-\lambda)\cdot(3-\lambda) - 2\cdot(t+2) &= 0 \\ 3 - 3\lambda - \lambda + \lambda^2 - 2(t+2) &= 0 \\ \lambda^2 - 4\lambda - 1 - 2t &= 0 \quad |\text{pq-Formel} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\tfrac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{-4}{2}\right)^2 - (-1-2t)} \\ \lambda_{1,2} &= 2 \pm \sqrt{4+1+2t} \\ \lambda_{1,2} &= 2 \pm \sqrt{5+2t} \end{aligned}$$

$$\implies \qquad \lambda_1 = 2 + \sqrt{5+2t} \qquad \text{und} \qquad \lambda_2 = 2 - \sqrt{5+2t} \qquad \text{mit} \quad t \geq -\frac{5}{2}$$

(d)

Wie zuvor bestimmen wir auch hier die Eigenvektoren.

Kleiner Hinweis: Da die beiden Eigenwerte sich nur in einem Vorzeichen ändern, rechnen wir direkt mit $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5+2t}$ *also achtet bei der nachfolgenden Rechnung auf den Unterschied zwischen* $\pm$ *und* $\mp$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-(2\pm\sqrt{5+2t}) & t+2 & 0 \\ 2 & 3-(2\pm\sqrt{5+2t}) & 0 \end{array}\right)$$

$$\text{II.} \quad 2x_1 + 1 \mp \sqrt{5+2t}\; x_2 = 0 \quad \implies \quad x_1 = -\frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{5+2t})x_2$$

In Gleichung I. einsetzen ergibt.

$$\begin{aligned} (-1 \mp \sqrt{5+2t}) \cdot (-\tfrac{1}{2}(1 \mp \sqrt{5+2t})x_2) + (t+2)x_2 &= 0 \\ \left[\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5+2t}\; \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{5+2t} - \tfrac{1}{2}(5+2t)\right] x_2 + (t+2)x_2 &= 0 \\ \tfrac{1}{2}(1-(5+2t))x_2 + (t+2)x_2 &= 0 \\ \tfrac{1}{2}(-4-2t)x_2 + (t+2)x_2 &= 0 \\ (-2-t)x_2 + (t+2)x_2 &= 0 \\ (-2+2-t+t)x_2 &= 0 \\ 0x_2 &= 0 \quad \implies x_2 \quad \text{frei wählbar} \end{aligned}$$

Es ergibt sich also folgende Eigenvektorenmenge:

$$x = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{5+2t})x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle|\, x_2 \in \mathbb{R},\ t \geq -\frac{5}{2} \right\}$$

Bzw. kann man das natürlich auch einzeln betrachten für jeden Eigenwert:

$$x_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5+2t})x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle|\, x_2 \in \mathbb{R},\ t \geq -\tfrac{5}{2} \right\} \qquad \text{und} \qquad x_\beta = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5+2t})x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle|\, x_2 \in \mathbb{R},\ t \geq -\tfrac{5}{2} \right\}$$

Die Bedingung für t ist hier nochmal erwähnt, denn der Term unter der Wurzel darf nicht negativ sein.

Wenn wir uns nun die Eigenvektorenmengen x_α und x_β anschauen, sehen wir, dass diese linear unabhängig sind außer wenn $t = -\frac{5}{2}$. In diesem Fall fällt nämlich der Wurzelterm weg und damit sind x_α und x_β gleich. Das heißt für $t \geq -\frac{5}{2}$ spannen die Eigenvektoren den Raum $\mathbb{R}^2$ auf.

Aufgabe 3

2x2 Matrix

Eine allgemeine Matrix mit den Dimensionen hat die Form:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Die Determinate der Folgenden Matrix ist:

$$det(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}$$

Um die Eigenwerte zu bestimmen addieren wir λI zu der Matrix

$$det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda) \times (a_{22} - \lambda) - a_{12} \times a_{21} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \times \lambda + a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}$$

Somit ist der Koeffizient von λ^2 gleich $+1$.

3x3 Matrix

Eine allgemeine Matrix mit den Dimensionen hat die Form:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Um die Eigenwerte zu bestimmen addieren wir λI zu der Matrix und berechnen die Determinante. Mittels Laplace-Entwicklungssatz können wir die Determinate berechnen.

$$det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda) \times \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} - a_{12} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} + a_{13} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} - \lambda \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Aus diesen Termen ist klar ersichtlich, dass der Term, von welchem das λ^3 stammt, aus dem Ersten Term des Laplace´schen Entwicklungssatz stammt. Da wir in der 3.1 bereits gezeigt haben, dass der Koeffizient des λ^2 Terms $+1$ ist, folgt aus der Multiplikation mit $-\lambda$ das der Koeffizient des λ^3 Terms negativ sein muss.

Verallgemeinerung für Matritzen nxn

Jegliche Matrix mit Dimension nxn kann mittles Laplacechen Entwicklungssatz in Summen von Matrix mit niederen Dimensionen Zerlegt werden.

Wie bereits in 3.2 gezeigt, resultiert der jeweilige Term immer nur aus einer einzelnen der Zerlegungen. Somit lässt sich verallgemeinert sagen, dass:

$$\det |\, a - \lambda I \,| = (a_{11} - \lambda) \times \underbrace{\begin{vmatrix} a_{2,2} - \lambda & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,2} & \cdots & a_{m,n} - \lambda \end{vmatrix}}_{Koeffizient\ \lambda^{n-1} = (-1)^{n-1}} + \ldots$$

Somit ist der Koeffizient von λ^n mittels der allgemeinen Formel $(-1)^n$ zu bestimmen.

Herleitung des Zusammenhangs zwischen den Eigenwerten und der Determinante

$$det(A - \lambda I) = (-1)^n \times \prod_{t=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$$

Der Zusammenhang lässt sich anhand der charakteristischen Gleichung zeigen. Die charakteristische Gleichung erhalten wir einerseits durch verwenden der Bedingung, dass $det(A - \lambda I) = 0$.
Wird für λ einer der Eigenwerte eingesetzt, so ist die Determinante Null. Die charakteristische Gleichung ist ein Polynom n-ten grades. Wie wir bereits gezeigt haben, hängt das Vorzeichen des λ^n Terms von den Dimensionen der Matrix ab.
Somit müssen wir auch dies bei dem Produkt berücksichtigen. Dies begründet den $(-1)^n$ Faktor.

Für $\lambda = 0$ entspricht $det(A - \lambda I) = det(A)$ (Zeigen wir noch in der letzten Teilaufgabe).

Herleitung $det(A) = \prod_{t=1}^{n} \lambda_i$

Um dies zu zeigen verwenden wir die bereits bewiesen Gleichung von $det(A - \lambda I) = (-1)^n \times \prod_{t=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$.
Setzen wir nun $\lambda = 0$ so vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$det(A) = (-1)^n \times \prod_{t=1}^{n} (-\lambda_i)$$

$$(-1)^n \times \prod_{t=1}^{n} (-\lambda_i) = (-1)^n \times \prod_{t=1}^{n} ((-1) \times \lambda_i) = (-1)^n \times \prod_{t=1}^{n} (-1) \times \prod_{t=1}^{n} (\lambda_i) = (-1)^n \times (-1)^n \prod_{t=1}^{n} (\lambda_i) = (-1)^{2n} \times \prod_{t=1}^{n} (\lambda_i) = \prod_{t=1}^{n} (\lambda_i)$$

Somit ist $det(A) = \prod_{t=1}^{n} \lambda_i$ und die Aussage bewiesen.

Wir wünschen euch frohe Weihnachten und einen guten Start ins neue Jahr

Eure Mathe-Tutoren