

UB3 – Tutorium Mathe A WS19/20

Maximilian Kohnen

Tutorium: 07/11/2019

Aufgabe 1

Die Implikation soll mittels Kontraposition gelöst werden. Bei Aufstellen der Kontraposition ist wichtig zu beachten, dass:

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$$

Für unseren Fall heißt das also:

$$\neg(A = B) \Rightarrow \neg(A \setminus B = B \setminus A) A \neq B \Rightarrow A \setminus B \neq B \setminus A$$

A und B stellen in diesem Fall Mengen dar, also beschreibt $A \setminus B$ eine Mengendifferenz.

$$\begin{aligned} A \neq B &\Rightarrow \exists a \in A : a \notin B \\ \Rightarrow a \in A \setminus B \quad \text{und} \quad a \notin B \setminus A \quad \text{da} \quad a \notin B &\Rightarrow A \setminus B \neq B \setminus A \quad \text{q.e.d} \end{aligned}$$

Weiteres Material zu Mengen und Aussagen: <http://www.gm.fh-koeln.de/~konek/Mathe1-WS/ZD1-Kap01-02.pdf>

Aufgabe 2

Für die Überprüfung, ob die Menge M eine Gruppe darstellt, müssen die 4 Bedingungen: Abgeschlossenheit, Assoziativität, neutrales Element und inverses Element erfüllt sein.

- **Abgeschlossenheit** ($a \in G, b \in G : a \circ b \in G$):

Die Tabelle zeigt, dass jede Kombination der Elemente der Menge M wiederum ein Element der Menge M ergibt.

\circ	S_m	S_n	D_0	D_{180}
S_m	D_0	D_{180}	S_m	S_n
S_n	D_{180}	D_0	S_n	S_m
D_0	S_m	S_n	D_0	D_{180}
D_{180}	S_n	S_m	D_{180}	D_0

- **Assoziativität** ($((b \circ a) \circ c = a \circ (b \circ c))$):

Beispiel:

$$(S_m \circ D_{180}) \circ S_n = S_m \circ (D_{180} \circ S_n)$$

$$S_n \circ S_n = S_m \circ S_m$$

$$D_0 = D_0$$

- **Neutrales Element** ($\exists e \in G, \forall a \in G : a \circ e = a$): D_0

Jedes Element der Menge M ergibt in der Kombination mit D_0 sich selbst (siehe Tabelle).

- **Inverses Element** ($\forall a \in G, \exists \bar{a} \in G : a \circ \bar{a} = e$):

Jedes Element ist gleichzeitig sein eigenes inverses Element. Z.B.:

$$S_m \circ S_m = D_0$$

\Rightarrow Alle Bedingungen sind erfüllt, daher stellt **M eine Gruppe** dar.

- **Kommunikativität** ($\forall a \in G, \forall b \in G : a \circ b = b \circ a$):

Beispiel:

$$S_m \circ S_n = S_n \circ S_m$$

$$D_{180} = D_{180}$$

\Rightarrow Nachdem auch die Kommunikativität hier erfüllt ist, stellt M sogar eine **Abelsche Gruppe** dar.

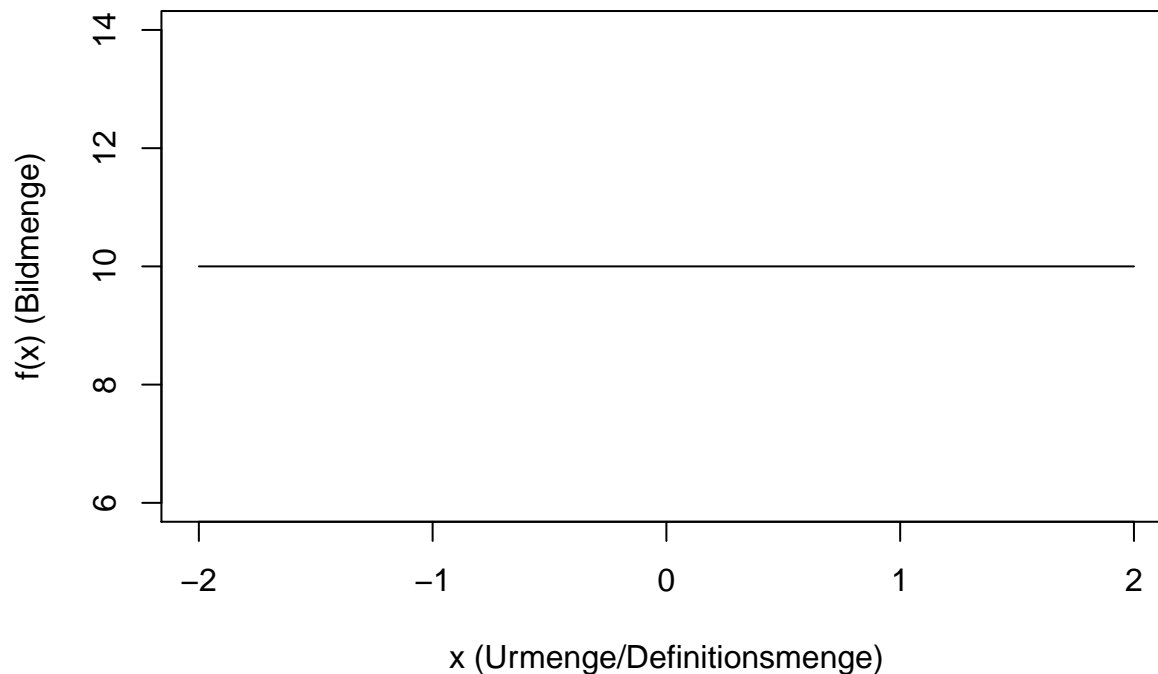
Aufgabe 3

1. $f(x) = 10$:

$$D = \mathbb{R}$$

$$B = \{10\}$$

\Rightarrow nicht surjektiv, nicht injektiv

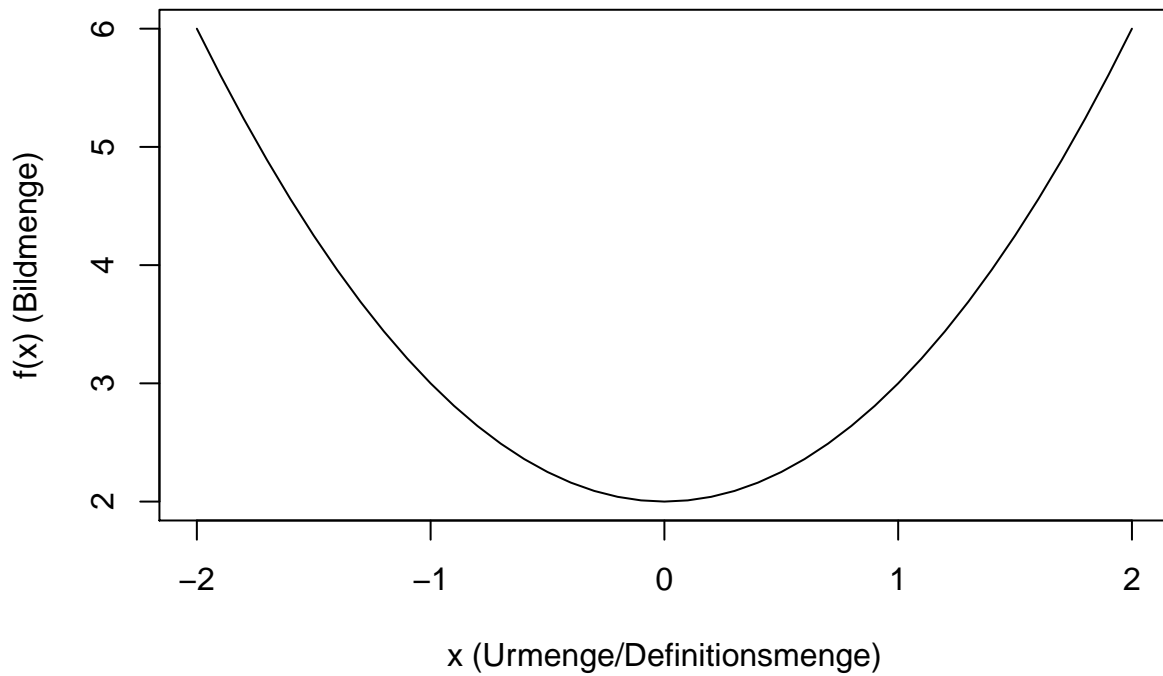


2. $f(x) = x^2 + 2$:

$$D = \mathbb{R}$$

$$B = [2, +\infty[$$

\Rightarrow nicht surjektiv, nicht injektiv

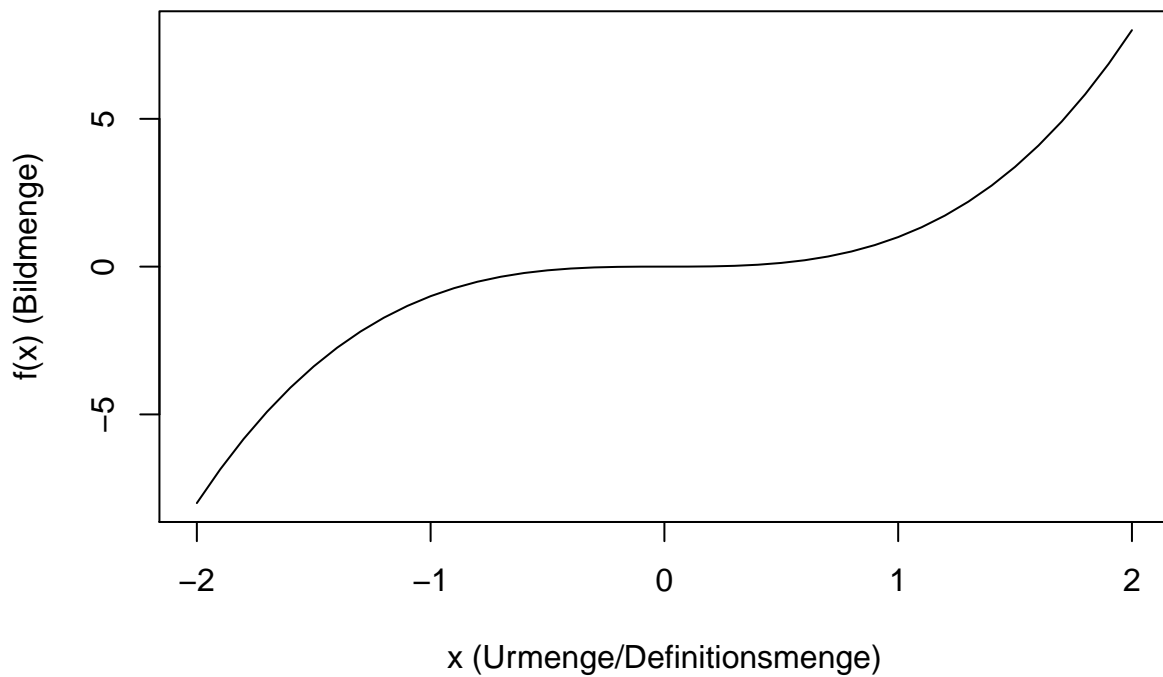


3. $f(x) = x^3$:

$$D = \mathbb{R}$$

$$B = \mathbb{R}$$

\Rightarrow surjektiv und injektiv \rightarrow bijektiv

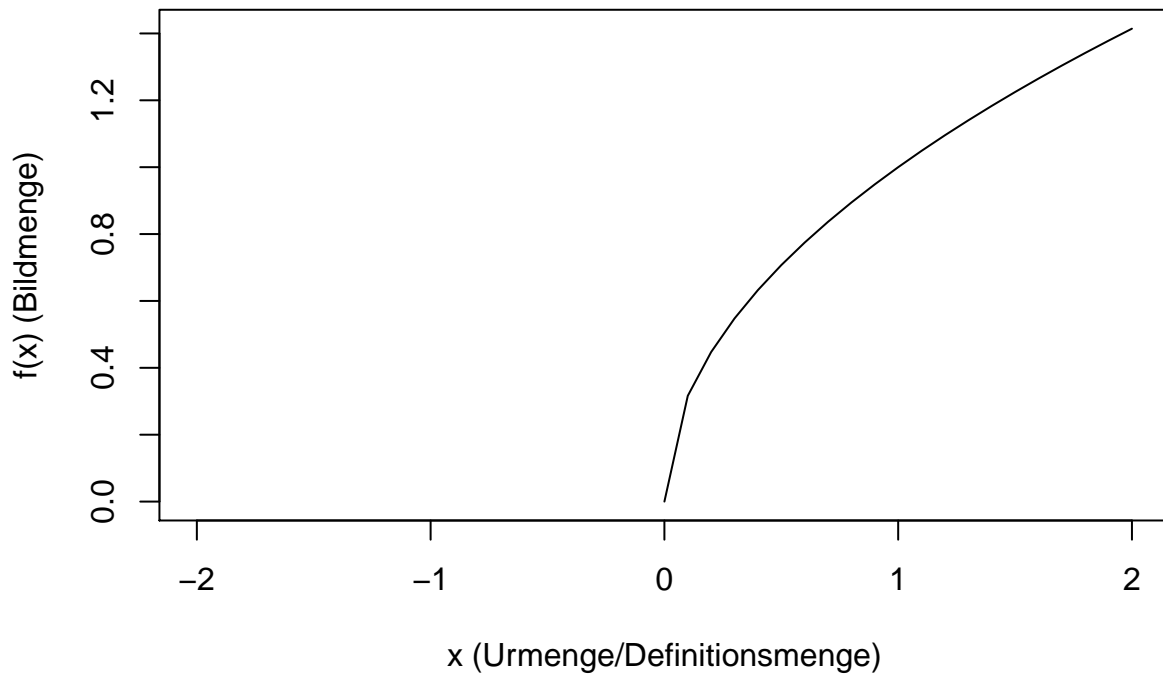


4. $f(x) = \sqrt{x}$:

$$D = \mathbb{R}^+$$

$$B = \mathbb{R}^+$$

\Rightarrow nicht surjektiv, aber injektiv

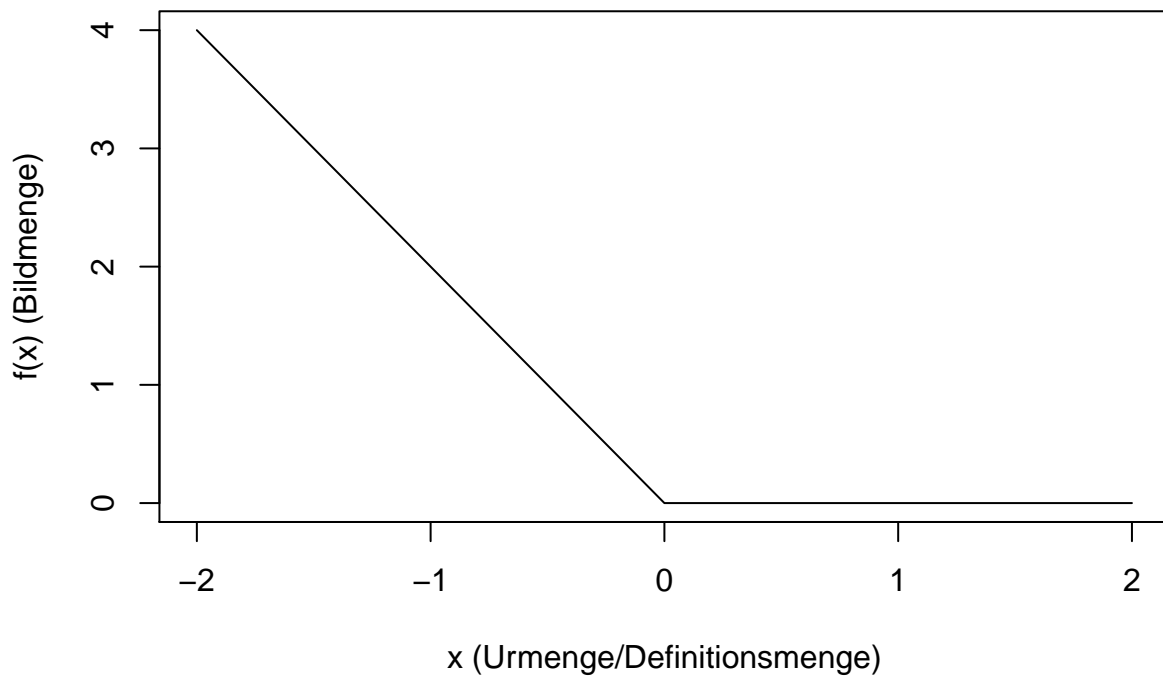


5. $f(x) = |x| - x$:

$$D = \mathbb{R}$$

$$B = \mathbb{R}^+$$

\Rightarrow nicht surjektiv, nicht injektiv

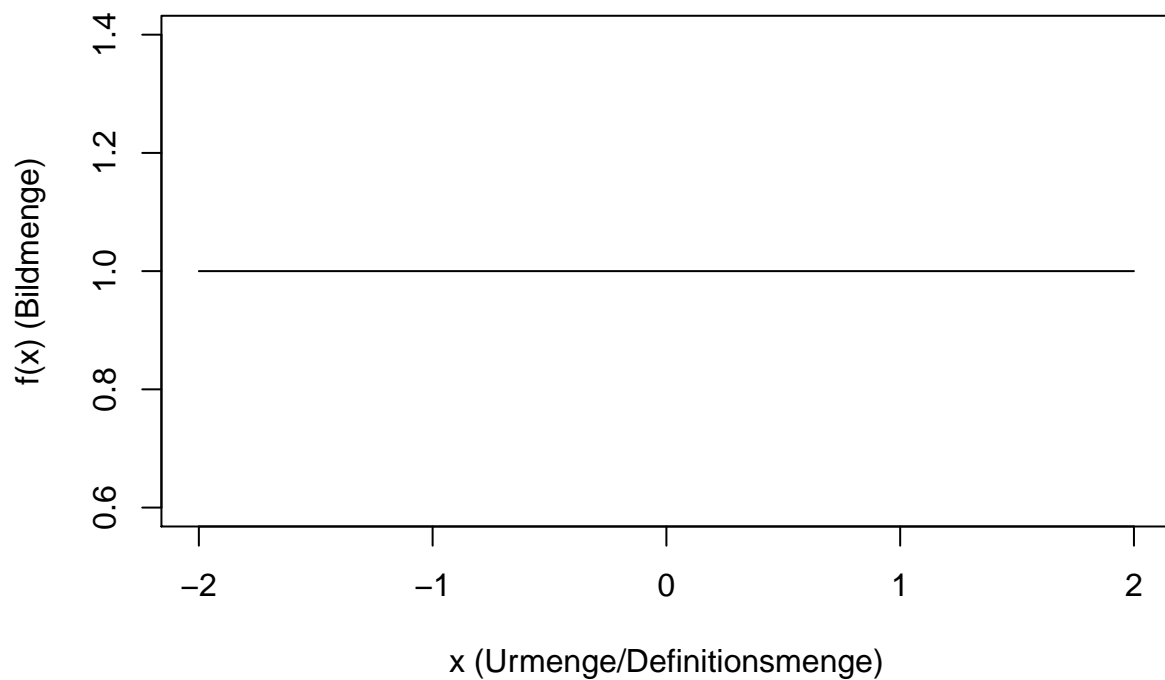


6. $f(x) = (\text{sgn}(x))^2$ wobei $\text{sgn}(x) = 1$ wenn $x \geq 0$ und $\text{sgn}(x) = -1$ wenn $x < 0$:

$$D = \mathbb{R}$$

$$B = \{1\}$$

\Rightarrow nicht surjektiv, nicht injektiv



Aufgabe 4

Teilaufgabe a

1.

$$\vec{a} + (\vec{b} - \vec{c}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

2.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 3 + 2 + 6 = 11$$

3.

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{c} = (2 + 2 - 3) \cdot \vec{c} = \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4.

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) - \vec{c} \rightarrow \text{Berechnung nicht möglich}$$

5.

$$\frac{\vec{a}}{\|\vec{b} + \vec{c}\|} = \frac{\vec{a}}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\vec{a}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\vec{a}}{\sqrt{1+1+16}} = \frac{1}{\sqrt{18}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

6.

$$\frac{\vec{a}}{\vec{b} + \vec{c}} \rightarrow \text{Berechnung nicht möglich.}$$

7. a)

$$\alpha(\vec{a}, \vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 + 2 - 3 = 1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} \Rightarrow \alpha = 83,7^\circ$$

7. b)

$$\theta(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c})$$

$$\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 + 2 - 12 = -9$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{14}$$

$$|\vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18}$$

$$\cos(\theta) = \frac{-9}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{18}} \Rightarrow \theta = 124,5^\circ$$

Teilaufgabe b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Durch die geforderte Orthogonalität zu den beiden Vektoren sowie der Länge 7 können wir folgende Gleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \vec{u} \cdot \vec{a} = x + 2y = 0 \\ (2) \quad & \vec{u} \cdot \vec{b} = y + z = 0 \\ (3) \quad & |\vec{u}| = 7 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 49 \end{aligned}$$

Gleichung (1) und (2) können jeweils nach y umformuliert werden:

$$\begin{aligned} (1) \quad & x = -2y \\ (2) \quad & z = -y \end{aligned}$$

Wenn man diese in Gleichung (3) einsetzt erhält man:

$$\begin{aligned} (3) \quad & 4y^2 + y^2 + y^2 = 49 \\ & \rightarrow 6y^2 = 49 \\ & \rightarrow y = \pm \frac{7}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

Nach Einsetzen von y in Gleichung (1) und (2):

$$\begin{aligned} x &= \mp 2 \cdot \frac{7}{\sqrt{6}} \\ z &= \mp \frac{7}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

Und somit ergeben sich die 2 zu beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} orthogonalen Vektoren:

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \\ +7 \end{pmatrix}$$

Weiteres Material zu Vektoren: http://immersivemath.com/ila/ch02_vectors/ch02.html

Frage Tupel

An n-tuple is a sequence (or ordered list) of n elements, where n is a non-negative integer.
Beispiele:

1. Punkte
2. Vektoren