UB7 – Tutorium Mathe A WS19/20

Anton Hanke

Tutorium: 21/11/2019

Aufgabe 1

Gegeben:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$$

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b)

Wir haben hier eine breite matrix $(m < n)$ A. Mit dieser ist ein inhomogenes Gleichungssystem aufgestellt. Wir wollen die Lösungsmenge beschreiben. Somit müssen wir eine:

- Spezielle & partikuläre Lösung
- folgend allgemeine Lösung (Nullraum von A)

bestimmen. Dies ergibt sich aus dem Zusammenhang der beiden Lösungen. Eine Partikuläre Lösung des inhomogenen Gleichungssystems erweitert den Vektorraum der Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems der matrix A um eine Dimension, wodurch nun gelten kann das:

$$\vec{b} \in \text{span}(\text{Lösungsmenge})$$

Wir bestimmen zunächst die partikuläre Lösung mittels Elimination:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right) \tag{1}$$

From this we deduct that the variables $x_{3:5}$ are free. Thus $\dim |\,\text{span}[\,(A|0)\,]\,| = 3$.

1) spezielle Lösung: Stellen kombination an variablen auf die alle möglichen Lösungen des LGS $(A|0)$ darstellen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \mu - \alpha + \beta \\ 2\mu \\ \alpha \\ \beta \\ \mu \end{pmatrix}$$

2) Partikuläre Lösung:

   - Alle freien Variablen $= 0$ setzen

- restlichen Variablen berechnen.

Daraus folgt mit $(A|b)'$ das: $x_2 = -3$ und $x_1 = 1 + 2x_2 = -5$. Somit die Partikuläre Lösung:

$$x_p = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3) Wir folgern:

$$x = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu - \alpha + \beta \\ 2\mu \\ \alpha \\ \beta \\ \mu \end{pmatrix}$$

(c)

Wir wollen nun eine Basis unserer Allgemeinen Lösung berechnen, dies ist möglich durch Berechnung von expliziten speziellen Lösungen.
Hier setzen wir für jeweils eine der freien Variablen in unserer speziellen Lösung einen Wert (1) und die anderen 0, daraus berechnen wir die pivo-variabeln. Somit errechnen wir 3 Vektoren und erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(d)

In unserer Lösungsmenge sind nur 3 unabhängige Vektoren möglich, siehe (b).

Aufgabe 2)

(A)

$$U = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Pivo: $x_1 \& x_3$
- frei: rest

Dementsprechend expliziete spezielle Lösungen berechnen wie in Aufgabe (1).

(B)

$$U = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 4 & 2 \\ 0 & \boxed{4} & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Pivot: $x_1 \& x_2$
- frei: x_3

Aufgabe (3)

Wir erinnern uns an die Berechnung von Eigenwerten und Vektoren:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \\
\det|A-\lambda I| &= 0 \\
\Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha_1-\lambda & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\
\xrightarrow{\text{Lap. Entwicklungssatz}} &\begin{cases} (\alpha_1-\lambda)(\alpha_4-\lambda)-\alpha_2\alpha_3=0 \\ \lambda = \left\{\lambda \in \mathbb{R} \,|\, \alpha_1\alpha_4+\lambda^2-\lambda\left(\alpha_1+\alpha_4\right)-\alpha_2\alpha_3=0\right\} \end{cases}
\end{aligned}$$

Nun sind die Vektoren: $X :\Leftrightarrow \{x|\lambda_i \in \{\lambda\} : (A-\lambda_i I)x = 0\}$

Die betrachtete Matrix erfüllt:

- 3×3
- $\lambda = \{0, 1, 2\}$

(a)

Es gilt:

$$\dim|\,N(A)| = \#\text{Spalten} - \text{Rg}(A)$$

Der Eigenraum des Eigenwertes $\lambda = 0$ ist der Nullraum von A. Dieser Eigenwert hat eine Multiplizität von 1. Somit muss der Nullraum eine Dimension von 1 haben.

$$\Rightarrow \text{Rg}(A) = \#\text{Spalten} - \dim|\,N(A)\,| = 2$$

(b)

Wir wisse: $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det|\,A\,|$
Da 0 ein Eigenwert ist gilt nun:

$$\det\left|\,A^T A\,\right| = \det\left|\,A\,\right| \cdot \det\left|\,A^T\,\right| = 0 \cdot \det\left|\,A^T\,\right| = 0.$$

(c)

Wir beachten den Hinweis und erkennen folgende Beschreibung für erwähnte Determinante:

$$\det\left|\,(A+I)^{-1} - \mu I\,\right| = 0$$

Wir befolgen nun in unseren Umformungen denn Hinweis und kommen auf:

$$\det\left|\,(A+I)\,(A+I)^{-1} - \mu\,(A+I)\,\right| = 0$$

Durch Umformen und berechnen:

$$\det \left| \, I - \mu \left(A + I \right) \, \right| = 0 \tag{2}$$
$$\det \left| -\mu \left(A - \frac{1-\mu}{\mu} I \right) \right| = 0 \tag{3}$$
$$(-\mu)^3 \det \left| A - \frac{1-\mu}{\mu} I \right| = 0 \tag{4}$$
$$\det \left| A - \frac{1-\mu}{\mu} I \right| = 0 \tag{5}$$

Damit dies mit unserer A matrix vom Anfang lösbar ist muss gelten: $\frac{1-\mu}{\mu} = \{0, 1, 2\}$.
Durch gleichsetzen des Bruches mit den Eigenwerten von A errechnen sich folgende Eigenwerte für $(A+I)^{-1}$:

- $\mu = 1$
- $\mu = \frac{1}{2}$
- $\mu = \frac{1}{3}$