UB8 – Tutorium Mathe A WS19/20

Anton Hanke

Tutorium: 19/12/2019

Aufgabe 1

Wir erinnern uns an das letzte Mathetutorium.

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} \\
\det|A - \lambda I| &= 0 \\
\Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha_1 - \lambda & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\
\xrightarrow{\text{Lap. Entwicklungssatz}} &\begin{cases} (\alpha_1 - \lambda)(\alpha_4 - \lambda) - \alpha_2\alpha_3 = 0 \\ \lambda = \left\{\mu \in \mathbb{R} \,|\, \alpha_1\alpha_4 + \lambda^2 - \lambda\,(\alpha_1 + \alpha_4) - \alpha_2, \alpha_3 = 0\right\} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ebenso erinnern wir uns: $X :\Leftrightarrow \{x|\lambda_i \in \{\lambda\} : (A - \lambda_i I)x = 0\}$

(a)

Hier ergibt sich die Menge der Eigenwerte wie folgt:

$$
\det\left|\begin{pmatrix} \frac{13}{8} & \frac{3\sqrt{3}}{8} \\ \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| \stackrel{!}{=} \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{13}{8} - \lambda\right)\left(\frac{7}{8} - \lambda\right) - \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^2 = 0 \\ \lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \,\middle|\, \lambda^2 - \frac{5}{2} \cdot \lambda + \underbrace{\frac{13 \cdot 7}{8^2} - \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^2}_{=1} = 0 \right\} \end{array} \right.
$$

Diese Gleichung folgt aus der oben erwähnten charakteristischen Gleichung.

(b)

Für dir folgende Menge soll überprüft werden, ob die Werte Eigenwerte der Matrix sind:

$$\lambda = \{0.5, 2\}$$

Hierfür müssen wir einfach nur in die in (a) bestimmte Gleichung einsetzen.

- $f(0.5) = 0$
- $f(2) = 0$

(c)

Wir erinnern uns das für Eigenvektoren gilt: $Au_i = \lambda u_i$.

1) Für u_1:

$$\begin{pmatrix} \frac{13}{8} & \frac{3\sqrt{3}}{8} \\ \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

2) Für u_2:

$$\begin{pmatrix} \frac{13}{8} & \frac{3\sqrt{3}}{8} \\ \frac{3\sqrt{3}}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Hier dann jeweils die linke Seite Auflösen.

Aufgabe 2)

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t+2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

(a)

$$\det \mid A_t - \lambda I \mid = \begin{vmatrix} 1-\lambda & t+2 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

Somit ergibt sich die Determinante als:

$$\det \mid A_t - \lambda I \mid = (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$$

Und dementsprechend nach Gleichsetzung und Auflösung mit 0:

1) $\lambda_1 = 1$ (mult. 2)
2) $\lambda_2 = 2$ (mult. 1)

(b)

Hier müssen wir zunächst unsere Eigenvektoren bestimmen.
Für $\lambda = 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & t+2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{3-\frac{2}{3}2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \boxed{\text{t+2}} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(c)