UB10 – Tutorium Mathe A WS19/20

A. Hanke

Tutorium: 19/12/2019

Aufgabe 1

Wollen Grenzwerte der Folgen bestimmen:

$$(1)\ a_n = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}; \quad (2) a_n = \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^3}{(n+1)(n+2)}; \quad (3) a_n = n - 5 - \frac{n^3}{n^2+5}$$
$$(4) a_n = \cos n\pi; \quad (5) a_n = \cos n(n+1)\pi$$

(1)

$$a_n = \frac{n^2}{n^2+3n+2} = \frac{n^2}{n^2(1+\frac{3n}{n^2}+\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

(2)

$\lim_{n\to\infty} = 2$

(3)

$\lim_{n\to\infty} = -5$

(4)

$a_n = \cos n\pi$ hat folgende Werte zu begin:

- $a_0 = 1$
- $a_1 = -1$
- $a_2 = 1$

Entspricht der Folge: $(-1)^n$. Diese Konvergiert nicht.

(5)

Hier von interesse ist die enthaltene Reihe:

$$a'_n = n(n+1)$$

Diese Reihe beinhaltet nur gerade Zahlen. Daher ist die Folge a_n:

$$a_n = \cos(n(n+1)\pi) = 1 \qquad \forall n$$

Aufgabe 2

$$a_{n+1} = \frac{|a_n|}{2a_n - 1} \qquad a_1 = b \quad b = \left\{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\}$$

(a)

Annahme: $a_n \to a$
Bedingung an a nach rekursionsformel:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{2a_n - 1} = \frac{|a|}{2a - 1}$$

Nun gilt das a_n gegen a läuft, also: $\lim a_n = a$.

$$a = \frac{|a|}{2a-1} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2a^2 - a = |a| \\ 2a^2 - a - |a| = 0 \end{array} \right.$$

Nun können wir zwei Fälle betrachten:

1) Die Folge strebt einen Positiven Wert an $a > 0: \quad a = |a|$

$$\left. \begin{array}{ll} 0 & = 2a^2 - 2a \\ & = a(a-1) \end{array} \right\} a = \{1\}$$

2) Die Folge strebt einen negativen Wert an $a \leq 0: \quad a = -|a| \Leftrightarrow -a = |a|$

$$\left. \begin{array}{ll} 0 & = 2a^2 - a - (-a) \\ & = 2a^2 \end{array} \right\} a = \{0\}$$

(b)

Wir Berechnen der ersten drei weiteren a_n:

```
## n = 1 -> -0.25

## n = 2 -> -0.166666666666667

## n = 3 -> -0.125

## n = 4 -> -0.1
```

Die obere Beschränktheit zeigen wir nun über die Definition dieser $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a$.
Also zeigen, dass $a_n < 0$

- $a_1 < 0$
- Annahme: $a_n < 0$

$$a_{n+1} = \frac{|a_n|}{2a_n - 1} = \frac{\overbrace{-a_n}^{>0}}{\underbrace{2a_n - 1}_{<0}} < 0.$$

Nun zeigen, dass Folge monoton steigt. Dies ist der Fall, wenn $a_{n+1} - a_n > 0$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{-a_n}{2a_n - 1} - a_n \\ &= \frac{-a_n - 2a_n^2 + a_n}{2a_n - 1} \\ &= \frac{\overbrace{-2a_n^2}^{<0}}{\underbrace{2a_n - 1}_{<0}} \\ &> 0 \end{aligned}$$

(c)

Wir beachten den Hinweis:

```
## n = 1 -> 0.25
## n = 2 -> -0.5
## n = 3 -> -0.25
## n = 4 -> -0.166666666666667
```

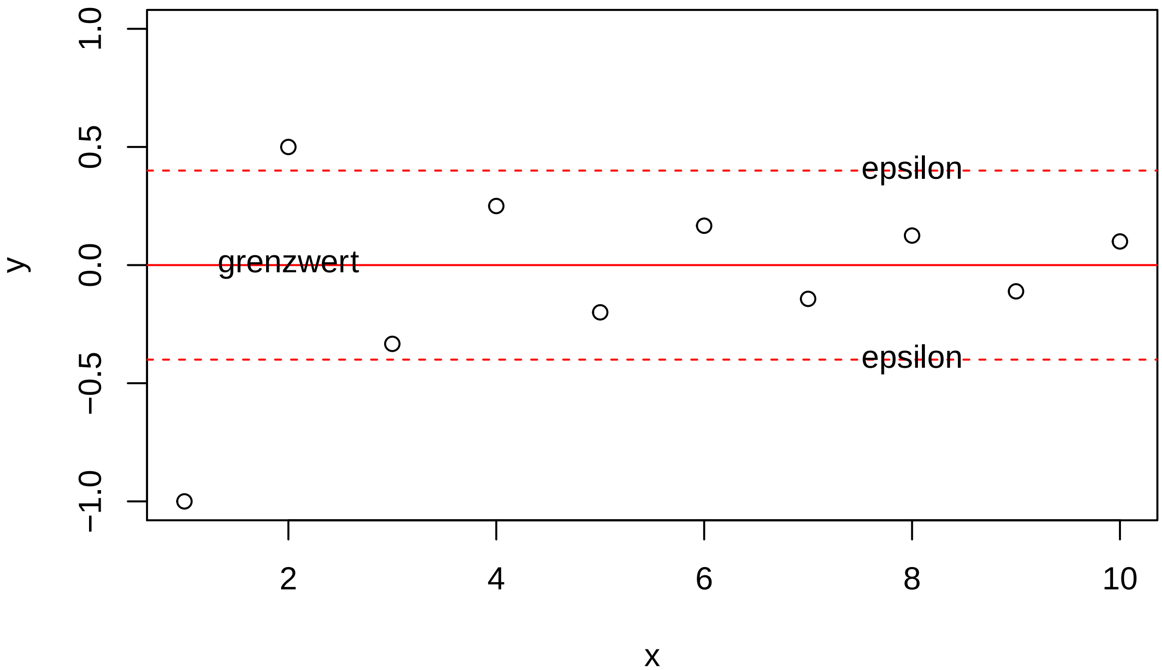
Und sehen das die Reihe nicht Monoton ist. Auffällig ist, das ab $n = 2$ die Folge negativ ist und das:

$$a_3^{b=\frac{1}{4}} = a_1^{b=-\frac{1}{2}}$$

Somit gilt:

$$a_{n+2}^{b=\frac{1}{4}} = a_n^{b=-\frac{1}{2}}$$

Konvergenz nicht gleich Monotonie und/oder Beschränktheit!



Diese folge ist nicht monoton und nicht beschränkt aber konvergiert.

(d)

Für $a = -\frac{1}{4}$ konvergiert die Folge (oben beschränkt und monoton steigend). Aus (a) Fall 2 wissen wir, das diese Reihe den Grenzwert 0 hat. Da die Reihe für beide b gleiches verhalten zeigt gilt dies auch für das andere b.

Aufgabe 3

(a)

Mit $c = -2$ ergeben sich folgende Werte für die ersten Therme der Folge $a_{n+1} = \frac{n^2 \cdot a_n^2 + c}{n+1}$:

$$a_1 = \frac{0^2 \cdot 0^2 - 2}{0+1} = -2$$

$$a_2 = \frac{1^2 \cdot (-2)^2 - 2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$a_3 = \frac{2^2 \cdot 1^2 - 2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

$$a_4 = \frac{3^2 \cdot (\frac{2}{3})^2 - 2}{3+1} = \frac{2}{4}$$

$$a_5 = \frac{4^2 \cdot (\frac{2}{4})^2 - 2}{4+1} = \frac{2}{5}$$

Dies lässt vermuten, dass es sich für $c = -2$ bei dieser Folge um eine explizite Folge handelt mit der Form: $a_n = \frac{2}{n}$ für $n \geq 2$

Dies wollen wir nun durch vollständige Induktion beweisen:

Induktionsanfang:
$n = 2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{2}{2}$

Induktionsannahme:
$a_n = \frac{2}{n}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

Induktionsbehauptung:
$a_{n+1} = \frac{2}{n+1}$

Induktionsschritt:
$a_{n+1} = \frac{n^2 \cdot a_n^2 - 2}{n+1} = \frac{n^2 \cdot (\frac{2}{n})^2 - 2}{n+1} = \frac{4-2}{n+1} = \frac{2}{n+1}$ q.e.d.

(b)

Die Reihe konvergiert gegen einen Wert a, da: $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 : \forall n \geq n_0 |a_n| \leq \epsilon$

Grenzwertbestimmung:
$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$

Somit konvergiert die Folge gegen Null, d.h. a_n ist eine Nullfolge und somit gilt: $\forall \epsilon < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad |a_n| \leq \epsilon$

(c)

Für $c = 1$ sollen zwei Eigenschaften mittels vollständiger Induktion gezeigt werden.

Zuerst zeigen wir, dass $\forall n \geq 2 : a_n \geq 1$:

Induktionsanfang:
$n = 2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{1^2 \cdot a_n^2 + 1}{1+1} = \frac{1 \cdot 1^2 + 1}{2} = 1$

Induktionsannahme:
$a_n \geq 1$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

Induktionsbehauptung:
$a_{n+1} \geq 1$

Induktionsschritt:
$a_{n+1} = \frac{n^2 \cdot a_n^2 + 1}{n+1} \geq \frac{n^2 \cdot 1^2 + 1}{n+1} (\text{da } a_n \geq 1) = \frac{n^2+1}{n+1} > \frac{n+1}{n+1} = 1$ q.e.d.

Nun zeigen wir, dass $\forall n \geq 2 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$:

Induktionsanfang:

$n = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_3}{1} = a_3 = \frac{2^2 \cdot a_2^2 + 1}{2+1} = \frac{4 \cdot 1^2 + 1}{3} = \frac{5}{3} > 1$

Induktionsannahme:

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

Induktionsbehauptung:

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \geq 1$

Induktionsschritt:

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{\frac{(n+1)^2 \cdot a_{n+1}^2 + 1}{(n+1)+1}}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)^2 \cdot a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+1}}}{(n+1)+1} > \frac{(n+1)^2 \cdot 1 + \frac{1}{1}}{(n+1)+1}$(schon bewiesen, dass $a_n \geq 1$) $= \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)+1} > \frac{(n+1)+1}{(n+1)+1} = 1$ q.e.d.