UB3 – Tutorium Mathe A WS19/20

Maximilian Kohnen

Tutorium: 07/11/2019

Aufgabe 1

Die Implikation soll mittels Kontraposition gelöst werden. Bei Aufstellen der Kontraposition ist wichtig zu beachten, dass:

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$$

Für unseren Fall heißt das also:

$$\neg(A = B) \Rightarrow \neg(A \backslash B = B \backslash A) A \neq B \Rightarrow A \backslash B \neq B \backslash A$$

A und B stellen in diesem Fall Mengen dar, also beschreibt $A \backslash B$ eine Mengendifferenz.

$$A \neq B \Rightarrow \exists a \in A : a \notin B$$
$$\Rightarrow a \in A \backslash B \quad \text{und} \quad a \notin B \backslash A \quad \text{da} \quad a \notin B \Rightarrow A \backslash B \neq B \backslash A \qquad \text{q.e.d}$$

Weiteres Material zu Mengen und Aussagen: http://www.gm.fh-koeln.de/~konen/Mathe1-WS/ZD1-Kap01-02.pdf

---

Aufgabe 2

Für die Überprfung, ob die Menge M eine Gruppe darstellt, müssen die 4 Bedingungen: Abgeschlossenheit, Assoziativität, neutrales Element und inverses Element erfüllt sein.

- **Abgeschlossenheit** ($a \in G, b \in G : a \circ b \in G$):

  Die Tabelle zeigt, dass jede Kombination der Elemente der Menge M wiederrum ein Element der Menge M ergibt.

$\circ$	S_m	S_n	D_0	D_{180}
S_m	D_0	D_{180}	S_m	S_n
S_n	D_{180}	D_0	S_n	S_m
D_0	S_m	S_n	D_0	D_{180}
D_{180}	S_n	S_m	D_{180}	D_0

- **Assoziativität** ($(b \circ a) \circ c = a \circ (b \circ c)$):

  Beispiel:

$$(S_m \circ D_{180}) \circ S_n = S_m \circ (D_{180} \circ S_n)$$
$$S_n \circ S_n = S_m \circ S_m$$
$$D_0 = D_0$$

- **Neutrales Element** ($\exists e \in G, \forall a \in G : a \circ e = a$): D_0

  Jedes Element der Menge M ergibt in der Kombination mit D_0 sich selbst (siehe Tabelle).
- **Inverses Element** ($\forall a \in G, \exists \bar{a} \in G : a \circ \bar{a} = e$):

  Jedes Element ist gleichzeitig sein eigenes inverses Element. Z.B.:

$$S_m \circ S_m = D_0$$

$\Rightarrow$ Alle Bedingungen sind erfüllt, daher stellt **M eine Gruppe** dar.

- **Kommultativität** ($\forall a \in G, \forall b \in G : a \circ b = b \circ a$):

  Beispiel:

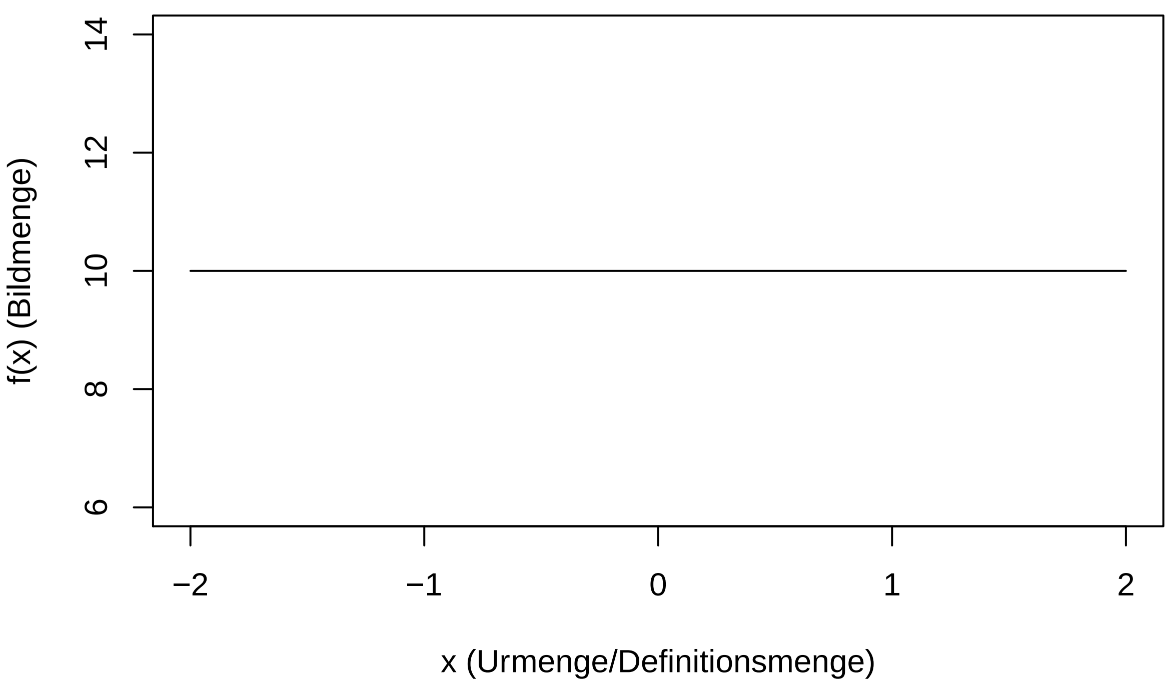
$$S_m \circ S_n = S_n \circ S_m$$
$$D_{180} = D_{180}$$

$\Rightarrow$ Nachdem auch die Kommultativität hier erfüllt ist, stellt M sogar eine **Abelsche Gruppe** dar.

Aufgabe 3

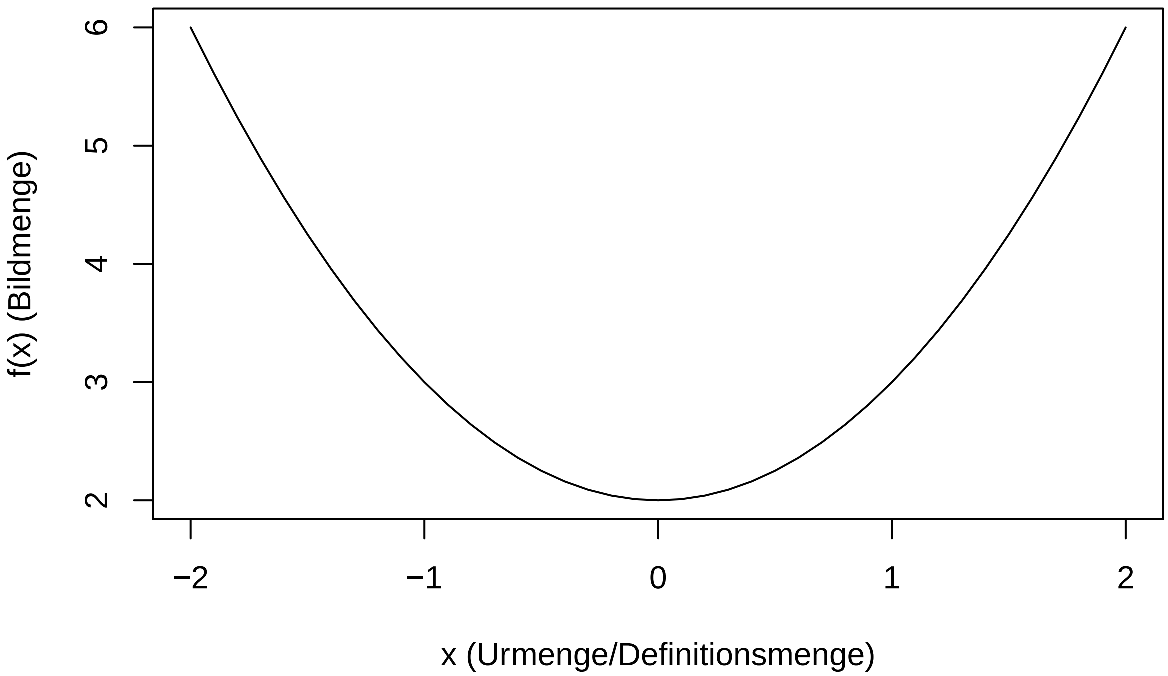
1. $f(x) = 10$:

   $D = \mathbb{R}$
   $B = \{10\}$
   $\Rightarrow$ nicht surjektiv, nicht injektiv



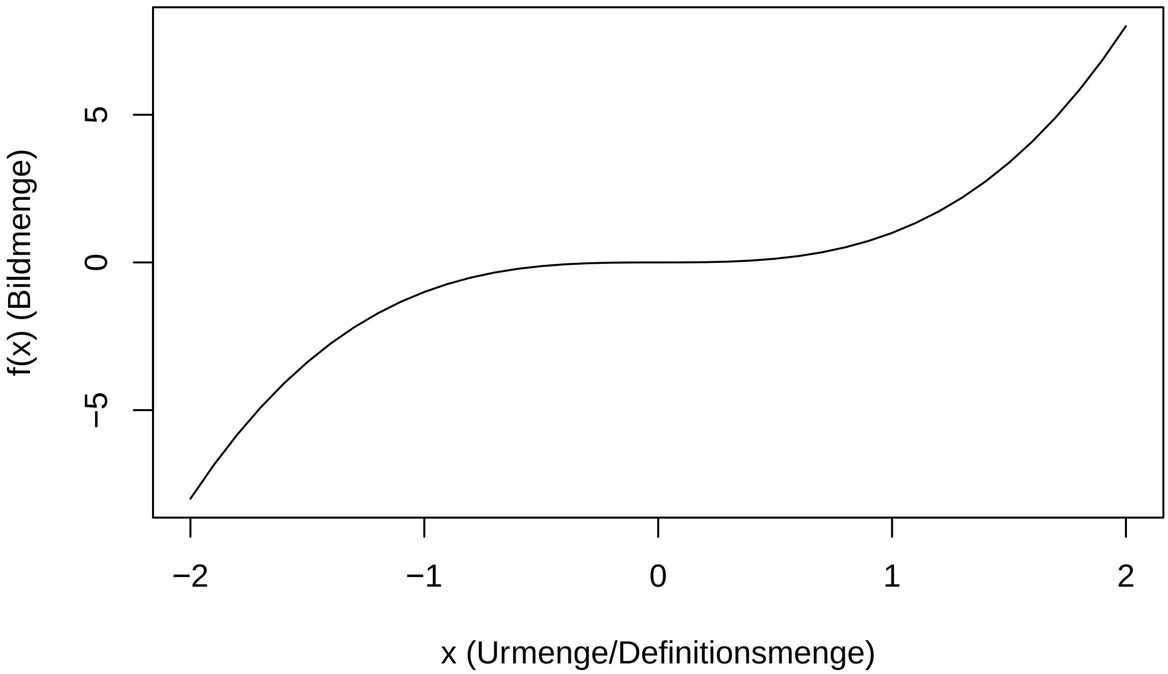
2. $f(x) = x^2 + 2$:

   $D = \mathbb{R}$
   $B = [2, +\infty[$
   $\Rightarrow$ nicht surjektiv, nicht injektiv



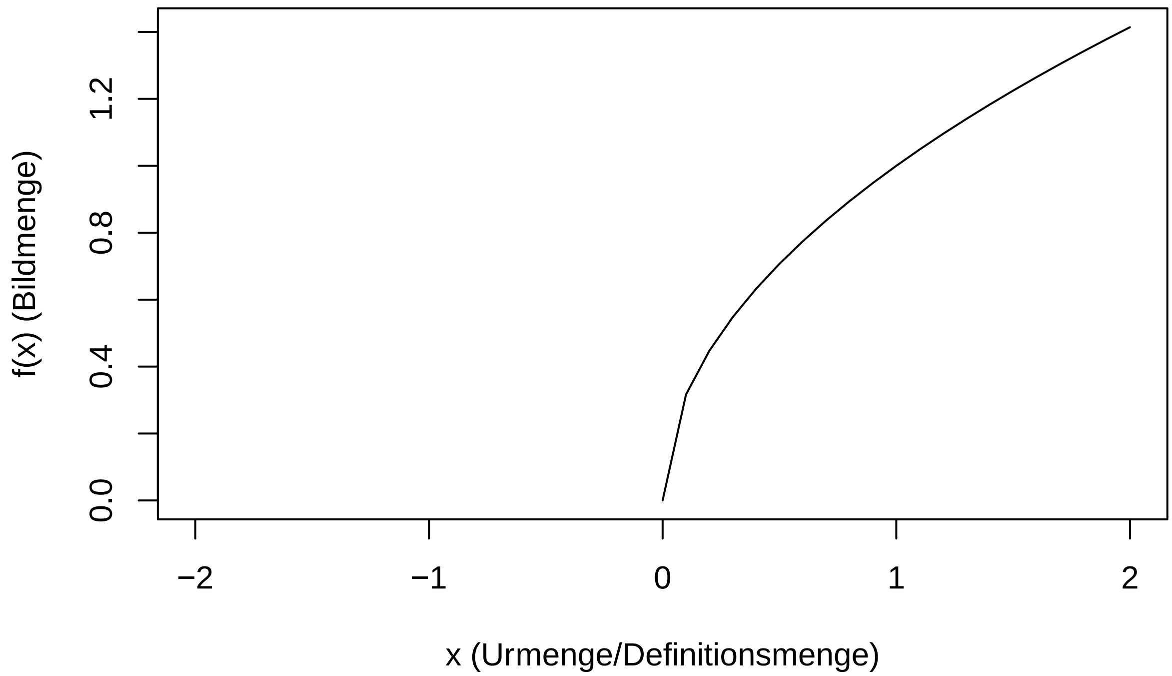
3. $f(x) = x^3$:

   $D = \mathbb{R}$
   $B = \mathbb{R}$
   $\Rightarrow$ surjektiv und injektiv $\rightarrow$ bijektiv



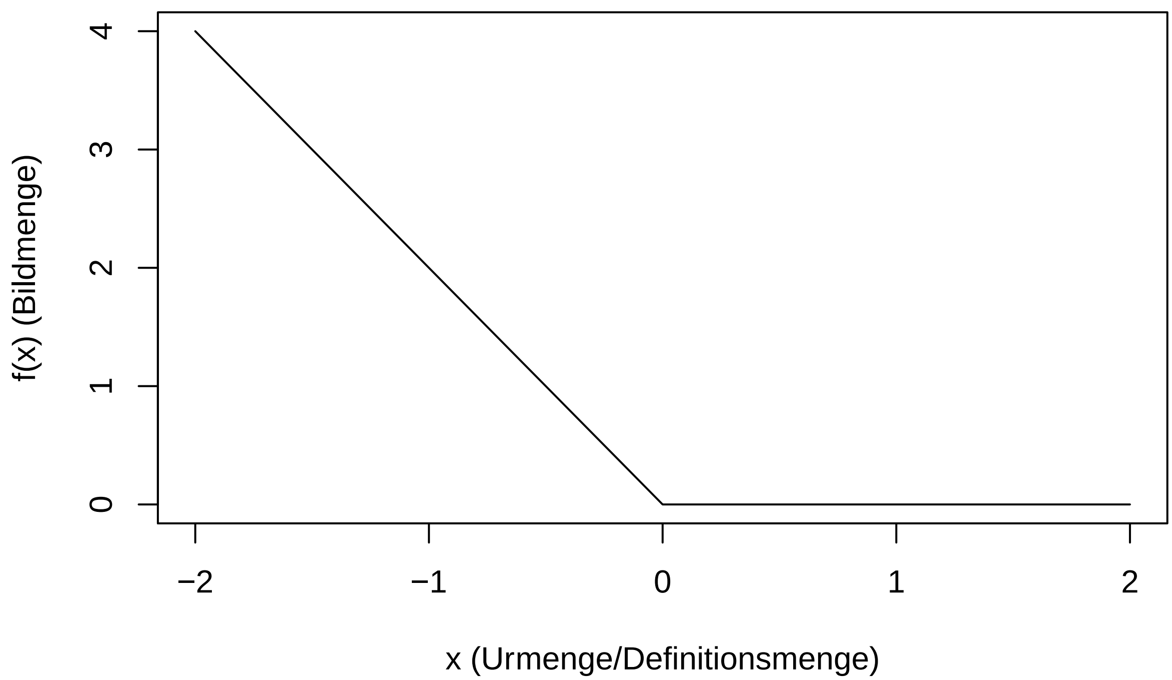
4. $f(x) = \sqrt{x}$:

   $D = \mathbb{R}^+$
   $B = \mathbb{R}^+$
   $\Rightarrow$ nicht surjektiv, aber injektiv



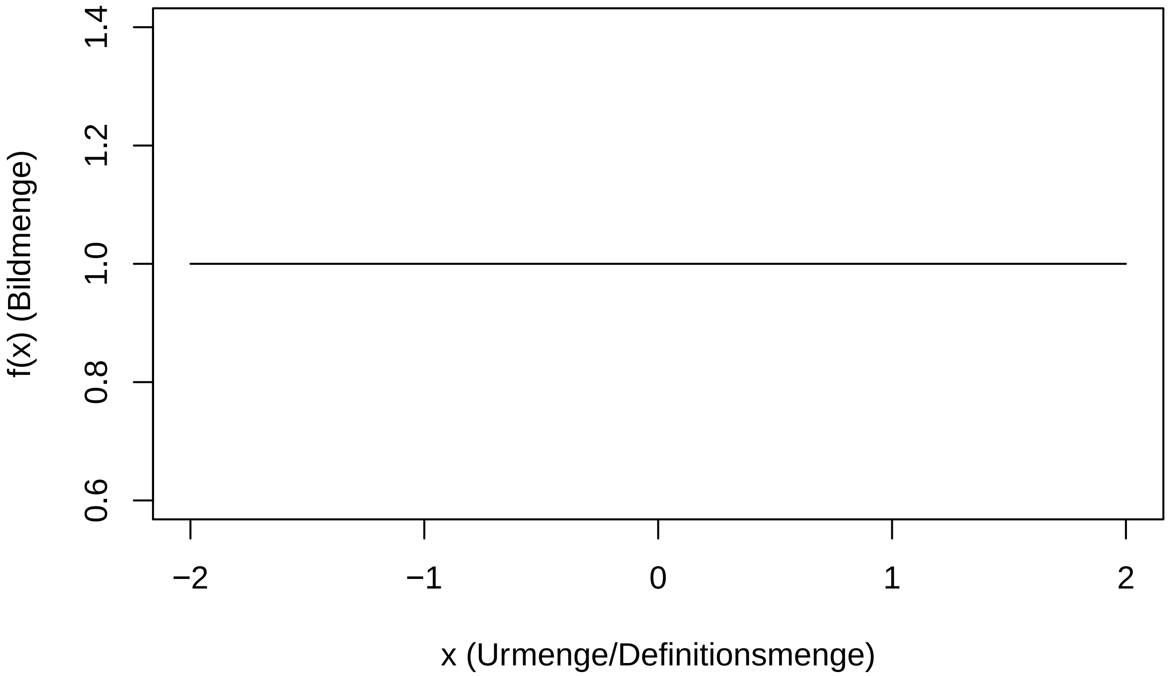
5. $f(x) = |x| - x$:

   $D = \mathbb{R}$
   $B = \mathbb{R}^+$
   $\Rightarrow$ nicht surjektiv, nicht injektiv



6. $f(x) = (sgn(x))^2$ wobei $sgn(x) = 1$ wenn $x \geq 0$ und $sgn(x) = -1$ wenn $x < 0$:

   $D = \mathbb{R}$
   $B = \{1\}$
   $\Rightarrow$ nicht surjektiv, nicht injektiv



Aufgabe 4

Teilaufgabe a

1.

$$\overrightarrow{a} + (\vec{b} - \vec{c}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

2.

$$\overrightarrow{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 3 + 2 + 6 = 11$$

3.

$$(\overrightarrow{a} \cdot \vec{b}) - \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{c} = (2 + 2 - 3) \cdot \vec{c} = \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4.

$$(\overrightarrow{a} \cdot \vec{b}) - \vec{c} \quad \rightarrow \text{Berechnung nicht möglich}$$

5.

$$\frac{\overrightarrow{a}}{||\vec{b}+\vec{c}||} = \frac{\overrightarrow{a}}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\overrightarrow{a}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\overrightarrow{a}}{\sqrt{1+1+16}} = \frac{1}{\sqrt{18}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

6.

$$\frac{\overrightarrow{a}}{\vec{b}+\vec{c}} \qquad \rightarrow \text{Berechnung nicht möglich.}$$

7. a)

$$\alpha(\overrightarrow{a}, \vec{b})$$

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot cos(\alpha)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 + 2 - 3 = 1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} \qquad \Rightarrow \alpha = 83,7ř$$

7. b)

$$\theta(\vec{a}, \vec{b}+\vec{c})$$

$$\vec{b}+\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b}+\vec{c}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 + 2 - 12 = -9$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{14}$$

$$|\vec{b}+\vec{c}| = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18}$$

$$cos(\theta) = \frac{-9}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{18}} \qquad \Rightarrow \theta = 124,5ř$$

Teilaufgabe b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Durch die geforderte Orthogonalität zu den beiden Vektoren sowie der Länge 7 können wir folgende Gleichungen aufstellen:

$$\begin{aligned} &(1) \quad \vec{u} \cdot \vec{a} = x + 2y = 0 \\ &(2) \quad \vec{u} \cdot \vec{b} = y + z = 0 \\ &(3) \quad |\vec{u}| = 7 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 = 49 \end{aligned}$$

Gleichung (1) und (2) können jeweils nach y umformuliert werden:

$$\begin{aligned} &(1) \quad x = -2y \\ &(2) \quad z = -y \end{aligned}$$

Wenn man diese in Gleichung (3) einsetzt erhält man:

$$\begin{aligned} (3) \quad 4y^2 + y^2 + y^2 &= 49 \\ \rightarrow 6y^2 &= 49 \\ \rightarrow y &= \pm\frac{7}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

Nach Einsetzen von y in Gleichung (1) und (2):

$$\begin{aligned} x &= \mp 2 \cdot \frac{7}{\sqrt{6}} \\ z &= \mp\frac{7}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

Und somit ergeben sich die 2 zu beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonalen Vektoren:

$$\vec{v_1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} -14 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v_1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \\ +7 \end{pmatrix}$$

Weiteres Material zu Vektoren: http://immersivemath.com/ila/ch02_vectors/ch02.html

---

Frage Tupel

An n-tuple is a sequence (or ordered list) of n elements, where n is a non-negative integer.
Beispiele:

1. Punkte
2. Vektoren