

UB4 – Tutorium Mathe A WS19/20

Anton Hanke

Tutorium: 14/11/2019

Aufgabe 1.

rechen operationen

Es seien die Komplexen Zahlen $v = a_v \cdot ib_v$ und $u = a_u \cdot ib_u$.

Multiplikation

Wir sollen zeigen, dass:

$$||uv|| = ||u|| \cdot ||v||$$

Wir berechnen nun alle beträge und multiplikationen auf beiden Seiten der Gleichung:

$$\begin{aligned} ||uv|| &= ||(a_u \cdot ib_u) \cdot (a_v \cdot ib_v)|| && \text{Ausmultiplizieren} \\ ||uv|| &= |a_u a_v + ia_u b_v + ib_u a_v + i^2 b_u b_v| \\ ||uv|| &= |a_u a_v - b_u b_v + i(a_u b_v + b_u a_v)| \\ ||uv|| &= \sqrt{(a_u a_v - b_u b_v)^2 + (a_u b_v + b_u a_v)^2} && |z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ ||uv|| &= \sqrt{(a_u a_v)^2 + (b_u b_v)^2 - 2a_u a_v b_u b_v + (a_u b_v)^2 + (b_u a_v)^2 + 2a_u a_v b_u b_v} \\ &= \sqrt{(a_u a_v)^2 + (b_u b_v)^2 + (a_u b_v)^2 + (b_u a_v)^2}. \end{aligned}$$

Dies machen wir auch für die einzelnen Zahlen:

$$\begin{aligned} |u||v| &= \sqrt{a_u^2 + b_u^2} \sqrt{a_v^2 + b_v^2} \\ &= \sqrt{(a_u a_v)^2 + (a_u b_v)^2 + (b_u a_v)^2 + (b_u b_v)^2}. \end{aligned}$$

Diese beiden expressionen sind gleich.

Alternativ Lösung

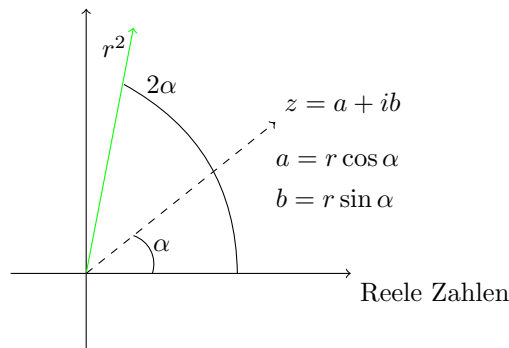
Komplexe Zahlen lassen sich auch in ihrer Polarform darstellen.

$$v = Re^{i\Phi}$$

$$u = R'e^{i\Phi'}$$

Von der Geometrischen Darstellung Komplexer Zahlen wissen wir, dass $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist.

Komplexe Zahlen



Demnach lässt sich der Betrag der beiden Vektoren wie folgt aufstellen:

$$\begin{aligned} ||uv|| &= |RR'e^{i(\Phi\Phi')}| = RR' \\ \left. \begin{aligned} |u| &= |Re^{i\Phi}| = R \\ |v| &= |R'e^{i\Phi'}| = R' \end{aligned} \right\} |u||v| &= RR' \end{aligned}$$

Addition

Wir sollen zeigen, dass:

$$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$$

Nun berechnen wir alle Beträge und addieren:

$$\begin{aligned} |u| + |v| &= \sqrt{a_u^2 + b_u^2} + \sqrt{a_v^2 + b_v^2} \\ |u + v| &= \sqrt{(a_u + a_v)^2 + (b_u + b_v)^2} \\ &= \sqrt{a_u^2 + a_v^2 + 2a_u a_v + b_u^2 + b_v^2 + 2b_u b_v} \end{aligned}$$

Wir setzen nun zusammen und stellen um:

$$\begin{aligned} |u + v|^2 &\stackrel{?}{\leq} (|u| + |v|)^2 \\ \Leftrightarrow a_u^2 + a_v^2 + 2a_u a_v + b_u^2 + b_v^2 + 2b_u b_v &\stackrel{?}{\leq} a_u^2 + a_v^2 + b_u^2 + b_v^2 + 2\sqrt{(a_u^2 + b_u^2)(a_v^2 + b_v^2)} \\ \Leftrightarrow a_u a_v + b_u b_v &\stackrel{?}{\leq} \sqrt{(a_u^2 + b_u^2)(a_v^2 + b_v^2)} \\ \Leftrightarrow (a_u a_v + b_u b_v)^2 &\stackrel{?}{\leq} (a_u^2 + b_u^2)(a_v^2 + b_v^2) \\ \Leftrightarrow 2a_u b_u a_v b_v &\stackrel{?}{\leq} a_u^2 b_v^2 + a_v^2 b_u^2 \\ \Leftrightarrow 0 &\stackrel{?}{\leq} a_u^2 b_v^2 + a_v^2 b_u^2 - 2a_u b_u a_v b_v \\ \Leftrightarrow 0 &\leq (a_u b_v - a_v b_u)^2 \end{aligned}$$

Quadrieren um sqrt zu entfernen
umformen

Quadrieren um sqrt zu entfernen
umformen

Zusammenfassen



trigonometrische Formen

Trigonometrische Form z

Schreiben Sie $z = 3 - i8$ in trigonometrischer Form, also als $z = r \cdot e^{i\Theta}$.
Von dem Graphen in der ersten Teilaufgabe ist erkenntlich:

$$\cos \alpha = \frac{a}{r} \quad \sin \alpha = \frac{b}{r}$$

Auch wissen wir, dass $r = |z|$. Damit können wir nun r berechnen und daraus folgend den cosinus und sinus von α berechnen. Dies setzen wir folgend in die Polarkoordinatenform ein.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{73} \\ \cos \alpha &= \frac{3}{r} \quad \sin \alpha = \frac{-8}{r} \\ \Leftrightarrow z &= \sqrt{73} \left(\frac{3}{\sqrt{73}} - \frac{8}{\sqrt{73}} i \right) \\ \Leftrightarrow z &= \sqrt{73} e^{i \cdot \sin^{-1} \left(\frac{-8}{\sqrt{73}} \right)} \end{aligned}$$

Finde u

Es soll eine Zahl existieren: $u = R e^{i\Phi} = R(\cos \Phi + i \sin \Phi)$

für die gilt: $u^2 = z$.

Hierbei muss gelten: $\sin \Phi < 0 \rightarrow \Phi \in [-\pi, 0]$.

Nach der Ersten Bedingung können wir folgend aufstellen:

$$R^2 e^{2i\Phi} = \sqrt{73} e^{i \sin^{-1} \left(\frac{-8}{\sqrt{73}} \right)}$$

Dies ermöglicht die Auflösung von den variablen:

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \sqrt{r} \\ 2\Phi = \sin^{-1} \left(\frac{-8}{\sqrt{73}} \right) \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} = (73)^{\frac{1}{4}} \\ \Phi = \frac{\sin^{-1} \left(\frac{-8}{\sqrt{73}} \right)}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow u = (73)^{\frac{1}{4}} e^{i \frac{\sin^{-1} \left(\frac{-8}{\sqrt{73}} \right)}{2}}$$

Punktemengen in der komplexen Ebene

(a)

$$\operatorname{Im}(z) = |z|$$

Wir wissen $R = |z|$ und $\operatorname{Im}(z) = R \sin \alpha$. Somit:

$$R \sin \alpha = R \Leftrightarrow \sin \alpha = 1$$

daraus:

$$z = R e^{i\pi/2} = iR$$

Damit entspricht z der y -Achse und ist element der Reellen Zahlen.

(b) $z = |z|$

$$\begin{aligned} z = |z| &\Leftrightarrow R(\cos \alpha + i \sin \alpha) = R \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = 1 \\ \sin \alpha = 0 \end{array} \right. \quad \alpha = 0. \\ z &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

(c) $z = \bar{z}$

$$\begin{aligned} a + ib &= a - ib \\ \Rightarrow z &= \{a \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

(d) $|z| = 3$

Kreis mit Radius 3.
Siehe Abbildung in 1a)

(e) $|z + 3 - 4i| > 5$

$$\begin{aligned} |a + 3 + i(b - 4)| &> 5 \\ (a + 3)^2 + (b - 4)^2 &> 25 \end{aligned}$$

Somit ist z ein Kreis mit dem Mittelpunkt $(-3, 4)$ und einem radius > 5 . Hierbei muss erkannt werden, dass:

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= r^2 \quad \text{Kreisfunktion} \\ (a + 3)^2 &= (x - x_0)^2 \\ (b - 4)^2 &= (y - y_0)^2 \end{aligned}$$

(f) $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 = -1$

Hier muss umgestellt werden:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 &= -1 \\ \frac{1+z}{1-z} &= \pm i \\ 1+z &= \pm i(1-z) \\ 1+z &= \pm i \mp zi \\ z \pm zi &= -1 \pm i \\ z(1 \pm i) &= -1 \pm i \\ z &= \frac{-1 \pm i}{1 \pm i} = \frac{(1 \mp i)(-1 \pm i)}{2} \\ &= \frac{1 \pm 2i - 1}{2} = i \end{aligned} \tag{1}$$

Aufgabe 2.

Aufgabe 3.