UB5 – Tutorium Mathe A WS19/20

Anton Hanke

Tutorium: 21/11/2019

Aufgabe 1

Es gilt:

- $v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängig.
- $v_0 \perp v_1, \ldots, v_r$

Zeige: v_0 linear unabhängig von allen anderen v. Für lineare unabhägnigkeit muss folgendes gelten:

$$\lambda_0 \overrightarrow{v_0} + \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \ldots + \lambda_r \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{0}$$

Somit soll auch gelten, dass:

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$$

Wir machen uns nun die orthogonalität zunutze. Es gilt: $v_0 \cdot v_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, r)$

Um die obig beschrieben summe zu kürzen können wir also auf beiden seiten mit v_0 multiplizieren:

$$\lambda_0 \underbrace{|v_0|^2}_{\neq 0} + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \underbrace{v_0 \cdot v_i}_{=0} = 0.$$

Dies impliziert, dass: $\lambda_0 = 0$ somit ist die unabhängigkeit bewiesen, da $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$ bewiesen wurde.

Aufgabe 2

(a)

Nicht linear unabhängig. `dim span (u,v) = 1` Somit ein vektor spant: $\mathbb{R}$.

(b)

Es gelte:

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektor w trägt nicht zu aufgespanten Raum bei, da gilt:

$$\dim \operatorname{span}(w) = 0$$

Damit spant sich die Dimension wie folgt auf:

$$\operatorname{span}(u, v, w) = \operatorname{span}(u, v) \Rightarrow \dim = 2$$

(c)

Es gilt:

$$V := \{v | \ \exists i \in v : i \geq 0\}$$

Auch gilt: $\lambda \in \mathbb{R}^+$

Somit gilt für $v \in V$:

$$v \in \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \text{span}(v) \leq \mathbb{R}^n$$

Daraus folgt für die Vektoren aus der Aufgabe: $\dim \text{span}(v) \leq 3$. Die Menge V enthält alle Vektoren der Kanonischen Basis und ermöglicht somit die Schlussfolgerung das: $\text{span}(V) = \mathbb{R}^3$. Somit gilt: $\dim(V) = 3$.

Aufgabe 3

Hinwiese:

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \to Ax$
- Multiplikation eines Vektors mit einer Matrix ist eine lineare Abbildung.

A sei eine 3×3 matrix. Wir haben folgende Vektoren gegeben:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Aus dem Hinweis erkennen wir: $x \leftarrow Ax$.
x als Variable ist beliebig ersetzbar, zum Bleistift durch: $x = w = (\lambda u + \mu v)$. Somit stellt sich folgendes Gleichungssystem auf:

$$Aw = A\left(\lambda u + \mu v\right) = \lambda \underbrace{Au}_{=b} + \mu \underbrace{Av}_{=b} = (\lambda + \mu) \times b$$

Beachte! $\lambda \& \mu =$ skalar.
Damit $Aw = b$ gelten kann muss $\sum \lambda + \mu = 1$ gelten.
Durch resubsitution: $w = \lambda u + (1 - \lambda)v$.
Somit gelten als weitere Lösungen folgende Vektormenge:

$$W := \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$