UB4 – Tutorium Mathe A WS19/20

Anton Hanke

Tutorium: 14/11/2019

Aufgabe 1.

rechen operationen

Es seien die Komplexen Zahlen $v = a_v \cdot ib_v$ und $u = a_u \cdot ib_u$.

Multiplikation

Wir sollen zeigen, dass:

$$||uv|| = ||u|| \cdot ||v||$$

Wir berechnen nun alle beträge und multiplkationen auf beiden Seiten der Gleichung:

$$\begin{aligned}
||uv|| &= ||\,(a_u \cdot ib_u) \cdot (a_v \cdot ib_v)|\,| \qquad \text{Ausmultiplizieren}\\
||uv|| &= \left|a_u a_v + ia_u b_v + ib_u a_v + i^2 b_u b_v\right|\\
||uv|| &= |a_u a_v - b_u b_v + i(a_u b_v + b_u a_v)|\\
||uv|| &= \sqrt{\left(a_u a_v - b_u b_v\right)^2 + \left(a_u b_v + b_u a_v\right)^2} \qquad |z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}\\
||uv|| &= \sqrt{(a_u a_v)^2 + (b_u b_v)^2 - 2a_u a_v b_u b_v + (a_u b_v)^2 + (b_u a_v)^2 + 2a_u a_v b_u b_v}\\
&= \sqrt{(a_u a_v)^2 + (b_u b_v)^2 + (a_u b_v)^2 + (b_u a_v)^2}.
\end{aligned}$$

Dies machen wir auch für die einzelnen Zahlen:

$$\begin{aligned}
|u||v| &= \sqrt{a_u^2 + b_u^2}\sqrt{a_v^2 + b_v^2}\\
&= \sqrt{(a_u a_v)^2 + (a_u b_v)^2 + (b_u a_v)^2 + (b_u b_v)^2}.
\end{aligned}$$

Diese beiden expressionen sind gleich.

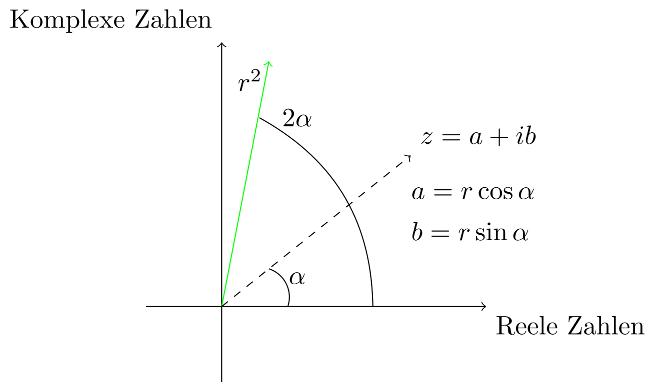
Alternativ Lösung

Komplexe Zahlen lassen sich auch in ihrer Polarform darstellen.

$$v = Re^{i\Phi}$$

$$u = R'e^{i\Phi'}$$

Von der Geometrischen Darstellung Komplexer Zahlen wissen wir, dass $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist.



Demnach lässt sich der Betrag der beiden Vektoren wie folgt aufstellen:

$$||uv|| = |RR'e^{i(\Phi\Phi')}| = RR'$$

$$\left.\begin{array}{lll} |u| = & |Re^{i\Phi}| = & R \\ |v| = & |R'e^{i\Phi'}| = & R' \end{array}\right\} |u||v| = RR'$$

Addition

Wir sollen zeigen, dass:

$$||u+v|| \leq ||u|| + ||v||$$

Nun berechnen wir alle Beträge und addieren:

$$|u| + |v| = \sqrt{a_u^2 + b_u^2} + \sqrt{a_v^2 + b_v^2}$$

$$\begin{aligned} |u+v| &= |(a_u + ib_u) + (a_v + ib_v)| \\ &= \underbrace{a_u + a_v}_{x} + i \cdot \underbrace{(b_u + b_v)}_{y} \\ &= \sqrt{(a_u + a_v)^2 + (b_u + b_v)^2} \\ &= \sqrt{a_u^2 + a_v^2 + 2a_u a_v + b_u^2 + b_v^2 + 2b_u b_v} \end{aligned}$$

Wir setzen nun zusammen und stellen um:

$$\begin{array}{l|l}
|u+v|^2 \overset{?}{\leq} (|u| + |v|)^2 & \text{Quadrieren um sqrt zu entfernen} \\
\Leftrightarrow a_u^2 + a_v^2 + 2a_u a_v + b_u^2 + b_v^2 + 2b_u b_v \overset{?}{\leq} a_u^2 + a_v^2 + b_u^2 + b_v^2 + 2\sqrt{(a_u^2 + b_u^2)(a_v^2 + b_v^2)} & \text{umformen} \\
\Leftrightarrow a_u a_v + b_u b_v \overset{?}{\leq} \sqrt{(a_u^2 + b_u^2)(a_v^2 + b_v^2)} & \text{Quadrieren um sqrt zu entfernen} \\
\Leftrightarrow (a_u a_v + b_u b_v)^2 \overset{?}{\leq} (a_u^2 + b_u^2)(a_v^2 + b_v^2) & \text{umformen} \\
\Leftrightarrow 2a_u b_u a_v b_v \overset{?}{\leq} a_u^2 b_v^2 + a_v^2 b_u^2 & \\
\Leftrightarrow 0 \overset{?}{\leq} a_u^2 b_v^2 + a_v^2 b_u^2 - 2a_u b_u a_v b_v & \text{Zusammenfassen} \\
\Leftrightarrow 0 \leq (a_u b_v - a_v b_u)^2 & \blacksquare
\end{array}$$

trigonomische Formen

Trignometrische Form z

Schreiben Sie $z = 3 - i8$ in trigonometrischer Form, also als $z = r \cdot e^{i\Theta}$.
Von dem Graphen in der ersten Teilaufgabe ist erkenntlich:

$$\cos\alpha = \frac{a}{r} \qquad \sin\alpha = \frac{b}{r}$$

Auch wissen wir, dass $r = |z|$. Damit können wir nun r berechnen und daraus folgend den cosinus und sinus von alpha berechnen. Dies setzen wir folgend in die Polarkoordinatenform ein.

$$\begin{aligned} r =& \sqrt{73} \\ \cos\alpha = \frac{3}{r} \qquad \sin\alpha = & \frac{-8}{r} \\ \Leftrightarrow z =& \sqrt{73}\left(\frac{3}{\sqrt{73}} - \frac{8}{\sqrt{73}}i\right) \\ \Leftrightarrow z =& \sqrt{73}e^{i\cdot\sin^{-1}\left(\frac{-8}{\sqrt{73}}\right)} \end{aligned}$$

Finde u

Es soll eine Zahl existieren: $u = Re^{i\Phi} = R(\cos\Phi + i\sin\Phi)$
für die gilt: $u^2 = z$.
Hierbei muss gelten: $\sin\Phi < 0 \to \Phi \in [-\pi, 0]$.
Nach der Ersten Bedingung können wir folgend aufstellen:

$$R^2 e^{2i\Phi} = \sqrt{73}e^{i\sin^{-1}\left(\frac{-8}{\sqrt{73}}\right)}$$

Dies ermöglicht die Auflösung von den variablen:

$$\begin{cases} R = \sqrt{r} & = (73)^{\frac{1}{4}} \\ 2\Phi = \sin^{-1}\left(\frac{-8}{\sqrt{73}}\right) = & \Phi = \frac{\sin^{-1}\left(\frac{-8}{\sqrt{73}}\right)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow u = (73)^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\sin^{-1}\left(\frac{-8}{\sqrt{73}}\right)}{2}}$$

Punktemengen in der komplexen Ebene

(a) Im$(z) = |z|$

Wir wissen $R = |z|$ und $\mathrm{Im}(z) = R\sin\alpha$. Somit:

$$R\sin\alpha = R \Leftrightarrow \sin\alpha = 1$$

daraus:

$$z = Re^{i\pi/2} = iR$$

Damit entspricht z der y-Achse und ist element der complexen Zahlen.

(b) $z = |z|$

$$\begin{aligned} z = |z| \Leftrightarrow & R(\cos\alpha + i\sin\alpha) = R \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos\alpha = & 1 \\ \sin\alpha = & 0 \end{cases} \quad \alpha = 0. \\ z = & \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

(c) $z = \bar{z}$

$$\begin{aligned} a + ib &= a - ib \\ \Rightarrow z &= \{a \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

(d) $|z| = 3$

Kreis mit Radius 3.
Siehe Abbildung in 1a)

(e) $|z + 3 - 4i| > 5$

$$|a + 3 + i(b - 4)| > 5$$
$$(a + 3)^2 + (b - 4)^2 > 25$$

Somit ist z ein Kreis mit dem Mittelpunkt $(-3, 4)$ und einem radius > 5. Hierbei muss erkannt werden, dass:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad \text{Kreisfunktion}$$
$$(a + 3)^2 = (x - x_0)^2$$
$$(b - 4)^2 = (y - y_0)^2$$

(f) $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 = -1$

Hier muss umgestellt werden:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 &= -1 \\
\frac{1+z}{1-z} &= \pm i \\
1 + z &= \pm i(1 - z) \\
1 + z &= \pm i \mp zi \\
z \pm zi &= -1 \pm i \\
z(1 \pm i) &= -1 \pm i \\
z &= \frac{-1 \pm i}{1 \pm i} = \frac{(1 \mp i)(-1 \pm i)}{2} \\
&= \frac{1 \pm 2i - 1}{2} = i
\end{aligned} \tag{1}$$

Aufgabe 2.

Aufgabe 3.