UB9 – Tutorium Mathe A WS19/20

A. Hanke

Tutorium: 19/12/2019

Aufgabe 1

(a)

Aus der Vorlesung wissen wir: $A = S\Lambda S^{-1}$. Aus der Aufgabe wissen wir:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Zunächst brauchen wir nun das inverse von S (wir wissen das S invertierbar *sein muss*):

- A ist *symmetrisch* $\Rightarrow\ A = A^T$ somit gilt: alle Eigenvektoren orthogonal zueinander.
- Wenn die Eigenvektoren nun noch normiert werden, dann ist S somit eine *orthogonal matrix* $\Rightarrow\ S^{-1} = S^T$
- Falls Eigenvektoren ohne Normierung als Spaltenvektoren für S verwendet werden, dann muss das S^{-1} berechnet werden.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III: III+I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III: III-2II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I: I-II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I: I-}\frac{1}{2}\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II: II+}\frac{1}{3}\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -6 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III: -}\frac{1}{6}\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{4}{3} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{5}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b)

Es gilt: $A = S\Lambda S^{-1}$; somit: $A^{-1} = \left(S\Lambda S^{-1}\right)^{-1}$.
Erinnerung: $AA^{-1} = I$.
Somit ist $A^{-1} = S\Lambda^{-1}S^{-1}$.

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Mit S^{-1} und S von oben ergibt sich:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{12} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{7}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$$

Die determinante der Matrix A ist das Produkt der Eigenwerte.

$$det|A| = -4$$

Da A invertierbar ist hat sie vollen Spaltenrang.

Aufgabe 2)

(a)

Gegebenes System:

$$\begin{cases} G_{k+2} = \frac{1}{2}G_{k+1} + \frac{1}{2}G_k & I \\ G_{k+1} = G_{k+1} & II \end{cases}$$

Sollen nun folgende Form aufstellen: $g_{k+1} = A\,g_k$. Dabei ist $g_k = (G_{k+1}, G_k)^T$. Da es sich um eine Reihe handeln soll können wir den Vektor g_{k+1} wie folgt schreiben:

$$g_{k+1} = \begin{pmatrix} G_{k+2} \\ G_{k+1} \end{pmatrix}$$

Nun lässt sich aufstellen:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} G_{k+1} \\ G_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}G_{k+1} + \frac{1}{2}G_k \\ G_{k+1} \end{pmatrix}$$

(b)

- Eigenwerte: $0 = \lambda^2 - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{1}{2}$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = \frac{-1}{2}$$

- Somit ist A diagonalisierbar (voller spaltenrang)
- Eigenvektoren:
  - $\lambda = 1$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  - $\lambda = -\frac{1}{2}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

  Hierbei ist u_2 skaliert mit 2.

(c)

Aus dem Vorlesungsbeispiel erinnern wir uns:

$$A^2 = (S\Lambda S^{-1}) \cdot (S\Lambda S^{-1}) = S\Lambda^2 S^{-1}$$

Somit gilt:

$$A^n = S\Lambda^n S^{-1}$$

Aus (b):

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Nun berechnen wir S^{-1} mit drei Umformungsschritten (nur operation gelistet):

1. II: II - 1
2. I: I $+\frac{1}{3}$ II
3. II: $-\frac{1}{3}$ II

Somit: $S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Somit lässt sich nun $A^n = S\Lambda^n S^{-1}$ wie folgt ausformulieren:

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Da Λ eine Diagonalmatrix ist lässt sich die Potenz *quasi* in die Matrix ziehen und es ergibt sich:

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Mit $n \to \infty$ läuft Λ somit gegen:

$$\Lambda^\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Durch einsetzen und auflössen berechnen wir wogegen A läuft:

$$\begin{aligned} A^\infty &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(d)

Hier muss erkannt werden, das wir ein *Dynamisches System* entwickeln. (Vorlesung: eintwicklung dynamischer systeme & Fibonachi reihe) Wir wollen unsere Reihe nun mit $k \to \infty$ berechnen.
Da wir wissen wie sich die Grenzwerte von A verhalten macht es Sinn, g_0 zunächst als linearkombination der Eigenvektoren von A darzustellen.
Somit lässt sich unsere Anfangsbedingung wie folgt darstellen:

$$g_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left[2u_1 + u_2\right]$$

Unser Gleichungssystem sieht somit für g_1 wie folgt aus:

$$\begin{aligned} g_1 &= A \times \frac{1}{3}\left[2u_1 + u_2\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[2Au_1 + Au_2\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[2\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[2\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right] \end{aligned}$$

Dauraus lässt sich erkennen, dass bei $k \to \infty$:

$$\begin{aligned} g_\infty &= \frac{1}{3}\left[2 \underbrace{\lambda_1^\infty}_{\to 1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\lambda_2^\infty}_{\to 0} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right] \\ g_\infty &\to \frac{2}{3} u_1 \end{aligned}$$

Dies zeigt:

$$\begin{pmatrix} G_{\infty+1} \\ G_\infty \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$G_n \to \frac{2}{3}$$

Aufgabe 3)

Wie oben gilt: $A^n = S\Lambda^n S^{-1}$.
Es soll nun gelten: $A^{n\to\infty} = 0$.
Somit: $\Lambda^{n\to\infty} = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^n = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i^n \end{pmatrix} = 0 \qquad iff\ |\lambda_i| < 1 \ \ \forall i$$