UB13 – Tutorium Mathe A WS19/20

A. Hanke

Tutorium: 03.02.2020

Aufgabe 1

- a: $a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$ mit $a_n = 1$.
  Konvergenzradius:
  $$lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+2}}{x^{2n+1}} \right| < 1 \Rightarrow r = 1$$
  Konvergenz radius $= 1$
- b: $a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n$
  Konvergenzradius:
  $$lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{n+1} x^{n+1}}{2^n x^n} \right| = |2x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$
  Also gilt konvergenz bei: $|x| < 0.5$ und $r = 0.5$.
- c: $P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$
  Konvergenzradius:
  $$lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+1}}{n x^n} \right| = \frac{n+1}{n} |x| < 1 \Rightarrow r = 1$$
- d: $P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$
  Konvergenzradius:
  $$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{x^n}{n^2}} \right| = \left| \frac{n^2 x^{n+1}}{(n+1)^2 x^n} \right| = \lim \left| \frac{n^2}{(n+1)^2} \right| |x| < 1 \Rightarrow r = 1$$

Aufgabe 2

(a)

Reihe:
$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

Grenzwert:
$$\begin{aligned} 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} =& 2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n}_{|x|<1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n=0} \\ =& 2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1\right) \\ =& 1 \end{aligned}$$

(b)

$$0.1 + \frac{1}{2!}(0.01) + \frac{1}{3!}(0.001) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} 0.1^n$$

Erkennen, das es sich um eine Taylor/Mac-Laurin Entwickluong handelt.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n$$

Daraus folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} 0.1^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 0.1^n - 1 = e^{0.1} - 1$$

Aufgabe 3

(a)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} = (x+1)^{\frac{-1}{2}} \qquad x = 0$$

Zunächst ableitungen bestimmen:

$$\begin{array}{rrr} f'(x) = & -\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}} & f'(0) = -\frac{1}{2} \\ f''(x) = & -\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2}(x+1)^{-\frac{5}{2}} & f''(0) = \frac{3}{4} \\ f'''(x) = & -\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2} \cdot -\frac{5}{2}(x+1)^{-\frac{7}{2}} & f'''(0) = -\frac{15}{8} \end{array}$$

Da $x_0 = 0$ gilt nun für die Taylor Näherung:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^k(0)}{k!} x^k$$

Und somit hier:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3$$

(b)

Bestimmen zunächst ableitungen um Reihe zu erkennen:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-4x)^{-1} \\ f'(x) &= -4 \cdot -1(1-4x)^{-2} \\ f''(x) &= 4 \cdot -4 \cdot -2(1-4x)^{-3} \\ \Rightarrow f^n(x) &= (-1)^n(-4)^n n!(1-4x)^{-n-1} = 4^n n!(1-4x)^{-n-1} \\ \Rightarrow f^n(0) &= 4^n n! \end{aligned}$$

Konvergenzradius bestimmen (erinnere: $f(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n\right)$):

$$x_0 = 0 \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$$

$$\begin{aligned} \text{Wurzelkriterium: } & \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|4^n x^n|} \\ & = |4x| < 1 \\ & \Rightarrow \text{Konvergenz für: } |x| < \frac{1}{4} \\ \Rightarrow & r = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(c)

Reihe erkennen:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{1-x} \\
&= ee^{-x} \\
&= e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}
\end{aligned}
$$

Konvergenzradius:

$$
\begin{aligned}
\text{Quotienten: } \lim_{n\to\infty}&\left|\frac{\frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(-x)^n}{n!}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\cdot(-x)\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)}\cdot(-x)\right| \\
&= 0 \\
\Rightarrow r &= \infty
\end{aligned}
$$

Aufgabe (4)

- a: $a = 2$
$$f(x) \sim a^4 + 4a^3(x-a) = 16.032$$
Fehler: 2.4008001×10^{-5}
- b: $a = 0$
$$f(x) \sim \sin(a) + \cos(a)(x-a) = 0.02$$
Fehler: $-1.3333067 \times 10^{-6}$
- c: $a = 0$
$$f(x) \sim \cos(a) + \sin(a)(x-a) = 1$$
Fehler: $-4.4996625 \times 10^{-4}$
- d: $a = 16$
$$f(x) \sim a^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}a^{-\frac{3}{4}}(x-a) = 1.9996875$$
Fehler: $-7.3268902 \times 10^{-8}$
- e: $a = 1$
$$f(x) \sim a^{-1} - a^{-2}(x-a) = 1.02$$
Fehler: 4.0816327×10^{-4}
- f: $a = \pi$
$$f(x) \sim \sin(a) + \cos(a)(x-a) = 0.0015927$$
Fehler: $-6.7330629 \times 10^{-10}$