UB11 – Tutorium Mathe A WS19/20

M. Kohnen

Tutorium: 23/01/2020

Aufgabe 1

Wir wollen die Grenzwerte der gegeben Funtkionen bestimmen, sofern diese existieren.
Da wir keine Aussage über die Grenzwerte treffen können, wenn wir sie uns so in dieser Form anschauen, müssen wir sie entsprechend umstellen.

(1)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{12}{8-x^3}\right) &= \lim_{n\to 2}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{12}{(2-x)\cdot(x^2+2x+4)}\right)\\
&= \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+2x+4-12}{(2-x)\cdot(x^2+2x+4)}\right)\\
&= \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+2x-8}{(2-x)\cdot(x^2+2x+4)}\right)\\
&= \lim_{x\to 2}\left(\frac{(x+4)(x-2)}{-(x-2)\cdot(x^2+2x+4)}\right)\\
&= \lim_{x\to 2}\left(-\frac{x+4}{x^2+2x+4}\right)\\
&= \frac{\lim_{x\to 2}(x+4)}{\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)}\\
&= -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\tan x} &= \lim_{n\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}}\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(2\sin x\cos x\cdot\frac{\cos x}{\sin x})\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 x\\
&= 0
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x+2}}{\sqrt{x}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{3x+2}}{\sqrt{x}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x+1}{x}}-\sqrt{\frac{3x+2}{x}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\sqrt{3+\frac{2}{x}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\lim_{x\to\infty}\sqrt{3+\frac{2}{x}}\\
&= 1-\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Hier sollten wir bei den ersten 3 Funktionen schauen, ob die Funktionen stetig sind für ihren Definitionsbereich. Hierfür müssen wir auch die Definitionsmenge der Funktionen wissen.

Bei der letzten Funktion sollen wir den Definitionsbereich untersuchen und bestimmen, ob die Funktion stetig fortsetzbar ist.

(1)

$$f(x) = \frac{x-4}{x^2-16}$$

Da wir für $x = 4$ und $x = -4$ Null im Nenner erhalten, ist unsere Funktion für diese beiden x-Werte nicht definiert. Das heißt unsere Definitionsmenge lautet:

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-4; 4\}$$

Für alle Punkte dieser Definitionsmenge ist die Funktion stetig, da die einzelnen Funktionen im Zähler und Nenner jeweils stetig für diesen Definitionsbereich ist.

(2)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 1 \\ x+2 & x \leq -1 \end{cases}$$

Hier ist die Funktion für alle reellen Zahlen definiert, das heißt:

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}$$

Die Funktionen x^2 und $x + 2$ sind für sich alleine stetig für den Definitionsbereich. In Kombination jedoch für unsere gegebenen Funktionen $f(x)$ mit der Bedingung für $x > 1$ gilt x^2 bzw. für $x \leq -1$ gilt $x+2$ müssen wir schauen, wie sich die Funktion verhält, wenn sie von oben bzw. von unten gegen -1 läuft:

$$\lim_{x \to -1+} x^2 = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -1-} x + 2 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -1+} f(x) = \lim_{x \to -1-} f(x) = f(-1) = 1$$

Das bedeutet, dass unsere Funktion $f(x)$ stetig ist.

(3)

$$f(x) = \frac{|x+3|}{x+3}$$

Da wir für $x = -3$ Null im Nenner erhalten, ist unsere Funktion für diesen x-Wert nicht definiert. Das heißt unsere Definitionsmenge lautet:

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$$

Für alle Punkte dieser Definitionsmenge ist die Funktion stetig, da die einzelnen Funktionen im Zähler und Nenner jeweils stetig für diesen Definitionsbereich ist.

(4)

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$$

Die Funktion ist nicht definiert, wenn der Nenner gleich Null ist. D.h. wir müssen die x-Werte bestimmen für die gilt:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

Unter Verwendung der pq-Formel oder der abc-Formel erhält man dann:

$$x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_2 = 2$$

Für unseren Definitionsbereich bedeutet dies also:

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{1; 2\}$$

Nun müssen wir noch schauen, ob die Funktion stetig fortsetzbar ist. Hierfür stellen wir zuerst die Funktion etwas um:

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x(x-1)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x}{(x-2)}$$

Nach dem Kürzen erkennen wir, fällt der Term $(x - 1)$ im Nenner weg, was bedeutet, dass es sich bei $x = 1$ um eine hebbare Definitionslücke handelt, das heißt an dieser Stelle ist die Funktione stetig erweiterbar.

Allerdings bleibt weiterhin der im Nenner der Term $(x - 2)$ erhalten, was bedeutet, dass an dieser Stelle die Funktion nicht stetig erweiterbar ist, da es sich um eine Polstelle handelt.

Nähere Infomationen zu Definitionslücken und gebrochen rationalen Funktionen findet ihr unter:

https://www.abiturma.de/mathe-lernen/analysis/funktionen/gebrochenrationale-funktionen

Aufgabe 3

1

2