

UB4 – Tutorium Mathe A WS19/20

Anton Hanke

Tutorium: 14/11/2019

Aufgabe 1.

rechen operationen

Es seien die Komplexen Zahlen $v = a_v \cdot ib_v$ und $u = a_u \cdot ib_u$.

Multiplikation

Wir sollen zeigen, dass:

$$||uv|| = ||u|| \cdot ||v||$$

Wir berechnen nun alle beträge und multiplikationen auf beiden Seiten der Gleichung:

$$\begin{aligned} ||uv|| &= ||(a_u \cdot ib_u) \cdot (a_v \cdot ib_v)|| && \text{Ausmultiplizieren} \\ ||uv|| &= |a_u a_v + ia_u b_v + ib_u a_v + i^2 b_u b_v| \\ ||uv|| &= |a_u a_v - b_u b_v + i(a_u b_v + b_u a_v)| \\ ||uv|| &= \sqrt{(a_u a_v - b_u b_v)^2 + (a_u b_v + b_u a_v)^2} && |z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ ||uv|| &= \sqrt{(a_u a_v)^2 + (b_u b_v)^2 - 2a_u a_v b_u b_v + (a_u b_v)^2 + (b_u a_v)^2 + 2a_u a_v b_u b_v} \\ &= \sqrt{(a_u a_v)^2 + (b_u b_v)^2 + (a_u b_v)^2 + (b_u a_v)^2}. \end{aligned}$$

Dies machen wir auch für die einzelnen Zahlen:

$$\begin{aligned} |u||v| &= \sqrt{a_u^2 + b_u^2} \sqrt{a_v^2 + b_v^2} \\ &= \sqrt{(a_u a_v)^2 + (a_u b_v)^2 + (b_u a_v)^2 + (b_u b_v)^2}. \end{aligned}$$

Diese beiden expressionen sind gleich.

Alternativ Lösung

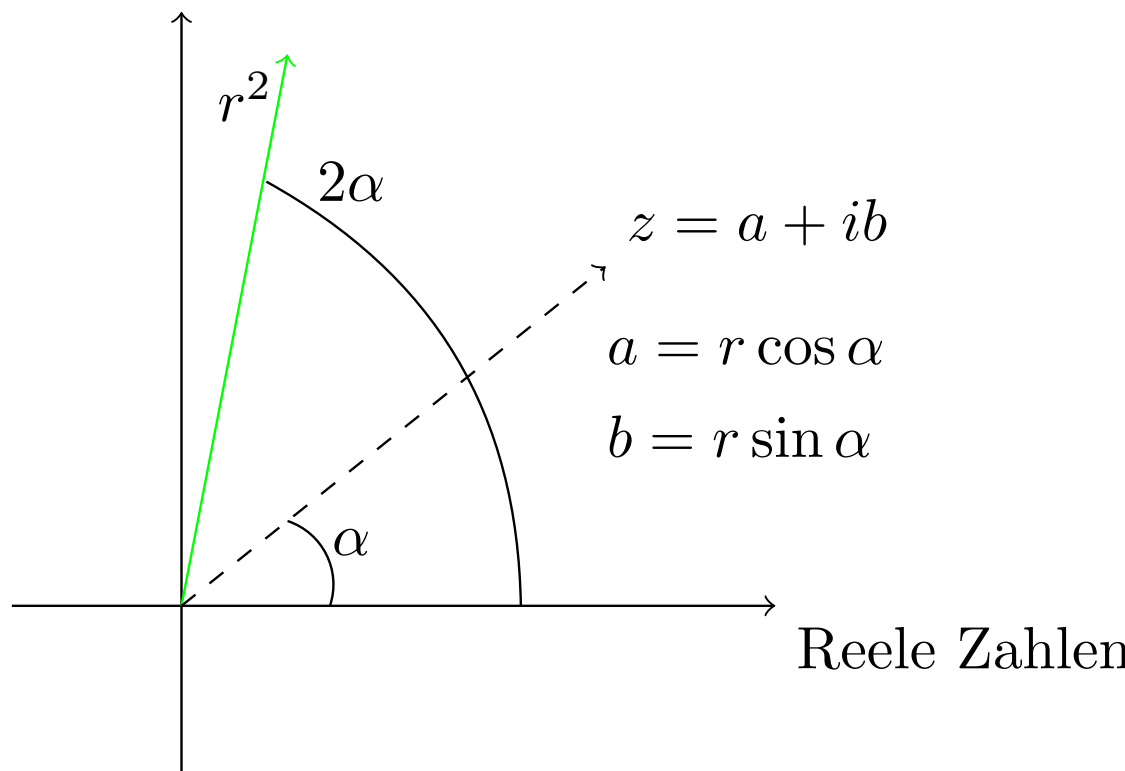
Komplexe Zahlen lassen sich auch in ihrer Polarform darstellen.

$$v = Re^{i\Phi}$$

$$u = R'e^{i\Phi'}$$

Von der Geometrischen Darstellung Komplexer Zahlen wissen wir, dass $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist.

Komplexe Zahlen



Demnach lässt sich der Betrag der beiden Vektoren wie folgt aufstellen:

$$\begin{aligned}
 ||uv|| &= |RR'e^{i(\Phi\Phi')}| = RR' \\
 \left. \begin{aligned} |u| &= |Re^{i\Phi}| = R \\ |v| &= |R'e^{i\Phi'}| = R' \end{aligned} \right\} |u||v| &= RR'
 \end{aligned}$$

Addition

Wir sollen zeigen, dass:

$$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$$

Nun berechnen wir alle Beträge und addieren:

$$\begin{aligned}
 |u| + |v| &= \sqrt{a_u^2 + b_u^2} + \sqrt{a_v^2 + b_v^2} \\
 |u + v| &= |(a_u + ib_u) + (a_v + ib_v)| \\
 &= \underbrace{a_u + a_v}_x + i \cdot \underbrace{(b_u + b_v)}_y \\
 &= \sqrt{(a_u + a_v)^2 + (b_u + b_v)^2} \\
 &= \sqrt{a_u^2 + a_v^2 + 2a_u a_v + b_u^2 + b_v^2 + 2b_u b_v}
 \end{aligned}$$

Wir setzen nun zusammen und stellen um:

$$\begin{aligned}
|u+v|^2 &\stackrel{?}{\leq} (|u|+|v|)^2 \\
&\Leftrightarrow a_u^2 + a_v^2 + 2a_u a_v + b_u^2 + b_v^2 + 2b_u b_v \stackrel{?}{\leq} a_u^2 + a_v^2 + b_u^2 + b_v^2 + 2\sqrt{(a_u^2 + b_u^2)(a_v^2 + b_v^2)} \\
&\Leftrightarrow a_u a_v + b_u b_v \stackrel{?}{\leq} \sqrt{(a_u^2 + b_u^2)(a_v^2 + b_v^2)} \\
&\Leftrightarrow (a_u a_v + b_u b_v)^2 \stackrel{?}{\leq} (a_u^2 + b_u^2)(a_v^2 + b_v^2) \\
&\Leftrightarrow 2a_u b_u a_v b_v \stackrel{?}{\leq} a_u^2 b_v^2 + a_v^2 b_u^2 \\
&\Leftrightarrow 0 \stackrel{?}{\leq} a_u^2 b_v^2 + a_v^2 b_u^2 - 2a_u b_u a_v b_v \\
&\Leftrightarrow 0 \leq (a_u b_v - a_v b_u)^2
\end{aligned}$$

Quadrieren um sqrt zu entfernen
umformen

Quadrieren um sqrt zu entfernen
umformen

Zusammenfassen
■

trigonometrische Formen

Trigonometrische Form z

Schreiben Sie $z = 3 - i8$ in trigonometrischer Form, also als $z = r \cdot e^{i\Theta}$.
Von dem Graphen in der ersten Teilaufgabe ist erkenntlich:

$$\cos \alpha = \frac{a}{r} \quad \sin \alpha = \frac{b}{r}$$

Auch wissen wir, dass $r = |z|$. Damit können wir nun r berechnen und daraus folgend den cosinus und sinus von alpha berechnen. Dies setzen wir folgend in die Polarkoordinatenform ein.

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{73} \\
\cos \alpha &= \frac{3}{r} \quad \sin \alpha = \frac{-8}{r} \\
&\Leftrightarrow z = \sqrt{73} \left(\frac{3}{\sqrt{73}} - \frac{8}{\sqrt{73}} i \right) \\
&\Leftrightarrow z = \sqrt{73} e^{i \cdot \sin^{-1} \left(\frac{-8}{\sqrt{73}} \right)}
\end{aligned}$$

Finde u

Es soll eine Zahl existieren: $u = Re^{i\Phi} = R(\cos \Phi + i \sin \Phi)$
für die gilt: $u^2 = z$.

Hierbei muss gelten: $\sin \Phi < 0 \rightarrow \Phi \in [-\pi, 0]$.

Nach der Ersten Bedingung können wir folgend aufstellen:

$$R^2 e^{2i\Phi} = \sqrt{73} e^{i \sin^{-1} \left(\frac{-8}{\sqrt{73}} \right)}$$

Dies ermöglicht die Auflösung von den variablen:

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \sqrt{r} \\ 2\Phi = \sin^{-1} \left(\frac{-8}{\sqrt{73}} \right) \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} = (73)^{\frac{1}{4}} \\ \Phi = \frac{\sin^{-1} \left(\frac{-8}{\sqrt{73}} \right)}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow u = (73)^{\frac{1}{4}} e^{i \frac{\sin^{-1} \left(\frac{-8}{\sqrt{73}} \right)}{2}}$$

Punktemengen in der komplexen Ebene

(a) $\text{Im}(z) = |z|$

Wir wissen $R = |z|$ und $\text{Im}(z) = R \sin \alpha$. Somit:

$$R \sin \alpha = R \Leftrightarrow \sin \alpha = 1$$

daraus:

$$z = Re^{i\pi/2} = iR$$

Damit entspricht z der y -Achse und ist element der complexen Zahlen.

(b) $z = |z|$

$$\begin{aligned} z = |z| &\Leftrightarrow R(\cos \alpha + i \sin \alpha) = R \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 1 \\ \sin \alpha = 0 \end{cases} \quad \alpha = 0. \\ z &= \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

(c) $z = \bar{z}$

$$\begin{aligned} a + ib &= a - ib \\ \Rightarrow z &= \{a \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

(d) $|z| = 3$

Kreis mit Radius 3.
Siehe Abbildung in 1a)

(e) $|z + 3 - 4i| > 5$

$$\begin{aligned} |a + 3 + i(b - 4)| &> 5 \\ (a + 3)^2 + (b - 4)^2 &> 25 \end{aligned}$$

Somit ist z ein Kreis mit dem Mittelpunkt $(-3, 4)$ und einem radius > 5 . Hierbei muss erkannt werden, dass:

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= r^2 \quad \text{Kreisfunktion} \\ (a + 3)^2 &= (x - x_0)^2 \\ (b - 4)^2 &= (y - y_0)^2 \end{aligned}$$

(f) $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 = -1$

Hier muss umgestellt werden:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 &= -1 \\ \frac{1+z}{1-z} &= \pm i \\ 1+z &= \pm i(1-z) \\ 1+z &= \pm i \mp zi \\ z \pm zi &= -1 \pm i \\ z(1 \pm i) &= -1 \pm i \\ z &= \frac{-1 \pm i}{1 \pm i} = \frac{(1 \mp i)(-1 \pm i)}{2} \\ &= \frac{1 \pm 2i - 1}{2} = \pm i \end{aligned} \tag{1}$$

Aufgabe 2.

(a) $z_1 = z + \frac{1}{\bar{z}}$

$$\begin{aligned}
 z_1 &= a + ib + \frac{1}{a - ib} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} \\
 \Rightarrow z_1 &= a + ib + \frac{a + ib}{(a + ib)(a - ib)} \\
 \Rightarrow &= a + ib + \frac{a + ib}{a^2 + b^2} \\
 \Rightarrow &= a + ib + \frac{a}{a^2 + b^2} + ib + \frac{ib}{a^2 + b^2} \\
 \Rightarrow z_1 &= \left(a + \frac{a}{a^2 + b^2} \right) + i \left(b + \frac{b}{a^2 + b^2} \right)
 \end{aligned} \tag{2}$$

(b) $z_2 = \bar{z}^2 + \frac{1}{z^2}$

Gleiche vorgehensweise wie bei der Aufgabe (a).

$$\begin{aligned}
 z_2 &= (a - ib)^2 + \frac{1}{(a + ib)^2} \\
 \Rightarrow &= \underbrace{a^2 - b^2 - 2iab}_c + \frac{(a - ib)^2}{(a - ib)^2(a + ib)^2} \\
 \Rightarrow &= c + \frac{\overbrace{a^2 - b^2 - 2iab}^c}{(a^2 + b^2)^2} \\
 \Rightarrow z_2 &= \underbrace{a^2 - b^2 + \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}}_{a_2} - 2 \underbrace{\left(ab + \frac{ab}{(a^2 + b^2)^2} \right)}_{b_2} i
 \end{aligned} \tag{3}$$

Aufgabe 3.

(a) $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}$

Wir erinnern uns: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ Auch erinnern wir uns:

$$\begin{aligned}
 \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
 \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a
 \end{aligned} \tag{4}$$

Dies verwenden wir im folgenden:

$$\begin{aligned}\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} \\ \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) &= \sin\alpha \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} \cos\alpha \\ &\Rightarrow = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha - \cos\alpha) \\ \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha) \\ \Rightarrow \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha - \cos\alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha)} \\ \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)}\end{aligned}$$

Diese Gleichungen setzen wir in die Ursprungsgleichung ein und erhalten:

$$\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{(\sin\alpha - \cos\alpha)}{(\cos\alpha + \sin\alpha)} + \frac{(\cos\alpha - \sin\alpha)}{(\sin\alpha + \cos\alpha)} = 0.$$

(b) $\frac{(\sin\alpha - \cos\alpha)}{(\cos\alpha + \sin\alpha)}$

Hier erinnern wir uns an die erste Teilaufgabe und sehen das folgendes gilt:

$$\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$