UB2 – Tutorium Mathe A WS19/20

Anton Hanke

Tutorium: 31/10/2019

Aufgab 2

Wir haben zwei Aussagen (A und B):

1. $A :\iff$ "Wer von der Quantenmechanik nicht schockiert ist, der versteht sie nicht" (Nils Bohr)
2. $B :\iff$ "Niemand versteht die Quantenmechanik" (Richard Feynman)

In diesen Aussagen verstecken sich zwei kleinere Grundaussagen:

1. $a :\iff$ schockiert
2. $b :\iff$ verstehen

demnach lässt sich nun die Aussage A als implikation formulieren:

$$A :\iff (\neg a \Rightarrow \neg b)$$

B dagegen ist $\neg b$. Ebenfalls gilt:

$$A \wedge B \iff \neg a$$

Da die Aussage $A \wedge B$ besagt, das niemand von der Quantenmechanik schockiert ist. Nun kann man folgende Aussage aufstellen:

$$\neg b \wedge (\neg a \Rightarrow \neg b) \Rightarrow \neg a$$

Aus der Übungsaufgabe 1c) wissen wir, dass solche Aussagen/Implikationen nicht wahr sind.

Aufgabe 3

Wir wollen die folgende Aussage verneinen:

$$\forall x \in X, \exists y \in Y : \forall z \in Z : x \cdot y < z$$

Es gilt also im ganz ganz groben als verneinung:

$$\neg(\forall x \in X, \exists y \in Y : \forall z \in Z : x \cdot y < z)$$

Nun ziehen wir die negation in die Klammer hinein und erhalten somit folgende Teilaussagen:

1. $\neg \forall x \in X$
2. $\neg \exists y \in Y$
3. $\neg \forall z \in Z$
4. $\neg(x \cdot y < z)$

Diese verneinen wir nun alle einzeln und können dies dann zu einer ‘‘gesamt” verneinung zusammensetzen.

1. $\exists x \in X$ da gilt: $\neg\forall = \exists$
2. $\forall y \in Y$ da gilt: $\neg\exists = \forall$
3. $\exists z \in Z$
4. $x \cdot y \geq z$ da gilt: $\neg <=\geq$ (in Worten: nicht kleiner als ist gleich: größer gleich als)

somit erhalten wir nach zusammensetzen:

$$\exists x \in X, \forall y \in Y : \exists z \in Z : x \cdot y \geq z$$

Aufgabe 4 – Vollständige Induktion

Die Induktion läuft über zwei schritte ab. Wir wollen per Induktion zeigen:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

1) Induktionsanfang:

Wir nehmen an: $n = 1$ (da wir nur für ganze Zahlen > 0 beweisen). Setzen auf beiden Seiten der Gleichung 1 ein.

$$(2 \cdot 1 - 1)^2 = 1$$
$$\frac{1(2\cdot1-1)(2\cdot1+1)}{3} = 1$$

2) Induktionsschritt:

Wir stellen eine Induktionsbehauptung auf: $\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$ Die linke Seite dieser Behauptung rechnen wir nun soweit aus, bis sie der rechten Seite gleich ist.

$$n \to n+1$$
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1)^2 &= \sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 + [2(n+1)-1]^2 \\
&= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} + (2n+1)^2 \\
&= \frac{n(2n-1)(2n+1) + 3(2n+1)^2}{3} \\
&= \frac{(2n+1)[n(2n-1) + 3(2n+1)]}{3} \\
&= \frac{(2n+1)(n+1)(2n+3)}{3}
\end{aligned}$$

Dies entspricht der Induktionsbehauptung und lässt sich in die Ursprungsgleichung überführen (mit $n = n+1$).