МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІНСТИТУТ ЗАОЧНОЇ ОСВІТИ
КАФЕДРА «ПРИРОДНИЧО-НАУКОВОЇ ПІДГОТОВКИ»

ПОСІБНИК З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Рекомендовано до друку вченою радою
Одеського національного політехнічного університету
Протокол № 2 від 13.01.2014 р.

Одеса 2015

Посібник з теорії ймовірностей [Текст] / Одес. нац. політехн. ун-т; уклад.: Г. Ф. Сафонова, – Херсон: ХПТК ОНПУ, 2015. – 42 с.

Навчальне видання

ПОСІБНИК З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Укладачі: **Сафонова** Ганна Феліксівна, доцент, канд. техн. наук

Рецензент: **Семакова** Тетяна Олексіївна, доцент, канд. пед. наук

За редакцією укладачів
Надруковано з оригінал-макета замовника

Підп. до друку 12.02.2014. Формат 600 х 840 М 1/16.
Папір офсетний. Ум. друк. арк. 2,44. Гарнітура Times.
Спосіб друку – ризографія. Тираж 4 прим. Зам. № 46.

Лабораторія організаційно-видавничої діяльності
ХПТК ОНПУ
73000, м. Херсон, вул. 40 років Жовтня, 23
тел. (0552) 22-55-38, тел./факс (0552) 22-27-43

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Мета даного посібника – допомогти студентам самостійно з мінімальними витратами часу освоїти основні розділи з дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика», які передбачені діючою програмою.

У навчальному виданні коротко викладено теоретичний матеріал з кожного розділу, надані приклади розв’язання типових задач.

Наведено список літератури, необхідний для більш детального вивчення розглянутих розділів.

В кінці посібника приведені таблиці значень функцій:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\ f\ (x,\lambda)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}.$$

1 ОБЧИСЛЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ. ТЕОРЕМИ ДОДАВАННЯ ТА МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Нехай усі результати деякого випробування утворюють повну групу рівноможливих попарно несумісних подій. Позначимо одну з подій – A. Тоді ймовірність цієї події

$$P(A)=\frac{m}{n}, \tag{1.1}$$

де n – число всіх можливих результатів даного випробування, m – число результатів даного випробування, які сприяють появі події A.

Ймовірності більш складних подій обчислюються за формулами:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B), \tag{1.2}$$

якщо події A,B незалежні;

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B), \tag{1.3}$$

якщо події A,B залежні;

$$P(A+B)=P(A)+P(B), \tag{1.4}$$

якщо події A,B несумісні;

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB), \tag{1.5}$$

якщо події A,B сумісні;

$$P(\overline{A})=1-P(A). \tag{1.6}$$

***Приклад* 1.1** Із 25 білетів виграшними виявились 19 білетів. Визначити ймовірність витягання:

- одного білета (виграшного, невиграшного);

- трьох білетів (виграшних, невиграшних);
- трьох білетів, серед яких два виграшні.

Знайти ймовірність того, що серед витягнутих трьох білетів є:

- хоча б один виграшний;
- тільки один виграшний.

Розв'язання. Розглянемо дослід: витягання одного білета. В цьому досліді можливі тільки дві події:

A – витягання виграшного білета;

$\overline{A}$ – витягання невиграшного білета.

Загальне число результатів досліду дорівнює 25; події A сприяє 19 результатів; події $\overline{A}$ – 6 результатів. Використовуючи формулу класичної ймовірності для безпосереднього підрахунку ймовірності події (1.1), отримуємо:

$$P(A)=\frac{19}{25},\ P(\overline{A})=\frac{6}{25}.$$

Розглянемо дослід: витягання трьох білетів. Нехай подія A_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ полягає в тому, що i-й витягнутий білет виграшний. Тоді подія $\overline{A_i}$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ полягає в тому, що i-й витягнутий білет невиграшний. Розглянемо більш складні події:

$A=A_1\cdot A_2\cdot A_3$ – всі витягнуті білети виграшні;

$B=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}$ – всі витягнуті білети невиграшні;

$C=A_1\cdot A_2\cdot\overline{A_3}+A_1\cdot\overline{A_2}\cdot A_3+\overline{A_1}\cdot A_2\cdot A_3$ – серед трьох витягнутих білетів два виграшні;

$D=A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3+\overline{A_1}\cdot A_2\cdot\overline{A_3}$ – серед трьох витягнутих білетів один виграшний;

$E=D+C+A$ – серед трьох витягнутих білетів хоча б один виграшний.

$$P(A)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)=$$

$$=\frac{19\cdot18\cdot17}{25\cdot24\cdot23}\approx0,4213;$$

$$P(B)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=\frac{6\cdot5\cdot4}{25\cdot24\cdot23}\approx0,0087;$$

$$P(C)=P(A_1A_2\overline{A_3})+P(A_1\overline{A_2}A_3)+P(\overline{A_1}A_2A_3)=$$

$$=\frac{19\cdot18\cdot6}{25\cdot24\cdot23}+\frac{19\cdot6\cdot17}{25\cdot24\cdot23}+\frac{6\cdot18\cdot17}{25\cdot24\cdot23}\approx3\cdot0{,}1487\approx0{,}4461,$$ так як події несумісні.

$$P(D)=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})=$$

$$=\frac{19\cdot6\cdot5}{25\cdot24\cdot23}+\frac{6\cdot5\cdot19}{25\cdot24\cdot23}+\frac{6\cdot19\cdot5}{25\cdot24\cdot23}\approx3\cdot0{,}0413\approx0{,}1239;$$

$$P(E)=P(D)+P(C)+P(A)=0{,}9913.$$

Ймовірність події E можна знайти за формулою:

$$P(E)=1-P(\overline{E}).$$

Так як подія $\overline{E}$ означає, що всі витягнуті білети невиграшні, то вона співпадає з подією B, ймовірність якої вже знайдена. Тоді

$$P(E)=1-P(B)=1-0{,}0087=0{,}9913.$$

Ймовірності подій A,B,C можливо знайти іншими, більш простими способами. Число всіх можливих результатів події дорівнює C_{25}^3;

Число результатів події, сприятливих для появи події A, дорівнює C_{19}^3;

Число результатів події, сприятливих для появи події B, дорівнює C_6^3;

Число результатів події, сприятливих для появи події C, дорівнює $6\cdot C_{19}^2$.

Отже,

$$P(A)=\frac{C_{19}^3}{C_{25}^3}\approx0{,}4213;$$

$$P(B)=\frac{C_6^3}{C_{25}^3}\approx0{,}0087;$$

$$P(C)=\frac{6\cdot C_{19}^2}{C_{25}^3}\approx0{,}4461.$$

2 ОБЧИСЛЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ З ВИКОРИСТАННЯМ ГЕОМЕТРИЧНОГО ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

Нехай Ω – деяка підмножина прямої, площини або простору. Випадкова подія A – підмножина Ω. Тоді ймовірність випадкової події визначається формулою:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}, \tag{2.1}$$

де $m(A)$, $m(\Omega)$ – довжина, площа або об'єм множин A та Ω.

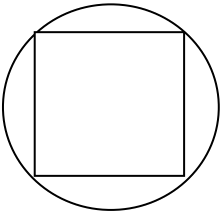

Рис. 2.1

***Приклад* 2.1** Знайти ймовірність того, що точка, яка вибрана з круга радіусом R, не належатиме квадрату. Квадрат вписаний в коло, що обмежує даний круг.

Розв'язання. Знайдемо площу круга: $S_1 = \pi R^2$ – вона представляє собою все поле можливих результатів. Площа квадрата дорівнює: $S_2 = a^2 = \left(R\sqrt{2}\right)^2 = 2R^2$.

Точки круга, що не належать квадрату будуть лежати на площині:

$S_3 = \pi R^2 - 2R^2$.

Тоді ймовірність того, що точка, яка вибрана з круга радіусом R, не належатиме квадрату, вписаному в коло, яке обмежує круг буде за формулою (2.1) дорівнювати:

$$P = \frac{S_3}{S_1} = \frac{\pi R^2 - 2R^2}{\pi R^2} = \frac{\pi - 2}{\pi}.$$

3 ФОРМУЛИ ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ ТА БАЙЄСА

Нехай A – деяка подія, яка може відбутися або не відбутися одночасно з однією з n попарно несумісних подій $H_1, H_2, ..., H_n$, які утворюють повну групу несумісних подій, тобто:

$$P(H_1) + P(H_2) + ... + P(H_n) = 1$$

Події $H_1, H_2, ..., H_n$ по відношенню до події A називаються гіпотезами.

***Теорема* 3.1** (формула повної ймовірності). Ймовірність події A, що може відбутись разом з однією з гіпотез $H_1, H_2, ..., H_n$ дорівнює сумі добутків ймовірності кожної з гіпотез на відповідну умовну ймовірність події A:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + ... + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A) \quad (3.1)$$

До цих пір розглядалася ймовірність події до випробовування, тобто в комплексі умов не був присутній результат проведеного випробовування.

Тому поставимо тепер наступну задачу. Є повна група несумісних гіпотез $H_1, H_2, ..., H_n$. Відомі ймовірності кожної з гіпотез $P(H_i)$ $(i = \overline{1, n})$. Проводиться випробування і в його результаті відбувається подія A, ймовірності якої по кожній гіпотезі відомі, тобто $P_{H_i}(A)$.

***Теорема* 3.2** (теорема Байєсса). Ймовірність гіпотези після випробовування дорівнює добутку ймовірності гіпотези до випробовування на відповідну їй умовну ймовірність події, яка відбулася в результаті випробовування, поділеній на повну ймовірність цієї події:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)} \quad (3.2)$$

***Приклад* 3.1** У магазин надходить продукція із трьох підприємств у кількості 20, 50, 30 виробів відповідно. Ймовірності виготовлення неякісного виробу для кожного підприємства відповідно дорівнюють 0,01; 0,04; 0,03. Навмання вибраний виріб виявився неякісним. Якому підприємству, ймовірніше всього, належить цей виріб?

Розв'язання. Подія A – вибрано неякісний виріб. Гіпотези H_1, H_2, H_3 – це вибір виробу із продукції відповідного підприємства. Ймовірності цих подій дорівнюють:

$$P(H_1) = \frac{20}{100} = 0{,}2; \; P(H_2) = \frac{50}{100} = 0{,}5; \; P(H_3) = \frac{30}{100} = 0{,}3.$$

Використовуючи формулу повної ймовірності (3.1) знаходимо:

$$P(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}01 + 0{,}5 \cdot 0{,}04 + 0{,}3 \cdot 0{,}03 = 0{,}031.$$

За формулами Байєсса (3.2) знаходимо умовні ймовірності гіпотез:

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}002}{0{,}031} = \frac{2}{31};$$

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}02}{0{,}031} = \frac{20}{31};$$

$$P_A(H_3) = \frac{P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}03}{0{,}031} = \frac{30}{31}.$$

Оскільки $max\left\{\frac{2}{31}; \; \frac{20}{31}; \; \frac{30}{31}\right\} = \frac{30}{31}$, то ймовірніше всього, що вибраний неякісний виріб належить третьому підприємству.

4 ПОСЛІДОВНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ

4.1 Схема Бернуллі

Нехай проводиться n незалежних випробувань, в однакових умовах, в кожному з яких подія A може відбутись з ймовірністю $P(A) = p$ $(0 \le p \le 1)$ або ж подія $\overline{A}$ з ймовірністю $P\left(\overline{A}\right) = 1 - p = q$.

Описана задача представляє собою схему Бернуллі або схему незалежних випробувань.

Ймовірність того, що подія A в n незалежних випробуваннях настане рівно k разів, позначається $P_n(k)$, визначається за формулою Бернуллі:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} . \qquad (4.1)$$

Ймовірність того, що подія A в n незалежних випробуваннях настане не більше, ніж k_2 разів і не менше, ніж k_1 раз, позначається $P_n(k_1 \le k \le k_2)$, визначається за формулою Бернуллі:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k} , \qquad (4.2)$$

або

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = P_n(k_1) + ... + P_n(k_2) . \qquad (4.3)$$

4.2 Найймовірніше число успіхів у схемі Бернуллі

Нехай k_0 найімовірніше число появи події A у схемі Бернуллі, доведено, що:

$$np - q \le k_0 \le np + p. \qquad (4.4)$$

Зауваження. Довжина інтервалу, що визначається нерівністю (4.2), рівна одиниці:

$$np+p-(np-q)=p+q=1,$$

тому, коли межі інтервалів є дробові числа, то отримується одне значення найімовірнішого числа m_0, якщо ж межі є цілими числами, то отримується два значення найймовірнішого числа успіхів:

$$k_0'=np-q,\ k_0''=np+p. \quad (4.5)$$

***Приклад* 4.1** Контрольна робота складається з 7 запитань, які містять відповіді «так» чи «ні». Знайти ймовірність того, що студент, не підготувавшись до роботи, відповість правильно:

- на 6 запитань;
- не менше, ніж на 2, та не більше ніж на 5 запитань.

Визначити найімовірнішу кількість правильних відповідей та її ймовірність.

Розв'язання. Схема Бернуллі в даній задачі представляє собою кількість запитань контрольної роботи ($n=7$), на кожне з яких студент, не підготувавшись до роботи, повинен відповісти «так» чи «ні». Подія A (успіх) полягає в правильній відповіді на запитання.

Ймовірність успіху: $P(A)=p=0,5$.

Ймовірність невдачі: $P\left(\overline{A}\right)=q=1-p=0,5$.

Ймовірність того, що студент, не підготувавшись до роботи, відповість на 6 запитань з 7 правильно, знайдемо за формулою Бернуллі (4.1):

$$P_7(6)=C_7^6\cdot 0,5^6\cdot 0,5\approx 0,0547.$$

Ймовірність того, що студент, не підготувавшись до роботи, відповість правильно не менше, ніж на 2, та не більше, ніж на 5 запитань, формула (4.3):

$$P_7\left(2\le k\le 5\right)=P_7\left(2\right)+P_7\left(3\right)+P_7\left(4\right)+P_7\left(5\right)\approx 0,875.$$

Більш ймовірне число правильних відповідей знаходиться між числами $np-q$ та $np+p$, формула (4.4),

$$7\cdot 0,5-0,5\le k_0\le 7\cdot 0,5+0,5;$$

$$3\le k_0\le 4,$$

так як k_0 приймає два значення (3 та 4) з однаковою ймовірністю

$$P_7(3)=C_7^3\cdot 0,5^3\cdot 0,5^4\approx 0,2734,$$

$$P_7(4)=C_7^4\cdot 0,5^4\cdot 0,5^3\approx 0,2734.$$

4.3 Граничні теореми теорії ймовірності

4.3.1 Локальна теорема Муавра-Лапласа

Очевидно, що користуватись формулою Бернуллі при великих значеннях n (числа випробувань) досить важко, бо формула вимагає виконання дій над великими числами. В цьому випадку застосовується локальна теорема Лапласа.

***Теорема* 4.1** (локальна теорема Лапласа). Якщо ймовірність p появи події A в кожному випробовуванні постійна ($0<p<1$), то ймовірність $P_n(k)$ того, що подія A відбудеться в n випробовуваннях рівно k раз, наближено рівна (тим точніше, чим більше n) значенню функції

$$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi\left(x\right), \qquad (4.6)$$

при

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}} \qquad (4.7)$$

Функція Лапласа $\varphi\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ табульована, причому таблиці складені лише для додатних значень аргументу. Оскільки функція $\varphi\left(x\right)$ парна, то $\varphi\left(-x\right)=\varphi\left(x\right)$ (див. додатки).

4.3.2 Інтегральна ознака Муавра-Лапласа

***Теорема* 4.2** (Інтегральна ознака Муавра-Лапласа). Якщо ймовірність p появи події A в кожному з n випробовуваннях постійна $(0 < p < 1)$, то ймовірність $P_n\left(k_1, k_2\right)$ того, що подія A відбудеться в n випробовуваннях від k_1 до k_2 раз, наближено рівна:

$$P_n(k_1,k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \tag{4.8}$$

де

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \; x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} \tag{4.9}$$

Інтегральна функція Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$ табульована, причому таблиці складені лише для додатних значень аргументу. Оскільки функція $\Phi(x)$ непарна, то $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ (див. додатки). В таблиці, крім того, дані значення лише до $x = 5$, бо $\Phi(x > 5) = 0{,}5$.

Отже,

$$P_n\left(k_1, k_2\right) \approx \Phi\left(x''\right) - \Phi\left(x'\right), \tag{4.10}$$

де

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \; x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} \tag{4.11}$$

***Приклад* 4.2** Ймовірність присутності студента на лекції дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що із 100 студентів на лекції буде:

- 75 студентів;
- не менше 90 студентів.

Розв'язання. Знайдемо ймовірність того, що із 100 на лекції буде 75 студентів. За умовою $n=100$, $p=0,8$, $q=0,2$, $k=75$. Використовуємо локальну теорему Лапласа, формула (4.6–4.7):

Знайдемо значення x:

$$x=\frac{75-80}{\sqrt{100\cdot 0,8\cdot 0,2}}=\frac{-5}{4}=-1,25.$$

За таблицею значень функції $\varphi(x)$ знаходимо $\varphi(1,25)=0,1825$.

Оскільки $\varphi(-x)=\varphi(x)$, то $\varphi(-1,25)=0,1825$. Шукана ймовірність:

$$P_{100}(75)\approx\frac{0,1825}{4}\approx 0,046;$$

Знайдемо ймовірність того, що із 100 на лекції буде не менше 90 студентів. Використовуємо інтегральну теорему Лапласа, формула (4.10–4.11):

За умовою $k_1=90$, $k_2=100$.

Знаходимо x' і x'':

$$x'=\frac{90-80}{4}=\frac{10}{4}=2,5;\quad x''=\frac{100-80}{4}=\frac{20}{4}=5.$$

За таблицею значень функції Лапласа $\Phi(x)$ знаходимо $\Phi(2,5)=0,4938$; $\Phi(5)=0,5$.

Шукана ймовірність:

$$P_{100}(90;100)\approx 0,5-0,4938\approx 0,0062.$$

4.3.3 Гранична теорема Пуассона

Точність наближених формул Муавра-Лапласа погіршується з наближенням одного з чисел p або q до нуля. Тому випадок, коли p або q є малим числом, потребує окремого розгляду. Тобто нас цікавить оцінка для ймовірності числа подій, коли подія рідко відбувається.

***Теорема* 4.3** (Пуассона). Нехай k фіксоване, а n і p змінюються, причому так, що величина $\lambda=np$ є постійною. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} P_n\left(k\right) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} . \quad (4.12)$$

Із граничної теореми Пуассона випливає наближена формула Пуассона при великих n і малих p ($p < 0{,}1$):

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} , \quad (4.13)$$

де число $\lambda = np$ називається середнім числом успіхів.

Сукупність значень $P_n(k)$ $\left(k = 0{,}1...\right)$ називається розподілом Пуассона.

***Приклад* 4.3** Із статистичних даних визначено, що ймовірність захворіти грипом під час епідемії для кожної особи складає 0,01. Яка ймовірність того, що із 800 перевірених осіб хворими виявляться:

- рівно чотири особи;
- менше чотирьох осіб;
- більше чотирьох осіб;
- хоча б одна особа.

Знайти найімовірніше число хворих та його ймовірність.

Розв'язання. Ймовірність настання події $p = 0{,}01$ достатньо невелика, а число дослідів $n = 800$ велике. Таким чином при розв'язанні задачі необхідно скористатися наближеною формулою Пуассона (4.13).

Значення функції $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ знайдемо за таблицею (див. додатки)

За умовою, $n = 800$, $m = 4$, $p = 0{,}01$, тому $\lambda = 8$

1. $P_{100}(4) = \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}\right)_{\substack{\lambda=8 \\ k=4}} \approx 0{,}0572;$

2. $P_{100}(< 4) = P_{100}(0) + P_{100}(1) + P_{100}(2) + P_{100}(3) \approx$
$\approx 0{,}0003 + 0{,}0027 + 0{,}0107 + 0{,}0286 \approx 0{,}0423;$

$3. P_{100}(>4) = 1 - P_{100}(\le 4) = 1 - \left[P_{100}(<4) + P_{100}(4) \right] =$

$= 1 - (0,0423 + 0,0572) = 1 - 0,0995 = 0,9005;$

4. $P_{100}(\ge 1) = 1 - P_{100}(0) \approx 1 - 0,0003 = 0,9997.$

Знайдемо найімовірніше число хворих формула (4.4):

$800 \cdot 0,01 - 0,99 \le k_0 \le 800 \cdot 0,01 + 0,01;$

$7,01 \le k_0 \le 8,01;$

$k_0 = 8.$

$$P_{100}(8) = \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right)_{\substack{\lambda=8 \\ k=8}} \approx 0,14;$$

5 ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ

5.1 Види випадкових величин

Випадковою величиною називають величину, яка у результаті випробування приймає одне і тільки одне можливе значення, наперед невідоме і яке залежить від випадкових причин, які наперед не можуть бути враховані. Випадкові величини звичайно визначаються прописними літерами X, Y,..., а їх можливі значення – відповідними рядковими літерами x, y,...

Випадкова величина називається дискретною, якщо вона може приймати окремі, ізольовані можливі значення з певними ймовірностями. Число можливих значень дискретної випадкової величини може бути скінченним або нескінченним.

Випадкова величина називається неперервною, якщо вона може приймати будь-яке значення із деякого скінченного або нескінченного проміжку. Очевидно, що число можливих значень неперервної випадкової величини нескінченне.

5.2 Дискретні випадкові величини

5.2.1 Закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини

Законом розподілу дискретної випадкової величини називають відповідність між можливими значеннями цієї випадкової величини і ймовірностями подій, при яких випадкові величини приймають дані значення. Цей закон може бути заданий наступними способами:

1. За допомогою таблиці (таблиця 5.1):

Таблиця 5.1 Табличний спосіб задання дискретної випадкової величини

X	x_1	x_2	x_3	x_4
p	p_1	p_2	p_3	p_4

Тут $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – можливі значення випадкової величини X, а $p_1 = P\left(X = x_1\right)$, $p_2 = P\left(X = x_2\right), \ldots,$ $p_n = P(X = x_n)$. Так як при одному випробуванні випадкова величина X приймає одне і тільки одне значення, то події $X = x_1$, $X = x_2, ...,$ $X = x_n$ утворюють повну групу попарно несумісних подій. Тому:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1 \qquad (5.1)$$

2. Аналітично. Наприклад, якщо відбувається n незалежних випробувань, в кожному з яких може відбутися подія A з ймовірністю p, то в якості випадкової величини X можна розглядати число появ події A. Ця випадкова величина може приймати значення $0, 1, 2, \ldots n$. А відповідні ймовірності можна визначати за формулами, що будуть розглянуті нижче.

5.2.2 Числові характеристики дискретних випадкових величин

Нехай закон розподілу дискретної випадкової величини X заданий за допомогою таблиці 5.1.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називається сума добутків усіх можливих значень випадкової величини на їх ймовірність.

$$m_x = M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad (5.2)$$

З погляду ймовірності можна сказати, що математичне сподівання приблизно дорівнює середньому арифметичному спостережуваних значень випадкової величини.

Властивості математичного сподівання:

1. Математичне сподівання постійної величини дорівнює самій постійній величині.

$$M(C) = C . \qquad (5.3)$$

2. Постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання.

$$M(Cx) = CM(x)\,. \tag{5.4}$$

3. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин рівне добутку їх математичних сподівань.

$$M(XY) = M(X)M(Y)\,. \tag{5.5}$$

Ця властивість справедлива для довільного числа випадкових величин.

4. Математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань доданків.

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y)\,. \tag{5.6}$$

Ця властивість також справедлива для довільної кількості випадкових величин.

Нехай проводиться n незалежних випробувань, ймовірність появи події А в яких дорівнює p.

***Теорема* 5.1** Математичне сподівання $M(X)$ числа появи події A в n незалежних випробуваннях дорівнює добутку числа випробувань на ймовірність появи події в кожному випробуванні.

$$M(X) = np\,. \tag{5.7}$$

Дисперсією (розсіюванням) дискретної випадкової величини називається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання.

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2. \tag{5.8}$$

Для обчислення дисперсії часто буває зручним використовувати наступну формулу

$$D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2. \tag{5.9}$$

Дисперсія дорівнює різниці математичного сподівання квадрата випадкової величини X і квадрата її математичного сподівання.

Властивості дисперсії:

1. Дисперсія постійної величини рівна нулю.

$$D(C) = 0\,. \tag{5.10}$$

2. Постійний множник можна виносити за знак дисперсії, підносячи його до квадрату.

$$D(CX) = C^2 D(X) \tag{5.11}$$

3. Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин.

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) \tag{5.12}$$

4. Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин.

$$D(X-Y) = D(X) + D(Y) \tag{5.13}$$

Теорема **5.2** Дисперсія числа появи події A в n незалежних випробувань, в кожному з яких ймовірність p появи події постійна, дорівнює добутку числа випробувань на ймовірність появи і не появи події в кожному випробуванні.

$$D(X) = npq \tag{5.14}$$

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називається квадратний корінь з дисперсії.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \tag{5.15}$$

***Теорема* 5.3** Середнє квадратичне відхилення суми скінченого числа взаємно незалежних випадкових величин дорівнює квадратному кореню з суми квадратів середніх квадратичних відхилень цих величин.

$$\sigma(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + ... + \sigma^2(X_n)} \qquad (5.15)$$

***Приклад* 5.1** Знайти: математичне сподівання; дисперсію; середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини *X* по даному закону її розподілу:

x_i	26	28	30	32
p_i	0,1	0,2	0,4	0,3

Розв'язання. Знайдемо математичне сподівання (5.2):

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = 26 \cdot 0{,}1 + 28 \cdot 0{,}2 + 30 \cdot 0{,}4 + 32 \cdot 0{,}3 = 29{,}8$$

Знайдемо дисперсію (5.8):

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 \cdot p_i = (26 - 29{,}8)^2 \cdot 0{,}1 + (28 - 29{,}8)^2 \cdot 0{,}2 +$$

$$+ (30 - 29{,}8)^2 \cdot 0{,}4 + (32 - 29{,}8)^2 \cdot 0{,}3 = (-3{,}8)^2 \cdot 0{,}1 + (-1{,}8)^2 \cdot 0{,}2 +$$

$$+ (0{,}2)^2 \cdot 0{,}4 + 2{,}22^2 \cdot 0{,}3 = 3{,}56$$

Знайдемо дисперсію за другою формулою (5.9):

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = 26^2 \cdot 0{,}1 + 28^2 \cdot 0{,}2 + 30^2 \cdot 0{,}4 + 32^2 \cdot 0{,}3 = 891{,}6$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 891{,}6 - 29{,}8^2 = 891{,}6 - 888{,}04 = 3{,}56$$

Знайдемо середньоквадратичне (стандартне) відхилення (5.15):

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{3{,}56} = 1{,}89.$$

5.2.3 Біноміальний розподіл

Якщо проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A може з'явитися з однаковою ймовірністю p, то ймовірність того, що подія не з'явиться, дорівнює $q = 1 - p$.

Приймемо число появ події A в кожному з випробувань за деяку випадкову величину X .

Ймовірність кожного значення цієї випадкової величини можна знайти по формулі Бернуллі.

$$P\{x = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k = 0,1,2,... \qquad (5.16)$$

Ця формула аналітично виражає шуканий закон розподілу. Цей закон розподілу називається біноміальним

Математичне сподівання і дисперсія для цього розподілу рівні

$$M(X) = np\,, D(X) = np(1-p) \qquad (5.17)$$

5.2.4 Розподіл Пуассона

Нехай проводиться n незалежних випробувань, в яких поява події A має ймовірність p . Якщо число випробувань n достатньо велике, а ймовірність появи події A в кожному випробуванні мале ($p \le 0{,}1$), то ймовірності появи події A k разів знаходиться за формулою Пуассона:

$$P\{x = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad (5.18)$$

Ця формула аналітично виражає шуканий закон розподілу Пуассона.

Математичне сподівання і дисперсія для цього розподілу дорівнюють

$$M(X) = \lambda\,, \quad D(X) = \lambda \qquad (5.19)$$

Якщо відомі числа λ та k, то значення ймовірності можна знайти за відповідними таблицях розподілу Пуассона.

5.3 Неперервні випадкові величини

5.3.1 Інтегральна функція розподілу неперервної випадкової величини

Нехай x – дійсне число. Ймовірність події, яка полягає в тому, що X прийме значення, менше x, тобто $X < x$, позначимо через $F\left(x\right)$.

Функцією розподілу називають функцію *F(x)*, що визначає ймовірність того, що випадкова величина *X* в результаті випробування прийме значення, менше *x*.

$$F(x) = P(X < x) \tag{5.19}$$

Функцію розподілу також називають **інтегральною функцією**.

Зауваження: Для дискретної випадкової величини функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) \tag{5.20}$$

Знак нерівності під знаком суми показує, що додавання розповсюджується на ті можливі значення випадкової величини, які менше аргументу x.

Функція розподілу дискретної випадкової величини X розривна і зростає скачками під час переходу через кожне значення x_i.

Властивості функції розподілу:

1. Область значень функції розподілу належать відрізку [0, 1].

$$0 \le F(x) \le 1 \tag{5.21}$$

2. $F\left(x\right)$ – неспадна функція.

$$F(x_2) \ge F(x_1) \text{ при } x_2 \ge x_1 \tag{5.22}$$

3. Ймовірність того, що випадкова неперервна величина прийме значення, яке знаходиться в інтервалі $(a,\ b)$, дорівнює приросту функції розподілу на цьому інтервалі.

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) \tag{5.23}$$

Наслідок 1. Ймовірність того, що неперервна випадкова величина прийме одне певне значення дорівнює 0:

$$P(X = C) = 0 \tag{5.24}$$

Наслідок 2.

$$P(a \le X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = F(b) - F(a) \tag{5.25}$$

4. Якщо можливі значення неперервної випадкової величини належать інтервалу $(a,\ b)$, то

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le a \\ 1, x \ge b \end{cases} \tag{5.26}$$

Наслідок 3. Якщо можливі значення непевної випадкової величини розташовані на усій вісі x, то

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1 \tag{5.27}$$

5.3.2 Диференційна функція розподілу неперервної випадкової величини

Щільністю розподілу ймовірності неперервної випадкової величини X називається функція $f(x)$ – перша похідна від функції розподілу $F(x)$.

$$f(x) = F'(x). \tag{5.28}$$

Щільність розподілу також називають ***диференціальною функцією***.

Зауваження. Для опису дискретної випадкової величини щільність розподілу неприйнятна.

Властивості щільності розподілу:

1. $$\forall x \quad f(x) \geq 0 \tag{5.29}$$

2. $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{5.30}$$

3. $$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx \tag{5.31}$$

4. $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \tag{5.32}$$

5.3.3 Числові характеристики неперервних випадкових величин

Нехай неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу $f\left(x\right)$. Допустимо, що всі можливі значення випадкової величини належать відрізку $\left[a,b\right]$.

Математичним сподіванням неперервної випадкової величини X, можливі значення якої належать відрізку $\left[a,b\right]$, називається визначений інтеграл

$$M(X) = \int_{a}^{b} xf(x)dx. \tag{5.33}$$

Якщо можливі значення випадкової величини розглядаються на всій числовій осі, то математичне сподівання знаходиться за формулою:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \tag{5.34}$$

При цьому, звичайно, передбачається, що невласний інтеграл сходиться.

Дисперсією неперервної випадкової величини називається математичне сподівання квадрата її відхилення.

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx. \tag{5.35}$$

По аналогії з дисперсією дискретної випадкової величини, для практичного обчислення дисперсії використовується формула:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2. \tag{5.36}$$

Середнім квадратичним відхиленням називається квадратний корінь з дисперсії.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{5.37}$$

***Приклад* 5.2** Випадкова величина X задана інтегральною функцією $F(X)$. Знайти: диференціальну функцію розподілу; математичне сподівання і дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функцій розподілу ймовірностей випадкової величини X.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{x^2}{25}, & 0 < x < 5; \\ 1, & x \ge 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо диференціальну функцію розподілу $f(x)$:

$$f\left(x\right)=F'\left(x\right)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \dfrac{2}{25}x, & 0\le x\le 5;\\ 0, & x>5.\end{cases}$$

Будуємо графіки інтегральної та диференціальної функцій:

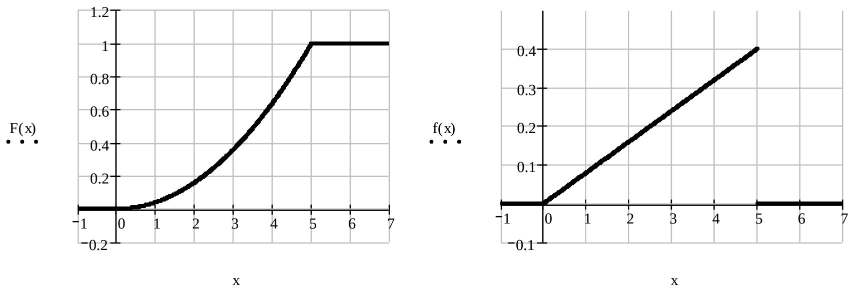

Рисунок 5.1

За формулою $M(X)=\int\limits_a^b xf(x)dx$ знаходимо математичне сподівання:

$$M(X)=\int\limits_0^5 x\cdot\frac{2x}{25}dx=\frac{2}{25}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^5=\frac{10}{3}.$$

Дисперсію знаходимо за формулою $D(X)=\int\limits_a^b x^2 f(x)dx-M^2(X)$, тобто

$$D(X)=\int\limits_0^5 x^2\cdot\frac{2x}{25}dx-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{2}{25}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^5-\frac{100}{9}=\frac{25}{18}.$$

Середнє квадратичне відхилення дорівнює:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{25}{18}}=\frac{5}{3\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{6}\approx 1{,}17\ .$$

5.3.4 Рівномірний розподіл

Неперервна випадкова величина має ***рівномірний*** розподіл на відрізку $[a,\ b]$, якщо на цьому відрізку щільність розподілу випадкової величини постійна, а поза ним дорівнює нулю.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ C, & a \le x \le b \\ 0, & x > b \end{cases}. \qquad (5.38)$$

Постійна величина C може бути визначена з умови рівності одиниці площі, обмеженої кривою розподілу.

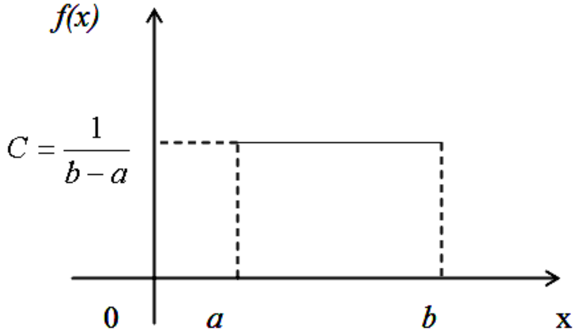

Рисунок 5.2

Отримуємо $C = \dfrac{1}{b-a}$.

Знайдемо функцію розподілу $F(x)$ на відрізку $[a,b]$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dx = \frac{x}{b-a}\Big|_{a}^{x} = \frac{x-a}{b-a}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & при \quad a \le x \le b \\ 1, & при \quad x > b \end{cases} \qquad (5.39)$$

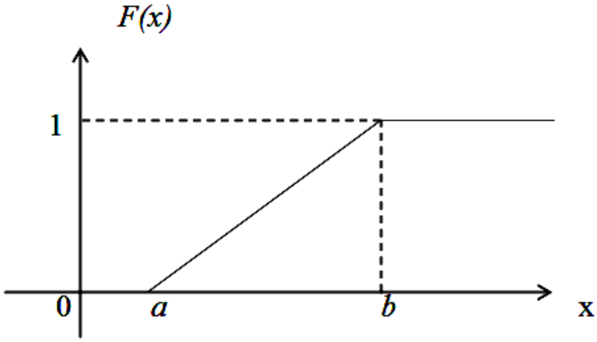

Рисунок 5.3

Для того, щоб випадкова величина відповідала закону рівномірного розподілу необхідно, щоб її значення лежали у середині деякого інтервалу, і у середині цього інтервалу значення цієї випадкової величини були б рівно ймовірні.

Визначимо математичне сподівання і дисперсію випадкової величини, яка відповідає рівномірному закону розподілу.

$$m_x = \int_a^b x f(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{a+b}{2}. \qquad (5.40)$$

$$m_{x^2} = \int_a^b x^2 f(x)dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

$$D_x = m_{x^2} - m_x^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}. \qquad (5.41)$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \qquad (5.42)$$

Ймовірність попадання випадкової величини в заданий інтервал:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{b-a} = \frac{\beta-\alpha}{b-a}. \qquad (5.43)$$

5.3.5 Нормальний закон розподілу

Нормальним називається розподіл ймовірності неперервної випадкової величини, який описується щільністю ймовірності:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}; \qquad (5.44)$$

Нормальний закон розподілу також називається ***законом Гауса***.

Параметри m_x та σ_x, які входять в щільність розподіли є відповідно математичним сподіванням і середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X.

Функцію розподілу $F\left(x\right)$.

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx \qquad (5.45)$$

При $m_x = 0$ і $\sigma_x = 1$ розподіл називається ***нормованим нормальним розподілом:***

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad (5.46)$$

Інтегральна функція

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (5.47)$$

Обидві функції протабульовані.

Графік щільності нормального розподілу називається ***нормальною кривою*** або ***кривою Гауса***.

Нормальна крива має наступні властивості:

1. Функція визначена на всій числовій вісі.

2. При всіх x функція розподілу приймає тільки додатні значення.

3. Вісь OX є горизонтальною асимптотою графіка щільності ймовірності.

4. Графік функції $f(x)$ перетинає вісь OY в точці $\left(0;\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{{m_x}^2}{2\sigma_x^2}}\right)$.

5. Функція має максимум в точці $\left(m_x;\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$.

6. Функція є симетричною відносно прямою $x = m_x$.

7. Графік функції має точки перегину в точках $\left(m_x-\sigma;\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$, $\left(m_x+\sigma;\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$.

Побудуємо графік функції щільності розподілу.

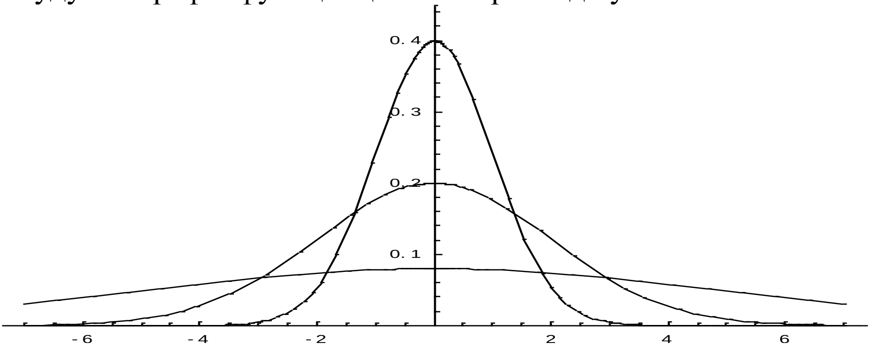

Рисунок 5.4

Побудовані графіки при $m_x = 0$ трьох можливих значень середнього квадратичного відхилення $\sigma_x = 1$, $\sigma_x = 2$ і $\sigma_x = 7$. Як видно, при збільшенні значення середнього квадратичного відхилення графік стає пологішим, а максимальне значення зменшується.

Знайдемо ймовірність попадання випадкової величини, розподіленої по нормальному закону, в заданий інтервал.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx. \qquad (5.48)$$

Позначимо

$$\frac{x-m}{\sigma} = t; \quad если\ x = a, \quad \frac{a-m}{\sigma} = \alpha; \quad если\ x = b, \quad \frac{b-m}{\sigma} = \beta;$$

Тоді

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\beta e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\beta e^{\frac{-t^2}{2}}dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) =$$

$$= \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right), \qquad (5.49)$$

Де

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}dt - \qquad (5.50)$$

функція Лапласа або ***інтеграл ймовірності***.

При розгляді нормального закону розподілу виділяється важливий часний випадок, відомий як правило ***трьох сигм***.

Запишемо ймовірність того, що відхилення нормально розподіленої випадкової величини від математичного сподівання менше заданої величини Δ:

$$P(|X - m| < \Delta) = \Phi\left[\frac{m + \Delta - m}{\sigma}\right] - \Phi\left[\frac{m - \Delta - m}{\sigma}\right] =$$

$$= \Phi\left[\frac{\Delta}{\sigma}\right] - \Phi\left[-\frac{\Delta}{\sigma}\right] = 2\Phi\left[\frac{\Delta}{\sigma}\right] \qquad (5.51)$$

Якщо прийняти $\Delta = 3\sigma$, то отримуємо з використанням таблиць значень функції Лапласа:

$$P(|X-m|<3\sigma)=2\Phi(3)=2\cdot 0,49865=0,9973 \qquad (5.52)$$

Тобто ймовірність того, що випадкова величина відхилиться від свого математичного сподівання на величину, більшу чим потрійне середнє квадратичне відхилення, практично рівна нулю.

Це правило називається ***правилом трьох сигм***.

Не практиці вважається, що якщо для якої-небудь випадкової величини виконується правило трьох сигм, то ця випадкова величина має нормальний розподіл.

***Приклад* 5.3** Знайти ймовірність попадання випадкової величини X до відрізку $[\alpha;\beta]$, якщо вона розподілена:

1) рівномірно на відрізку $[c;d]$;

2) за нормальним законом і має математичне сподівання a і середнє квадратичне відхилення σ;

3) за законом Пуассона і має математичне сподівання a.

Якщо $\alpha=2;\ \beta=9;\ c=7; d=15; a=7; \sigma=3$.

Розв'язання. 1) Як відомо (5.43), для рівномірного розподілу:

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{d-c}=\frac{\beta-\alpha}{d-c}.$$

$$P(2<X<9)=\frac{9-2}{15-7}=\frac{7}{8}=0.875$$

2) За формулою (5.49)

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi(\frac{\beta-a}{\sigma})-\Phi(\frac{\alpha-a}{\sigma}),$$

де $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}dt$ - функція Лапласа, таблиця якої приведена в додатку.

$$P(2<X<9)=\Phi(\frac{9-7}{3})-\Phi(\frac{2-7}{3})=\Phi(0,67)-\Phi(-1,67)=$$

$$=\Phi(0,67)+\Phi(1,67)=0,2486+0,4525=0,7011$$

Тут врахована непарність функції $\Phi(x)$.

3) За формулами (5.18) та (5.19) $P\{x=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $\lambda = a$.

Так як функція Пуассона визначена для дискретної випадкової величини, то

$$P(\alpha < X < \beta)=\sum_{k=\alpha}^{\beta}\frac{a^k e^{-a}}{k!},$$

Значення функції Пуассона знайдемо за таблицею в додатку.

$$P(2<X<9)=\frac{7^2e^{-7}}{2!}+\frac{7^3e^{-7}}{3!}+\frac{7^4e^{-7}}{4!}+\frac{7^5e^{-7}}{5!}+$$

$$+\frac{7^6e^{-7}}{6!}+\frac{7^7e^{-7}}{7!}+\frac{7^8e^{-7}}{8!}+\frac{7^9e^{-7}}{9!}=$$

$$=0,022341+0,052129+0,091226+0,127717+$$

$$+0,149003+0,149003+0,130377+0,101405=0,823201.$$

***Приклад* 5.4** Випадкове відхилення розміру деталі від номіналу розподілене за нормальним законом з математичним сподіванням $a=2$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma=10$. Придатними вважаються деталі, для яких відхилення від номіналу за абсолютною величиною менше 14,4. Знайти: ймовірність того, що при виборі навмання чотирьох деталей відхилення кожної з них попаде у проміжок [–1,8; 8,7]; скільки всього буде придатних деталей серед 100 виготовлених.

Розв'язання. 1) Розглянемо подію A – потрапляння відхилення від номіналу однієї деталі в $[-1,8;\ 8,7]$, знайдемо її ймовірність використавши формулу:

$$P(\alpha \le X \le \beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

$$P(A)=P(-1{,}8\le X\le 8{,}7)=\Phi\left(\frac{8{,}7-2}{10}\right)-\Phi\left(\frac{-1{,}8-2}{10}\right)=$$

$$=\Phi(0{,}67)+\Phi(0{,}38)=0{,}24857+0{,}14803=0{,}3966$$

Так як відхилення від номіналу розміру різних деталей незалежні, то ймовірність того, що при виборі навмання чотирьох деталей відхилення кожної з них потрапляє в $[-1,8;\ 8,7]$ і дорівнює:

$$\left(0,3966\right)^4=0,0247406$$

2) Розглянемо подію B – деталь придатна до використання та знайдемо її ймовірність за допомогою формули:

$$P\left(\left|X-a\right|\le\varepsilon\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

$$P(\left|X-2\right|\le 14,4)=2\Phi\left(\frac{14,4}{10}\right)=2\Phi(1,44)=2\cdot 0,4251\approx 0,85.$$

Таким чином ймовірність відхилення меншого 14,4 дорівнює 0,85. Звідси випливає, що приблизно 85 деталей зі ста будуть придатними до використання.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Агапон Г.И. Сборник задач по теории вероятностей [Текст]. – М.: Высшая школа, – 1986. – 55 с.

2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]. – М.: Высшая школа, 1977. – 120 с.

3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст]. – М.: Высшая школа, 1975. – 147 с.

4. Карасёв А.И. Курс высшей математики для экономических вузов [Текст]. – М.: Высшая школа, 1982. – 358 с.

5. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики [Текст]. – М.: Наука, 1986. – 462 с.

6. Чистяков Б.Н. Курс теории вероятностей [Текст]. – М.: Наука, 1987. – 212 с.

7. Методические указания к выполнению типового расчета по высшей математики «Теория вероятностей» для студентов всех спеціальностей [Текст]: уч. пособие / Л.И. Малыгина, Н.В. Крапива, Д.В. Буряк, И.Б. Подсевалова. – Одесса : ОНПУ, 1995 – 57 с.

ДОДАТКИ

Значення функції $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,39894	0,39892	0,39886	0,39876	0,39862	0,39844	0,39822	0,39797	0,39767	0,39733
0,1	0,39695	0,39654	0,39608	0,39559	0,39505	0,39448	0,39387	0,39322	0,39253	0,39181
0,2	0,39104	0,39024	0,38940	0,38853	0,38762	0,38667	0,38568	0,38466	0,38361	0,38251
0,3	0,38139	0,38023	0,37903	0,37780	0,37654	0,37524	0,37391	0,37255	0,37115	0,36973
0,4	0,36827	0,36678	0,36526	0,36371	0,36213	0,36053	0,35889	0,35723	0,35553	0,35381
0,5	0,35207	0,35029	0,34849	0,34667	0,34482	0,34294	0,34105	0,33912	0,33718	0,33521
0,6	0,33322	0,33121	0,32918	0,32713	0,32506	0,32297	0,32086	0,31874	0,31659	0,31443
0,7	0,31225	0,31006	0,30785	0,30563	0,30339	0,30114	0,29887	0,29659	0,29431	0,29200
0,8	0,28969	0,28737	0,28504	0,28269	0,28034	0,27798	0,27562	0,27324	0,27086	0,26848
0,9	0,26609	0,26369	0,26129	0,25888	0,25647	0,25406	0,25164	0,24923	0,24681	0,24439
1,0	0,24197	0,23955	0,23713	0,23471	0,23230	0,22988	0,22747	0,22506	0,22265	0,22025
1,1	0,21785	0,21546	0,21307	0,21069	0,20831	0,20594	0,20357	0,20121	0,19886	0,19652
1,2	0,19419	0,19186	0,18954	0,18724	0,18494	0,18265	0,18037	0,17810	0,17585	0,17360
1,3	0,17137	0,16915	0,16694	0,16474	0,16256	0,16038	0,15822	0,15608	0,15395	0,15183
1,4	0,14973	0,14764	0,14556	0,14350	0,14146	0,13943	0,13742	0,13542	0,13344	0,13147
1,5	0,12952	0,12758	0,12566	0,12376	0,12188	0,12001	0,11816	0,11632	0,11450	0,11270
1,6	0,11092	0,10915	0,10741	0,10567	0,10396	0,10226	0,10059	0,09893	0,09728	0,09566
1,7	0,09405	0,09246	0,09089	0,08933	0,08780	0,08628	0,08478	0,08329	0,08183	0,08038
1,8	0,07895	0,07754	0,07614	0,07477	0,07341	0,07206	0,07074	0,06943	0,06814	0,06687
1,9	0,06562	0,06438	0,06316	0,06195	0,06077	0,05959	0,05844	0,05730	0,05618	0,05508
2,	0,0539	0,0529	0,0518	0,0508	0,0498	0,0487	0,0478	0,0468	0,0458	0,0449

0	9	2	6	2	0	9	0	2	6	1
2,1	0,04398	0,04307	0,04217	0,04128	0,04041	0,03955	0,03871	0,03788	0,03706	0,03626
2,2	0,03547	0,03470	0,03394	0,03319	0,03246	0,03174	0,03103	0,03034	0,02965	0,02898
2,3	0,02833	0,02768	0,02705	0,02643	0,02582	0,02522	0,02463	0,02406	0,02349	0,02294
2,4	0,02239	0,02186	0,02134	0,02083	0,02033	0,01984	0,01936	0,01888	0,01842	0,01797
2,5	0,01753	0,01709	0,01667	0,01625	0,01585	0,01545	0,01506	0,01468	0,01431	0,01394
2,6	0,01358	0,01323	0,01289	0,01256	0,01223	0,01191	0,01160	0,01130	0,01100	0,01071
2,7	0,01042	0,01014	0,00987	0,00961	0,00935	0,00909	0,00885	0,00861	0,00837	0,00814
2,8	0,00792	0,00770	0,00748	0,00727	0,00707	0,00687	0,00668	0,00649	0,00631	0,00613
2,9	0,00595	0,00578	0,00562	0,00545	0,00530	0,00514	0,00499	0,00485	0,00470	0,00457
3,0	0,00443	0,00430	0,00417	0,00405	0,00393	0,00381	0,00370	0,00358	0,00348	0,00337
3,1	0,00327	0,00317	0,00307	0,00298	0,00288	0,00279	0,00271	0,00262	0,00254	0,00246
3,2	0,00238	0,00231	0,00224	0,00216	0,00210	0,00203	0,00196	0,00190	0,00184	0,00178
3,3	0,00172	0,00167	0,00161	0,00156	0,00151	0,00146	0,00141	0,00136	0,00132	0,00127
3,4	0,00123	0,00119	0,00115	0,00111	0,00107	0,00104	0,00100	0,00097	0,00094	0,00090
3,5	0,00087	0,00084	0,00081	0,00079	0,00076	0,00073	0,00071	0,00068	0,00066	0,00063
3,6	0,00061	0,00059	0,00057	0,00055	0,00053	0,00051	0,00049	0,00047	0,00046	0,00044
3,7	0,00042	0,00041	0,00039	0,00038	0,00037	0,00035	0,00034	0,00033	0,00031	0,00030
3,8	0,00029	0,00028	0,00027	0,00026	0,00025	0,00024	0,00023	0,00022	0,00021	0,00021
3,9	0,00020	0,00019	0,00018	0,00018	0,00017	0,00016	0,00016	0,00015	0,00014	0,00014

Значення функції Лапласа: $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$

x	$\Phi(x)$	***x***	$\Phi(x)$	***x***	$\Phi(x)$	***x***	$\Phi(x)$	***x***	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	**0,31**	0,1217	**0,62**	0,2324	**0,93**	0,3238	**1,24**	0,3925
0,01	0,0040	**0,32**	0,1255	**0,63**	0,2357	**0,94**	0,3264	**1,25**	0,3944
0,02	0,0080	**0,33**	0,1293	**0,64**	0,2389	**0,95**	0,3289	**1,26**	0,3962
0,03	0,0120	**0,34**	0,1331	**0,65**	0,2422	**0,96**	0,3315	**1,27**	0,3980
0,04	0,0160	**0,35**	0,1368	**0,66**	0,2454	**0,97**	0,3340	**1,28**	0,3997
0,05	0,0199	**0,36**	0,1406	**0,67**	0,2486	**0,98**	0,3365	**1,29**	0,4015
0,06	0,0239	**0,37**	0,1443	**0,68**	0,2517	**0,99**	0,3389	**1,30**	0,4032
0,07	0,0279	**0,38**	0,1480	**0,69**	0,2549	**1,00**	0,3413	**1,31**	0,4049
0,08	0,0319	**0,39**	0,1517	**0,70**	0,2580	**1,01**	0,3438	**1,32**	0,4066
0,09	0,0359	**0,40**	0,1554	**0,71**	0,2611	**1,02**	0,3461	**1,33**	0,4082
0,10	0,0398	**0,41**	0,1591	**0,72**	0,2642	**1,03**	0,3485	**1,34**	0,4099
0,11	0,0438	**0,42**	0,1628	**0,73**	0,2673	**1,04**	0,3508	**1,35**	0,4115
0,12	0,0478	**0,43**	0,1664	**0,74**	0,2704	**1,05**	0,3531	**1,36**	0,4131
0,13	0,0517	**0,44**	0,1700	**0,75**	0,2734	**1,06**	0,3554	**1,37**	0,4147
0,14	0,0557	**0,45**	0,1736	**0,76**	0,2764	**1,07**	0,3577	**1,38**	0,4162
0,15	0,0596	**0,46**	0,1772	**0,77**	0,2794	**1,08**	0,3599	**1,39**	0,4177

0,16	0,0636	**0,47**	0,1808	**0,78**	0,2823	**1,09**	0,3621	**1,40**	0,4192
0,17	0,0675	**0,48**	0,1844	**0,79**	0,2852	**1,10**	0,3643	**1,41**	0,4207
0,18	0,0714	**0,49**	0,1879	**0,80**	0,2881	**1,11**	0,3665	**1,42**	0,4222
0,19	0,0753	**0,50**	0,1915	**0,81**	0,2910	**1,12**	0,3686	**1,43**	0,4236
0,20	0,0793	**0,51**	0,1950	**0,82**	0,2939	**1,13**	0,3708	**1,44**	0,4251
0,21	0,0832	**0,52**	0,1985	**0,83**	0,2967	**1,14**	0,3729	**1,45**	0,4265
0,22	0,0871	**0,53**	0,2019	**0,84**	0,2995	**1,15**	0,3749	**1,46**	0,4279
0,23	0,0910	**0,54**	0,2054	**0,85**	0,3023	**1,16**	0,3770	**1,47**	0,4292
0,24	0,0948	**0,55**	0,2088	**0,86**	0,3051	**1,17**	0,3790	**1,48**	0,4306
0,25	0,0987	**0,56**	0,2123	**0,87**	0,3078	**1,18**	0,3810	**1,49**	0,4319
0,26	0,1026	**0,57**	0,2157	**0,88**	0,3106	**1,19**	0,3830	**1,50**	0,4332
0,27	0,1064	**0,58**	0,2190	**0,89**	0,3133	**1,20**	0,3849	**1,51**	0,4345
0,28	0,1103	**0,59**	0,2224	**0,90**	0,3159	**1,21**	0,3869	**1,52**	0,4357
0,29	0,1141	**0,60**	0,2257	**0,91**	0,3186	**1,22**	0,3888	**1,53**	0,4370
0,30	0,1179	**0,61**	0,2291	**0,92**	0,3212	**1,23**	0,3907	**1,54**	0,4382

Значення функції Лапласа: $\Phi = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} \,\mathrm{d}t$

x	$\Phi(x)$	***x***	$\Phi(x)$	***x***	$\Phi(x)$	***x***	$\Phi(x)$	***x***	$\Phi(x)$

1,55	0,4394	**1,86**	0,4686	**2,17**	0,4850	**2,48**	0,4934	**2,79**	0,4974
1,56	0,4406	**1,87**	0,4693	**2,18**	0,4854	**2,49**	0,4936	**2,80**	0,4974
1,57	0,4418	**1,88**	0,4699	**2,19**	0,4857	**2,50**	0,4938	**2,82**	0,4976
1,58	0,4429	**1,89**	0,4706	**2,20**	0,4861	**2,51**	0,4940	**2,84**	0,4977
1,59	0,4441	**1,90**	0,4713	**2,21**	0,4864	**2,52**	0,4941	**2,86**	0,4979
1,60	0,4452	**1,91**	0,4719	**2,22**	0,4868	**2,53**	0,4943	**2,88**	0,4980
1,61	0,4463	**1,92**	0,4726	**2,23**	0,4871	**2,54**	0,4945	**2,90**	0,4981
1,62	0,4474	**1,93**	0,4732	**2,24**	0,4875	**2,55**	0,4946	**2,92**	0,4982
1,63	0,4484	**1,94**	0,4738	**2,25**	0,4878	**2,56**	0,4948	**2,94**	0,4984
1,64	0,4495	**1,95**	0,4744	**2,26**	0,4881	**2,57**	0,4949	**2,96**	0,4985
1,65	0,4505	**1,96**	0,4750	**2,27**	0,4884	**2,58**	0,4951	**2,98**	0,4986
1,66	0,4515	**1,97**	0,4756	**2,28**	0,4887	**2,59**	0,4952	**3,00**	0,4987
1,67	0,4525	**1,98**	0,4761	**2,29**	0,4890	**2,60**	0,4953	**3,05**	0,4989
1,68	0,4535	**1,99**	0,4767	**2,30**	0,4893	**2,61**	0,4955	**3,10**	0,4990
1,69	0,4545	**2,00**	0,4772	**2,31**	0,4896	**2,62**	0,4956	**3,15**	0,4992
1,70	0,4554	**2,01**	0,4778	**2,32**	0,4898	**2,63**	0,4957	**3,20**	0,4993
1,71	0,4564	**2,02**	0,4783	**2,33**	0,4901	**2,64**	0,4959	**3,25**	0,4994
1,72	0,4573	**2,03**	0,4788	**2,34**	0,4904	**2,65**	0,4960	**3,30**	0,4995

1,73	0,4582	**2,04**	0,4793	**2,35**	0,4906	**2,66**	0,4961	**3,35**	0,4996
1,74	0,4591	**2,05**	0,4798	**2,36**	0,4909	**2,67**	0,4962	**3,40**	0,4997
1,75	0,4599	**2,06**	0,4803	**2,37**	0,4911	**2,68**	0,4963	**3,45**	0,4997
1,76	0,4608	**2,07**	0,4808	**2,38**	0,4913	**2,69**	0,4964	**3,50**	0,4998
1,77	0,4616	**2,08**	0,4812	**2,39**	0,4916	**2,70**	0,4965	**3,55**	0,4998
1,78	0,4625	**2,09**	0,4817	**2,40**	0,4918	**2,71**	0,4966	**3,60**	0,4998
1,79	0,4633	**2,10**	0,4821	**2,41**	0,4920	**2,72**	0,4967	**3,65**	0,4999
1,80	0,4641	**2,11**	0,4826	**2,42**	0,4922	**2,73**	0,4968	**3,70**	0,4999
1,81	0,4649	**2,12**	0,4830	**2,43**	0,4925	**2,74**	0,4969	**3,75**	0,4999
1,82	0,4656	**2,13**	0,4834	**2,44**	0,4927	**2,75**	0,4970	**3,80**	0,4999
1,83	0,4664	**2,14**	0,4838	**2,45**	0,4929	**2,76**	0,4971	**3,85**	0,4999
1,84	0,4671	**2,15**	0,4842	**2,46**	0,4931	**2,77**	0,4972	**3,90**	0,5000
1,85	0,4678	**2,16**	0,4846	**2,47**	0,4932	**2,78**	0,4973	**3,95**	0,5000

Значення функції Пуассона $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

k\λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812	0,449329
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287	0,359463
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786	0,143785
3	0,000151	0,001092	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757	0,038343
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964	0,007669
5	0	0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356	0,001227
6	0	0	0,000001	0,000004	0,000013	0,000036	0,000164
7	0	0	0	0	0,000001	0,000003	0,000019

8	0	0	0	0	0	0	0,000002
9	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0

k\λ	**1**	**1,5**	**2**	**2,5**	**3**	**3,5**	**4**
0	0,367879	0,22313	0,135335	0,082085	0,049787	0,030197	0,018316
1	0,367879	0,334695	0,270671	0,205212	0,149361	0,105691	0,073263
2	0,18394	0,251021	0,270671	0,256516	0,224042	0,184959	0,146525
3	0,061313	0,125511	0,180447	0,213763	0,224042	0,215785	0,195367
4	0,015328	0,047067	0,090224	0,133602	0,168031	0,188812	0,195367
5	0,003066	0,014120	0,036089	0,066801	0,100819	0,132169	0,156293
6	0,000511	0,003530	0,012030	0,027834	0,050409	0,077098	0,104196
7	0,000073	0,000756	0,003437	0,009941	0,021604	0,038549	0,059540
8	0,000009	0,000142	0,000859	0,003106	0,008102	0,016865	0,029770
9	0,000001	0,000024	0,000191	0,000863	0,002701	0,006559	0,013231
10	0	0,000004	0,000038	0,000216	0,00081	0,002296	0,005292
11	0	0	0,000007	0,000049	0,000221	0,000730	0,001925
12	0	0	0,000001	0,000010	0,000055	0,000213	0,000642
13	0	0	0	0,000002	0,000013	0,000057	0,000197
14	0	0	0	0	0,000003	0,000014	0,000056
15	0	0	0	0	0,000001	0,000003	0,000015
16	0	0	0	0	0	0,000001	0,000004
17	0	0	0	0	0	0	0,000001
18	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0

Значення функції Пуассона $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

k\λ	**4,5**	**5**	**5,5**	**6**	**6,5**	**7**
0	0,011109	0,006738	0,004087	0,002479	0,001503	0,000912
1	0,04999	0,033690	0,022477	0,014873	0,009772	0,006383
2	0,112479	0,084224	0,061812	0,044618	0,03176	0,022341
3	0,168718	0,140374	0,113323	0,089235	0,068814	0,052129
4	0,189808	0,175467	0,155819	0,133853	0,111822	0,091226
5	0,170827	0,175467	0,171401	0,160623	0,145369	0,127717
6	0,12812	0,146223	0,157117	0,160623	0,157483	0,149003
7	0,082363	0,104445	0,123449	0,137677	0,146234	0,149003

8	0,046329	0,065278	0,084871	0,103258	0,118815	0,130377
9	0,023165	0,036266	0,051866	0,068838	0,085811	0,101405
10	0,010424	0,018133	0,028526	0,041303	0,055777	0,070983
11	0,004264	0,008242	0,014263	0,022529	0,032959	0,045171
12	0,001599	0,003434	0,006537	0,011264	0,017853	0,026350
13	0,000554	0,001321	0,002766	0,005199	0,008926	0,014188
14	0,000178	0,000472	0,001087	0,002228	0,004144	0,007094
15	0,000053	0,000157	0,000398	0,000891	0,001796	0,003311
16	0,000015	0,000049	0,000137	0,000334	0,00073	0,001448
17	0,000004	0,000014	0,000044	0,000118	0,000279	0,000596
18	0,000001	0,000004	0,000014	0,000039	0,000101	0,000232
19	0	0,000001	0,000004	0,000012	0,000034	0,000085
20	0	0	0,000001	0,000004	0,000011	0,00003
21	0	0	0	0,000001	0,000003	0,000010
22	0	0	0	0	0,000001	0,000003
23	0	0	0	0	0	0,000001
24	0	0	0	0	0	0

ДЛЯ НОТАТОК