

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІНСТИТУТ ЗАОЧНОЇ ОСВІТИ
КАФЕДРА «ПРИРОДНИЧО-НАУКОВОЇ ПІДГОТОВКИ»**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ ДО ВИКОНАННЯ
КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА
МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ**

Рекомендовано до друку вченою радою
Одеського національного політехнічного університету
Протокол № 2 від 13.01.2014 р.

Одеса 2015

Методичні вказівки та завдання до виконання контрольної роботи з теорії ймовірностей та математичної статистики [Текст] / Одес. нац. політехн. ун-т; уклад.: Г. Ф. Сафонова – Херсон: ХПТК ОНПУ, 2015. – 54 с.

Навчальне видання

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ ДО ВИКОНАННЯ
КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА
МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ**

Укладачі: **Сафонова** Ганна Феліксівна, доцент, канд. техн. наук

Рецензент: **Семакова** Тетяна Олексіївна, доцент, канд. пед. наук

За редакцією укладачів

Надруковано з оригінал-макета замовника

Підп. до друку 12.02.2014. Формат 600 x 840 М 1/16.

Папір офсетний. Ум. друк. арк. 3,2. Гарнітура Times.

Спосіб друку – ризографія. Тираж 4 прим. Зам. № 46.

Лабораторія організаційно-видавничої діяльності

ХПТК ОНПУ

73000, м. Херсон, вул. 40 років Жовтня, 23

тел. (0552) 22-55-38, тел./факс (0552) 22-27-43

ЗМІСТ

| | |
|--|----|
| Передмова..... | 4 |
| 1 Програма дисципліни..... | 5 |
| 2 Завдання до контрольної роботи..... | 7 |
| 3 Методичні рекомендації до розв'язання типових задач..... | 21 |
| Таблиця вибору варіанту для контрольної роботи..... | 40 |
| Список використаних джерел..... | 45 |
| Додатки..... | 46 |

ПЕРЕДМОВА

Мета даних методичних вказівок – допомогти студентам самостійно з мінімальними витратами часу виконати контрольні завдання з дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика», які передбачені діючою програмою.

У навчальному виданні запропоновано по десять варіантів кожної типової задачі, з детальним розв'язком приклада, які можуть бути використанні в якості варіантів контрольної роботи.

Вибір варіанту контрольної роботи студенту пропонується здійснювати за номером, який співпадає з двома останніми цифрами його залікової книжки (А – передостання, В – остання цифри).

Наведено список літератури, необхідний для більш детального вивчення розглянутих розділів.

В кінці методичних вказівок приведені таблиці значень функції:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad f(x, \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!},$$

та таблиця критичних точок розподілу χ^2 .

1 ПРОГРАМА ДИСЦИПЛІНИ

Тема 1. Основні поняття теорії ймовірностей. Предмет курсу. Поняття елементарної та складеної випадкових подій, простір елементарних подій, операції над подіями, класичне означення ймовірності випадкової події, статистичне визначення ймовірності, елементи комбінаторики, аксіоми теорії ймовірностей, їх наслідки.

Залежні та незалежні випадкові події, формули додавання ймовірностей. Умовна ймовірність та її властивості. Формули множення ймовірностей для залежних та незалежних випадкових подій. Формула повної ймовірності та формула Байєса.

Тема 2. Незалежні випробування за схемою Бернуллі. Означення повторних незалежних випробувань. Формула Бернуллі для обчислення ймовірності і найімовірнішого числа. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа. Формула Пуассона для малої ймовірності випадкових подій.

Тема 3. Одновимірні випадкові величини. Означення випадкової величини. Дискретні та неперервні випадкові величини, їх закони розподілу. Функції розподілу ймовірностей та їх властивості. Числові характеристики випадкових величин: математичне сподівання, дисперсія, середньоквадратичне відхилення, мода та медіана; початкові та центральні моменти, асиметрія та ексцес.

Тема 4. Багатовимірні випадкові величини. Означення багатовимірної випадкової величини та її закон розподілу. Система двох дискретних випадкових величин, числові характеристики системи, кореляційний момент, коефіцієнт кореляції та його властивості. Функція розподілу ймовірностей та щільність ймовірностей системи. Означення кореляційної залежності. Система n випадкових величин; кореляційна матриця.

Тема 5. Функції випадкових величин. Означення функції випадкової величини. Функція дискретного випадкового аргументу, її числові властивості. Функція неперервного випадкового аргументу, її числові властивості. Означення функції розподілу ймовірностей та щільність для функції двох випадкових аргументів.

Тема 6. Основні закони розподілу дискретних та неперервних випадкових величин. Означення дискретної випадкової величини. Біноміальний та Пуасонівський закони

розподілу. Ймовірні твірні функції для цих законів і їх числові характеристики.

Рівномірний закон. Нормальний закон розподілу. Логарифмічний нормальний закон. Показниковий розподіл та його використання у теорії надійності, теорії черг. Розподіл χ^2 Ст'юдента. Розподіл Фішера.

Тема 7. Граничні теореми теорії ймовірностей. Нерівність Чебишева та її значення. Теорема Чебишева. Теорема Бернуллі. Центральна гранична теорема ймовірностей (теорема Ляпунова) та її використання у математичній статистиці.

Тема 8. Елементи теорії випадкових процесів. Випадкові процеси та їх класифікація, закони розподілу. Потік подій. Формула Пуассона для найпростішого потоку. Марківські ланцюги. Елементи теорії масового обслуговування (теорія черг).

Тема 9. Елементи математичної статистики. Вибірковий метод. Генеральна та вибірка сукупності. Статистичні розподіли вибірок. Гістограма та полігон. Числові характеристики: вибірка середня, дисперсія вибірки, середньоквадратичне відхилення, мода й медіана, емпіричні початкові та центральні моменти, асиметрія та ексцес.

Тема 10. Статистичні оцінки параметрів генеральної сукупності. Статистичні гіпотези. Визначення статистичної оцінки. Точкові та інтервальні статистичні оцінки. Визначення надійного інтервалу. Нульова та альтернативна статистичні гіпотези. Помилки першого та другого роду. Статистичний критерій. Критична область. Перевірка правдивості нульової гіпотези про нормальний закон розподілу ознаки генеральної сукупності. Емпіричні та теоретичні частоти. Критерії узгодження Пірсона та Колмогорова.

Тема 11. Елементи дисперсійного аналізу. Модель експерименту. Однофакторний аналіз. Таблиця результатів спостережень. Загальна дисперсія, міжгрупова та внутрішньогрупова дисперсії. Загальний метод перевірки впливу фактора на ознаку способом порівняння дисперсій. Поняття про двофакторний дисперсійний аналіз.

Тема 12. Елементи теорії регресії і кореляції. Функціональна, статистична і кореляційна залежності. Рівняння лінійної регресії. Вибірковий коефіцієнт кореляції. Надійний інтервал для лінії регресії. Множинна регресія, множинний коефіцієнт кореляції та його властивості. Нелінійна регресія.

2 ЗАВДАННЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Завдання 1-10

1-10. В партії з n виробів міститься k бракованих. Визначити ймовірність вилучення:

- одного виробу (бракованого, небракованого);
- r виробів (бракованих, небракованих);
- m виробів серед яких знаходиться l бракованих.

Знайти ймовірність того, що серед вилучених m виробів міститься:

- хоча б один бракований виріб;
- тільки один бракований виріб.

| Завдання | n | k | r | m | l |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 30 | 3 | 3 | 4 | 2 |
| 2 | 28 | 6 | 5 | 4 | 3 |
| 3 | 20 | 4 | 3 | 4 | 2 |
| 4 | 25 | 9 | 6 | 4 | 3 |
| 5 | 31 | 7 | 5 | 4 | 3 |
| 6 | 19 | 6 | 4 | 3 | 2 |
| 7 | 22 | 8 | 4 | 3 | 2 |
| 8 | 26 | 9 | 5 | 3 | 2 |
| 9 | 30 | 7 | 5 | 3 | 2 |
| 10 | 27 | 6 | 4 | 3 | 2 |

Завдання 11-20

11. Знайти ймовірність того, що точка, яка вибрана з круга радіусом R , належатиме квадрату. Квадрат вписаний в коло, яке обмежує даний круг.

12. На відрізку L довжиною 20 см знаходиться менший відрізок l довжиною 10 см. Знайти ймовірність того, що точка, яку навмання поставили на більшому відрізку, попаде також і на менший відрізок.

13. Задані концентричні кола радіусів R і r ($R > r$). Навмання взято точку з круга радіусом R . Яка ймовірність того, що ця точка попаде в кільце, обмежене двома колами?

14. В круг радіусом R поміщено менший круг радіусом r . Знайти ймовірність того, що точка, яку навмання поставили в більший круг, попаде також і в менший круг.

15. Дві однакові монети радіусом r розміщено всередині круга радіусом R , в якому навмання вибирають точку. Яка ймовірність того, що ця точка попаде в одну з монет?

16. На площині розміщено плоску фігуру площею S , всередині якої є три плоскі фігури площами S_1, S_2, S_3 . Навмання вибрано точку з більшої фігури. Яка ймовірність того, що ця точка не попаде в жодну з менших фігур?

17. Диск, що швидко обертається, розділений на парну кількість рівних секторів, які поперемінно зафарбовані в білий і чорний кольори. По диску вистрілили. Знайти ймовірність того, що куля влуче в один з білих секторів.

18. В коло вписаний правильний трикутник. У круг, який обмежує дане коло, навмання кидають точку. Яка ймовірність того, що вона попаде в трикутник?

19. Стіл має форму квадрата зі стороною 1 м. На столі намальоване коло діаметром 0,5 м. Яка ймовірність того, що кулька, кинута зверху на стіл, потрапить у коло (за умови, що кулька з однаковою ймовірністю попадає в будь-яку точку стола).

20. Усередині прямокутника 5 на 4 см перебуває коло радіуса 1,5 см. Яка ймовірність того, що точка, випадковим чином поставлена в прямокутник, опиниться усередині кола?

Завдання 21-30

21. Виробник комп'ютерів отримує комплектуючі деталі від трьох постачальників, частини яких становлять 20 %, 45 %, 35 % відповідно. Деталі першого постачальника мають 2 % браку, другого – 1,5 %, третього – 1,7 %. Яка ймовірність того, що: а) навмання вибрана деталь буде з браком; б) браковану деталь отримано від другого постачальника?

22. Податкові інспектори роблять перевірку діяльності підприємств: перший обслуговує 40 підприємств, серед яких 25 % не мають заборгованостей, другий – 60 підприємств, із них 40 % – без заборгованостей. Яка ймовірність того, що: а) навмання обране

підприємство не має заборгованості; б) підприємство, що не має заборгованості, перевіряв перший інспектор?

23. Виробництво певної продукції може проводитись у трьох температурних режимах з ймовірностями 0,45; 0,25; 0,3 відповідно. Залежно від температурного режиму ймовірність отримання продукції вищої якості становить 0,8; 0,85; 0,9. Яка ймовірність того, що: а) виготовлена продукція вищої якості; б) продукцію вищої якості виготовлено при третьому температурному режимі?

24. До каси підприємства надійшли банкноти в пачках з двох банків: 50 пачок з першого і 70 – з другого. Ймовірність допущення помилки касирами першого банку становить 0,15 %, другого – 0,2 %. Яка ймовірність того, що: а) навмання вибрану пачку сформовано без помилок; б) пачку без помилок було сформовано касирами другого банку?

25. Завод випускає кухонні набори білого та синього кольорів, що виготовляються двома цехами. Перший цех виробляє 35 % всієї продукції, серед яких 40 % наборів синього кольору. У продукції другого цеху 55 % синіх наборів. Яка ймовірність того, що: а) навмання, вибраний набір синього кольору; б) набір синього кольору виготовлено другим цехом?

26. На двох полицях стоять книжки: на першій – 15 книжок українською та 7 російською мовами, на другій – відповідно 10 і 8 книжок. З першої полиці навмання перекладено книжку на другу полицю. Яка ймовірність того, що: а) навмання вибрана з другої полиці книжка виявиться українською; б) з першої полиці було перекладено російську книжку, якщо вибрана з другої полиці книжка виявилась українською?

27. Магазин отримує продукцію від двох виробників: перший постачає $\frac{2}{5}$ частини усіх виробів, другий – $\frac{3}{5}$. Ймовірність реалізації виробів першого постачальника становить 0,95, другого – 0,8. Яка ймовірність того, що: а) навмання вибраний виріб не буде реалізовано; б) нереалізований виріб отримано від першого виробника?

28. У рекламному агентстві працює 3 групи дизайнерів: перша обслуговує 25 фірм, друга – 45, третя – 40. Протягом одного місяця

кошти, витрачені на рекламу дизайнерами першої групи, повертаються до 40 % фірм, другої – до 45 %, третьої – до 35 %. Яка ймовірність того, що: а) навмання вибрана фірма окупила витрачені на рекламу кошти протягом місяця; б) фірма, що окупила протягом місяця витрати на рекламу, обслуговувалася третьою групою дизайнерів?

29. Тираж популярної газети друкується в двох типографіях. Потужності цих типографій відносяться як 3 : 4 відповідно, причому перша дає 3,5 % браку, а друга – 2,5 %. Яка ймовірність того, що: а) навмання обраний примірник газети буде бракованим; б) бракований примірник газети надруковано в першій типографії?

30. Справи клієнтів банку зберігаються у 8 сейфах: у трьох по 150 справ, у п'яти – по 250. Ймовірність вчасного повернення кредиту клієнтами, справи яких лежать у перших трьох сейфах, становить 0,96, в останніх п'яти – 0,95. Яка ймовірність того, що: а) навмання вибрано справу клієнта, який вчасно поверне кредит; б) права клієнта, який своєчасно повернув кредит, лежала в одному з перших трьох сейфів?

Завдання 31-40

31-40. З коробки, яка містить t білих та s чорних кульок вилучається одна кулька, яка повертається знову в коробку після запису її кольору. Дослід повторюється n разів. Знайти ймовірність появи білої кульки:

- k разів;

- від k_1 до k_2 разів;

- визначити найімовірнішу комбінацію білих та чорних кульок при цих спробах та її ймовірність.

| Завдання | t | s | n | k | k_1 | k_2 |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-------|-------|
| 31 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 3 |
| 32 | 5 | 3 | 4 | 3 | 2 | 3 |
| 33 | 4 | 5 | 5 | 4 | 2 | 3 |
| 34 | 4 | 6 | 4 | 3 | 2 | 3 |
| 35 | 4 | 6 | 4 | 3 | 1 | 2 |

| | | | | | | |
|-----------|---|---|---|---|---|---|
| 36 | 4 | 6 | 4 | 3 | 2 | 3 |
| 37 | 6 | 5 | 4 | 4 | 1 | 2 |
| 38 | 5 | 3 | 4 | 3 | 1 | 2 |
| 39 | 4 | 5 | 5 | 4 | 1 | 2 |
| 40 | 4 | 6 | 4 | 3 | 1 | 2 |

Завдання 41-50

41-50. Ймовірність появи події A в кожному із незалежних випробувань дорівнює p . Проведено n випробувань. Знайти ймовірність того, що в цих випробуваннях подія A з'явиться:

- рівно k разів,
- не більше k разів;
- не менше k разів.

| <i>Завдання</i> | <i>p</i> | <i>n</i> | <i>k</i> |
|-----------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 41 | 0,8 | 120 | 90 |
| 42 | 0,9 | 150 | 130 |
| 43 | 0,6 | 140 | 80 |
| 44 | 0,65 | 160 | 100 |
| 45 | 0,95 | 170 | 160 |
| 46 | 0,7 | 200 | 150 |
| 47 | 0,75 | 100 | 70 |
| 48 | 0,85 | 180 | 140 |
| 49 | 0,4 | 250 | 90 |
| 50 | 0,55 | 220 | 120 |

Завдання 51-60

51-60. Завод відправив на базу $1000 \cdot N$ виробів (N — номер варіанта). Ймовірність пошкодження виробу в дорозі $0,0002 \cdot N$. Знайти ймовірність того, що в дорозі буде пошкоджено:

- три вироби;
- менше трьох виробів;
- більше трьох виробів;
- хоча б один виріб.

Знайти найбільш ймовірніше число пошкоджень та його ймовірність.

Завдання 61-70

61-70. Знайти: математичне сподівання; дисперсію; середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X по даному закону її розподілу:

| | | | | | | | | | |
|-----|-------|------|-----|------|-----|------|------|------|------|
| 61. | x_i | 6 | 9 | 10 | 12 | 13 | 20 | 21 | 25 |
| | p_i | 0,01 | 0,2 | 0,09 | 0,1 | 0,02 | 0,08 | 0,15 | 0,35 |

| | | | | | | | | | |
|-----|-------|-----|-----|------|------|------|------|------|------|
| 62. | x_i | 2 | 5 | 6 | 9 | 10 | 13 | 19 | 24 |
| | p_i | 0,1 | 0,2 | 0,08 | 0,02 | 0,15 | 0,05 | 0,33 | 0,07 |

| | | | | | | | | | |
|-----|-------|------|------|-----|-----|------|------|------|------|
| 63. | x_i | 3 | 10 | 11 | 15 | 18 | 20 | 25 | 26 |
| | p_i | 0,02 | 0,28 | 0,1 | 0,2 | 0,15 | 0,05 | 0,04 | 0,16 |

| | | | | | | | | | |
|-----|-------|------|------|------|------|-----|-----|------|------|
| 64. | x_i | 9 | 10 | 13 | 16 | 17 | 20 | 23 | 27 |
| | p_i | 0,03 | 0,07 | 0,25 | 0,15 | 0,1 | 0,2 | 0,12 | 0,08 |

| | | | | | | | | | |
|-----|-------|------|------|------|------|-----|-----|------|------|
| 65. | x_i | 14 | 15 | 20 | 21 | 25 | 26 | 30 | 31 |
| | p_i | 0,14 | 0,16 | 0,12 | 0,08 | 0,1 | 0,3 | 0,03 | 0,07 |

| | | | | | | | | | |
|-----|-------|------|------|-----|------|------|-----|------|------|
| 66. | x_i | 13 | 18 | 19 | 20 | 25 | 26 | 28 | 29 |
| | p_i | 0,03 | 0,17 | 0,2 | 0,15 | 0,05 | 0,1 | 0,14 | 0,16 |

| | | | | | | | | | |
|-----|-------|-----|------|------|------|-----|------|------|------|
| 67. | x_i | 18 | 20 | 21 | 24 | 25 | 28 | 29 | 30 |
| | p_i | 0,1 | 0,13 | 0,12 | 0,15 | 0,2 | 0,08 | 0,18 | 0,04 |

| | | | | | | | | | |
|-----|-------|------|------|------|------|-----|-----|------|------|
| 68. | x_i | 10 | 15 | 17 | 18 | 21 | 22 | 25 | 27 |
| | p_i | 0,04 | 0,16 | 0,18 | 0,02 | 0,1 | 0,2 | 0,18 | 0,12 |

69.

| | | | | | | | | |
|-------|-----|------|------|------|------|-----|------|------|
| x_i | 20 | 21 | 25 | 27 | 28 | 30 | 32 | 37 |
| p_i | 0,2 | 0,06 | 0,14 | 0,18 | 0,12 | 0,1 | 0,03 | 0,17 |

70.

| | | | | | | | | |
|-------|------|------|------|------|-----|-----|------|------|
| x_i | 22 | 23 | 26 | 30 | 31 | 32 | 35 | 36 |
| p_i | 0,03 | 0,17 | 0,24 | 0,16 | 0,2 | 0,1 | 0,06 | 0,04 |

Завдання 71-80

71-80. Випадкова величина X задана інтегральною функцією $F(X)$. Знайти: диференціальну функцію розподілу; математичне сподівання і дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функцій розподілу ймовірностей випадкової величини X .

$$71. F(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ \frac{x^2 - 1}{8} & \text{при } 1 < x \leq 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases} \quad 72. F(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ \frac{1}{4}(x-1)^2 & \text{при } 1 < x \leq 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

$$73. F(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 3, \\ \frac{1}{4}(x-3)^2 & \text{при } 3 < x \leq 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases} \quad 74. F(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ \frac{1}{9}(x-1)^2 & \text{при } 1 < x \leq 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

$$75. F(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 3, \\ \frac{x^2 - 9}{16} & \text{при } 3 < x \leq 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases} \quad 76. F(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 2, \\ \frac{x^2 - 4}{12} & \text{при } 2 < x \leq 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

$$77. F(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{x^3}{8} & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases} \quad 78. F(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 8, \\ (x-8)^2 & \text{при } 8 < x \leq 9, \\ 1 & \text{при } x > 9. \end{cases}$$

$$79. F(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 3, \\ \frac{1}{25}(x-3)^2 & \text{при } 3 < x \leq 8, \\ 1 & \text{при } x > 8. \end{cases} \quad 80. F(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 2, \\ \frac{1}{16}(x-2)^2 & \text{при } 2 < x \leq 6, \\ 1 & \text{при } x > 6. \end{cases}$$

Завдання 81-90

81-90. Задані математичне сподівання a і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X . Знайти: ймовірність того, що X прийме значення, що належить інтервалу (α, β) ; ймовірність того, що абсолютна величина відхилення $|X - a|$ виявиться меншою ε .

| Завдання | a | σ | α | β | ε |
|-----------|-----|----------|----------|---------|---------------|
| 81 | 26 | 2 | 19 | 29 | 2 |
| 82 | 27 | 3 | 20 | 30 | 1 |
| 83 | 24 | 4 | 21 | 31 | 3 |
| 84 | 23 | 5 | 12 | 32 | 2 |
| 85 | 22 | 6 | 23 | 30 | 1 |
| 86 | 25 | 8 | 24 | 40 | 4 |
| 87 | 29 | 7 | 19 | 38 | 0,5 |
| 88 | 28 | 4 | 18 | 29 | 0,9 |
| 89 | 17 | 5 | 16 | 30 | 0,8 |
| 90 | 19 | 2 | 14 | 22 | 3 |

Завдання 91-100

91-100. Задані значення x_1, x_2, \dots, x_n , які прийняла дискретна випадкова величина X в послідовності $n = 20$ незалежних випробуваннях. Потрібно:

- скласти таблицю статистичного розподілу, для дискретної випадкової величини X та побудувати полігон частот;

- обчислити вибірккову середню \bar{x}_e та вибірккову дисперсію D_e заданої вибірки;

- обчислити виправлене середнє квадратичне відхилення S ;

- побудувати графік емпіричної функції розподілу $F^*(x)$.

| | | | | | | |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 91 | 3,5 | 3,8 | 4,0 | 4,2 | 4,3 | 4,4 |
| | 3,8 | 4,0 | 4,3 | 4,0 | 3,5 | 4,4 |
| | 4,2 | 4,0 | 3,5 | 4,2 | 4,4 | 4,0 |
| | 4,3 | 4,3 | | | | |
| 92 | 5,6 | 5,7 | 5,9 | 6,0 | 6,3 | 6,5 |
| | 7,0 | 6,0 | 5,6 | 6,3 | 7,0 | 5,9 |
| | 5,7 | 6,5 | 6,3 | 6,5 | 7,0 | 5,9 |
| | 6,3 | 5,9 | | | | |

| | | | |
|-----------|--|------------|--|
| 93 | 7,8 8,0 8,1 8,3 8,6 8,7 8,9 8,3 8,7 8,0 7,8 8,9 8,3 8,7 8,1 8,6 8,3 7,8 8,1 8,0 | 94 | 12,5 12,7 13,5 13,6 13,7 13,9 12,5 13,6 12,5 13,6 13,9 12,7 13,6 13,9 12,5 13,9 12,7 13,7 13,5 13,6 |
| 95 | 8,4 8,9 9,3 8,3 9,7 9,8 8,8 8,8 9,3 8,4 9,3 8,4 9,7 9,3 8,3 8,4 9,7 8,8 8,9 9,3 | 96 | 17,3 17,5 18,4 17,4 17,2 18,4 18,3 17,4 17,2 18,4 17,3 17,5 17,2 18,4 18,3 18,2 18,4 18,3 18,2 18,4 |
| 97 | 12,3 20,0 19,9 18,1 14,4 13,6 18,1 13,6 12,3 19,9 20,0 14,4 18,1 13,6 19,9 13,6 14,4 13,6 19,9 20,0 | 98 | 8,8 9,6 7,5 5,7 5,3 7,2 7,3 8,8 7,5 9,6 7,3 8,8 7,5 5,7 5,3 7,2 7,3 7,5 9,6 5,7 |
| 99 | 2,8 3,4 5,5 6,6 3,3 3,5 6,4 2,8 6,4 3,4 3,4 3,5 5,6 6,5 6,6 3,3 3,5 5,5 5,6 3,3 | 100 | 5,3 6,4 4,8 4,7 6,5 6,3 4,7 6,4 6,3 5,3 4,7 4,8 6,5 6,3 5,3 4,7 6,4 6,5 4,8 5,3 |

Завдання 101-110

101-110. Задані середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X , вибіркова середня \bar{X} , об'єм вибірки n . Знайти надійні інтервали для оцінки невідомого математичного сподівання a з заданою надійністю $\gamma = 0,95$.

| Завдання | σ | \bar{X} | n |
|------------|----------|-----------|-----|
| 101 | 8 | 28,21 | 35 |
| 102 | 4 | 29,83 | 36 |
| 103 | 10 | 22,31 | 36 |
| 104 | 11 | 27,85 | 64 |
| 105 | 9 | 20,57 | 49 |
| 106 | 9 | 21,23 | 49 |
| 107 | 6 | 23,23 | 81 |
| 108 | 8 | 24,71 | 81 |
| 109 | 7 | 28,31 | 64 |
| 110 | 10 | 23,28 | 100 |

Завдання 111-120

111-120. За даними двох незалежних вибірок об'єму n_1 та n_2 із нормальних множин X та Y знайдені виправлені вибіркові дисперсії S_1^2 та S_2^2 . При рівні значущості $\alpha=0,05$ перевірити гіпотезу $H_0: D(X)=D(Y)$ при альтернативній $H_1: D(X)>D(Y)$.

| Завдання | n_1 | n_2 | S_1^2 | S_2^2 |
|------------|-------|-------|---------|---------|
| 111 | 8 | 5 | 0,98 | 0,69 |
| 112 | 10 | 8 | 0,49 | 0,77 |
| 113 | 12 | 8 | 0,81 | 0,94 |
| 114 | 10 | 6 | 0,74 | 0,69 |
| 115 | 9 | 6 | 0,46 | 0,73 |
| 116 | 8 | 7 | 0,76 | 0,87 |
| 117 | 11 | 7 | 0,48 | 0,91 |
| 118 | 12 | 10 | 0,64 | 0,71 |
| 119 | 13 | 8 | 0,76 | 0,98 |
| 120 | 12 | 6 | 0,84 | 0,72 |

Завдання 121-130

121-130. За допомогою критерію узгодженості Пірсона при рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити гіпотезу про те, що компонента X має нормальний розподіл з параметрами, рівними їх оцінкам: $a = \bar{X}$, та $\sigma^2 = D$.

| | | | | | | | | |
|------------|-------|----|----|----|----|----|----|----|
| 121 | x_i | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 |
| | n_i | 14 | 16 | 10 | 25 | 15 | 8 | 12 |

| | | | | | | | | |
|------------|-------|----|----|----|----|----|-----|-----|
| 122 | x_i | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 |
| | n_i | 20 | 15 | 5 | 40 | 6 | 4 | 10 |

| | | | | | | | | |
|------------|-------|----|----|----|----|----|----|----|
| 123 | x_i | 65 | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 | 95 |
| | n_i | 9 | 11 | 10 | 25 | 15 | 17 | 13 |

124

| | | | | | | | |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|
| x_i | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |
| n_i | 5 | 15 | 20 | 30 | 7 | 13 | 10 |

125

| | | | | | | | |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|
| x_i | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 |
| n_i | 4 | 10 | 5 | 35 | 26 | 12 | 8 |

126

| | | | | | | | |
|-------|----|----|----|-----|-----|-----|-----|
| x_i | 70 | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 | 130 |
| n_i | 6 | 5 | 15 | 40 | 20 | 10 | 4 |

127

| | | | | | | | |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|
| x_i | 50 | 57 | 64 | 71 | 78 | 85 | 92 |
| n_i | 4 | 6 | 15 | 30 | 25 | 13 | 7 |

128

| | | | | | | | |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|
| x_i | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 |
| n_i | 4 | 5 | 15 | 50 | 10 | 9 | 7 |

129

| | | | | | | | |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|
| x_i | 15 | 25 | 35 | 45 | 55 | 65 | 75 |
| n_i | 5 | 10 | 15 | 20 | 18 | 19 | 13 |

130

| | | | | | | | |
|-------|----|----|----|-----|-----|-----|-----|
| x_i | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 115 |
| n_i | 7 | 8 | 11 | 40 | 16 | 10 | 4 |

Завдання 131-140

131-140. Знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X за даними кореляційної таблиці; перевірити значущість параметрів і тісноту кореляційного зв'язку.

131.

| Y | X | | | | | | |
|-----|-----|----|----|----|----|----|-------|
| | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | n_y |
| 10 | 4 | 6 | 10 | — | — | — | 20 |
| 20 | — | — | 5 | 15 | 4 | — | 24 |
| 30 | — | — | — | — | 6 | — | 6 |
| 40 | — | — | — | — | 35 | 5 | 40 |

| | | | | | | | |
|-------|---|---|----|----|----|----|-----------|
| 50 | — | — | — | — | — | 10 | 10 |
| n_x | 4 | 6 | 15 | 15 | 45 | 15 | $n = 100$ |

132.

| Y | X | | | | | | n_y |
|-------|-----|----|----|----|----|----|-----------|
| | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | |
| 16 | — | 15 | 25 | — | — | — | 40 |
| 26 | — | — | — | 10 | — | — | 10 |
| 36 | — | — | — | 5 | 10 | — | 15 |
| 46 | — | — | — | — | 5 | — | 5 |
| 56 | — | — | — | — | 22 | 8 | 30 |
| n_x | — | 15 | 25 | 15 | 37 | 8 | $n = 100$ |

133.

| Y | X | | | | | | n_y |
|-------|-----|----|----|----|----|----|-----------|
| | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | |
| 30 | 10 | 15 | 5 | — | — | — | 30 |
| 50 | — | 4 | 6 | 20 | — | — | 30 |
| 70 | — | — | — | 8 | — | — | 8 |
| 90 | — | — | — | — | 12 | — | 12 |
| 110 | — | — | — | — | 3 | 17 | 20 |
| n_x | 10 | 19 | 11 | 28 | 15 | 17 | $n = 100$ |

134.

| Y | X | | | | | | n_y |
|-------|-----|----|----|----|----|----|-----------|
| | 18 | 23 | 28 | 33 | 38 | 43 | |
| 20 | — | 13 | 12 | 15 | — | — | 40 |
| 30 | — | — | 4 | 6 | 10 | — | 20 |
| 40 | — | — | — | — | 7 | — | 7 |
| 50 | — | — | — | — | 6 | 17 | 23 |
| 60 | — | — | — | — | 2 | 8 | 10 |
| n_x | — | 13 | 16 | 21 | 25 | 25 | $n = 100$ |

135.

| Y | X | | | | | | n_y |
|-----|-----|----|----|----|----|----|-------|
| | 15 | 25 | 35 | 45 | 55 | 65 | |
| 20 | 2 | 4 | 9 | — | — | — | 15 |
| 40 | — | — | 5 | 2 | — | — | 7 |

| | | | | | | | |
|-------|---|---|----|----|---|---|----------|
| 60 | — | — | — | 3 | — | — | 3 |
| 80 | — | — | — | 10 | 7 | — | 17 |
| 100 | — | — | — | — | — | 8 | 8 |
| n_x | 2 | 4 | 14 | 15 | 7 | 8 | $n = 50$ |

136.

| Y | X | | | | | | n_y |
|-------|-----|----|----|----|----|----|-----------|
| | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | |
| 50 | — | — | 10 | 20 | — | — | 30 |
| 60 | — | — | — | 15 | 25 | — | 40 |
| 70 | — | — | — | — | 6 | 4 | 10 |
| 80 | — | — | — | — | 7 | 8 | 15 |
| 90 | — | — | — | — | — | 5 | 5 |
| n_x | — | — | 10 | 35 | 38 | 17 | $n = 100$ |

137.

| Y | X | | | | | | n_y |
|-------|-----|----|----|----|----|----|-----------|
| | 6 | 16 | 26 | 36 | 46 | 56 | |
| 5 | 3 | 17 | — | — | — | — | 20 |
| 25 | — | — | 4 | 6 | — | — | 10 |
| 45 | — | — | — | 15 | 25 | — | 40 |
| 65 | — | — | — | — | 8 | 7 | 15 |
| 85 | — | — | — | — | — | 15 | 15 |
| n_x | 3 | 17 | 4 | 21 | 33 | 22 | $n = 100$ |

138.

| Y | X | | | | | | n_y |
|-------|-----|----|----|----|----|----|-----------|
| | 13 | 23 | 33 | 43 | 53 | 63 | |
| 10 | — | 10 | 5 | 15 | — | — | 30 |
| 30 | — | — | — | 20 | — | — | 20 |
| 50 | — | — | — | 7 | 23 | — | 30 |
| 70 | — | — | — | — | 6 | — | 6 |
| 90 | — | — | — | — | 4 | 10 | 14 |
| n_x | — | 10 | 5 | 42 | 33 | 10 | $n = 100$ |

139.

| Y | X | | | | | | n_y |
|-----|-----|----|----|----|----|----|-------|
| | 5 | 15 | 25 | 35 | 45 | 55 | |

| | | | | | | | |
|-------|---|---|---|----|----|---|----------|
| 10 | — | — | 2 | 3 | — | — | 5 |
| 15 | — | — | — | 7 | — | — | 7 |
| 20 | — | — | — | 6 | 8 | — | 14 |
| 25 | — | — | — | — | 14 | — | 14 |
| 30 | — | — | — | — | 6 | 4 | 10 |
| n_x | — | — | 2 | 16 | 28 | 4 | $n = 50$ |

140.

| Y | X | | | | | | |
|-------|-----|----|----|----|----|----|-----------|
| | 12 | 22 | 32 | 42 | 52 | 62 | n_y |
| 20 | 10 | 8 | 2 | — | — | — | 20 |
| 40 | — | 15 | 5 | 3 | — | — | 23 |
| 60 | — | — | 17 | 10 | — | — | 27 |
| 80 | — | — | — | 8 | 2 | — | 10 |
| 100 | — | — | — | — | 13 | 7 | 20 |
| n_x | 10 | 23 | 24 | 21 | 15 | 7 | $n = 100$ |

3 МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Задача 1. Із 25 білетів виграшними виявились 19 білетів. Визначити ймовірність витягання:

- одного білета (виграшного, невиграшного);
- трьох білетів (виграшних, невиграшних);
- трьох білетів, серед яких два виграшні.

Знайти ймовірність того, що серед витягнутих трьох білетів є:

- хоча б один виграшний;
- тільки один виграшний.

Розв'язання. Розглянемо дослід: витягання одного білета. В цьому досліді можливі тільки дві події:

A – витягання виграшного білета;

\bar{A} – витягання невиграшного білета.

Загальне число результатів дослідів дорівнює 25; події A сприяє 19 результатів; події \bar{A} – 6 результатів. Використовуючи формулу класичної ймовірності для безпосереднього підрахунку ймовірності події, отримуємо:

$$P(A) = \frac{19}{25}, \quad P(\bar{A}) = \frac{6}{25}.$$

Розглянемо дослід: витягання трьох білетів. Нехай подія A_i ($i = 1, 2, 3$) полягає в тому, що i -й витягнутий білет виграшний. Тоді подія \bar{A}_i ($i = 1, 2, 3$) полягає в тому, що i -й витягнутий білет невиграшний. Розглянемо більш складні події:

$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ – всі витягнуті білети виграшні;

$B = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$ – всі витягнуті білети невиграшні;

$C = A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ – серед трьох витягнутих білетів два виграшні;

$D = A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3$ – серед трьох витягнутих білетів один виграшний;

$E = D + C + A$ – серед трьох витягнутих білетів хоча б один виграшний.

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 A_2) = \\ = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17}{25 \cdot 24 \cdot 23} \approx 0,4213;$$

$$P(B) = P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{25 \cdot 24 \cdot 23} \approx 0,0087;$$

$$P(C) = P(A_1 A_2 \overline{A_3}) + P(A_1 \overline{A_2} A_3) + P(\overline{A_1} A_2 A_3) = \\ = \frac{19 \cdot 18 \cdot 6}{25 \cdot 24 \cdot 23} + \frac{19 \cdot 6 \cdot 17}{25 \cdot 24 \cdot 23} + \frac{6 \cdot 18 \cdot 17}{25 \cdot 24 \cdot 23} \approx 3 \cdot 0,1487 \approx 0,4461, \text{ так як}$$

події несумісні.

$$P(D) = P(A_1 \overline{A_2} A_3) + P(\overline{A_1} \overline{A_2} A_3) + P(\overline{A_1} A_2 \overline{A_3}) = \\ = \frac{19 \cdot 6 \cdot 5}{25 \cdot 24 \cdot 23} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 19}{25 \cdot 24 \cdot 23} + \frac{6 \cdot 19 \cdot 5}{25 \cdot 24 \cdot 23} \approx 3 \cdot 0,0413 \approx 0,1239,$$

$$P(E) = P(D) + P(C) + P(A) = 0,9913.$$

Ймовірність події E можливо знайти за формулою:

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}).$$

Так як подія \overline{E} позначає, що всі витягнуті білети невіграшні, то вона співпадає з подією B , ймовірність якої вже знайдена. Тоді

$$P(E) = 1 - P(B) = 1 - 0,0087 = 0,9913.$$

Ймовірності подій A, B, C можливо знайти іншими, більш простими способами. Число всіх можливих результатів події дорівнює C_{25}^3 ;

Число результатів події, сприятливих для появи події A , дорівнює C_{19}^3 ;

Число результатів події, сприятливих для появи події B , дорівнює C_6^3 ;

Число результатів події, сприятливих для появи події C , дорівнює $6 \cdot C_{19}^2$.

Отже,

$$P(A) = \frac{C_{19}^3}{C_{25}^3} \approx 0,4213;$$

$$P(B) = \frac{C_6^3}{C_{25}^3} \approx 0,0087;$$

$$P(C) = \frac{6 \cdot C_{19}^2}{C_{25}^3} \approx 0,4461.$$

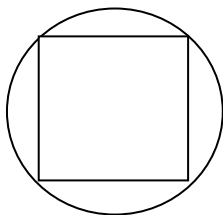


Рисунок 3.1

Задача 2. Знайти ймовірність того, що точка, яка вибрана з круга радіусом R , не належатиме квадрату. Квадрат вписаний в коло, що обмежує даний круг.

Розв'язання. Знайдемо площу круга: $S_1 = \pi R^2$ – це все множина можливих виходів. Площа квадрата дорівнює:

$$S_2 = a^2 = (R\sqrt{2})^2 = 2R^2$$

Точки круга, що не належать квадрату будуть лежати на площині:

$$S_3 = \pi R^2 - 2R^2.$$

Тоді ймовірність того, що точка, яка вибрана з круга радіусом R , не належатиме квадрату, вписаному в коло, яке обмежує круг буде дорівнювати:

$$P = \frac{S_3}{S_1} = \frac{\pi R^2 - 2R^2}{\pi R^2} = \frac{\pi - 2}{\pi}.$$

Задача 3. У магазин надходить продукція із трьох підприємств у кількості 20, 50, 30 виробів відповідно. Ймовірності виготовлення неякісного виробу для кожного підприємства відповідно дорівнюють 0,01; 0,04; 0,03. Навмання вибраний виріб виявився неякісним. Якому підприємству, ймовірніше всього, належить цей виріб?

Розв'язання. Подія A – вибрано неякісний виріб. Гіпотези H_1, H_2, H_3 – це вибір виробу із продукції відповідного підприємства. Ймовірності цих подій дорівнюють:

$$P(H_1) = \frac{20}{100} = 0,2; \quad P(H_2) = \frac{50}{100} = 0,5; \quad P(H_3) = \frac{30}{100} = 0,3.$$

Використовуючи формулу повної ймовірності знаходимо:

$$P(A) = 0,2 \cdot 0,01 + 0,5 \cdot 0,04 + 0,3 \cdot 0,03 = 0,031.$$

За формулами Байєса знаходимо умовні ймовірності гіпотез:

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{0,002}{0,031} = \frac{2}{31};$$

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}{P(A)} = \frac{0,02}{0,031} = \frac{20}{31};$$

$$P_A(H_3) = \frac{P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)}{P(A)} = \frac{0,03}{0,031} = \frac{30}{31}.$$

Оскільки $\max\left\{\frac{2}{31}; \frac{20}{31}; \frac{30}{31}\right\} = \frac{30}{31}$, то ймовірніше всього, що

вибраний неякісний виріб належить третьому підприємству.

Задача 4. Контрольна робота складається з 7 запитань, які містять відповіді «так» чи «ні». Знайти ймовірність того, що студент, який не підготувався до роботи, відповідь правильно:

- на 6 питань;
- не менше, ніж на 2, та не більше ніж на 5 питань.

Визначити найімовірнішу кількість правильних відповідей та її ймовірність.

Розв'язання. Схема Бернуллі в даній задачі представляє собою кількість запитань контрольної роботи ($n=7$), на кожне з яких студент, не підготувавшись до роботи, повинен відповісти «так» чи «ні». Подія A (успіх) полягає в правильній відповіді на запитання.

Ймовірність успіху: $P(A) = p = 0,5$.

Ймовірність невдачі: $P(\bar{A}) = q = 1 - p = 0,5$.

Ймовірність того, що студент, не підготувавшись до роботи, відповідь на 6 запитань з 7 правильно, знайдемо за наступною формулою Бернуллі:

$$P_7(6) = C_7^6 \cdot 0,5^6 \cdot 0,5 \approx 0,0547.$$

Ймовірність того, що студент, не підготувавшись до роботи, відповідь правильно не менше, ніж на 2, та не більше, ніж на 5 запитань:

$$P_7(2 \leq k \leq 5) = P_7(2) + P_7(3) + P_7(4) + P_7(5) \approx 0,875.$$

Більш ймовірне число правильних відповідей знаходиться між числами $np - q$ та $np + p$

$$\begin{aligned} np - q &\leq k_0 \leq np + p; \\ 7 \cdot 0,5 - 0,5 &\leq k_0 \leq 7 \cdot 0,5 + 0,5; \\ 3 &\leq k_0 \leq 4, \end{aligned}$$

так як k_0 приймає два значення (3 та 4) з однаковою ймовірністю

$$\begin{aligned} P_7(3) &= C_7^3 \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^4 \approx 0,2734, \\ P_7(4) &= C_7^4 \cdot 0,5^4 \cdot 0,5^3 \approx 0,2734. \end{aligned}$$

Задача 5. Ймовірність присутності студента на лекції дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що із 100 студентів на лекції буде:

- 75 студентів;
- не менше 90 студентів.

Розв'язання. Знайдемо ймовірність того, що із 100 на лекції буде 75 студентів. За умовою $n=100$, $p=0,8$, $q=0,2$, $k=75$. Використовуємо локальну теорему Лапласа:

$$P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \text{ де } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

$$\text{Знайдемо значення } x: x = \frac{75 - 80}{\sqrt{1000,8 \cdot 0,2}} = \frac{-5}{4} = -1,25.$$

За таблицею значень функції $\varphi(x)$ знаходимо $\varphi(1,25) = 0,1825$.

Оскільки $\varphi(-x) = \varphi(x)$, то $\varphi(-1,25) = 0,1825$.

Шукана ймовірність:

$$P_{100}(75) \approx \frac{0,1825}{4} \approx 0,046;$$

Знайдемо ймовірність того, що із 100 на лекції буде не менше 90 студентів. Використовуємо інтегральну теорему Лапласа:

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

$$\text{де } x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}.$$

За умовою $k_1 = 90$, $k_2 = 100$. Знаходимо x' і x'' :

$$x' = \frac{90-80}{4} = \frac{10}{4} = 2,5; \quad x'' = \frac{100-80}{4} = \frac{20}{4} = 5.$$

За таблицею значень функції Лапласа $\Phi(x)$ знаходимо $\Phi(2,5) = 0,4938$, $\Phi(5) = 0,5$. Шукана ймовірність:

$$P_{100}(90;100) \approx 0,5 - 0,4938 \approx 0,0062.$$

Задача 6. Із статистичних даних визначено, що ймовірність захворіти грипом під час епідемії для кожної особи складає 0,01. Яка ймовірність того, що із 800 перевірених осіб хворими виявляться:

- рівно чотири особи;
- менше чотирьох осіб;
- більше чотирьох осіб;
- хоча б одна особа.

Знайти найімовірніше число хворих та його ймовірність.

Розв'язання. Ймовірність настання події $p = 0,01$ достатньо невелика, а число дослідів $n = 800$ велике. Таким чином при розв'язанні задачі необхідно скористатися наближеною формулою Пуассона.

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

де $\lambda = n \cdot p$

Значення функції $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ знайдемо за таблицею (додаток А)

За умовою, $n = 800$, $m = 4$, $p = 0,01$, тому $\lambda = 8$

$$1. P_{100}(4) = \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right)_{\substack{\lambda=8 \\ k=4}} \approx 0,0572;$$

$$2. P_{100}(< 4) = P_{100}(0) + P_{100}(1) + P_{100}(2) + P_{100}(3) \approx 0,0003 + 0,0027 + 0,0107 + 0,0286 \approx 0,0423;$$

$$3. P_{100}(> 4) = 1 - P_{100}(\leq 4) = 1 - [P_{100}(< 4) + P_{100}(4)] = 1 - (0,0423 + 0,0572) = 1 - 0,0995 = 0,9005;$$

$$4. P_{100}(\geq 1) = 1 - P_{100}(0) \approx 1 - 0,0003 = 0,9997.$$

Знайдемо наймовірніше число хворих:

$$800 \cdot 0,01 - 0,99 \leq k_0 \leq 800 \cdot 0,01 + 0,01;$$

$$7,01 \leq k_0 \leq 8,01;$$

$$k_0 = 8.$$

$$P_{100}(8) = \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right)_{\substack{\lambda=8 \\ k=8}} \approx 0,14;$$

Задача 7. Знайти: математичне сподівання; дисперсію; середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X по даному закону її розподілу:

| | | | | |
|-------|-----|-----|-----|-----|
| x_i | 26 | 28 | 30 | 32 |
| p_i | 0.1 | 0.2 | 0.4 | 0.3 |

Розв'язання. Знайдемо математичне сподівання:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i = 26 \cdot 0,1 + 28 \cdot 0,2 + 30 \cdot 0,4 + 32 \cdot 0,3 = 29,8$$

Знайдемо дисперсію:

$$\begin{aligned} D(X) &= \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 \cdot p_i = (26 - 29,8)^2 \cdot 0,1 + (28 - 29,8)^2 \cdot 0,2 + \\ &+ (30 - 29,8)^2 \cdot 0,4 + (32 - 29,8)^2 \cdot 0,3 = (-3,8)^2 \cdot 0,1 + (-1,8)^2 \cdot 0,2 + \\ &+ (0,2)^2 \cdot 0,4 + 2,22^2 \cdot 0,3 = 3,56 \end{aligned}$$

Знайдемо дисперсію за другою формулою:

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i = 26^2 \cdot 0,1 + 28^2 \cdot 0,2 + 30^2 \cdot 0,4 + 32^2 \cdot 0,3 = 891,6$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 891,6 - 29,8^2 = 891,6 - 888,04 = 3,56$$

Знайдемо середньоквадратичне (стандартне) відхилення:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{3,56} = 1,89.$$

Задача 8. Випадкова величина X задана інтегральною функцією $F(X)$. Знайти: диференціальну функцію розподілу; математичне сподівання і дисперсію. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функцій розподілу ймовірностей випадкової величини X .

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x^2}{25}, & 0 < x < 5; \\ 1, & x \geq 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо диференціальну функцію розподілу $f(x)$:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{2}{25}x, & 0 \leq x \leq 5; \\ 0, & x > 5. \end{cases}$$

Будуємо графіки інтегральної та диференціальної функцій:

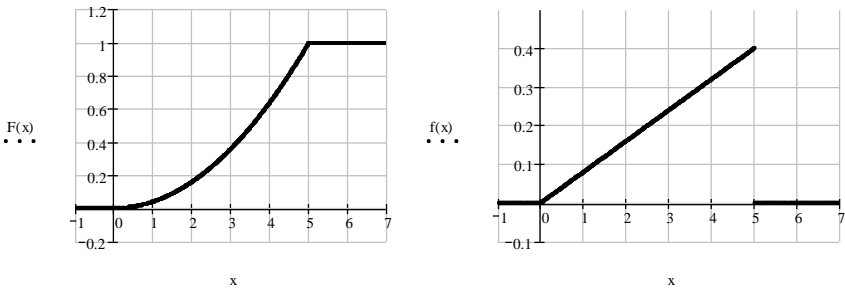


Рисунок 3.2

За формулою $M(X) = \int_a^b xf(x)dx$ знаходимо математичне сподівання:

$$M(X) = \int_0^5 x \cdot \frac{2x}{25} dx = \frac{2}{25} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^5 = \frac{10}{3}.$$

Дисперсію знаходимо за формулою $D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - M^2(X)$,

тобто

$$D(X) = \int_0^5 x^2 \cdot \frac{2x}{25} dx - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{2}{25} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^5 - \frac{100}{9} = \frac{25}{18}.$$

Середнє квадратичне відхилення дорівнює:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{25}{18}} = \frac{5}{3\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{6} \approx 1,17.$$

Задача 9. Випадкове відхилення розміру деталі від номіналу розподілене за нормальним законом з математичним сподіванням $a = 2$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 10$. Придатними вважаються деталі, для яких відхилення від номіналу за абсолютною величиною менше 14,4. Знайти: ймовірність того, що при виборі навмання чотирьох деталей відхилення кожної з них попаде у проміжок $[-1,8; 8,7]$; скільки всього буде придатних деталей серед 100 виготовлених.

Розв'язання. 1) Розглянемо подію A – потрапляння відхилення від номіналу однієї деталі в $[-1,8; 8,7]$, знайдемо її ймовірність використавши формулу:

$$\begin{aligned} P(\alpha \leq X \leq \beta) &= \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) \\ P(A) &= P(-1,8 \leq X \leq 8,7) = \Phi\left(\frac{8,7 - 2}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-1,8 - 2}{10}\right) = \\ &= \Phi(0,67) + \Phi(0,38) = 0,24857 + 0,14803 = 0,3966 \end{aligned}$$

Так як відхилення від номіналу розміру різних деталей незалежні, то ймовірність того, що при виборі навмання чотирьох деталей відхилення кожної з них потрапляє в $[-1,8; 8,7]$ і дорівнює:

$$(0,3966)^4 = 0,0247406$$

2) Розглянемо подію B – деталь придатна до використання та знайдемо її ймовірність за допомогою формули:

$$\begin{aligned} P(|X - a| \leq \varepsilon) &= 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \\ P(|X - 2| \leq 14,4) &= 2\Phi\left(\frac{14,4}{10}\right) = 2\Phi(1,44) = 2 \cdot 0,4251 \approx 0,85. \end{aligned}$$

Таким чином ймовірність відхилення меншого 14,4 дорівнює 0,85. Звідси випливає, що приблизно 85 деталей зі ста будуть придатними до використання.

Задача 10. Протягом дня магазином продане чоловіче взуття наступних розмірів: 39, 40, 41, 40, 43, 41, 44, 42, 40, 42, 41, 41, 43, 42, 39, 42, 43, 41, 42, 41, 38, 42, 42, 41, 40, 41, 43, 39, 40, 41;

- скласти таблицю статистичного розподілу розміру X проданого чоловічого взуття та побудувати полігон частот;

- обчислити вибірку середню \bar{x}_g та вибірку дисперсію D_g заданої вибірки;

- обчислити виправлене середньоквадратичне відхилення S ;

- побудувати графік емпіричної функції розподілу $F^*(x)$.

Розв'язання. Складемо таблицю статистичного розподілу розміру X проданого чоловічого взуття. Підрахувавши кількість взуття кожного розміру в даній виборці отримаємо наступний розподіл частот вибірки:

| | | | | | | | |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|
| x_i | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 |
| n_i | 1 | 3 | 5 | 9 | 7 | 4 | 1 |

Знайдемо об'єм вибірки, додавши всі варіанти:

$$n = 1 + 3 + 5 + 9 + 7 + 4 + 1 = 30.$$

Знайдемо відносні частоти, для чого розділимо частоти на об'єм вибірки:

$$w_i = \frac{n_i}{n}.$$

Таким чином таблиця розподілу дискретного ряду буде мати вигляд:

| | | | | | | | |
|-------|----------------|----------------|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| x_i | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 |
| n_i | 1 | 3 | 5 | 9 | 7 | 4 | 1 |
| w_i | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{7}{30}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{1}{30}$ |

Контроль:

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{10} + \frac{1}{6} + \frac{3}{10} + \frac{7}{30} + \frac{2}{15} + \frac{1}{30} = \frac{1+3+5+9+7+4+1}{30} = 1$$

А полігон частот:

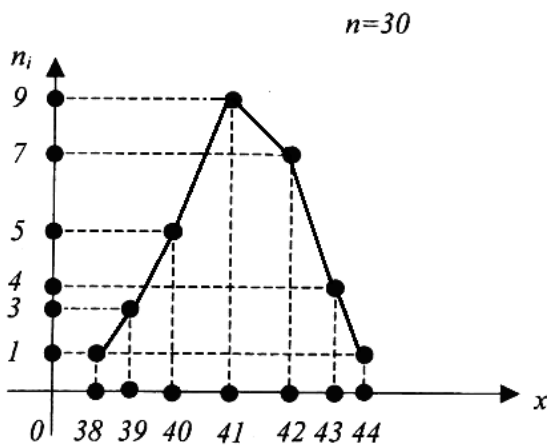


Рисунок 3.3

За формулою $\bar{x}_e = \frac{\left(\sum_{i=1}^k n_i x_i \right)}{n}$ маємо вибірове середнє:

$$\bar{x}_e = \frac{1 \cdot 38 + 3 \cdot 39 + 5 \cdot 40 + 9 \cdot 41 + 7 \cdot 42 + 4 \cdot 43 + 1 \cdot 44}{30} \approx 41,1$$

За формулою $D_e = \bar{x}^2 - [\bar{x}]^2 = \frac{\sum n_i x_i^2}{n} - \left[\frac{\sum n_i x_i}{n} \right]^2$ знайдемо

вибірову дисперсію:

$$D_e = \frac{1 \cdot 38^2 + 3 \cdot 39^2 + 5 \cdot 40^2 + 9 \cdot 41^2 + 7 \cdot 42^2 + 4 \cdot 43^2 + 1 \cdot 44^2}{30} - (41,1)^2 \approx 1,92.$$

За формулою $s_x^2 = \frac{\sum n_i x_i^2 - [\sum n_i x_i]^2 / n}{n - 1}$ знайдемо виправлену дисперсію:

$$\begin{aligned}
 s_x^2 &= \frac{1 \cdot 38^2 + 3 \cdot 39^2 + 5 \cdot 40^2 + 9 \cdot 41^2 + 7 \cdot 42^2 + 4 \cdot 43^2 + 1 \cdot 44^2}{29} - \\
 &\quad - \frac{[1 \cdot 38 + 3 \cdot 39 + 5 \cdot 40 + 9 \cdot 41 + 7 \cdot 42 + 4 \cdot 43 + 1 \cdot 44]^2 / 30}{29} = \\
 &= \frac{50816 - 50758,5}{29} \approx 1,98
 \end{aligned}$$

Таким чином середнє квадратичне відхилення:

$$S = \sqrt{s_x^2} \approx 1,41$$

Побудуємо графік емпіричної функції розподілу $F^*(x)$.
Найменша варіанта $X = 38$, отже $F^*(x) = 0$ при $x \leq 38$.

Значення $X < 39$ спостерігається 1 раз.

$$\text{Отже, } F^*(x) = \frac{1}{30} \text{ при } 38 < x \leq 39.$$

$X < 40$ спостерігається $1 + 3 = 4$ рази.

$$F^*(x) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15} \text{ при } 39 < x \leq 40.$$

$X < 41$ спостерігається $1 + 3 + 5 = 9$ разів.

$$F^*(x) = \frac{9}{30} = \frac{3}{10} \text{ при } 40 < x \leq 41.$$

$X < 42$ спостерігається $1 + 3 + 5 + 9 = 18$ разів.

$$F^*(x) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} \text{ при } 41 < x \leq 42.$$

$X < 43$ спостерігається $1 + 3 + 5 + 9 + 7 = 25$ разів.

$$F^*(x) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6} \text{ при } 42 < x \leq 43.$$

$X < 44$ спостерігається $1 + 3 + 5 + 9 + 7 + 4 = 29$ разів.

$$F^*(x) = \frac{29}{30} \text{ при } 43 < x \leq 44.$$

Оскільки $X = 44$ найбільша варіанта, то $F^*(x) = 1$ при $x > 44$.

Таким чином емпірична функція має вигляд:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 38, \\ \frac{1}{30} & \text{при } 38 < x \leq 39, \\ \frac{2}{15} & \text{при } 39 < x \leq 40, \\ \frac{3}{10} & \text{при } 40 < x \leq 41, \\ \frac{3}{5} & \text{при } 41 < x \leq 42, \\ \frac{5}{6} & \text{при } 42 < x \leq 43, \\ \frac{29}{30} & \text{при } 43 < x \leq 44, \\ 1 & \text{при } x > 44 \end{cases}$$

Графік цієї функції має вигляд (рис. 3.4):

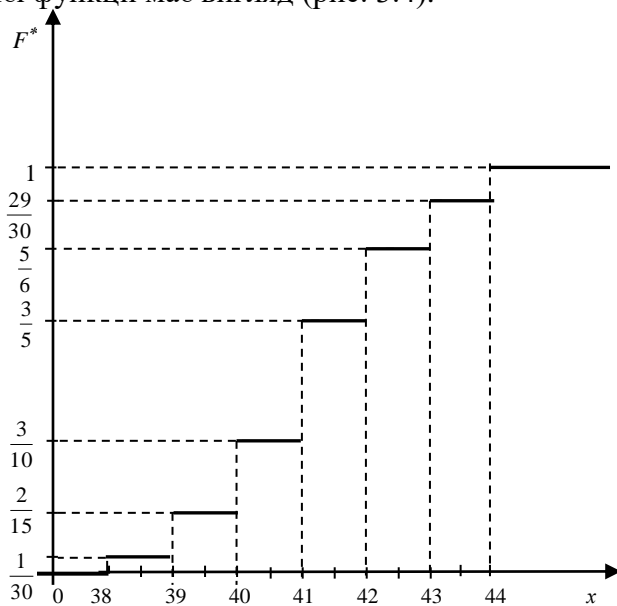


Рисунок 3.4

Зауваження. Якщо первинні варіанти є десятковими дробами з k десятковими знаками після коми, то щоб уникнути дій з дробами, множать первинні варіанти на постійне число $C = 10^k$, тобто переходять до умовних варіантів

$$u_i = Cx_i$$

При цьому дисперсія збільшиться в C^2 разів. Тому, знайшовши дисперсію умовних варіантів, треба розділити її на C^2 .

Задача 11. Знайти вибіркове середнє, вибіркиму дисперсію, вибіркиму та виправлене середнє квадратичне відхилення за даним розподілом вибірки об'єму $n = 20$:

| | | | | |
|-------|-----|-----|-----|-----|
| x_i | 0,1 | 0,5 | 0,7 | 0,9 |
| n_i | 6 | 12 | 1 | 1 |

Розв'язання. Враховуючи, що $u_i = 10x_i$ маємо вибіркове середнє:

$$\bar{x}_e = \frac{\left(\sum_{i=1}^k n_i u_i \right)}{10n} = \frac{1 \cdot 6 + 5 \cdot 12 + 7 \cdot 1 + 9 \cdot 1}{200} = 0,41$$

Аналогічно знайдемо вибіркиму дисперсію:

$$\begin{aligned} D_e(x) &= \frac{\bar{u}^2 - [\bar{u}]^2}{100} = \left(\frac{\sum n_i u_i^2}{n} - \left[\frac{\sum n_i u_i}{n} \right]^2 \right) / 100 = \\ &= \left(\frac{6 \cdot 1 + 12 \cdot 25 + 1 \cdot 49 + 1 \cdot 81}{20} - (4,1)^2 \right) / 100 = 0,0499 \end{aligned}$$

Вибіркове середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_e(X) = \sqrt{D_e(X)} = \sqrt{0,0499} \approx 0,2234$$

Знайдемо виправлену дисперсію:

$$\begin{aligned} s_x^2 &= \frac{s_u^2}{100} = \frac{\sum n_i u_i^2 - [\sum n_i u_i]^2 / n}{100(n-1)} = \\ &= \frac{(6 \cdot 1 + 12 \cdot 25 + 1 \cdot 49 + 1 \cdot 81) - (6 \cdot 1 + 12 \cdot 5 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 9)^2 / 20}{100 \cdot 19} = 0,05253 \end{aligned}$$

Виправлене середнє квадратичне відхилення:

$$S = \sqrt{S_x^2} \approx 0.2292$$

Задача 12. Дослідження часу безвідмовної роботи 50 лазерних принтерів ($n=50$). З апіорних досліджень відомо, що середнє квадратичне відхилення часу безвідмовної роботи $\sigma=16$ годин. За результатами досліджень отримано середній час безвідмовної роботи $\bar{X}=1000$ годин. Побудуйте 95 % надійний інтервал ($\gamma=0,95$) для середнього часу безвідмовної роботи.

Розв'язання. $2\Phi(u)=0,95$. Звідки $\Phi(u)=\frac{0,95}{2}=0,475$. За таблицею функції Лапласа знаходимо значення $u=1,95$. Далі знаходимо точність оцінки: $\varepsilon = \frac{u \cdot \sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot 16}{\sqrt{50}} = 4,43$. Знаходимо границі інтервалу:

$$\bar{X} - \varepsilon = 1000 - 4,43 = 995,57; \quad \bar{X} + \varepsilon = 1000 + 4,43 = 1004,43 .$$

Одержимо надійний інтервал: $(995,57; 1004,43)$.

Задача 13. За даними двох незалежних вибірок об'єму $n_1=10$ та $n_2=15$ із нормальних сукупностей X та Y знайдені виправлені вибіркові дисперсії $S_1^2=15,42$ та $S_2^2=11,36$. При рівні значущості $\alpha=0,05$ перевірити гіпотезу $H_0: D(X)=D(Y)$ при альтернативній $H_1: D(X)>D(Y)$.

Розв'язання. Знайдемо відношення більшої виправленої дисперсії до меншої:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{15,42}{11,36} = 1,36 .$$

По таблиці розподілу Фішера, за рівнем значущості $\alpha=0,05$ і числам ступенів вільності $k_1=n_1-1=10-1=9$ і $k_2=n_2-1=15-1=14$ знаходимо критичну точку $F_{\text{крит}} = F_{\text{крит}}(0,05; 9; 14) = 2,65$.

Враховуючи, що $F < F_{крит}$, робимо висновок, що немає підстав відкинути нульову гіпотезу про рівність генеральних дисперсій.

Задача 14. За допомогою критерію Пірсона з рівнем значущості $\alpha = 0,01$ перевірити гіпотезу, що сукупність Y має нормальний розподіл з параметрами рівними їх оцінкам $a = \bar{Y}$ та $\sigma^2 = D$:

| | | | | | | | |
|-------|---|----|----|----|----|---|---|
| Y_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| n_i | 4 | 22 | 30 | 22 | 17 | 4 | 1 |

Розв'язання.

1. За формулою $\bar{y}_g = \frac{\left(\sum_{i=1}^k n_i y_i \right)}{n}$ маємо вибіркове середнє:

$$\bar{y}_g = \frac{0 \cdot 4 + 1 \cdot 22 + 2 \cdot 30 + 3 \cdot 22 + 4 \cdot 17 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 1}{100} \approx 2,42.$$

За формулою $D_g = \bar{y}^2 - [\bar{y}]^2 = \frac{\sum n_i y_i^2}{n} - \left[\frac{\sum n_i y_i}{n} \right]^2$ знайдемо

вибірккову дисперсію:

$$D_g = \frac{0^2 \cdot 4 + 1^2 \cdot 22 + 2^2 \cdot 30 + 3^2 \cdot 22 + 4^2 \cdot 17 + 5^2 \cdot 4 + 6^2 \cdot 1}{100} - (2,42)^2 \approx 1,62.$$

$$\sigma_g = \sqrt{D_g} = 1,27$$

2. Обчислюємо теоретичні частоти, враховуючи, що $n = 100$, $h = 1$, $\sigma_g = 1,27$.

$$n_i = \frac{nh}{\sigma_g} \cdot \phi(u_i) = \frac{100}{1,27} \cdot \phi(u_i) = 78,7 \cdot \phi(u_i)$$

| i | y_i | $u_i = \frac{y_i - \bar{y}_g}{\sigma_g}$ | $\phi(u_i)$ | $n'_i = 78,7 \cdot \phi(u_i)$ |
|-----|-------|--|-------------|-------------------------------|
| 1 | 0 | -1,91 | 0,0644 | 5,1 |
| 2 | 1 | -1,12 | 0,2131 | 16,8 |
| 3 | 2 | -0,33 | 0,3778 | 29,7 |
| 4 | 3 | 0,46 | 0,3589 | 28,2 |
| 5 | 4 | 1,24 | 0,1849 | 14,6 |

| | | | | |
|---|---|------|--------|-----|
| 6 | 5 | 2,03 | 0,0508 | 4,0 |
| 7 | 6 | 2,82 | 0.0075 | 0,6 |

3. Порівняємо емпіричні та теоретичні частоти.

а) Складемо розрахункову таблицю, згідно якої знайдемо значення критерію, що спостерігається.

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$$

| i | n_i | n'_i | $(n_i - n'_i)$ | $(n_i - n'_i)^2$ | $\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$ |
|-----|-------|--------|----------------|------------------|-------------------------------|
| 1 | 26 | 21,9 | 4,1 | 16,81 | 0,768 |
| 2 | 30 | 29,7 | 0,3 | 0,09 | 0,003 |
| 3 | 22 | 28,2 | -6,2 | 38,44 | 1,363 |
| 4 | 17 | 14,6 | 2,4 | 5,76 | 0,395 |
| 5 | 5 | 4,6 | 0,4 | 0,16 | 0,035 |
| | | | | | $\chi^2_{\text{набл}} = 2,6$ |

Зауваження. Малочислені частоти ($n_i < 5$) потрібно об'єднати; в цьому випадку і відповідні їм теоретичні частоти також треба скласти. Якщо проводилося об'єднання частот, то при визначенні числа степенів свободи по формулі $k = s - 3$ потрібно в якості s прийняти число груп вибірки, що залишилися після об'єднання частот.

Згідно зауваження останні 2 частоти було об'єднано в одну.

б) За таблиці критичних точок розподілу χ^2 (додаток А), по рівню значущості $\alpha = 0,01$ і числу степенів свободи

$k = s - 3 = 5 - 3 = 2$ знаходимо критичну точку правосторонньої критичної області

$\chi^2_{\text{крит}}(0,01; 2) = 9,2$ Так як $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{крит}}$, то нема підстав відкидати гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Задача 15. Знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X за даними кореляційної таблиці; перевірити значущість параметрів і тісноту кореляційного зв'язку.

| Y | X | | | | | |
|-------|------|------|------|------|------|----------|
| | -1,1 | -1,0 | -0,9 | -0,8 | -0,7 | n_y |
| 2,1 | — | — | 2 | 21 | 1 | 24 |
| 2,2 | 2 | 4 | 12 | 14 | — | 32 |
| 2,3 | — | 2 | 3 | — | — | 5 |
| 2,4 | 10 | 9 | — | — | — | 19 |
| n_x | 12 | 15 | 17 | 35 | 1 | $n = 80$ |

Розв'язання. Знайдемо середні значення величин X і Y :

$$\bar{X} = \frac{\sum x \cdot m_x}{n} = \frac{-1,1 \cdot 12 - 1,0 \cdot 15 - 0,9 \cdot 17 - 0,8 \cdot 35 - 0,7 \cdot 1}{80} =$$

$$= \frac{-72,2}{80} = -0,9025;$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum y \cdot m_y}{n} = \frac{2,1 \cdot 24 + 2,2 \cdot 32 + 2,3 \cdot 5 + 2,4 \cdot 19}{80} = \frac{177,9}{80} = 2,22375.$$

Знайдемо середні квадратичні відхилення величин X і Y :

$$\begin{aligned} \overline{X^2} &= \frac{\sum x^2 \cdot m_x}{n} = \\ &= \frac{(-1,1)^2 \cdot 12 + (-1,0)^2 \cdot 15 + (-0,9)^2 \cdot 17 + (-0,8)^2 \cdot 35 + (-0,7)^2 \cdot 1}{80} = \end{aligned}$$

$$= \frac{66,18}{80} = 0,82725$$

$$\overline{X^2} - \bar{X}^2 = 0,82725 - (-0,9025)^2 = 0,012744$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{0,012744} = 0,112888$$

$$\bar{Y^2} = \frac{\sum y^2 \cdot m_y}{n} = \frac{2,1^2 \cdot 24 + 2,2^2 \cdot 32 + 2,3^2 \cdot 5 + 2,4^2 \cdot 19}{80} = \frac{396,61}{80} = 4,957625$$

$$D_y = \bar{Y^2} - \bar{Y}^2 = 4,957625 - 2,22375^2 = 0,012561$$

$$\sigma_y = \sqrt{D_y} = \sqrt{0,012561} = 0,112076$$

Знайдемо кореляцію між величинами X і Y :

$$\begin{aligned}\overline{X \cdot Y} &= \frac{\sum x \cdot y \cdot m_{xy}}{n} = \frac{1}{80} \cdot (-1,1 \cdot (2,2 \cdot 2 + 2,4 \cdot 10) - \\ &- 1,0 \cdot (2,2 \cdot 4 + 2,3 \cdot 2 + 2,4 \cdot 9) - 0,9 \cdot (2,1 \cdot 2 + 2,2 \cdot 12 + 2,3 \cdot 3) - \\ &- 0,8 \cdot (2,1 \cdot 21 + 2,2 \cdot 14) - 0,7 \cdot 2,1 \cdot 1) = \frac{-161,38}{80} = -2,01725\end{aligned}$$

$$K(X, Y) = \overline{X \cdot Y} - \overline{X} \cdot \overline{Y} = -2,01725 - (-0,9025) \cdot 2,22375 = -0,0103156$$

Знайдемо коефіцієнт кореляції між величинами X і Y :

$$r = \frac{K(X, Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{-0,0103156}{0,112888 \cdot 0,112076} = -0,815335$$

Знайдемо параметри лінійного рівняння $y = ax + b$ регресії Y на X .

Коефіцієнт регресії:

$$a = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = -0,815335 \cdot \frac{0,112076}{0,112888} = -0,8095$$

Вільний член регресії:

$$b = \overline{Y} - a \cdot \overline{X} = 2,22375 - (-0,8095) \cdot (-0,9025) = 1,4932$$

Одержимо рівняння регресії у вигляді: $y = -0,8095 \cdot x + 1,4932$

Побудуємо графік лінії регресії та експериментальних точок вибірки:

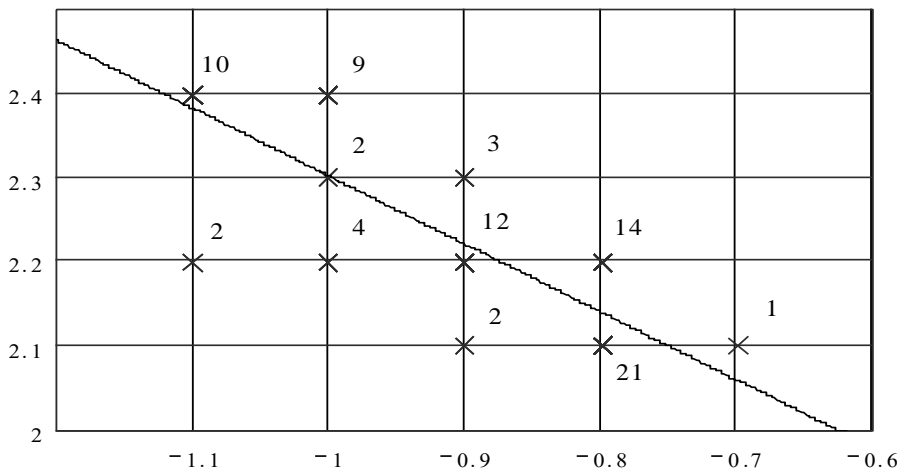


Рисунок 3.5

ТАБЛИЦЯ ВИБОРУ ВАРІАНТУ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

| В А | | Остання цифра залікової книжки студента | | | | | | | | | |
|-------------------------------------|---|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Передостання цифра залікової книжки | 0 | 6 | 4 | 3 | 9 | 1 | 10 | 2 | 8 | 7 | 5 |
| | | 16 | 17 | 14 | 13 | 20 | 12 | 18 | 19 | 15 | 11 |
| | | 24 | 23 | 29 | 28 | 30 | 22 | 21 | 27 | 26 | 25 |
| | | 35 | 39 | 36 | 31 | 33 | 32 | 38 | 34 | 37 | 40 |
| | | 46 | 50 | 45 | 41 | 43 | 49 | 42 | 48 | 47 | 44 |
| | | 51 | 56 | 57 | 54 | 55 | 53 | 60 | 52 | 58 | 59 |
| | | 66 | 64 | 63 | 69 | 61 | 70 | 62 | 68 | 67 | 65 |
| | | 74 | 72 | 79 | 78 | 80 | 73 | 71 | 77 | 76 | 75 |
| | | 85 | 89 | 86 | 81 | 83 | 82 | 88 | 84 | 87 | 90 |
| | | 96 | 100 | 95 | 91 | 93 | 99 | 92 | 98 | 97 | 94 |
| | | 102 | 108 | 106 | 103 | 101 | 109 | 107 | 104 | 110 | 105 |
| | | 111 | 116 | 112 | 117 | 113 | 118 | 114 | 119 | 115 | 120 |
| | | 123 | 124 | 127 | 122 | 125 | 128 | 129 | 126 | 130 | 121 |
| | | 138 | 140 | 131 | 132 | 133 | 134 | 135 | 136 | 137 | 139 |
| | 1 | 4 | 1 | 9 | 7 | 5 | 8 | 6 | 10 | 3 | 2 |
| | | 20 | 12 | 19 | 17 | 16 | 14 | 18 | 13 | 15 | 11 |
| | | 27 | 21 | 25 | 23 | 22 | 30 | 24 | 26 | 29 | 28 |
| | | 33 | 37 | 31 | 34 | 40 | 38 | 35 | 32 | 39 | 36 |
| | | 43 | 45 | 41 | 47 | 50 | 46 | 48 | 44 | 49 | 42 |
| | | 54 | 56 | 55 | 59 | 58 | 57 | 60 | 52 | 51 | 53 |
| | | 63 | 62 | 69 | 67 | 66 | 64 | 68 | 70 | 65 | 61 |
| | | 77 | 71 | 75 | 73 | 72 | 80 | 74 | 76 | 79 | 78 |
| | | 83 | 87 | 81 | 84 | 90 | 88 | 85 | 82 | 89 | 86 |
| | | 93 | 95 | 91 | 97 | 100 | 96 | 98 | 94 | 99 | 92 |
| | | 102 | 108 | 106 | 103 | 101 | 109 | 107 | 104 | 110 | 105 |
| | | 111 | 116 | 112 | 117 | 113 | 118 | 114 | 119 | 115 | 120 |
| | | 123 | 124 | 127 | 122 | 125 | 128 | 129 | 126 | 130 | 121 |
| | | 138 | 140 | 131 | 132 | 133 | 134 | 135 | 136 | 137 | 139 |

Продовження таблиці

| В А | | Остання цифра залікової книжки студента | | | | | | | | | |
|-------------------------------------|---|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Передостання цифра залікової книжки | 2 | 5 | 2 | 9 | 4 | 1 | 6 | 7 | 8 | 3 | 10 |
| | | 16 | 19 | 12 | 17 | 20 | 15 | 14 | 13 | 18 | 11 |
| | | 26 | 29 | 22 | 27 | 30 | 25 | 24 | 23 | 28 | 21 |
| | | 38 | 32 | 39 | 34 | 31 | 37 | 36 | 35 | 33 | 40 |
| | | 45 | 43 | 44 | 47 | 49 | 46 | 42 | 48 | 41 | 50 |
| | | 60 | 57 | 56 | 54 | 51 | 52 | 53 | 55 | 58 | 59 |
| | | 66 | 69 | 62 | 67 | 70 | 65 | 64 | 63 | 68 | 61 |
| | | 76 | 79 | 72 | 77 | 80 | 75 | 74 | 73 | 78 | 71 |
| | | 90 | 82 | 89 | 84 | 81 | 87 | 86 | 85 | 83 | 88 |
| | | 95 | 93 | 94 | 97 | 99 | 98 | 92 | 96 | 91 | 100 |
| | | 102 | 108 | 106 | 103 | 101 | 109 | 107 | 104 | 110 | 105 |
| | | 111 | 116 | 112 | 117 | 113 | 118 | 114 | 119 | 115 | 120 |
| | | 123 | 124 | 127 | 122 | 125 | 128 | 129 | 126 | 130 | 121 |
| | | 138 | 140 | 131 | 132 | 133 | 134 | 135 | 136 | 137 | 139 |
| | 3 | 5 | 4 | 7 | 3 | 9 | 6 | 2 | 10 | 1 | 8 |
| | | 16 | 15 | 20 | 14 | 19 | 17 | 11 | 18 | 12 | 13 |
| | | 26 | 25 | 28 | 24 | 30 | 27 | 22 | 29 | 23 | 21 |
| | | 31 | 32 | 36 | 33 | 39 | 35 | 38 | 40 | 34 | 37 |
| | | 45 | 50 | 46 | 41 | 43 | 48 | 47 | 44 | 42 | 49 |
| | | 54 | 56 | 55 | 60 | 57 | 53 | 52 | 58 | 59 | 51 |
| | | 66 | 65 | 70 | 64 | 69 | 67 | 61 | 68 | 62 | 63 |
| | | 76 | 75 | 78 | 74 | 80 | 77 | 72 | 79 | 73 | 71 |
| | | 81 | 82 | 86 | 83 | 89 | 85 | 88 | 90 | 84 | 87 |
| | | 95 | 100 | 96 | 91 | 93 | 98 | 97 | 94 | 92 | 99 |
| | | 102 | 108 | 106 | 103 | 101 | 109 | 107 | 104 | 110 | 105 |
| | | 111 | 116 | 112 | 117 | 113 | 118 | 114 | 119 | 115 | 120 |
| | | 123 | 124 | 127 | 122 | 125 | 128 | 129 | 126 | 130 | 121 |
| | | 138 | 140 | 131 | 132 | 133 | 134 | 135 | 136 | 137 | 139 |

| A | B | Остання цифра залікової книжки студента | | | | | | | | | |
|-------------------------------------|---|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Передостання цифра залікової книжки | 4 | 6 | 5 | 2 | 10 | 1 | 4 | 3 | 8 | 9 | 7 |
| | | 14 | 20 | 13 | 17 | 15 | 12 | 16 | 18 | 11 | 19 |
| | | 27 | 25 | 28 | 24 | 29 | 23 | 26 | 22 | 30 | 21 |
| | | 34 | 33 | 37 | 32 | 38 | 35 | 40 | 36 | 39 | 31 |
| | | 47 | 50 | 46 | 41 | 45 | 42 | 44 | 48 | 43 | 49 |
| | | 51 | 59 | 54 | 58 | 53 | 55 | 52 | 57 | 56 | 60 |
| | | 64 | 70 | 63 | 67 | 65 | 62 | 66 | 68 | 61 | 69 |
| | | 77 | 75 | 78 | 74 | 79 | 73 | 76 | 72 | 80 | 71 |
| | | 84 | 83 | 87 | 82 | 88 | 85 | 90 | 86 | 89 | 81 |
| | | 97 | 100 | 98 | 91 | 95 | 92 | 94 | 96 | 93 | 99 |
| | | 102 | 108 | 106 | 103 | 101 | 109 | 107 | 104 | 110 | 105 |
| | | 111 | 116 | 112 | 117 | 113 | 118 | 114 | 119 | 115 | 120 |
| | | 123 | 124 | 127 | 122 | 125 | 128 | 129 | 126 | 130 | 121 |
| | | 138 | 140 | 131 | 132 | 133 | 134 | 135 | 136 | 137 | 139 |
| | 5 | 10 | 9 | 8 | 7 | 1 | 5 | 4 | 3 | 2 | 6 |
| | | 12 | 18 | 19 | 17 | 11 | 15 | 14 | 13 | 20 | 16 |
| | | 21 | 22 | 23 | 25 | 30 | 26 | 27 | 28 | 29 | 24 |
| | | 37 | 38 | 36 | 35 | 39 | 33 | 32 | 31 | 40 | 34 |
| | | 48 | 41 | 46 | 45 | 44 | 49 | 43 | 50 | 47 | 42 |
| | | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 60 | 58 | 59 | 52 | 51 |
| | | 62 | 68 | 69 | 67 | 61 | 65 | 64 | 63 | 70 | 66 |
| | | 71 | 72 | 73 | 75 | 80 | 76 | 77 | 78 | 79 | 74 |
| | | 87 | 88 | 86 | 85 | 89 | 83 | 82 | 81 | 90 | 84 |
| | | 98 | 91 | 96 | 95 | 94 | 99 | 93 | 100 | 97 | 92 |
| | | 102 | 108 | 106 | 103 | 101 | 109 | 107 | 104 | 110 | 105 |
| | | 111 | 116 | 112 | 117 | 113 | 118 | 114 | 119 | 115 | 120 |
| | | 123 | 124 | 127 | 122 | 125 | 128 | 129 | 126 | 130 | 121 |
| | | 138 | 140 | 131 | 132 | 133 | 134 | 135 | 136 | 137 | 139 |

| A | B | Остання цифра залікової книжки студента | | | | | | | | | |
|-------------------------------------|---|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Передостання цифра залікової книжки | 6 | 9 | 3 | 5 | 6 | 8 | 10 | 7 | 4 | 1 | 2 |
| | | 20 | 18 | 17 | 14 | 16 | 19 | 11 | 15 | 13 | 12 |
| | | 21 | 24 | 27 | 22 | 25 | 29 | 23 | 26 | 30 | 28 |
| | | 35 | 37 | 33 | 39 | 31 | 38 | 36 | 32 | 34 | 40 |
| | | 48 | 47 | 50 | 44 | 43 | 42 | 46 | 41 | 45 | 49 |
| | | 51 | 52 | 59 | 55 | 56 | 57 | 53 | 58 | 54 | 60 |
| | | 70 | 68 | 67 | 64 | 66 | 69 | 61 | 65 | 63 | 62 |
| | | 71 | 74 | 77 | 72 | 75 | 76 | 73 | 79 | 80 | 78 |
| | | 85 | 87 | 83 | 89 | 81 | 88 | 86 | 82 | 84 | 90 |
| | | 98 | 97 | 100 | 94 | 93 | 92 | 96 | 91 | 95 | 99 |
| | | 102 | 108 | 106 | 103 | 101 | 109 | 107 | 104 | 110 | 105 |
| | | 111 | 116 | 112 | 117 | 113 | 118 | 114 | 119 | 115 | 120 |
| | | 123 | 124 | 127 | 122 | 125 | 128 | 129 | 126 | 130 | 121 |
| | | 138 | 140 | 131 | 132 | 133 | 134 | 135 | 136 | 137 | 139 |
| | 7 | 10 | 6 | 7 | 1 | 9 | 8 | 2 | 3 | 5 | 4 |
| | | 16 | 17 | 20 | 11 | 19 | 18 | 12 | 13 | 15 | 14 |
| | | 27 | 26 | 22 | 29 | 23 | 24 | 30 | 28 | 25 | 21 |
| | | 32 | 39 | 36 | 35 | 34 | 33 | 38 | 40 | 31 | 37 |
| | | 46 | 41 | 47 | 45 | 48 | 50 | 42 | 44 | 43 | 49 |
| | | 58 | 56 | 59 | 57 | 60 | 55 | 54 | 53 | 52 | 51 |
| | | 66 | 67 | 70 | 61 | 69 | 68 | 62 | 63 | 65 | 64 |
| | | 77 | 76 | 72 | 79 | 73 | 74 | 80 | 78 | 75 | 71 |
| | | 82 | 89 | 86 | 85 | 84 | 83 | 88 | 90 | 81 | 87 |
| | | 96 | 91 | 97 | 95 | 98 | 100 | 92 | 94 | 93 | 99 |
| | | 102 | 108 | 106 | 103 | 101 | 109 | 107 | 104 | 110 | 105 |
| | | 111 | 116 | 112 | 117 | 113 | 118 | 114 | 119 | 115 | 120 |
| | | 123 | 124 | 127 | 122 | 125 | 128 | 129 | 126 | 130 | 121 |
| | | 138 | 140 | 131 | 132 | 133 | 134 | 135 | 136 | 137 | 139 |

| A \ B | | Остання цифра залікової книжки студента | | | | | | | | | |
|-------------------------------------|---|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Передостання цифра залікової книжки | 8 | 8 | 10 | 6 | 9 | 5 | 7 | 1 | 3 | 4 | 2 |
| | | 17 | 11 | 20 | 16 | 19 | 18 | 12 | 15 | 14 | 13 |
| | | 21 | 23 | 24 | 22 | 25 | 27 | 30 | 28 | 26 | 29 |
| | | 36 | 37 | 33 | 38 | 39 | 40 | 35 | 31 | 32 | 34 |
| | | 46 | 48 | 43 | 47 | 50 | 49 | 45 | 41 | 44 | 42 |
| | | 54 | 55 | 51 | 60 | 53 | 52 | 56 | 57 | 58 | 59 |
| | | 67 | 61 | 70 | 66 | 69 | 68 | 62 | 63 | 65 | 64 |
| | | 71 | 73 | 74 | 72 | 75 | 77 | 80 | 78 | 76 | 79 |
| | | 86 | 87 | 83 | 88 | 89 | 90 | 85 | 81 | 82 | 84 |
| | | 96 | 98 | 93 | 97 | 100 | 99 | 95 | 91 | 94 | 92 |
| | | 102 | 108 | 106 | 103 | 101 | 109 | 107 | 104 | 110 | 105 |
| | | 111 | 116 | 112 | 117 | 113 | 118 | 114 | 119 | 115 | 120 |
| | | 123 | 124 | 127 | 122 | 125 | 128 | 129 | 126 | 130 | 121 |
| | | 138 | 140 | 131 | 132 | 133 | 134 | 135 | 136 | 137 | 139 |
| | 9 | 8 | 4 | 10 | 3 | 7 | 5 | 6 | 1 | 2 | 9 |
| | | 19 | 16 | 11 | 13 | 12 | 14 | 20 | 15 | 17 | 18 |
| | | 28 | 21 | 29 | 27 | 23 | 22 | 26 | 30 | 25 | 24 |
| | | 38 | 34 | 36 | 31 | 35 | 37 | 40 | 32 | 33 | 39 |
| | | 44 | 42 | 47 | 50 | 46 | 45 | 49 | 43 | 48 | 41 |
| | | 54 | 52 | 57 | 60 | 56 | 55 | 59 | 53 | 58 | 51 |
| | | 69 | 66 | 61 | 63 | 62 | 64 | 70 | 65 | 67 | 68 |
| | | 78 | 71 | 79 | 77 | 73 | 72 | 76 | 80 | 75 | 74 |
| | | 88 | 84 | 86 | 81 | 85 | 87 | 90 | 82 | 83 | 89 |
| | | 94 | 92 | 97 | 100 | 96 | 95 | 99 | 93 | 98 | 91 |
| | | 102 | 108 | 106 | 103 | 101 | 109 | 107 | 104 | 110 | 105 |
| | | 111 | 116 | 112 | 117 | 113 | 118 | 114 | 119 | 115 | 120 |
| | | 123 | 124 | 127 | 122 | 125 | 128 | 129 | 126 | 130 | 121 |
| | | 138 | 140 | 131 | 132 | 133 | 134 | 135 | 136 | 137 | 139 |

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Агапон Г.И. Сборник задач по теории вероятностей [Текст]. – М.: Высшая школа, – 1986. – 55 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]. – М.: Высшая школа, 1977. – 120 с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст]. – М.: Высшая школа, 1975. – 147 с.
4. Карасёв А.И. Курс высшей математики для экономических вузов [Текст]. – М.: Высшая школа, 1982. – 358 с.
5. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики [Текст]. – М.: Наука, 1986. – 462 с.
6. Чистяков Б.Н. Курс теории вероятностей [Текст]. – М.: Наука, 1987. – 212 с.
7. Методические указания к выполнению типового расчета по высшей математики «Теория вероятностей» для студентов всех специальностей [Текст]: уч. пособие / Л.И. Малыгина, Н.В. Крапива, Д.В. Буряк, И.Б. Подсёвалова. – Одесса : ОНПУ, 1995 – 57 с.

ДОДАТКИ

Значення функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,0 | 0,39894 | 0,39892 | 0,39886 | 0,39876 | 0,39862 | 0,39844 | 0,39822 | 0,39797 | 0,39767 | 0,39733 |
| 0,1 | 0,39695 | 0,39654 | 0,39608 | 0,39559 | 0,39505 | 0,39448 | 0,39387 | 0,39322 | 0,39253 | 0,39181 |
| 0,2 | 0,39104 | 0,39024 | 0,38940 | 0,38853 | 0,38762 | 0,38666 | 0,38566 | 0,38461 | 0,38361 | 0,38251 |
| 0,3 | 0,38139 | 0,38023 | 0,37903 | 0,37778 | 0,37655 | 0,37528 | 0,37399 | 0,37255 | 0,37111 | 0,36973 |
| 0,4 | 0,36827 | 0,36678 | 0,36526 | 0,36371 | 0,36213 | 0,36053 | 0,35889 | 0,35723 | 0,35555 | 0,35381 |
| 0,5 | 0,35207 | 0,35029 | 0,34849 | 0,34666 | 0,34482 | 0,34297 | 0,34105 | 0,33912 | 0,33718 | 0,33521 |
| 0,6 | 0,33322 | 0,33121 | 0,32918 | 0,32713 | 0,32506 | 0,32297 | 0,32088 | 0,31877 | 0,31665 | 0,31444 |
| 0,7 | 0,31225 | 0,31000 | 0,30783 | 0,30563 | 0,30333 | 0,30111 | 0,29888 | 0,29665 | 0,29431 | 0,29220 |
| 0,8 | 0,28969 | 0,28737 | 0,28500 | 0,28266 | 0,28034 | 0,27799 | 0,27562 | 0,27322 | 0,27086 | 0,26848 |
| 0,9 | 0,26660 | 0,26369 | 0,26122 | 0,25888 | 0,25647 | 0,25400 | 0,25166 | 0,24923 | 0,24681 | 0,24439 |
| 1,0 | 0,24197 | 0,23955 | 0,23713 | 0,23471 | 0,23230 | 0,22988 | 0,22747 | 0,22506 | 0,22265 | 0,22025 |
| 1,1 | 0,21785 | 0,21546 | 0,21307 | 0,21066 | 0,20831 | 0,20599 | 0,20357 | 0,20121 | 0,19886 | 0,19652 |
| 1,2 | 0,19419 | 0,19186 | 0,18953 | 0,18722 | 0,18499 | 0,18265 | 0,18033 | 0,17811 | 0,17588 | 0,17361 |
| 1,3 | 0,17137 | 0,16915 | 0,16699 | 0,16477 | 0,16255 | 0,16033 | 0,15822 | 0,15600 | 0,15399 | 0,15181 |
| 1,4 | 0,14973 | 0,14766 | 0,14555 | 0,14350 | 0,14144 | 0,13949 | 0,13742 | 0,13544 | 0,13344 | 0,13144 |
| 1,5 | 0,12952 | 0,12758 | 0,12566 | 0,12376 | 0,12188 | 0,12000 | 0,11811 | 0,11632 | 0,11445 | 0,11270 |
| 1,6 | 0,11092 | 0,10915 | 0,10741 | 0,10566 | 0,10399 | 0,10222 | 0,10055 | 0,09889 | 0,09722 | 0,09566 |
| 1,7 | 0,09405 | 0,09246 | 0,09088 | 0,08933 | 0,08788 | 0,08622 | 0,08477 | 0,08322 | 0,08188 | 0,08033 |
| 1,8 | 0,07895 | 0,07754 | 0,07611 | 0,07477 | 0,07344 | 0,07200 | 0,07077 | 0,06943 | 0,06811 | 0,06687 |
| 1,9 | 0,06562 | 0,06438 | 0,06316 | 0,06199 | 0,06077 | 0,05955 | 0,05844 | 0,05732 | 0,05611 | 0,05500 |
| 2,0 | 0,05399 | 0,05299 | 0,05188 | 0,05088 | 0,04988 | 0,04887 | 0,04788 | 0,04688 | 0,04588 | 0,04499 |

| | | | | | | | | | | |
|-----|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0 | 9 | 2 | 6 | 2 | 0 | 9 | 0 | 2 | 6 | 1 |
| 2,1 | 0,0439 8 | 0,0430 7 | 0,0421 7 | 0,0412 8 | 0,0404 1 | 0,0395 5 | 0,0387 1 | 0,0378 8 | 0,0370 6 | 0,0362 6 |
| 2,2 | 0,0354 7 | 0,0347 0 | 0,0339 4 | 0,0331 9 | 0,0324 6 | 0,0317 4 | 0,0310 3 | 0,0303 4 | 0,0296 5 | 0,0289 8 |
| 2,3 | 0,0283 3 | 0,0276 8 | 0,0270 5 | 0,0264 3 | 0,0258 2 | 0,0252 2 | 0,0246 3 | 0,0240 6 | 0,0234 9 | 0,0229 4 |
| 2,4 | 0,0223 9 | 0,0218 6 | 0,0213 4 | 0,0208 3 | 0,0203 3 | 0,0198 4 | 0,0193 6 | 0,0188 8 | 0,0184 2 | 0,0179 7 |
| 2,5 | 0,0175 3 | 0,0170 9 | 0,0166 7 | 0,0162 5 | 0,0158 5 | 0,0154 5 | 0,0150 6 | 0,0146 8 | 0,0143 1 | 0,0139 4 |
| 2,6 | 0,0135 8 | 0,0132 3 | 0,0128 9 | 0,0125 6 | 0,0122 3 | 0,0119 1 | 0,0116 0 | 0,0113 0 | 0,0110 0 | 0,0107 1 |
| 2,7 | 0,0104 2 | 0,0101 4 | 0,0098 7 | 0,0096 1 | 0,0093 5 | 0,0090 9 | 0,0088 5 | 0,0086 1 | 0,0083 7 | 0,0081 4 |
| 2,8 | 0,0079 2 | 0,0077 0 | 0,0074 8 | 0,0072 7 | 0,0070 7 | 0,0068 7 | 0,0066 8 | 0,0064 9 | 0,0063 1 | 0,0061 3 |
| 2,9 | 0,0059 5 | 0,0057 8 | 0,0056 2 | 0,0054 5 | 0,0053 0 | 0,0051 4 | 0,0049 9 | 0,0048 5 | 0,0047 0 | 0,0045 7 |
| 3,0 | 0,0044 3 | 0,0043 0 | 0,0041 7 | 0,0040 5 | 0,0039 3 | 0,0038 1 | 0,0037 0 | 0,0035 8 | 0,0034 8 | 0,0033 7 |
| 3,1 | 0,0032 7 | 0,0031 7 | 0,0030 7 | 0,0029 8 | 0,0028 8 | 0,0027 9 | 0,0027 1 | 0,0026 2 | 0,0025 4 | 0,0024 6 |
| 3,2 | 0,0023 8 | 0,0023 1 | 0,0022 4 | 0,0021 6 | 0,0021 0 | 0,0020 3 | 0,0019 6 | 0,0019 0 | 0,0018 4 | 0,0017 8 |
| 3,3 | 0,0017 2 | 0,0016 7 | 0,0016 1 | 0,0015 6 | 0,0015 1 | 0,0014 6 | 0,0014 1 | 0,0013 6 | 0,0013 2 | 0,0012 7 |
| 3,4 | 0,0012 3 | 0,0011 9 | 0,0011 5 | 0,0011 1 | 0,0010 7 | 0,0010 4 | 0,0010 0 | 0,0009 7 | 0,0009 4 | 0,0009 0 |
| 3,5 | 0,0008 7 | 0,0008 4 | 0,0008 1 | 0,0007 9 | 0,0007 6 | 0,0007 3 | 0,0007 1 | 0,0006 8 | 0,0006 6 | 0,0006 3 |
| 3,6 | 0,0006 1 | 0,0005 9 | 0,0005 7 | 0,0005 5 | 0,0005 3 | 0,0005 1 | 0,0004 9 | 0,0004 7 | 0,0004 6 | 0,0004 4 |
| 3,7 | 0,0004 2 | 0,0004 1 | 0,0003 9 | 0,0003 8 | 0,0003 7 | 0,0003 5 | 0,0003 4 | 0,0003 3 | 0,0003 1 | 0,0003 0 |
| 3,8 | 0,0002 9 | 0,0002 8 | 0,0002 7 | 0,0002 6 | 0,0002 5 | 0,0002 4 | 0,0002 3 | 0,0002 2 | 0,0002 1 | 0,0002 1 |
| 3,9 | 0,0002 0 | 0,0001 9 | 0,0001 8 | 0,0001 8 | 0,0001 7 | 0,0001 6 | 0,0001 6 | 0,0001 5 | 0,0001 4 | 0,0001 4 |

Значення функції Лапласа: $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

| x | $\Phi(x)$ | x | $\Phi(x)$ | x | $\Phi(x)$ | x | $\Phi(x)$ | x | $\Phi(x)$ |
|------------------------|------------|------------------------|------------|------------------------|------------|------------------------|------------|------------------------|------------|
| 0,0 0 | 0,000 0 | 0,3 1 | 0,121 7 | 0,6 2 | 0,232 4 | 0,9 3 | 0,323 8 | 1,2 4 | 0,392 5 |
| 0,0 1 | 0,004 0 | 0,3 2 | 0,125 5 | 0,6 3 | 0,235 7 | 0,9 4 | 0,326 4 | 1,2 5 | 0,394 4 |
| 0,0 2 | 0,008 0 | 0,3 3 | 0,129 3 | 0,6 4 | 0,238 9 | 0,9 5 | 0,328 9 | 1,2 6 | 0,396 2 |
| 0,0 3 | 0,012 0 | 0,3 4 | 0,133 1 | 0,6 5 | 0,242 2 | 0,9 6 | 0,331 5 | 1,2 7 | 0,398 0 |
| 0,0 4 | 0,016 0 | 0,3 5 | 0,136 8 | 0,6 6 | 0,245 4 | 0,9 7 | 0,334 0 | 1,2 8 | 0,399 7 |
| 0,0 5 | 0,019 9 | 0,3 6 | 0,140 6 | 0,6 7 | 0,248 6 | 0,9 8 | 0,336 5 | 1,2 9 | 0,401 5 |
| 0,0 6 | 0,023 9 | 0,3 7 | 0,144 3 | 0,6 8 | 0,251 7 | 0,9 9 | 0,338 9 | 1,3 0 | 0,403 2 |
| 0,0 7 | 0,027 9 | 0,3 8 | 0,148 0 | 0,6 9 | 0,254 9 | 1,0 0 | 0,341 3 | 1,3 1 | 0,404 9 |
| 0,0 8 | 0,031 9 | 0,3 9 | 0,151 7 | 0,7 0 | 0,258 0 | 1,0 1 | 0,343 8 | 1,3 2 | 0,406 6 |
| 0,0 9 | 0,035 9 | 0,4 0 | 0,155 4 | 0,7 1 | 0,261 1 | 1,0 2 | 0,346 1 | 1,3 3 | 0,408 2 |
| 0,1 0 | 0,039 8 | 0,4 1 | 0,159 1 | 0,7 2 | 0,264 2 | 1,0 3 | 0,348 5 | 1,3 4 | 0,409 9 |
| 0,1 1 | 0,043 8 | 0,4 2 | 0,162 8 | 0,7 3 | 0,267 3 | 1,0 4 | 0,350 8 | 1,3 5 | 0,411 5 |
| 0,1 2 | 0,047 8 | 0,4 3 | 0,166 4 | 0,7 4 | 0,270 4 | 1,0 5 | 0,353 1 | 1,3 6 | 0,413 1 |
| 0,1 3 | 0,051 7 | 0,4 4 | 0,170 0 | 0,7 5 | 0,273 4 | 1,0 6 | 0,355 4 | 1,3 7 | 0,414 7 |
| 0,1 4 | 0,055 7 | 0,4 5 | 0,173 6 | 0,7 6 | 0,276 4 | 1,0 7 | 0,357 7 | 1,3 8 | 0,416 2 |
| 0,1 5 | 0,059 6 | 0,4 6 | 0,177 2 | 0,7 7 | 0,279 4 | 1,0 8 | 0,359 9 | 1,3 9 | 0,417 7 |

| | | | | | | | | | |
|------------------------|------------|------------------------|------------|------------------------|------------|------------------------|------------|------------------------|------------|
| 0,1 6 | 0,063 6 | 0,4 7 | 0,180 8 | 0,7 8 | 0,282 3 | 1,0 9 | 0,362 1 | 1,4 0 | 0,419 2 |
| 0,1 7 | 0,067 5 | 0,4 8 | 0,184 4 | 0,7 9 | 0,285 2 | 1,1 0 | 0,364 3 | 1,4 1 | 0,420 7 |
| 0,1 8 | 0,071 4 | 0,4 9 | 0,187 9 | 0,8 0 | 0,288 1 | 1,1 1 | 0,366 5 | 1,4 2 | 0,422 2 |
| 0,1 9 | 0,075 3 | 0,5 0 | 0,191 5 | 0,8 1 | 0,291 0 | 1,1 2 | 0,368 6 | 1,4 3 | 0,423 6 |
| 0,2 0 | 0,079 3 | 0,5 1 | 0,195 0 | 0,8 2 | 0,293 9 | 1,1 3 | 0,370 8 | 1,4 4 | 0,425 1 |
| 0,2 1 | 0,083 2 | 0,5 2 | 0,198 5 | 0,8 3 | 0,296 7 | 1,1 4 | 0,372 9 | 1,4 5 | 0,426 5 |
| 0,2 2 | 0,087 1 | 0,5 3 | 0,201 9 | 0,8 4 | 0,299 5 | 1,1 5 | 0,374 9 | 1,4 6 | 0,427 9 |
| 0,2 3 | 0,091 0 | 0,5 4 | 0,205 4 | 0,8 5 | 0,302 3 | 1,1 6 | 0,377 0 | 1,4 7 | 0,429 2 |
| 0,2 4 | 0,094 8 | 0,5 5 | 0,208 8 | 0,8 6 | 0,305 1 | 1,1 7 | 0,379 0 | 1,4 8 | 0,430 6 |
| 0,2 5 | 0,098 7 | 0,5 6 | 0,212 3 | 0,8 7 | 0,307 8 | 1,1 8 | 0,381 0 | 1,4 9 | 0,431 9 |
| 0,2 6 | 0,102 6 | 0,5 7 | 0,215 7 | 0,8 8 | 0,310 6 | 1,1 9 | 0,383 0 | 1,5 0 | 0,433 2 |
| 0,2 7 | 0,106 4 | 0,5 8 | 0,219 0 | 0,8 9 | 0,313 3 | 1,2 0 | 0,384 9 | 1,5 1 | 0,434 5 |
| 0,2 8 | 0,110 3 | 0,5 9 | 0,222 4 | 0,9 0 | 0,315 9 | 1,2 1 | 0,386 9 | 1,5 2 | 0,435 7 |
| 0,2 9 | 0,114 1 | 0,6 0 | 0,225 7 | 0,9 1 | 0,318 6 | 1,2 2 | 0,388 8 | 1,5 3 | 0,437 0 |
| 0,3 0 | 0,117 9 | 0,6 1 | 0,229 1 | 0,9 2 | 0,321 2 | 1,2 3 | 0,390 7 | 1,5 4 | 0,438 2 |

Значення функції Лапласа: $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

| | | | | | | | | | |
|----------|-----------------------------|----------|-----------------------------|----------|-----------------------------|----------|-----------------------------|----------|-----------------------------|
| x | $\Phi(x)$ | x | $\Phi(x)$ | x | $\Phi(x)$ | x | $\Phi(x)$ | x | $\Phi(x)$ |
|----------|-----------------------------|----------|-----------------------------|----------|-----------------------------|----------|-----------------------------|----------|-----------------------------|

| | | | | | | | | | |
|------------------------|------------|------------------------|------------|------------------------|------------|------------------------|------------|------------------------|------------|
| 1,5 5 | 0,439 4 | 1,8 6 | 0,468 6 | 2,1 7 | 0,485 0 | 2,4 8 | 0,493 4 | 2,7 9 | 0,497 4 |
| 1,5 6 | 0,440 6 | 1,8 7 | 0,469 3 | 2,1 8 | 0,485 4 | 2,4 9 | 0,493 6 | 2,8 0 | 0,497 4 |
| 1,5 7 | 0,441 8 | 1,8 8 | 0,469 9 | 2,1 9 | 0,485 7 | 2,5 0 | 0,493 8 | 2,8 2 | 0,497 6 |
| 1,5 8 | 0,442 9 | 1,8 9 | 0,470 6 | 2,2 0 | 0,486 1 | 2,5 1 | 0,494 0 | 2,8 4 | 0,497 7 |
| 1,5 9 | 0,444 1 | 1,9 0 | 0,471 3 | 2,2 1 | 0,486 4 | 2,5 2 | 0,494 1 | 2,8 6 | 0,497 9 |
| 1,6 0 | 0,445 2 | 1,9 1 | 0,471 9 | 2,2 2 | 0,486 8 | 2,5 3 | 0,494 3 | 2,8 8 | 0,498 0 |
| 1,6 1 | 0,446 3 | 1,9 2 | 0,472 6 | 2,2 3 | 0,487 1 | 2,5 4 | 0,494 5 | 2,9 0 | 0,498 1 |
| 1,6 2 | 0,447 4 | 1,9 3 | 0,473 2 | 2,2 4 | 0,487 5 | 2,5 5 | 0,494 6 | 2,9 2 | 0,498 2 |
| 1,6 3 | 0,448 4 | 1,9 4 | 0,473 8 | 2,2 5 | 0,487 8 | 2,5 6 | 0,494 8 | 2,9 4 | 0,498 4 |
| 1,6 4 | 0,449 5 | 1,9 5 | 0,474 4 | 2,2 6 | 0,488 1 | 2,5 7 | 0,494 9 | 2,9 6 | 0,498 5 |
| 1,6 5 | 0,450 5 | 1,9 6 | 0,475 0 | 2,2 7 | 0,488 4 | 2,5 8 | 0,495 1 | 2,9 8 | 0,498 6 |
| 1,6 6 | 0,451 5 | 1,9 7 | 0,475 6 | 2,2 8 | 0,488 7 | 2,5 9 | 0,495 2 | 3,0 0 | 0,498 7 |
| 1,6 7 | 0,452 5 | 1,9 8 | 0,476 1 | 2,2 9 | 0,489 0 | 2,6 0 | 0,495 3 | 3,0 5 | 0,498 9 |
| 1,6 8 | 0,453 5 | 1,9 9 | 0,476 7 | 2,3 0 | 0,489 3 | 2,6 1 | 0,495 5 | 3,1 0 | 0,499 0 |
| 1,6 9 | 0,454 5 | 2,0 0 | 0,477 2 | 2,3 1 | 0,489 6 | 2,6 2 | 0,495 6 | 3,1 5 | 0,499 2 |
| 1,7 0 | 0,455 4 | 2,0 1 | 0,477 8 | 2,3 2 | 0,489 8 | 2,6 3 | 0,495 7 | 3,2 0 | 0,499 3 |
| 1,7 1 | 0,456 4 | 2,0 2 | 0,478 3 | 2,3 3 | 0,490 1 | 2,6 4 | 0,495 9 | 3,2 5 | 0,499 4 |
| 1,7 2 | 0,457 3 | 2,0 3 | 0,478 8 | 2,3 4 | 0,490 4 | 2,6 5 | 0,496 0 | 3,3 0 | 0,499 5 |

| | | | | | | | | | |
|------------------------|------------|------------------------|------------|------------------------|------------|------------------------|------------|------------------------|------------|
| 1,7 3 | 0,458 2 | 2,0 4 | 0,479 3 | 2,3 5 | 0,490 6 | 2,6 6 | 0,496 1 | 3,3 5 | 0,499 6 |
| 1,7 4 | 0,459 1 | 2,0 5 | 0,479 8 | 2,3 6 | 0,490 9 | 2,6 7 | 0,496 2 | 3,4 0 | 0,499 7 |
| 1,7 5 | 0,459 9 | 2,0 6 | 0,480 3 | 2,3 7 | 0,491 1 | 2,6 8 | 0,496 3 | 3,4 5 | 0,499 7 |
| 1,7 6 | 0,460 8 | 2,0 7 | 0,480 8 | 2,3 8 | 0,491 3 | 2,6 9 | 0,496 4 | 3,5 0 | 0,499 8 |
| 1,7 7 | 0,461 6 | 2,0 8 | 0,481 2 | 2,3 9 | 0,491 6 | 2,7 0 | 0,496 5 | 3,5 5 | 0,499 8 |
| 1,7 8 | 0,462 5 | 2,0 9 | 0,481 7 | 2,4 0 | 0,491 8 | 2,7 1 | 0,496 6 | 3,6 0 | 0,499 8 |
| 1,7 9 | 0,463 3 | 2,1 0 | 0,482 1 | 2,4 1 | 0,492 0 | 2,7 2 | 0,496 7 | 3,6 5 | 0,499 9 |
| 1,8 0 | 0,464 1 | 2,1 1 | 0,482 6 | 2,4 2 | 0,492 2 | 2,7 3 | 0,496 8 | 3,7 0 | 0,499 9 |
| 1,8 1 | 0,464 9 | 2,1 2 | 0,483 0 | 2,4 3 | 0,492 5 | 2,7 4 | 0,496 9 | 3,7 5 | 0,499 9 |
| 1,8 2 | 0,465 6 | 2,1 3 | 0,483 4 | 2,4 4 | 0,492 7 | 2,7 5 | 0,497 0 | 3,8 0 | 0,499 9 |
| 1,8 3 | 0,466 4 | 2,1 4 | 0,483 8 | 2,4 5 | 0,492 9 | 2,7 6 | 0,497 1 | 3,8 5 | 0,499 9 |
| 1,8 4 | 0,467 1 | 2,1 5 | 0,484 2 | 2,4 6 | 0,493 1 | 2,7 7 | 0,497 2 | 3,9 0 | 0,500 0 |
| 1,8 5 | 0,467 8 | 2,1 6 | 0,484 6 | 2,4 7 | 0,493 2 | 2,7 8 | 0,497 3 | 3,9 5 | 0,500 0 |

Значення функції Пуассона $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

| k\λ | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,8 |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 0 | 0,904837 | 0,818731 | 0,740818 | 0,670320 | 0,606531 | 0,548812 | 0,449329 |
| 1 | 0,090484 | 0,163746 | 0,222245 | 0,268128 | 0,303265 | 0,329287 | 0,359463 |
| 2 | 0,004524 | 0,016375 | 0,033337 | 0,053626 | 0,075816 | 0,098786 | 0,143785 |
| 3 | 0,000151 | 0,001092 | 0,003334 | 0,007150 | 0,012636 | 0,019757 | 0,038343 |
| 4 | 0,000004 | 0,000055 | 0,000250 | 0,000715 | 0,001580 | 0,002964 | 0,007669 |
| 5 | 0 | 0,000002 | 0,000015 | 0,000057 | 0,000158 | 0,000356 | 0,001227 |
| 6 | 0 | 0 | 0,000001 | 0,000004 | 0,000013 | 0,000036 | 0,000164 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,000001 | 0,000003 | 0,000019 |

| | | | | | | | |
|------------|----------|------------|----------|------------|----------|------------|----------|
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,000002 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| k\λ | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
| 0 | 0,367879 | 0,22313 | 0,135335 | 0,082085 | 0,049787 | 0,030197 | 0,018316 |
| 1 | 0,367879 | 0,334695 | 0,270671 | 0,205212 | 0,149361 | 0,105691 | 0,073263 |
| 2 | 0,18394 | 0,251021 | 0,270671 | 0,256516 | 0,224042 | 0,184959 | 0,146525 |
| 3 | 0,061313 | 0,125511 | 0,180447 | 0,213763 | 0,224042 | 0,215785 | 0,195367 |
| 4 | 0,015328 | 0,047067 | 0,090224 | 0,133602 | 0,168031 | 0,188812 | 0,195367 |
| 5 | 0,003066 | 0,014120 | 0,036089 | 0,066801 | 0,100819 | 0,132169 | 0,156293 |
| 6 | 0,000511 | 0,003530 | 0,012030 | 0,027834 | 0,050409 | 0,077098 | 0,104196 |
| 7 | 0,000073 | 0,000756 | 0,003437 | 0,009941 | 0,021604 | 0,038549 | 0,059540 |
| 8 | 0,000009 | 0,000142 | 0,000859 | 0,003106 | 0,008102 | 0,016865 | 0,029770 |
| 9 | 0,000001 | 0,000024 | 0,000191 | 0,000863 | 0,002701 | 0,006559 | 0,013231 |
| 10 | 0 | 0,000004 | 0,000038 | 0,000216 | 0,00081 | 0,002296 | 0,005292 |
| 11 | 0 | 0 | 0,000007 | 0,000049 | 0,000221 | 0,000730 | 0,001925 |
| 12 | 0 | 0 | 0,000001 | 0,000010 | 0,000055 | 0,000213 | 0,000642 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 0,000002 | 0,000013 | 0,000057 | 0,000197 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,000003 | 0,000014 | 0,000056 |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,000001 | 0,000003 | 0,000015 |
| 16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,000001 | 0,000004 |
| 17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,000001 |
| 18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 19 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 21 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 22 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 23 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 24 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Значення функції Пуассона $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

| | | | | | | |
|------------|------------|----------|------------|----------|------------|----------|
| k\λ | 4,5 | 5 | 5,5 | 6 | 6,5 | 7 |
| 0 | 0,011109 | 0,006738 | 0,004087 | 0,002479 | 0,001503 | 0,000912 |
| 1 | 0,04999 | 0,033690 | 0,022477 | 0,014873 | 0,009772 | 0,006383 |
| 2 | 0,112479 | 0,084224 | 0,061812 | 0,044618 | 0,03176 | 0,022341 |
| 3 | 0,168718 | 0,140374 | 0,113323 | 0,089235 | 0,068814 | 0,052129 |
| 4 | 0,189808 | 0,175467 | 0,155819 | 0,133853 | 0,111822 | 0,091226 |
| 5 | 0,170827 | 0,175467 | 0,171401 | 0,160623 | 0,145369 | 0,127717 |
| 6 | 0,12812 | 0,146223 | 0,157117 | 0,160623 | 0,157483 | 0,149003 |
| 7 | 0,082363 | 0,104445 | 0,123449 | 0,137677 | 0,146234 | 0,149003 |

| | | | | | | |
|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 8 | 0,046329 | 0,065278 | 0,084871 | 0,103258 | 0,118815 | 0,130377 |
| 9 | 0,023165 | 0,036266 | 0,051866 | 0,068838 | 0,085811 | 0,101405 |
| 10 | 0,010424 | 0,018133 | 0,028526 | 0,041303 | 0,055777 | 0,070983 |
| 11 | 0,004264 | 0,008242 | 0,014263 | 0,022529 | 0,032959 | 0,045171 |
| 12 | 0,001599 | 0,003434 | 0,006537 | 0,011264 | 0,017853 | 0,026350 |
| 13 | 0,000554 | 0,001321 | 0,002766 | 0,005199 | 0,008926 | 0,014188 |
| 14 | 0,000178 | 0,000472 | 0,001087 | 0,002228 | 0,004144 | 0,007094 |
| 15 | 0,000053 | 0,000157 | 0,000398 | 0,000891 | 0,001796 | 0,003311 |
| 16 | 0,000015 | 0,000049 | 0,000137 | 0,000334 | 0,00073 | 0,001448 |
| 17 | 0,000004 | 0,000014 | 0,000044 | 0,000118 | 0,000279 | 0,000596 |
| 18 | 0,000001 | 0,000004 | 0,000014 | 0,000039 | 0,000101 | 0,000232 |
| 19 | 0 | 0,000001 | 0,000004 | 0,000012 | 0,000034 | 0,000085 |
| 20 | 0 | 0 | 0,000001 | 0,000004 | 0,000011 | 0,00003 |
| 21 | 0 | 0 | 0 | 0,000001 | 0,000003 | 0,000010 |
| 22 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,000001 | 0,000003 |
| 23 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,000001 |
| 24 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Критичні точки F -розподілу Фішера-Снедекора при рівні значущості $\alpha = 0,05$

| менш дисп. | Число ступенів вільності більшої дисперсії | | | | | | | | |
|------------|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | 161,4 | 199,5 | 215,7 | 224,6 | 230,2 | 234,0 | 236,8 | 238,9 | 240,5 |
| 2 | 18,51 | 19,00 | 19,16 | 19,25 | 19,30 | 19,33 | 19,35 | 19,37 | 19,38 |
| 3 | 10,13 | 9,55 | 9,28 | 9,12 | 9,01 | 8,94 | 8,89 | 8,85 | 8,81 |
| 4 | 7,71 | 6,94 | 6,59 | 6,39 | 6,26 | 6,16 | 6,09 | 6,04 | 6,00 |
| 5 | 6,61 | 5,79 | 5,41 | 5,19 | 5,05 | 4,95 | 4,88 | 4,82 | 4,77 |
| 6 | 5,99 | 5,14 | 4,76 | 4,53 | 4,39 | 4,28 | 4,21 | 4,15 | 4,10 |
| 7 | 5,59 | 4,74 | 4,35 | 4,12 | 3,97 | 3,87 | 3,79 | 3,73 | 3,68 |
| 8 | 5,32 | 4,46 | 4,07 | 3,84 | 3,69 | 3,58 | 3,50 | 3,44 | 3,39 |
| 9 | 5,12 | 4,26 | 3,86 | 3,63 | 3,48 | 3,37 | 3,29 | 3,23 | 3,18 |
| 10 | 4,96 | 4,10 | 3,71 | 3,48 | 3,33 | 3,22 | 3,14 | 3,07 | 3,02 |
| 11 | 4,84 | 3,98 | 3,59 | 3,36 | 3,20 | 3,09 | 3,01 | 2,95 | 2,90 |
| 12 | 4,75 | 3,89 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 | 2,91 | 2,85 | 2,80 |
| 13 | 4,67 | 3,81 | 3,41 | 3,18 | 3,03 | 2,92 | 2,83 | 2,77 | 2,71 |
| 14 | 4,60 | 3,74 | 3,34 | 3,11 | 2,96 | 2,85 | 2,76 | 2,70 | 2,65 |
| 15 | 4,54 | 3,68 | 3,29 | 3,06 | 2,90 | 2,79 | 2,71 | 2,64 | 2,59 |
| 16 | 4,49 | 3,63 | 3,24 | 3,01 | 2,85 | 2,74 | 2,66 | 2,59 | 2,54 |
| 17 | 4,45 | 3,59 | 3,20 | 2,96 | 2,81 | 2,70 | 2,61 | 2,55 | 2,49 |
| 18 | 4,41 | 3,55 | 3,16 | 2,93 | 2,77 | 2,66 | 2,58 | 2,51 | 2,46 |
| 19 | 4,38 | 3,52 | 3,13 | 2,90 | 2,74 | 2,63 | 2,54 | 2,48 | 2,42 |
| 20 | 4,35 | 3,49 | 3,10 | 2,87 | 2,71 | 2,60 | 2,51 | 2,45 | 2,39 |
| 21 | 4,32 | 3,47 | 3,07 | 2,84 | 2,68 | 2,57 | 2,49 | 2,42 | 2,37 |
| 22 | 4,30 | 3,44 | 3,05 | 2,82 | 2,66 | 2,55 | 2,46 | 2,40 | 2,34 |
| 23 | 4,28 | 3,42 | 3,03 | 2,80 | 2,64 | 2,53 | 2,44 | 2,37 | 2,32 |
| 24 | 4,26 | 3,40 | 3,01 | 2,78 | 2,62 | 2,51 | 2,42 | 2,36 | 2,30 |
| 26 | 4,23 | 3,37 | 2,98 | 2,74 | 2,59 | 2,47 | 2,39 | 2,32 | 2,27 |
| 28 | 4,20 | 3,34 | 2,95 | 2,71 | 2,56 | 2,45 | 2,36 | 2,29 | 2,24 |
| 30 | 4,17 | 3,32 | 2,92 | 2,69 | 2,53 | 2,42 | 2,33 | 2,27 | 2,21 |
| 40 | 4,08 | 3,23 | 2,84 | 2,61 | 2,45 | 2,34 | 2,25 | 2,18 | 2,12 |
| 50 | 4,03 | 3,18 | 2,79 | 2,56 | 2,40 | 2,29 | 2,20 | 2,13 | 2,07 |
| 60 | 4,00 | 3,15 | 2,76 | 2,53 | 2,37 | 2,25 | 2,17 | 2,10 | 2,04 |
| 80 | 3,96 | 3,11 | 2,72 | 2,49 | 2,33 | 2,21 | 2,13 | 2,06 | 2,00 |
| 100 | 3,94 | 3,09 | 2,70 | 2,46 | 2,31 | 2,19 | 2,10 | 2,03 | 1,97 |
| 200 | 3,89 | 3,04 | 2,65 | 2,42 | 2,26 | 2,14 | 2,06 | 1,98 | 1,93 |

| | | | | | | | | | |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 400 | 3,86 | 3,02 | 2,63 | 2,39 | 2,24 | 2,12 | 2,03 | 1,96 | 1,90 |
| 600 | 3,86 | 3,01 | 2,62 | 2,39 | 2,23 | 2,11 | 2,02 | 1,95 | 1,90 |
| 100 0 | 3,85 | 3,00 | 2,61 | 2,38 | 2,22 | 2,11 | 2,02 | 1,95 | 1,89 |

Критичні точки F -розподілу Фішера-Снедекора при рівні значущості $\alpha = 0,05$

| менш дисп. | Число ступенів вільності більшої дисперсії | | | | | | | | | | | | |
|---------------|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 16 | 20 | 24 | 30 | 40 | 50 | 100 | 1000 |
| 1 | 241,9 | 243,0 | 243,9 | 244,7 | 245,4 | 246,5 | 248,0 | 249,1 | 250,1 | 251,1 | 251,8 | 253,0 | 254,2 |
| 2 | 19,40 | 19,40 | 19,41 | 19,42 | 19,42 | 19,43 | 19,45 | 19,45 | 19,46 | 19,47 | 19,48 | 19,49 | 19,49 |
| 3 | 8,79 | 8,76 | 8,74 | 8,73 | 8,71 | 8,69 | 8,66 | 8,64 | 8,62 | 8,59 | 8,58 | 8,55 | 8,53 |
| 4 | 5,96 | 5,94 | 5,91 | 5,89 | 5,87 | 5,84 | 5,80 | 5,77 | 5,75 | 5,72 | 5,70 | 5,66 | 5,63 |
| 5 | 4,74 | 4,70 | 4,68 | 4,66 | 4,64 | 4,60 | 4,56 | 4,53 | 4,50 | 4,46 | 4,44 | 4,41 | 4,37 |
| 6 | 4,06 | 4,03 | 4,00 | 3,98 | 3,96 | 3,92 | 3,87 | 3,84 | 3,81 | 3,77 | 3,75 | 3,71 | 3,67 |
| 7 | 3,64 | 3,60 | 3,57 | 3,55 | 3,53 | 3,49 | 3,44 | 3,41 | 3,38 | 3,34 | 3,32 | 3,27 | 3,23 |
| 8 | 3,35 | 3,31 | 3,28 | 3,26 | 3,24 | 3,20 | 3,15 | 3,12 | 3,08 | 3,04 | 3,02 | 2,97 | 2,93 |
| 9 | 3,14 | 3,10 | 3,07 | 3,05 | 3,03 | 2,99 | 2,94 | 2,90 | 2,86 | 2,83 | 2,80 | 2,76 | 2,71 |
| 10 | 2,98 | 2,94 | 2,91 | 2,89 | 2,86 | 2,83 | 2,77 | 2,74 | 2,70 | 2,66 | 2,64 | 2,59 | 2,54 |
| 11 | 2,85 | 2,82 | 2,79 | 2,76 | 2,74 | 2,70 | 2,65 | 2,61 | 2,57 | 2,53 | 2,51 | 2,46 | 2,41 |
| 12 | 2,75 | 2,72 | 2,69 | 2,66 | 2,64 | 2,60 | 2,54 | 2,51 | 2,47 | 2,43 | 2,40 | 2,35 | 2,30 |
| 13 | 2,67 | 2,63 | 2,60 | 2,58 | 2,55 | 2,51 | 2,46 | 2,42 | 2,38 | 2,34 | 2,31 | 2,26 | 2,21 |
| 14 | 2,60 | 2,57 | 2,53 | 2,51 | 2,48 | 2,44 | 2,39 | 2,35 | 2,31 | 2,27 | 2,24 | 2,19 | 2,14 |
| 15 | 2,54 | 2,51 | 2,48 | 2,45 | 2,42 | 2,38 | 2,33 | 2,29 | 2,25 | 2,20 | 2,18 | 2,12 | 2,07 |
| 16 | 2,49 | 2,46 | 2,42 | 2,40 | 2,37 | 2,33 | 2,28 | 2,24 | 2,19 | 2,15 | 2,12 | 2,07 | 2,02 |
| 17 | 2,45 | 2,41 | 2,38 | 2,35 | 2,33 | 2,29 | 2,23 | 2,19 | 2,15 | 2,10 | 2,08 | 2,02 | 1,97 |
| 18 | 2,41 | 2,37 | 2,34 | 2,31 | 2,29 | 2,25 | 2,19 | 2,15 | 2,11 | 2,06 | 2,04 | 1,98 | 1,92 |
| 19 | 2,38 | 2,34 | 2,31 | 2,28 | 2,26 | 2,21 | 2,16 | 2,11 | 2,07 | 2,03 | 2,00 | 1,94 | 1,88 |
| 20 | 2,35 | 2,31 | 2,28 | 2,25 | 2,22 | 2,18 | 2,12 | 2,08 | 2,04 | 1,99 | 1,97 | 1,91 | 1,85 |
| 21 | 2,32 | 2,28 | 2,25 | 2,22 | 2,20 | 2,16 | 2,10 | 2,05 | 2,01 | 1,96 | 1,94 | 1,88 | 1,82 |
| 22 | 2,30 | 2,26 | 2,23 | 2,20 | 2,17 | 2,13 | 2,07 | 2,03 | 1,98 | 1,94 | 1,91 | 1,85 | 1,79 |
| 23 | 2,27 | 2,24 | 2,20 | 2,18 | 2,15 | 2,11 | 2,05 | 2,01 | 1,96 | 1,91 | 1,88 | 1,82 | 1,76 |
| 24 | 2,25 | 2,22 | 2,18 | 2,15 | 2,13 | 2,09 | 2,03 | 1,98 | 1,94 | 1,89 | 1,86 | 1,80 | 1,74 |
| 26 | 2,22 | 2,18 | 2,15 | 2,12 | 2,09 | 2,05 | 1,99 | 1,95 | 1,90 | 1,85 | 1,82 | 1,76 | 1,70 |
| 28 | 2,19 | 2,15 | 2,12 | 2,09 | 2,06 | 2,02 | 1,96 | 1,91 | 1,87 | 1,82 | 1,79 | 1,73 | 1,66 |
| 30 | 2,16 | 2,13 | 2,09 | 2,06 | 2,04 | 1,99 | 1,93 | 1,89 | 1,84 | 1,79 | 1,76 | 1,70 | 1,63 |
| 40 | 2,08 | 2,04 | 2,00 | 1,97 | 1,95 | 1,90 | 1,84 | 1,79 | 1,74 | 1,69 | 1,66 | 1,59 | 1,52 |
| 50 | 2,03 | 1,99 | 1,95 | 1,92 | 1,89 | 1,85 | 1,78 | 1,74 | 1,69 | 1,63 | 1,60 | 1,52 | 1,45 |
| 60 | 1,99 | 1,95 | 1,92 | 1,89 | 1,86 | 1,82 | 1,75 | 1,70 | 1,65 | 1,59 | 1,56 | 1,48 | 1,40 |
| 80 | 1,95 | 1,91 | 1,88 | 1,84 | 1,82 | 1,77 | 1,70 | 1,65 | 1,60 | 1,54 | 1,51 | 1,43 | 1,34 |
| 100 | 1,93 | 1,89 | 1,85 | 1,82 | 1,79 | 1,75 | 1,68 | 1,63 | 1,57 | 1,52 | 1,48 | 1,39 | 1,30 |
| 200 | 1,88 | 1,84 | 1,80 | 1,77 | 1,74 | 1,69 | 1,62 | 1,57 | 1,52 | 1,46 | 1,41 | 1,32 | 1,21 |
| 400 | 1,85 | 1,81 | 1,78 | 1,74 | 1,72 | 1,67 | 1,60 | 1,54 | 1,49 | 1,42 | 1,38 | 1,28 | 1,15 |
| 600 | 1,85 | 1,80 | 1,77 | 1,74 | 1,71 | 1,66 | 1,59 | 1,54 | 1,48 | 1,41 | 1,37 | 1,27 | 1,13 |
| 1000 | 1,84 | 1,80 | 1,76 | 1,73 | 1,70 | 1,65 | 1,58 | 1,53 | 1,47 | 1,41 | 1,36 | 1,26 | 1,11 |

Критичні точки розподілу χ^2

| k/α | 0,01 | 0,025 | 0,05 | 0,95 | 0,975 | 0,99 |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 6,63490 | 5,02389 | 3,84146 | 0,00393 | 0,00098 | 0,00016 |
| 2 | 9,21034 | 7,37776 | 5,99146 | 0,10259 | 0,05064 | 0,02010 |
| 3 | 11,34487 | 9,34840 | 7,81473 | 0,35185 | 0,21580 | 0,11483 |
| 4 | 13,2767 | 11,14329 | 9,48773 | 0,71072 | 0,48442 | 0,29711 |
| 5 | 15,08627 | 12,8325 | 11,0705 | 1,14548 | 0,83121 | 0,55430 |
| 6 | 16,81189 | 14,44938 | 12,59159 | 1,63538 | 1,23734 | 0,87209 |
| 7 | 18,47531 | 16,01276 | 14,06714 | 2,16735 | 1,68987 | 1,23904 |
| 8 | 20,09024 | 17,53455 | 15,50731 | 2,73264 | 2,17973 | 1,64650 |
| 9 | 21,66599 | 19,02277 | 16,91898 | 3,32511 | 2,70039 | 2,08790 |
| 10 | 23,20925 | 20,48318 | 18,30704 | 3,94030 | 3,24697 | 2,55821 |
| 11 | 24,72497 | 21,92005 | 19,67514 | 4,57481 | 3,81575 | 3,05348 |
| 12 | 26,21697 | 23,33666 | 21,02607 | 5,22603 | 4,40379 | 3,57057 |
| 13 | 27,68825 | 24,7356 | 22,36203 | 5,89186 | 5,00875 | 4,10692 |
| 14 | 29,14124 | 26,11895 | 23,68479 | 6,57063 | 5,62873 | 4,66043 |
| 15 | 30,57791 | 27,48839 | 24,99579 | 7,26094 | 6,26214 | 5,22935 |
| 16 | 31,99993 | 28,84535 | 26,29623 | 7,96165 | 6,90766 | 5,81221 |
| 17 | 33,40866 | 30,19101 | 27,58711 | 8,67176 | 7,56419 | 6,40776 |
| 18 | 34,80531 | 31,52638 | 28,86930 | 9,39046 | 8,23075 | 7,01491 |
| 19 | 36,19087 | 32,85233 | 30,14353 | 10,11701 | 8,90652 | 7,63273 |
| 20 | 37,56623 | 34,16961 | 31,41043 | 10,85081 | 9,59078 | 8,26040 |
| 21 | 38,93217 | 35,47888 | 32,67057 | 11,59131 | 10,2829 | 8,89720 |
| 22 | 40,28936 | 36,78071 | 33,92444 | 12,33801 | 10,98232 | 9,54249 |
| 23 | 41,63840 | 38,07563 | 35,17246 | 13,09051 | 11,68855 | 10,19572 |
| 24 | 42,97982 | 39,36408 | 36,41503 | 13,84843 | 12,40115 | 10,85636 |
| 25 | 44,31410 | 40,64647 | 37,65248 | 14,61141 | 13,11972 | 11,52398 |
| 26 | 45,64168 | 41,92317 | 38,88514 | 15,37916 | 13,84391 | 12,19815 |
| 27 | 46,96294 | 43,19451 | 40,11327 | 16,15140 | 14,57338 | 12,87850 |
| 28 | 48,27824 | 44,46079 | 41,33714 | 16,92788 | 15,30786 | 13,56471 |
| 29 | 49,58788 | 45,72229 | 42,55697 | 17,70837 | 16,04707 | 14,25645 |
| 30 | 50,89218 | 46,97924 | 43,77297 | 18,49266 | 16,79077 | 14,95346 |
| 31 | 52,19139 | 48,23189 | 44,98534 | 19,28057 | 17,53874 | 15,65546 |
| 32 | 53,48577 | 49,48044 | 46,19426 | 20,07191 | 18,29076 | 16,36222 |
| 33 | 54,77554 | 50,72508 | 47,39988 | 20,86653 | 19,04666 | 17,07351 |
| 34 | 56,06091 | 51,96600 | 48,60237 | 21,66428 | 19,80625 | 17,78915 |
| 35 | 57,34207 | 53,20335 | 49,80185 | 22,46502 | 20,56938 | 18,50893 |
| 36 | 58,61921 | 54,43729 | 50,99846 | 23,26861 | 21,33588 | 19,23268 |
| 37 | 59,89250 | 55,66797 | 52,19232 | 24,07494 | 22,10563 | 19,96023 |
| 38 | 61,16209 | 56,89552 | 53,38354 | 24,8839 | 22,87848 | 20,69144 |
| 39 | 62,42812 | 58,12006 | 54,57223 | 25,69539 | 23,65432 | 21,42616 |

| k/α | 0,01 | 0,025 | 0,05 | 0,95 | 0,975 | 0,99 |
|------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 40 | 63,69074 | 59,34171 | 55,75848 | 26,5093 | 24,43304 | 22,16426 |
| 41 | 64,95007 | 60,56057 | 56,94239 | 27,32555 | 25,21452 | 22,90561 |
| 42 | 66,20624 | 61,77676 | 58,12404 | 28,14405 | 25,99866 | 23,65009 |
| 43 | 67,45935 | 62,99036 | 59,30351 | 28,96472 | 26,78537 | 24,39760 |
| 44 | 68,70951 | 64,20146 | 60,48089 | 29,78748 | 27,57457 | 25,14803 |
| 45 | 69,95683 | 65,41016 | 61,65623 | 30,61226 | 28,36615 | 25,90127 |
| 46 | 71,20140 | 66,61653 | 62,82962 | 31,43900 | 29,16005 | 26,65724 |
| 47 | 72,44331 | 67,82065 | 64,00111 | 32,26762 | 29,95620 | 27,41585 |
| 48 | 73,68264 | 69,02259 | 65,17077 | 33,09808 | 30,75451 | 28,17701 |
| 49 | 74,91947 | 70,22241 | 66,33865 | 33,93031 | 31,55492 | 28,94065 |
| 50 | 76,15389 | 71,42020 | 67,50481 | 34,76425 | 32,35736 | 29,70668 |

ДЛЯ НОТАТОК

This image shows a single page of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, leaving small margins at the top and bottom. There are no vertical margin lines, no text, and no other markings on the page. It appears to be a standard piece of notebook paper.