

Inleidend voorbeeld

Een object wordt de hoogte in geschoten. volgende functie $x(t)$ geeft na t seconden de hoogte van het object uitgedrukt in meter

$$x(t) = 1,5 + 50t - 4,9t^2$$

Met welke snelheid beweegt dat object naar boven 2 seconden na het schot?

1 Eerste benadering

Na 2 seconden is de hoogte $x(2) = 1,5 + 50 \cdot 2 - 4,9 \cdot 2^2 = 81,9$ meter.

Na 3 seconden is de hoogte $x(3) = 1,5 + 50 \cdot 3 - 4,9 \cdot 3^2 = 107,4$ meter.

Gedurende 1 seconde is het object $107,4 - 81,9 = 25,5$ meter verhoogd. Dit is een gemiddelde snelheid van 25,5 m/s.

Maar die snelheid neemt tijdens het verhogen wel geleidelijk af. We bekomen een betere benadering voor de snelheid 2 seconden na het schot door het tijdsverschil kleiner te nemen.

2 Tweede benadering

Na 2,5 seconden is de hoogte $x(2,5) = 1,5 + 50 \cdot 2,5 - 4,9 \cdot 2,5^2 = 95,875$ meter.

Gedurende 0,5 seconden is het object $95,875 - 81,9 = 13,825$ meter verhoogd.

Dit is een gemiddelde snelheid van $\frac{13,825}{0,5} = 27,6$ m/s.

3 Derde benadering

Na 2,1 seconden is de hoogte $x(2,1) = 1,5 + 50 \cdot 2,1 - 4,9 \cdot 2,1^2 = 84,891$ meter.

Gedurende 0,1 seconden is het object $84,891 - 81,9 = 2,991$ meter verhoogd.

Dit is een gemiddelde snelheid van $\frac{2,991}{0,1} = 29,91$ m/s.

4 Alle benaderingen

Voor een tijdsverschil $\Delta t > 0$ is de hoogte op het tijdstip $2 + \Delta t$

$$x(2 + \Delta t) = 1,5 + 50(2 + \Delta t) - 4,9(2 + \Delta t)^2 = 81,9 + 30,4\Delta t - 4,9\Delta t^2$$

Gedurende Δt seconden is het object $30,4\Delta t - 4,9\Delta t^2$ meter verhoogd. Dit is een gemiddelde snelheid van $\frac{30,4\Delta t - 4,9\Delta t^2}{\Delta t} = 30,4 - 4,9\Delta t$ m/s.

Voor $\Delta t = 1$; $\Delta t = 0,5$ en $\Delta t = 0,1$ geeft dit de reeds berekende benaderingen voor de snelheid van het object na 2 seconden. Hoe kleiner Δt hoe beter die benadering.

5 Snelheid na 2 seconden

Door het vorige resultaat $\Delta t = 0$ te nemen bekom je de snelheid van het object na 2 seconden.

De snelheid van het object na 2 seconden is dus gelijk aan 30,4.

Deze uitkomst is het limietgeval van de gemiddelde snelheid waarbij je het tijdsverschil Δt naar 0 laat naderen. Dit getal geeft de afgeleide van de functie $x(t)$ voor $t = 2$.

Dit voorbeeld gaan we nu wiskundig abstract veralgemenen.