KU LEUVEN

MASSIVE OPEN ONLINE COURSE

BASISWISKUNDE VOOR (STARTENDE) STUDENTEN

www.iiw.kuleuven.be/mooc-wiskunde

Inhoudsopgave

Module 4

Oppervlakteberekeningen, inhoudsberekeningen en analytische meetkunde

0 Intro

Zie filmpje MOOC.

1 Oppervlakte- en inhoudsberekeningen

1.1 Omtrek, oppervlakte en volume

De omtrek O

Definitie De omtrek of de lengte van een vlakke figuur is de totale lengte van de buitenzijde.

Om de omtrek van een figuur te bepalen meten we alle zijden en maken we de som. De SI-eenheid (= Internationale Standaard) van de omtrek is de meter, m. Het eenheidsstelsel dat we gebruiken voor de omtrek noemen we lengtematen.

kilometer	hectometer	decameter	meter	decimeter	centimeter	millimeter
1 km	1 hm	1 dam	1 m	1 dm	1 cm	1 mm
1000 m	100 m	10 m	1 m	0,1 m	0,01 m	0,001 m

Opmerking Het verschil tussen 2 opeenvolgende kolommen is telkens een factor 10.

De oppervlakte A

Definitie De oppervlakte van een vlakke figuur is eenvoudig voor te stelen als het gebied dat je kunt bedekken.

Maar let op: het oppervlak is het scheidingsvlak aan de bovenkant tussen een lichaam en zijn omgeving, terwijl de oppervlakte de afmetingen van dit oppervlak voorstelt. Onthoud dus: een oppervlak heeft een oppervlakte. De SI-eenheid van de oppervlakte is de vierkante meter, m^2. Het eenheidsstelsel dat we gebruiken voor de oppervlakte noemen we oppervlaktematen.

vierkante kilometer	vierkante hectometer	vierkante decameter	vierkante meter	vierkante decimeter	vierkante centimeter	vierkante millimeter
1 km^2	1 hm^2	1 dam^2	1 m^2	1 dm^2	1 cm^2	1 mm^2
$1.10^6\ m^2$	10000 m^2	100 m^2	1 m^2	0,01 m^2	0,0001 m^2	$1.10^-6\ m^2$
	1 hectare	1 are	1 centiare			

Opmerking Het verschil tussen 2 opeenvolgende kolommen is telkens een factor 100.

Landmaten geven ook een oppervlakte weer: hectare (ha), are (a), centiare (ca).

- 1 are $= 10m.10m = 100m^2$
- 1 hectare $= 100$ are $= 100m.100m = 10000m^2$

Het volume V

Definitie De inhoud of het volume van een ruimtefiguur is de grootte van het gebied in de ruimte (drie- (of hoger-) dimensionaal) dat door het voorwerp wordt ingenomen.

De SI-eenheid van het volume is de kubieke meter, m^3. Het eenheidsstelsel dat we gebruiken voor het volume noemen we de ruimtematen.

kubieke kilometer	kubieke hectometer	kubieke decameter	kubieke meter	kubieke decimeter	kubieke centimeter	kubieke millimeter
1 km^3	1 hm^3	1 dam^3	1 m^3	1 dm^3	1 cm^3	1 mm^3
$1.10^9\ m^3$	$1.10^6\ m^3$	1000 m^3	1 m^3	0,0001 m^3	$1.10^6\ m^3$	$1.10^-9\ m^3$
				1 liter	1 ml	

Opmerking Het verschil tussen 2 opeenvolgende kolommen is telkens een factor 1000.

Als inhoudsmaat wordt, voornamelijk voor vloeistoffen, ook de liter (l) gebruikt.

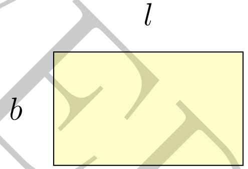
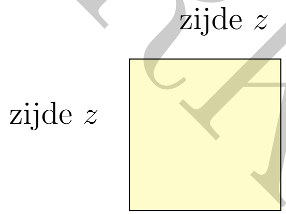
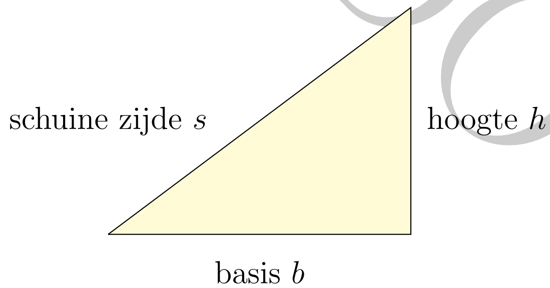
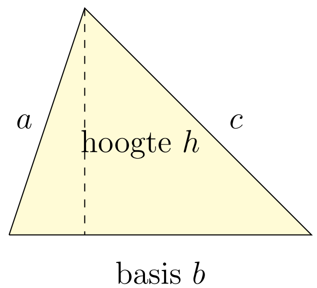
- $1\ l = 1\ dm^3$
- $1\ ml = 1\ cm^3 = 1\ cc$

1.2 Vlakke figuren

Omtrek O en oppervlakte A

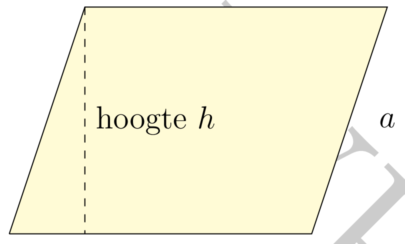
Zie Tabel .1 en .2.

In de MOOC zie je een animatie die de formule voor de berekening van de oppervlakte van een trapezium verklaart.

Figuur	Omtrek	Oppervlakte
Rechthoek 	$O = 2(l+b)$	$A = l.b$
Vierkant 	$O = 4z$	$A = z^2$
Rechthoekige driehoek 	$O = b + h + s$	$A = \frac{b.h}{2}$
Niet-rechthoekige of willekeurige driehoek 	$O = a + b + c$	$A = \frac{b.h}{2}$

Tabel .1: Omtrek en oppervlakte van vlakke figuren (1).

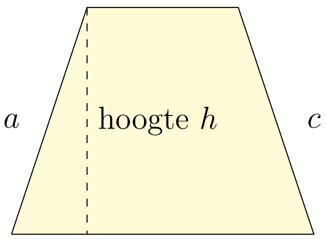
Parallellogram



$O = 2(a+b)$

$A = b.h$

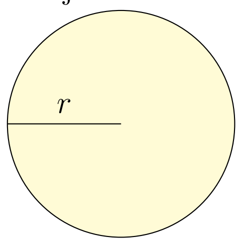
Trapezium



$O = a+b+c+B$

$A = \frac{b+B}{2}.h$
Als basis gebruiken we de gemiddelde breedte

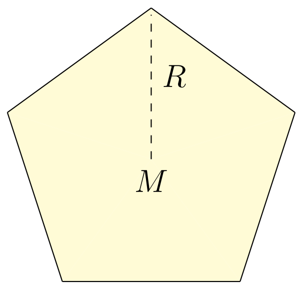
Schijf



$O = 2\pi r$
Diameter $D = 2.r$
r is de straal

$A = \pi r^2$
$A = \frac{\pi D^2}{4}$

Regelmatige n-hoek of veelhoek
Bij zo'n veelhoek zijn alle zijden z_n even lang
en zijn alle hoeken even groot.



$O = n.z_n$
$O = n.2r.\sin(\frac{\pi}{n})$

$A = n.r^2.\sin(\frac{\pi}{n}).\cos(\frac{\pi}{n})$

Tabel 2: Omtrek en oppervlakte van vlakke figuren (2)

1.3 Ruimtefiguren

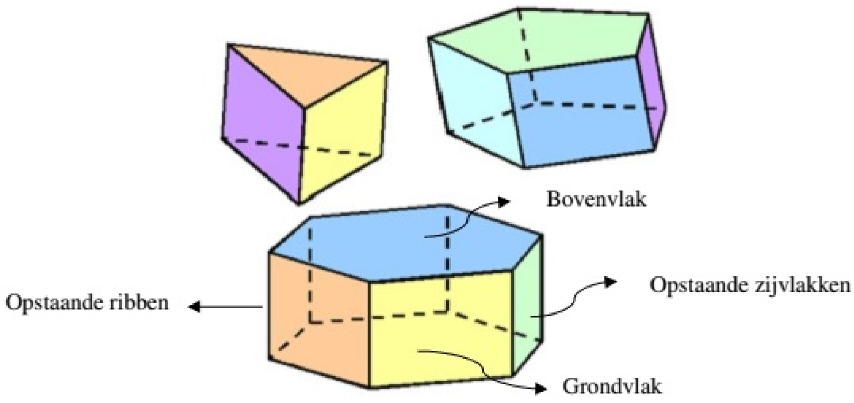
Prisma

Definitie Een prisma is een ruimtefiguur waarvan twee zijvlakken evenwijdig zijn (bv. het grond- en bovenvlak) en de overige zijvlakken zijn evenwijdig met eenzelfde lijn die de evenwijdige vlakken snijdt.

Een prisma wordt dus begrensd door twee evenwijdige en even grote veelhoeken (drie-, vier-, vijfhoeken,...) die we het *grondvlak en het bovenvlak* noemen. De *opstaande zijvlakken* bestaan uit rechthoeken of parallellogrammen. De ribben die niet in het grond- of bovenvlak gelegen zijn hebben allen dezelfde lengte, we noemen ze de *opstaande ribben*.

Naargelang het aantal opstaande zijvlakken spreken we van een driezijdig, vierzijdig, vijfzijdig,... prisma.

Een *recht* prisma is een prisma, waarin de verbindende ribben en zijvlakken loodrecht op het grondvlak staan. Dit houdt in dat de verbindende zijvlakken rechthoeken zijn. Een scheef *prisma* is een prisma, waarvan de verbindende ribben en zijvlakken niet loodrecht op het grondvlak staan. Dit houdt in dat de verbindende zijvlakken parallellogrammen zijn.



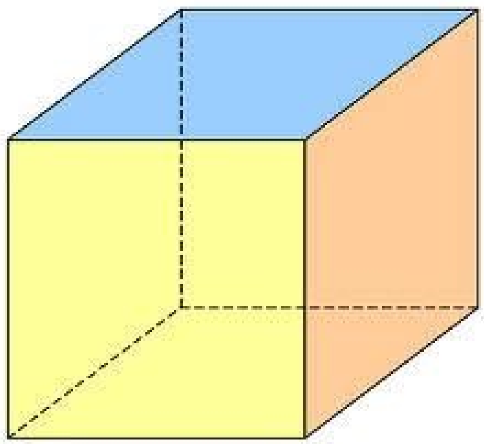
Onthoud Oppervlakte van een prisma: $A = \text{opp}_{\text{grondvlak}} + \text{opp}_{\text{bovenvlak}} + \text{opp}_{\text{zijkanten}}$
Volume van een prisma: $V = \text{opp}_{\text{grondvlak}} \cdot \text{hoogte}$

We onderscheiden een drietal bijzondere prisma's.

Kubus of hectaëder

Definitie Elk zijvlak van de kubus vormt een vierkant.

Alle 8 ribben zijn dus even lang. Een kubus is een bijzonder recht prisma.

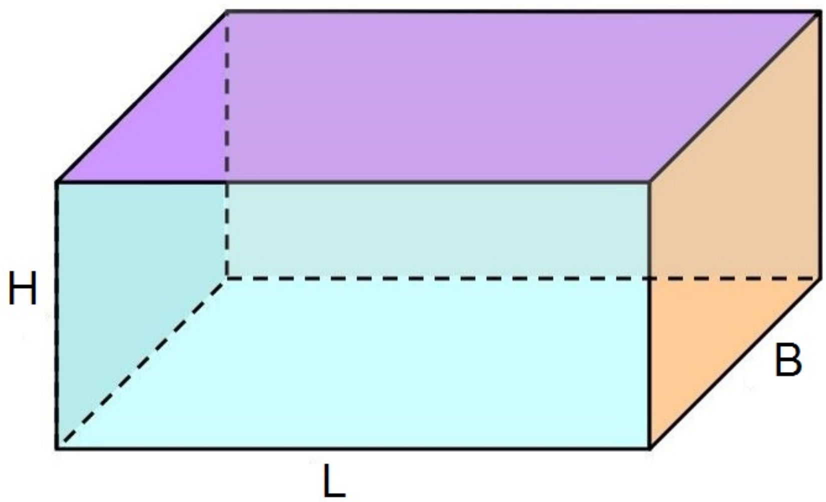


Onthoud Oppervlakte van een lubus: $A = 6z^2$
Volume van een kubus: $V = z^3$

Balk

Definitie De 6 zijvlakken van de balk bestaan uit rechthoeken.

Een balk is ook een bijzonder recht prisma. Een balk is tevens een rechthoekig parallellepipedum.

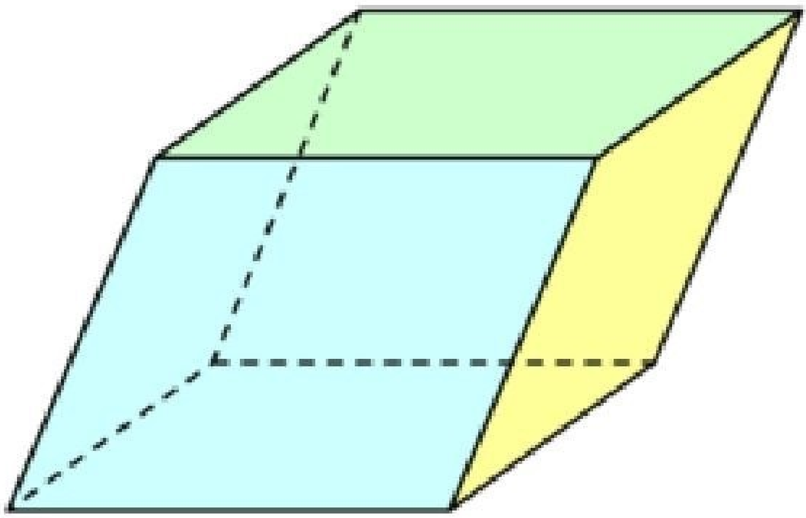


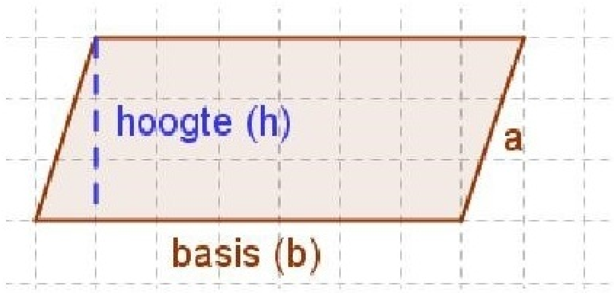
Onthoud Oppervlakte van een prisma: $A = 2(L \cdot B + B \cdot H + H \cdot L)$
Volume van een prisma: $V = L \cdot B \cdot H$

Parallellepipedum

Definitie Een parallellepipedum is een veelvlak waarvan alle 6 zijvlakken bestaan uit parallellogrammen die paarsgewijs gelijk en evenwijdig zijn. Dus ook het grond- en het bovenvlak zijn parallellogrammen.

Een parallellepipedum is een bijzonder scheef prisma, terwijl de kubus en de balk speciale gevallen zijn van een parallellepipedum.





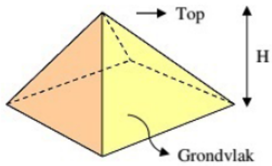
Onthoud Oppervlakte van een prisma: $A =$ som van de oppervlakten

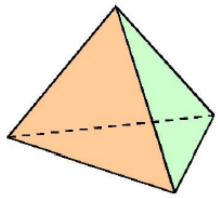
Volume van een prisma: $V = \text{opp}_{\text{grondvlak}} \cdot \text{hoogte}$

Piramide

Definitie Een piramide is een ruimtefiguur waarvan het grondvlak een veelhoek (driehoek, vierhoek, vijfhoek, ...) is en waarvan de hoekpunten verbonden worden met een willekeurig punt in de ruimte. Dit punt noemen we de top van de piramide. De opstaande zijvlakken zijn allemaal driehoekig.

Een rechte piramide heeft als grondvlak een regelmatige veelhoek en de top ligt boven het centrum van het grondvlak. Alle zijvlakken hebben dezelfde driehoekige vorm.





Onthoud Oppervlakte: $A =$ som van alle oppervlakten
Volume: $V = \frac{1}{3}\text{opp}_{\text{grondvlak}} \cdot \text{hoogte}$

Definitie Een *tetraëder of viervlak* is een ruimtefiguur bestaande uit vier driehoekige vlakken. Het is dus een piramide met een driehoekig grondvlak.

Een *regelmatig viervlak* bestaat uit vier gelijkbenige driehoeken.

1.4 Omwentelingslichamen

Deze lichamen hebben ten minste één grensvlak dat niet vlak is. We noemen dit vlak een gebogen vlak of zijdelingsoppervlak of manteloppervlak. Omwentelingslichamen ontstaan door het wentelen van een vlak rond een rechte. Deze rechte noemen we dan de omwentelingsas.

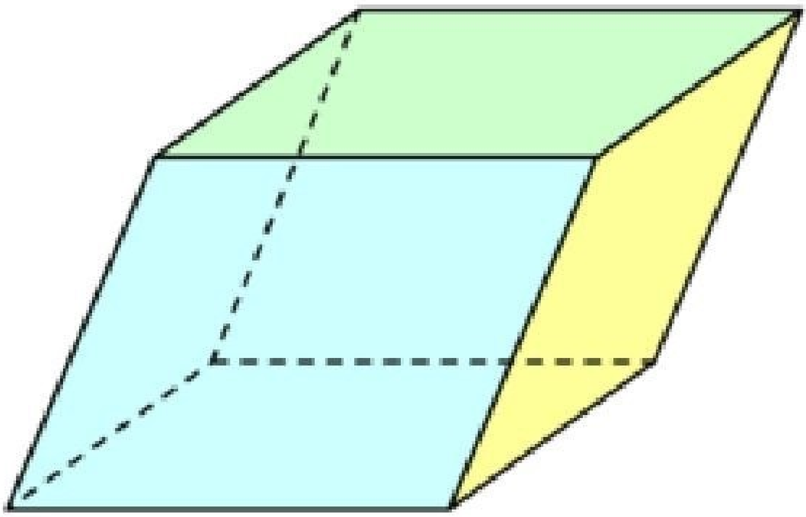
Cilinder

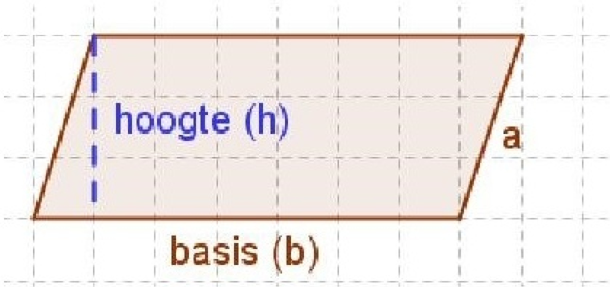
Definitie Een cilinder is een lichaam dat ontstaat wanneer we een rechthoek met afmetingen R en H om n van zijn zijden laten wentelen.

Beschouw de omwentelingscilinder, met R als de straal van het grond- en bovenvlak en H als de hoogte.

Het grond- en bovenvlak zijn twee evenwijdige schijven met de zelfde straal R. De afstand tussen (de middelpunten van) het grond- en bovenvlak noemen we de hoogte H. Bij een *rechte cilinder* staat de omwentelingsas loodrecht op het grondvlak, zo niet dan spreken we van een *scheve cilinder*.

De totale oppervlakte van de cilinder is gelijk aan de som van de oppervlakten van het grond- en het bovenvlak (= oppervlakte schijf is πR^2) en de zijdelingse oppervlakte (= een rechthoek met oppervlakte $2\pi R \cdot H$). De inhoud van de cilinder is het product van oppervlakte grondvlak met de hoogte.





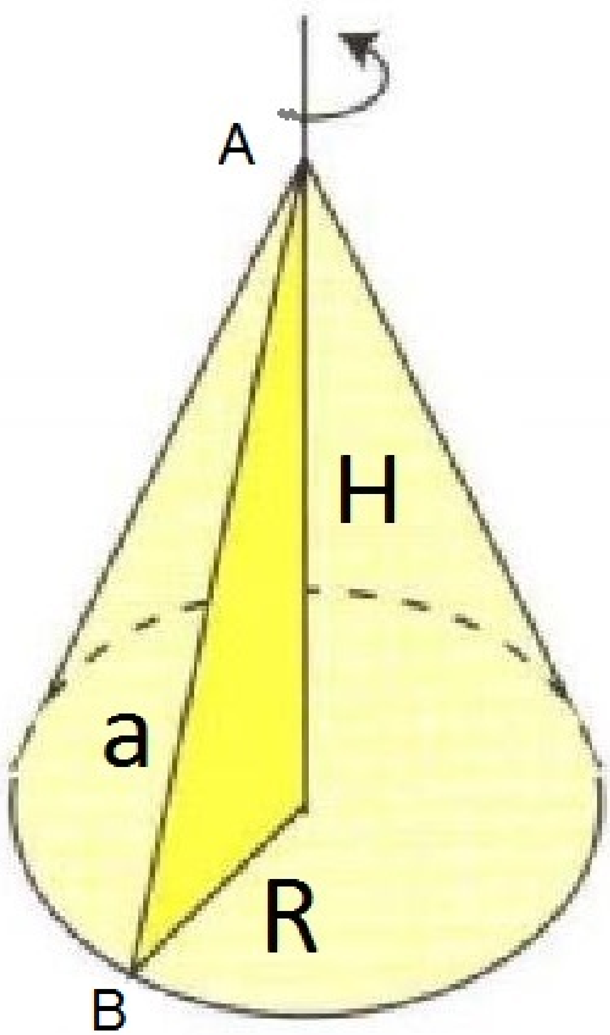
Onthoud Oppervlakte: $A = 2\pi R^2 + 2\pi RH$
Volume: $V = \pi R^2 H$

Kegel

Definitie Een kegel is het lichaam dat ontstaat als we een rechthoekige driehoek laten wentelen om één van zijn rechthoekszijden. Het grondvlak van de kegel is een schijf met straal R. De afstand van de top tot het middelpunt van het grondvlak noemen we de hoogte H van de kegel. Het apothema a van de kegel is de lengte van het lijnstuk $[AB]$, we spreken ook wel van de schuine hoogte.

De lengte van het apothema kan gemakkelijk berekend worden a.d.h.v. de stelling van Pythagoras: $a = R + H$.

De totale oppervlakte van de kegel is gelijk aan de som van de oppervlakte van het grondvlak (= oppervlakte schijf is πR^2) en de zijdelingse oppervlakte (πRa). De inhoud van de kegel is het product van oppervlakte grondvlak met de hoogte en de constante.

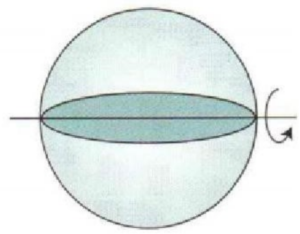


Onthoud Oppervlakte: $A = \pi R^2 + \pi R a$
Volume: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

Bol

Definitie Een bol is het lichaam dat ontstaat als we een schijf laten wentelen om de middellijn.

Een bol heeft maar één zijvlak, we spreken van het boloppervlak. Alle punten van het boloppervlak liggen op dezelfde afstand van het middelpunt. Deze afstand noemen we de straal R.



Onthoud Oppervlakte: $A = 4\pi R^2$
Volume: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

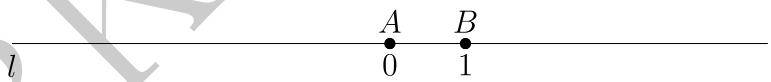
1.5 Test oppervlakte en inhoudsberekeningen

TODO

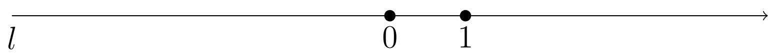
2 Analytische meetkunde

2.1 Abscis van een punt op een geijkte rechte

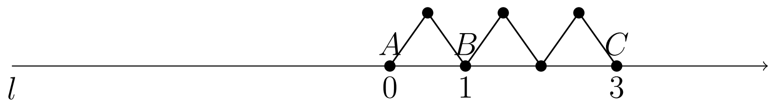
De verzameling $\mathbb{R}$ van de reële getallen kun je voorstellen als de verzameling van de punten op een geijkte rechte. Een geijkte rechte is een rechte l waarop een paar van 2 verschillende punten $(A; B)$ gekozen is. De volgorde van zulke punten heeft belang. Het eerste punt A heet de oorsprong van de ijk. Deze oorsprong komt overeen met het getal 0. Het tweede punt B komt overeen met het getal 1.



De richting van A naar B noem je de positieve richting van de geijkte rechte. Omdat op l door de ijk een positieve richting gedefinieerd is noem je l ook een georiënteerde rechte. Die oriëntatie duidt je vaak aan met een pijl. Je stelt een georiënteerde rechte ook voor zoals op volgende tekening.



Een natuurlijk getal n (bijvoorbeeld 3) komt overeen met het punt C op l langs dezelfde kant van A als het punt B door n keer vanuit A de afstand van A naar B af te passen. Je ziet dit geïllustreerd voor $n = 3$.



Rationaal getal

Een rationaal getal gegeven door een positieve breuk $\frac{n}{m}$ stel je als volgt voor door een punt C op l. Je verdeelt het lijnstuk van A naar B in m gelijke delen (je ziet straks hoe je dat kunt construeren). Noem B' het eerste deelpunt na A. Als $n = a + \frac{n'}{m}$ met $0 < n' < m$ en a een natuurlijk getal, dan duidt je eerst het punt C' aan op l dat overeenkomt met het natuurlijke getal a. Vervolgens pas je vanuit C' in de positieve richting n' keer de afstand van A naar B' af. Dit is het punt C.

Je ziet dit geïllustreerd voor $\frac{n}{m} = \frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4}$ (dus $a = 2$ en $n' = 3$).

Negatief getal

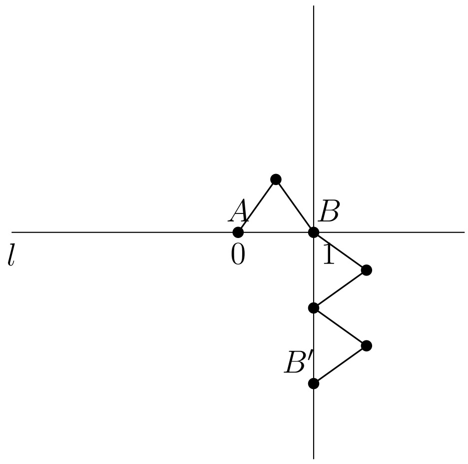
Een negatief geheel getal of een negatief rationaal getal construeer je door afstanden af te passen naar de negatieve richting van de geijkte rechte l.

Reëel getal

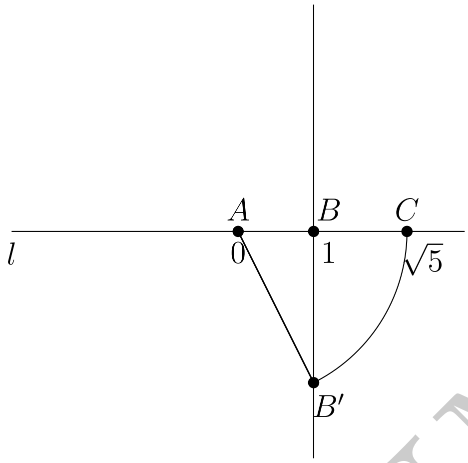
Met veel meer geavanceerde wiskunde kan aangetoond worden dat ieder reëel getal (kommagetal) overeenkomt met een punt van l en dat ieder punt van l ook overeenkomt met een reëel getal. Een geijkte rechte is daardoor een meetkundige voorstelling van de verzameling $\mathbb{R}$ van de reële getallen.

Door gebruik te maken van de Stelling van Pythagoras kun je bijvoorbeeld ook het punt van l dat overeenkomt met een vierkantswortels uit een natuurlijk getal construeren. Je ziet dit geïllustreerd voor $\sqrt{5}$. Je gebruikt daarbij dan $\sqrt{5}$ de schuine zijde is van een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden 1 en 2.

Je start met de geijkte rechte waar A en B op liggen. Loodrecht (winkelhaak) op l door B trek je een rechte en daarop pas je met passer tweemaal vanuit B de afstand van A tot B af. Dit geeft het punt B', hieronder te zien in de figuur.



Met de passer met middelpunt A en straal de afstand van A tot B' maak je een cirkelboog die op l het punt C geeft. Het resultaat is hieronder te zien in de figuur.



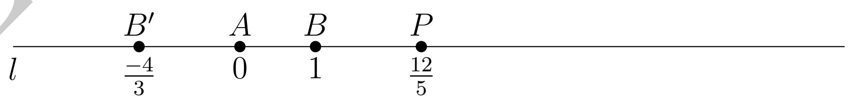
Algemeen kan voor ieder positief rationaal getal het punt op l dat overeenkomt met de vierkanstwortel geconstrueerd worden.

Wiskundig kan aangetoond worden dat je het punt dat op l overeenkomt met $\sqrt[3]{2}$ niet op soortgelijke wijze kunt construeren. Ook een reëel getal zoals π kun je niet op l construeren.

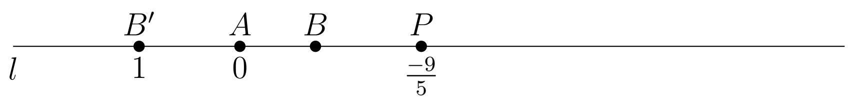
Definitie Voor een punt P op l noem je het reële getal x dat met P overeenkomt de abscis van P en je schrijft $\text{ab}(P) = x$.

Merk op dat je pas over de abscis van een punt op een rechte kunt spreken nadat een ijk op de rechte vastgelegd is.

Voorbeeld 1 l is een geijkte rechte met ijk $(A; B)$. B' is het punt op l met $\text{ab}(B') = -\frac{4}{3}$ en P is het punt op l met $\text{ab}(P) = \frac{12}{5}$. Wat is de abscis van P als je op l de ijk $(A; B')$ neemt?



Het kleinste gemeenschappelijk veelvoud van 3 en 5 is 15. Met deze noemer bekom je $\text{ab}(B') = -\frac{20}{15}$ en $\text{ab}(P) = \frac{36}{15}$. De afstand van P tot A is $\frac{36}{15} \cdot \frac{15}{20} = \frac{36}{20}$-ste van de afstand van A tot B'. Omdat P aan de andere kant van A ligt als B' is de abscis van P ten opzichte van de ijk $(A; B')$ gelijk aan $-\frac{36}{20} = -\frac{9}{5}$.



Kies een vaste lengte-eenheid (bijvoorbeeld 1 cm) . Op een rechte l kies je een ijk $(A; B)$ zodat de afstand van A tot B gelijk is aan die lengte-eenheid. Je zegt dat de geijkte rechte dan overeenkomt met de lengte-eenheid.

Op een geijkte rechte l die overeenkomt met de lengte-eenheid kies je twee punten P en Q. De afstand van P tot Q is dan het verschil tussen de abscissen $\mathrm{ab}(P)$ en $\mathrm{ab}(Q)$. Noteer $d(P; Q)$ voor de afstand van P tot Q. Je bekomt in dat geval:

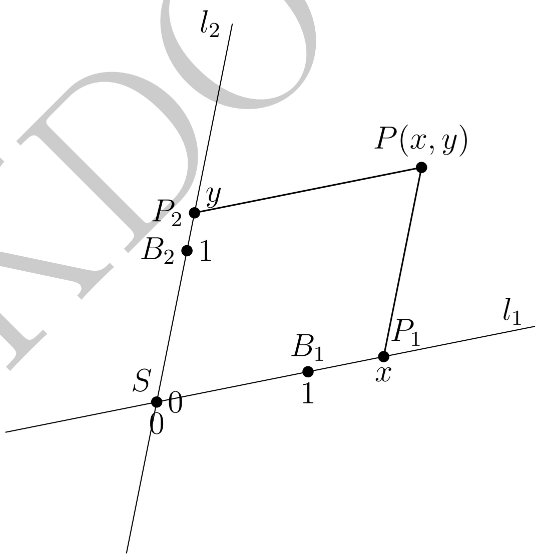
$$d(P; Q) = |\,\mathrm{ab}(Q) - \mathrm{ab}(P)|\ .$$

2.2 Reëel getal - voorbeeld

Zie filmpje MOOC.

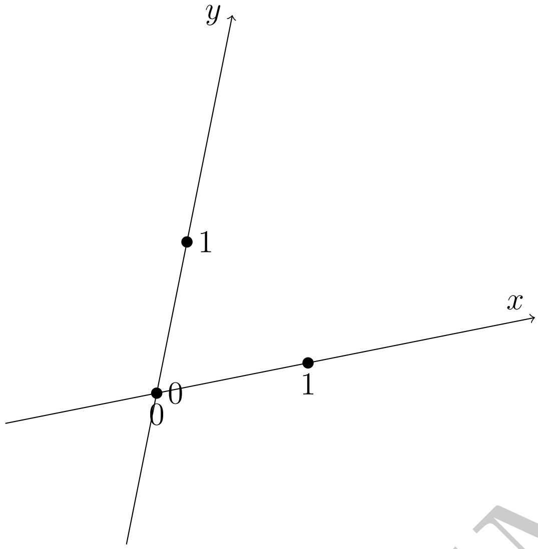
2.3 Euclidische coördinaten in het vlak

In het vlak kies je een paar $(l_1; l_2)$ van snijdende rechten met snijpunt S, zie Figuur **??**. Herinner, bij een paar is de volgorde van belang. Op beide rechten kies je een ijk met oorsprong S. Op l_1 noteer je $(S; B_1)$ voor die ijk en op l_2 noteer je $(S; B_2)$. Zulke twee geijkte rechten in het vlak noem je een assenstelsel in het vlak. Het snijpunt S van l_1 en l_2 noem je de oorsprong van het assenstelsel, vaak aangeduid met O.



Neem een punt P in het vlak. Het beeld door P te projecteren evenwijdig aan l_2 op l_1 noem je P_1. De abscis van P_1 op de geijkte rechte l_1 is x. Het beeld door P te projecteren evenwijdig aan l_1 op l_2 noem je P_2. De abscis van P_2 op de geijkte rechte l_2 is y. Je noemt het paar reële getallen $(x; y)$ de coördinaten van P ten opzichte van het assenstelsel. Je noteert $\mathrm{co}(P) = (x; y)$. Ook hier bedoelen we met een paar getallen $(x; y)$ dat de volgorde belang heeft. In dit geval mogen (en kunnen) de twee getallen x en y gelijk zijn.

Je noemt in deze situatie de geijkte rechte l_1 vaak de x-as en de geijkte rechte l_2 de y-as. Op een tekening noteer je vaak x en y bij die assen en je duidt ook de pijl van de oriëntatie aan, zoals hieronder.



Opmerking

- de coördinaten van de oorsprong O zijn $(0;0)$.
- de coördinaten van punten op de x-as zijn van de vorm $(x;0)$.
- de coördinaten van punten op de y-as zijn van de vorm $(0;y)$.

Kies een vaste lengte-eenheid (bijvoorbeeld 1 cm). Een Euclidisch assenstelsel in het vlak is een assenstelsel dat voldoet aan de twee volgende eisen

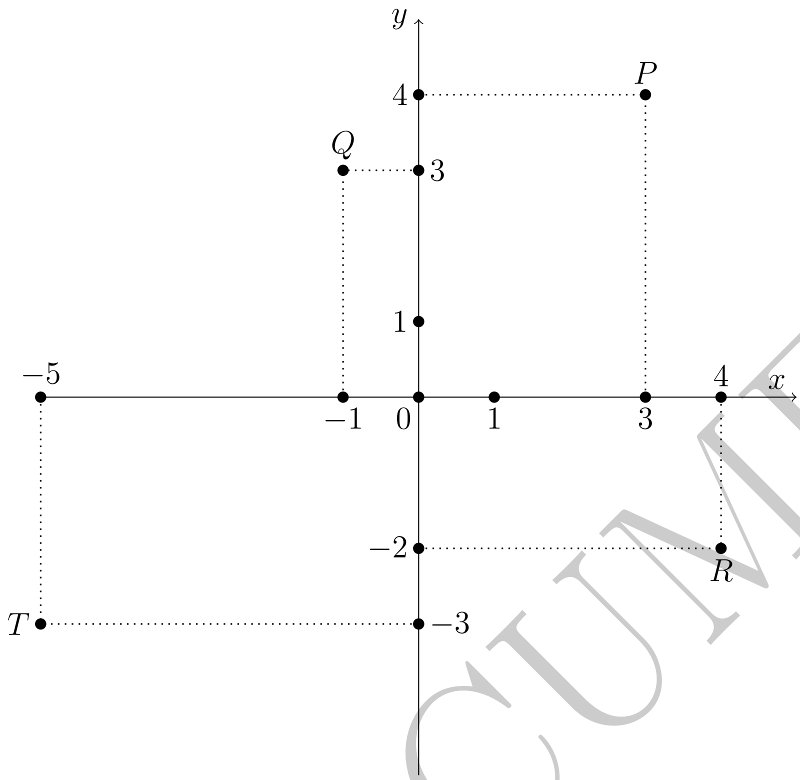
- de x-as en y-as staan loodrecht op elkaar.
- de geijkte assen x en y komen overeen met de lengte-eenheid.

De coördinaten van een punt P in het vlak voorzien van een Euclidisch assenstelsel heten Euclidische coördinaten. In het vervolg van de cursus (tenzij anders vermeld) gebruiken we enkel Euclidische coördinaten in een vlak.

Vaak teken je een Euclidisch assenstelsel als volgt

- de x-as horizontaal met de positieve richting naar rechts.
- de y-as verticaal met de positieve richting naar boven.

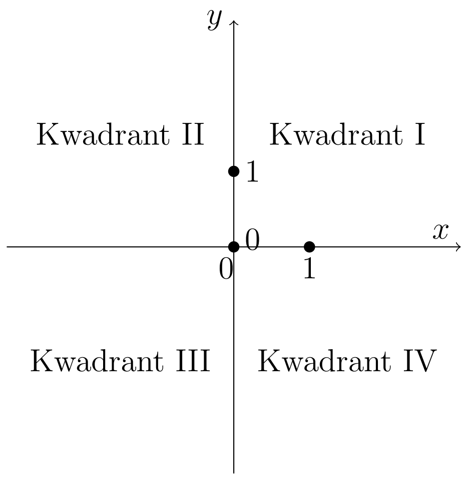
In deze ligging is de georiënteerde hoek van de positieve richting van de x-as naar de positieve richting van de y-as $90°$ in tegenwijzerszin, zoals hieronder. Zulk assenstelsel in het vlak noem je positief georiënteerd.



Op de volgende figuur zijn in een Euclidisch assenstelsel met die ligging de volgende punten met hun coördinaten aangeduidt: $P(3;4)$, $Q(-1;3)$, $R(4;-2)$ en $T(-5;-3)$.

Een assenstelsel verdeelt het vlak in 4 delen. Je noemt dat de kwadranten. Deze nummer je in tegenwijzerszin. Je start met het deel waar x en y allebei positief zijn. Dat noem je het eerste kwadrant, zoals in de figuur hieronder.

kwadrant	x	y
I	+	+
II	-	+
III	-	-
IV	+	+

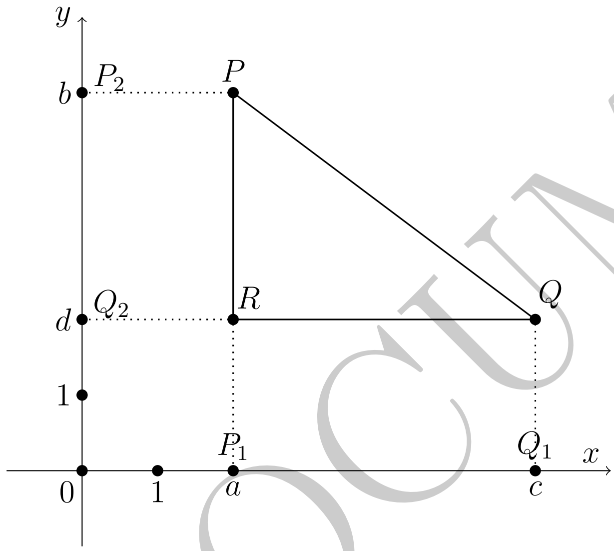


2.4 Afstand tussen twee punten in het vlak

Het vlak is voorzien van een Euclidisch assenstelsel. Neem twee verschillende punten $P(a;b)$ en $Q(c;d)$ in het vlak. We stellen de formule op waarmee je de afstand tussen P en Q (genoteerd $d(P;Q)$) uitdrukt met de Euclidische coördinaten van P en Q.

De loodrechte projecties van P en Q op de x-as noem je P_1 en Q_1. De loodrechte projecties van P en Q op de y-as noem je P_2 en Q_2. Deze punten hebben coördinaten $P_1(a; 0)$, $Q_1(c; 0)$, $P_2(0; b)$ en $Q_2(0; d)$.

Als $b = d$ dan is de rechte PQ evenwijdig met de x-as. Als $a = c$ dan is de rechte PQ evenwijdig met de y-as. Stel dat de rechte PQ noch horizontaal, noch verticaal is (dus $b \neq d$ en $a \neq c$). Het snijpunt van de rechte door P evenwijdig met de y-as met de rechte door Q evenwijdig met de x-as noem je R.



In de rechthoekige driehoek PQR geeft de Stelling van Pythagoras:

$$|PQ|^2 = |PR|^2 + |QR|^2.$$

Er geldt $|PR| = |Q_2P_2| = d(Q_2; P_2) = |b - d|$. Dit laatste is waar omdat b en d abscissen zijn van P_2 en Q_2 op de geijkte y-as die overeenkomt met de lengte-eenheid. Er geldt ook $|QR| = |P_1Q_1| = d(P_1; Q_1) = |a - c|$. Invullen in de Stelling van Pythagoras geeft

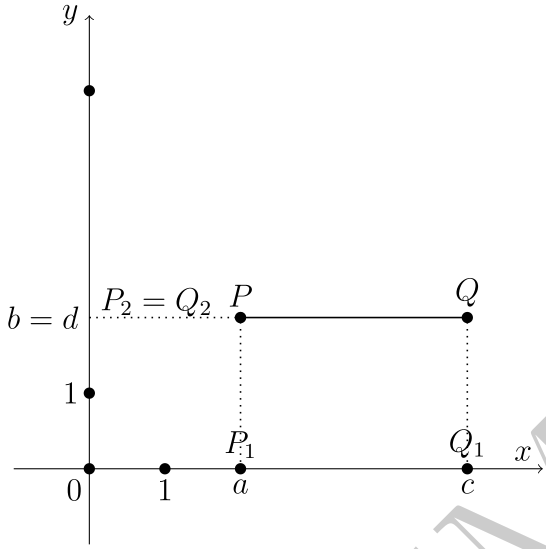
$$|PQ|^2 = (b - d)^2 + (a - c)^2 \ .$$

Hieruit vind je

$$d(P; Q) = \sqrt{(b - d)^2 + (a - c)^2} \ .$$

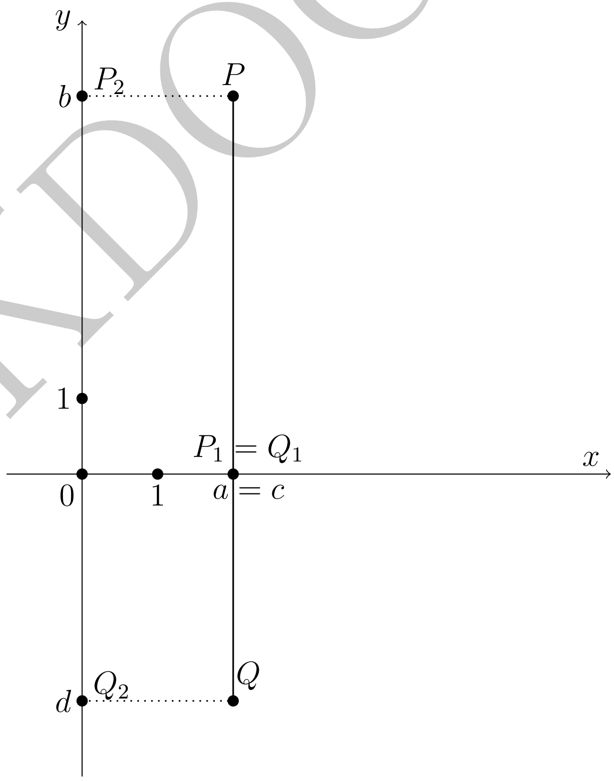
De formule geldt ook als de rechte PQ wel evenwijdig is met de x-as of de y-as.

- De rechte PQ is horizontaal, dus $b = d$.



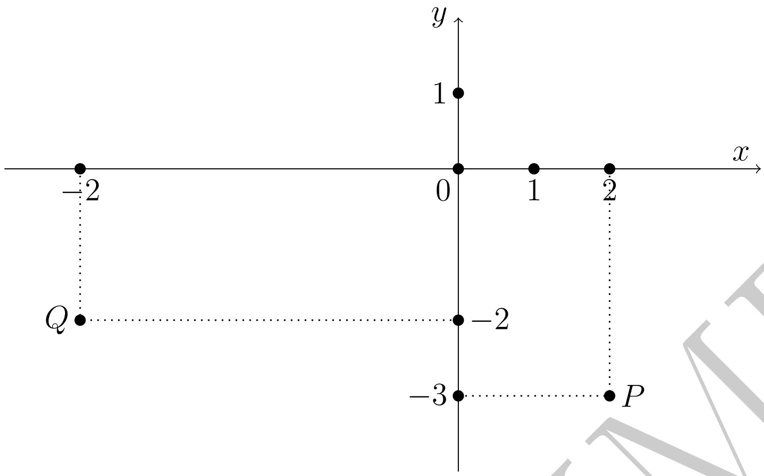
$$d(P;Q) = d(P_1;Q_1) = |c-a| \text{ en } \sqrt{(b-d)^2+(a-c)^2} = |c-a|$$

- De rechte PQ is verticaal, dus $a = c$.



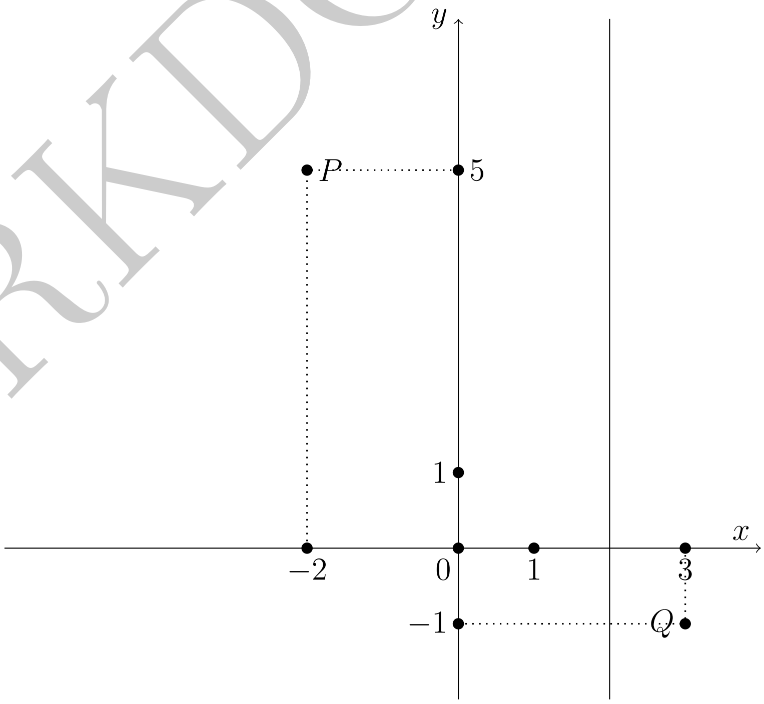
$$d(P;Q) = d(P_2;Q_2) = |d-b| \text{ en } \sqrt{(b-d)^2+(a-c)^2} = |b-d|$$

Voorbeeld 1 Bereken de afstand tussen $P(2;-3)$ en $Q(-5;-2)$.



$$d(P;Q) = \sqrt{(-5-2)^2 + (-2-(-3))^2} = \sqrt{50}$$

Voorbeeld 2 Gegeven zijn de punten $P(-2;5)$ en $Q(3;-1)$. Wat zijn de coördinaten van het punt R met x-coördinaat gelijk aan 2 dat even ver van P als van Q ligt?



R heeft coördinaten $(2;y)$. We zoeken y zodat $d(R;P) = d(R;Q)$.

$$d(R;P) = \sqrt{(-2-2)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{16 + (y-5)^2}$$

$$d(R;Q) = \sqrt{(3-2)^2 + (y-(-1))^2} = \sqrt{1+(y+1)^2}$$

Hieruit volgt dat $d(R;P) = d(R;Q)$ als en alleen als

$$16 + (y-5)^2 = 1 + (y+1)^2$$

Uitwerken van de kwadraten geeft

$$16 + y^2 - 10y + 25 = 1 + y^2 + 2y + 1 \text{ dus } 12y = 39 \ .$$

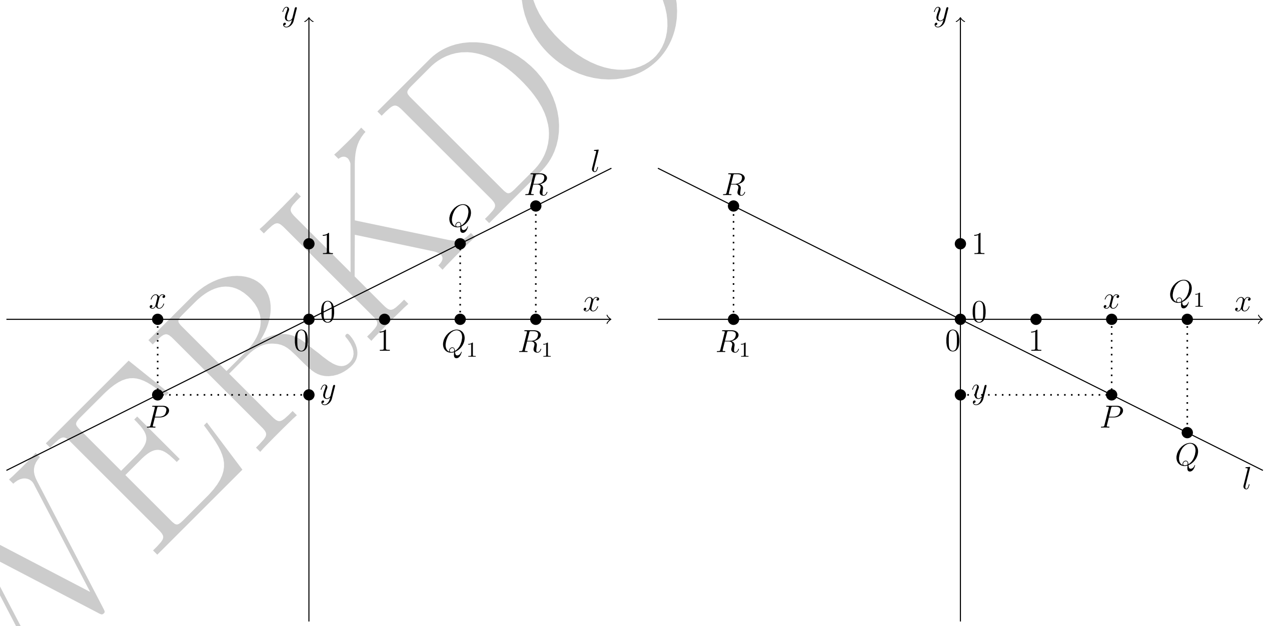
Het punt R heeft coördinaten $(2; \frac{39}{12})$.

2.5 Afstand tussen twee punten - voorbeeld

Zie filmpje MOOC.

2.6 Vergelijking van een rechte

Het vlak is voorzien van een Euclidisch assenstelsel met oorsprong O. In het vlak is l een rechte door O verschillend van één van de assen van het assenstelsel. Je neemt op l twee verschillende punten $Q(x_1; y_1)$ en $R(x_2; y_2)$ allebei verschillend van O. Je noemt Q_1 (resp.R_1) de loodrechte projectie van Q (resp. R) op de x-as. Omdat de rechthoekige driehoeken OQQ_1 en ORR_1 even grote overeenkomstige hoeken hebben zijn ze gelijkvormig.



Hieruit volgt dat de verhoudingen van lengten van overeenkomstige zijden gelijk zijn, dus

$$\frac{|RR_1|}{|QQ_1|} = \frac{|OR_1|}{|OQ_1|} \ .$$

In termen van coördinaten bekom je

$$\frac{|y_1|}{|y_2|} = \frac{|x_1|}{|x_2|} \text{ en dus } \frac{|y_1|}{|x_1|} = \frac{|y_2|}{|x_2|} \ .$$

Merk op dat op de linkse figuur voor een punt $P(x;y)$ op l verschillende van O steeds geldt dat $\frac{y}{x} > 0$ terwijl op de rechtse figuur steeds geldt $\frac{y}{x} < 0$. De tekens van $\frac{y_1}{x_1}$ en $\frac{y_2}{x_2}$ zijn dus steeds gelijk en je bekomt daardoor zelfs

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} .$$

Je bekomt hieruit dat een getal $m \in \mathbb{R}_0$ bestaat zodat voor ieder punt $P(x;y)$ op l verschillende van O geldt

$$\frac{y}{x} = m \text{ en dus } y = mx .$$

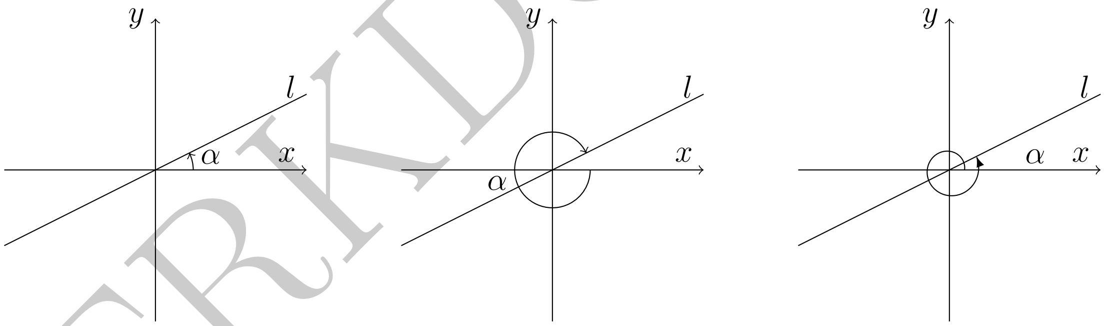
Deze laatste vergelijking is een nodige en voldoende voorwaarde opdat een punt $P(x;y)$ in het vlak tot de rechte l behoort. Het is een vergelijking van l. Voor l als op de linkse figuur is $m > 0$ en voor l als op de rechtse figuur is $m < 0$.

Als l de x-as is dan behoort een punt $P(x;y)$ van het vlak tot l als en alleen als $y = 0$. Dit laatste is dan een vergelijking van l (dus van de x-as). Merk op, door $m = 0$ te nemen in vorig resultaat bekom je dat je de vergelijking eveneens in de vorm $y = 0.x$ kan schrijven.

Als l de y-as is dan behoort een punt $P(x;y)$ van het vlak tot l als en alleen als $x = 0$. Dit laatste is dan een vergelijking van l (dus van de y-as). Merk op, er is geen enkel getal m zodat je die laatste vergelijking kunt schrijven in de vorm $y = mx$.

Voor een rechte l door de oorsprong is α een georiënteerde hoek van de x-as naar l.

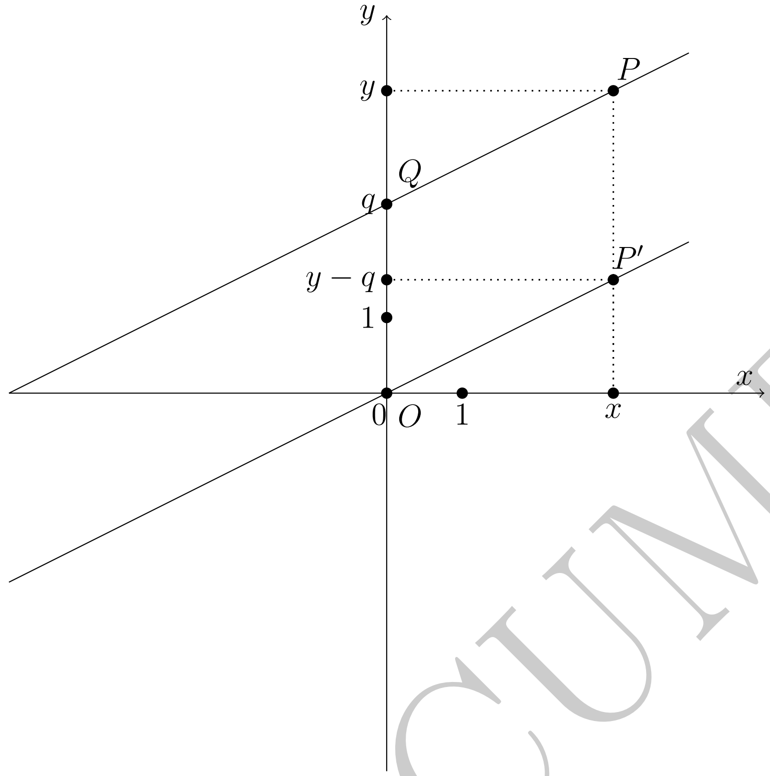
- Een georiënteerde hoek is positief in tegenwijzerszin en negatief in wijzerszin.
- De hoek α is slechts op een veelvoud van 180^o (π radialen) na bepaald.



Zulke georiënteerde hoek komt overeen met een punt op de goniometrische cirkel. Uit de constructie van de tangens bekom je dat $(1; \tan\alpha)$ de coördinaten zijn van een punt op l (als l niet de y-as is). Omdat de punten van l moeten voldoen aan een vergelijking $y = mx$ bekom je $m = \tan\alpha$.

Samengevat bekomen we het volgende resultaat. De vergelijking van een rechte l door de oorsprong O verschillend van de y-as is $y = (\tan\alpha)x$. Hierbij is α de georiënteerde hoek tussen de positieve x-as en de rechte l. De vergelijking van de y-as is $x = 0$.

Een rechte l die niet door de oorsprong O gaat en niet evenwijdig is met de y-as snijdt de y-as in een punt $Q(0;q)$. De rechte l' door de oorsprong O die evenwijdig is aan l heeft een vergelijking $y = mx$.



Voor een punt $P(x;y)$ op l is P' de projectie van P op l evenwijdig met de y-as.

De coördinaten van P' zijn $(x;y-q)$ en omdat P' tot de rechte l' met vergelijking $y=mx$ behoort moet $y-q=mx$. Je bekomt dat een nodige en voldoende voorwaarde opdat een $P(x;y)$ in het vlak tot de rechte l behoort is $y=mx+q$. Dat getal m is $\tan\alpha$ met α de georiënteerde hoek tussen de positieve x-as en de rechte l. Je noemt m de richtinscoëfficiënt van l en je noteert $m=\text{rico}(l)$.

Je besluit : een vergelijking van l is $y=mx+q$.

Indien l een rechte is evenwijdig met de y-as dan bestaat $a\in\mathbb{R}$ zodat l bestaat uit alle punten $P(x;y)$ in het vlak waarvoor $x=a$. In dat geval in $x=a$ een vergelijking van l. Merk op dat je zulke vergelijking niet kunt schrijven in vorm $y=mx+q$, zulke rechte l heeft geen richtingscoëfficiënt.

Opmerking Als $\text{rico}(l)=m$ en $P_0(x_0;y_0)$ is een punt op l dan is

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

een vergelijing van l. Duidelijk voldoen de coördinaten van P_0 aan de vergelijking. Je kunt de vergelijking herleiden tot de vorm $y=mx+(y_0-mx_0)$. Dit is van de vorm $y=mx+q$ met $q=y_0-mx_0$ en dus de vergelijking van een rechte. In die laatste vorm herken je ook dat m de richtinscoëfficiënt is van die rechte.

2.7 Vergelijking rechte - voorbeeld

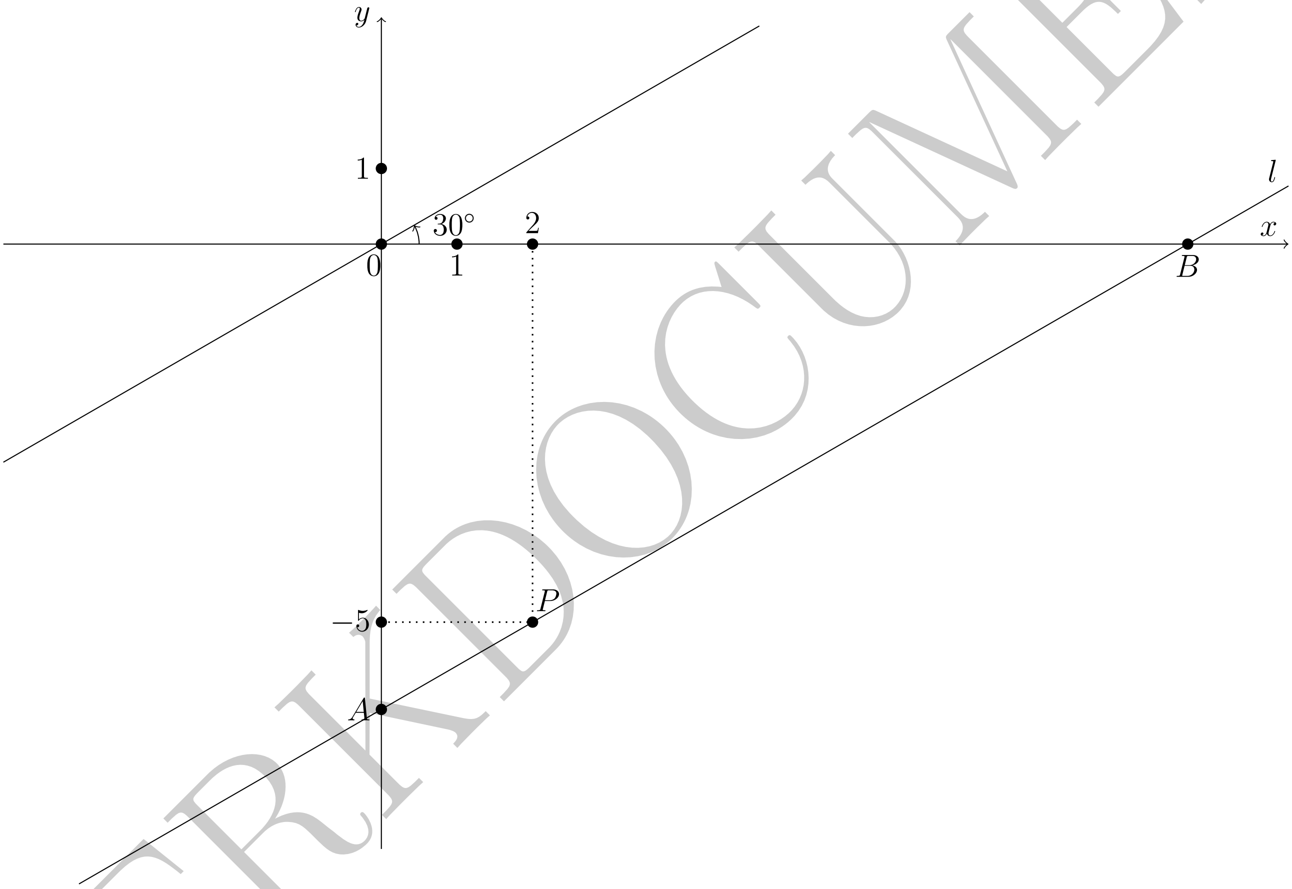
Zie filmpje MOOC.

2.8 Vergelijking rechte met richting en door gegeven punt - extra voorbeelden

Zie filmpje MOOC.

2.9 Vergelijking rechte met richting en door gegeven punt - extra voorbeelden

Voorbeeld 1 Geef een vergelijking van de rechte l zodat de georiënteerde hoek tussen de positieve x-as en l gelijk is aan 30^o en zodat het punt $P(2;-5)$ tot l behoort. Geef eveneens de coördinaten van het snijpunt van l met de x-as en met de y-as.



Er geldt rico$(l) = \tan(30^o) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. De vergelijking van l is $y-(-5) = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-2)$ en je bekomt

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 5 - \frac{2}{5} \text{ dus } y = 0,577x - 6,155 \;.$$

Omdat $q = -6,155$ is heeft het snijpunt A met de y-as coördinaten $(0;-6,155)$. (Dit vind je ook door $x = 0$ in de vergelijking in te vullen.) Op de x-as is $y = 0$. Voor het snijpunt B met de x-as geldt daarom $0,577x - 6,155 = 0$. Je bekomt

$$x = \frac{6,155}{0,577} = 10,667 \;.$$

Het snijpunt B met de x-as heeft coördinaten $(10,667;0)$.

We stellen nu de vergelijking op van een rechte door twee gegeven verschillende punten $P_1(x_1; y_1)$ en $P_2(x_2; y_2)$. Als $x_1 = x_2$ dan is de rechte evenwijdig met de y-as en de vergelijking is $x = a$ (met $a = x_1$).

Stel dat $x_1 \neq x_2$ (de rechte is dus niet evenwijdig met de y-as). De rechte heeft een vergelijking van de vorm $y = mx + q$. Deze vergelijking moet gelden als je de coördinaten van P_1 en P_2 invult. Dit geeft volgende gelijkheden:

$$y_1 = m.x_1 + q \text{ en } y_2 = m.x_2 + q \ .$$

Neem je van beide leden van deze twee gelijkheden telkens het verschil dan bekom je

$$y_2 - y_1 = m.(x_2 - x_1)$$

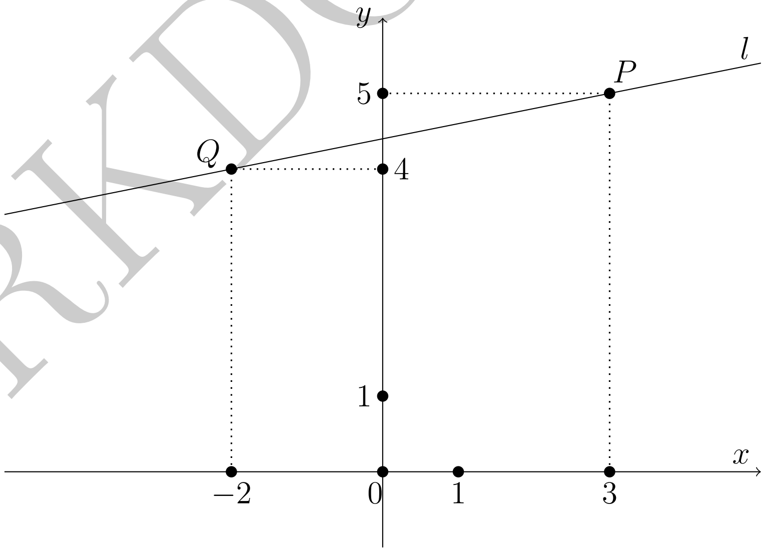
en omdat $x_1 \neq x_2$ bekom je

$$\text{rico}(P_1P_2) = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \ .$$

Je bekomt als vergelijking van de rechte P_1P_2

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \ .$$

Voorbeeld 2 Geef een vergelijking van de rechte l door de punten $P(3; 5)$ en $Q(-2; 4)$.



Invullen in voorgaande formule geeft

$$y - 5 = \frac{4 - 5}{-2 - 3}(x - 3)$$

en mits wat rekenwerk bekom je hieruit

$$y = \frac{1}{5}x + \frac{22}{5} \ .$$

Je kunt een vergelijking van een rechte steeds schrijven in de vorm $ax + by + c = 0$ met a en b niet allebei 0. Omgekeerd, een vergelijking van de vorm $ax + by + c = 0$ met a en b niet allebei gelijk aan 0 steeds een vergelijking van een rechte.

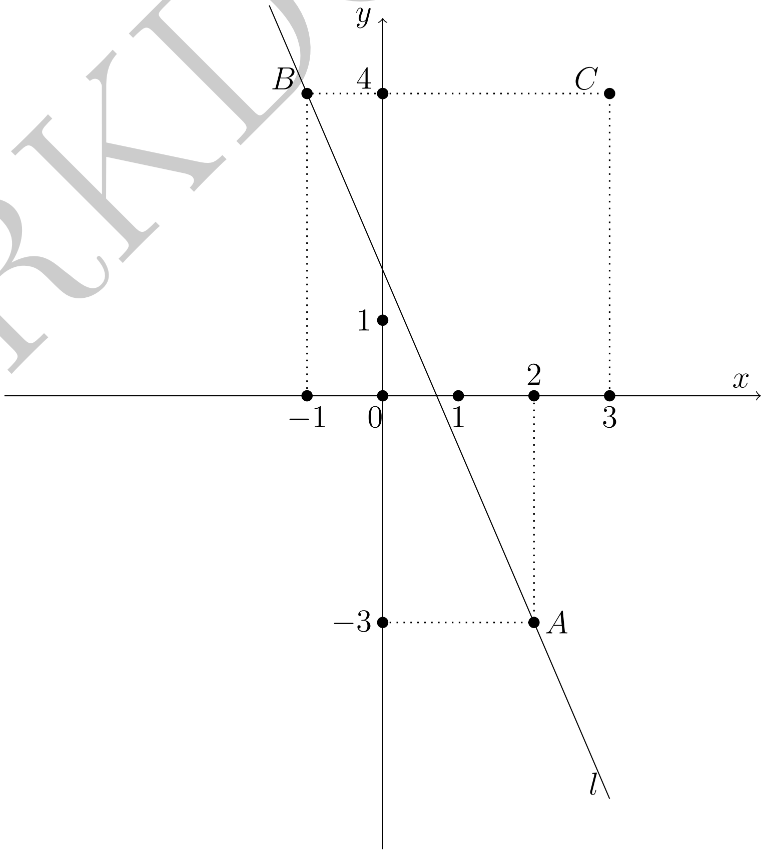
- Indien $b = 0$ dan is $a \neq 0$ en je kunt de vergelijking omvormen tot $x = -\frac{c}{a}$. Je bekomt een rechte evenwijdig met de y-as (door het punt $(-\frac{c}{a}; 0)$).
- Indien $b \neq 0$ dan kun je de vergelijking omvormen tot
$$y = \left(-\frac{a}{b}\right)x + \left(-\frac{c}{b}\right) .$$
Je bekomt de rechte met richtingscoëfficiënt $-\frac{a}{b}$ door het punt $(0; -\frac{c}{b})$.

2.10 Onderlinge ligging van twee rechten

Twee rechten l_1 en l_2 in het vlak zijn evenwijdig als en alleen als de positieve richting van de x-as even grote georiënteerde hoeken maakt met l_1 en met l_2. Hieruit volgen twee mogelijkheden:

- l_1 en l_2 zijn allebei evenwijdig met de y-as.
- $\text{rico}(l_1) = \text{rico}(l_2)$ (en dan zijn l_1 en l_2 niet evenwijdig met de y-as).

Voorbeeld 1 Gegeven zijn 3 punten $A(2 : -3)$, $B(-1; 4)$ en $C(3; 4)$. Geef een vergelijking van de rechte l door C evenwijdig aan de rechte AB.



De richtingscoëfficiënt m van rechte AB is

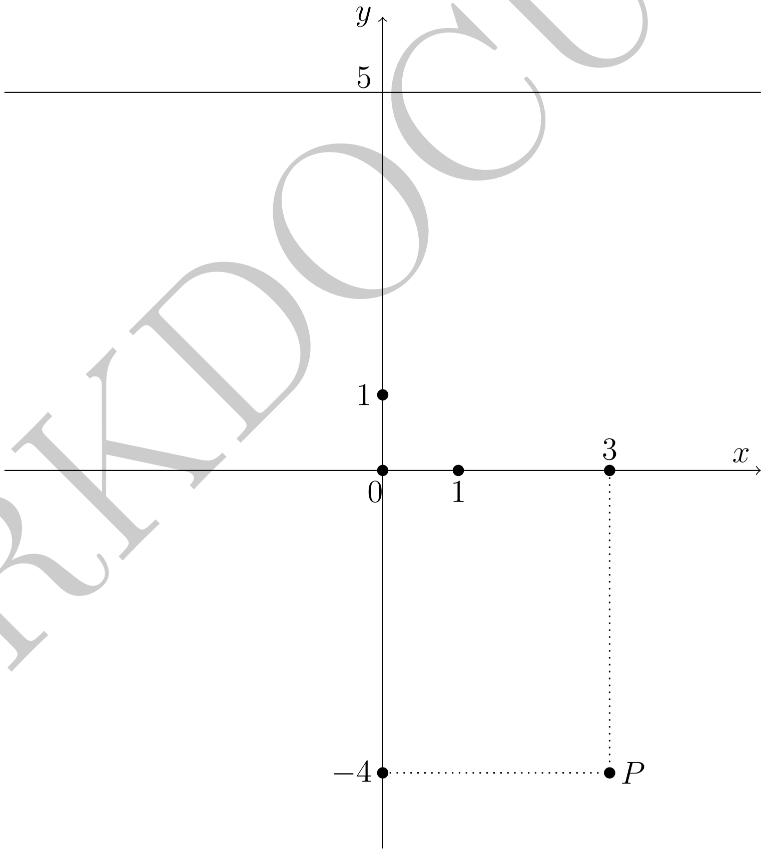
$$m = \frac{4-(-3)}{-1-2} = -\frac{7}{3} \ .$$

De richtingscëfficiënt van l moet dus ook -4 zijn. Omdat l ook door het punt C moet gaan bekomen we volgende vergelijking van l:

$$y - 4 = (-\frac{7}{3})(x-3) \text{ dus } 7x + 3y - 33 = 0 \ .$$

Een loodlijn op een rechte evenwijdig met de x-as (vergelijking van de vorm $y = b$) is een rechte evenwijdig met de y-as (vergelijking van de vorm $x = a$).

Voorbeeld 2 l is de rechte met vergelijking $y = 5$. Geef een vergelijking van de loodlijn l' op l door $P(3; -4)$.



Omdat l' een rechte is evenwijdig met de y-as heeft l' een vergelijking van de vorm $x = a$. Omdat $(P3; -4)$ op l' moet liggen moet $a = 3$. Een vergelijking van l' is dus $x = 3$.

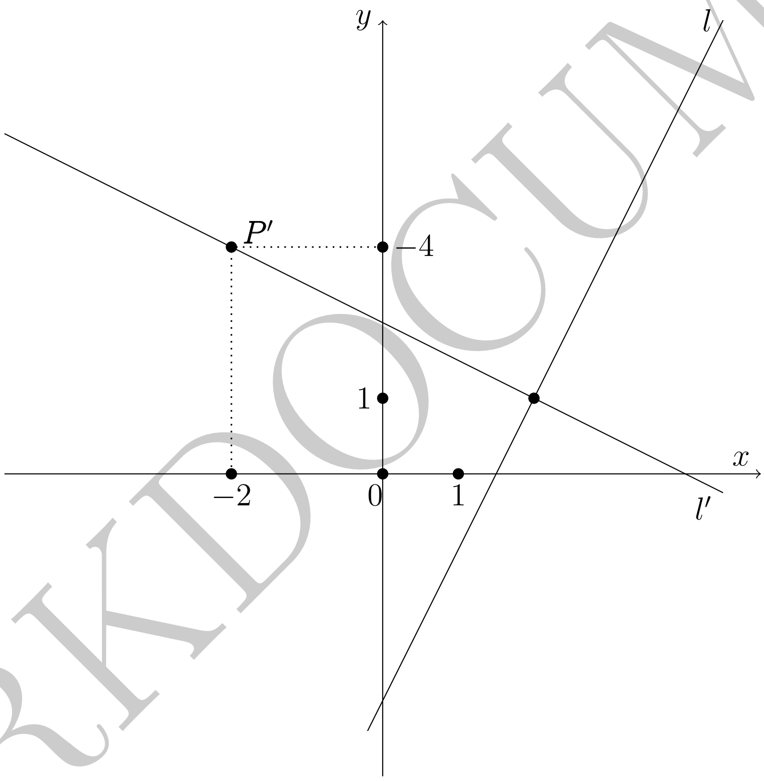
Een loodlijn op een rechte evenwijdig met de y-as (vergelijking van de vorm $x = a$) is een rechte evenwijdig met de x-as (vergelijking van de vorm $y = b$).

Stel nu dat l aan geen van beide assen evenwijdig is. Stel dat α een georiënteerde hoek is tussen de positieve richting van de x-as en de rechte l. In dat geval is de grootte van de hoek α geen veelvoud van 90^o. Dit impliceert dat de richtingscoëfficiënt $m = \tan(\alpha$ van de rechte l bestaat en verschillend is van 0. Als l' een loodlijn is op l dan is $\alpha + 90^o$ een georiënteerde hoek tussen de positieve richting van de x-as en l'. Omdat $\tan(\alpha + 90^o) = -\cot(\alpha) = -\frac{1}{\tan(\alpha)}$ bekom je dat $\text{rico}(l') = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{\text{rico}(l)}$.

Besluit: Als l en l' loodrechte op elkaar staan en geen van beide is evenwijdig met een as van het assenstelsel dan is

$$\text{rico}(l).\,\text{rico}(l') = -1 \ .$$

Voorbeeld 3 Gegeven zijn de rechte l met vergelijking $y = 2x - 3$ en het punt $P(-2;3)$. Geef een vergelijking voor de loodlijn l' door P op l. Geef eveneens de coördinaten van de loodrechte projectie van P op l.



Omdat $\text{rico}(l) = 2$ is $\text{rico}(l') = -\frac{1}{2}$. Omdat l' ook door $P(-3;2)$ moet gaan is de vergelijking van l'

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x+2) \text{ dus } y = -\frac{1}{2} + 2 \ .$$

De loodrechte projectie van P op l is het snijpunt P' van de rechten l en l'. De coördinaten (x, y) van het punt P' moeten dus voldoen aan de vergelijkingen van beide rechten:

$$l \leftrightarrow y = 2x - 3 \text{ en } l' \leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2 \ .$$

Voor de x-coördinaat van P' bekom je hieruit de vergelijking

$$2x - 3 = -\frac{1}{2}x + 2$$

met als oplossing $x = 2$. Vul je dit in de vergelijking van l (of l') in dan bekom je de y-coördinaat van P':

$$y = 2.2 - 3 = 1 \ .$$

De coördinaten van P' zijn $(2; 1)$.

Twee verschillende punten A en B in het vlak bepalen een lijnstuk $[AB]$. De middelloodlijn van dat lijnstuk $[AB]$ is de rechte l loodrecht op de rechte AB door het midden M van het lijnstuk $[AB]$. Deze middelloodlijn is eveneens de verzameling van alle punten P in het vlak die evenver van A als van B liggen. In volgend voorbeeld zie je dit nagerekend.

Voorbeeld 4 Gegeven zijn de punten $A(3; 4)$ en $B(-2; 1)$.

- We berekenen eerst een vergelijking van de middelloodlijn l op $[AB]$ door de definitie te gebruiken. Het midden M van het lijnstuk $[AB]$ is het punt waarvan de coördinaten de gemiddelden zijn van de coördinaten van A en B, dus

$$M(\frac{3 + (-2)}{2}; \frac{4 + 1}{2}) = (\frac{1}{2}; \frac{5}{2}) \ .$$

  De richtingscoëfficiënt van de rechte AB is $\text{rico}(AB) = \frac{1-4}{-2-3} = \frac{3}{5}$. De richtingscoëfficiënt van de middelloodlijn l is dus $\text{rico}(l) = -\frac{5}{3}$. Je bekomt daardoor als vergelijking van de rechte l:

$$y - \frac{5}{2} = -\frac{5}{3}(x - \frac{1}{2}) \text{ dus } y = -\frac{5}{3}x + \frac{10}{3} \ .$$

- We stellen nu een vergelijking op voor de verzameling van de punten P in het vlak die evenver van A als van B liggen. Een punt $P(x, y)$ ligt evenver van A als van B als en alleen als

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} \ .$$

  Kwadrateren van beide positieve leden in voorgaande gelijkheid en uitrekenen van de kwadraten geeft volgende nodige en voldoende voorwaarde

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 \ .$$

  Merk op dat de kwadraten verdwijnen en als je alles oplost naar de veranderlijke y dan bekom je

$$y = -\frac{5}{3}x + \frac{10}{3} \ .$$

Je merkt op dat je in beide delen dezelfde vergelijking bekomt. In dit voorbeeld bekomen we dus dat de verzameling van de punten P evenver gelegen van A en B hetzelfde is als de middelloodlijn op het lijnstuk $[AB]$. Dit kan met behulp van elementaire meetkunde in alle gevallen bewezen worden (dat doen we in deze cursus niet).

Gegeven zijn twee rechten l en l' met vergelijkingen

$$l \leftrightarrow ax + by + c = 0 \text{ en } l' \leftrightarrow a'x + b'y + c' = 0 \ .$$

Hoe vind je de scherpe hoek $\angle(l, l')$ tussen de rechten l en l'?

Uit de vergelijkingen kun je direct zien of een rechte evenwijdig is met de y-as. Van een rechte die niet evenwijdig is met de y-as kun je de richtingscoëfficiënt uit de vergelijking vinden. De richtingscoëfficiënt (als deze bestaat) van l duiden we aan met m en van l' met m'. Met deze richtingscoëfficiënten bereken je dan de georiënteerde hoek α (resp α') tussen de positieve richting van de x-as en de rechte l (resp. l') en genomen met grootte in het interval $]-90^o; 90^o]$ (voor een verticale rechte nemen we dus 90^o).

Door eventueel l en l' te verwisselen kunnen we aannemen dat $\alpha \geq \alpha'$. Dan is $\angle(l, l')$ gelijk aan $\alpha - \alpha'$ als dit hoogstens 90^o is en anders is $\angle(l, l')$ gelijk aan $180^o - (\alpha - \alpha')$. Als l evenwijdig is met de y-as dan bekomen we dat $\angle(l, l') = 90^o - |\alpha|$. We veronderstellen nu dat l niet evenwijdig is met de y-as (en l' dus ook niet).

Uit de vergelijkingen bekom je

$$\text{rico}(l) = m = -\frac{a}{b} \text{ en dus } \tan(\alpha) = m = -\frac{a}{b}$$

$$\text{rico}(l') = m' = -\frac{a'}{b'} \text{ en dus } \tan(\alpha') = m' = -\frac{a'}{b'}$$

Omdat $\tan(\alpha - \alpha') = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\alpha')}{1 + \tan(\alpha).\tan(\alpha')}$; $\tan(180^o - (\alpha - \alpha')) = -\tan(\alpha - \alpha')$ en de tangens van een scherpe hoek steeds positief is bekom je

$$\tan(\angle(l, l')) = |\frac{m - m'}{1 + m.m'}|$$

(als $1 + m.m' = 0$ dan staan l en l' loodrecht op elkaar) of nog

$$\tan(\angle(l, l')) = |\frac{-\frac{a}{b} - (-\frac{a'}{b'})}{1 + (-\frac{a}{b}) - \frac{a'}{b'}}| = |\frac{a'b - ab'}{aa' + bb'}| \ .$$

Vanwege de absolute waarden is het niet meer nodig dat in deze formules $\alpha \geq \alpha$.

2.11 Onderlinge ligging van twee rechten - voorbeeld 1

Zie filmpje MOOC.

2.12 Onderlinge ligging van twee rechten - voorbeeld 2

Zie filmpje MOOC.

2.13 Onderlinge ligging van twee rechten - voorbeeld 3

Zie filmpje MOOC.

2.14 Afstand van een punt tot een rechte

De afstand $d(P;l)$ van een punt P tot een rechte l is de afstand van P tot de loodrechte projectie P' van P op l.

Voorbeeld 1 Gegeven zijn een punt $P(2;-4)$ en de rechte l met vergelijking $2x-5y+7=0$. De rechte $l'=PP'$ zal loodrecht staan op l. Omdat $\text{rico}(l)=\frac{2}{5}$ moet $\text{rico}(l')=-\frac{5}{2}$. De vergelijking van de rechte $PP'=l'$ is daarom

$$y-(-4)=-\frac{5}{2}(x-2) \text{ dus } y=-\frac{5}{2}x+1\ .$$

Het punt P' is het snijpunt van l en l'. De coördinaten van P' zijn daarom de oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} y=\frac{2}{5}x+\frac{7}{5} \\ y=-\frac{5}{2}x+1 \end{cases}$$

De x-coördinaat van P' is daardoor de oplossing van

$$\frac{2}{5}x+\frac{7}{5}=-\frac{5}{2}x+1 \text{ dus } x=-\frac{4}{29}\ .$$

Door deze waarde van x in te vullen in $y=-\frac{5}{2}+1$ (vergelijking van l') bekom je de y-coördinaat van P'.

$$y=-\frac{5}{2}.(-\frac{4}{29})+1=\frac{39}{29}$$

De coördinaten van P' zijn $(-\frac{4}{29};\frac{39}{29})$.

De afstand van P tot de rechte l is de afstand van P tot P'. Je bekomt als afstand

$$\sqrt{\left(2+\frac{4}{29}\right)^2+\left(-4-\frac{39}{29}\right)^2}=\frac{\sqrt{62^2+155^2}}{29}=5,76\ .$$

Er is een heel eenvoudige formule waarmee je de afstand van een punt $P(x_0;y_0)$ tot een rechte l met vergelijking $ax+by+c=0$ kunt uitrekenen. Je hoeft dan de vorige werkwijze in het voorbeeld niet telkens uit te voeren. Deze formule is

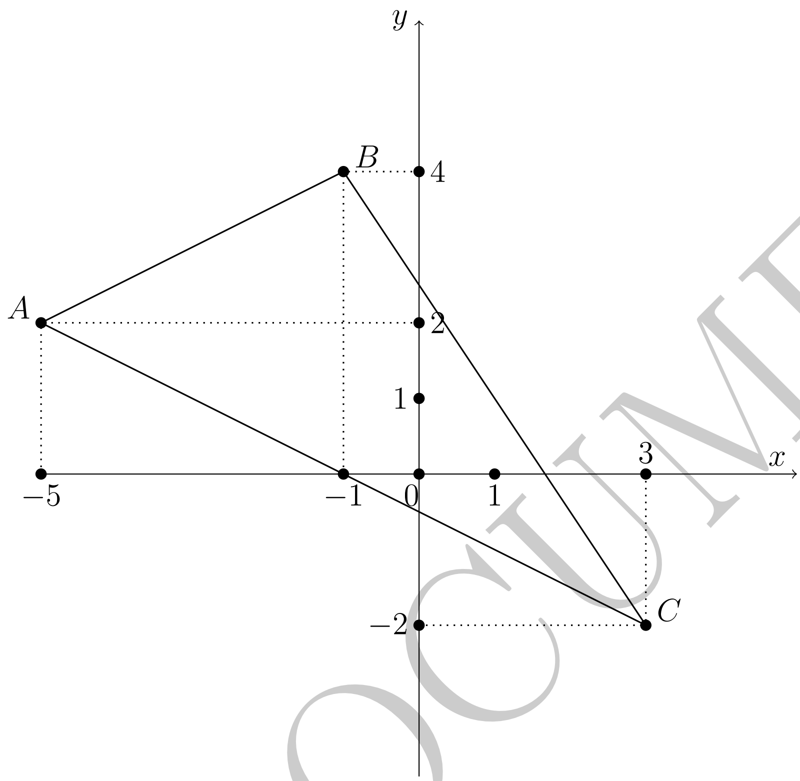
$$d(P;l)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\ .$$

Pas je voorgaande formule toe op het voorbeeld dan bekom je

$$d(P;l)=\frac{|2.2-5.(-4)+7|}{\sqrt{4+25}}=\frac{31}{\sqrt{29}}=5,76\ .$$

Je merkt dat je inderdaad dezelfde uitkomst bekomt.

Voorbeeld 2 Gegeven zijn de punten $A(-5;2)$, $B(-1;4)$ en $C(3;-2)$. Bereken de oppervlakte van driehoek ABC.



We vatten het lijnstuk $[A;B]$ op als basis van de driehoek. Dan is $d(A;B)$ de lengte van de basis. De hoogte van de driehoek is dan de afstand $d(C;AB)$ van het punt C tot de rechte AB. Je bekomt

$$d(A;B) = \sqrt{(-1-(-5))^2 + (4-2)^2} = \sqrt{20} \ .$$

Een vergelijking van de rechte AB is

$$y - 2 = \frac{4-2}{-1-(-5)}(x-(-5)) \text{ dus } 2y - x - 9 = 0 \ .$$

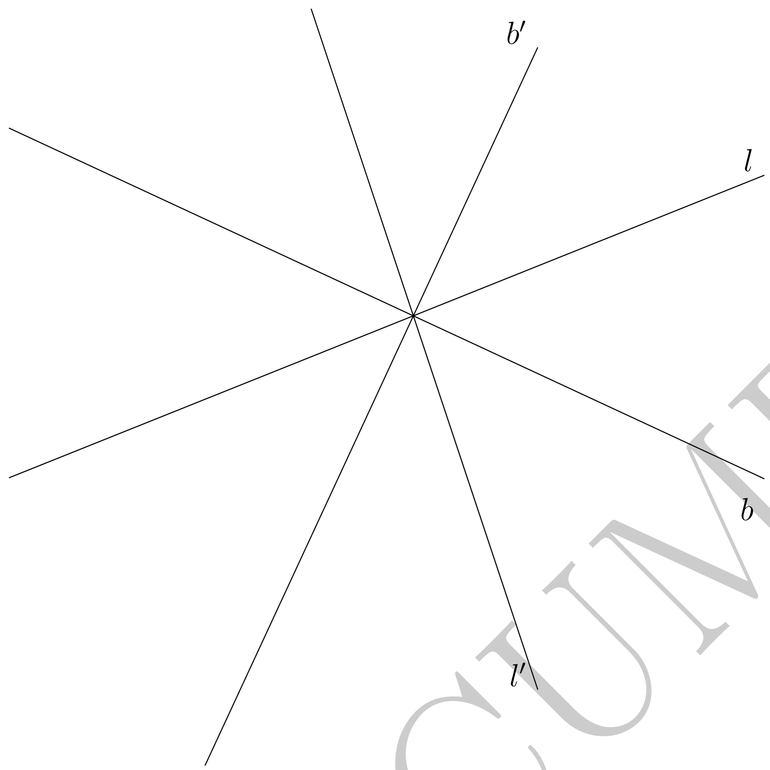
De afstand van C tot de rechte AB is dan

$$d(C;AB) = \frac{|2.(-2) - 3 - 9|}{\sqrt{4+1}} = \frac{16}{\sqrt{5}} \ .$$

De oppervlakte van driehoek ABC is dus gelijk aan

$$\frac{d(A;B).d(C;AB)}{2} = \frac{\sqrt{20}.\frac{16}{\sqrt{5}}}{2} = 16 \ .$$

De bissectrices van twee niet evenwijdige rechten l en l' zijn de rechten die een hoek tussen l en l' in twee gelijke delen verdelen. Twee niet evenwijdige lijnen l en l' hebben twee bissectrices b en b' die loodrecht op elkaar staan.



Er kan aangetoond worden dat deze twee rechten b en b' samen de verzameling is van alle punten P in het vlak die evenver van de rechten l en l' liggen. Door middel van de formule voor de afstand van een punt tot een rechte kun je met die formule vergelijkingen voor die bissectrices vinden.

Voorbeeld 3 Stel vergelijkingen op van de bissectrices van de rechten l en l' gegeven door de volgende vergelijkingen.

$$l \leftrightarrow 2x - 5y + 4 = 0 \text{ en } l' \leftrightarrow 3x + y - 2 = 0$$

Een punt $P(x;y)$ behoort tot één van de bissectrices b en b' als en alleen als $d(P;l) = d(P;l')$. Omdat

$$d(P;l) = \frac{|2x - 5y + 4|}{\sqrt{4+25}} \text{ en } d(P;l') = \frac{|3x + y - 2|}{\sqrt{9+1}}$$

bekom je dat P op een bissectrice ligt als en alleen als

$$\frac{|2x - 5y + 4|}{\sqrt{29}} = \frac{|3x + y - 2|}{\sqrt{10}} .$$

Laat je hierin de absolute waarde weg dan zijn de uitdrukkingen aan weerszijden van de gelijkheid gelijk of tegengesteld. Dit geeft aanleiding tot vergelijkingen van twee rechten: de bissectrices b en b'. Deze vergelijkingen zijn:

- voor b

$$\frac{2x - 5y + 4}{\sqrt{29}} = \frac{3x + y - 2}{\sqrt{10}}$$

$$(2\sqrt{10} - 3\sqrt{29})x + (-5\sqrt{10} - \sqrt{29})y + (4\sqrt{10} + 2\sqrt{29}) = 0$$

$$-9,83x - 21,20y + 23,42 = 0$$

- voor b'

$$\frac{2x - 5y + 4}{\sqrt{29}} = -\frac{3x + y - 2}{\sqrt{10}}$$

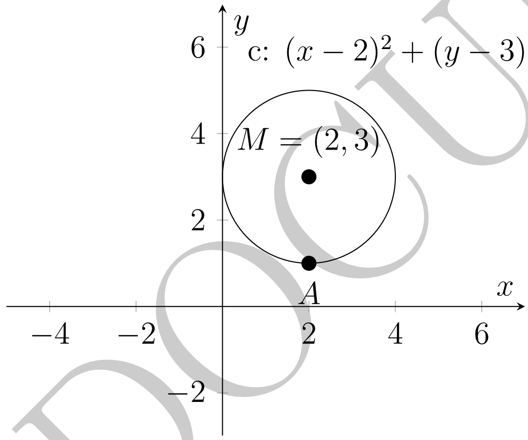
$$(2\sqrt{10} + 3\sqrt{29})x + (-5\sqrt{10} + \sqrt{29})y + (4\sqrt{10} - 2\sqrt{29}) = 0$$

$$22,48x - 10,43y + 1,88 = 0 \ .$$

2.15 Vergelijking van een cirkel in het vlak

Definitie De cirkel met middelpunt $M(x_0; y_0)$ en straal r $(r > 0)$ is de verzameling van de punten P in het vlak die op dezelfde afstand r van het middelpunt M liggen.

Notatie $C(M, r)$



Bovenstaande figuur stelt de cirkel voor met middelpunt $M(2; 3)$ en straal $r = 2$. Dit is dus de cirkel $C((2; 3), 2)$.

Uit de formule voor de afstand tussen twee punten in het vlak (met Euclidische coördinaten) vinden we dat een punt $P(x; y)$ behoort tot de cirkel $C(M, r)$ met $M(x_0; y_0)$ als en alleen als

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \ .$$

Omdat beide leden van deze vergelijking positief zijn is deze voorwaarde geldig als en alleen als de gelijkheid tussen de kwadraten van beide leden geldt. We bekomen dan volgende vergelijking voor de cirkel $C(M, r)$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \ .$$

Deze vergelijking zie je ook ingevuld in de tekening.

Voorbeeld 1 De vergelijking van de cirkel met middelpunt $M(1; 4)$ en straal 5 is

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 25 \ .$$

Voorbeeld 2 De vergelijking van de cirkel met middelpunt $O(0; 0)$ en straal 4 is

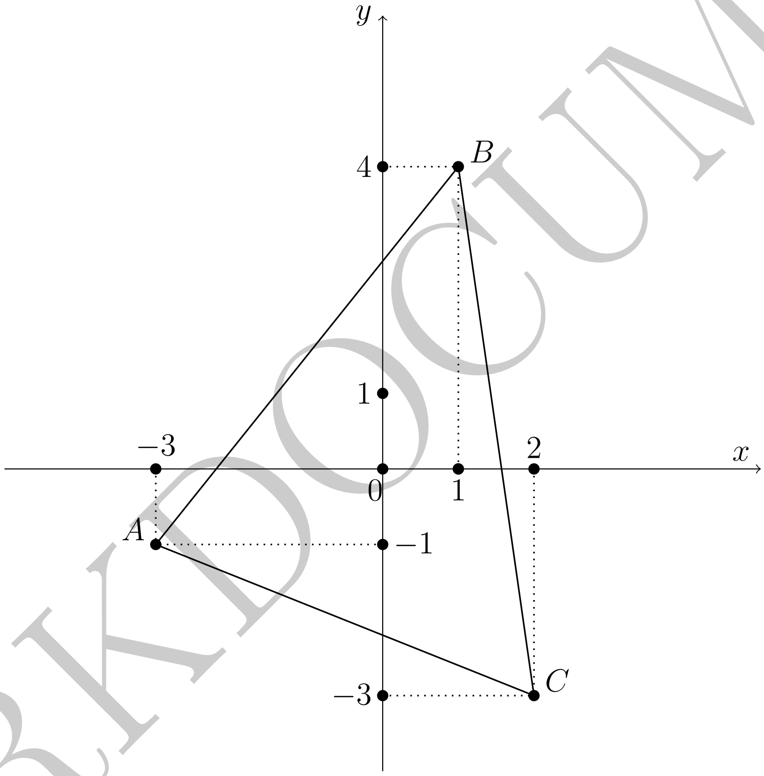
$$x^2 + y^2 = 16 \ .$$

Voorbeeld 3 De goniometrische cirkel is de cirkel met middelpunt $O(0;0)$ en straal 1. De vergelijking van de goniometrische cirkel is

$$x^2 + y^2 = 1 \ .$$

Stel dat C een cirkel is met middelpunt M en P een punt C. De raaklijn T aan C in P staat loodrecht op de straal MP. Dit kun je gebruiken om de vergelijking op de stellen van een raaklijn aan een cirkel.

Voorbeeld 4 Δ is de driehoek met hoekpunten $A(-3;-1)$, $B(1;4)$ en $C(2;-3)$. Stel een vergelijking op van de omgeschreven cirkel van Δ.



Omdat het middelpunt M het snijpunt is van de middelloodlijnen van Δ berekenen we eerst twee middelloodlijnen van Δ. De middelloodlijn van het lijnstuk $[A;B]$ is de verzameling van de punten $P(x;y)$ die evenver van A als van B liggen. Als we $d(P;A)^2 = d(P;B)^2$ in coördinaten uitdrukken bekomen we

$$(x+3)^2 + (y+1)^2 = (x-1)^2 + (y-4)^2 \ .$$

Door de machten uit te werken en te vereenvoudigen bekom je

$$8x + 10y - 7 = 0 \ .$$

Dit is de vergelijking van de middelloodlijn m_C van de zijde BC van Δ.

Door $d(P;A)^2 = d(P;C)^2$ in coördinaten uit te schrijven bekom je

$$(x+3)^2 + (y+1)^2 = (x-2)^2 + (y+3)^2 \ .$$

Hieruit bekom je

$$10x - 4y + 3 = 0 \ .$$

Dit is de vergelijking van de middelloodlijn m_B van de zijde AC van Δ.

De coördinaten van het middelpunt $M(x_0; y_0)$ van de omgeschreven cirkel van Δ is de oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} 8x + 10y - 7 = 0 \\ 10x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

Lossen we beide vergelijkingen op naar y dan bekomen we

$$\begin{cases} y = -\frac{8}{10}x + \frac{7}{10} \\ y = \frac{10}{4}x - \frac{3}{4} \end{cases}$$

Hieruit volgt dat x_0 de oplossing is van de vergelijking

$$-\frac{8}{10}x + \frac{7}{10} = \frac{10}{4}x - \frac{3}{4} \ .$$

Hieruit bekom je dat $x_0 = \frac{29}{66} = 0,44$. Vul je dit in $y = -\frac{8}{10}x + \frac{7}{10}$ is dan bekom je y_0, dus

$$y_0 = -\frac{8}{10} . \frac{29}{66} + \frac{7}{10} = \frac{23}{66} = 0,35 \ .$$

Het middelpunt M van de omgeschreven cirkel van Δ is $M(0,44; 0,35)$.

De straal r van de omgeschreven cirkel is de afstand van M tot A:

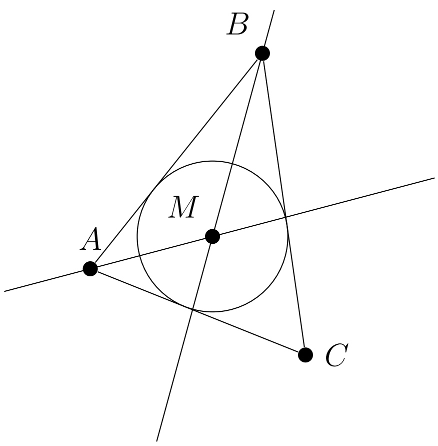
$$r = d(M; A) = \sqrt{\left(-3 - \frac{29}{66}\right)^2 + \left(-1 - \frac{23}{66}\right)^2} = 3,69 \ .$$

Je rekent zelf na dat dit ook $d(M; B)$ en $d(M; C)$ is.

De vergelijking van de omgeschreven cirkel is dus

$$(x - 0,44)^2 + (y - 0,35)^2 = 3,69^2 = 13,62 \ .$$

Een ingeschreven cirkel van een driehoek is een cirkel binnen de driehoek die raakt aan de drie zijden van de driehoek.



Het is de cirkel met maximale oppervlakte die binnen de driehoek ligt.

Noem M het middelpunt van die cirkel. Omdat iedere zijde van de driehoek een raaklijn aan de cirkel is en omdat de bijbehorende straal van cirkel (lijnstuk van M naar de zijde) loodrecht staat op de zijde is de afstand van M tot een zijde van de driehoek de straal r van de cirkel. Omdat deze afstand voor iedere zijde gelijk is ligt M evenver van iedere zijde van de driehoek. Hieruit bekom je dat M evenver ligt van iedere twee zijden van de driehoek en dus voor iedere twee zijden van de driehoek op een bissectrice ligt. Omdat M eveneens binnen de driehoek moet liggen moet M voor iedere twee zijden van driehoek gelegen zijn op de binnenbissectrice (diegene die de hoek van driehoek in twee gelijke delen verdeelt). Je vindt daarom M door twee binnenbissectrices van de driehoek te berekenen de daarvan het snijpunt te bepalen. De straal is dan de afstand van M tot eender welke zijde van de driehoek.

Voorbeeld 5 Voor de driehoek Δ uit het vorige voorbeeld stel je een vergelijking op van de ingesloten cirkel.

Omdat we binnenbissectrices van Δ (dus bissectrices van de zijden van Δ) gaan we eerst vergelijkingen van de zijden van de driehoek opstellen. Door de formule voor een vergelijking van een rechte door twee gegeven punten te gebruiken bekom je de volgende vergelijkingen:

$$AB \leftrightarrow 5x - 4y + 11 = 0$$

$$AC \leftrightarrow 2x + 5y + 11 = 0$$

$$BC \leftrightarrow 7x + y - 11 = 0$$

Een bissectrice tussen AB en AC is gegeven door volgende vergelijking

$$\frac{5x - 4y + 11}{\sqrt{25 + 16}} = \frac{2x + 5y + 11}{\sqrt{4 + 25}}$$

$$(5\sqrt{29} - 2\sqrt{41})x + (-4\sqrt{29} - 5\sqrt{41})y + (11\sqrt{29} - 11\sqrt{41}) = 0\ .$$

Je rekent na dat de richtingscoëfficiënt van deze bissectrice gelijk is aan 0,26. Deze bissectrice is dus een licht stijgende rechte. Dit komt overeen met de tekening, dit is dus een vergelijking van een binnenbissectrice b_A van de driehoek.

Een bissectrice van AB en BC is gegeven door volgende vergelijking

$$\frac{5x - 4y + 11}{\sqrt{25 + 16}} = \frac{7x + y - 11}{\sqrt{49 + 1}}$$

$$(5\sqrt{50} - 7\sqrt{41})x + (-4\sqrt{50} - \sqrt{41})y + (11\sqrt{50} + 11\sqrt{41}) = 0\ .$$

Je rekent na dat de richtingscoëfficiënt van deze bissectrice gelijk is aan $-0,27$. Deze bissectrice is een licht dalende rechte. Dit komt niet overeen met de tekening, het is dus niet een binnenbissectrice van de driehoek.

De binnenbissectrice heeft daarom vergelijking

$$\frac{5x - 4y + 11}{\sqrt{25 + 16}} = -\frac{7x + y - 11}{\sqrt{49 + 1}}$$

$$(5\sqrt{50}+7\sqrt{41})x+(-4\sqrt{50}+\sqrt{41})y+(11\sqrt{50}-11\sqrt{41})=0\ .$$

De coördinaten van het middelpunt $M(x_0;y_0)$ van de ingeschreven cirkel is de oplossing van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases}(5\sqrt{29}-2\sqrt{41})x+(-4\sqrt{29}-5\sqrt{41})y+(11\sqrt{29}-11\sqrt{41})=0\\(5\sqrt{50}+7\sqrt{41})x+(-4\sqrt{50}+\sqrt{41})y+(11\sqrt{50}-11\sqrt{41})=0\end{cases}$$

Na enig rekenwerk bekom je $M(-0,16;-0,25)$.

De straal r van de ingeschreven cirkel is de afstand van M tot de rechte AB. Je bekomt

$$r=\frac{|5.(-0,16)-4.(-0,25)+11|}{\sqrt{25+16}}=1,75\ .$$

Je rekent zelf na dat die ook de afstand van M tot de rechte AC en van M tot de rechte BC is.

De vergelijking van de ingeschreven cirkel is

$$(x+0,16)^2+(y+0,25)^2=1,75^2=3,06\ .$$

2.16 Vergelijking van een cirkel in het vlak - voorbeeld

Zie filmpje MOOC.

2.17 Test analytische meetkunde

Module 5

Vergelijkingen, Ongelijkheden, Stelsels en Matrices

0 Intro

Zie filmpje MOOC.

1 Vergelijkingen, ongelijkheden en stelsels

Inleiding

Het oplossen van vergelijkingen is een praktische wiskundige vaardigheid waarvan ondersteld wordt dat elke ingenieur ze beheerst. Op het eerste zicht lijkt vergelijkingen oplossen een spel met rare regeltjes bedacht door wereldvreemde leraars wiskunde. Zodra je echter gaat narekenen of een voorgestelde technische oplossing voor een probleem eigenlijk wel mogelijk is, iets wat in het Engels heel toepasselijk wordt aangeduid als "do the math", behoort het oplossen van vergelijkingen tot de standaardactiviteiten.

Enkele voorbeelden:

- In de thermodynamica speelt de toestandsvergelijking van een ideaal gas (in de volksmond "de ideale gaswet" genoemd) een belangrijke rol. Deze vergelijking geeft voor een hoeveelheid (aantal mol n) ideaal gas het verband tussen druk P, temperatuur T en volume V bij thermisch evenwicht van het gas:

$$PV = nRT$$

R is een gekende constante.
Als het volume van de gasfles en de druk en temperatuur van het gas in de fles gekend

zijn kan je de hoeveelheid gas in de fles berekenen door de vergelijking op te lossen naar de onbekende n.

- Uit de fysica weten we dat een voorwerp dat op tijdstip $t = 0$ op een hoogte h_0 wordt losgelaten zich na een valtijd t op een hoogte h zal bevinden gegeven door:

  $$h(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

  Door de hoogte gelijk aan nul te stellen bekomt men de vergelijking:

  $$h_0 - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

  Oplossen van deze vergelijking naar de onbekende t geeft de tijd die het voorwerp nodig heeft om de grond te bereiken.

Bij sommige toepassingen, zoals bijvoorbeeld het doorrekenen van elektrische netwerken, komt men meerdere vergelijkingen met meerdere onbekenden tegen waarvoor men een oplossing zoekt die moet voldoen aan alle vergelijkingen tegelijkertijd. In zo een geval spreekt men van het oplossen van een stelsel van vergelijkingen.

1.1 Definities

Definitie Een vergelijking drukt uit dat twee wiskundige uitdrukkingen aan elkaar gelijk zijn door een gelijkheidsteken tussen de uitdrukkingen te plaatsen.

Voorbeeld 1

$$5x^3 + 2x = 8x^2 + 17$$

De uitdrukking voor het gelijkheidsteken noemt met het linkerlid, de andere uitdrukking noemt men het rechterlid.

In een vergelijking staat altijd minstens één onbekende die met een letter wordt aangeduid. Dikwijls wordt hiervoor de letter x gebruikt maar een onbekende kan met eender welke letter worden aangeduid. Het oplossen van een vergelijking komt erop neer dat je die waarden voor de onbekende (of onbekenden) zoekt waarvoor het linkerlid inderdaad gelijk is aan het rechterlid.

Definitie In deze nota's beperken we ons tot **veeltermvergelijkingen**, dat zijn vergelijkingen waarbij zowel het rechterlid als het linkerlid veeltermen zijn, zoals in het voorbeeld hierboven.

Er bestaan echter ook andere vergelijkingen.

Voorbeeld 2 De vergelijkingen

$$3\sin(x+2) = x^3 - 4x - 1$$

en

$$\frac{1}{2}e^{-\pi y} - 4 = 37\cos(y^2+1)$$

zijn géén veeltermvergelijkingen.

Definitie De **graad van een veeltermvergelijking** is de hoogste macht van de onbekende die in de vergelijking voorkomt.

De manier waarop men een veeltermvergelijking oplost is verschillend naargelang de graad van de vergelijking.

Voorbeeld 3

$$8t - 2 = 0$$

is een veeltermvergelijking van de eerste graad in de onbekende t, en

$$h^{23} - 2h^{12} + \frac{17}{3}h^7 + 4h^3 = \pi h - \frac{\pi}{2}$$

is een veeltermvergelijking van de 23-ste graad in de onbekende h.

1.2 Eerstegraadsvergelijkingen

We zullen het oplossen van eerstegraadsvergelijkingen verduidelijken met enkele voorbeelden.

Voorbeeld 1

$$5x + 3 = 3x + 1$$

Het oplossen van de vergelijking komt er eigenlijk op neer dat je de vergelijking herschrijft op een zodanige manier dat je in één lid, en alleen daar, de onbekende hebt staan. Op die manier kan je de oplossing direct aflezen. Het herschrijven van de vergelijking kan je doen door op het linkerlid en het rechterlid steeds dezelfde bewerkingen uit te voeren, op die manier blijft de gelijkheid tussen linkerlid en rechterlid gelden.
In bovenstaande vergelijking kunnen we van beide leden $3x$ aftrekken:

$$5x + 3 \boldsymbol{-3x} = 3x + 1 \boldsymbol{-3x}$$

dit geeft

$$2x + 3 = 1$$

Vervolgens trekken we van beide leden 3 af:

$$2x + 3\mathbf{-3} = 1\mathbf{-3}$$

dit geeft

$$2x = -2$$

Om nu in het linkerlid alleen nog de onbekende over te houden kunnen we linkerlid en rechterlid delen door 2:

$$\frac{2x}{\mathbf{2}} = \frac{-2}{\mathbf{2}}$$

dit geeft

$$x = -1$$

als oplossing van de vergelijking.

Opmerking

- Het uitvoeren van dezelfde optelling of aftrekking op het linker- en rechterlid komt erop neer dat je termen van het ene lid naar het andere verplaatst. Hierbij moet je er wel op letten dat het teken van de term verandert bij overbrenging naar het andere lid.
- Het uitvoeren van dezelfde deling (of vermenigvuldiging) op linker- en rechterlid komt neer op het overbrengen van een factor naar het andere lid. Hierbij wordt een vermenigvuldiging een deling en omgekeerd.
- Soms wordt de oplossing van een vergelijking genoteerd als een verzameling S. Voor het hierboven uitgewerkte voorbeeld schrijven we dan als oplossingenverzameling

$$S = \{-1\}$$

Voorbeeld 2

$$5y + 4 = 5y - 1$$

We gaan opnieuw op dezelfde manier te werk. We kunnen bijvoorbeeld de term $5y$ uit het rechterlid overbrengen naar het linkerlid:

$$5y + 4\mathbf{-5y} = -1$$

ofwel

$$4 = -1$$

Dit is natuurlijk onzin!
Er is geen enkele waarde voor y die ervoor kan zorgen dat $4 = -1$, deze vergelijking heeft geen oplossingen...
Dit kan men ook noteren door te schrijven dat de oplossingenverzameling leeg is:

$$S = \varnothing$$

Voorbeeld 3

$$2(x-4) = 7(3x-1)$$

De eerste stap is hier het uitwerken van de haakjes:

$$2(x-4) = 7(3x-1) \Leftrightarrow 2x - 8 = 21x - 7$$

Vervolgens verplaatsen we de -8 naar rechts (min wordt plus):

$$2x = 21x - 7 + 8 \Leftrightarrow 2x = 21x + 1$$

Nu verplaatsen we de $21x$ van rechts naar links (plus wordt min):

$$2x - 21x = 1 \Leftrightarrow -19x = 1$$

Dan brengen we -19 over naar het rechterlid (pas op: teken verandert niet!):

$$x = \frac{1}{-19} = -\frac{1}{19}$$

Onthoud Een goed stappenplan voor het oplossen van een eerstegraadsvergelijking is:

1. Reken alle haakjes uit.
2. Verplaats alle termen met onbekenden in naar een lid, alle termen zonder onbekenden naar het andere lid.
   - Elke bewerking die je links uitvoert, moet je rechts ook uitvoeren.
   - Termen kan je overbrengen door het teken te veranderen: min wordt plus, plus wordt min.
   - Factoren verplaats je door te delen of te vermenigvuldigen: een vermenigvuldiging wordt een deling en omgekeerd.

1.3 Oplossen van tweedegraadsvergelijkingen

Een tweedegraadsvergelijking wordt in de praktijk dikwijls vierkantsvergelijking of kwadratische vergelijking genoemd.

Algemene methode om een tweedegraadsvergelijking op te lossen

Een tweedegraadsvereglijking in de onbekende x is een vergelijking van de vorm

$$ax^2 + bx + c = 0$$

met a, b en c reële getallen, bovendien moet $a \neq 0$ zijn want anders hebben we een eerstegraadsvergelijking.
Om een dergelijke vergelijking op te lossen herschrijven we de vergelijking door ze te delen door a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Dit kan je ook schrijven als

$$(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

Dit kan je controleren door de term met de haakjes uit te werken volgens het merkwaardige product $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$.
De term met de onbekende wordt nu naar het linkerlid verplaatst en de termen zonder de onbekende naar het rechterlid:

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

ofwel

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Het berekenen van de vierkantswortel van linkerlid en rechterlid geeft

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dit is echter maar de helft van de oplossing. We zoeken immers die uitdrukkingen waarvan het kwadraat gelijk is aan $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, dit zijn zowel $+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ als $-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Vergelijk dit bijvoorbeeld met $\sqrt{9} = 3$ want $3^2 = 9$, maar er geldt ook $(-3)^2 = 9$ ... Als je dus de oplossingen zoekt van $y^2 = 9$ geeft dit $y = 3$ en $y = -3$.
We moeten dus rekening houden met de twee mogelijkheden:

$$x + \frac{b}{2a} = +\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ en } x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Deze eestegraadsvergelijkingen oplossen naar x geeft dan

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ en } x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

We vinden dus in principe **twee oplossingen** voor een tweedegraadsvergelijking.
Merk op dat de uitdrukking onder de vierkantswortel, $b^2 - 4ac$, een belangrijke rol speelt. Als deze uitdrukking groter dan nul is hebben we twee verschillende reële oplossingen, als deze uitdrukkig echter gelijk is aan nul dan zijn de twee oplossingen gelijk aan elkaar (praktisch gezien is er dan maar één reële oplossing), en als de uitdrukking kleiner is dan nul dan zijn er twee complexe oplossingen. Deze complexe oplossingen zijn bovendien elkaars complex toegevoegde. De tweedemachtswortels van een negatief reëel getal z zijn immers $\sqrt{|z|}i$ en $-\sqrt{|z|}i$.
De uitdrukking $b^2 - 4ac$ maakt dus een onderscheid (discrimineert) tussen de verschillende soorten oplossingen die mogelijk zijn. Men noemt deze uitdrukking dan ook de **discriminant**, meestal aangeduid met de Griekse hoofdletter delta Δ of soms ook met de hoofdletter D.

De algemene methode om een tweedegraadsvergelijking op te lossen kan dus worden samengevat als volgt:

Onthoud

- Schrijf de vergelijking in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b en c reële getallen)
- Bereken de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
- Ga na hoeveel oplossingen er zijn:
  - Als $\Delta > 0$ dan zijn er 2 verschillende reële oplossingen
  - Als $\Delta = 0$ dan is er 1 reële oplossing (de 2 oplossingen zijn gelijk aan elkaar)
  - Als $\Delta < 0$ dan zijn er twee complexe oplossingen die elkaars complex toegevoegde zijn
- De oplossingen worden gegeven door

  $$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ en } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

  Opmerking: In het geval dat $\Delta < 0$ kan men (moet niet) de oplossingen ook schrijven als

  $$x_1 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \text{ en } x_2 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Voorbeeld 1

$$x(4x+2)+4 = -3x+2$$

We schrijven deze vergelijking in de standaardvorm $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x(4x+2)+4 = -3x+2 \Leftrightarrow 4x^2+2x+4 = -3x+2 \Leftrightarrow 4x^2+5x+2 = 0$$

Het symbool $\Leftrightarrow$ betekent zoveel als “is equivalent met” of “als en slechts als”.
We berekenen nu de discriminant:

$$\Delta = 5^2 - 4.4.2 = 25 - 32 = -7$$

Aangezien $\Delta < 0$ zijn er twee copmlex toegevoegde complexe oplossingen:

$$S = \frac{-5 + i\sqrt{7}}{8}, -\frac{5 + i\sqrt{7}}{8}$$

Voorbeeld 2

$$-4x^2 + 5x + 2 = 0$$

We berekenen de discriminant:

$$\Delta = 5^2 - 4.(-4).2 = 25 + 32 = 57$$

Er zijn dus twee verschillende oplossingen:

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{57}}{2.(-4)} \text{ en } x_2 = \frac{-5 - \sqrt{57}}{2.(-4)}$$

ofwel

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{57}}{8} \text{ en } x_2 = \frac{5 + \sqrt{57}}{8}$$

De oplossingenverzameling is

$$S = \{\frac{5 - \sqrt{57}}{8}, \frac{5 + \sqrt{57}}{8}\}$$

Opmerking Slordig zijn met haakjes veroorzaakt fouten... Gebruik haakjes en respecteer de regels om met haakjes te werken!

1.4 Speciale gevallen

Elke vergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ kan opgelost worden met de algemene methode met de discriminant. In sommige gevallen is het echter eenvoudiger om deze methode niet te gebruiken. We illustreren dit met enkele voorbeelden.

Voorbeeld 1

$$x^2 = 36$$

Dit is een tweedegraadsvergelijking in de meest eenvoudige vorm ($b = 0$): in het linkerlid staat alleen een term met de onbekende en in het rechtermlid staat alleen een getal. Om de onbekende te vinden trekken we van beide leden de vierkantswortel:

$$x = 6$$

Dit is zeker **een** oplossing want $6^2 = 36$. Maar er geldt ook dat $(-6)^2 = 36$... Dus heeft de vergelijking nog een tweede oplossing:

$$x = -6$$

De oplossingen van de vergelijking zijn dus $x_1 = +\sqrt{36}$ en $x_2 = -\sqrt{36}$.
Met de oplossingenverzameling wordt dit genoteerd als

$$S = \{-6, 6\}$$

Uiteraard had je hier ook de algemene methode kunnen gebruiken.
Door de oorspronkelijke vergelijking in de standaardvorm te zetten vinden we:

$$x^2 - 36 = 0$$

De discriminant is $\Delta = 0^2 - 4.1.(-36) = 144$.
De twee verschillende oplossingen zijn dan

$$x_1 = \frac{-0 + \sqrt{144}}{2.1} \text{ en } x_2 = \frac{-0 - \sqrt{144}}{2.1}$$

ofwel

$$x_1 = 6 \text{ en } x_2 = -6$$

Voorbeeld 2

$$3x^2 = 10x$$

We kunnen deze vergelijking oplossen door ze in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ te zetten:

$$3x^2 - 10x = 0$$

Hier is dus $a = 3$, $b = -10$ en $c = 0$.
We berekenen de discriminat:

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0 = 100 - 0 = 100$$

De twee oplossingen zijn dus:

$$x_1 = \frac{10 + \sqrt{100}}{2.3} \text{ en } x_2 = \frac{10 - \sqrt{100}}{2.3}$$

ofwel

$$x_1 = \frac{10}{3} \text{ en } x_2 = 0$$

Dit had echter veel eenvoudiger kunnen opgelost worden door de oorspronkelijke vergelijking te ontbinden in factoren:

$$3x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 10) = 0$$

De laatste vergelijking kan alleen maar nul zijn als $x = 0$ of $3x - 10 = 0$, met andere woorden de oplossingen zijn

$$x_1 = 0 \text{ en } x_2 = \frac{10}{3}$$

Voorbeeld 3

$$17(x - 1)(x + \pi) = 0$$

De kwadratische vergelijking is hier gegeven als een product van factoren waarin de onbekende x lineair voorkomt. In dit geval is het **niet** interessant om de haakjes uit te werken (het mag wel!). Het product kan alleen maar nul zijn als minstens één van de factoren nul is. Er is dus voldaan aan de vergelijking als $x - 1 = 0$ of $x + \pi = 0$.
De oplossingen zijn dus:

$$x_1 = 1 \text{ en } x_2 = -\pi$$

Oplossen van tweedegraadsvergelijkingen:

Onthoud

- Schrijf de vergelijking in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b en c reële getallen)
- Bereken de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
- Ga na hoeveel oplossingen er zijn:
  - Als $\Delta > 0$ dan zijn er 2 verschillende reële oplossingen
  - Als $\Delta = 0$ dan is er 1 reële oplossing (de 2 oplossingen zijn gelijk aan elkaar)
  - Als $\Delta < 0$ dan zijn er twee complexe oplossingen die elkaars complex toegevoegde zijn
- De oplossingen worden gegeven door

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ en } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Als $\Delta < 0$ dan zijn er twee imaginaire oplossingen voor $\sqrt{\Delta}$: $i\sqrt{|\Delta|}$ en $-i\sqrt{|\Delta|}$

Opmerking Respecteer de rekenregels voor haakjes, voor het optellen en vermenigvuldigen van breuken, enz... Denk niet dat je het sneller en beter kan op "jouw manier"!

1.5 Hogeregraadsvergelijkingen

Enkele nuttige weetjes over veeltermvergelijkingen in het algemeen

Uit de theoretische algebra weet men dat:

- een veeltermvergelijking van de $n-$de graad met reële coëfficiënten n complexe oplossingen heeft. Zo kan je op het zicht weten dat bijvoorbeeld de vergelijking $y^5 - \pi y^2 + 4y - 28 = 0$ vijf complexe oplossingen heeft. Denk er aan dat een reëel getal ook een complex getal is!
- een veeltermvergelijking met een oneven graad en reële coëfficiënten heeft altijd minstens één reële oplossing (de vergelijking uit het voorbeeld heeft dus zeker 1 reële oplossing).
- voor vergelijkingen van de derde en vierde graad bestaan er algemene oplossingsmethoden zoals voor tweedegraadsvergelijkingen (deze methoden zijn echter zeer langdradig en ingewikkeld en worden in de praktijk niet zoveel gebruikt).
- voor vergelijkingen vanaf de vijfde graad bestaan er geen algemene theoretische oplossingsmethoden (dergelijke vergelijkingen worden numeriek opgelost, meestal met behulp van een computer of rekenmachine).

In een aantal speciale gevallen is het echter mogelijk om een hogeregraadsvergelijking toch met de hand op te lossen. Deze gevallen bespreken we hier.

Substitutiemethode

Sommige hogeregraadsvergelijkingen kunnen opgelost worden door een slimme substitutie. Neem bijvoorbeeld de volgende vierdegraadsvergelijking:

$$x^4 + 3x^2 - 1 = 0$$

Door de substitutie $y = x^2$ toe te passen wordt deze vergelijking omgezet in een tweedegraadsvergelijking in de onbekende y.

$$y^2 + 3y - 1 = 0$$

Deze vergelijking kunnen we oplossen!
We berekenen de discriminant:

$$\Delta = 3^2 - 4.1.(-1) = 9 + 4 = 13$$

Aangezien $\Delta > 0$ zijn er 2 verschillende oplossingen **voor de tweedegraadsvergelijking**.

$$y_1 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \text{ en } y_2 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$$

Dit zijn echter niet de oplossingen van de oorspronkelijke vierdegraadsvergelijking in de onbekende x. Het verband tussen de oplossingen van de vierdegraadsvergelijking en de waarden y_1 en y_2 wordt gegeven door de vergelijking $y = x^2$. We zoeken dus die waarden voor x waarvoor het kwadraat y_1 en y_2 oplevert.

$$x_1 = \sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}, x_2 = -\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}, x_3 = i\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}, x_4 = -i\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}$$

De oplossingenverzameling is

$$S = \{\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}, -\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}, i\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}, -i\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}\}$$

Ontbinden in factoren

Beschouw de volgende derdegraadsvergelijking

$$5x^3 - 2x^2 + 3x = 0$$

Het linkerlid van deze vergelijking kunnen we schrijven als een product

$$x(5x^2 - 2x + 3) = 0$$

Aan deze vergelijking kan alleen maar voldaan worden als $x = 0$ of $5x^2 - 2x + 3 = 0$.
We hebben dus al één oplossing gevonden:

$$x_1 = 0$$

Om de eventuele andere oplossingen (maximaal drie) te vinden lossen we de vergelijking $5x^2 - 2x + 3 = 0$ op.
We berekenen de discriminant: $\Delta = (-2)^2 - 4.5.3 = 4 - 60 = -56 < 0$. Er zijn dus twee complexe oplossingen voor $5x^2 - 2x + 3 = 0$.

De oplossingenverzameling is

$$S = \{0, \frac{1+i\sqrt{14}}{5}, \frac{1-i\sqrt{14}}{5}\}$$

Onthoud Er bestaan geen algemene methoden om vergelijkingen van vijfde graad of hoger met de hand op te lossen. Deze methoden bestaan wel voor derdegraadsvergelijkingen en vierdegraadsvergelijkingen maar deze methoden zijn zeer omslachtig en worden daarom weinig gebruikt in de praktijk.

In een aantal speciale gevallen kunnen hogeregraadsvergelijkingen echter opgelost worden met één van de volgende technieken:

- **Substitutiemethode**
  1. Als de onbekende x is vervang dan x^2 door een andere onbekende (zoals y) om een kwadratische vergelijking te bekomen.
  2. Los deze vergelijking op naar y.
  3. Los de vergelijkingen $y = x^2$ op naar de onbekende x.
- **Ontbinden in factoren**
  1. Zet alle termen in het linkerlid zodat het rechterlid 0 is.
  2. Ontbind het linkerlid in factoren door af te zonderen.
  3. De oplossingen worden gevonden door elke factor gelijk te stellen aan 0.

Opmerking Respecteer de rekenregels voor haakjes, voor het optellen en vermenigvuldigen van breuken, enz...

1.6 Stelsels van vergelijkingen

Inleiding

Definitie Een stelsel van vergelijkingen bestaat uit minstens twee vergelijkingen in minstens twee onbekenden. Het bepalen van de onbekenden die tegelijkertijd oplossing zijn voor al de vergelijkingen van het stelsel noemt men het oplossen van het stelsel van vergelijkingen.

Als het stelsel van vergelijkingen alleen bestaat uit veeltermvergelijkingen van de eerste graad noemt men dit stelsel **een lineair stelsel** of **een stelsel van lineaire vergelijkingen**.
Een voorbeeld van een lineair stelsel van drie vergelijkingen in drie onbekenden x, y en z:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 0 \\ 3x + 2y = 5 \\ -x - 7y + z = -1 \end{cases}$$

In de ingenieurswereld is het niet ongewoon om stelsels van tientallen vergelijkingen in tientallen onbekenden tegen te komen.

In de algebra toont men aan er voor een stelsel van eerstegraadsvergelijkkingen drie mogelijkheden zijn:

- Het stelsel is oplosbaar en heeft juist één oplossing.
- Het stelsel is oplosbaar en heeft oneindig veel oplossingen.

- Het stelsel heeft geen oplossingen.

In deze cursus beperken we ons tot het oplossen van stelsels van twee lineaire vergelijkingen. Voor dergelijke eenvoudige stelsels wordt gebruik gemaakt van de **substitutiemethode**.

De substitutiemethode toegepast bij een stelsel van twee lineaire vergelijkingen werkt als volgt:

- Kies één van de vergelijking en los deze op naar één van de onbekenden, hierbij doe je net alsof je de andere onbekende kent.
- Substitueer nu de oplossing van de ene vergelijking in de andere vergelijking, je bekomt nu een eerstegraadsvergelijking in één onbekende.
- Los de bekomen vergelijking op en substitueer de gevonden onbekende in de andere vergelijking, dit levert een eerstegraadsvergelijking in de nog te vinden onbekende.
- Los de overblijvende vergelijking op.
- De gevonden oplossing(en) zijn oplossing voor allebei de vergelijkingen van het stelsel. Controleer dit door de waarden te substitueren!

We demonstreren de substitutiemethode met enkele voorbeelden.

Voorbeeld 1

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

We kiezen bijvoorbeeld de eerste vergelijking en lossen deze op naar de onbekende y waarbij we net doen alsof x een gekend getal is:

$$2x + y = 0 \Leftrightarrow y = -2x$$

We substitueren nu $y = -2x$ in de tweede vergelijking en lossen de nieuwe vergelijking op naar x:

$$x - 3(-2x) + 1 = 0 \Leftrightarrow x + 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow 7x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{7}$$

We substitueren de gevonden x nu terug in de eerste vergelijking $y = -2x$:

$$y = -2(-\frac{1}{7}) \Leftrightarrow y = \frac{2}{7}$$

De oplossing voor het stelsel is dus

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{7} \\ y = \frac{2}{7} \end{cases}$$

Controle door deze waarden voor x en y in het oorspronkelijke stelsel te substitueren:

$$\begin{cases} 2(-\frac{1}{7}) + \frac{2}{7} = 0 \\ -\frac{1}{7} - 3(\frac{2}{7}) + 1 = 0 \end{cases}$$

Voorbeeld 2

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = 22 \end{cases}$$

Soms wordt om de zaken overzichtelijk te houden bij elke stap het volledige stelsel opnieuw opgeschreven. Dit vraagt heel wat extra schrijfwerk maar het kan wel helpen om fouten te vermijden.
We kiezen bijvoorbeeld de eerste vergelijking en lossen deze op naar x:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 4 - 2y \\ 2x - 3y = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4-2y}{3} \\ 2x - 3y = 22 \end{cases}$$

Vervolgens substitueren we

$$x = \frac{4 - 2y}{3}$$

in de tweede vergelijking:

$$\begin{cases} x = \frac{4-2y}{3} \\ 2(\frac{4-2y}{3}) - 3y = 22 \end{cases}$$

Dit geeft dan:

$$\begin{cases} x = \frac{4-2y}{3} \\ \frac{2.4}{3} - \frac{2.2}{3}y - 3y = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4-2y}{3} \\ \frac{8}{3} - \frac{4}{3}y - 3y = 22 \end{cases}$$

en

$$\begin{cases} x = \frac{4-2y}{3} \\ \frac{-4-9}{3}y = \frac{66-8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4-2y}{3} \\ -13y = 58 \end{cases}$$

dus

$$y = -\frac{58}{13}$$

Dit substitueren we nu in de eerste vergelijking:

$$\begin{cases} x = \frac{4-2(-\frac{58}{3})}{3} \\ y = -\frac{58}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4+\frac{116}{13}}{3} \\ y = -\frac{58}{13} \end{cases}$$

Uitwerken geeft:

$$\begin{cases} x = \frac{\frac{52+116}{13}}{3} \\ y = -\frac{58}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{56}{13} \\ y = -\frac{58}{13} \end{cases}$$

Controleer zelf de correctheid van de gevonden oplossing door x en y te substitueren in het oorspronkelijke stelsel van vergelijkingen.

Opmerking Hopelijk heb je gemerkt dat het zo goed als onmogelijk is dergelijke berekeningen uit te voeren zonder op een correcte manier met de rekenregels voor haakjes en breuken om te springen...

Voorbeeld 3

$$\begin{cases} \pi x - 5y = 0 \\ 2\pi x - 10y = \frac{\pi}{17} \end{cases}$$

De eerste vergelijking oplossen naar x geeft:

$$x = \frac{5}{\pi} y$$

Dit substitueren in de tweede vergelijking en uitwerken geeft:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{\pi} y \\ 2\pi(\frac{5}{\pi} y) - 10y = \frac{\pi}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{\pi} y \\ 10y - 10y = \frac{\pi}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{\pi} y \\ 0 = \frac{\pi}{17} \end{cases}$$

De tweede vergelijking van het stelsel is duidelijk onzin, er bestaat geen x en y die ervoor kan zorgen dat deze vergelijking klopt.

Het stelsel van vergelijkingen heeft geen oplossingen!

Voorbeeld 4

$$\begin{cases} 84x - 210y = 21 \\ 2x - 5y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

We lossen de tweede vergelijking op naar y:

$$2x - 5y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2x - \frac{1}{2}}{5} = y \Leftrightarrow y = \frac{4x - 1}{10}$$

Substitutie in de eerste vergelijking geeft dan

$$\begin{cases} 84x - 210(\frac{4x-1}{10}) = 21 \\ y = \frac{4x-1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 84x - 84x + 21 = 21 \\ y = \frac{4x-1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21 = 21 \\ y = \frac{4x-1}{10} \end{cases}$$

Hier zien we dat de eerste vergelijking altijd geldig is, welke waarden voor x en y men ook kiest. Alleen de tweede vergelijking legt beperkingen op aan x en y, namelijk dat om een oplossing van het stelsel te hebben het verband tussen x en y moet gegeven worden door

$$y = \frac{4x-1}{10}$$

Je kan dus ofwel x, ofwel y willekeurig kiezen. Als je de andere onbekende berekent met de tweede vergelijking zijn x,y een oplossing voor het stelsel.

Dit betekent dat het stelsel een oneindig aantal oplossingen heeft!

De oplossingen worden gegeven door

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{4x-1}{10} \end{cases}$$

Onthoud

- Kies één van de vergelijking en los deze op naar één van de onbekenden, hierbij doe je net alsof je de andere onbekende kent.
- Substitueer nu de oplossing van de ene vergelijking in de andere vergelijking, je bekomt nu een eerstegraadsvergelijking in één onbekende.
- Los de bekomen vergelijking op en substitueer de gevonden onbekende in de andere vergelijking, dit levert een eerstegraadsvergelijking in de nog te vinden onbekende.
- Los de overblijvende vergelijking op.
- De gevonden oplossing(en) zijn oplossing voor allebei de vergelijkingen van het stelsel. Controleer dit door de waarden te substitueren!

Opmerking Respecteer de rekenregels voor haakjes, voor het optellen en vermenigvuldigen van breuken, enz...

Tips:

- Let goed op bij substitutie dat je de hele uitdrukking substitueert, gebruik haakjes!
- Je mag een vergelijking apart afhandelen, maar vergeet niet op het einde alles terug in het stelsel te zetten!

1.7 Ongelijkheden

Inleiding

Men bekomt een ongelijkheid door in een vergelijking het “is gelijk aan” teken te vervangen door één van de volgende ongelijkheidstekens:

- $<$ “is kleiner dan”
- $>$ “is groter dan”
- $\leq$ “is kleiner dan of gelijk aan”
- $\geq$ “is groter dan of gelijk aan”

Je kan ongelijkheden op een soortgelijke manier manipuleren als vergelijkingen.

- Door bij het linkerlid en rechterlid van een ongelijkheid hetzelfde positieve of negatieve getal op te tellen blijft de ongelijkheid geldig. Door bijvoorbeeld in beide leden van de ongelijkheid $x + 1 > 8$ het getal 2 op te tellen vinden we $x + 3 > 10$ en door het getal 2 af te trekken bekomt men $x - 1 > 6$. Dit zijn drie equivalente ongelijkheden met dezelfde oplossingen: $x > 7$.
- Door beide leden van een ongelijkheid met hetzelfde (van nul verschillende) positieve getal te vermenigvuldigen bekomt men een equivalente ongelijkheid, door bijvoorbeeld $x+1 > 8$ te vermenigvuldigen met 10 bekomt men $10x+10 > 80$ met nog steeds dezelfde oplossingen $x > 7$.
- **Pas op!** Als men een ongelijkheid vermenigvuldigt met een negatief getal dan keert het ongelijkheidsteken om! Nemen we weer hetzelfde voorbeeld $x+1 > 8$ en vermenigvuldigen we deze uitdrukking met -1 dan bekomen we $-x-1 < -8$. Alleen op deze manier blijven de oplossingen hetzelfde: $x > 7$.

In deze cursus zullen we met behulp van een aantal voorbeelden illustreren hoe men ongelijkheden van de eerste graad kan oplossen.

Voorbeeld 1

$$5x - 7 < 2x + 1$$

Door bij beide leden $2x$ af te trekken en 7 bij te tellen vinden we

$$3x < 8$$

Delen door 3 geeft

$$x < \frac{8}{3}$$

Deze ongelijkheid heeft dus oneindig veel oplossingen!
Deze oplossingen worden soms ook genoteerd met de oplossingenverzameling:

$$S =]-\infty, \frac{8}{3}[$$

Met deze notatie wordt de verzameling van alle getallen tussen $-\infty$ en $\frac{8}{3}$ aangegeven, merk op dat $-\infty$ en $\frac{8}{3}$ niet tot de oplossingenverzameling behoren (dit wordt aangegeven door de naar buiten wijzende vierkante haakjes).

Voorbeeld 2

$$5x - 7 < 8x + 1$$

Door bij beide leden $8x$ af te trekken en 7 bij te tellen vinden we

$$-3x < 8$$

Delen door -3 geeft

$$x > -\frac{8}{3}$$

Let op! Het "<"-teken wordt het ">"-teken!

De oplossingenverzameling wordt genoteerd als

$$S =]-\frac{8}{3}, +\infty[$$

Voorbeeld 3

$$17x + 7 \geq 17x + 3\pi$$

Van beide leden $17x$ aftrekken geeft

$$7 \geq 3\pi$$

Er is geen enkele x die ervoor kan zorgen dat hieraan voldaan is. Deze ongelijkheid heeft geen oplossingen. De oplossingenverzameling is leeg:

$$S = \varnothing$$

Voorbeeld 4

$$\frac{x}{3} + 1 \leq -\frac{5}{7}x - 12$$

Vermenigvuldigen met 3 geeft

$$x + 3 \leq -\frac{15}{7}x - 36$$

Het wegwerken van de term met x in het rechterlid en de constante term in het linkerlid geeft

$$\frac{22}{7}x \leq -39$$

Vermenigvuldigen met $\frac{7}{22}$ geeft tenslotte

$$x \leq -\frac{273}{22}$$

De oplossingenverzameling is

$$S =]-\infty, -\frac{273}{22}]$$

Merk op dat het naar binnen wijzende vierkante haakje aanduidt dat $-\frac{273}{22}$ wel degelijk tot de oplossingenverzameling behoort.

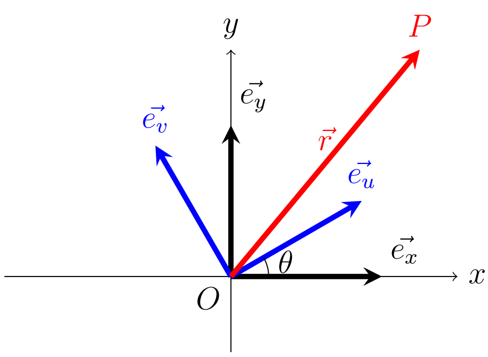
Onthoud

- Ongelijkheden van de eerste graad lost men op door de onbekende af te zonderen op een soortgelijke manier als bij veeltermvergelijkingen van de eerste graad.
- Let op dat bij het vermenigvuldigen van de ongelijkheid met een negatief getal "groter dan (of gelijk aan)" wordt omgezet in "kleiner dan (of gelijk aan)" en omgekeerd.
- Een ongelijkheid heeft ofwel oneindig veel oplossingen ofwel geen oplossingen.

2 Matrices

Inleiding

Stel dat je een computerspel speelt en je op een beeldscherm, of eventueel door een virtual reality headset, naar een door een computer gegenereerd landschap kijkt. Kijk je in deze wereld een beetje naar links of naar rechts dan berekent de computer hoe het landschap eruit ziet in je nieuwe kijkrichting en je ziet de virtuele wereld als het ware rond je gezichtspunt roteren. Misschien heb je er nog niet bij stilgestaan maar bij dit soort zaken wordt stevig gebruikt gemaakt van wiskunde.
We kunnen een idee krijgen van hoe dit in zijn werk gaat door ons in eerste instantie te beperken tot een twee dimensionale situatie. In de figuur is een punt P voorgesteld waarvan de positie in het vlak is vastgelegd door een plaatsvector $\vec{r}$. Deze plaatsvector kan voorgesteld worden ten opzichte van verschillende basissen.



In de figuur worden twee orthonormale basissen (m.a.w. basissen van loodrecht op elkaar staande éénheidsvectoren) gebruikt waarbij de basis $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v\}$ over een hoek θ is geroteerd ten opzichte van de basis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$.
De plaatsvector van het punt P wordt ten opzichte van de basis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ geschreven als

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$$

en ten opzichte van de basis $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v\}$ als

$$\vec{r} = u\vec{e}_u + v\vec{e}_v$$

Om te beschrijven wat er gebeurt bij een rotatie van ons referentiestelsel over een hoek θ moeten we het verband vinden tussen de coördinaten van het punt P in de twee referentiestelsels, met andere woorden we moeten het verband vinden tussen de componenten van $\vec{r}$ ten opzichte van de basis $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v\}$ en ten opzichte van de basis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$.

Door te projecteren kunnen we de componenten van de éénheidsvectoren van de basis $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v\}$ schrijven ten opzichte van de basis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$.

$$\begin{cases} \vec{e}_u = \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y \\ \vec{e}_v = -\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y \end{cases}$$

Omgekeerd kunnen we de componenten van de basisvectoren $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ ten opzichte van de basis $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v\}$ neerschrijven als volgt:

$$\begin{cases} \vec{e}_x = \cos\theta\vec{e}_u - \sin\theta\vec{e}_v \\ \vec{e}_y = \sin\theta\vec{e}_u + \cos\theta\vec{e}_v \end{cases}$$

Door substitutie in $\vec{r} = u\vec{e}_u + v\vec{e}_v$ vinden we

$$\vec{r} = u(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y) + v(-\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y)$$

ofwel

$$\vec{r} = (u\cos\theta - v\sin\theta)\vec{e}_x + (u\sin\theta + v\cos\theta)\vec{e}_y$$

De coördinaten van het punt P in het oorspronkelijke referentiestelsel worden dus als volgt geschreven in functie van de coördinaten van het punt P in het nieuwe referentiestelsel:

$$\begin{cases} x = u\cos\theta - v\sin\theta \\ y = u\sin\theta + v\cos\theta \end{cases}$$

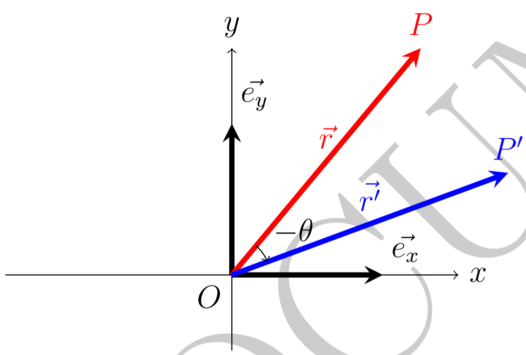
Op dezelfde manier vindt men door substitutie de coördinaten van het punt P in het nieuwe referentiestelsel, uitgedrukt in functie van de coördinaten van P in het oude referentiestelsel:

$$\begin{cases} u = x\cos\theta + y\sin\theta \\ v = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Deze uitdrukkingen kan men ook op een alternatieve, elegante manier neerschrijven met behulp van getallenschema's. De coördinaten in een referentiestelsel schrijft met in een kolom, een **kolommatrix** en het verband tussen de coördinaten in beide referentiestelsels drukt met uit met een **coördinatentransformatiematrix**.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

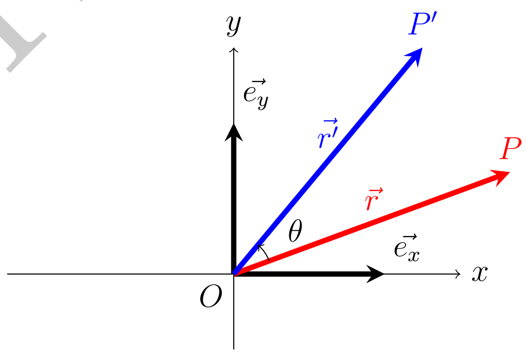
Een soortgelijke, maar verschillende situatie wordt in de volgende figuur voorgesteld. Een vector $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ roteert over een hoek $-\theta$ (dus gemeten in wijzerszin), na deze rotatie wordt de vector, die we nu $\vec{r'}$ noemen, gegeven door $\vec{r'}=x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y$.



De componenten van $\vec{r'}$ worden nu uitgedrukt in functie van de componenten van $\vec{r}$ met

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

In de volgende figuur is de rotatie van een vector $\vec{r}$ over een hoek θ in tegenwijzerszin voorgesteld.



De transformatie voor deze rotatie vinden we door in de bovenstaande uitdrukking θ te vervangen door $-\theta$. We vinden dan:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

De matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

wordt de rotatiematrix voor rotatie over een hoek θ genoemd.

Matrices zijn een handige manier om veranderingen van referentiestelsel, coördinatentransformaties, te beschrijven.
Daarnaast is er een hele familie bewerkingen, lineaire transformaties, waarbij een vector via een matrixbewerking wordt omgezet in een nieuwe vector. Typisch voorbeeld is het roteren van een vector zoals hierboven beschreven.

In dit hoofdstuk zullen we een aantal definities en eigenschappen van matrices bespreken en zullen we rekenwerk met matrices inoefenen met het oog op praktische toepassingen. Alle eigenschappen die besproken worden kunnen wiskundig bewezen worden maar dat gaan we in dit hoofdstuk dus niet doen.

2.1 Definities

Definitie van een matrix

Definitie Een $m \times n$ matrix A is een rechthoekig getallenschema waarin reële en/of complexe getallen in m rijen en n kolommen zijn gerangschikt. Het getal op de i-de rij en j-de kolom wordt symbolisch weergegeven als a_{ij}.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Enkele veel voorkomende speciale matrices

- Een rijmatrix

  Een matrix A met 1 rij en n kolommen wordt een $1xn$ matrix of rijmatrix genoemd.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

- Een kolommatrix

  Een matrix A met m rijen en 1 kolom wordt een $mx1$ matrix of kolommatrix genoemd.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

- Een vierkante matrix

  Een matrix met evenveel rijen als kolommen wordt een vierkante matrix genoemd. De onderstaande matrix A is een $n \times n$ matrix.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Een diagonaalmatrix

  Een vierkante matrix A waarin alle getallen die niet op de diagonaal liggen nul zijn ($a_{ij} = 0$ als $i \neq j$) en minstens één getal op de diagonaal verschillend is van nul (voor minstens 1 getal a_{ii} geldt $a_{ii} \neq 0$) noemt men een diagonaalmatrix.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Een driehoeksmatrix

  Een driehoeksmatrix is een vierkante matrix waarbij alle elementen onder de diagonaal nul zijn. De overige elementen zijn niet allemaal nul.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Een symmetrische matrix

  Een vierkante matrix A waarbij de diagonaal een spiegellijn vormt (m.a.w. voor alle $a_{ij} \in A$ geldt $a_{ij} = a_{ji}$) is een symmetrische matrix.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Een éénheidsmatrix

  Een diagonaal matrix waarbij alle getallen op de diagonaal gelijk zijn aan één (alle $a_{ii} = 1$) is een éénheidsmatrix I.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- Een nulmatrix

  Een $m \times n$ matrix waarin alle $a_{ij} = 0$ is een nulmatrix O.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Opmerking De nulmatrix is niet noodzakelijk een vierkante matrix.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots$$

worden allemaal nulmatrix genoemd.

2.2 Bewerkingen met matrices

Transponeren van een matrix

De getransponeerde A^t van een matrix A vindt men door de rijen en kolommen van A om te wisselen.

Voorbeeld 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 0 & 8 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Voor een symmetrische matrix B geldt dat $B^t = B$.

Voorbeeld 2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

De getransponeerde van een rijmatrix is een kolommatrix en omgekeerd.

Voorbeeld 3

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 84 & -1 \end{pmatrix} \quad C^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 84 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Product van een matrix met een getal

Het product van een $m \times n$ matrix A met een reëel of complex getal λ is een nieuwe $m \times n$ matrix B die men vindt door elk element a_{ij} van de matrix te vermenigvuldigen met λ.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda_{12} & \lambda a_{13} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \lambda a_{m3} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Optellen van matrices

Het optellen van twee matrices A en B is alleen gedefiniëerd als het aantal rijen van beide matrices gelijk is en als het aantal kolommen van beide matrices gelijk is. In dat geval is de som een matrix C met hetzelfde aantal rijen en kolommen als A en B die men als volgt vindt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{m3}+b_{m3} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Voorbeeld 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A + B = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Voorbeeld 5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

De som $A + C$ is niet gedefiniëerd.

Vermenigvuldiging van twee matrices

Het product van een matrix A met een matrix B is alleen gedefiniëerd als het aantal kolommen van de eerste matrix A gelijk is aan het aantal rijen van de tweede matrix B.

In dat geval geldt dat het product van de $m \times n$ matrix A met de nxp matrix B een nieuwe matrix $C = AB$ is met m-rijen en p-kolommen.
Elk element c_{ij} van de productmatrix C wordt gegeven door:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

m.a.w. c_{ij} wordt gevonden door het eerste element van de i-de rij van A te vermenigvuldigen met het eerste element van de j-de kolom van B, het tweede element van de i-de rij van A te vermenigvuldigen met het tweede element van de j-de kolom van B, het derde element van de i-de rij van A te vermenigvuldigen met het derde element van de j-de kolom van B, enz... en vervolgens al deze producten op te tellen.

Voorbeeld 6 Bereken de producten $C = AB$ en $D = BA$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Het aantal kolommen van A is gelijk aan het aantal rijen van B, het product AB is dus gedefiniëerd en is een $2x1$ matrix C

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 10 + 0 \cdot 12 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \\ 0 \cdot 10 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Het aantal kolommen van B is verschillend van het aantal rijen van A. Dit betekent dat het product $D = BA$ niet gedefiniëerd is.

Voorbeeld 7 Bereken de producten $C = AB$ en $D = BA$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Het aantal kolommen van A is gelijk aan het aantal rijen van B, het product AB is dus gedefiniëerd en is een $1x1$ matrix C

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} = 2$$

Het aantal kolommen van B is gelijk aan het aantal rijen van A, het product BA is dus gedefiniëerd en is een $3x3$ matrix D

$$D = BA = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 & 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Opmerking

- Bij het vermenigvuldigen van matrices geldt dus over het algemeen **NIET** dat $AB = BA$
- Het is zelfs **NIET** zo dat uit het feit dat het product van twee matrices $C = AB$ bestaat volgt dat het product BA ook bestaat.

2.3 Determinant

Inleiding

De determinant van een matrix is een getal dat via een welbepaalde procedure uit de elementen van een vierkante matrix kan berekend worden.
De determinant van een matrix is alleen **gedefiniëerd voor vierkante matrices**.

Determinant van een 1x1 matrix

De determinant van een $1x1$ matrix A is het enige element van de matrix.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix} \quad detA = |a_{11}| = a_{11}$$

Determinant van een 2x2 matrix

De determinant van een $2x2$ matrix A wordt als volgt berekend:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Minor van een element van een vierkante matrix

De minor van een element a_{ij} van een vierkante matrix A is het getal dat men bekomt door in de matrix A de i-de rij en de j-de kolom te schrappen, en van de overblijvende matrix de determinant te berekenen.

Voorbeeld 1 We berekenen de minor van het element a_{13} van de matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

We schrappen de eerste rij en de derde kolom van A en berekenen de determinant van de overblijvende matrix.

$$minor(a_{13}) = det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$$

Cofactor van een element van een vierkante matrix

De cofactor van een element a_{ij} van een vierkante matrix A is het getal dat men bekomt door de minor van a_{ij} te vermenigvuldigen met $(-1)^{i+j}$

$$\text{cofactor}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} minor(a_{ij})$$

Voorbeeld 2 We berekenen de cofactor van het element a_{ij} van de bovenstaande matrix A

$$\text{cofactor}(a_{ij}) = (-1)^{1+3} minor(a_{13}) = minor(a_{13}) = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$$

Voorbeeld 3 Bereken de cofactor van het element $a_{23} = 8$ van de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

We schrappen de tweede rij en de derde kolom en berekenen de determinant van de resterende vierkante matrix.

$$\text{cofactor}(a_{23}) = (-1)^{2+3}(1.5 - 2.2) = (-1).1 = -1$$

Merk op dat in de berekening van de cofactor van a_{23} de waarde van a_{23}, in dit geval 8, geen enkele rol speelt.

Determinant van een $n \times n$ matrix

Om de determinant van een willekeurige $n \times n$ matrix te berekenen maken we gebruik van de ontwikkelingsformule van Laplace. Deze formule kan toegepast worden op eender welke rij of kolom van een $n \times n$ matrix, het resultaat is steeds de determinant van de matrix.

Toegepast op de i-de rij van de matrix noemt men dit **de ontwikkeling van de determinant naar de i-de rij**:

$$detA = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\text{cofactor}(a_{ik})$$

Toegepast op de j-de kolom noemt men dit **de ontwikkeling van de determinant naar de j-de kolom**:

$$detA = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\text{cofactor}(a_{kj})$$

Voorbeeld 4 Bereken de determinant van de volgende matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Oplossing: we passen ontwikkeling naar de eerste rij toe.

$$detA = 1(-1)^{1+1} det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + 2(-1)^{1+2} det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 0(-1)^{1+3} det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$detA = (4 - 2(8 - 9)) = 6$$

Voorbeeld 5 Bereken de determinant van de volgende matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & -5 \\ \pi & 0 & 3 & 11 \\ 0 & \pi^2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Oplossing: de matrix B is geen vierkante matrix, de determinant bestaat niet.

Voorbeeld 6 Bereken de determinant van de volgende matrix:

$$C = \begin{pmatrix} \pi & \pi^2 & \pi^3 & \pi^4 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oplossing: we passen ontwikkeling naar de eerste kolom toe.

$$detC = \pi(-1)^{1+1} det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Op de overblijvende determinant passen we opnieuw ontwikkeling naar de eerste kolom toe.

$$detC = \pi 3(-1)^{1+1} det \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$detC = \pi \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = 12\pi$$

Er geldt algemeen dat **de determinant van een driehoeksmatrix het product van de diagonaalelementen is**.

Eigenschappen van determinanten

Alle matrices die in deze paragraaf voorkomen worden ondersteld vierkante matrices te zijn.

Eigenschap 1 *De determinant van de getransponeerde van een matrix is hetzelfde als de determinant van de oorspronkelijke matrix.*

$$detA^t = detA$$

Eigenschap 2 *Als men twee rijen (of twee kolommen) van plaats wisselt in een matrix dat verandert de determinant van teken.*

Voorbeeld 7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad detA = 1$$

Wissel de eerste en tweede rij van plaats:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad detA' = 1(-1)^{1+2}det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad detA' = -1$$

Eigenschap 3 *Als de elementen van een rij (of kolom) van een matrix vermenigvuldigt worden met een getal λ dan wordt de determinant van de matrix vermenigvuldigt met λ.*

Voorbeeld 8

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad detB = 12 - 4 = 8$$

We vermenigvuldigen de eerste rij met $\lambda = 2$

$$B' = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad detB' = 24 - 8 = 16$$

Eigenschap 4 *Als men de elementen van een rij (kolom) van een matrix vermenigvuldigt met een getal $\lambda \neq 0$ en deze vervolgens optelt bij de elementen van een andere rij (kolom) dan verandert de waarde van de determinant niet.*

Voorbeeld 9 We vertrekken opnieuw van de matrix B uit het vorige voorbeeld. We vermenigvuldigen nu de eerste rij met 2 en tellen deze rij op bij de tweede rij.

$$B'' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \quad detB'' = 24 - 16 = 8$$

Eigenschap 5 *De determinant van een matrix met een nulrij (nulkolom) is nul.*

Voorbeeld 10

$$C = \begin{pmatrix} \pi & \pi+1 & \pi+2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \pi-1 & \pi & \pi+1 \end{pmatrix}$$

De determinant ontwikkelen naar de tweede rij geeft onmiddellijk $detC = 0$

Voorbeeld 11 Als twee rijen (kolommen) van een matrix gelijk zijn dan is de determinant nul.

Voorbeeld 12

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 3 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad detD = 1det\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 1det\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + 8det\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$detD = 0 + 8(6-6) = 0$$

Eigenschap 6 *Als twee rijen (kolommen) van een matrix evenredig zijn met elkaar dan is de determinant nul.*

Voorbeeld 13 de tweede rij is drie maal de eerste rij.

$$E = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 30 \end{pmatrix} \quad det E = 150 - 150 = 0$$

Eigenschap 7 *Als een rij (kolom) van een matrix een lineaire combinatie is van andere rijen (kolommen) van de matrix dan is de determinant nul.*

Voorbeeld 14 De tweede rij is de derde rij waarbij twee keer de eerste rij is opgeteld. We ontwikkelen naar de derde rij.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 10 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad det F = 4 det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} + 4 det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$det F = 4(20 - 12) + 4(4 - 12) = 4(8 - 8) = 0$$

Eigenschap 8 *Als A en B beide $n \times n$ matrices zijn dan geldt:*

$$det(AB) = (det A)(det B)$$

Voorbeeld 15

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$det A = 8 \quad det B = -8 \quad (det A)(det B) = -64$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2+18 & 4+12 \\ 4+60 & 8+40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 16 \\ 64 & 48 \end{pmatrix} \quad det(AB) = 20.48 - 64.16$$

$$det(AB) = 16(20.3 - 64) = 16(-4) = -64$$

2.4 Inverse van een matrix

Reguliere en singuliere matrix

Een vierkante matrix A waarvoor geldt $det A \neq 0$ is een reguliere matrix.

Een vierkante matrix A waarvoor geldt $det A = 0$ is een singuliere matrix.

Inverse van een matrix

Als er voor een vierkante matrix A een vierkante matrix X bestaat waarvoor geldt $AX = XA = I$, met I de éénheidsmatrix dan is de matrix X de inverse van A.
Notatie:

$$X = A^{-1}$$

Opmerking

- Opdat X de inverse van A zou zijn moet dus aan **beide** uitdrukkingen $AX = I$ en $XA = I$ voldaan zijn.
- Als de inverse van A bestaat dan geldt $(A^{-1})^{-1} = A$
- Als de inverse van A bestaat dan zegt men dat A inverteerbaar is.
- Men kan aantonen dat voor een inverteerbare matrix A geldt $detA \neq 0$, met andere woorden "A is inverteerbaar" $\Leftrightarrow$ "A is regulier".

Voorbeeld 1 De inverse van de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ is de matrix $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
Controle:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en

$$BA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Adjunctmatrix van een vierkante matrix

De adjunctmatrix van een vierkante matrix A is de matrix die men bekomt door elk element van A te vervangen door zijn cofactor en vervolgens de matrix te transponeren.

Dus, met a_{ij} de elementen van de $n \times n$ matrix A geldt:

$$adj A = \begin{pmatrix} \text{cofactor}(a_{11}) & \text{cofactor}(a_{12}) & \text{cofactor}(a_{13}) & \dots & \text{cofactor}(a_{1n}) \\ \text{cofactor}(a_{21}) & \text{cofactor}(a_{22}) & \text{cofactor}(a_{23}) & \dots & \text{cofactor}(a_{2n}) \\ \text{cofactor}(a_{31}) & \text{cofactor}(a_{32}) & \text{cofactor}(a_{33}) & \dots & \text{cofactor}(a_{3n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cofactor}(a_{n1}) & \text{cofactor}(a_{n2}) & \text{cofactor}(a_{n3}) & \dots & \text{cofactor}(a_{nn}) \end{pmatrix}^t$$

Het is mogelijk om aan te tonen dat voor een reguliere vierkante matrix A geldt:

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{detA}$$

Voorbeeld 2 De vierkante matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 1 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

We gaan na of deze matrix regulier is (m.a.w. of er een inverse matrix A^{-1} bestaat.

$$detA = 1det\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 8det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -7$$

Dus $detA \neq 0$ zodat A is regulier, A^{-1} bestaat.

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{detA} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -8 & 1 & -3 \\ 16 & -2 & -1 \end{pmatrix}^t$$

De inverse van A is dus

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{8}{7} & -\frac{16}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

2.5 De rang van een matrix

Onderdeterminant van p-de orde van een matrix

Een onderdeterminant van p-de orde van een $m \times n$ matrix A is een getal dat men bekomt door:

- $m - p$ rijen en $n - p$ kolommen van de matrix A te schrappen
- de determinant van de overblijvende vierkante matrix te berekenen

Opmerking

- onderdeterminanten zijn dus ook voor niet-vierkante matrices gedefiniëerd
- er staat **een** onderdeterminant... naargelang welke rijen en kolommen geschrapt worden zal je een andere onderdeterminant vinden

Voorbeeld 1 Beschouw de $3x4$ matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

We berekenen een onderdeterminant van 3-de orde door $3-3=0$ rijen te schrappen en $4-3=1$ kolom te schrappen en de determinant van de overblijvende vierkante matrix te berekenen.

- Schrappen van de vierde kolom levert als onderdeterminant van 3-orde:

$$det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 15$$

- Schrappen van de derde kolom levert als onderdeterminant van 3-de orde:

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 18$$

We berekenen een onderdeterminant van 1-ste orde door $3 - 1 = 2$ rijen en $4 - 1 = 3$ kolommen te schrappen en de determinant van de overblijvende matrix te berekenen.

- Schrap de eerste twee rijen en de eerste drie kolommen. De onderdeierminant van 1-ste orde is
$$det \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix} = 6$$
- Schrap de eerste twee rijen en de laatste drie kolommen. De onderdeterminant van 1-ste orde is
$$det \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} = 0$$

Rang van een matrix

De rang van een $m \times n$ matrix A is nu gedefiniëerd als de hoogste orde r van alle van nul verschillende onderdeterminanten van A.

Er bestaan verschillende notaties voor de rang van een matrix maar de meest voorkomende zijn:

$$rang(A) = r, Rg(A) = r \quad \text{of} \quad Rank(A) = r$$

Opmerking

- De rang van een $m \times n$ matrix A is nooit groter dan het minimum van m en n.
$$rang(A) \leq min(m, n)$$
Bij het berekenen van de onderdeterminanten kan men immers nooit minder dan 0 rijen of kolommen schrappen...
- Voor een nulmatrix geldt: $rang(O) = 0$
- Voor een vierkante $n \times n$ matrix A geldt:
  - as A regulier is (m.a.w. $detA \neq 0$) dan geldt $rang(A) = n$
    De van nul verschillende determinant van A is immers de onderdeterminant van orde n.
  - als A singulier is (m.a.w. $detA = 0$ dan geldt $rang(A) < n$

Voorbeeld 2 We bepalen de rang van $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

De matrix A is een $3x4$ matrix. We weten dus op voorhand dat $rang(A) \leq 3$

We berekenen nu de onderdeterminanten, startend van onderdeterminanten van orde 3, tot we een onderdeterminant tegenkomen die verschillend is van nul. De orde van deze onderdeterminant is volgens de definitie de rang van de matrix.

- Onderdeterminanten van orde 3.
  We schrappen 0 rijen en 1 kolom.
  $det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 0$, $det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} = 0$, $det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 0$, $det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 0$ De rang van de matrix zal dus kleiner zijn dan 3.

- Onderdeterminanten van orde 2.
  We schrappen 1 rij en 2 kolommen.
  Door de derde rij en de twee laatste kolommen te schrappen vinden we:
  $$det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$
  We vinden dus dat
  $$rang(A) = 2$$

2.6 Elementaire omvormingen van een matrix

Definitie

Definitie Elementaire omvormingen van een matrix zijn omvormingen die de rang van een matrix niet veranderen. Er zijn drie elementaire omvormingen die men kan toepassen op de rijen of op de kolommen van een matrix.

- Twee rijen (of twee kolommen) van plaats wisselen.
- Alle elementen van een rij (of kolom) vermenigvuldigen met een getal $\lambda \neq 0$.
- Alle elementen van een rij (of kolom) vermenigvuldigen met een getal $\lambda \neq 0$ en deze dan optellen bij de elementen van een andere rij (kolom).

Opmerking De rang van een matrix wordt bepaald door na te gaan of determinanten verschillen zijn van nul of niet. De omvormingen die hierboven staan kunnen de waarde van een determinant wel veranderen maar hebben geen effect op het al dan niet nul zijn van een determinant (zie: eigenschappen van determinanten).

De rang van een matrix bepalen met elementaire omvormingen

- Echelonvorm van een matrix

  Een matrix is in echelonvorm als

  - alle eventuele nulrijen van de matrix onderaan de matrix staan
  - de eerste rij begint met een element dat niet nul is, de tweede rij begint met een nul gevolgd door een element dat niet nul is, de derde rij begint met twee nullen gevolgd door een element dat niet nul is, enz... tot ofwel de nulrijen ofwel het einde van de matrix wordt bereikt.

  Een $m \times n$ matrix in echelonvorm:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & \dots & b_{1r} & b_{1,r+1} & b_{1,r+2} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & \dots & b_{2r} & b_{2,r+1} & b_{2,r+2} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & b_{3r} & b_{3,r+1} & b_{3,r+2} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & b_{rr} & b_{r,r+1} & b_{r,r+2} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

  met alle $b_{ii} \neq 0$ $(i = 1..r)$ de elementen b_{ij} met $i \neq j$ kunnen zowel gelijk als verschillend van nul zijn.

- Praktische manier om de rang van een matrix te bepalen

  De rang van een $m \times n$ matrix A bepalen door onderdeterminanten te berekenen blijkt in de praktijk nogal lastig en tijdrovend te zijn. Een veel handiger manier is gebaseerd op elementaire omvormingen.

  Men gaat als volgt te werk:

  - zet de matrix A met behulp van elementaire omvormingen om in een nieuwe matrix A' die in echelonvorm staat

$$A' = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & \dots & b_{1r} & b_{1,r+1} & b_{1,r+2} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & \dots & b_{2r} & b_{2,r+1} & b_{2,r+2} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & b_{3r} & b_{3,r+1} & b_{3,r+2} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & b_{rr} & b_{r,r+1} & b_{r,r+2} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

– Het aantal niet-nulrijen van A' is dan gelijk aan de rang van de matrix A

$$rang(A) = r = \text{aantal niet nulrijen van} \quad A'$$

Verklaring:

Elementaire omvormingen veranderen de rang van een matrix niet. Er geldt dus $rang(A) = rang(A')$.
De matrix A' heeft minstens één onderdeterminant van orde r want alle $b_{ii} \neq 0$ $(i = 1..r)$ zodat de determinant van de rxr driehoeksmatrix, waarvan de b_{ii} de diagonaal vormen, niet nul is.
Alle onderdeterminanten van een grotere orde dan r van A' zijn zeker nul, ze bevatten immers altijd minstens één nulrij.

Voorbeeld 1 Bereken de rang van $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

We gaan de matrix nu stap voor stap, met elementaire opvormingen, omzetten in een echelonmatrix. Hierbij gaan we van links naar rechts door de matrix: eerst maken we alle elementen onder het eerste element van de eerste rij nul, vervolgens maken we alle elementen onder het tweede element van de tweede rij nul, enz... tot we de echelonvorm bekomen.

- stap 1: rij 3 - rij 1 en rij 4 -2 rij 1

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

- stap 2: rij 3 - rij 2 en rij 4 + 4 rij 2

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

- stap 3: wissel rij 3 en rij 4

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De resulterende $4x4$ matrix A' staat in echelonvorm en heeft drie niet-nulrijen:

$$rang(A) = rang(A') = 3$$

2.7 Praktische berekening van de inverse van een matrix

Om na te gaan of een vierkante matrix regulier is moeten we de determinant berekenen. Voor een iets grotere matrix kan dit behoorlijk tijdrovend zijn. Als blijkt dat de matrix regulier is, kan men de inverse vinden door de adjunctmatrix te berekenen. Hiervoor moeten opnieuw talrijke determinanten worden uitgerekend. Dit maakt dat het berekenen van de inverse van een matrix op deze manier enorm veel tijd en moeite kost, in die mate zelfs dat het voor grotere matrices, zelfs met een computer, onpraktisch wordt.

Er is echter een methode ontwikkeld die toelaat om, met elementaire omvormingen, na te gaan of een matrix inverteerbaar is en eventueel de inverse te vinden. Deze methode staat bekend als de methode van **Gauss-Jordan**. We geven hier deze methode zonder bewijs.

Methode van Gauss-Jordan om na te gaan of een vierkante $n \times n$ matrix A inverteerbaar is en om eventueel de inverse van A te vinden:

- Stap 1: Schrijf een nieuwe $nx2n$ matrix met links de matrix A en rechts de éénheidsmatrix I

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- Stap 2: Probeer de matrix A, door opeenvolgnede elementaire omvormingen, om te zetten in de éénheidsmatrix I en pas tegelijkertijd dezelfde elementaire omvormingen toe op I. Om geen rekenfouten te maken is het aan te raden je te beperken tot elementaire rij-omvormingen.
  Er zijn nu twee mogelijkheden:

  1. Na een aantal omvormingen wordt de $n \times n$ matrix A omgezet in een matrix met een nulrij. Dus $rang(A) < n$, $detA = 0$ en A is singulier. De inverse van A bestaat niet.

2. Na een aantal elementaire omvormingen is A omgezet in de éénheidsmatrix I. Dit betekent dat $rang(A) = n$, $det A \neq 0$ en A is regulier (inverteerbaar). De éénheidsmatrix I is dan door de elementaire omvormingen omgezet in een nieuwe $n \times n$ matrix $B = A^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & b_{11} & \dots & \dots & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & & & 0 & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & b_{n1} & \dots & \dots & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Voorbeeld 1 We gebruiken de methode van Gauss-Jordan om na te gaan of de vierkante matrix A inverteerbaar is. Als dat zo is bepalen we meteen de inverse van A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

We schrijven de $3x3$ matrix A in een $3x6$ matrix door de éénheidsmatrix rechts bij te voegen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

We passen nu elementaire rij-omvormingen toe waarbij we proberen A om te zetten in de éénheidsmatrix. Tegelijkertijd passen we dezelfde rij-omvormingen toe op de éénheidsmatrix I. We gaan hierbij systematisch te werk waarbij we in A, van links naar rechts, de elementen onder de diagonaal omzetten in nullen.

- Stap 1: rij 3 - 2 rij 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 8 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Stap 2: rij 3 + 3/2 rij 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{19}{2} & -2 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

- Stap 3: 1/6 rij 2 en 2/19 rij 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{19} & \frac{3}{19} & \frac{2}{19} \end{pmatrix}$$

Pas als alle elementen onder de diagonaal nul gemaakt zijn bekijken we de elementen boven de diagonaal. We maken opnieuw gebruik van elementaire rij-omvormingen om deze elementen om te zetten in nullen. Deze keer gaan we systematisch van rechts naar links door de matrix.

- Stap 4: rij 2 - 1/6 rij 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{57} & \frac{8}{57} & \frac{-1}{57} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{19} & \frac{3}{19} & \frac{2}{19} \end{pmatrix}$$

- Stap 5: rij 1 - 7 rij 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{43}{57} & \frac{-56}{57} & \frac{7}{57} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{57} & \frac{8}{57} & \frac{-1}{57} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{19} & \frac{3}{19} & \frac{2}{19} \end{pmatrix}$$

De linkerhelft van de $3x6$ matrix, A is omgezet in de éénheidsmatrix. De matrix A is dus inverteerbaar en tegelijkertijd is de rechterkant van de $3x6$ matrix omgezet in $B = A^{-1}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{43}{57} & \frac{-56}{57} & \frac{7}{57} \\ \frac{2}{57} & \frac{8}{57} & \frac{-1}{57} \\ \frac{-4}{19} & \frac{3}{19} & \frac{2}{19} \end{pmatrix}$$

2.8 Methode van Gauss voor het oplossen van een stelsel van vergelijkingen

Stelsels van lineaire vergelijkingen in matrixnotatie

Een stelsel van lineaire vergelijkingen kan ook geschreven worden in matrixvorm. Neem een stelsel van m vergelijkingen in n onbekenden x_1, x_2,...,x_n:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

We merken op dat het **niet** noodzakelijk is dat het aantal vergelijkingen m gelijk is aan het aantal onbekenden n.

Door alle coëfficiënten a_{ij} in een $m \times n$ matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ te schrijven,

de onbekenden in een $nx1$ kolommatrix $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ te plaatsen en de rechterleden van de vergelijkingen in een $mx1$ kolommatrix $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ te schrijven, kunnen we het stelsel van vergelijkingen beschouwen als een matrixvermenigvuldiging $AX = C$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

In plaats van de matrixvermenigvuldiging expliciet op te schrijven wordt het stelsel in matrixvorm dikwijls verkort genoteerd met behulp van de **verhoogde coëfficiëntenmatrix** $\left(\begin{array}{c|c} A & C \end{array} \right)$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} & c_1 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & \dots & a_{mn} & c_m \end{array} \right)$$

Equivalentietransformaties van een stelsel lineaire vergelijkingen

Een equivalentietransformatie van een stelsel van vergelijkingen is een omvorming van het stelsel tot een nieuw stelsel van lineaire vergelijkingen dat nog steeds dezelfde oplossingen heeft als het oorspronkelijke stelsel.

Er zijn drie equivalentietransformaties:

- Twee vergelijkingen van het stelsel van plaats verwisselen
- Een vergelijking vermenigvuldigen met een getal $\lambda \neq 0$
- Een vergelijking vermenigvuldigen met een getal $\lambda \neq 0$ en het resultaat optellen bij een andere vergelijking.

Het is niet moeilijk in te zien dat de eerste twee inderdaad de oplossingen van het stelsel niet veranderen. De derde transformatie komt neer op de substitutiemethode voor het oplossen van een stelsel van vergelijkingen die we in het hoofdstuk over vergelijkingen besproken hebben.

Schrijven we nu een stelsel van lineaire vergelijkingen eerst in matrixvorm $AX = C$ en vervolgens in verkorte vorm met de verhoogde coëfficiëntenmatrix $\left(\begin{array}{c|c} A & C \end{array} \right)$. **Het toepassen van de equivalentietransformaties op het stelsel komt dan neer op het toepassen van elementaire rij-omvormingen op de verhoogde coëfficiëntenmatrix.**

Hierop is de methode van Gauss voor het oplossen van een stelsel van vergelijkingen gebaseerd.

Methode van Gauss

We schrijven een stelsel van m vergelijkingen in n onbekenden

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

eerst in matrixvorm $AX = C$ en vervolgens in de verkorte notatie $\left(\begin{array}{c|c} A & C \end{array} \right)$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} & c_1 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & \dots & a_{mn} & c_m \end{array} \right)$$

We maken dan gebruik van elementaire rij-omvormingen (equivalentietransformaties) om de matrix om te zetten in echelonvorm $\left(\begin{array}{c|c} A' & C' \end{array} \right)$. Omdat we alleen elementaire omvormingen gebruiken geldt dan steeds $rang(A) = rang(A')$ en $rang \left(\begin{array}{c|c} A & C \end{array} \right) = rang \left(\begin{array}{c|c} A' & C' \end{array} \right)$.
In de meest algemene schrijfwijze heeft de echelonmatrix de vorm

$$\left(\begin{array}{c|c} A' & C' \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccccccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & \dots & a'_{1r} & a'_{1,r+1} & \dots & \dots & \dots & a'_{1n} & c'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & \dots & a'_{2r} & a'_{2,r+1} & \dots & \dots & \dots & a'_{2n} & c'_2 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & a'_{rr} & a'_{r,r+1} & \dots & \dots & \dots & a'_{rn} & c'_r \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & c'_{r+1} \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & c'_m \end{array} \right)$$

Merk op dat de rang van A het aantal niet-nulrijen van A' is: $rang(A) = r$

Er kunnen zich nu drie verschillende situaties voordoen.

Onthoud **Geval 1:** voor minstens één van de $m-r$ laatste vergelijkingen (rijen) geldt $c_i' \neq 0$.
Dit betekent dat in het stelsel minstens één vergelijking voorkomt van de vorm $0 \neq 0$. Het is natuurlijk onmogelijk om aan deze vergelijking te voldoen: **het stelsel van vergelijkingen heeft geen oplossingen**.
Merk op dat in deze situatie geldt: $rang(A) \neq rang\left(\begin{array}{c|c} A' & C' \end{array}\right)$

Geval 2: voor alle $m-r$ laatste rijen geldt $c_i' = 0$ (m.a.w. $rang(A) = rang\left(\begin{array}{c|c} A' & C' \end{array}\right)$) en bovendien geldt $rang(A) = n$ met n het aantal onbekenden.
De echelonmatrix heeft dan de vorm:

$$\left(\begin{array}{c|c} A' & C' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & \dots & a'_{1n} & c'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & \dots & a'_{2n} & c'_2 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & a'_{nn} & c'_n \\ 0 & & & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & & & & 0 & 0 \end{array}\right)$$

In dit geval heeft het stelsel van vergelijkingen juist één oplossing die men vindt door de vergelijkingen één voor één op te lossen, beginnend met de laatste vergelijking. De oplossing van de laatste vergelijking $a'_{nn}x_n = c'_n$ wordt dan in de voorlaatste gesubstitueerd, enz...
Dit geeft een unieke oplossing $x_1, x_2, ..., x_n$

Geval 3: voor alle $m-r$ laatste rijen geldt $c_i' = 0$ (m.a.w. $rang(A) = rang\left(\begin{array}{c|c} A' & C' \end{array}\right)$) en $rang(A) < n$ met n het aantal onbekenden.
De echelonmatrix heeft nu de vorm:

$$\left(\begin{array}{c|c} A' & C' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccccccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & \dots & a'_{1r} & a'_{1,r+1} & \dots & \dots & \dots & a'_{1n} & c'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & \dots & a'_{2r} & a'_{2,r+1} & \dots & \dots & \dots & a'_{2n} & c'_2 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & a'_{rr} & a'_{r,r+1} & \dots & \dots & \dots & a'_{rn} & c'_r \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Het stelsel is oplosbaar en heeft een oneindig aantal oplossingen.
Men vindt de oplossingen door de vergelijkingen in het stelsel, van onder naar boven, één

voor één op te lossen. De oplossing van de r-de vergelijking substitueert men in de $r-1$-ste vergelijking, enz...
De r-de vergelijking kan men oplossen naar de onbekende x_r door de onbekenden x_{r+1},...,x_n als parameters te kiezen.

Voorbeeld 1 We controleren met de methode van Gauss of het volgende stelsel oplosbaar is en we zoeken de eventuele oplossing(en.)

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 10x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

We schrijven de verhoogde coëfficiëntenmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -10 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

We gebruiken elementaire rijomvormingen om de matrix in echelonvorm te brengen.

rij 2 - 2 rij 1 en rij 3 + rij 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -20 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

Verwissel rij 2 en rij 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & -20 & 2 \end{array}\right)$$

rij 3 + 7 rij 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 15 & 9 \end{array}\right)$$

We lezen af op de matrix dat $rang(A) = rang\left(\begin{array}{c|c} A & C \end{array}\right)$ (het stelsel is oplosbaar) en $rang(A) =$ 3, het aantal onbekenden. Het stelsel heeft dus juist één oplossing.
We lossen het stelsel van onder naar boven op:
$x_3 = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$, substitutie in de voorlaatste vergelijking geeft $-x_2 + 5\frac{3}{5} = 1$, dus $x_2 = 2$, substitutie in de eerste vergelijking geeft $x_1 - 6 + 3 = 0$, dus $x_1 = 3$.
Het stelsel heeft als oplossing $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = \frac{3}{5}$

Voorbeeld 2 We controleren met de methode van Gauss of het volgende stelsel oplosbaar is en we zoeken de eventuele oplossing(en.)

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 10x_3 = 2 \\ -3x_1 + 9x_2 - 15x_3 = 0 \end{cases}$$

We schrijven de verhoogde coëfficiëntenmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -10 & 2 \\ -3 & 9 & -15 & 0 \end{array}\right)$$

We gebruiken elementaire rijomvormingen om de matrix in echelonvorm te brengen.

rij 2 -2 rij 1 en rij 3 + 3 rij 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -20 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

We lezen af dat $rang(A) = rang\left(\begin{array}{c|c} A & C \end{array}\right)$ (het stelsel is oplosbaar) en $rang(A) = 2$, dit is kleiner dan het aantal onbekenden. In deze situatie heeft het stelsel een oneindig aantal oplossingen.
We lossen de tweede vergelijking op naar x_2 waarbij we x_3 gelijk stellen aan een willekeurig te kiezen parameter $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$. Dit geeft $x_2 = \frac{2+20\lambda}{7}$. Substitutie van x_2 en x_3 in de eerste vergelijking geeft $x_1 = \frac{25\lambda+6}{7}$.
Aangezien x_1, x_2, x_3 telkens een andere oplossing geeft als men een andere waarde voor λ kiest heeft men hier inderdaad een oneindig aantal oplossingen.

Opmerking

- We herhalen nog eens dat het niet noodzakelijk is dat het aantal vergelijkingen gelijk is aan het aantal onbekenden.

- Laten we een homogeen stelsel van vergelijkingen (een stelsel waarbij alle rechterleden nul zijn) beschouwen:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

  Dergelijk stelsel is altijd oplosbaar want in dit geval geldt $rang(A) = rang\left(\begin{array}{c|c} A & C \end{array}\right)$
  Het stelsel kan één of oneindig veel oplossingen hebben maar $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots\ ,\ x_n = 0$ is altijd een oplossing van een homogeen stelsel.

2.9 De regel van Cramer

Inleiding

We bekijken hier het speciale geval van een niet homogeen stelsel van lineaire vergelijkingen waarbij er evenveel vergelijkingen als onbekenden zijn.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = c_n \end{cases}$$

In matrixnotatie wordt dit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

en met de verhoogde coëfficiëntenmatrix

$$\left(\, A \, | \, C \, \right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{1n} & c_1 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{nn} & c_n \end{array} \right)$$

Volgens de methode van Gauss heeft een dergelijk $n \times n$ stelsel juist één oplossing als en slechts als $rang(A) = n$ met n het aantal onbekenden.
Omdat A een vierkante $n \times n$ matrix is geldt

$$rang(A) = n \Leftrightarrow detA \neq 0 \Leftrightarrow A \quad \text{is inverteerbaar}$$

De regel van Cramer is een manier om, onafhankelijk van de methode van Gauss, de unieke oplossing van een dergelijk $n \times n$ stelsel te vinden.

Pas op! De regel van Cramer is op geen enkele andere situatie toepasbaar...

De regel van Cramer

Stel dat je een niet homogeen stelsel van n lineaire vergelijkingen in n onbekenden $x_1, \ldots, x_n$ hebt waarbij de coëfficiëntenmatrix A regulier is.
In matrixnotatie wordt dit

$$AX = C \quad \text{met} \quad detA \neq 0$$

Door de matrixvergelijking links te vermenigvuldigen met de inverse van A vinden we

$$A^{-1}AX = A^{-1}C$$

of

$$X = A^{-1}C$$

Dit kan je ook schrijven als

$$X = \frac{1}{detA}adj(A)C$$

of

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} \text{cofactor}(a_{11}) & \text{cofactor}(a_{21}) & \dots & \dots & \text{cofactor}(a_{n1}) \\ \text{cofactor}(a_{12}) & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \text{cofactor}(a_{1n}) & \dots & \dots & \dots & \text{cofactor}(a_{nn}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Dit geeft voor elke x_i met $i = 1...n$ de volgende uitdrukking

$$x_i = \frac{1}{detA}(c_1\text{cofactor}(a_{1i}) + c_2\text{cofactor}(a_{2i}) + ... + c_n\text{cofactor}(a_{ni}))$$

ofwel

$$x_i = \frac{detA_i}{detA}$$

met $i = 1...n$ en A_i de coëfficiëntenmatrix A waarin de i-de kolom vervangen is door de kolommatrix C.

Voorbeeld 1 Neem het volgende stelsel van 3 vergelijkingen in 3 onbekenden:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

We controleren of de coëfficiëntenmatrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ regulier is.

$$det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Dus A is regulier, A^{-1} bestaat.

We berekenen de unieke oplossing van het stelsel:

$$x_1 = \frac{detA_1}{detA} = det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$x_2 = \frac{det A_2}{det A} = det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 5$$

$$x_3 = \frac{det A_3}{det A} = det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -1$$

Oplossingen van de oefeningen zonder ∗

Oplossingen van alle oefeningen

We kunnen (en willen) er niet rond: wiskunde speelt een sleutelrol in veel opleidingen. Bij een groot aantal vakken vormt wiskunde vaak de taal om complexe fenomenen te omschrijven. Ben je wat bezorgd over je parate wiskunde kennis? Dan is deze Massive Open Online Course (MOOC) Basiswiskunde voor (startende) studenten zeker iets voor jou.

Deze MOOC is een online leeromgeving waarmee je zelfstandig je wiskundekennis kan opfrissen of bijspijkeren. Deelname is volledig gratis.

Je neemt op eigen tempo verschillende modules rond een wiskundig thema door. Een module neemt ongeveer 3 uur in beslag en bestaat uit verschillende onderdelen. Elk onderdeel bestaat uit theorie, video's en voorbeeldoefeningen. Na elke module kun je een test afleggen om te zien of je alles onder de knie hebt.

Voor wie?

Studenten in de laatste jaren van het secundair onderwijs die zich willen voorbereiden op het hoger onderwijs, professionele bachelor studenten die eraan denken om te schakelen, eerstejaarsstudenten die nog wat extra oefening willen.

www.iiw.kuleuven.be/mooc-wiskunde