Module 1

Elementaire rekenvaardigheden A

0 Intro

Zie filmpje MOOC.

1 Wiskundige notaties

1.1 Overzicht van wiskundige notaties

Vergelijkingen en ongelijkheden

Notaties	Uitleg	Voorbeeld
$=$	is gelijk aan	$3 = 1 + 2$
$\neq$	is niet gelijk aan of verschillend van	$3 \neq 1 + 1$
$<$	is strikt kleiner dan	$2 < 3$
$>$	is strikt groter dan	$3 > 2$
$\leq$	is kleiner dan of gelijk aan	$3 \leq 4$ maar ook $4 \leq 4$
$\geq$	is groter dan of gelijk aan	$4 \geq 3$ maar ook $4 \geq 4$
$\approx$	is ongeveer gelijk aan	$\pi \approx 3$
$\sim$	is recht evenredig met; is proportioneel met (als de grootheid links stijgt, stijgt de grootheid rechts even sterk)	straal van een cirkel $\sim$ omtrek van een cirkel
$\iff$	als en slechts als; is equivalent met	$x - 1 = 0 \iff x = 1$

Bewerkingen en rekenen

Notaties	Uitleg	Voorbeeld
$+$	positief, plus of som	$+5,\ 1+3=4$
$-$	negatief, min of aftrekking	$-5,\ 3-1=2$
$\cdot$	maal of het product van	$2\cdot 3=6$
$/$ (soms ook :)	teller gedeeld door noemer = quotiënt	$6/2=3$
$\pm$	plusminus, boven en ondergrens	10 ± 1 betekent
	(wordt gebruikt bij meetfouten)	$10+1$ en $10-1$
$\lvert\ \rvert$	de absolute waarde van	$\lvert -3\rvert = \lvert 3\rvert = 3$
$\sqrt{\ }$	de vierkantswortel van	$\sqrt{9}=3$
!	faculteit	$3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$

Verzamelingen

Notaties	Uitleg	Voorbeeld
$\in$	is een element van	$3\in\mathbb{N}$
$\notin$	is geen element van	$-1\notin\mathbb{N}$
(,)	een koppel; xy-coördinaten	$(0,1)$
[,]	gesloten interval	$x\in[3,5] \iff x\geq 3$ en $x\leq 5$
] , [	open interval	$x\in]3,5[\iff x>3$ en $x<5$
[, [	half open interval langs rechts	$x\in[3,5[\iff x\geq 3$ en $x<5$
] ,]	half open interval langs links	$x\in]3,5] \iff x>3$ en $x\leq 5$
$\subset$	is een deelverzameling van	$\{0,2\}\subset\{0,1,2,3\}$
		$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$
$\cap$	doorsnede	$\{0,1,2\}\cap\{2,3\}=\{2\}$
		$\{0,2,4,\ldots\}\cap\{1,3,5,\ldots\}=\{\}=\emptyset$
$\cup$	vereniging of unie	$\{0,1,2\}\cup\{2,3\}=\{0,1,2,3\}$
$\setminus$	verschil (van verzamelingen)	$\{0,1,2,3\}\setminus\{0\}=\{1,2,3\}$
$\{\}=\emptyset$	de lege verzameling	Geen getal voldoet dus $x\in\emptyset$
$\lvert$	waarvoor geldt	De natuurlijke getallen die even zijn:
		$\{n\in\mathbb{N} \mid n \text{ is even}\}$

Bekende getallen en verzamelingen

Notaties	Uitleg	Voorbeeld
i	de imaginaire eenheid	$i^2=-1$
π	het getal pi	$\pi = 3,14159\ldots$
e	het getal van Euler	$e=2,71828\ldots$
	(wordt gebruikt bij exponentiële	
	en logaritmische functies)	
$\mathbb{N}$	verzameling der natuurlijke getallen	$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}$
$\mathbb{Z}$	verzameling der gehele getallen	$\mathbb{Z}$={...-3,-2,-1,0,1,2,3...}
$\mathbb{Q}$	verzameling der rationale getallen	$\frac{1}{3}\in\mathbb{Q}$
$\mathbb{R}$	verzameling der reële getallen	$\pi\in\mathbb{R}$
$\mathbb{C}$	verzameling der complexe getallen	$1+2i\in\mathbb{C}$

Opmerking

- Als n een natuurlijk getal voorstelt ($n \in \mathbb{N}$) dan is $2n$ een even getal en $2n+1$ een oneven getal.
- Soms mag het getal 0 niet meespelen, maar alle andere getallen wel. We noteren dit als $\mathbb{N}_0 = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Nog enkele voorbeelden zijn $\mathbb{R}_0$ en $\mathbb{R} \setminus 1$. In dit laatste geval mag het getal 1 niet meespelen.
- Een rationaal getal is het quotiënt (of breuk, verhouding, van het Latijn: ratio) van twee gehele getallen waarvan het tweede (dus de noemer) niet nul is. We kunnen dit noteren als:
$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}|a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$
- Zowel de natuurlijke als de gehele getallen kunnen als een quotiënt geschreven worden, en zijn dus ook rationale getallen. Er zijn echter getallen die we niet als quotiënt kunnen schrijven (zoals $\sqrt{2}$,e en π). We noemen ze de irrationale getallen en ze vormen samen met de rationale getallen de verzameling der reële getallen ($\mathbb{R}$).
- Als we tenslotte de verzameling met de reële getallen uitbreiden met de imaginaire eenheid i dan bekomen we de verzameling der complexe getallen
$$\mathbb{C} = \{a + bi|a, b \in \mathbb{R}\}$$

1.2 Absolute waarde

Het enige wat je moet onthouden over de absolute waarde is het volgende:

Definitie Voor $x \in \mathbb{R}$ is de absolute waarde gelijk aan

$$|x| = \begin{cases} -x \text{ als } x < 0 \\ x \text{ als } x \geq 0 \end{cases}$$

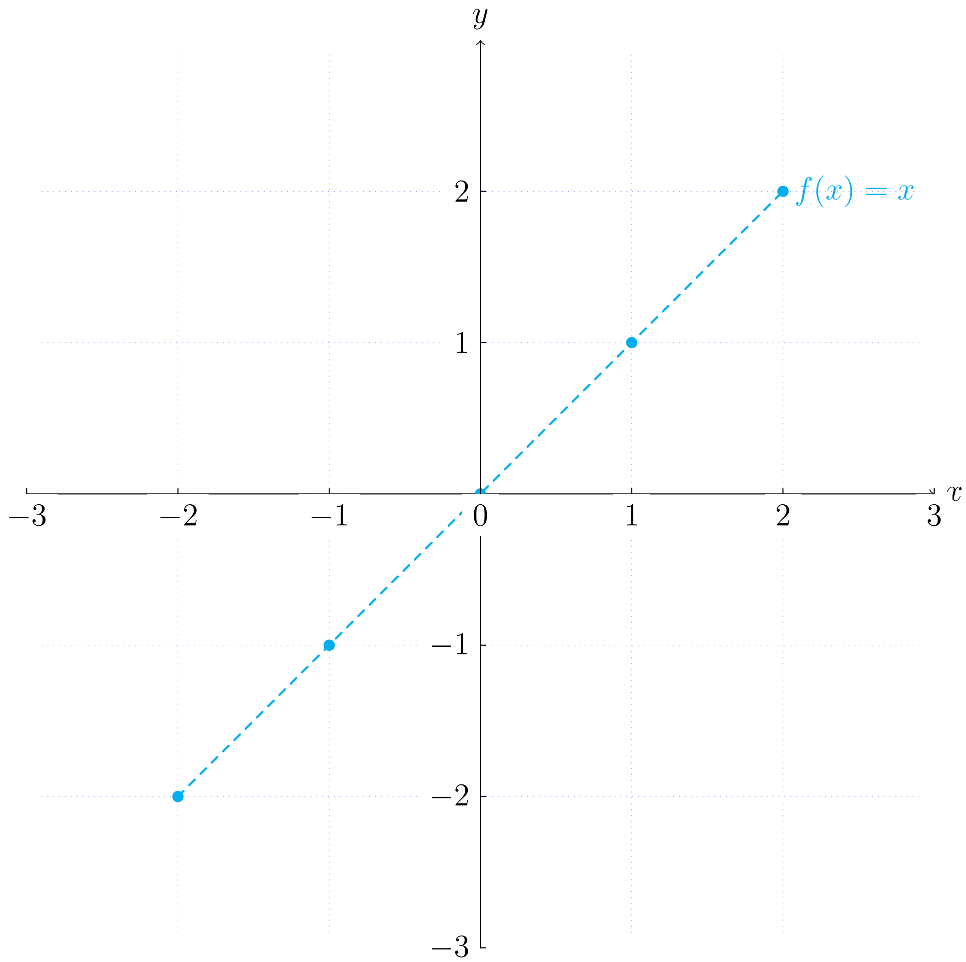
Ga zelf eens na wat er gebeurt als je voor x een negatief getal kiest. Met andere woorden: de absolute waarde is altijd positief (of 0). Een vaak voorkomende fout zien we bij volgende bewerkingen:

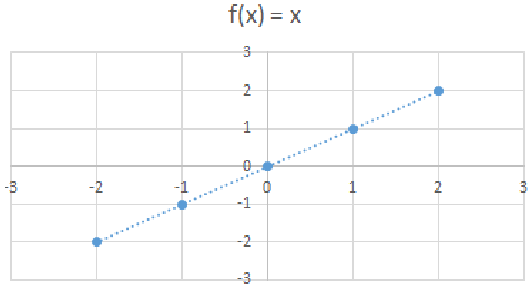
$$\sqrt{x^2} \neq x \text{ maar wel } \sqrt{x^2} = |x|$$

Ook hier kan je zelf gemakkelijk nagaan wat er gebeurt als je voor x een negatief getal kiest. Inderdaad, het minteken verdwijnt. Vandaar de absolute waarde van x.

Opmerking Let op! $x \in \mathbb{R}$

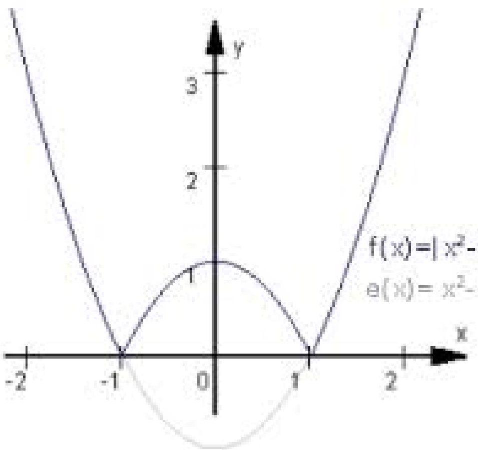
Voorbeeld 1 Zie Figuur 1


y
x
$f(x) = x$
−3
−2
−1
0
1
2
3



Figuur 1. Absolute waarde - voorbeeld 1.

Voorbeeld 2 Zie Figuur 2



Figuur 2. Absolute waarde - voorbeeld 2.

1.3 Sommatie

Een sommatie is het sommeren of optellen van een groep getallen. In de wiskunde wordt een sommatie aangegeven met de griekse hoofdletter sigma: $\sum$

Notatie Voor getallen $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$ voeren we volgende notatie in

$$\sum_{i=m}^{n} x_i = x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n$$

Voorbeeld 1

$$\sum_{i=1}^{100} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$$

De i duidt de index aan. Deze begint te tellen vanaf de ondergrens (in dit voorbeeld 1) tot en met de bovengrens (hier dus 100). Het verhogen gebeurt steeds in stapjes van 1.

Voorbeeld 2 Soms begint men liever vanaf nul te tellen. In dat geval kan je zelf gemakkelijk de formule en grenzen aanpassen:

$$\sum_{i=1}^{100} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$$

wordt dan

$$\sum_{i=0}^{99} (i+1) = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$$

Hieronder worden nog een aantal andere voorbeelden gegeven. Je kan zelf ook eindeloos voorbeelden blijven bedenken.

Voorbeeld 3

$$\sum_{i=1}^{10} 4^i = 4^1 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{10}$$

$$\sum_{i=0}^{10} x^{2i} = x^0 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{20}$$

In de statistiek wordt vaak gebruik gemaakt van het gemiddelde. Om het gemiddelde $\overline{x}$ van n getallen te berekenen, maak je gebruik van volgende formule:

$$\overline{x} = \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

Door gebruik te maken van het sommatieteken kan je dit korter noteren:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_n$$

Hieruit volgt dat je een gemeenschappelijke constante (in dit geval $\frac{1}{n}$) gewoon buiten de eigenlijke sommatie kan plaatsen.

1.4 Sommatie - voorbeeld

Zie filmpje MOOC.

1.5 Faculteit

In dit onderdeel wordt dieper ingegaan op rekenen met faculteiten en indien mogelijk het vereenvoudigen van faculteiten.

Definitie De faculteit van een natuurlijk getal n, genoteerd als $n!$ (lees "n faculteit"), is gedefinieerd als het product van de getallen 1 tot en met n:

$$n! = n.(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

De faculteit van n kan je ook met een recursief voorschrift schrijven: $n! = n(n-1)!$

We noemen een voorschrift recursief als er een verband bestaat met vorige resultaten: aangezien $5! = 120$ is, geldt

$$6! = 6\cdot 5! = 6\cdot 120 = 720$$

Maar dit recursief gedrag vraagt dat $1! = 1\cdot 0!$ Daarom is per definitie gesteld dat:

Definitie $0!{=}1$

De faculteitsfunctie groeit snel, zelfs sneller dan een exponentiële functie. 20! is een getal van reeds 19 cijfers, terwijl 1000! zo'n 2568 cijfers telt.

Het getal n behoort tot de natuurlijke getallen en is dus altijd een positief geheel getal. Met dit in het achterhoofd kijken we even naar het volgende voorbeeld:

$$-(3!) = -(3\cdot 2\cdot 1) = -6$$

$(-3)!$ heeft geen betekenis want tussen de haakjes staat een negatief geheel getal en dit behoort niet tot de verzameling van natuurlijke getallen.

Voorbeeld 1

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1} = 6\cdot 5\cdot 4 = 120$$

Let op! Je ziet dus dat je $\frac{6!}{3!}$ niet kan behandelen als een gewone breuk en dat bijgevolg 2! een foutief antwoord zou zijn.

Voorbeeld 2 Een meer algemeen voorbeeld is:

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}{(n-1)!} = n(n+1)$$

Als de faculteitsfunctie $n!$ zo snel toeneemt, dan zal $\frac{1}{n!}$ overeenkomstig ook snel afnemen.

Wiskundig kan je je dan afvragen wat er gebeurt als n oneindig groot wordt. Dit soort vragen zal leiden tot het limietbegrip en notaties als:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n!}$$

En wat zou er gebeuren mocht je al deze getallen bij elkaar optellen? Dus waaraan zou volgende som gelijk zijn:

$$\sum_{=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = ?$$

Dit blijkt het getal $e = 2,718\ldots$ te zijn.

Andere toepassingen van de faculteitsfunctie vinden we terug in het vak statistiek en meer bepaald de combinatieleer. Een vaak voorkomende vraag is hier “op hoeveel verschillende manieren kan je k voorwerpen ordenen?” Een voorbeeld: je hebt 2 foto’s op je bureau staan. Op hoeveel manieren kan je deze plaatsen? Het antwoord is op $2! = 2$ manieren. Met 3 foto’s heb je $3! = 6$ manieren, en met 10 foto’s zijn er al $10! = 3628800$ mogelijkheden.

1.6 Vectoren vs scalairen

Wat is een scalair?

In wetenschap en techniek gebruikt men vaak grootheden die volledig bepaald zijn door één reëel getal. Degelijke grootheden noemt men scalaire grootheden. Een scalaire grootheid heeft enkel een grootte.

Voorbeeld 1 $m = 20kg$ (massa), $V = 10l$ (volume), $T = 35°C$ (temperatuur)

Wat is een vector?

Definitie We definiëren een vector als een grootheid bepaald door een richting, een zin en een grootte.

Voorbeeld 2 $\vec{v} = 20m/s$ (snelheid), $\vec{F} = 5N$ (kracht), $\vec{E} = 20N/C$ (elektrisch veld)

Opmerking

- Een vector is een pijl die twee punten A en B verbindt. Vectoren worden genoteerd door een letter met een pijltje erboven bv. $\vec{v}$. We kunnen ook kiezen om het begin- en eindpunt op te nemen in de notatie. We noteren $\vec{v} = \vec{AB}$.
- Een vector $\vec{v}$ wordt volledig bepaald door de grootte, richting en de zin. Twee vectoren zijn dus identiek wanneer hun grootte, hun richting en hun zin dezelfde zijn.
- In het algemeen heeft een vector geen positie, men spreekt dan van een **vrije vector**. Het aangrijpingspunt is niet bepaald. De vrije vectoren behoren tot de verzameling V.
- De verzameling punten van het vlak noteren we door π. Kiest men in het vlak π een bevoorrecht punt O dan ontstaat het vlak π_O. Men legt dus de oorsprong vast in het vlak, en laat alle vector beginnen in de oorsprong. Het punt P in het vlak kunnen we bekijken als het eindpunt van deze vector, namelijk de vector $\vec{OP} = \vec{P}$. Een dergelijke vector noemen we in de wiskunde een **gebonden** vector, een **vaste** vector, een **puntvector** of een **plaatsvector**. De puntvectoren behoren tot de verzameling π_O.

- De vector $\vec{AA}$ wordt aangeduid met $\vec{O}$ en heeft als lengte 0. Zo een vector noemen we een **nulvector**. De samenstelling van een vector met een nulvector levert de oorspronkelijke vector op: $\vec{AB} + \vec{O}$. De nulvector is het neutraal element voor de optelling.
- Beschouwen we een vector $\vec{AB}$. De vector $\vec{BA} = -\vec{AB}$ met dezelfde richting en grootte, maar met tegengestelde zin wordt de tegengestelde vector genoemd. De samenstelling van een vector met zijn tegengestelde vector levert de nulvector op: $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{O}$.
- Een eenheidsvector is een vector met lengte één. Eenheidsvectoren worden vooral gebruikt om een richting aan te geven. Een vector met willekeurige niet-nulle norm kan worden gedeeld door zijn norm om zo een eenheidsvector te creëren. Dit proces staat bekend als het normaliseren van een vector. Een eenheidsvector wordt vaak aangeduid met een hoedje, zoals in $\hat{a}$ of ook door $\vec{e_1}$ (of $\vec{1_x}$ als het over de eenheidsvector volgens de x-as gaat).
$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{||\vec{a}||}$$
- De lengte of de norm van een vector $\vec{AB}$ of $\vec{v}$ noteert men door $||\vec{AB}||$ of $||\vec{v}||$.

Bewerkingen met vectoren

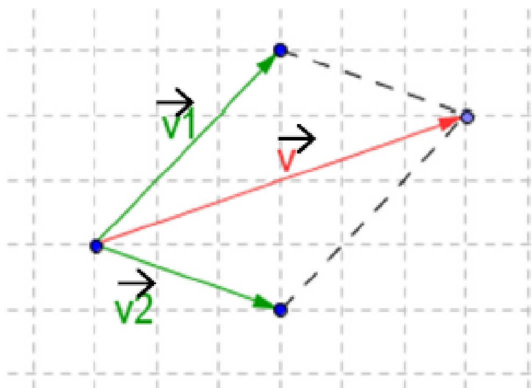
De optelling

Definitie De som van twee vectoren is opnieuw een vector: $\vec{v_1} + \vec{v_2} = \vec{v}$

Het verschil van twee vectoren is opnieuw een vector. $\vec{v_1} - \vec{v_2} = \vec{v_1} + (-\vec{v_2}) = \vec{v}$

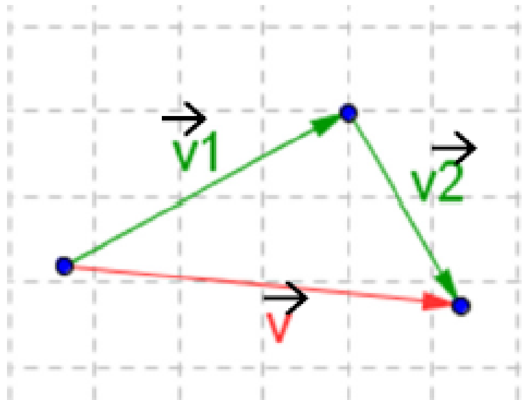
Opmerking Let op! $||\vec{v_1}|| + ||\vec{v_2}|| \neq ||\vec{v}||$

Het samenstellen van twee vectoren gebeurt volgens de **parallellogramregel**, zie Figuur 3. Wanneer we twee vectoren $\vec{v_1}$ en $\vec{v_2}$ (met een verschillende richting) willen optellen, dan construeren we een parallellogram. We plaatsen $\vec{v_1}$ en $\vec{v_2}$ zodat hun aangrijpingspunt samenvalt. De som $\vec{v_1} + \vec{v_2}$ wordt dan gegeven door de vector met het aangrijpingspunt en eindpunt het overstaand hoekpunt van de parallellogram.



Figuur 3. Parallellogramregel voor het bepalen van de som van 2 vectoren.

Deze parallellogram constructie kan ook gebruikt worden voor het omgekeerde proces, namelijk het **ontbinden van een vector in 2 (of meerdere) componenten (dit zijn scalairen)**, elk volgens een bepaalde richting. Vaak wordt dan een gegeven vector ontbonden in een component volgens de x-as en een component volgens de y-as.



Figuur 4. Kopstaartregel voor het bepalen van de som van 2 vectoren.

Een andere manier om twee vectoren op te tellen, is deze kop aan staart te leggen, zie Figuur **??**. We plaatsen de vector $\vec{v_2}$ zodat zijn beginpunt samenvalt met het eindpunt van de vector $\vec{v_1}$. De som wordt dan gegeven door de vector wijzend van het beginpunt van $\vec{v_1}$ naar het eindpunt van $\vec{v_2}$. Deze regel noemen we de **driehoeksregel** of de **kopstaartregel**.

De vermenigvuldiging van een vector met een scalair

Definitie Wanneer men een vector $\vec{v}$ vermenigvuldigt met een scalair k, krijgt men de nieuwe vector $k\vec{v}$.

De grootte van deze nieuwe vector is $k||\vec{v}||$.

De richting verandert niet, terwijl de zin omdraait als $k < 0$ (lees "als k negatief is").

Opmerking Let op! een scalaire vermenigvuldiging mag je niet verwarren met het scalair product (zie verder)

De vermenigvuldiging van twee vectoren

Definitie

1. het scalair product of inwendig product:

$$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = ||\vec{v_1}|| \cdot ||\vec{v_2}|| \cdot \cos\theta = \text{getal}$$

   Hierbij is θ de hoek tussen de 2 vectoren. Het scalair product is dus maximaal als beide vectoren in dezelfde richting wijzen (met andere woorden parallel zijn). En anderzijds is het scalair product nul als beide vectoren loodrecht op elkaar staan.

2. het vectorieel product, kruisproduct of uitwendig product:

$$\vec{v_1} \times \vec{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \text{vector}$$

De eigenschappen van de nieuwe vector zijn:

1. Over de richting van $\vec{a} \times \vec{b}$: het staat loodrecht op $\vec{a}$ en $\vec{b}$.
2. Over de zin van $\vec{a} \times \vec{b}$: $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{a} \times \vec{b}$ vormen een rechtshandig assenstelsel.
3. De norm van $\vec{a} \times \vec{b}$ is $||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \sin\theta$, waarin θ de hoek is tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Het vectorieel product is dus maximaal als beide vectoren loodrecht op elkaar staan. En anderzijds is het vectorieel product nul als beide vectoren evenwijdig zijn (en dus dezelfde richting hebben).

1.7 Ontbinden van een vector - voorbeeld

Zie filmpje MOOC.

1.8 Test - wiskundige notaties

TODO

2 Bewerkingen

2.1 Volgorde van bewerkingen

Om een opgave juist te kunnen oplossen, is het noodzakelijk om de volgorde van de bewerkingen te respecteren:

1. **H**aakjes
2. **M**achten en worteltrekken
3. **W**issel van teken
4. **V**ermenigvuldigen en **d**elen (dezelfde prioriteit)
5. **O**ptellen en **a**ftrekken (dezelfde prioriteit)

Let op! Haakjes staan voor deelopgaven die je eerst moet maken, hierop moet je inzoomen.

Opmerking

- Bewerkingen met dezelfde prioriteit worden van links naar rechts uitgevoerd.
- Een ezelsbruggetje om dit te onthouden: **H**oe **M**oeten **W**ij **V**an **D**e **O**nvoldoendes **A**fkomen?
- Machtsverheffen gaat voor op tekenwisseling: als je -5^2 moet uitrekenen, doe je eerst $5^2 = 25$ en daarna pas je op het resultaat de tekenwisseling toe zodat het antwoord -25 wordt.
- Bedoel je echter het kwadraat van -5 dan noteer je $(-5)^2 = (-5).(-5) = 25$.

2.2 Volgorde van bewerkingen - voorbeeld 1

Zie filmpje MOOC.

2.3 Volgorde van bewerkingen - voorbeeld 2

Zie filmpje MOOC.

2.4 Rekenen met machten of exponenten

Wat is een macht?

De vermenigvuldiging is ingevoerd om de schrijfwijze bij een optelling te vereenvoudigen. Immers:

$$\underbrace{4+4+4+4+4+4}_{6 \text{ maal}}$$

was vervelend om te schrijven. Omdat de 4 zesmaal voorkomt, werd dit $6 \cdot 4$.

Later werd er dan ook gedefinieerd wat het betekende om kommagetallen met mekaar te vermenigvuldigen.

Machten zijn ingevoerd om volgende schrijfwijzes eenvoudiger te maken:

$$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{\text{6 maal}}$$

In plaats van een som van dezelfde getallen, hebben we nu een product van dezelfde getallen.

Verkort geschreven wordt dit: 4^6

Een macht bestaat uit twee delen: een exponent, hier 6, en een grondtal, hier 4.

Het grondtal mag (mits enkele uitzonderingen) elk reëel getal zijn. De exponent mag eigenlijk (ook weer met enkele uitzonderingen) elk reëel getal zijn. Om de volgorde van bewerkingen uit te leggen, gebruiken we in dit hoofdstuk enkel natuurlijke (gehele) exponenten.

Voorbeeld 1

$$12 + 3^2 \cdot 4 : 2 - 8 : 4 + 3 - 5^2$$

Hoe pakken we dit nu aan? We zien dat er enkele machten in staan, dus die rekenen we eerst uit. Vervolgens rekenen we alle vermenigvuldigingen en delingen uit, van links naar rechts. Dan doen we alle optellingen en aftrekkingen, van links naar rechts.

$$\begin{aligned}
12 + \underbrace{3^2}_{9} \cdot 4 : 2 - 8 : 4 + 3 - \underbrace{5^2}_{25} &= 12 + \underbrace{9 \cdot 4}_{36} : 2 - \underbrace{8 : 4}_{2} + 3 - 25 && \text{vermenigvuldigen en delen} \\
&= 12 + \underbrace{36 : 2}_{18} - 2 + 3 - 25 && \text{vermenigvuldigen en delen} \\
&= \underbrace{12 + 18}_{30} - 2 + 3 - 25 && \text{optellen en aftrekken} \\
&= \underbrace{30 - 2}_{28} + 3 - 25 && \text{optellen en aftrekken} \\
&= \underbrace{28 + 3}_{31} - 25 && \text{optellen en aftrekken} \\
&= 31 - 25 && \text{optellen en aftrekken} \\
&= 6
\end{aligned}$$

2.5 Werken met haakjes

Wat als er haakjes staan?

Haakjes zijn nuttig om aan te duiden dat de bewerking ertussen eerst moet gebeuren. Haakjes zullen dus voorrang hebben op alles.

Onthoud Los eerst alles tussen de haakjes op!

Haken symboliseren in feite een deelopgave. Ze verplichten je eerst die deelopgave op te lossen, vooraleer je de grote oplossing mag starten.

Voorbeeld 1

$$6 \cdot (4 + 5) = 6 \cdot 9 = 54$$

In deze opgave is $(4 + 5)$ de deelopgave, dus die los je eerst op en je vult het resultaat in. Dan ga je gewoon verder met de rest van de opgave.

Even vergelijken wat er gebeurt als er geen haken staan, dus dan moet je eerst de vermenigvuldiging uitwerken:

$$6 \cdot 4 + 5 = 24 + 5 = 29$$

Iets totaal anders!

Let op: $6 \cdot (4 + 5) \neq 6 \cdot 4 + 5$

Voorbeeld 2

$$\begin{aligned} 20 : 4 \cdot 5 &= 20 : 20 = 1 \quad \text{is fout,} \\ 20 : 4 \cdot 5 &= 5 \cdot 5 = 25 \quad \text{is juist.} \end{aligned}$$

Dit soort fouten kan je voorkomen door (zelf) haakjes te gebruiken:

$$(20 : 4) \cdot 5 = 5 \cdot 5 = 25$$

Een andere manier om dit soort problemen te omzeilen is door “delen door 4” te vervangen door “vermenigvuldigen met een vierde” en vervolgens van links naar rechts te rekenen:

$$20 : 4 \cdot 5 = 20 \cdot \frac{1}{4} \cdot 5 = 25$$

Dit geldt ook voor de optelling en de aftrekking:

$$\begin{aligned} 5 - 3 + 1 &= 5 - 4 = 1 \quad \text{is fout,} \\ 5 - 3 + 1 &= 2 + 1 = 3 \quad \text{is juist.} \end{aligned}$$

Dit soort fouten kan je voorkomen door (zelf) haakjes te gebruiken:

$$(5 - 3) + 1 = 2 + 1 = 3$$

Een andere manier is om dit soort problemen te omzeilen is door “aftrekken van plus 3” te vervangen door “optellen met min drie” en vervolgens van links naar rechts te rekenen:

$$5 - 3 + 1 = 5 + (-3) + 1 = 3$$

Wat als er meerdere haakjes zijn?

Onthoud Soms kunnen er meerdere haakjes voorkomen. Er geldt dan de volgende regel: Bij meerdere haakjes, werk je eerst de binnenste uit, en dan werk je naar buiten.

Wat is er eigenlijk aan de hand? In de deelopgave van de buitenste haakjes staan er nog meer haakjes. Dit is in feite een deelopgave in een deelopgave.

1. Je start met die binnenste deelopgave.
2. Je vult de uitkomst van die deelopgave in.
3. Je gaat verder met de volgende deelopgave.
4. Je vult dit weer in.
5. Enzoverder!

Voorbeeld 3

$$((3+6)-4^2)\cdot 2$$

Dit voorbeeld heeft verschillende haken (deelopgaven). Je ziet de buitenste haken. Daar is de deelopgave dus:

$$((3+6)-4^2)$$

Binnen deze deelopgave staan nieuwe haken, dus die moet je weer eerst uitrekenen, we starten dus met het uitrekenen van de binnenste haken:

$$\begin{aligned}
\left(\underbrace{(3+6)}_{9}-4^2\right)\cdot 2 &= \left(9-\underbrace{4^2}_{16}\right)\cdot 2 && \text{machten binnen de haakjes}\\
&= \underbrace{(9-16)}_{-7}\cdot 2 && \text{haken}\\
&= -7\cdot 2 && \text{min maal plus is min}\\
&= -14
\end{aligned}$$

Let dus goed op in dit voorbeeld. Je moet haken altijd eerst uitrekenen, van binnen naar buiten.

Je moet een deelopgave (die binnen de haken staat) zelf behandelen als een opgave en dus de volgorde van bewerkingen daarbinnen toepassen.

2.6 Begrippen tegengestelde en omgekeerde van een getal

Tegengestelde

Het *tegengestelde* van een getal n is het getal dat opgeteld bij n, nul oplevert. Het tegengestelde van n wordt genoteerd met $-n$. Het tegengestelde van een getal heeft dus dezelfde absolute waarde als het gegeven getal maar met een tegengesteld teken. De som van een getal met zijn tegengestelde is dus steeds 0: $n+(-n)=0$.

Zo is het tegengestelde van 12 gelijk aan -12 omdat $12+(-12)=0$, en het tegengestelde van $-\sqrt{3}$ is $\sqrt{3}$ omdat $-\sqrt{3}+\sqrt{3}=0$.

Het tegengestelde van nul is nul. Dit is het enige getal waarvan het tegengestelde gelijk is aan zichzelf.

We zeggen dat 0 het *neutraal element* is met betrekking tot optellen.

(In de abstracte algebra is het tegengestelde het inverse element voor een bewerking die met een plusteken genoteerd wordt).

Omgekeerde

Het *omgekeerde* of de *reciproque* (vaker: de reciproke) van een getal of grootheid is 1 gedeeld door dat getal of die grootheid. Het omgekeerde van een breuk ontstaat door teller en noemer te verwisselen. Het omgekeerde van 7 is $1/7$ en het omgekeerde van $2/3$ is $3/2$. Passen we dit toe op enkele grootheden: de hertz is het omgekeerde van de seconde: 1 Hz $= 1/\text{s}$ en de siemens is het omgekeerde van de ohm: 1 S $= 1/\Omega$.

Het product van een getal met zijn omgekeerde levert 1 op: $n \cdot \frac{1}{n} = 1$.

We zeggen dat 1 het *neutraal element* is voor de vermenigvuldiging. We zien ook dat nul geen omgekeerde heeft.

(In de abstracte algebra is het omgekeerde het inverse element voor een bewerking die met een vermenigvuldigingsteken genoteerd wordt).

bij de deling waarbij de deler een breuk is. De deling kan dan ook uitgevoerd worden door het deeltal te vermenigvuldigingen met het omgekeerde van de deler.

Populair gezegd: delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde.

Voorbeeld 1

$$5 : 1/3 = 5 \cdot 3 = 15$$

2.7 Rekenen met wortels

Vierkantswortels

Het meest gekende type van wortel is de vierkantswortel. De vierkantswortel geeft de mogelijkheid om een antwoord te vinden op de vraag: welk getal heeft als kwadraat 4? Een mogelijk antwoord is het getal 2. De vierkantswortel is de 'omgekeerde' bewerking van het kwadraat.

$$\begin{array}{rcll} \sqrt{9} & = & 3 \text{ want } 3^2 & = 9 \\ \sqrt{1} & = & 1 \text{ want } 1^2 & = 1 \\ \sqrt{0} & = & 0 \text{ want } 0^2 & = 0 \end{array}$$

$\sqrt{-4}$ bestaat niet, want er is geen reëel getal dat als kwadraat een negatief getal heeft.

Je ziet dus duidelijk dat je geen vierkantswortel kan nemen van een strikt negatief getal. Een kwadraat is immers altijd positief.

Een vierkantswortel kan je nemen van elk positief reëel getal. Je kan dus ook $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$ berekenen. Dit is geen 'mooi' getal, maar het kwadraat is wel 2.

Eigenlijk is er nog een tweede oplossing voor het probleem “Welk getal heeft als kwadraat 4?” Immers, -2 is ook een juiste oplossing. $(-2)^2 = 4$, want het kwadraat van een negatief getal is positief. We spreken echter af dat het symbool van de vierkantswortel altijd een positief getal uitdrukt. Wil je dan toch een negatief getal, dan schrijf je bijvoorbeeld $-\sqrt{4}$, je zet er dus een minteken voor.

Definitie Een vierkantswortel van een positief reëel getal x, genoteerd als $\sqrt{x}$, is een positief reëel getal dat als kwadraat het getal x heeft.

Vierkantswortels en kwadraten ‘heffen mekaar op’, of althans, dat lijkt zo: $\sqrt{3^2} = 3$. Maar laat je niet vangen! $\sqrt{(-2)^2}$ is niet gelijk aan -2, maar gelijk aan 2. **Vierkantswortels zijn altijd positief!** Reken voor de veiligheid altijd de haakjes uit, en gebruik niet een ‘trucje’ als de kwadraat en de wortel schrappen:

$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Derdemachtswortels

Als je een symbool hebt voor de omgekeerde bewerking van het kwadraat, is er ook eentje voor de derde macht. Dit noemen we de derdemachtswortel.

$$\begin{array}{ccccccc} \sqrt[3]{8} & = & 2 & \text{want} & 2^3 & = & 8 \\ \sqrt[3]{1000} & = & 10 & \text{want} & 10^3 & = & 1000 \\ \sqrt[3]{1} & = & 1 & \text{want} & 1^3 & = & 1 \\ \sqrt[3]{0} & = & 0 & \text{want} & 0^3 & = & 0 \end{array}$$

Wat gebeurt er met negatieve getallen? Negatieve getallen hebben geen vierkantswortel, maar wel een derdemachtswortel. De derde macht van een negatief getal is zelf negatief, dus kan de omgekeerde bewerking wel!

$$\begin{array}{ccccccc} \sqrt[3]{-8} & = & -2 & \text{omdat} & (-2)^3 & = & -8 \\ \sqrt[3]{-1} & = & -1 & \text{want} & (-1)^3 & = & -1 \end{array}$$

Net zoals bij vierkantswortels, hoeft een derdemachtswortel niet ‘uit te komen’, je kan het dus nemen van eender welk reëel getal.

Definitie Een derdemachtswortel van een reëel getal x, genoteerd als $\sqrt[3]{x}$, is het reële getal dat als 3de macht het getal x heeft.

Hogere machtswortels

Ook voor hogere machten bestaat er een omgekeerde bewerking, namelijk de hogere machtswortels. Deze noteer je op gelijkaardige manier. De vijfdemachtswortel van 2 noteer je dan:

$$\sqrt[5]{2}$$

Je moet hierbij het volgende onthouden:

Onthoud

- Een even machtswortel (waartoe ook de vierkantswortel behoort) kan je enkel nemen van positieve reële getallen en is zelf positief.
- Een oneven machtswortel kan je nemen van elk reëel getal, en kan dus positief of negatief zijn.

Rekenregel

De belangrijkste rekenregel met wortels is:

Rekenregel De wortel van een product, is het product van de wortels.

Voorbeeld 1

$$\begin{aligned}\sqrt{4\cdot 9} &= \sqrt{4}\cdot\sqrt{9} = 2\cdot 3 = 6\\ \sqrt[3]{2\cdot 27} &= \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{2}\cdot 3 = 3\sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

Je gebruikt deze regel erg vaak om wortels te vereenvoudigen. Bij het vereenvoudigen van een wortel probeer je wat er onder de wortel staat zo klein mogelijk te maken. Een mogelijke vraag is dus: vereenvoudig $\sqrt{200}$. Van 200 kan je niet gemakkelijk een vierkantswortel nemen. Er is echter een factor van 200 waarvan dat wel kan, namelijk 100, dus zonder je die factor af:

$$\sqrt{200} = \sqrt{100\cdot 2} = \sqrt{100}\cdot\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

Omdat $\sqrt{2}$ niet meer te vereenvoudigen is, is $10\sqrt{2}$ de meest eenvoudige vorm. Het is dus een kwestie van goede factoren te vinden die het nemen van een wortel makkelijker maken. Twee andere voorbeelden:

$$\begin{aligned}\sqrt{20} &= \sqrt{4\cdot 5} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{5} = 2\cdot\sqrt{5}\\ \sqrt{90} &= \sqrt{9\cdot 10} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{10} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{10}\end{aligned}$$

In feite breng je het 'kwadraat buiten de vierkantswortel'. Deze regel werkt dus voor alle machtswortels, dus vierkantswortels, derdemachtswortels, enzoverder. Het enige waar je mee moet opletten is dat alles bestaat. Hou er rekening mee dat je vierkantswortels (en andere even hogere machtswortels) niet kan nemen van negatieve getallen.

Getallen die dezelfde wortel hebben, noemen we **gelijksoortig**. Zo zijn $2\sqrt{3}$ en $4\sqrt{3}$ gelijksoortig, maar zijn $4\sqrt{5}$ en $2\sqrt{2}$ dat niet. Gelijksoortige getallen kan je optellen: Het werkt een beetje zoals eenheden. Je kan $3m^2$ en $5m^2$ optellen, maar $3m^2$ en $8cm^2$ niet zo gemakkelijk. Dan moet je ze eerst omzetten. Dat doe je dan ook bij wortels door ze te vereenvoudigen:

$$\sqrt{27} + 2\cdot\sqrt{3} = \sqrt{9\cdot 3} + 2\cdot\sqrt{3} = 3\cdot\sqrt{3} + 2\cdot\sqrt{3} = 5\cdot\sqrt{3}$$

Onthoud

Heel belangrijk! Er bestaat geen regel voor de wortel van een som!

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Een voorbeeld dat dit inderdaad niet klopt:

- $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
- $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

Maak dus niet de fout om $\sqrt{x^2+4}$ gelijk te stellen aan $x+2$!

Rationale exponenten

We hebben bij machten reeds gesproken over natuurlijke en gehele exponenten. Rationale getallen kunnen ook een exponent vormen. Dit zullen uiteindelijk een type wortel zijn. Een eerste rationale macht heb je al gezien, een voorbeeld:

$$2^{1/2} = \sqrt{2}$$

De exponent $1/2$ symboliseert de vierkantswortel. De exponent $1/3$ zal de derdemachtswortel symboliseren.

Definitie

- De noemer van de breuk van een rationale exponent symboliseert een machtswortel.
- De teller van de breuk van een rationale exponent symboliseert een macht.

Wat betekent dit nu? Als ik een getal, zeg 5, verhef tot een breuk, zeg $2/3$, dan doe ik twee dingen:

1. De noemer van de breuk is 3, dus ik moet een derdemachtswortel nemen.
2. De teller van de breuk is 2, dus ik moet een tweede macht nemen (een kwadraat dus).

Bijgevolg:

$$5^{2/3} = (\sqrt[3]{5})^2 \text{ of } \sqrt[3]{5^2}$$

Belangrijk is dat het getal dat je tot de macht verheft, zowel een wortel als een macht over zichzelf heen krijgt, de volgorde van de twee maakt niet uit. Vaak gebruiken we de eerste schrijfwijze, omdat het dan duidelijker is als er vereenvoudigingen mogelijk zijn:

$$8^{2/3} = (\sqrt[2]{8})^2 = (2)^2 = 4$$

In symbolen:

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Breuken kunnen negatief zijn. Dezelfde regel als bij negatieve exponenten geldt ook voor breuken. Je neemt de positieve breuk als exponent, maar zet het geheel in de noemer van een breuk:

$$2^{-2/3} = \frac{1}{2^{2/3}}$$

Rekenregel

1. De macht van een product is het product van de machten.

$$(8 \cdot 5)^{\frac{4}{3}} = 8^{\frac{4}{3}} \cdot 5^{\frac{4}{3}}$$

2. Product van machten met hetzelfde grondgetal is grondgetal verheffen tot som van de exponenten.

$$\begin{aligned} 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} &= 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}+\frac{2}{6}} = 2^{\frac{5}{6}} \\ 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{-1}{3}} &= 3^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

3. Macht tot een macht verheffen is grondgetal verheffen tot product van de exponenten.

$$\begin{aligned} (2^{\frac{2}{3}})^2 &= 2^{\frac{2}{3}\cdot 2} = 2^{\frac{4}{3}} \\ (3^{\frac{3}{4}})^{\frac{2}{5}} &= 3^{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}} = 3^{\frac{6}{20}} = 3^{\frac{3}{10}} \\ (5^{\frac{3}{2}})^2 &= 5^{\frac{3}{2}\cdot 2} = 5^3 = 125 \end{aligned}$$

4. Een breuk tot een macht verheffen is tellen en noemer tot die macht verheffen.

$$(\frac{5}{7})^{\frac{3}{4}} = \frac{5^{\frac{3}{4}}}{7^{\frac{3}{4}}}$$

2.8 Rekenen met breuken

Een breuk is een bijzondere schrijfwijze van een rationaal getal. Een breuk laat ons toe om elk rationaal getal nauwkeurig te noteren. Eenvoudige rekentoestellen geven steeds kommagetallen weer (die al dan niet rationale getallen voorstellen). Een kommagetal is echter vaak een afronding en daarom niet steeds nauwkeurig genoeg. Rekenen met kommagetallen is voor veel mensen een stuk gemakkelijker dan rekenen met breuken, maar omdat breuken nodig zijn om nauwkeurig te kunnen rekenen, moet je de basisbewerkingen ook goed kunnen uitvoeren bij breuken.

Gelijke breuken

Een breuk stelt steeds een quotiënt voor. Een quotiënt is een deeltal gedeeld door een deler. Bijvoorbeeld:

$$4 : 2$$

Hier is 4 het deeltal, en 2 de deler. In breukvorm zou dit zijn:

$$\frac{4}{2}$$

Een breuk bestaat uit een teller (boven), een breukstreep en een noemer (onder). Er gelden de volgende overeenkomsten:

- teller = deeltal
- breukstreep = 'gedeeld door'-teken
- noemer = deler

Het kan ook met haakjes $(4 + 5) : 2 = \frac{4+5}{2}$.

Het deeltal is hier $(4 + 5)$ (omdat het tussen haakjes staat), en de deler is hier 2. Je merkt dus dat in de volgorde van bewerkingen, je eerst de teller moet uitrekenen, en dan pas het quotiënt mag maken!

Als je de bewerking 18 : 4 uitvoert, vind je dezelfde oplossing als 9 : 2, namelijk 4,5. Deze quotiënten worden voorgesteld door breuken, we zeggen dan ook dat deze breuken **gelijk** zijn:

$$\frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

Je kan gelijke breuken maken door in teller **EN** noemer te vermenigvuldigen of te delen door hetzelfde getal. Je zoekt de **grootste gemene deler**, afgekort ggd, van teller en noemer. (De ggd van 2 getallen is het grootste getal dat beide getallen deelt.)

$$\frac{36}{48}$$

De teller is 36, de noemer is 48. Ze hebben als grootste gemene deler 12 (maak je geen zorgen als je dit niet meteen ziet). Dat betekent dus dat je de teller en de noemer kan delen door 12 en toch een gelijke breuk bekomt:

$$\frac{36}{48} = \frac{3}{4}$$

Vaak zie je deze stap niet zo snel in 1 keer. Een breuk kan ook in meerdere keren aangepast worden. Zo zie je misschien niet meteen de ggd 12, maar heb je vast wel de gemeenschappelijke deler 2 gezien. Je kan de oefening dus stapsgewijze oplossen door telkens een nieuwe deler te vinden.

$$\frac{36}{48} = \frac{18}{24} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

De volgorde waarin je deze delers vindt, maakt niet uit. Zo had je bijvoorbeeld ook eerst kunnen delen door 3. De grootte is ook van geen belang. Misschien had je 6 als gemene deler gevonden. Het enige wat belangrijk is, is:

Onthoud Je verkrijgt gelijke breuken door teller en noemer te **delen of vermenigvuldigen met hetzelfde getal**.

Een breuk waarbij de teller en noemer geen gemeenschappelijke delers meer hebben, noemen we een **vereenvoudigde breuk**. Bij veel opgaven wordt gevraagd of verwacht men om de breuk zo ver mogelijk te vereenvoudigen. Vergeet dit dus niet!

Breuken optellen en aftrekken

De belangrijkste regel hier is:

Rekenregel Enkel breuken op dezelfde noemer kan je optellen of aftrekken.

Breuken met dezelfde noemer tel je op door de tellers op te tellen en de **noemer te houden**. De noemer verandert dus niet! Voor aftrekken geldt dezelfde regel, maar moet je natuurlijk de tellers van mekaar aftrekken.

$$\begin{aligned}\frac{3}{5}+\frac{4}{5} = &= \frac{3+4}{5} = \frac{7}{5}\\ \frac{3}{5}-\frac{4}{5} = &= \frac{3-4}{5} = \frac{-1}{5}\end{aligned}$$

Natuurlijk zullen breuken niet altijd dezelfde noemer hebben. Omdat panikeren geen optie is, moet je de noemers gelijk maken. Je kan dit doen door bij elke breuk apart, teller en noemer met hetzelfde getal te vermenigvuldigen, en zo dat de noemers gelijk worden. Bijvoorbeeld:

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{8}$$

Je wilt dat beide breuken een gelijke noemer hebben. We zoeken die gemeenschappelijke noemer. Het gemakkelijkste is als gemeenschappelijke noemer het product te nemen van de noemers, namelijk $6 \cdot 8 = 48$.

We maken dus in de eerste breuk $\frac{5}{6}$ de noemer 48 door de noemer te vermenigvuldigen met 8. Om de breuk gelijk te maken, moeten we ook de teller vermenigvuldigen met 8. Voor de tweede breuk doen we hetzelfde, maar nu vermenigvuldigen we teller en noemer met 6:

$$\frac{5}{6} = \frac{5\cdot 8}{6\cdot 8} = \frac{40}{48} \text{ en } \frac{7}{8} = \frac{7\cdot 6}{8\cdot 6} = \frac{42}{48}$$

We hebben nu twee breuken met gelijke noemer, dus kunnen we die optellen. Alles tesamen:

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{8} = \frac{40}{48}+\frac{42}{48} = \frac{40+42}{48} = \frac{82}{48} = \frac{41}{24}$$

De laatste stap is een vereenvoudiging! Dit was hier toevallig mogelijk door teller en noemer te delen door 2. Probeer telkens je einduitkomst zo ver mogelijk te vereenvoudigen!

Een tweede manier om een gelijke noemer te krijgen is door de methode van het kleinste gemene veelvoud, afgekort kgv. (Het kgv van 2 getallen is het kleinste getal dat een veelvoud is van allebei de getallen.) Het kgv van 6 en 8 is 24. 24 is een veelvoud van 6, maar ook van 8. Het is bovendien het kleinste getal dat zulk een veelvoud is. We kiezen dus als gemeenschappelijke noemer het getal 24. Dat betekent dat we in de breuk $\frac{5}{6}$ moeten vermenigvuldigen met 4, en voor de breuk $\frac{7}{8}$ teller en noemer vermenigvuldigen met 3:

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{20}{24} \text{ en } \frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{21}{24}$$

Opnieuw vinden we twee breuken met gelijke noemers, die kunnen we dus optellen:

$$\frac{5}{6} + \frac{7}{8} = \frac{20}{24} + \frac{21}{24} = \frac{41}{24}$$

De uitkomst is meteen in vereenvoudigde vorm. Dit heb je vaak als je de methode van het kgv toepast. Dit is niet altijd even gemakkelijk. Je mag zelf kiezen hoe je het doet.

Tot slot nog een voorbeeld met drie breuken:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} &= \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \tfrac{1}{9} && \text{sommen en verschillen van links naar rechts} \\
&= \left(\tfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} - \tfrac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2}\right) + \tfrac{1}{9} && \text{de gemeenschappelijke noemer wordt } 2 \cdot 3 \\
&= \left(\tfrac{3}{6} - \tfrac{2}{6}\right) + \tfrac{1}{9} && \\
&= \left(\tfrac{3-2}{6}\right) + \tfrac{1}{9} && \text{breuken met dezelfde noemer} \\
& && \text{aftrekken door verschil van tellers} \\
&= \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{9} && \\
&= \tfrac{1 \cdot 3}{6 \cdot 3} + \tfrac{1 \cdot 2}{9 \cdot 2} && \text{gemeenschappelijke noemer wordt het} \\
& && \text{kgv van 6 en 9: } 18 = 6 \cdot 3 = 9 \cdot 2 \\
&= \tfrac{3}{18} + \tfrac{2}{18} && \\
&= \tfrac{3+2}{18} && \text{breuken met dezelfde noemer optellen door som van tellers} \\
&= \tfrac{5}{18} &&
\end{aligned}$$

Bij deze opgave had je in plaats van het kgv van 6 en 9 ook gewoon $6 \cdot 9 = 54$ als gelijke noemer kunnen nemen. Dat is wel al een groot getal om mee te rekenen. Bovendien zou je de einduitkomst moeten vereenvoudigen. Probeer waar mogelijk het kgv te nemen.

Onthoud Breuken kan je enkel optellen of aftrekken als je ze op gelijke noemer brengt!

Breuken vermenigvuldigen

Breuken vermenigvuldigen is een stuk eenvoudiger dan breuken optellen.

Rekenregel Je vermenigvuldigt gewoon tellers met tellers, en noemers met noemers.

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{8}{15}$$

Je kan natuurlijk ook breuken vermenigvuldigen met gehele getallen:

$$3\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3\cdot 1}{1\cdot 4}=\frac{3}{4}$$

Tegengestelde van een breuk

Het tegengestelde van een breuk bereken je door het minteken in de teller te zetten. Dit is duidelijker in een voorbeeld:

$$-\frac{3+5}{7}=\frac{-(3+5)}{7}$$

Merk op dat ik de teller zelf tussen haakjes zet. Je moet immers de min voor de **HELE** teller zetten. Veel studenten maken immers de volgende fout:

$$-\frac{3+5}{7}=\frac{-3+5}{7}$$

Dit is NIET juist!

Onthoud	Een minteken voor de breuk zet je voor de hele teller. Gebruik haakjes!

Omgekeerd moet je dus ook opletten, als er 1 getal in de teller een minteken heeft, mag je dat minteken niet zomaar zonder meer voor de hele breuk plaatsen!

$$\frac{-2+5}{4}\neq-\frac{2+5}{4}$$

Het minteken in kwestie mag je ook uit de noemer halen zoals in volgend voorbeeld:

$$\frac{6}{-5}=-\frac{6}{5}$$

Maar net zoals met de teller, vergis je niet:

$$\frac{6}{-2+3}\neq\frac{6}{2+3}$$

Breuken delen

Breuk delen door een getal

Onthoud Een breuk gedeeld door een getal is de noemer vermenigvuldigen met dat getal.

Toegepast in een voorbeeld:

$$\frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$$

Je plaatst het getal waar je door deelt mee in de noemer. Merk op dat je de hele noemer vermenigvuldigt met dat getal:

$$\frac{2}{3+2} : 5 = \frac{2}{(3+2) \cdot 5} = \frac{2}{25}$$

Delen door een breuk

Volgende regel geldt:

Rekenregel Delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk.

Dit is een eenvoudig toe te passen regel:

$$\begin{aligned} \tfrac{4}{5} : \tfrac{2}{3} &= \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{3}{2} && \text{delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk} \\ &= \tfrac{12}{10} && \text{breuken vermenigvuldigen is tellers en noemers vermenigvuldigen} \\ &= \tfrac{6}{5} && \text{teller en noemer zijn deelbaar door 2} \end{aligned}$$

Soms is de deling niet geheel duidelijk als er breuken in een breuk staan:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}$$

Belangrijk is dat je een goede scheiding maakt tussen tellers en noemers, maak je breukstreep breed genoeg. Deze breuk symboliseert de deling.

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$$

Dus eigenlijk:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$$

2.9 Rekenen met logaritmen

Een logaritme wordt gedefinieerd als:

Definitie Voor $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$ en $x \in \mathbb{R}_0^+$ geldt dat

$$\log_a(x) = y \text{ als en slechts als } a^y = x$$

a noemen we het grondtal, dat strikt positief en verschillend van 1 dient te zijn. x dient een strikt positief reëel getal te zijn.

Om de uitkomst van $\log_a(x) = y$ te vinden, stel je jezelf de vraag:

Tot welke macht y moet ik a verheffen om x te bekomen?

Voorbeeld 1 $\log_2 8 = 3$ omdat 3 de macht is waartoe ik 2 dien te verheffen om 8 te bekomen.

Voorbeeld 2 Andere voorbeelden:

$$\begin{aligned}\log_{10}(100) &= 2\\ \log_4(16) &= 2\\ \log_3(9) &= 2\\ \log_3(\sqrt{3}) &= \log_3(3^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\\ \log_5(\frac{1}{5}) &= \log_5(5^{-1}) = -1\end{aligned}$$

Bijzondere gevallen

De *tiendelige* of *Briggse* logaritme is de logaritme met grondtal 10.

Vaak laat men het grondtal 10 weg in de notatie:

Definitie Voor $x \in \mathbb{R}_0^+$ geldt dat

$$\log(x) = y \text{ als en slechts al } 10^y = x.$$

De *natuurlijke* of *Neperiaanse* logaritme is de logaritme met grondtal e, met $e = 2.71828182845\ldots$.

Definitie Voor $x \in \mathbb{R}_0^+$ geldt dat

$$\ln(x) = y \text{ als en slechts als } e^y = x.$$

Tot slot:

Rekenregel

$$\log_a a = 1$$

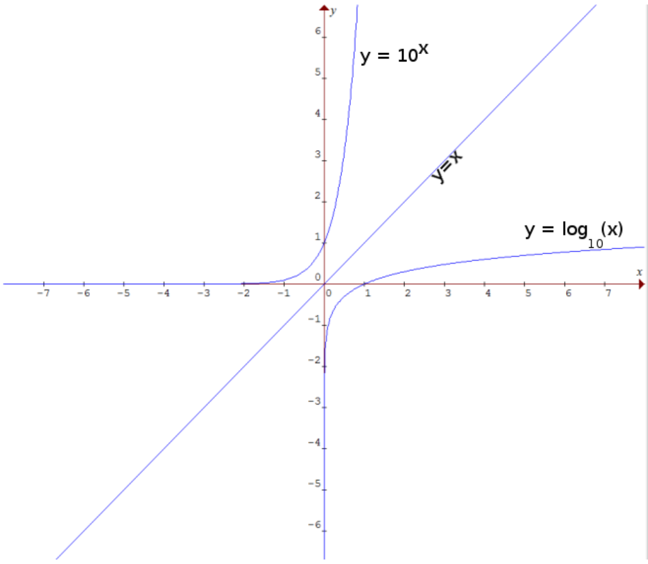
aangezien de macht waartoe ik a dien te verheffen om a te bekomen, 1 is.

$$\log_a 1 = 0$$

onafhankelijk voor de waarde van a (met $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$) aangezien 0 de macht is waartoe ik a dien te verheffen om 1 te bekomen.

Grafische voorstelling

$y = \log_a(x)$ is de inverse functie van $y = a^x$. Grafisch uit zich dit door spiegeling van de grafieken tegenover de eerste bissectrice $y = x$, zie ook Figuur .1.



Figuur .1: Grafische voorstelling van $y = \log_a(x)$.

Grafische voorstelling van de Neperiaanse logaritme

$y = \ln x$ is de inverse functie van $y = e^x$. Grafisch uit zich dit door spiegeling van de grafieken tegenover de eerste bissectrice $y = x$, zie ook Figuur .2.

Rekenregels

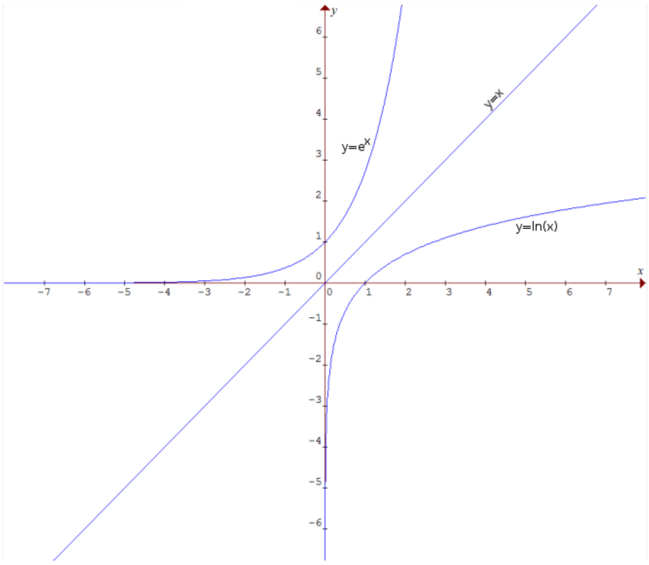
Rekenregel

$$\begin{aligned}
\log_a(x \cdot y) &= \log_a(x) + \log_a(y) \\
\log_a(\frac{x}{y}) &= \log_a(x) - \log_a(y) \\
\log_a(x^n) &= n \cdot \log_a(x) \\
\log_a(\sqrt[n]{x}) &= \frac{1}{n}\log_a(x) \\
\log_a(b) &= \frac{1}{\log_b(a)}
\end{aligned}$$

2.10 Algebra: het rekenen met letters

Gebruik van letters in de wiskunde

De algebra is de kunst van het rekenen met letters. Die letters stellen meestal getallen voor, en met getallen weet je hoe je kan rekenen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Bij algebra voeren we dat soort operaties ook uit, alleen gebruiken we daarbij niet alleen getallen, maar ook *variabelen*. Dat zijn als het ware 'dingen' waarvan we de waarde (nog) niet kennen of waarbij zo'n 'ding' meerdere waarden kan aannemen. Voor de variabelen gebruiken we letters.



Figuur .2: Grafische voorstelling van de Neperiaanse logaritme.

In de algebra worden vervolgens allerlei verbanden en structuren onderzocht. Welke regels en eigenschappen gelden er, wat mag wel en wat mag niet? Verzamelingen spelen hierbij een grote rol, maar ook afbeeldingen. Door gebruik te maken van variabelen, vergelijkingen, en dergelijke meer is het mogelijk 'algemene' uitspraken te doen over verzamelingen en operaties. Bekende eigenschappen van rekenen met getallen zijn de commutatieve eigenschap en de distributieve eigenschap.

Voorbeeld 1 In het algemeen geldt voor het optellen en vermenigvuldigen van a en b (natuurlijke getallen) dat:

$$a + b = b + a \text{ en } a \cdot b = b \cdot a$$

Dat lijkt vanzelfsprekend, maar dat is het niet. Bij de operatie delen geldt het bijvoorbeeld niet! (12 : 4 is niet hetzelfde als 4 : 12)

Een andere bekende eigenschap is de distributiviteit:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Dat gebruiken we heel vaak, maar mag dat zomaar, wanneer wel, wanneer niet?

Geldt dit bijvoorbeeld?

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)???$$

Met variabelen kunnen we ook *formules* opstellen. Stel dat we de straal van een cirkel voorstellen door de letter r. Dan is de omtrek $= 2\pi r$ en de oppervlakte $= \pi r^2$. Nu kunnen we voor eender welke cirkel zijn omtrek en oppervlakte berekenen door de waarde van r te vervangen (we zeggen te *substitueren*) door een getal.

Een *uitdrukking* is een geheel van termen bestaande uit getallen, variabelen, bewerkingstekens (zoals $+$, $-$, $\cdot$, $:$) en andere wiskundige tekens (zoals haakjes): $2\pi r$, $3-8$, $2x+5$, ...

Vervolgens kunnen we twee uitdrukkingen aan elkaar gelijk stellen. We spreken dan van een *vergelijking*. Vergelijkingen kunnen vaak worden afgeleid uit een stukje tekst (de klassieke vraagstukjes). Als een vergelijking een variabele bevat, dan kunnen we trachten de waarde (of alle waarden) van de variabele te vinden waardoor er een ware bewering ontstaat als we de variabele vervangen door de gevonden waarde(n). Dit wordt *oplossen van de vergelijking* genoemd. De waarde van de variabele heet in dit geval *de wortel* of *de oplossing* van de vergelijking.

Een formule kan (en mag) meerdere variabelen en onbekenden bevatten.

Voorbeeld 2 De oppervlakte van een rechthoek is $b \cdot h$ waarbij b de basis is, en h de hoogte.

Als je nu gegeven krijgt dat b gelijk is aan 4 en h gelijk is aan 2 (we gebruiken even geen eenheden ter vereenvoudiging), dan kan je de oppervlakte berekenen door de letters te substitueren, door ze te vervangen door de echte waarden of echte getallen:

$$\text{oppervlakte} = b \cdot h = (4) \cdot (2) = 8$$

Hoewel het hier niet echt nodig was, hebben we toch de gesubstitueerde getallen tussen haken gezet. Je doet dit om aan te duiden dat je de letter in zijn geheel vervangt door het getal. Bij moeilijke formules maakt dit wel degelijk veel uit! Stel, je wil de oppervlakte van een andere rechthoek berekenen, en je hebt gegeven dat de hoogte 2 meer moet zijn dan de basis, of met andere woorden, $h = b + 2$. Over de basis weet je nog niets. Je kan dus enkel h vervangen:

$$\text{oppervlakte} = b \cdot h = b \cdot (b+2)$$

Je ziet dus dat de letter h volledig vervangen is door $b+2$, gesymboliseerd door de haakjes.

Voorbeeld 3 Ik heb een pot verf waarmee een oppervlakte van $5m^2$ kan geschilderd worden. Hoeveel ronde tafeltjes kan ik hiermee een likje verf geven? De diameter van de tafeltjes is 1 m.

Oplossing:

We zoeken het aantal tafeltjes die volledig geschilderd kunnen worden. Stel deze onbekende variabele voor door bijvoorbeeld x (gevraagd).

We hebben voldoende verf om $5\ m^2$ te schilderen (gegeven).

De diameter d van een tafeltje is 1 meter: $d = 1\ m$ (gegeven). De straal r van een cirkel is de helft van de diameter, dus $2r = d$, zodat de oppervlakte s van 1 tafeltje gelijk is aan:

$$\begin{aligned} s = \pi r^2 &= \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \\ &= \frac{\pi d^2}{4} \\ &= \frac{\pi(1)^2}{4} \\ &= 0,79\ m^2 \end{aligned}$$

We stellen de vergelijking op, nl. $5 = x.s$, en lossen deze tenslotte op naar de onbekende variabele:

$$x = \frac{5}{s} = \frac{5}{0,79} = 6,37$$

Besluit: we kunnen 6 tafeltjes schilderen (en dan blijft er nog een klein beetje verf over).

Manier van rekenen

Notaties

- In het rekenen met letters wordt het puntje van de vermenigvuldiging vaak niet geschreven. In plaats van $a \cdot b \cdot c$ schrijf je abc. Of, in plaats van $2 \cdot b$ schrijf je $2b$. Het puntje schrijven is niet fout, maar hoeft niet.
- Letters schrijf je achteraan in een uitdrukking, dus $b \cdot 2 \cdot c$ schrijf je best als $2bc$. (Dit mag, want in een product mag je factoren van plaats verwisselen.)
- Vaak worden de letters die voorkomen ook in alfabetische volgorde geschreven. Bijvoorbeeld yxz schrijf je beter als xyz.

Deze notaties maken het meestal gemakkelijker om verder te rekenen, en als je je aan deze manier van schrijven houdt, ziet alles er meer netjes uit. Het is niet absoluut verplicht om te doen, maar wel aan te raden.

Eentermen en veeltermen

Een eenterm is een uitdrukking die uit 1 term bestaat, een veelterm bestaat uit meerdere termen, logisch toch? I.p.v. een veelterm spreken we ook over een polynoom.

Voorbeeld 4 a en $4abcx$ zijn eentermen; $x^2 + 3x + 1$ en $b - x$ zijn veeltermen

Som en verschil

Je kan de som of het verschil van eentermen maken, maar enkel als de letters of lettercombinatie in de eenterm gelijk is. Lijkt een cryptische regel, maar dat is het niet.

Voorbeeld 5

$a + 3a$	$=$	$4a$	Dit gaat perfect, want de letters zijn gelijk.
$a + 2b$	$=$	?	Dit gaat niet, a en b zijn verschillende letters.
$2ab + bc$	$=$	?	Dit gaat niet want ab en bc zijn verschillende lettercombinaties.
$3ab - ab$	$=$	$2ab$	Dit gaat perfect, want de lettercombinaties zijn gelijk.
$ab + ba$	$=$	$ab + ab = 2ab$	Ook dit gaat, al is het met een omweg. Door te sorteren zie je dat de lettercombinaties gelijk zijn.
$a + a^2$	$=$	?	Dit gaat niet, want de lettercombinaties zijn niet gelijk, eentje is een a en de andere is a^2.

Let dus goed op bij het optellen van letters of combinaties, en sorteer de letters om gelijkaardige combinaties te zien.

Het optellen van veeltermen is een uitbreiding van deze regel. Gelijksoortige eentermen (dus met dezelfde lettercombinaties) tel je op:

Voorbeeld 6

$$(3x + y) + (4x + z) = 7x + y + z$$

Enkel de eentermen van de x kan je optellen, de rest moet je laten staan.

$$(3x + y) - (a + b) = 3x + y - a - b$$

Jammer, hier kan je niets optellen.

Producten

Producten van verschillende letters vorm je door de letters achter elkaar te schrijven. De bijhorende getallen vermenigvuldig je ook, en plaats je voorop.

Voor eentermen is dit:

Voorbeeld 7

$$\begin{aligned} a \cdot b \cdot x &= abx \\ x \cdot 2a \cdot 2b &= 4abx \end{aligned}$$

Als de letters gelijk zijn, kan je machten vormen. Je gebruikt hier eigenlijk de rekenregel: “machten met hetzelfde grondtal vermenigvuldigen is de exponenten optellen”.

Voorbeeld 8

$$\begin{aligned} a \cdot a &= a^2 \\ x^2 \cdot x^3 &= x^{2+3} = x^5 \\ ab \cdot ab &= (ab)^2 = a^2 \cdot b^2 = a^2b^2 \end{aligned}$$

Veeltermen vermenigvuldigen is lastiger, maar maakt gebruik van rekenregels die je al kent. De belangrijkste is de distributiviteit. Op die manier herleid je het probleem naar het product van eentermen:

$$x \cdot (a+b) = x \cdot a + x \cdot b = ax + bx$$

Iets complexer:

Voorbeeld 9

$(a+2x)\cdot(3x)$	$=$	$a\cdot(3x)+(2x)\cdot(3x)$	distributiviteit
	$=$	$3ax+6x^2$	uitrekenen en ordenen
$(a+b)\cdot(a+b)$	$=$	$a\cdot a+b\cdot a+a\cdot b+b\cdot b$	distributiviteit
	$=$	$a^2+ba+ab+b^2$	uitrekenen
	$=$	$a^2+2ab+b^2$	ordenen en optellen
$(a+b)\cdot(x+y)$	$=$	$a\cdot x+a\cdot y+b\cdot x+b\cdot y = ax+ay+bx+by$	

In sectie 3 gaan we kijken naar de omgekeerde bewerkingen: ontbinden in factoren (afzonderen van eentermen en veeltermen), en merkwaardige producten.

Quotiënten

Quotiënten, en dus daarmee samenhorend breuken, bereken je vaak door vereenvoudigingen. Je doet een vereenvoudiging net op dezelfde manier als bij het vereenvoudigen van een breuk met gewone getallen:

$$\begin{aligned} \frac{6}{15} &= \frac{2\cdot 3}{3\cdot 5} = \frac{2}{5} \\ \frac{ab}{bc} &= \frac{a}{c} \end{aligned}$$

Als er in de teller een letter staat die ook in de noemer staat, kan je de breuk vereenvoudigen. Maar de volgende breuk kan je NIET vereenvoudigen:

$$\frac{ab}{bc+1}$$

In de noemer staat immers niet bij elke term een b, dus is vereenvoudiging hier niet mogelijk. Wat je echter wel kan (en mag doen) is zowel in teller als noemer de letter b buiten de haakjes brengen; daarna kan je b schrappen, maar of je daarmee de breuk vereenvoudigd hebt, laten we in het midden. De variabele b mag nu immers niet meer nul worden.

$$\frac{ab}{bc+1} = \frac{ab}{b(c+\frac{1}{b})} = \frac{a}{c+\frac{1}{b}}$$

Het gebruik van rekenregels heb je echt nodig bij machten:

$$\frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a^1 = a$$

Voorbeeld 10

$$\begin{array}{rcl|r}
\dfrac{p\sqrt{p}}{p^2} & = & \dfrac{p.p^{\frac{1}{2}}}{p^2} & \text{vierkantswortel omzetten in macht} \\
 & = & \dfrac{p^{1+\frac{1}{2}}}{p^2} & \text{product van machten met gelijk grondtal is exponenten optellen} \\
 & = & \dfrac{p^{\frac{3}{2}}}{p^2} & \\
 & = & p^{\frac{3}{2}-2} & \text{quotiënt van machten met gelijk grondtal is exponenten aftrekken} \\
 & = & p^{-\frac{1}{2}} & \text{Verder dan dit kan je de opgave niet vereenvoudigen.}
\end{array}$$

Als je iets meer ervaring hebt: $\frac{p\sqrt{p}}{p^2} = p^{1+\frac{1}{2}-2} = p^{-\frac{1}{2}}$.

Voorbeelden

Rekenen met letters kan dan wel op dezelfde manier gaan zoals rekenen met getallen, toch is er vaak een moeilijkheid bij vereenvoudigingen en dergelijke. Vandaar dat we enkele voorbeelden bekijken.

Breuken optellen en aftrekken

Voorbeeld 11 Net zoals bij de gewone breuken, is de sleutel hier het op dezelfde noemer brengen van de breuken:

$$\frac{4}{a} + \frac{7}{a} = \frac{11}{a}$$

Voorbeeld 12 Volgend voorbeeld is iets lastiger:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

Je zoekt hier een gelijke noemer. Omdat de noemers niets met mekaar te maken hebben, neem je gewoon het product van de noemers als gemeenschappelijke noemer, namelijk $b \cdot d$. Dat zou je ook doen als je de som $\frac{1}{7} + \frac{2}{3}$ zou moeten oplossen, dan zou je ook als gemeenschappelijke noemer $3 \cdot 7 = 21$ kiezen.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Voorbeeld 13 Een iets moeilijker voorbeeld:

$$\begin{aligned}
\frac{y}{x}+\frac{y}{x+1} &= \frac{y.(x+1)}{x.(x+1)}+\frac{y.x}{(x+1).x}\\
&= \frac{xy+y}{x.(x+1)}+\frac{xy}{(x+1).x}\\
&= \frac{xy+y+xy}{x.(x+1)}\\
&= \frac{2xy+y}{x(x+1)}\\
&= \frac{2xy+y}{x^2+x}
\end{aligned}$$

We werken hier ook de noemer uit.

Voorbeeld 14 Nog een laatste voorbeeld:

$$\frac{x+3+a}{a+1}-\frac{2x+5-b}{2a+2}$$

In dit voorbeeld is de gemeenschappelijke noemer gelijk aan $2a+2$, en niet meteen het product van de twee noemers! Immers, de twee noemers hebben een gemeenschappelijk factor, namelijk $a+1$. Daar moet je gebruik van maken. Concreet betekent dit dat we de eerste breuk in teller en noemer moeten vermenigvuldigen met 2, en de tweede noemer kunnen we gewoon laten staan:

$$\begin{aligned}
\frac{x+3+a}{a+1}-\frac{2x+5-b}{2a+2} &= \frac{(x+3+a).2}{(a+1).2}-\frac{2x+5-b}{2a+2} && \text{op gelijke noemer zetten}\\
&= \frac{2x+6+2a}{2a+2}-\frac{2x+5-b}{2a+2} && \text{uitrekenen}\\
&= \frac{2x+6+2a-(2x+5-b)}{2a+2} && \text{verschil van tellers, vergeet geen haken!}\\
&= \frac{2x+6+2a-2x-5+b}{2a+2} && \text{minteken verdelen over termen}\\
&= \frac{1+2a+b}{2a+2} && \text{gelijkaardige termen optellen}
\end{aligned}$$

Breuken vermenigvuldigen en delen

Breuken vermenigvuldigen en delen is eenvoudiger dan optellen en aftrekken; opnieuw gebruik je dezelfde rekenregels als voordien.

Voorbeeld 15 Vermenigvuldigen van breuken is tellers met tellers en noemers met noemers vermenigvuldigen:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{2}{x}=\frac{a.2}{b.x}=\frac{2a}{bx}$$

Voorbeeld 16 Een getal delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk:

$$\frac{a}{b}:\frac{2}{x}=\frac{a}{b}.\frac{x}{2}=\frac{a.x}{b.2}=\frac{ax}{2b}$$

Voorbeeld 17 Ietsje moeilijker:

$$\begin{array}{rcl|r} \frac{a+b}{c+d}.\frac{x+1}{y+1} & = & \frac{(a+b)}{(c+d)}.\frac{(x+1)}{(y+1)} & \text{breuken vermenigvuldigen} \\ & = & \frac{ax+a+bx+b}{cy+c+dy+d} & \text{uitrekenen} \end{array}$$

Voorbeeld 18 Vergeet ook niet (indien mogelijk) om nadien te vereenvoudigen:

$$\begin{array}{rcl|r} \frac{2a+4x}{4b}:\frac{b}{2y} & = & \frac{2a+4x}{4b}\cdot\frac{2y}{b} & \text{vermenigvuldigen met omgekeerde} \\ & = & \frac{(2a+4x)\cdot(2y)}{(4b)\cdot(b)} & \text{breuken vermenigvuldigen} \\ & = & \frac{4ay+8xy}{4b^2} & \text{uitrekenen} \\ & = & \frac{ay+2xy}{b^2} & \text{vereenvoudigen} \end{array}$$

Machten en wortels

Voorbeeld 19

$$\begin{array}{ccccc} (2a)^4 & = & 2^4\cdot a^4 & = & 16a^4 \\ \sqrt{16a} & = & \sqrt{16}\cdot\sqrt{a} & = & 4\sqrt{a} \\ \left(\frac{a+2}{3}\right)^2 & = & \frac{(a+2)^2}{3^2} & = & \frac{a^2+4a+4}{9} \\ \left(\frac{b}{1-a}\right)^{-2} & = & \left(\frac{1-a}{b}\right)^2 & = & \frac{(1-a)^2}{b^2} = \frac{1-2a+a^2}{b^2} \end{array}$$

2.11 Evenredigheden en de regel van drie

De regel van drie

In een aantal vraagstukken worden er twee grootheden met elkaar vergeleken. Deze twee grootheden houden dikwijls verband met elkaar. Dit wil zeggen als de ene grootheid groter wordt, vermeerdert ook de andere. En als de ene grootheid kleiner wordt, vermindert de andere grootheid eveneens. We zeggen dat de twee grootheden zich *evenredig* verhouden tot elkaar (symbooltje $\sim$).

Voorbeeld 1 Een doos ballonnen bevat 75 ballonnen en kost 10 €. Hoeveel kosten dan 90 ballonnen?

Er is een verband, want als de ene grootheid (= het aantal ballonnen) vermeerdert, vermeerdert hier ook de andere grootheid (= de prijs van de ballonnen). Hoe meer ballonnen je wil, hoe meer je zal moeten betalen. Zulke vraagstukken kan je oplossen met de zogenaamde *regel van drie*. Bij dit soort opgaven ken je altijd 3 getallen en moet je het vierde getal berekenen, vandaar...

$$\begin{array}{ccc} 75 \text{ ballonnen} & \sim & 10\,€ \\ 1 \text{ ballon} & \sim & \frac{10\,€}{75 \text{ ballonnen}} \\ 90 \text{ ballonnen} & \sim & \frac{10\,€}{75 \text{ ballonnen}}\cdot 90 \text{ ballonnen} = 12\,€ \end{array}$$

Antwoord : Voor 90 ballonnen betaal je dan 12 €.

Infeite ga je eerst op zoek naar de "eenheidsprijs" voor één ballon: 10 € voor 75 ballonnen komt overeen met $10/75 = 0,133\frac{\text{EUR}}{\text{ballon}}$. We kunnen ons ook afvragen hoeveel ballonnen je kan kopen voor één euro: $75/10 = 7,5\frac{\text{ballonnen}}{\text{EUR}}$ (praktisch zou dit betekenen dat je met één euro 7 ballonnen kan kopen; je betaalt daarvoor $7.0,133 = 0.93$ € en je houdt nog 6 eurocent over).

We zeggen dat een verhouding *omgekeerd evenredig* is wanneer een vermeerdering langs de ene kant, een even grote vermindering aan de andere kant veroorzaakt.

Voorbeeld 2 Stel, ik heb voldoende veevoeder om 35 varkens gedurende 22 dagen te voeren. Hoeveel dagen kom ik toe met dezelfde hoeveelheid veevoeder als ik plots 70 varkens zou hebben?

Er is een verband, want als de ene grootheid (= het aantal varkens) vermeerdert, vermindert hier de andere grootheid (= het aantal dagen voederen). Zulke vraagstukken kan je eveneens oplossen met de regel van drie.

$$\begin{array}{lll} \text{veevoeder voor 35 varkens} & \sim & \text{22 dagen} \\ \text{veevoeder voor 1 varken} & \sim & \text{22 dagen} \cdot \text{ veevoeder voor 35 varkens} \\ \text{veevoeder voor 70 varkens} & \sim & \frac{\text{22 dagen} \cdot \text{veevoeder voor 35 varkens}}{\text{veevoeder voor 70 varkens}} \quad = \quad \text{11 dagen} \end{array}$$

Antwoord : Met dezelfde hoeveelheid veevoeder kan je 70 varkens 11 dagen lang voederen.

Dit is dus niet hetzelfde als: Stel, ik heb veevoeder om 35 varkens gedurende 22 dagen te voeren. Hoeveel veevoeder heb ik nodig om 70 varkens te voederen gedurende diezelfde 22 dagen?

Antwoord: de exacte hoeveelheid veevoeder in kg (dat een varken per dag nodig heeft) kennen we niet, dus kunnen we ook niet in “zoveel kg” antwoorden, maar als het aantal varkens verdubbelt, dan zal de hoeveelheid veevoeder ook moeten verdubbelen. De verhouding “hoeveelheid veevoeder per varken” verandert niet; we zeggen dat de verhouding constant blijft. In symbolen:

$$\frac{\text{hoeveelheid veevoeder x}}{\text{35 varkens}} = \frac{\text{hoeveelheid veevoeder y}}{\text{70 varkens}} = \text{constant}$$

Schrijven we dit iets anders:

$$\frac{\text{70 varkens}}{\text{35 varkens}} = \frac{\text{hoeveelheid veevoeder y}}{\text{hoeveelheid veevoeder x}} = \text{constant} = 2$$

Besluit: de hoeveelheid veevoeder voor 70 varkens = 2·hoeveelheid veevoeder voor 35 varkens.

Dit vraagstukje laat zien wat we bedoelen met “kruiselings vermenigvuldigen”.

Kruiselings vermenigvuldigen

Kruiselings vermenigvuldigen is de benaming voor een rekenkundige handeling om een vergelijking tussen twee verhoudingen (evenredigheid) te vereenvoudigen. Daarbij wordt de noemer van het linkerlid vermenigvuldigd met de teller van het rechterlid, en de teller van het linkerlid vermenigvuldigd met de noemer van het rechterlid. Beide vermenigvuldigingen stelt men dan aan elkaar gelijk. De vergelijking wordt door kruislings vermenigvuldigen vereenvoudigd tot $20y = 40$, waaruit weer volgt dat $y = 2$.

In formulevorm:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$$

Indien $bc \neq 0$ geldt ook het omgekeerde:

$$ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \tag{1}$$

De achtergrond van dit "trucje" is dat beide zijden van de vergelijking met hetzelfde reële getal vermenigvuldigd kunnen worden, zonder dat de vergelijking verandert. In bovenstaande formulering kunnen beide zijden met het getal "bd" vermenigvuldigd worden, waarna volgt $ad = bc$.

2.12 Rekenen met percentages en promillages

x percent of $x\%$ van een getal y betekent: $\left(\frac{x}{100}\right).y$

x promille of x ‰van een getal y betekent: $\left(\frac{x}{1000}\right).y$

Een percentage of promillage heeft dus altijd betrekking op een getal. 10% op zich heeft m.a.w. eigenlijk geen betekenis.

Voorbeeld 1 Hoeveel is 25% van 50?

Dit is:

$$\left(\frac{25}{100}\right).50 = 0,25.50 = 12,5$$

Voorbeeld 2 Stel, de basisprijs van een product is 82 €. Er komt echter nog 21% BTW bij. Aan welke prijs wordt dit product te koop aangeboden?

Antwoord:

$$82 + 21\% \text{ van } 82 = 82 + 17,22 = 99{,}22\,€.$$

Dit soort berekeningen kan je vlotter maken via: $1,21 \cdot 82 = 99{,}22\,€$. Dus als een hoeveelheid met 21% toeneemt hoort daar de factor $1,21$ bij.

Voorbeeld 3 Hoeveel moeten we betalen als we 30% korting krijgen op een product dat 200 € kost?

We moeten dan van de prijs 30% aftrekken:

$$200 - 30\% \text{ van } 200 = 200 - 60 = 140\,€.$$

Ook dit gaat eenvoudiger via $0,70 * 200 = 140\,€$. Met een afname van 30% komt de factor $0,70$ overeen.

We hebben geluk: bovenop de 30% korting krijgen we nog een extra 5% studentenkorting. Nu betalen we $0,70 * 0,95 * 200 = 133\,€$.

Procenten van procenten tel je dus niet op, maar je vermenigvuldigt ze met elkaar. De klant heeft dus geen 35% korting gekregen, maar slechts $1 - 0,7 * 0,95 = 33,5\%$.

Ook een gecombineerde toename en afname worden via een vermenigvuldiging samengevoegd.

Voorbeeld 4 Met hoeveel procent neemt het aantal toe als het eerst 20% vermeerdert en daarna met 45% vermindert?

Antwoord: bij een toename van 20% hoort de factor $1,2$ en bij een afname van 45% hoort de factor $0,55$. Aangezien $1,2 * 0,55 = 0,66$ zal het aantal afnemen met 34% .

Voorbeeld 5 Tijdens een garageverkoop doet een verkoper ons een aantrekkelijk voorstel. I.p.v. 15% korting op alle spullen, krijgen wij een korting van 125 € op het nog nieuwe televisietoestel dat 1000 € kost. We happen niet meteen toe, maar rekenen uit met hoeveel procent 125 van 1000 overeenkomt:

als $x\%$ van $y = z$, m.a.w. $\left(\frac{x}{100}\right).y = z$

dan is

$$\frac{x}{100}(\text{ of } x\%) = \frac{z}{y}$$

In ons geval is:

$$x = \frac{125}{1000} = 0,125 \text{ of } 12,5\%$$

We kiezen dus beter voor de 15% korting!

3 Ontbinden in factoren

3.1 Basisprincipes

Een wiskundige uitdrukking ontbinden is belangrijk om deze uitdrukking eenvoudiger voor te stellen en om ze beter te kunnen analyseren. Ze kan ook gebruikt worden om een vergelijking op te lossen.

Welke uitdrukking ziet er gemakkelijker uit?

$$x(x+1)(x+2)(x-\sqrt{2}) \text{ of } x^4 + (3-\sqrt{2})x^3 + (2-3\sqrt{2})x^2 - 2\sqrt{2}x$$

Bij het ontbinden in factoren probeer je zoveel mogelijk gemeenschappelijke factoren af te zonderen, je zet een som om in een product.

Afzonderen van een getal

Het eenvoudigste is een getal afzonderen: $5x + 10y = 5(x + 2y)$

Elke term van de som heeft een gemeenschappelijke factor 5, of met andere woorden, elke term is deelbaar door 5. Je brengt deze factor buiten door elke term daadwerkelijk te delen door 5, en het getal buiten de haakjes te zetten. Je past als het ware omgekeerde distributiviteit toe.

Voorbeeld 1

$$\begin{aligned} 14x + 21 &= 7(2x+3) \\ 5y + 5 &= 5(y+1) \\ 2x + 4y + 6z &= 2(x + 2y + 3z) \end{aligned}$$

Afzonderen van een letter of eenterm

Je kan natuurlijk ook letters afzonderen.

Voorbeeld 2

$$\begin{aligned} 5x + 3x^2 &= x(5+3x) \\ 3xy + 2zy &= y(3x+2z) \\ a^2 + 3ab + ac &= a(a + 3b + c) \end{aligned}$$

Dit kan algemener: soms kan je een gehele eenterm (getal maal een macht van een letter) afzonderen:

Voorbeeld 3

$$\begin{aligned} 3x + 6x^2 &= 3x(1+2x) \\ x^3 + 2^2 &= x^2(x+2) \end{aligned}$$

Als er bij een term en getal of letter ontbreekt, dan kan je eenvoudig compenseren met een breuk:

Voorbeeld 4

$$6x^2 + 3x + 1 = 6x^2(1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{6x^2})$$

Controleer altijd je antwoord door het (in gedachten) terug uitrekenen van de haakjes. Veel fouten worden gemaakt door een verkeerde macht van een letter te laten staan, of door het vergeten van constante termen.

Gedeeltelijke ontbinding

Veel ontbindingen zie je niet op het zicht. Soms moet je wat proberen en wat termen groeperen om bepaalde factoren af te zonderen.

Voorbeeld 5

$$3x + 6xy + x$$

In deze uitdrukking zie je dat de 3 termen niets met elkaar te maken hebben (m.a.w. niks gemeenschappelijks hebben). Je kan wel de eerste twee samennemen en daar uit afzonderen:

$$3x + 6xy + y = (3x + 6xy) + y = 3x(1+2y) + y$$

Maar, je had ook de twee laatste termen kunnen samennemen:

$$3x + 6xy + y = 3x + (6xy + y) = 3x + y(6x + 1)$$

Geen van beide pogingen leidt echter tot een volledige ontbinding. Het zijn echter deze pogingen die je moet ondernemen!

Afzonderen van een veelterm

Je kan ook volledige veeltermen afzonderen.

Voorbeeld 6

$$3(x^2 + 1) + 2a(x^2 + 1)$$

Hier zie je dat de twee termen de factor $x^2 + 1$ gemeenschappelijk hebben. Deze kan je in zijn geheel afzonderen. Bij de eerste term zal dan 3 overblijven, en bij de tweede $2a$:

$$3(x^2 + 1) + 2a(x^2 + 1) = (x^2 + 1)(3 + 2a)$$

Gebruik altijd goed de haakjes! Nog een voorbeeld:

$$7xy(y + 2z) - 3z(y + 2z)$$

Hier zonder je $y + 2z$ af. Voor de eerste term blijft er dan $7xy$ over, bij de tweede $-3z$. Vergeet dat minteken niet!

$$7xy(y + 2z) - 3z(y + 2z) = (y + 2z)(7xy - 3z)$$

Als je een opgave krijgt die je niet meteen op het zicht kan oplossen, moet je eerst proberen met gedeeltelijke ontbinding. Soms zie je dan meer.

Voorbeeld 7

$$x^2 - 2ax - 8a + 4x$$

Bekijk je dit als een geheel, dan zie je dat deze 4 termen niets gemeenschappelijks hebben. Je moet nu kiezen welke termen je gaat samennemen. Je ziet bijvoorbeeld dat de eerste 2 termen een x gemeenschappelijk hebben, en de laatste twee een factor 4. Zo groeperen we dan ook. Gebruik bij het groeperen de haakjes:

$$x^2 - 2ax - 8a + 4x = (x^2 - 2ax) + (-8a + 4x)$$

Nu zonderen we af:

$$(x^2 - 2ax) + (-8a + 4x) = x(x - 2a) + 4(-2a + x)$$

Nu zie je plots dat beide termen nog steeds iets gemeenschappelijks hebben, namelijk $x - 2a$ (let op, deze zijn omgewisseld in de tweede term). Die kan je nu ook afzonderen!

$$x(x - 2a) + 4(-2a + x) = (x - 2a)(x + 4)$$

Voorbeeld 8

$$\begin{array}{rcll} 6axy-6a-4y+9a^2 & = & (6axy-6a)+(-4xy+9a^2) & \text{eerste poging tot groeperen} \\ & = & 6a(xy-1)+(-4xy+9a^2) & \text{gelijke factoren afzonderen} \end{array}$$

In deze opgave zit je nu vast, de tweede term kan je niet verder ontbinden. Onze eerste groepering levert niet veel op! We proberen iets anders:

$$\begin{array}{rcll} 6axy-6a-4y+9a^2 & = & (6axy-4xy)+(-6a+9a^2) & \text{tweede poging tot groeperen} \\ & = & 2xy(3a-2)+3a(-2+3a) & \text{gelijke factoren afzonderen} \\ & = & (3a-2)(2xy+3a) & \text{gelijke factor afzonderen} \end{array}$$

Voorbeeld 9

$$\begin{array}{rcll} -4xy-4y+7z+7xz & = & (-4xy-4y)+(7z+7xz) & \text{poging tot groeperen} \\ & = & 4y(-x-1)+7z(1+x) & \text{gelijke factoren afzonderen} \end{array}$$

We zitten nu schijnbaar vast, omdat de twee termen wel een factor bij zich hebben staan die op elkaar lijken, maar toch niet volledig gelijk zijn. Er staat een minteken teveel. De oplossing komt als je bedenkt dat een minteken eigenlijk een factor -1 is, en die kan je ook afzonderen:

$$\begin{array}{rcll} -4xy-4y+7z+7xz & = & (-4xy-4y)+(7z+7xz) & \text{poging tot groeperen} \\ & = & 4y(-x-1)+7z(1+x) & \text{gelijke factoren afzonderen} \\ & = & 4y(-1)(x+1)+7z(1+x) & \text{-1 afzonderen} \\ & = & (x+1)(-4y+7z) & \text{gelijke factoren afzonderen} \end{array}$$

3.2 Merkwaardige producten

Merkwaardige producten leveren soms een snelle manier om een uitdrukking te ontbinden in factoren. We zetten de belangrijkste even op een rijtje:

Onthoud

$$\begin{array}{rcl} (A+B)^2 & = & A^2+2AB+B^2 \\ (A-B)^2 & = & A^2-2AB+B^2 \\ (A+B)(A-B) & = & A^2-B^2 \end{array}$$

Je kan deze merkwaardige producten bij het ontbinden in factoren gebruiken door het rechterlid om te zetten in het linkerlid; dat linkerlid is immers ontbonden in factoren.

Voorbeeld 1

$$x^2+4x+4=(x+2)^2$$
$$y^2-6y+9=(y-3)^2$$
$$z^2-16=(z+4)(z-4)$$

Vaak is het lastig om de juiste formule te ontdekken. Je moet op zoek gaan naar een herkenningspunt:

$$\begin{array}{rcll} (A+B)^2 & = & A^2+2AB+B^2 & \text{kwadraat plus dubbel product plus kwadraat} \\ (A-B)^2 & = & A^2-2AB+B^2 & \text{kwadraat min dubbel product plus kwadraat} \\ (A+B)(A-B) & = & A^2-B^2 & \text{kwadraat min kwadraat} \end{array}$$

Het moment dat je dit herkent, moet je de gegeven getallen hierin proberen te passen. Dat betekent concreet dat A en B alles kunnen zijn, letters, getallen, eentermen of zelfs veeltermen.

Voorbeeld 2

$$9z^2 - 16x^2$$

Hier zie je duidelijk een verschil van twee kwadraten. Je probeert nu de juiste waarden te vinden voor A en B. In dit geval zijn de kwadraten

$$9z^2 = (3z)^2 \text{ en } 16x^2 = (4x)^2$$

Dat betekent dus dat $A = 3z$ en $B = 4x$. Invullen geeft dan

$$9z^2 - 16x^2 = (3z - 4x)(3z + 4x)$$

Voorbeeld 3

$$4a^2x^2 + 9y^2 + 12axy$$

Je herkent hierin 2 kwadraten en een derde term. We gokken dus dat die derde term een dubbel product is. We controleren dit. Het eerste kwadraat is $4a^2x^2 = (2ax)^2$, we stellen dus A gelijk aan $2ax$. Het tweede kwadraat is $9y^2 = (3y)^2$, dus $B = 3y$. Zou dan $2AB = 12axy$? Ja! Dus we hebben een merkwaardig product.

$$4a^2x^2 + 9y^2 + 12axy = (2ax + 3y)^2$$

Voorbeeld 4

$$x^4 - 1$$

Dit lijkt geen merkwaardig product te zijn, maar is het wel. Het is belangrijk op te merken dat ook een vierde macht een kwadraat is:

$$x^4 = (x^2)^2 \text{ en } 1 = 1^2$$

We vinden dus $A = x^2$ en $B = 1$, we vullen in in de formule van het verschil van twee kwadraten:

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$$

We zijn nog niet helemaal klaar. We kunnen immers misschien een of beide van deze factoren nog verder ontbinden. De factor $(x^2 + 1)$ is geen verschil van kwadraten, en heeft ook geen dubbele productterm, deze gaan we dus niet verder kunnen ontbinden. De factor $(x^2 - 1)$ is echter wel een verschil van twee kwadraten, dus:

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

3.3 Discriminant

Kwadratische uitdrukkingen kan je snel ontbinden met behulp van de abc-formule. Even herhalen:

Definitie Om een tweedegraadsvergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ te ontbinden zijn er drie gevallen:

- $D > 0$, de ontbinding is dan $a(x - x_1)(x - x_2)$
- $D = 0$, de ontbinding is dan $a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2$
- $D < 0$, er is geen ontbinding

We zetten dus de coëfficiënt a bij x^2 vooraan, en vullen de oplossingen x_1 en x_2 in.

De discriminant wordt berekend als volgt:

$$D = b^2 - 4ac$$

en de oplossingen zijn (als $D > 0$)

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ en } x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Als $D = 0$, dan is $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

Voorbeeld 1

$$x^2 - 3x + 2$$

De discriminant is $D = 2^2 - 4ac = (-3)^2 - 4.1.2 = 1 > 0$. De oplossingen zijn

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ en } x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

De ontbinding is dus (de coëfficiënt a bij x^2 is 1):

$$x^2 - 3x + 2 = a(x - x_1)(x - x_2) = 1(x - 2)(x - 1)$$

Voorbeeld 2

$$2x^2 + x - 1$$

De discriminant is $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.2.(-1) = 9 > 0$. De oplossingen zijn

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2.2} = \frac{1}{2} \text{ en } x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2.2} = -1$$

De ontbinding is dus (de coëfficiënt a bij x^2 is 2):

$$2x^2 + x - 1 = a(x - x_1)(x - x_2) = 2(x - \frac{1}{2})(x + 1)$$

Voorbeeld 3

$$3x^2 - 6x + 3$$

De discriminant is $D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4.3.3 = 0 > 0$. Er is 1 oplossing en die is

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{90}}{2.3} = 1$$

De ontbinding is dus (de coëfficiënt a bij x^2 is 3):

$$3x^2 - 6x + 3 = a(x - x_1)^2 = 3(x - 1)^2$$

Voorbeeld 4

$$x^2 + x + 1$$

De discriminant is $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.1.1 = -3$. De discriminant is negatief, dus is er geen ontbinding mogelijk.

3.4 Discriminant - voorbeeld

Zie filmpje MOOC.

3.5 Regel van Horner

Eigenschap 1 *Het rekenschema van Horner geeft vaak een manier om te ontbinden in factoren. Bij het rekenschema van Horner zonder je altijd een factor van de vorm $(x - a)$ af, waar a een getal is.*

We leggen het rekenschema van Horner uit aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeld 1 We proberen te ontbinden:

$$x^3 - 4x + x^2 - 4$$

Stap 1. Orden de machten van x van groot naar klein

De grootste voorkomende macht van is hier , en die staat vooraan. De volgende is een kwadraat, dat moet op de tweede plaats, enzoverder:

$$x^3 + x^2 - 4x - 4$$

Stap 2. Zorg dat elke macht van x voorkomt, anders vul je aan

In dit voorbeeld zijn alle machten van x aanwezig, er ontbreekt niets. In een volgend voorbeeld bekijken we wat er zou moeten gebeuren als er wel een macht ontbreekt.

Stap 3. Kies een waarde voor a

In dit geval gaan we Horner toepassen met $a = 2$.

Stap 4. Teken het Hornerschema

- Teken een tabel met 3 rijen.
- In de bovenste rij zet je alle coëfficiënten van de veelterm van x in de juiste volgorde (Als er geen coëfficiënt bij staat, dan is dit eigenlijk de coëfficiënt 1)
- In de eerste kolom zet je het getal a (in ons geval is $a = 2$).

$$\begin{array}{ccc|cccc} & & & x^3 & x^2 & x & c^{te} \\ & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & & 1 & 1 & -4 & -4 \\ a & \rightarrow & 2 & & & & \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

Stap 5. Het eerste cijfer mag je gewoon overschrijven

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 2 & \downarrow & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Stap 6. Vermenigvuldig a met dit eerste getal, en schrijf het in de tweede rij

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 2 & \downarrow & 2 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Stap 7. Tel dit nieuw gevonden getal op bij de bovenste rij

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 2 & \downarrow & 2 & & \\ \hline & 1 & 3 & & \end{array}$$

Stap 8. Herhaal deze stappen tot het laatste getal

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 2 & \downarrow & 2 & 6 & \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \end{array}$$

We duiden aan dat het schema gestopt is door voor het laatste getal op de laatste rij 2 verticale strepen te zetten.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 1 & -4 & & -4 \\
2 & \downarrow & 2 & 6 & & 4 \\
\hline
 & 1 & 3 & 2 & || & 0
\end{array}$$

Het Hornerschema is nu afgerond. Wat kan je hier nu uit besluiten?

- Het laatste getal op de derde rij is een 0. Dat betekent dat we de factor $(x - a)$ gaan kunnen afzonderen, in dit geval zonderen we dus $(x - 2)$ af, omdat $a = 2$.
- De overblijvende factor kan je aflezen op de laatste rij. Hier staan immers de coëfficiënten van deze factor. Deze staan geordend van hoogste naar laagste, en zijn in exponent eentje minder dan de oorspronkelijke opgave (geen derdemacht, maar een tweedemacht).

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 1 & -4 & & -4 \\
2 & \downarrow & 2 & 6 & & 4 \\
\hline
 & 1 & 3 & 2 & || & 0 \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
 & x^2 & x & c^{te} & &
\end{array}$$

We lezen dus af dat de overblijvende factor is:

$$1 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 2$$

De eerste ontbinding is dan

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x - 2)(x^2 + 3x + 2)$$

We kunnen deze uitdrukking nog verder ontbinden door de factor $x^2 + 3x + 2$ te ontbinden met de discriminant. We vinden dat $D = 1$ en dat $x_1 = -1$ en $x_2 = -2$. De factor $x^2 + 3x + 2$ is dan gelijk aan $(x + 1)(x + 2)$. Dit kunnen we invullen en krijgen tenslotte:

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x - 2)(x^2 + 3x + 2) = (x - 2)(x + 1)(x + 2)$$

Opmerking

1. In de laatste stap hebben we de methode van de discriminant gebruikt om de overblijvende factor x^3+x^2-4x nog verder te ontbinden. Maar we hadden evengoed nog eens het schema van Horner kunnen toepassen, nu met $a = -1$ (of met $a = -2$) om de factor $(x + 1)$ (of om de factor $(x + 2)$) af te zonderen. Zie ook het 2de voorbeeld hieronder.

2. In plaats van eerst $(x - 2)$ af te zonderen, hadden we ook eerst $(x + 2)$ en daarna $(x - 2)$ kunnen afzonderen, of eerst $(x + 2)$ en dan $(x + 1)$ of ...

3. Welke waarde moet je voor a kiezen? Een goede tip is om de delers te proberen van de constante term. In dit eerste voorbeeld zijn de delers van -4: ±1, ±2 en ±4. Ga nu na of het beeld voor $x = 1$ nul is, m.a.w. is $f(a) = 0$? Stel, we kiezen $a = +1$, dan is $f(1) = (1)^3 + (1)^2 - 4(1) - 4 = -6 \neq 0$. Dus de factor kan niet afgezonderd worden. We proberen nu $a = +2$, dan is $f(2) = (2)^3 + (2)^2 - 4(2) - 4$=0. Dus de factor $(x - 2)$ kan afgezonderd worden.

4. In feite kan je wel de factor $(x-1)$ afzonderen, maar dan vinden we bij het schema van Horner niet als laatste getal 0, maar wel de rest. Dit is dus de rest die overblijft als je de veelterm x^3+x^2-4x deelt door $(x-1)$.

Voorbeeld 2 We werken een tweede voorbeeld volledig uit:

$$x^3-7x+6$$

Stap 1. Orden de machten van x van groot naar klein

Dit is reeds in orde.

Stap 2. Zorg dat elke macht van x voorkomt, anders vul je aan

De term voor x^2 ontbreekt. We vullen dus aan:

$$x^3-7x+6=x^3+0x^2-7x+6$$

Stap 3. Kies een waarde voor a

We proberen met $a=-1$.

Stap 4. Teken het Hornerschema

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ -1 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Uiteindelijk krijg je als uitgewerkt schema (doe dit zelf!):

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ -1 & \downarrow & -1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 \;\; || & 12 \end{array}$$

Het laatste getal is geen 0! Dat betekent dat we deze uitdrukking niet kunnen ontbinden met $a=-1$! We zullen dus een nieuwe a-waarde moeten kiezen, bijvoorbeeld $a=1$. We starten opnieuw.

Stap 5. Kies een nieuwe waarde voor a

We proberen met $a=1$.

Stap 6. Teken het Hornerschema

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Uitwerken geeft:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -7 & & 6 \\ 1 & \downarrow & 1 & 1 & & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & || & 0 \end{array}$$

Nu krijgen we wel een 0 en kunnen besluiten dat we kunnen ontbinden:

$$x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6)$$

We zijn nog niet klaar. Misschien kan je x^2+x-6 nog verder ontbinden. Je kan deze ontbinding doen met Horner of je kan ze doen met de methode van de discriminant. We passen nog eens Horner toe op $x^2 + x - 6$ met $a = -3$:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & -6 \\ -3 & & & \\ \hline & & & \end{array}$$

Uitwerken geeft:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & -6 & \\ -3 & \downarrow & -3 & 6 & \\ \hline & 1 & -2 & || & 0 \end{array}$$

We vinden een 0, dus is het ontbindbaar met $a = -3$. Dat betekent dat we de factor $(x+3)$ kunnen afzonderen. De overblijvende factor kan je aflezen op de onderste rij. Deze is in graad eentje lager dan de oorspronkelijke, dus van de eerste graad.

$$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$$

Vergeet niet dat dit niet de oorspronkelijke opgave was! We kunnen dit wel gebruiken door onze bevindingen in te vullen:

$$x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6) = (x-1)(x+3)(x-2)$$

Opmerking:

we hadden dus ook 2 maal na elkaar Horner kunnen toepassen; dit ziet er dan zo uit:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & & -7 & & 6 \\ 1 & \downarrow & 1 & & 1 & & -6 \\ \hline & 1 & 1 & & -6 & || & 0 \\ -3 & \downarrow & -3 & & 6 & & \\ \hline & 1 & -2 & || & 0 & & \end{array}$$

We kunnen dus de factor $(x-1)$ en de factor $(x-(-3)) = (x+3)$ afzonderen en krijgen terug als resultaat:

$$x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x+3)(x-2)$$

3.6 Regel van Horner - voorbeeld

Zie filmpje MOOC.

3.7 Test - ontbinden in factoren

TODO