Je leest nog enkele voorbeelden op het berekenen van integralen door middel van substitutie.

1. $\int e^{5x} dx$

   Stel je $u = 5x$ dan is $du = 5dx$.

   Je vervangt dan dx door $\frac{du}{5}$ en je bekomt

$$\int e^{5x} dx = \int e^u \frac{du}{5} = \frac{1}{5} \int e^u du = \frac{1}{5} e^u + C = \frac{1}{5} e^{5x} + C \ .$$

2. $\int \frac{dx}{1+9x^2}$

   Deze integraal lijkt sterk op $\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + C$.

   Stel $u = 3x$, dan is $du = \frac{du}{3}$ en je bekomt

$$\int \frac{dx}{1+9x^2} = \int \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{1+u^2} =$$

$$= \frac{1}{3} \arctan u + C = \frac{1}{3} \arctan(3x) + C \ .$$

3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{16-x^4}}$

   Als je substitutie $u = 16 - x^4$ overweegt dan bekom je $du = -4x^3 dx$. In de teller staat enkel x.

   De teller suggereert daarom eerder $u = x^2$ te gebruiken.

   Omdat je $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C$ kent schrijf je

$$16 - x^4 = 16 \left(1 - \frac{x^4}{16} \right) = 16 \left(1 - \left(\frac{x^2}{4} \right)^2 \right) \ .$$

   De integraal die je moet oplossen is dus

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{16-x^4}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{16 \left(1 - \left(\frac{x^2}{4} \right)^2 \right)}} = \frac{1}{4} \int \frac{xdx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{4} \right)^2}} \ .$$

   Stel $u = \frac{x^2}{4}$, dan is $du = \frac{xdx}{2}$ en dus $xdx = 2du$. De integraal wordt $\frac{1}{4} \int \frac{2du}{\sqrt{1-u^2}}$, dus

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{16-x^4}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2} \arcsin u + C = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{x^2}{4} \right) + C \ .$$

4. $\int \frac{(\arctan x)^3 dx}{1+x^2}$

   Stel $u = \arctan x$. Dan is $du = \frac{dx}{1+x^2}$ en je bekomt

$$\int \frac{(\arctan x)^3 dx}{1+x^2} = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{(\arctan x)^4}{4} + C \ .$$

Je merkt dat de juiste keuze maken bij substitutie wel wat oefenen vergt.