- Hoe bekom je de regel van partiële integratie uit de productregel voor het afleiden?
- Hoe gebruik je partiële integratie om onbepaalde integralen uit te rekenen?

(Deze uitleg en het eerste voorbeeld zou als filmpje op de MOOC kunnen geplaatst worden) De productregel voor het afleiden is

$$D(f(x)g(x)) = Df(x).g(x) + f(x).Dg(x)\ .$$

Je kunt dit ook schrijven als

$$f(x)Dg(x) = D(f(x)g(x)) - g(x)Df(x)\ .$$

Omdat per definitie $\int D(f(x)g(x))dx = f(x)g(x) + C$ bekom je hieruit

$$\boxed{\int f(x)Dg(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)Df(x)dx}$$

We noteren dit met differentialen. We stellen $u = f(x)$ en $v = g(x)$ zodat $du = Df(x)dx$ en $dv = Dg(x)dx$. Je bekomt dan

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

We passen dit nu toe op het beginvoorbeeld $\int x \sin x dx$.

Stel $u = x$ en $dv = \sin x dx$. Je vindt v uit $\int \sin x dx = -\cos x + C$ dus $v = -\cos x$. Er geldt $du = Dx.dx = dx$.

Je bekomt

$$\int x \sin x dx = \int udv = uv - \int vdu =$$

$$= -x\cos x - \int -\cos x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C\ .$$

Nog een voorbeeld: $\int xe^x dx$.

Stel $u = x$ en $dv = e^x dx$. Je vindt v uit $\int e^x dx = e^x + C$, dus $v = e^x$. Er geldt $du = dx$. Je bekomt

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C\ .$$

Het is belangrijk goed na te denken over de keuze van u en v. Voor het oplossen van $\int x \sin x dx$ zou je ook volgende keuze kunnen maken:

Stel $u = \sin x$ en $dv = xdx$. Uit $dv = xdx$ en $\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$ bekom je $v = \frac{x^2}{2}$. Uit $u = \sin x$ bekom je $du = \cos xdx$. Je bekomt

$$\int x \sin xdx = \frac{x^2}{2} \sin x - \int \frac{x^2}{2} \cos xdx \ .$$

Dit is correct, maar je moet $\int x \sin xdx$ vinden en je probeert dat te doen met $\int x^2 \cos xdx$. Deze laatste integraal is door de factor x^2 in plaats van de factor x moeilijker dan de integraal die je wil oplossen. Dit komt omdat je een verkeerde keuze maakt van u en van v. Je moet u afleiden en v vind je door te integreren. Dit moet er voor zorgen dat de integraal die je daarna nog moet uitrekenen er eenvoudiger uitziet dan de oorspronkelijke integraal.

Nog een voorbeeld : $\int x^2 \ln xdx$.

Als je x^2 gaat afleiden dan wordt dit $2x$; dit is eenvoudiger. Je moet dan wel $\ln x$ integreren maar je kent $\int \ln xdx$ mogelijk nog niet.

Als je x^2 gaat integreren dan wordt dit $\frac{x^3}{3}$; dit is moeilijker. Maar je moet dan $\ln x$ afleiden en $D(\ln x) = \frac{1}{x}$. Dit is veel eenvoudiger.

Daaruit volgt dat de laatste keuze toch de meest geschikte is.

$u = \ln x$ en dus $du = \frac{dx}{x}$.

$dv = x^2 dx$ en dus $v = \frac{x^3}{3}$.

Hieruit bekom je

$$\int x^2 \ln xdx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C \ .$$