KU LEUVEN

MASSIVE OPEN ONLINE COURSE

BASISWISKUNDE VOOR (STARTENDE) STUDENTEN

www.iiw.kuleuven.be/mooc-wiskunde

Inhoudsopgave

Module 1

Elementaire rekenvaardigheden A

0 Intro

Zie filmpje MOOC.

1 Wiskundige notaties

1.1 Overzicht van wiskundige notaties

Vergelijkingen en ongelijkheden

Notaties	Uitleg	Voorbeeld
$=$	is gelijk aan	$3 = 1 + 2$
$\neq$	is niet gelijk aan of verschillend van	$3 \neq 1 + 1$
$<$	is strikt kleiner dan	$2 < 3$
$>$	is strikt groter dan	$3 > 2$
$\leq$	is kleiner dan of gelijk aan	$3 \leq 4$ maar ook $4 \leq 4$
$\geq$	is groter dan of gelijk aan	$4 \geq 3$ maar ook $4 \geq 4$
$\approx$	is ongeveer gelijk aan	$\pi \approx 3$
$\sim$	is recht evenredig met; is proportioneel met (als de grootheid links stijgt, stijgt de grootheid rechts even sterk)	straal van een cirkel $\sim$ omtrek van een cirkel
$\iff$	als en slechts als; is equivalent met	$x - 1 = 0 \iff x = 1$

Bewerkingen en rekenen

Notaties	Uitleg	Voorbeeld
$+$	positief, plus of som	$+5,\ 1+3=4$
$-$	negatief, min of aftrekking	$-5,\ 3-1=2$
$\cdot$	maal of het product van	$2\cdot 3=6$
$/$ (soms ook :)	teller gedeeld door noemer = quotiënt	$6/2=3$
$\pm$	plusminus, boven en ondergrens	10 ± 1 betekent
	(wordt gebruikt bij meetfouten)	$10+1$ en $10-1$
$\|\ \|$	de absolute waarde van	$\|-3\|=\|3\|=3$
$\sqrt{\ }$	de vierkantswortel van	$\sqrt{9}=3$
!	faculteit	$3!=3\cdot 2\cdot 1=6$

Verzamelingen

Notaties	Uitleg	Voorbeeld
$\in$	is een element van	$3\in\mathbb{N}$
$\notin$	is geen element van	$-1\notin\mathbb{N}$
(,)	een koppel; xy-coördinaten	$(0,1)$
[,]	gesloten interval	$x\in[3,5] \iff x\geq 3$ en $x\leq 5$
] , [	open interval	$x\in]3,5[\iff x>3$ en $x<5$
[, [	half open interval langs rechts	$x\in[3,5[\iff x\geq 3$ en $x<5$
] ,]	half open interval langs links	$x\in]3,5] \iff x>3$ en $x\leq 5$
$\subset$	is een deelverzameling van	$\{0,2\}\subset\{0,1,2,3\}$
		$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$
$\cap$	doorsnede	$\{0,1,2\}\cap\{2,3\}=\{2\}$
		$\{0,2,4,\ldots\}\cap\{1,3,5,\ldots\}=\{\}=\emptyset$
$\cup$	vereniging of unie	$\{0,1,2\}\cup\{2,3\}=\{0,1,2,3\}$
$\setminus$	verschil (van verzamelingen)	$\{0,1,2,3\}\setminus\{0\}=\{1,2,3\}$
$\{\}=\emptyset$	de lege verzameling	Geen getal voldoet dus $x\in\emptyset$
$\|$	waarvoor geldt	De natuurlijke getallen die even zijn:
		$\{n\in\mathbb{N}\|n$ is even$\}$

Bekende getallen en verzamelingen

Notaties	Uitleg	Voorbeeld
i	de imaginaire eenheid	$i^2=-1$
π	het getal pi	$\pi=3,14159\ldots$
e	het getal van Euler	$e=2,71828\ldots$
	(wordt gebruikt bij exponentiële	
	en logaritmische functies)	
$\mathbb{N}$	verzameling der natuurlijke getallen	$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}$
$\mathbb{Z}$	verzameling der gehele getallen	$\mathbb{Z}$={...-3,-2,-1,0,1,2,3...}
$\mathbb{Q}$	verzameling der rationale getallen	$\frac{1}{3}\in\mathbb{Q}$
$\mathbb{R}$	verzameling der reële getallen	$\pi\in\mathbb{R}$
$\mathbb{C}$	verzameling der complexe getallen	$1+2i\in\mathbb{C}$

Opmerking

- Als n een natuurlijk getal voorstelt ($n \in \mathbb{N}$) dan is $2n$ een even getal en $2n+1$ een oneven getal.
- Soms mag het getal 0 niet meespelen, maar alle andere getallen wel. We noteren dit als $\mathbb{N}_0 = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Nog enkele voorbeelden zijn $\mathbb{R}_0$ en $\mathbb{R} \setminus 1$. In dit laatste geval mag het getal 1 niet meespelen.
- Een rationaal getal is het quotiënt (of breuk, verhouding, van het Latijn: ratio) van twee gehele getallen waarvan het tweede (dus de noemer) niet nul is. We kunnen dit noteren als:
$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}|a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$
- Zowel de natuurlijke als de gehele getallen kunnen als een quotiënt geschreven worden, en zijn dus ook rationale getallen. Er zijn echter getallen die we niet als quotiënt kunnen schrijven (zoals $\sqrt{2}$,e en π). We noemen ze de irrationale getallen en ze vormen samen met de rationale getallen de verzameling der reële getallen ($\mathbb{R}$).
- Als we tenslotte de verzameling met de reële getallen uitbreiden met de imaginaire eenheid i dan bekomen we de verzameling der complexe getallen
$$\mathbb{C} = \{a + bi|a, b \in \mathbb{R}\}$$

1.2 Absolute waarde

Het enige wat je moet onthouden over de absolute waarde is het volgende:

Definitie Voor $x \in \mathbb{R}$ is de absolute waarde gelijk aan

$$|x| = \begin{cases} -x \text{ als } x < 0 \\ x \text{ als } x \geq 0 \end{cases}$$

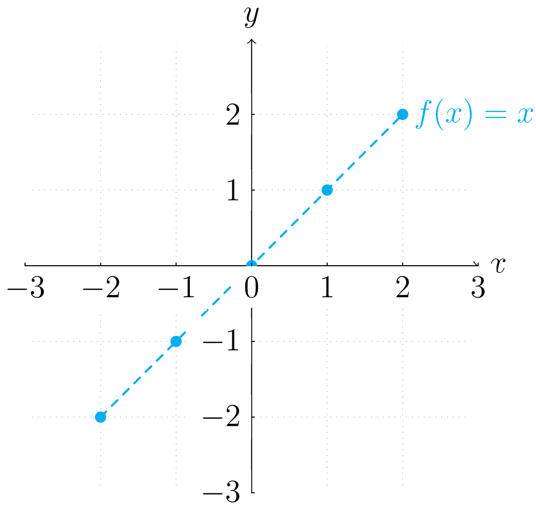
Ga zelf eens na wat er gebeurt als je voor x een negatief getal kiest. Met andere woorden: de absolute waarde is altijd positief (of 0). Een vaak voorkomende fout zien we bij volgende bewerkingen:

$$\sqrt{x^2} \neq x \text{ maar wel } \sqrt{x^2} = |x|$$

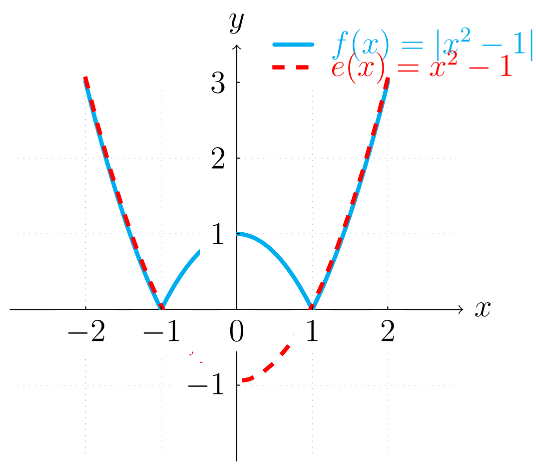
Ook hier kan je zelf gemakkelijk nagaan wat er gebeurt als je voor x een negatief getal kiest. Inderdaad, het minteken verdwijnt. Vandaar de absolute waarde van x.

Opmerking Let op! $x \in \mathbb{R}$

Voorbeeld 1 Zie Figuur .1



Figuur .1: Absolute waarde - voorbeeld 1.



Voorbeeld 2

Figuur .2: Absolute waarde - voorbeeld 2.

1.3 Sommatie

Een sommatie is het sommeren of optellen van een groep getallen. In de wiskunde wordt een sommatie aangegeven met de griekse hoofdletter sigma: $\sum$

Notatie Voor getallen $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$ voeren we volgende notatie in

$$\sum_{i=m}^{n} x_i = x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n$$

Voorbeeld 1

$$\sum_{i=1}^{100} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$$

De i duidt de index aan. Deze begint te tellen vanaf de ondergrens (in dit voorbeeld 1) tot en met de bovengrens (hier dus 100). Het verhogen gebeurt steeds in stapjes van 1.

Voorbeeld 2 Soms begint men liever vanaf nul te tellen. In dat geval kan je zelf gemakkelijk de formule en grenzen aanpassen:

$$\sum_{i=1}^{100} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$$

ordt dan

$$\sum_{i=0}^{99} (i+1) = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100$$

Hieronder worden nog een aantal andere voorbeelden gegeven. Je kan zelf ook eindeloos voorbeelden blijven bedenken.

Voorbeeld 3

$$\sum_{i=1}^{10} 4^i = 4^1 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{10}$$

$$\sum_{i=0}^{10} x^{2i} = x^0 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{20}$$

In de statistiek wordt vaak gebruik gemaakt van het gemiddelde. Om het gemiddelde $\overline{x}$ van n getallen te berekenen, maak je gebruik van volgende formule:

$$\overline{x} = \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

Door gebruik te maken van het sommatieteken kan je dit korter noteren:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_n$$

Hieruit volgt dat je een gemeenschappelijke constante (in dit geval $\frac{1}{n}$) gewoon buiten de eigenlijke sommatie kan plaatsen.

1.4 Sommatie - voorbeeld

Zie filmpje MOOC.

1.5 Faculteit

In dit onderdeel wordt dieper ingegaan op rekenen met faculteiten en indien mogelijk het vereenvoudigen van faculteiten.

Definitie De faculteit van een natuurlijk getal n, genoteerd als $n!$ (lees "n faculteit"), is gedefinieerd als het product van de getallen 1 tot en met n:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

De faculteit van n kan je ook met een recursief voorschrift schrijven: $n! = n(n-1)!$

We noemen een voorschrift recursief als er een verband bestaat met vorige resultaten: aangezien $5! = 120$ is, geldt

$$6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720$$

Maar dit recursief gedrag vraagt dat $1! = 1 \cdot 0!$ Daarom is per definitie gesteld dat:

Definitie $0!=1$

De faculteitsfunctie groeit snel, zelfs sneller dan een exponentiële functie. 20! is een getal van reeds 19 cijfers, terwijl 1000! zo'n 2568 cijfers telt.

Het getal n behoort tot de natuurlijke getallen en is dus altijd een positief geheel getal. Met dit in het achterhoofd kijken we even naar het volgende voorbeeld:

$$-(3!) = -(3 \cdot 2 \cdot 1) = -6$$

$(-3)!$ heeft geen betekenis want tussen de haakjes staat een negatief geheel getal en dit behoort niet tot de verzameling van natuurlijke getallen.

Voorbeeld 1

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

Let op! Je ziet dus dat je $\frac{6!}{3!}$ niet kan behandelen als een gewone breuk en dat bijgevolg 2! een foutief antwoord zou zijn.

Voorbeeld 2 Een meer algemeen voorbeeld is:

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n(n+1)$$

Als de faculteitsfunctie $n!$ zo snel toeneemt, dan zal $\frac{1}{n!}$ overeenkomstig ook snel afnemen.

Wiskundig kan je je dan afvragen wat er gebeurt als n oneindig groot wordt. Dit soort vragen zal leiden tot het limietbegrip en notaties als:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n!}$$

En wat zou er gebeuren mocht je al deze getallen bij elkaar optellen? Dus waaraan zou volgende som gelijk zijn:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = ?$$

Dit blijkt het getal $e = 2,718\ldots$ te zijn.

Andere toepassingen van de faculteitsfunctie vinden we terug in het vak statistiek en meer bepaald de combinatieleer. Een vaak voorkomende vraag is hier "op hoeveel verschillende manieren kan je k voorwerpen ordenen?" Een voorbeeld: je hebt 2 foto's op je bureau staan. Op hoeveel manieren kan je deze plaatsen? Het antwoord is op $2! = 2$ manieren. Met 3 foto's heb je $3! = 6$ manieren, en met 10 foto's zijn er al $10! = 3628800$ mogelijkheden.

1.6 Vectoren vs scalairen

Wat is een scalair?

In wetenschap en techniek gebruikt men vaak grootheden die volledig bepaald zijn door één reëel getal. Degelijke grootheden noemt men scalaire grootheden. Een scalaire grootheid heeft enkel een grootte.

Voorbeeld 1 $m = 20kg$ (massa), $V = 10l$ (volume), $T = 35°C$ (temperatuur)

Wat is een vector?

Definitie We definiëren een vector als een grootheid bepaald door een richting, een zin en een grootte.

Voorbeeld 2 $\vec{v} = 20m/s$ (snelheid), $\vec{F} = 5N$ (kracht), $\vec{E} = 20N/C$ (elektrisch veld)

Opmerking

- Een vector is een pijl die twee punten A en B verbindt. Vectoren worden genoteerd door een letter met een pijltje erboven bv. $\vec{v}$. We kunnen ook kiezen om het begin- en eindpunt op te nemen in de notatie. We noteren $\vec{v} = \vec{AB}$.
- Een vector $\vec{v}$ wordt volledig bepaald door de grootte, richting en de zin. Twee vectoren zijn dus identiek wanneer hun grootte, hun richting en hun zin dezelfde zijn.
- In het algemeen heeft een vector geen positie, men spreekt dan van een **vrije vector**. Het aangrijpingspunt is niet bepaald. De vrije vectoren behoren tot de verzameling V.
- De verzameling punten van het vlak noteren we door π. Kiest men in het vlak π een bevoorrecht punt O dan ontstaat het vlak π_O. Men legt dus de oorsprong vast in het vlak, en laat alle vectoren beginnen in de oorsprong. Het punt P in het vlak kunnen we bekijken als het eindpunt van deze vector, namelijk de vector $\vec{OP} = \vec{P}$. Een dergelijke vector noemen we in de wiskunde een **gebonden** vector, een **vaste** vector, een **puntvector** of een **plaatsvector**. De puntvectoren behoren tot de verzameling π_O.
- De vector $\vec{AA}$ wordt aangeduid met $\vec{O}$ en heeft als lengte 0. Zo een vector noemen we een **nulvector**. De samenstelling van een vector met een nulvector levert de oorspronkelijke vector op: $\vec{AB} + \vec{O}$. De nulvector is het neutraal element voor de optelling.
- Beschouwen we een vector $\vec{AB}$. De vector $\vec{BA} = -\vec{AB}$ met dezelfde richting en grootte, maar met tegengestelde zin wordt de tegengestelde vector genoemd. De samenstelling van een vector met zijn tegengestelde vector levert de nulvector op: $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{O}$.
- Een eenheidsvector is een vector met lengte één. Eenheidsvectoren worden vooral gebruikt om een richting aan te geven. Een vector met willekeurige niet-nulle norm kan worden gedeeld door zijn norm om zo een eenheidsvector te creëren. Dit proces staat bekend als het normaliseren van een vector. Een eenheidsvector wordt vaak aangeduid met een hoedje, zoals in $\hat{a}$ of ook door $\vec{e_1}$ (of $\vec{1_x}$ als het over de eenheidsvector volgens de x-as gaat).
$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{||\vec{a}||}$$
- De lengte of de norm van een vector $\vec{AB}$ of $\vec{v}$ noteert men door $||\vec{AB}||$ of $||\vec{v}||$.

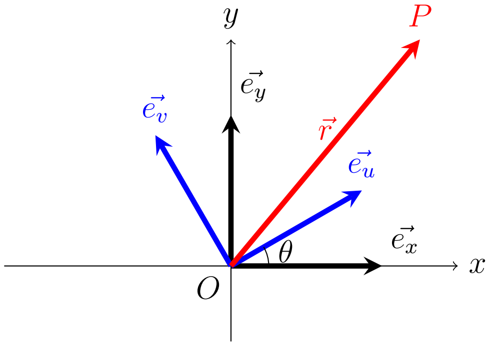
Bewerkingen met vectoren

De optelling

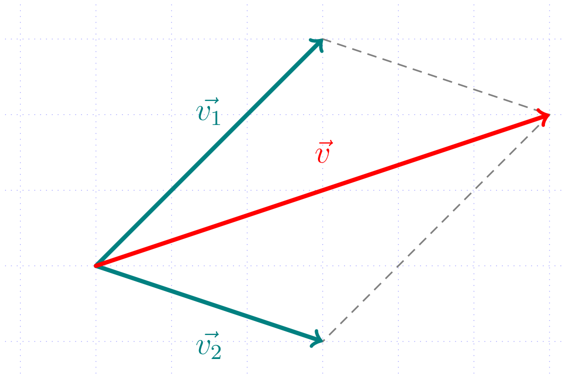
Definitie De som van twee vectoren is opnieuw een vector: $\vec{v_1} + \vec{v_2} = \vec{v}$

Het verschil van twee vectoren is opnieuw een vector. $\vec{v_1} - \vec{v_2} = \vec{v_1} + (-\vec{v_2}) = \vec{v}$

Opmerking Let op! $||\vec{v_1}|| + ||\vec{v_2}|| \neq ||\vec{v}||$



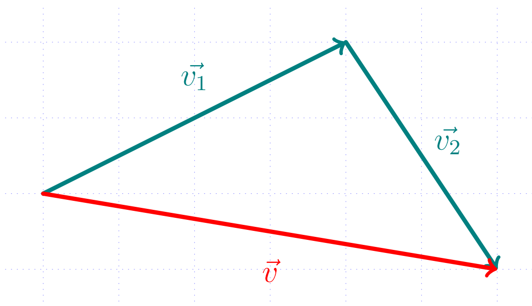
Figuur .3: Plaatsvector



Figuur .4: Parallellogramregel voor het bepalen van de som van 2 vectoren.

Het samenstellen van twee vectoren gebeurt volgens de **parallellogramregel**, zie Figuur .4. Wanneer we twee vectoren $\vec{v_1}$ en $\vec{v_2}$ (met een verschillende richting) willen optellen, dan construeren we een parallellogram. We plaatsen $\vec{v_1}$ en $\vec{v_2}$ zodat hun aangrijpingspunt samenvalt. De som $\vec{v_1} + \vec{v_2}$ wordt dan gegeven door de vector met het aangrijpingspunt en eindpunt het overstaand hoekpunt van de parallellogram.

Deze parallellogram constructie kan ook gebruikt worden voor het omgekeerde proces, namelijk het **ontbinden van een vector in 2 (of meerdere) componenten (dit zijn scalairen)**, elk volgens een bepaalde richting. Vaak wordt dan een gegeven vector ontbonden in een component volgens de x-as en een component volgens de y-as.



Figuur .5: Kopstaartregel voor het bepalen van de som van 2 vectoren.

Een andere manier om twee vectoren op te tellen, is deze kop aan staart te leggen, zie Figuur .5. We plaatsen de vector $\vec{v_2}$ zodat zijn beginpunt samenvalt met het eindpunt van de vector $\vec{v_1}$. De som wordt dan gegeven door de vector wijzend van het beginpunt van $\vec{v_1}$ naar het eindpunt van $\vec{v_2}$. Deze regel noemen we de **driehoeksregel** of de **kopstaartregel**.

De vermenigvuldiging van een vector met een scalair

Definitie Wanneer men een vector $\vec{v}$ vermenigvuldigt met een scalair k, krijgt men de nieuwe vector $k\vec{v}$.

De grootte van deze nieuwe vector is $k||\vec{v}||$.

De richting verandert niet, terwijl de zin omdraait als $k < 0$ (lees "als k negatief is").

Opmerking Let op! een scalaire vermenigvuldiging mag je niet verwarren met het scalair product (zie verder)

De vermenigvuldiging van twee vectoren

Definitie

1. het scalair product of inwendig product:

$$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = ||\vec{v_1}|| \cdot ||\vec{v_2}|| \cdot \cos\theta = \text{getal}$$

   Hierbij is θ de hoek tussen de 2 vectoren. Het scalair product is dus maximaal als beide vectoren in dezelfde richting wijzen (met andere woorden parallel zijn). En anderzijds is het scalair product nul als beide vectoren loodrecht op elkaar staan.

2. het vectorieel product, kruisproduct of uitwendig product:

$$\vec{v_1} \times \vec{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \text{vector}$$

De eigenschappen van de nieuwe vector zijn:

1. Over de richting van $\vec{a} \times \vec{b}$: het staat loodrecht op $\vec{a}$ en $\vec{b}$.
2. Over de zin van $\vec{a} \times \vec{b}$: $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{a} \times \vec{b}$ vormen een rechtshandig assenstelsel.
3. De norm van $\vec{a} \times \vec{b}$ is $||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \sin\theta$, waarin θ de hoek is tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$.

Het vectorieel product is dus maximaal als beide vectoren loodrecht op elkaar staan. En anderzijds is het vectorieel product nul als beide vectoren evenwijdig zijn (en dus dezelfde richting hebben).

1.7 Ontbinden van een vector - voorbeeld

Zie filmpje MOOC.

2 Bewerkingen

2.1 Volgorde van bewerkingen

Om een opgave juist te kunnen oplossen, is het noodzakelijk om de volgorde van de bewerkingen te respecteren:

1. **H**aakjes
2. **M**achten en worteltrekken
3. **W**issel van teken
4. **V**ermenigvuldigen en **d**elen (dezelfde prioriteit)
5. **O**ptellen en **a**ftrekken (dezelfde prioriteit)

Let op! Haakjes staan voor deelopgaven die je eerst moet maken, hierop moet je inzoomen.

Opmerking

- Bewerkingen met dezelfde prioriteit worden van links naar rechts uitgevoerd.
- Een ezelsbruggetje om dit te onthouden: **H**oe **M**oeten **W**ij **V**an **D**e **O**nvoldoendes **A**fkomen?
- Machtsverheffen gaat voor op tekenwisseling: als je -5^2 moet uitrekenen, doe je eerst $5^2 = 25$ en daarna pas je op het resultaat de tekenwisseling toe zodat het antwoord -25 wordt.
- Bedoel je echter het kwadraat van -5 dan noteer je $(-5)^2 = (-5).(-5) = 25$.

2.2 Volgorde van bewerkingen - voorbeeld 1

Zie filmpje MOOC.

2.3 Volgorde van bewerkingen - voorbeeld 2

Zie filmpje MOOC.

2.4 Rekenen met machten of exponenten

Wat is een macht?

De vermenigvuldiging is ingevoerd om de schrijfwijze bij een optelling te vereenvoudigen. Immers:

$$\underbrace{4+4+4+4+4+4}_{\text{6 maal}}$$

was vervelend om te schrijven. Omdat de 4 zesmaal voorkomt, werd dit $6 \cdot 4$.

Later werd er dan ook gedefinieerd wat het betekende om kommagetallen met mekaar te vermenigvuldigen.

Machten zijn ingevoerd om volgende schrijfwijzes eenvoudiger te maken:

$$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{\text{6 maal}}$$

In plaats van een som van dezelfde getallen, hebben we nu een product van dezelfde getallen.

Verkort geschreven wordt dit: 4^6

Een macht bestaat uit twee delen: een exponent, hier 6, en een grondtal, hier 4.

Het grondtal mag (mits enkele uitzonderingen) elk reëel getal zijn. De exponent mag eigenlijk (ook weer met enkele uitzonderingen) elk reëel getal zijn. Om de volgorde van bewerkingen uit te leggen, gebruiken we in dit hoofdstuk enkel natuurlijke (gehele) exponenten.

Voorbeeld 1

$$12 + 3^2 \cdot 4 : 2 - 8 : 4 + 3 - 5^2$$

Hoe pakken we dit nu aan? We zien dat er enkele machten in staan, dus die rekenen we eerst uit. Vervolgens rekenen we alle vermenigvuldigingen en delingen uit, van links naar rechts. Dan doen we alle optellingen en aftrekkingen, van links naar rechts.

$$\begin{aligned}
12 + \underbrace{3^2}_{9} \cdot 4 : 2 - 8 : 4 + 3 - \underbrace{5^2}_{25} &= 12 + \underbrace{9 \cdot 4}_{36} : 2 - \underbrace{8 : 4}_{2} + 3 - 25 && \text{vermenigvuldigen en delen} \\
&= 12 + \underbrace{36 : 2}_{18} - 2 + 3 - 25 && \text{vermenigvuldigen en delen} \\
&= \underbrace{12 + 18}_{30} - 2 + 3 - 25 && \text{optellen en aftrekken} \\
&= \underbrace{30 - 2}_{28} + 3 - 25 && \text{optellen en aftrekken} \\
&= \underbrace{28 + 3}_{31} - 25 && \text{optellen en aftrekken} \\
&= 31 - 25 && \text{optellen en aftrekken} \\
&= 6
\end{aligned}$$

2.5 Werken met haakjes

Wat als er haakjes staan?

Haakjes zijn nuttig om aan te duiden dat de bewerking ertussen eerst moet gebeuren. Haakjes zullen dus voorrang hebben op alles.

Onthoud Los eerst alles tussen de haakjes op!

Haken symboliseren in feite een deelopgave. Ze verplichten je eerst die deelopgave op te lossen, vooraleer je de grote oplossing mag starten.

Voorbeeld 1

$$6 \cdot (4 + 5) = 6 \cdot 9 = 54$$

In deze opgave is $(4 + 5)$ de deelopgave, dus die los je eerst op en je vult het resultaat in. Dan ga je gewoon verder met de rest van de opgave.

Even vergelijken wat er gebeurt als er geen haken staan, dus dan moet je eerst de vermenigvuldiging uitwerken:

$$6 \cdot 4 + 5 = 24 + 5 = 29$$

Iets totaal anders!

Let op: $6 \cdot (4 + 5) \neq 6 \cdot 4 + 5$

Voorbeeld 2

$$\begin{aligned} 20 : 4 \cdot 5 &= 20 : 20 = 1 \quad \text{is fout,} \\ 20 : 4 \cdot 5 &= 5 \cdot 5 = 25 \quad \text{is juist.} \end{aligned}$$

Dit soort fouten kan je voorkomen door (zelf) haakjes te gebruiken:

$$(20 : 4) \cdot 5 = 5 \cdot 5 = 25$$

Een andere manier om dit soort problemen te omzeilen is door "delen door 4" te vervangen door "vermenigvuldigen met een vierde" en vervolgens van links naar rechts te rekenen:

$$20 : 4 \cdot 5 = 20 \cdot \frac{1}{4} \cdot 5 = 25$$

Dit geldt ook voor de optelling en de aftrekking:

$$\begin{aligned} 5 - 3 + 1 &= 5 - 4 = 1 \quad \text{is fout,} \\ 5 - 3 + 1 &= 2 + 1 = 3 \quad \text{is juist.} \end{aligned}$$

Dit soort fouten kan je voorkomen door (zelf) haakjes te gebruiken:

$$(5 - 3) + 1 = 2 + 1 = 3$$

Een andere manier is om dit soort problemen te omzeilen is door "aftrekken van plus 3" te vervangen door "optellen met min drie" en vervolgens van links naar rechts te rekenen:

$$5 - 3 + 1 = 5 + (-3) + 1 = 3$$

Wat als er meerdere haakjes zijn?

Onthoud Soms kunnen er meerdere haakjes voorkomen. Er geldt dan de volgende regel: Bij meerdere haakjes, werk je eerst de binnenste uit, en dan werk je naar buiten.

Wat is er eigenlijk aan de hand? In de deelopgave van de buitenste haakjes staan er nog meer haakjes. Dit is in feite een deelopgave in een deelopgave.

1. Je start met die binnenste deelopgave.
2. Je vult de uitkomst van die deelopgave in.
3. Je gaat verder met de volgende deelopgave.
4. Je vult dit weer in.
5. Enzoverder!

Voorbeeld 3

$$((3+6)-4^2)\cdot 2$$

Dit voorbeeld heeft verschillende haken (deelopgaven). Je ziet de buitenste haken. Daar is de deelopgave dus:

$$((3+6)-4^2)$$

Binnen deze deelopgave staan nieuwe haken, dus die moet je weer eerst uitrekenen, we starten dus met het uitrekenen van de binnenste haken:

$$\begin{aligned}
\left(\underbrace{(3+6)}_{9}-4^2\right)\cdot 2 &= \left(9-\underbrace{4^2}_{16}\right)\cdot 2 && \text{machten binnen de haakjes}\\
&= \underbrace{(9-16)}_{-7}\cdot 2 && \text{haken}\\
&= -7\cdot 2 && \text{min maal plus is min}\\
&= -14
\end{aligned}$$

Let dus goed op in dit voorbeeld. Je moet haken altijd eerst uitrekenen, van binnen naar buiten.

Je moet een deelopgave (die binnen de haken staat) zelf behandelen als een opgave en dus de volgorde van bewerkingen daarbinnen toepassen.

2.6 Begrippen tegengestelde en omgekeerde van een getal

Tegengestelde

Het *tegengestelde* van een getal n is het getal dat opgeteld bij n, nul oplevert. Het tegengestelde van n wordt genoteerd met $-n$. Het tegengestelde van een getal heeft dus dezelfde absolute waarde als het gegeven getal maar met een tegengesteld teken. De som van een getal met zijn tegengestelde is dus steeds 0: $n+(-n)=0$.

Zo is het tegengestelde van 12 gelijk aan -12 omdat $12+(-12)=0$, en het tegengestelde van $-\sqrt{3}$ is $\sqrt{3}$ omdat $-\sqrt{3}+\sqrt{3}=0$.

Het tegengestelde van nul is nul. Dit is het enige getal waarvan het tegengestelde gelijk is aan zichzelf.

We zeggen dat 0 het *neutraal element* is met betrekking tot optellen.

(In de abstracte algebra is het tegengestelde het inverse element voor een bewerking die met een plusteken genoteerd wordt).

Omgekeerde

Het *omgekeerde* of de *reciproque* (vaker: de reciproke) van een getal of grootheid is 1 gedeeld door dat getal of die grootheid. Het omgekeerde van een breuk ontstaat door teller en noemer te verwisselen. Het omgekeerde van 7 is $1/7$ en het omgekeerde van $2/3$ is $3/2$. Passen we dit toe op enkele grootheden: de hertz is het omgekeerde van de seconde: $1\ \mathrm{Hz}=1/\mathrm{s}$ en de siemens is het omgekeerde van de ohm: $1\ \mathrm{S}=1/\Omega$.

Het product van een getal met zijn omgekeerde levert 1 op: $n \cdot \frac{1}{n} = 1$.

We zeggen dat 1 het *neutraal element* is voor de vermenigvuldiging. We zien ook dat nul geen omgekeerde heeft.

(In de abstracte algebra is het omgekeerde het inverse element voor een bewerking die met een vermenigvuldigingsteken genoteerd wordt).

Een interessante toepassing van het omgekeerde vinden we bij de deling waarbij de deler een breuk is. De deling kan dan ook uitgevoerd worden door het deeltal te vermenigvuldigingen met het omgekeerde van de deler.

Populair gezegd: delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde.

Voorbeeld 1

$$5 : 1/3 = 5 \cdot 3 = 15$$

2.7 Rekenen met wortels

Vierkantswortels

Het meest gekende type van wortel is de vierkantswortel. De vierkantswortel geeft de mogelijkheid om een antwoord te vinden op de vraag: welk getal heeft als kwadraat 4? Een mogelijk antwoord is het getal 2. De vierkantswortel is de 'omgekeerde' bewerking van het kwadraat.

$$\begin{array}{rclcrcl} \sqrt{9} & = & 3 & \text{want} & 3^2 & = & 9 \\ \sqrt{1} & = & 1 & \text{want} & 1^2 & = & 1 \\ \sqrt{0} & = & 0 & \text{want} & 0^2 & = & 0 \end{array}$$

$\sqrt{-4}$ bestaat niet, want er is geen reëel getal dat als kwadraat een negatief getal heeft.

Je ziet dus duidelijk dat je geen vierkantswortel kan nemen van een strikt negatief getal. Een kwadraat is immers altijd positief.

Een vierkantswortel kan je nemen van elk positief reëel getal. Je kan dus ook $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$ berekenen. Dit is geen 'mooi' getal, maar het kwadraat is wel 2.

Eigenlijk is er nog een tweede oplossing voor het probleem "Welk getal heeft als kwadraat 4?" Immers, -2 is ook een juiste oplossing. $(-2)^2 = 4$, want het kwadraat van een negatief getal is positief. We spreken echter af dat het symbool van de vierkantswortel altijd een positief getal uitdrukt. Wil je dan toch een negatief getal, dan schrijf je bijvoorbeeld $-\sqrt{4}$, je zet er dus een minteken voor.

Definitie Een vierkantswortel van een positief reëel getal x, genoteerd als $\sqrt{x}$, is een positief reëel getal dat als kwadraat het getal x heeft.

Vierkantswortels en kwadraten 'heffen mekaar op', of althans, dat lijkt zo: $\sqrt{3^2} = 3$. Maar laat je niet vangen! $\sqrt{(-2)^2}$ is niet gelijk aan -2, maar gelijk aan 2. **Vierkantswortels zijn altijd positief!** Reken voor de veiligheid altijd de haakjes uit, en gebruik niet een 'trucje' als de kwadraat en de wortel schrappen:

$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Derdemachtswortels

Als je een symbool hebt voor de omgekeerde bewerking van het kwadraat, is er ook eentje voor de derde macht. Dit noemen we de derdemachtswortel.

$$\begin{array}{rcrcrcr}
\sqrt[3]{8} & = & 2 & \text{want} & 2^3 & = & 8 \\
\sqrt[3]{1000} & = & 10 & \text{want} & 10^3 & = & 1000 \\
\sqrt[3]{1} & = & 1 & \text{want} & 1^3 & = & 1 \\
\sqrt[3]{0} & = & 0 & \text{want} & 0^3 & = & 0
\end{array}$$

Wat gebeurt er met negatieve getallen? Negatieve getallen hebben geen vierkantswortel, maar wel een derdemachtswortel. De derde macht van een negatief getal is zelf negatief, dus kan de omgekeerde bewerking wel!

$$\begin{array}{rcrcrcr}
\sqrt[3]{-8} & = & -2 & \text{omdat} & (-2)^3 & = & -8 \\
\sqrt[3]{-1} & = & -1 & \text{want} & (-1)^3 & = & -1
\end{array}$$

Net zoals bij vierkantswortels, hoeft een derdemachtswortel niet 'uit te komen', je kan het dus nemen van eender welk reëel getal.

Definitie Een derdemachtswortel van een reëel getal x, genoteerd als $\sqrt[3]{x}$, is het reële getal dat als 3de macht het getal x heeft.

Hogere machtswortels

Ook voor hogere machten bestaat er een omgekeerde bewerking, namelijk de hogere machtswortels. Deze noteer je op gelijkaardige manier. De vijfdemachtswortel van 2 noteer je dan:

$$\sqrt[5]{2}$$

Je moet hierbij het volgende onthouden:

Onthoud

- Een even machtswortel (waartoe ook de vierkantswortel behoort) kan je enkel nemen van positieve reële getallen en is zelf positief.
- Een oneven machtswortel kan je nemen van elk reëel getal, en kan dus positief of negatief zijn.

Rekenregel

De belangrijkste rekenregel met wortels is:

Rekenregel De wortel van een product, is het product van de wortels.

Voorbeeld 1

$$\begin{aligned}\sqrt{4\cdot 9} &= \sqrt{4}\cdot\sqrt{9} = 2\cdot 3 = 6\\ \sqrt[3]{2\cdot 27} &= \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{2}\cdot 3 = 3\sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

Je gebruikt deze regel erg vaak om wortels te vereenvoudigen. Bij het vereenvoudigen van een wortel probeer je wat er onder de wortel staat zo klein mogelijk te maken. Een mogelijke vraag is dus: vereenvoudig $\sqrt{200}$. Van 200 kan je niet gemakkelijk een vierkantswortel nemen. Er is echter een factor van 200 waarvan dat wel kan, namelijk 100, dus zonder je die factor af:

$$\sqrt{200} = \sqrt{100\cdot 2} = \sqrt{100}\cdot\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

Omdat $\sqrt{2}$ niet meer te vereenvoudigen is, is $10\sqrt{2}$ de meest eenvoudige vorm. Het is dus een kwestie van goede factoren te vinden die het nemen van een wortel makkelijker maken. Twee andere voorbeelden:

$$\begin{aligned}\sqrt{20} &= \sqrt{4\cdot 5} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{5} = 2\cdot\sqrt{5}\\ \sqrt{90} &= \sqrt{9\cdot 10} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{10} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{10}\end{aligned}$$

In feite breng je het ‘kwadraat buiten de vierkantswortel’. Deze regel werkt dus voor alle machtswortels, dus vierkantswortels, derdemachtswortels, enzoverder. Het enige waar je mee moet opletten is dat alles bestaat. Hou er rekening mee dat je vierkantswortels (en andere even hogere machtswortels) niet kan nemen van negatieve getallen.

Getallen die dezelfde wortel hebben, noemen we **gelijksoortig**. Zo zijn $2\sqrt{3}$ en $4\sqrt{3}$ gelijksoortig, maar zijn $4\sqrt{5}$ en $2\sqrt{2}$ dat niet. Gelijksoortige getallen kan je optellen: Het werkt een beetje zoals eenheden. Je kan $3m^2$ en $5m^2$ optellen, maar $3m^2$ en $8cm^2$ niet zo gemakkelijk. Dan moet je ze eerst omzetten. Dat doe je dan ook bij wortels door ze te vereenvoudigen:

$$\sqrt{27} + 2\cdot\sqrt{3} = \sqrt{9\cdot 3} + 2\cdot\sqrt{3} = 3\cdot\sqrt{3} + 2\cdot\sqrt{3} = 5\cdot\sqrt{3}$$

Onthoud

Heel belangrijk! Er bestaat geen regel voor de wortel van een som!

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Een voorbeeld dat dit inderdaad niet klopt:

- $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
- $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

Maak dus niet de fout om $\sqrt{x^2+4}$ gelijk te stellen aan $x+2$!

Rationale exponenten

We hebben bij machten reeds gesproken over natuurlijke en gehele exponenten. Rationale getallen kunnen ook een exponent vormen. Dit zullen uiteindelijk een type wortel zijn. Een eerste rationale macht heb je al gezien, een voorbeeld:

$$2^{1/2} = \sqrt{2}$$

De exponent $1/2$ symboliseert de vierkantswortel. De exponent $1/3$ zal de derdemachtswortel symboliseren.

Definitie

- De noemer van de breuk van een rationale exponent symboliseert een machtswortel.
- De teller van de breuk van een rationale exponent symboliseert een macht.

Wat betekent dit nu? Als ik een getal, zeg 5, verhef tot een breuk, zeg $2/3$, dan doe ik twee dingen:

1. De noemer van de breuk is 3, dus ik moet een derdemachtswortel nemen.
2. De teller van de breuk is 2, dus ik moet een tweede macht nemen (een kwadraat dus).

Bijgevolg:

$$5^{2/3} = (\sqrt[3]{5})^2 \text{ of } \sqrt[3]{5^2}$$

Belangrijk is dat het getal dat je tot de macht verheft, zowel een wortel als een macht over zichzelf heen krijgt, de volgorde van de twee maakt niet uit. Vaak gebruiken we de eerste schrijfwijze, omdat het dan duidelijker is als er vereenvoudigingen mogelijk zijn:

$$8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = (2)^2 = 4$$

In symbolen:

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Breuken kunnen negatief zijn. Dezelfde regel als bij negatieve exponenten geldt ook voor breuken. Je neemt de positieve breuk als exponent, maar zet het geheel in de noemer van een breuk:

$$2^{-2/3} = \frac{1}{2^{2/3}}$$

Rekenregel

1. De macht van een product is het product van de machten.

$$(8 \cdot 5)^{\frac{4}{3}} = 8^{\frac{4}{3}} \cdot 5^{\frac{4}{3}}$$

2. Product van machten met hetzelfde grondgetal is grondgetal verheffen tot som van de exponenten.

$$\begin{aligned} 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} &= 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}+\frac{2}{6}} = 2^{\frac{5}{6}} \\ 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{-1}{3}} &= 3^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

3. Macht tot een macht verheffen is grondgetal verheffen tot product van de exponenten.

$$\begin{aligned} (2^{\frac{2}{3}})^2 &= 2^{\frac{2}{3}\cdot 2} = 2^{\frac{4}{3}} \\ (3^{\frac{3}{4}})^{\frac{2}{5}} &= 3^{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}} = 3^{\frac{6}{20}} = 3^{\frac{3}{10}} \\ (5^{\frac{3}{2}})^2 &= 5^{\frac{3}{2}\cdot 2} = 5^3 = 125 \end{aligned}$$

4. Een breuk tot een macht verheffen is tellen en noemer tot die macht verheffen.

$$(\frac{5}{7})^{\frac{3}{4}} = \frac{5^{\frac{3}{4}}}{7^{\frac{3}{4}}}$$

2.8 Rekenen met breuken

Een breuk is een bijzondere schrijfwijze van een rationaal getal. Een breuk laat ons toe om elk rationaal getal nauwkeurig te noteren. Eenvoudige rekentoestellen geven steeds kommagetallen weer (die al dan niet rationale getallen voorstellen). Een kommagetal is echter vaak een afronding en daarom niet steeds nauwkeurig genoeg. Rekenen met kommagetallen is voor veel mensen een stuk gemakkelijker dan rekenen met breuken, maar omdat breuken nodig zijn om nauwkeurig te kunnen rekenen, moet je de basisbewerkingen ook goed kunnen uitvoeren bij breuken.

Gelijke breuken

Een breuk stelt steeds een quotiënt voor. Een quotiënt is een deeltal gedeeld door een deler. Bijvoorbeeld:

$$4 : 2$$

Hier is 4 het deeltal, en 2 de deler. In breukvorm zou dit zijn:

$$\frac{4}{2}$$

Een breuk bestaat uit een teller (boven), een breukstreep en een noemer (onder). Er gelden de volgende overeenkomsten:

- teller = deeltal

- breukstreep = ‘gedeeld door’-teken
- noemer = deler

Het kan ook met haakjes $(4+5):2 = \frac{4+5}{2}$.

Het deeltal is hier $(4+5)$ (omdat het tussen haakjes staat), en de deler is hier 2. Je merkt dus dat in de volgorde van bewerkingen, je eerst de teller moet uitrekenen, en dan pas het quotiënt mag maken!

Als je de bewerking 18 : 4 uitvoert, vind je dezelfde oplossing als 9 : 2, namelijk 4,5. Deze quotiënten worden voorgesteld door breuken, we zeggen dan ook dat deze breuken **gelijk** zijn:

$$\frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

Je kan gelijke breuken maken door in teller **EN** noemer te vermenigvuldigen of te delen door hetzelfde getal. Je zoekt de **grootste gemene deler**, afgekort ggd, van teller en noemer. (De ggd van 2 getallen is het grootste getal dat beide getallen deelt.)

$$\frac{36}{48}$$

De teller is 36, de noemer is 48. Ze hebben als grootste gemene deler 12 (maak je geen zorgen als je dit niet meteen ziet). Dat betekent dus dat je de teller en de noemer kan delen door 12 en toch een gelijke breuk bekomt:

$$\frac{36}{48} = \frac{3}{4}$$

Vaak zie je deze stap niet zo snel in 1 keer. Een breuk kan ook in meerdere keren aangepast worden. Zo zie je misschien niet meteen de ggd 12, maar heb je vast wel de gemeenschappelijke deler 2 gezien. Je kan de oefening dus stapsgewijze oplossen door telkens een nieuwe deler te vinden.

$$\frac{36}{48} = \frac{18}{24} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

De volgorde waarin je deze delers vindt, maakt niet uit. Zo had je bijvoorbeeld ook eerst kunnen delen door 3. De grootte is ook van geen belang. Misschien had je 6 als gemene deler gevonden. Het enige wat belangrijk is, is:

> Onthoud Je verkrijgt gelijke breuken door teller en noemer te **delen of vermenigvuldigen met hetzelfde getal**.

Een breuk waarbij de teller en noemer geen gemeenschappelijke delers meer hebben, noemen we een **vereenvoudigde breuk**. Bij veel opgaven wordt gevraagd of verwacht men om de breuk zo ver mogelijk te vereenvoudigen. Vergeet dit dus niet!

Breuken optellen en aftrekken

De belangrijkste regel hier is:

Rekenregel Enkel breuken op dezelfde noemer kan je optellen of aftrekken.

Breuken met dezelfde noemer tel je op door de tellers op te tellen en de **noemer te houden**. De noemer verandert dus niet! Voor aftrekken geldt dezelfde regel, maar moet je natuurlijk de tellers van mekaar aftrekken.

$$\begin{aligned} \frac{3}{5}+\frac{4}{5} = &= \frac{3+4}{5} = \frac{7}{5} \\ \frac{3}{5}-\frac{4}{5} = &= \frac{3-4}{5} = \frac{-1}{5} \end{aligned}$$

Natuurlijk zullen breuken niet altijd dezelfde noemer hebben. Omdat panikeren geen optie is, moet je de noemers gelijk maken. Je kan dit doen door bij elke breuk apart, teller en noemer met hetzelfde getal te vermenigvuldigen, en zo dat de noemers gelijk worden. Bijvoorbeeld:

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{8}$$

Je wilt dat beide breuken een gelijke noemer hebben. We zoeken die gemeenschappelijke noemer. Het gemakkelijkste is als gemeenschappelijke noemer het product te nemen van de noemers, namelijk $6 \cdot 8 = 48$.

We maken dus in de eerste breuk $\frac{5}{6}$ de noemer 48 door de noemer te vermenigvuldigen met 8. Om de breuk gelijk te maken, moeten we ook de teller vermenigvuldigen met 8. Voor de tweede breuk doen we hetzelfde, maar nu vermenigvuldigen we teller en noemer met 6:

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 8}{6 \cdot 8} = \frac{40}{48} \text{ en } \frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 6}{8 \cdot 6} = \frac{42}{48}$$

We hebben nu twee breuken met gelijke noemer, dus kunnen we die optellen. Alles tesamen:

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{8} = \frac{40}{48}+\frac{42}{48} = \frac{40+42}{48} = \frac{82}{48} = \frac{41}{24}$$

De laatste stap is een vereenvoudiging! Dit was hier toevallig mogelijk door teller en noemer te delen door 2. Probeer telkens je einduitkomst zo ver mogelijk te vereenvoudigen!

Een tweede manier om een gelijke noemer te krijgen is door de methode van het kleinste gemene veelvoud, afgekort kgv. (Het kgv van 2 getallen is het kleinste getal dat een veelvoud is van allebei de getallen.) Het kgv van 6 en 8 is 24. 24 is een veelvoud van 6, maar ook van 8. Het is bovendien het kleinste getal dat zulk een veelvoud is. We kiezen dus als gemeenschappelijke noemer het getal 24. Dat betekent dat we in de breuk $\frac{5}{6}$ moeten vermenigvuldigen met 4, en voor de breuk $\frac{7}{8}$ teller en noemer vermenigvuldigen met 3:

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{20}{24} \text{ en } \frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{21}{24}$$

Opnieuw vinden we twee breuken met gelijke noemers, die kunnen we dus optellen:

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{8}=\frac{20}{24}+\frac{21}{24}=\frac{41}{24}$$

De uitkomst is meteen in vereenvoudigde vorm. Dit heb je vaak als je de methode van het kgv toepast. Dit is niet altijd even gemakkelijk. Je mag zelf kiezen hoe je het doet.

Tot slot nog een voorbeeld met drie breuken:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{9} &= \left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\right)+\tfrac{1}{9} && \text{sommen en verschillen van links naar rechts}\\
&= \left(\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 3}-\tfrac{1\cdot 2}{3\cdot 2}\right)+\tfrac{1}{9} && \text{de gemeenschappelijke noemer wordt } 2\cdot 3\\
&= \left(\tfrac{3}{6}-\tfrac{2}{6}\right)+\tfrac{1}{9} && \\
&= \left(\tfrac{3-2}{6}\right)+\tfrac{1}{9} && \text{breuken met dezelfde noemer}\\
& && \text{aftrekken door verschil van tellers}\\
&= \tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{9} && \\
&= \tfrac{1\cdot 3}{6\cdot 3}+\tfrac{1\cdot 2}{9\cdot 2} && \text{gemeenschappelijke noemer wordt het}\\
& && \text{kgv van 6 en 9: } 18=6\cdot 3=9\cdot 2\\
&= \tfrac{3}{18}+\tfrac{2}{18} && \\
&= \tfrac{3+2}{18} && \text{breuken met dezelfde noemer optellen door som van tellers}\\
&= \tfrac{5}{18} &&
\end{aligned}$$

Bij deze opgave had je in plaats van het kgv van 6 en 9 ook gewoon $6\cdot 9=54$ als gelijke noemer kunnen nemen. Dat is wel al een groot getal om mee te rekenen. Bovendien zou je de einduitkomst moeten vereenvoudigen. Probeer waar mogelijk het kgv te nemen.

Onthoud Breuken kan je enkel optellen of aftrekken als je ze op gelijke noemer brengt!

Breuken vermenigvuldigen

Breuken vermenigvuldigen is een stuk eenvoudiger dan breuken optellen.

Rekenregel Je vermenigvuldigt gewoon tellers met tellers, en noemers met noemers.

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{8}{15}$$

Je kan natuurlijk ook breuken vermenigvuldigen met gehele getallen:

$$3\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3\cdot 1}{1\cdot 4}=\frac{3}{4}$$

Tegengestelde van een breuk

Het tegengestelde van een breuk bereken je door het minteken in de teller te zetten. Dit is duidelijker in een voorbeeld:

$$-\frac{3+5}{7} = \frac{-(3+5)}{7}$$

Merk op dat ik de teller zelf tussen haakjes zet. Je moet immers de min voor de **HELE** teller zetten. Veel studenten maken immers de volgende fout:

$$-\frac{3+5}{7} = \frac{-3+5}{7}$$

Dit is NIET juist!

> **Onthoud** Een minteken voor de breuk zet je voor de hele teller. Gebruik haakjes!

Omgekeerd moet je dus ook opletten, als er 1 getal in de teller een minteken heeft, mag je dat minteken niet zomaar zonder meer voor de hele breuk plaatsen!

$$\frac{-2+5}{4} \neq -\frac{2+5}{4}$$

Het minteken in kwestie mag je ook uit de noemer halen zoals in volgend voorbeeld:

$$\frac{6}{-5} = -\frac{6}{5}$$

Maar net zoals met de teller, vergis je niet:

$$\frac{6}{-2+3} \neq \frac{6}{2+3}$$

Breuken delen

Breuk delen door een getal

> **Onthoud** Een breuk gedeeld door een getal is de noemer vermenigvuldigen met dat getal.

Toegepast in een voorbeeld:

$$\frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$$

Je plaatst het getal waar je door deelt mee in de noemer. Merk op dat je de hele noemer vermenigvuldigt met dat getal:

$$\frac{2}{3+2} : 5 = \frac{2}{(3+2)\cdot 5} = \frac{2}{25}$$

Delen door een breuk

Volgende regel geldt:

Rekenregel Delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk.

Dit is een eenvoudig toe te passen regel:

$$\begin{aligned} \tfrac{4}{5} : \tfrac{2}{3} &= \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{3}{2} && \text{delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk} \\ &= \tfrac{12}{10} && \text{breuken vermenigvuldigen is tellers en noemers vermenigvuldigen} \\ &= \tfrac{6}{5} && \text{teller en noemer zijn deelbaar door 2} \end{aligned}$$

Soms is de deling niet geheel duidelijk als er breuken in een breuk staan:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}$$

Belangrijk is dat je een goede scheiding maakt tussen tellers en noemers, maak je breukstreep breed genoeg. Deze breuk symboliseert de deling.

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$$

Dus eigenlijk:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$$

2.9 Rekenen met logaritmen

Een logaritme wordt gedefinieerd als:

Definitie Voor $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$ en $x \in \mathbb{R}_0^+$ geldt dat

$$\log_a(x) = y \text{ als en slechts als } a^y = x$$

a noemen we het grondtal, dat strikt positief en verschillend van 1 dient te zijn. x dient een strikt positief reëel getal te zijn.

Om de uitkomst van $\log_a(x) = y$ te vinden, stel je jezelf de vraag:

Tot welke macht y moet ik a verheffen om x te bekomen?

Voorbeeld 1 $\log_2 8 = 3$ omdat 3 de macht is waartoe ik 2 dien te verheffen om 8 te bekomen.

Voorbeeld 2 Andere voorbeelden:

$$\begin{aligned}
\log_{10}(100) &= 2 \\
\log_4(16) &= 2 \\
\log_3(9) &= 2 \\
\log_3(\sqrt{3}) &= \log_3(3^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \\
\log_5(\frac{1}{5}) &= \log_5(5^{-1}) = -1
\end{aligned}$$

Bijzondere gevallen

De *tiendelige* of *Briggse* logaritme is de logaritme met grondtal 10.

Vaak laat men het grondtal 10 weg in de notatie:

Definitie Voor $x \in \mathbb{R}_0^+$ geldt dat

$$\log(x) = y \text{ als en slechts als } 10^y = x.$$

De *natuurlijke* of *Neperiaanse* logaritme is de logaritme met grondtal e, met $e = 2.71828182845\ldots$.

Definitie Voor $x \in \mathbb{R}_0^+$ geldt dat

$$\ln(x) = y \text{ als en slechts als } e^y = x.$$

Tot slot:

Rekenregel

$$\log_a a = 1$$

aangezien de macht waartoe ik a dien te verheffen om a te bekomen, 1 is.

$$\log_a 1 = 0$$

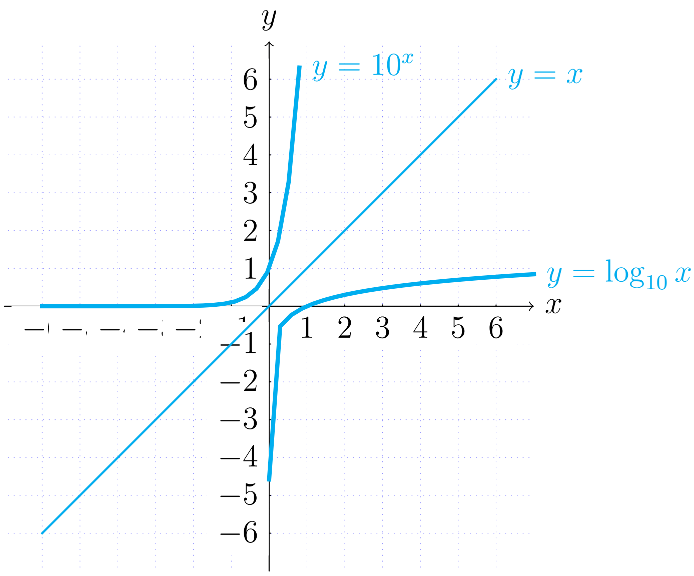
onafhankelijk voor de waarde van a (met $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$) aangezien 0 de macht is waartoe ik a dien te verheffen om 1 te bekomen.

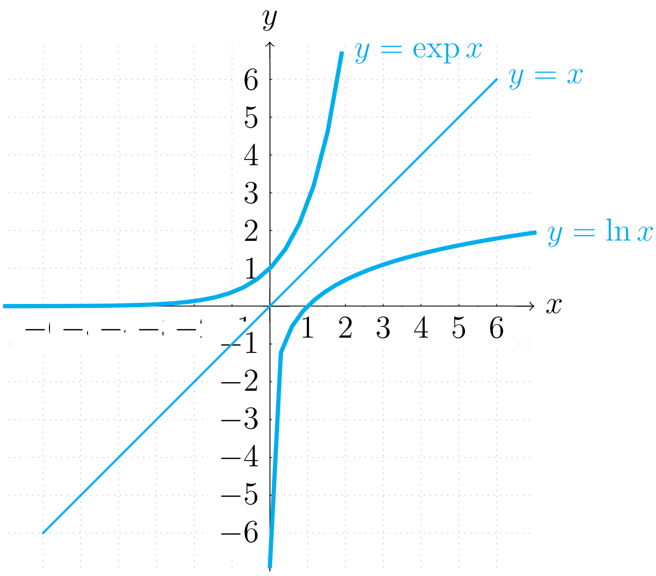
Grafische voorstelling

$y = \log_a(x)$ is de inverse functie van $y = a^x$. Grafisch uit zich dit door spiegeling van de grafieken tegenover de eerste bissectrice $y = x$.

Grafische voorstelling van de Neperiaanse logaritme

$y = \ln x$ is de inverse functie van $y = e^x$. Grafisch uit zich dit door spiegeling van de grafieken tegenover de eerste bissectrice $y = x$.


y
$y = 10^x$
$y = x$
$y = \log_{10} x$
x
1 2 3 4 5 6
6 5 4 3 2 1
−1 −2 −3 −4 −5 −6


y
$y = \exp x$
$y = x$
$y = \ln x$
x
1 2 3 4 5 6
6 5 4 3 2 1
−1 −2 −3 −4 −5 −6

Rekenregels

Rekenregel

$$\begin{aligned}
\log_a(x \cdot y) &= \log_a(x) + \log_a(y) \\
\log_a(\frac{x}{y}) &= \log_a(x) - \log_a(y) \\
\log_a(x^n) &= n \cdot \log_a(x) \\
\log_a(\sqrt[n]{x}) &= \frac{1}{n}\log_a(x) \\
\log_a(b) &= \frac{1}{\log_b(a)}
\end{aligned}$$

2.10 Algebra: het rekenen met letters

Gebruik van letters in de wiskunde

De algebra is de kunst van het rekenen met letters. Die letters stellen meestal getallen voor, en met getallen weet je hoe je kan rekenen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Bij algebra voeren we dat soort operaties ook uit, alleen gebruiken we daarbij niet alleen getallen, maar ook *variabelen*. Dat zijn als het ware 'dingen' waarvan we de waarde (nog) niet kennen of waarbij zo'n 'ding' meerdere waarden kan aannemen. Voor de variabelen gebruiken we letters.

In de algebra worden vervolgens allerlei verbanden en structuren onderzocht. Welke regels en eigenschappen gelden er, wat mag wel en wat mag niet? Verzamelingen spelen hierbij een grote rol, maar ook afbeeldingen. Door gebruik te maken van variabelen, vergelijkingen, en dergelijke meer is het mogelijk 'algemene' uitspraken te doen over verzamelingen en operaties. Bekende eigenschappen van rekenen met getallen zijn de commutatieve eigenschap en de distributieve eigenschap.

Voorbeeld 1 In het algemeen geldt voor het optellen en vermenigvuldigen van a en b (natuurlijke getallen) dat:

$$a + b = b + a \text{ en } a \cdot b = b \cdot a$$

Dat lijkt vanzelfsprekend, maar dat is het niet. Bij de operatie delen geldt het bijvoorbeeld niet! (12 : 4 is niet hetzelfde als 4 : 12)

Een andere bekende eigenschap is de distributiviteit:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Dat gebruiken we heel vaak, maar mag dat zomaar, wanneer wel, wanneer niet?

Geldt dit bijvoorbeeld?

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)???$$

Met variabelen kunnen we ook *formules* opstellen. Stel dat we de straal van een cirkel voorstellen door de letter r. Dan is de omtrek $= 2\pi r$ en de oppervlakte $= \pi r^2$. Nu kunnen we voor eender welke cirkel zijn omtrek en oppervlakte berekenen door de waarde van r te vervangen (we zeggen te *substitueren*) door een getal.

Een *uitdrukking* is een geheel van termen bestaande uit getallen, variabelen, bewerkingstekens (zoals $+$, $-$, $\cdot$, $:$) en andere wiskundige tekens (zoals haakjes): $2\pi r$, $3 - 8$, $2x + 5$, ...

Vervolgens kunnen we twee uitdrukkingen aan elkaar gelijk stellen. We spreken dan van een *vergelijking*. Vergelijkingen kunnen vaak worden afgeleid uit een stukje tekst (de klassieke vraagstukjes). Als een vergelijking een variabele bevat, dan kunnen we trachten de waarde (of alle waarden) van de variabele te vinden waardoor er een ware bewering ontstaat als we de variabele vervangen door de gevonden waarde(n). Dit wordt *oplossen van de vergelijking* genoemd. De waarde van de variabele heet in dit geval *de wortel* of *de oplossing* van de vergelijking.

Een formule kan (en mag) meerdere variabelen en onbekenden bevatten.

Voorbeeld 2 De oppervlakte van een rechthoek is $b \cdot h$ waarbij b de basis is, en h de hoogte.

Als je nu gegeven krijgt dat b gelijk is aan 4 en h gelijk is aan 2 (we gebruiken even geen eenheden ter vereenvoudiging), dan kan je de oppervlakte berekenen door de letters te substitueren, door ze te vervangen door de echte waarden of echte getallen:

$$\text{oppervlakte} = b \cdot h = (4) \cdot (2) = 8$$

Hoewel het hier niet echt nodig was, hebben we toch de gesubstitueerde getallen tussen haken gezet. Je doet dit om aan te duiden dat je de letter in zijn geheel vervangt door het getal. Bij moeilijke formules maakt dit wel degelijk veel uit! Stel, je wil de oppervlakte van een andere rechthoek berekenen, en je hebt gegeven dat de hoogte 2 meer moet zijn dan de basis, of met andere woorden, $h = b + 2$. Over de basis weet je nog niets. Je kan dus enkel h vervangen:

$$\text{oppervlakte} = b \cdot h = b \cdot (b + 2)$$

Je ziet dus dat de letter h volledig vervangen is door $b + 2$, gesymboliseerd door de haakjes.

Voorbeeld 3 Ik heb een pot verf waarmee een oppervlakte van $5m^2$ kan geschilderd worden. Hoeveel ronde tafeltjes kan ik hiermee een likje verf geven? De diameter van de tafeltjes is 1 m.

Oplossing:

We zoeken het aantal tafeltjes die volledig geschilderd kunnen worden. Stel deze onbekende variabele voor door bijvoorbeeld x (gevraagd).

We hebben voldoende verf om $5\ m^2$ te schilderen (gegeven).

De diameter d van een tafeltje is 1 meter: $d = 1\ m$ (gegeven). De straal r van een cirkel is de helft van de diameter, dus $2r = d$, zodat de oppervlakte s van 1 tafeltje gelijk is aan:

$$\begin{aligned} s = \pi r^2 &= \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \\ &= \frac{\pi d^2}{4} \\ &= \frac{\pi(1)^2}{4} \\ &= 0,79\ m^2 \end{aligned}$$

We stellen de vergelijking op, nl. $5 = x.s$, en lossen deze tenslotte op naar de onbekende variabele:

$$x = \frac{5}{s} = \frac{5}{0,79} = 6,37$$

Besluit: we kunnen 6 tafeltjes schilderen (en dan blijft er nog een klein beetje verf over).

Manier van rekenen

Notaties

- In het rekenen met letters wordt het puntje van de vermenigvuldiging vaak niet geschreven. In plaats van $a \cdot b \cdot c$ schrijf je abc. Of, in plaats van $2 \cdot b$ schrijf je $2b$. Het puntje schrijven is niet fout, maar hoeft niet.
- Letters schrijf je achteraan in een uitdrukking, dus $b \cdot 2 \cdot c$ schrijf je best als $2bc$. (Dit mag, want in een product mag je factoren van plaats verwisselen.)
- Vaak worden de letters die voorkomen ook in alfabetische volgorde geschreven. Bijvoorbeeld yxz schrijf je beter als xyz.

Deze notaties maken het meestal gemakkelijker om verder te rekenen, en als je je aan deze manier van schrijven houdt, ziet alles er meer netjes uit. Het is niet absoluut verplicht om te doen, maar wel aan te raden.

Eentermen en veeltermen

Een eenterm is een uitdrukking die uit 1 term bestaat, een veelterm bestaat uit meerdere termen, logisch toch? I.p.v. een veelterm spreken we ook over een polynoom.

Voorbeeld 4 a en $4abcx$ zijn eentermen; $x^2 + 3x + 1$ en $b - x$ zijn veeltermen

Som en verschil

Je kan de som of het verschil van eentermen maken, maar enkel als de letters of lettercombinatie in de eenterm gelijk is. Lijkt een cryptische regel, maar dat is het niet.

Voorbeeld 5

$a + 3a$	$=$	$4a$	Dit gaat perfect, want de letters zijn gelijk.
$a + 2b$	$=$	?	Dit gaat niet, a en b zijn verschillende letters.
$2ab + bc$	$=$	?	Dit gaat niet want ab en bc zijn verschillende lettercombinaties.
$3ab - ab$	$=$	$2ab$	Dit gaat perfect, want de lettercombinaties zijn gelijk.
$ab + ba$	$=$	$ab + ab = 2ab$	Ook dit gaat, al is het met een omweg. Door te sorteren zie je dat de lettercombinaties gelijk zijn.
$a + a^2$	$=$	?	Dit gaat niet, want de lettercombinaties zijn niet gelijk, eentje is een a en de andere is a^2.

Let dus goed op bij het optellen van letters of combinaties, en sorteer de letters om gelijkaardige combinaties te zien.

Het optellen van veeltermen is een uitbreiding van deze regel. Gelijksoortige eentermen (dus met dezelfde lettercombinaties) tel je op:

Voorbeeld 6

$$(3x + y) + (4x + z) = 7x + y + z$$

Enkel de eentermen van de x kan je optellen, de rest moet je laten staan.

$$(3x + y) - (a + b) = 3x + y - a - b$$

Jammer, hier kan je niets optellen.

Producten

Producten van verschillende letters vorm je door de letters achter elkaar te schrijven. De bijhorende getallen vermenigvuldig je ook, en plaats je voorop.

Voor eentermen is dit:

Voorbeeld 7

$$\begin{aligned} a \cdot b \cdot x &= abx \\ x \cdot 2a \cdot 2b &= 4abx \end{aligned}$$

Als de letters gelijk zijn, kan je machten vormen. Je gebruikt hier eigenlijk de rekenregel: “machten met hetzelfde grondtal vermenigvuldigen is de exponenten optellen”.

Voorbeeld 8

$$\begin{aligned} a \cdot a &= a^2 \\ x^2 \cdot x^3 &= x^{2+3} = x^5 \\ ab \cdot ab &= (ab)^2 = a^2 \cdot b^2 = a^2b^2 \end{aligned}$$

Veeltermen vermenigvuldigen is lastiger, maar maakt gebruik van rekenregels die je al kent. De belangrijkste is de distributiviteit. Op die manier herleid je het probleem naar het product van eentermen:

$$x \cdot (a+b) = x \cdot a + x \cdot b = ax + bx$$

Iets complexer:

Voorbeeld 9

$(a+2x)\cdot(3x)$	$=$	$a\cdot(3x)+(2x)\cdot(3x)$	distributiviteit
	$=$	$3ax+6x^2$	uitrekenen en ordenen
$(a+b)\cdot(a+b)$	$=$	$a\cdot a+b\cdot a+a\cdot b+b\cdot b$	distributiviteit
	$=$	$a^2+ba+ab+b^2$	uitrekenen
	$=$	$a^2+2ab+b^2$	ordenen en optellen
$(a+b)\cdot(x+y)$	$=$	$a\cdot x+a\cdot y+b\cdot x+b\cdot y = ax+ay+bx+by$	

In sectie 3 gaan we kijken naar de omgekeerde bewerkingen: ontbinden in factoren (afzonderen van eentermen en veeltermen), en merkwaardige producten.

Quotiënten

Quotiënten, en dus daarmee samenhorend breuken, bereken je vaak door vereenvoudigingen. Je doet een vereenvoudiging net op dezelfde manier als bij het vereenvoudigen van een breuk met gewone getallen:

$$\begin{aligned} \frac{6}{15} &= \frac{2\cdot 3}{3\cdot 5} = \frac{2}{5} \\ \frac{ab}{bc} &= \frac{a}{c} \end{aligned}$$

Als er in de teller een letter staat die ook in de noemer staat, kan je de breuk vereenvoudigen. Maar de volgende breuk kan je NIET vereenvoudigen:

$$\frac{ab}{bc+1}$$

In de noemer staat immers niet bij elke term een b, dus is vereenvoudiging hier niet mogelijk. Wat je echter wel kan (en mag doen) is zowel in teller als noemer de letter b buiten de haakjes brengen; daarna kan je b schrappen, maar of je daarmee de breuk vereenvoudigd hebt, laten we in het midden. De variabele b mag nu immers niet meer nul worden.

$$\frac{ab}{bc+1} = \frac{ab}{b(c+\frac{1}{b})} = \frac{a}{c+\frac{1}{b}}$$

Het gebruik van rekenregels heb je echt nodig bij machten:

$$\frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a^1 = a$$

Voorbeeld 10

$$\begin{aligned}
\frac{p\sqrt{p}}{p^2} &= \frac{p.p^{\frac{1}{2}}}{p^2} && \text{vierkantswortel omzetten in macht}\\
&= \frac{p^{1+\frac{1}{2}}}{p^2} && \text{product van machten met gelijk grondtal is exponenten optellen}\\
&= \frac{p^{\frac{3}{2}}}{p^2} && \\
&= p^{\frac{3}{2}-2} && \text{quotiënt van machten met gelijk grondtal is exponenten aftrekken}\\
&= p^{-\frac{1}{2}} && \text{Verder dan dit kan je de opgave niet vereenvoudigen.}
\end{aligned}$$

Als je iets meer ervaring hebt: $\frac{p\sqrt{p}}{p^2} = p^{1+\frac{1}{2}-2} = p^{-\frac{1}{2}}$.

Voorbeelden

Rekenen met letters kan dan wel op dezelfde manier gaan zoals rekenen met getallen, toch is er vaak een moeilijkheid bij vereenvoudigingen en dergelijke. Vandaar dat we enkele voorbeelden bekijken.

Breuken optellen en aftrekken

Voorbeeld 11 Net zoals bij de gewone breuken, is de sleutel hier het op dezelfde noemer brengen van de breuken:

$$\frac{4}{a} + \frac{7}{a} = \frac{11}{a}$$

Voorbeeld 12 Volgend voorbeeld is iets lastiger:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

Je zoekt hier een gelijke noemer. Omdat de noemers niets met mekaar te maken hebben, neem je gewoon het product van de noemers als gemeenschappelijke noemer, namelijk $b \cdot d$. Dat zou je ook doen als je de som $\frac{1}{7} + \frac{2}{3}$ zou moeten oplossen, dan zou je ook als gemeenschappelijke noemer $3 \cdot 7 = 21$ kiezen.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Voorbeeld 13 Een iets moeilijker voorbeeld:

$$\begin{aligned}\frac{y}{x}+\frac{y}{x+1} &= \frac{y.(x+1)}{x.(x+1)}+\frac{y.x}{(x+1).x}\\ &= \frac{xy+y}{x.(x+1)}+\frac{xy}{(x+1).x}\\ &= \frac{xy+y+xy}{x.(x+1)}\\ &= \frac{2xy+y}{x(x+1)}\\ &= \frac{2xy+y}{x^2+x}\end{aligned}$$

We werken hier ook de noemer uit.

Voorbeeld 14 Nog een laatste voorbeeld:

$$\frac{x+3+a}{a+1}-\frac{2x+5-b}{2a+2}$$

In dit voorbeeld is de gemeenschappelijke noemer gelijk aan $2a+2$, en niet meteen het product van de twee noemers! Immers, de twee noemers hebben een gemeenschappelijk factor, namelijk $a+1$. Daar moet je gebruik van maken. Concreet betekent dit dat we de eerste breuk in teller en noemer moeten vermenigvuldigen met 2, en de tweede noemer kunnen we gewoon laten staan:

$$\begin{aligned}\frac{x+3+a}{a+1}-\frac{2x+5-b}{2a+2} &= \frac{(x+3+a).2}{(a+1).2}-\frac{2x+5-b}{2a+2} && \text{op gelijke noemer zetten}\\ &= \frac{2x+6+2a}{2a+2}-\frac{2x+5-b}{2a+2} && \text{uitrekenen}\\ &= \frac{2x+6+2a-(2x+5-b)}{2a+2} && \text{verschil van tellers, vergeet geen haken!}\\ &= \frac{2x+6+2a-2x-5+b}{2a+2} && \text{minteken verdelen over termen}\\ &= \frac{1+2a+b}{2a+2} && \text{gelijkaardige termen optellen}\end{aligned}$$

Breuken vermenigvuldigen en delen

Breuken vermenigvuldigen en delen is eenvoudiger dan optellen en aftrekken; opnieuw gebruik je dezelfde rekenregels als voordien.

Voorbeeld 15 Vermenigvuldigen van breuken is tellers met tellers en noemers met noemers vermenigvuldigen:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{2}{x}=\frac{a.2}{b.x}=\frac{2a}{bx}$$

Voorbeeld 16 Een getal delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk:

$$\frac{a}{b}:\frac{2}{x}=\frac{a}{b}.\frac{x}{2}=\frac{a.x}{b.2}=\frac{ax}{2b}$$

Voorbeeld 17 Ietsje moeilijker:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{c+d}.\frac{x+1}{y+1} &= \frac{(a+b)}{(c+d)}.\frac{(x+1)}{(y+1)} && \text{breuken vermenigvuldigen} \\ &= \frac{ax+a+bx+b}{cy+c+dy+d} && \text{uitrekenen} \end{aligned}$$

Voorbeeld 18 Vergeet ook niet (indien mogelijk) om nadien te vereenvoudigen:

$$\begin{aligned} \frac{2a+4x}{4b} : \frac{b}{2y} &= \frac{2a+4x}{4b} \cdot \frac{2y}{b} && \text{vermenigvuldigen met omgekeerde} \\ &= \frac{(2a+4x)\cdot(2y)}{(4b)\cdot(b)} && \text{breuken vermenigvuldigen} \\ &= \frac{4ay+8xy}{4b^2} && \text{uitrekenen} \\ &= \frac{ay+2xy}{b^2} && \text{vereenvoudigen} \end{aligned}$$

Machten en wortels

Voorbeeld 19

$$\begin{array}{ccccc} (2a)^4 & = & 2^4 \cdot a^4 & = & 16a^4 \\ \sqrt{16a} & = & \sqrt{16}\cdot\sqrt{a} & = & 4\sqrt{a} \\ \left(\frac{a+2}{3}\right)^2 & = & \frac{(a+2)^2}{3^2} & = & \frac{a^2+4a+4}{9} \\ \left(\frac{b}{1-a}\right)^{-2} & = & \left(\frac{1-a}{b}\right)^2 & = & \frac{(1-a)^2}{b^2} = \frac{1-2a+a^2}{b^2} \end{array}$$

2.11 Evenredigheden en de regel van drie

De regel van drie

In een aantal vraagstukken worden er twee grootheden met elkaar vergeleken. Deze twee grootheden houden dikwijls verband met elkaar. Dit wil zeggen als de ene grootheid groter wordt, vermeerdert ook de andere. En als de ene grootheid kleiner wordt, vermindert de andere grootheid eveneens. We zeggen dat de twee grootheden zich *evenredig* verhouden tot elkaar (symbooltje $\sim$).

Voorbeeld 1 Een doos ballonnen bevat 75 ballonnen en kost 10 €. Hoeveel kosten dan 90 ballonnen?

Er is een verband, want als de ene grootheid (= het aantal ballonnen) vermeerdert, vermeerdert hier ook de andere grootheid (= de prijs van de ballonnen). Hoe meer ballonnen je wil, hoe meer je zal moeten betalen. Zulke vraagstukken kan je oplossen met de zogenaamde *regel van drie.* Bij dit soort opgaven ken je altijd 3 getallen en moet je het vierde getal berekenen, vandaar...

$$\begin{array}{lcl} \text{75 ballonnen} & \sim & 10\,€ \\ \text{1 ballon} & \sim & \frac{10\,€}{\text{75 ballonnen}} \\ \text{90 ballonnen} & \sim & \frac{10\,€}{\text{75 ballonnen}} \cdot \text{90 ballonnen} = 12\,€ \end{array}$$

Antwoord : Voor 90 ballonnen betaal je dan 12 €.

Infeite ga je eerst op zoek naar de “eenheidsprijs” voor één ballon: 10 € voor 75 ballonnen komt overeen met $10/75 = 0,133\frac{\text{EUR}}{\text{ballon}}$. We kunnen ons ook afvragen hoeveel ballonnen je kan kopen voor één euro: $75/10 = 7,5 \frac{\text{ballonnen}}{\text{EUR}}$ (praktisch zou dit betekenen dat je met één euro 7 ballonnen kan kopen; je betaalt daarvoor $7.0,133 = 0.93$ € en je houdt nog 6 eurocent over).

We zeggen dat een verhouding *omgekeerd evenredig* is wanneer een vermeerdering langs de ene kant, een even grote vermindering aan de andere kant veroorzaakt.

Voorbeeld 2 Stel, ik heb voldoende veevoeder om 35 varkens gedurende 22 dagen te voeren. Hoeveel dagen kom ik toe met dezelfde hoeveelheid veevoeder als ik plots 70 varkens zou hebben?

Er is een verband, want als de ene grootheid (= het aantal varkens) vermeerdert, vermindert hier de andere grootheid (= het aantal dagen voederen). Zulke vraagstukken kan je eveneens oplossen met de regel van drie.

$$\begin{array}{lcl} \text{veevoeder voor 35 varkens} & \sim & \text{22 dagen} \\ \text{veevoeder voor 1 varken} & \sim & \text{22 dagen} \cdot \text{ veevoeder voor 35 varkens} \\ \text{veevoeder voor 70 varkens} & \sim & \frac{\text{22 dagen} \cdot \text{veevoeder voor 35 varkens}}{\text{veevoeder voor 70 varkens}} \quad = \quad \text{11 dagen} \end{array}$$

Antwoord : Met dezelfde hoeveelheid veevoeder kan je 70 varkens 11 dagen lang voederen.

Dit is dus niet hetzelfde als: Stel, ik heb veevoeder om 35 varkens gedurende 22 dagen te voeren. Hoeveel veevoeder heb ik nodig om 70 varkens te voederen gedurende diezelfde 22 dagen?

Antwoord: de exacte hoeveelheid veevoeder in kg (dat een varken per dag nodig heeft) kennen we niet, dus kunnen we ook niet in "zoveel kg" antwoorden, maar als het aantal varkens verdubbelt, dan zal de hoeveelheid veevoeder ook moeten verdubbelen. De verhouding "hoeveelheid veevoeder per varken" verandert niet; we zeggen dat de verhouding constant blijft. In symbolen:

$$\frac{\text{hoeveelheid veevoeder x}}{\text{35 varkens}} = \frac{\text{hoeveelheid veevoeder y}}{\text{70 varkens}} = \text{constant}$$

Schrijven we dit iets anders:

$$\frac{\text{70 varkens}}{\text{35 varkens}} = \frac{\text{hoeveelheid veevoeder y}}{\text{hoeveelheid veevoeder x}} = \text{constant} = 2$$

Besluit: de hoeveelheid veevoeder voor 70 varkens = 2·hoeveelheid veevoeder voor 35 varkens.

Dit vraagstukje laat zien wat we bedoelen met "kruiselings vermenigvuldigen".

Kruiselings vermenigvuldigen

Kruiselings vermenigvuldigen is de benaming voor een rekenkundige handeling om een vergelijking tussen twee verhoudingen (evenredigheid) te vereenvoudigen. Daarbij wordt de noemer van het linkerlid vermenigvuldigd met de teller van het rechterlid, en de teller van het linkerlid vermenigvuldigd met de noemer van het rechterlid. Beide vermenigvuldigingen stelt men dan aan elkaar gelijk. De vergelijking wordt door kruislings vermenigvuldigen vereenvoudigd tot $20y = 40$, waaruit weer volgt dat $y = 2$.

In formulevorm:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$$

Indien $bc \neq 0$ geldt ook het omgekeerde:

$$ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \tag{1}$$

De achtergrond van dit "trucje" is dat beide zijden van de vergelijking met hetzelfde reële getal vermenigvuldigd kunnen worden, zonder dat de vergelijking verandert. In bovenstaande formulering kunnen beide zijden met het getal "bd" vermenigvuldigd worden, waarna volgt $ad = bc$.

2.12 Rekenen met percentages en promillages

x percent of $x\%$ van een getal y betekent: $\left(\dfrac{x}{100}\right).y$

x promille of x ‰van een getal y betekent: $\left(\dfrac{x}{1000}\right).y$

Een percentage of promillage heeft dus altijd betrekking op een getal. 10% op zich heeft m.a.w. eigenlijk geen betekenis.

Voorbeeld 1 Hoeveel is 25% van 50?

Dit is:

$$\left(\frac{25}{100}\right).50 = 0,25.50 = 12,5$$

Voorbeeld 2 Stel, de basisprijs van een product is 82 €. Er komt echter nog 21% BTW bij. Aan welke prijs wordt dit product te koop aangeboden?

Antwoord:

$$82 + 21\% \text{ van } 82 = 82 + 17,22 = 99{,}22\,€.$$

Dit soort berekeningen kan je vlotter maken via: $1,21 \cdot 82 = 99{,}22\,€$. Dus als een hoeveelheid met 21% toeneemt hoort daar de factor $1,21$ bij.

Voorbeeld 3 Hoeveel moeten we betalen als we 30% korting krijgen op een product dat 200 € kost?

We moeten dan van de prijs 30% aftrekken:

$$200 - 30\% \text{ van } 200 = 200 - 60 = 140\,€.$$

Ook dit gaat eenvoudiger via $0,70 * 200 = 140\,€$. Met een afname van 30% komt de factor $0,70$ overeen.

We hebben geluk: bovenop de 30% korting krijgen we nog een extra 5% studentenkorting. Nu betalen we $0,70 * 0,95 * 200 = 133\,€$.

Procenten van procenten tel je dus niet op, maar je vermenigvuldigt ze met elkaar. De klant heeft dus geen 35% korting gekregen, maar slechts $1 - 0,7 * 0,95 = 33,5\%$.

Ook een gecombineerde toename en afname worden via een vermenigvuldiging samengevoegd.

Voorbeeld 4 Met hoeveel procent neemt het aantal toe als het eerst 20% vermeerdert en daarna met 45% vermindert?

Antwoord: bij een toename van 20% hoort de factor $1,2$ en bij een afname van 45% hoort de factor $0,55$. Aangezien $1,2 * 0,55 = 0,66$ zal het aantal afnemen met 34% .

Voorbeeld 5 Tijdens een garageverkoop doet een verkoper ons een aantrekkelijk voorstel. I.p.v. 15% korting op alle spullen, krijgen wij een korting van 125 € op het nog nieuwe televisietoestel dat 1000 € kost. We happen niet meteen toe, maar rekenen uit met hoeveel procent 125 van 1000 overeenkomt:
als $x\%$ van $y = z$, m.a.w. $\left(\frac{x}{100}\right).y = z$
dan is

$$\frac{x}{100}(\text{ of } x\%) = \frac{z}{y}$$

In ons geval is:

$$x = \frac{125}{1000} = 0,125 \text{ of } 12,5\%$$

We kiezen dus beter voor de 15% korting!

3 Ontbinden in factoren

3.1 Basisprincipes

Een wiskundige uitdrukking ontbinden is belangrijk om deze uitdrukking eenvoudiger voor te stellen en om ze beter te kunnen analyseren. Ze kan ook gebruikt worden om een vergelijking op te lossen.

Welke uitdrukking ziet er gemakkelijker uit?

$$x(x+1)(x+2)(x-\sqrt{2}) \text{ of } x^4 + (3-\sqrt{2})x^3 + (2-3\sqrt{2})x^2 - 2\sqrt{2}x$$

Bij het ontbinden in factoren probeer je zoveel mogelijk gemeenschappelijke factoren af te zonderen, je zet een som om in een product.

Afzonderen van een getal

Het eenvoudigste is een getal afzonderen: $5x + 10y = 5(x + 2y)$

Elke term van de som heeft een gemeenschappelijke factor 5, of met andere woorden, elke term is deelbaar door 5. Je brengt deze factor buiten door elke term daadwerkelijk te delen door 5, en het getal buiten de haakjes te zetten. Je past als het ware omgekeerde distributiviteit toe.

Voorbeeld 1

$$\begin{aligned} 14x + 21 &= 7(2x+3) \\ 5y + 5 &= 5(y+1) \\ 2x + 4y + 6z &= 2(x + 2y + 3z) \end{aligned}$$

Afzonderen van een letter of eenterm

Je kan natuurlijk ook letters afzonderen.

Voorbeeld 2

$$\begin{aligned} 5x + 3x^2 &= x(5+3x) \\ 3xy + 2zy &= y(3x+2z) \\ a^2 + 3ab + ac &= a(a + 3b + c) \end{aligned}$$

Dit kan algemener: soms kan je een gehele eenterm (getal maal een macht van een letter) afzonderen:

Voorbeeld 3

$$3x + 6x^2 = 3x(1+2x)$$
$$x^3 + 2x^2 = x^2(x+2)$$

Als er bij een term en getal of letter ontbreekt, dan kan je eenvoudig compenseren met een breuk:

Voorbeeld 4

$$6x^2 + 3x + 1 = 6x^2\left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{6x^2}\right)$$

Controleer altijd je antwoord door het (in gedachten) terug uitrekenen van de haakjes. Veel fouten worden gemaakt door een verkeerde macht van een letter te laten staan, of door het vergeten van constante termen.

Gedeeltelijke ontbinding

Veel ontbindingen zie je niet op het zicht. Soms moet je wat proberen en wat termen groeperen om bepaalde factoren af te zonderen.

Voorbeeld 5

$$3x + 6xy + y$$

In deze uitdrukking zie je dat de 3 termen niets met elkaar te maken hebben (m.a.w. niks gemeenschappelijks hebben). Je kan wel de eerste twee samennemen en daar uit afzonderen:

$$3x + 6xy + y = (3x + 6xy) + y = 3x(1+2y) + y$$

Maar, je had ook de twee laatste termen kunnen samennemen:

$$3x + 6xy + y = 3x + (6xy + y) = 3x + y(6x + 1)$$

Geen van beide pogingen leidt echter tot een volledige ontbinding. Het zijn echter deze pogingen die je moet ondernemen!

Afzonderen van een veelterm

Je kan ook volledige veeltermen afzonderen.

Voorbeeld 6

$$3(x^2 + 1) + 2a(x^2 + 1)$$

Hier zie je dat de twee termen de factor $x^2 + 1$ gemeenschappelijk hebben. Deze kan je in zijn geheel afzonderen. Bij de eerste term zal dan 3 overblijven, en bij de tweede $2a$:

$$3(x^2 + 1) + 2a(x^2 + 1) = (x^2 + 1)(3 + 2a)$$

Gebruik altijd goed de haakjes! Nog een voorbeeld:

$$7xy(y + 2z) - 3z(y + 2z)$$

Hier zonder je $y + 2z$ af. Voor de eerste term blijft er dan $7xy$ over, bij de tweede $-3z$. Vergeet dat minteken niet!

$$7xy(y + 2z) - 3z(y + 2z) = (y + 2z)(7xy - 3z)$$

Als je een opgave krijgt die je niet meteen op het zicht kan oplossen, moet je eerst proberen met gedeeltelijke ontbinding. Soms zie je dan meer.

Voorbeeld 7

$$x^2 - 2ax - 8a + 4x$$

Bekijk je dit als een geheel, dan zie je dat deze 4 termen niets gemeenschappelijks hebben. Je moet nu kiezen welke termen je gaat samennemen. Je ziet bijvoorbeeld dat de eerste 2 termen een x gemeenschappelijk hebben, en de laatste twee een factor 4. Zo groeperen we dan ook. Gebruik bij het groeperen de haakjes:

$$x^2 - 2ax - 8a + 4x = (x^2 - 2ax) + (-8a + 4x)$$

Nu zonderen we af:

$$(x^2 - 2ax) + (-8a + 4x) = x(x - 2a) + 4(-2a + x)$$

Nu zie je plots dat beide termen nog steeds iets gemeenschappelijks hebben, namelijk $x - 2a$ (let op, deze zijn omgewisseld in de tweede term). Die kan je nu ook afzonderen!

$$x(x - 2a) + 4(-2a + x) = (x - 2a)(x + 4)$$

Voorbeeld 8

$$\begin{array}{rcll} 6axy - 6a - 4xy + 9a^2 & = & (6axy - 6a) + (-4xy + 9a^2) & \text{eerste poging tot groeperen} \\ & = & 6a(xy - 1) + (-4xy + 9a^2) & \text{gelijke factoren afzonderen} \end{array}$$

In deze opgave zit je nu vast, de tweede term kan je niet verder ontbinden. Onze eerste groepering levert niet veel op! We proberen iets anders:

$$\begin{array}{rcll} 6axy - 6a - 4xy + 9a^2 & = & (6axy - 4xy) + (-6a + 9a^2) & \text{tweede poging tot groeperen} \\ & = & 2xy(3a - 2) + 3a(-2 + 3a) & \text{gelijke factoren afzonderen} \\ & = & (3a - 2)(2xy + 3a) & \text{gelijke factor afzonderen} \end{array}$$

Voorbeeld 9

$$\begin{array}{rcll} -4xy - 4y + 7z + 7xz & = & (-4xy - 4y) + (7z + 7xz) & \text{poging tot groeperen} \\ & = & 4y(-x - 1) + 7z(1 + x) & \text{gelijke factoren afzonderen} \end{array}$$

We zitten nu schijnbaar vast, omdat de twee termen wel een factor bij zich hebben staan die op elkaar lijken, maar toch niet volledig gelijk zijn. Er staat een minteken teveel. De oplossing komt als je bedenkt dat een minteken eigenlijk een factor -1 is, en die kan je ook afzonderen:

$$\begin{array}{rcll} -4xy - 4y + 7z + 7xz & = & (-4xy - 4y) + (7z + 7xz) & \text{poging tot groeperen} \\ & = & 4y(-x - 1) + 7z(1 + x) & \text{gelijke factoren afzonderen} \\ & = & 4y(-\mathbf{1})(x + 1) + 7z(1 + x) & \text{-1 afzonderen} \\ & = & (x + 1)(-4y + 7z) & \text{gelijke factoren afzonderen} \end{array}$$

3.2 Merkwaardige producten

Merkwaardige producten leveren soms een snelle manier om een uitdrukking te ontbinden in factoren. We zetten de belangrijkste even op een rijtje:

Onthoud

$$\begin{array}{rcl} (A + B)^2 & = & A^2 + 2AB + B^2 \\ (A - B)^2 & = & A^2 - 2AB + B^2 \\ (A + B)(A - B) & = & A^2 - B^2 \end{array}$$

Je kan deze merkwaardige producten bij het ontbinden in factoren gebruiken door het rechterlid om te zetten in het linkerlid; dat linkerlid is immers ontbonden in factoren.

Voorbeeld 1

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$$
$$y^2 - 6y + 9 = (y - 3)^2$$
$$z^2 - 16 = (z + 4)(z - 4)$$

Vaak is het lastig om de juiste formule te ontdekken. Je moet op zoek gaan naar een herkenningspunt:

$(A+B)^2$	$=$	$A^2+2AB+B^2$	kwadraat plus dubbel product plus kwadraat
$(A-B)^2$	$=$	$A^2-2AB+B^2$	kwadraat min dubbel product plus kwadraat
$(A+B)(A-B)$	$=$	A^2-B^2	kwadraat min kwadraat

Het moment dat je dit herkent, moet je de gegeven getallen hierin proberen te passen. Dat betekent concreet dat A en B alles kunnen zijn, letters, getallen, eentermen of zelfs veeltermen.

Voorbeeld 2

$$9z^2-16x^2$$

Hier zie je duidelijk een verschil van twee kwadraten. Je probeert nu de juiste waarden te vinden voor A en B. In dit geval zijn de kwadraten

$$9z^2=(3z)^2 \text{ en } 16x^2=(4x)^2$$

Dat betekent dus dat $A=3z$ en $B=4x$. Invullen geeft dan

$$9z^2-16x^2=(3z-4x)(3z+4x)$$

Voorbeeld 3

$$4a^2x^2+9y^2+12axy$$

Je herkent hierin 2 kwadraten en een derde term. We gokken dus dat die derde term een dubbel product is. We controleren dit. Het eerste kwadraat is $4a^2x^2=(2ax)^2$, we stellen dus A gelijk aan $2ax$. Het tweede kwadraat is $9y^2=(3y)^2$, dus $B=3y$. Zou dan $2AB=12axy$? Ja! Dus we hebben een merkwaardig product.

$$4a^2x^2+9y^2+12axy=(2ax+3y)^2$$

Voorbeeld 4

$$x^4-1$$

Dit lijkt geen merkwaardig product te zijn, maar is het wel. Het is belangrijk op te merken dat ook een vierde macht een kwadraat is:

$$x^4=(x^2)^2 \text{ en } 1=1^2$$

We vinden dus $A=x^2$ en $B=1$, we vullen in in de formule van het verschil van twee kwadraten:

$$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)$$

We zijn nog niet helemaal klaar. We kunnen immers misschien een of beide van deze factoren nog verder ontbinden. De factor (x^2+1) is geen verschil van kwadraten, en heeft ook geen dubbele productterm, deze gaan we dus niet verder kunnen ontbinden. De factor (x^2-1) is echter wel een verschil van twee kwadraten, dus:

$$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$$

3.3 Discriminant

Kwadratische uitdrukkingen kan je snel ontbinden met behulp van de abc-formule. Even herhalen:

Definitie Om een tweedegraadsvergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ te ontbinden zijn er drie gevallen:

- $D > 0$, de ontbinding is dan $a(x - x_1)(x - x_2)$
- $D = 0$, de ontbinding is dan $a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2$
- $D < 0$, er is geen ontbinding

We zetten dus de coëfficiënt a bij x^2 vooraan, en vullen de oplossingen x_1 en x_2 in.

De discriminant wordt berekend als volgt:

$$D = b^2 - 4ac$$

en de oplossingen zijn (als $D > 0$)

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ en } x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Als $D = 0$, dan is $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

Voorbeeld 1

$$x^2 - 3x + 2$$

De discriminant is $D = 2^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0$. De oplossingen zijn

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ en } x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

De ontbinding is dus (de coëfficiënt a bij x^2 is 1):

$$x^2 - 3x + 2 = a(x - x_1)(x - x_2) = 1(x - 2)(x - 1)$$

Voorbeeld 2

$$2x^2 + x - 1$$

De discriminant is $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.2.(-1) = 9 > 0$. De oplossingen zijn

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \text{ en } x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2.2} = -1$$

De ontbinding is dus (de coëfficiënt a bij x^2 is 2):

$$2x^2 + x - 1 = a(x - x_1)(x - x_2) = 2(x - \frac{1}{2})(x + 1)$$

Voorbeeld 3

$$3x^2 - 6x + 3$$

De discriminant is $D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 0 > 0$. Er is 1 oplossing en die is

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{90}}{2.3} = 1$$

De ontbinding is dus (de coëfficiënt a bij x^2 is 3):

$$3x^2 - 6x + 3 = a(x - x_1)^2 = 3(x-1)^2$$

Voorbeeld 4

$$x^2 + x + 1$$

De discriminant is $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$. De discriminant is negatief, dus is er geen ontbinding mogelijk.

3.4 Discriminant - voorbeeld

Zie filmpje MOOC.

3.5 Regel van Horner

Eigenschap 1 *Het rekenschema van Horner geeft vaak een manier om te ontbinden in factoren. Bij het rekenschema van Horner zonder je altijd een factor van de vorm $(x - a)$ af, waar a een getal is.*

We leggen het rekenschema van Horner uit aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeld 1 We proberen te ontbinden:

$$x^3 - 4x + x^2 - 4$$

Stap 1. Orden de machten van x van groot naar klein

De grootste voorkomende macht van is hier , en die staat vooraan. De volgende is een kwadraat, dat moet op de tweede plaats, enzoverder:

$$x^3 + x^2 - 4x - 4$$

Stap 2. Zorg dat elke macht van x voorkomt, anders vul je aan

In dit voorbeeld zijn alle machten van x aanwezig, er ontbreekt niets. In een volgend voorbeeld bekijken we wat er zou moeten gebeuren als er wel een macht ontbreekt.

Stap 3. Kies een waarde voor a

In dit geval gaan we Horner toepassen met $a = 2$.

Stap 4. Teken het Hornerschema

- Teken een tabel met 3 rijen.
- In de bovenste rij zet je alle coëfficiënten van de veelterm van x in de juiste volgorde (Als er geen coëfficiënt bij staat, dan is dit eigenlijk de coëfficiënt 1)
- In de eerste kolom zet je het getal a (in ons geval is $a = 2$).

$$\begin{array}{rcr|cccc} & & & x^3 & x^2 & x & c^{te} \\ & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & & & 1 & 1 & -4 & -4 \\ a & \rightarrow & 2 & & & & \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

Stap 5. Het eerste cijfer mag je gewoon overschrijven

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 2 & \downarrow & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Stap 6. Vermenigvuldig a met dit eerste getal, en schrijf het in de tweede rij

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 2 & \downarrow & 2 & & \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

Stap 7. Tel dit nieuw gevonden getal op bij de bovenste rij

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 2 & \downarrow & 2 & & \\ \hline & 1 & 3 & & \end{array}$$

Stap 8. Herhaal deze stappen tot het laatste getal

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 2 & \downarrow & 2 & 6 & \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \end{array}$$

We duiden aan dat het schema gestopt is door voor het laatste getal op de laatste rij 2 verticale strepen te zetten.

$$\begin{array}{c|cccc c}
 & 1 & 1 & -4 & & -4 \\
2 & \downarrow & 2 & 6 & & 4 \\
\hline
 & 1 & 3 & 2 & || & 0
\end{array}$$

Het Hornerschema is nu afgerond. Wat kan je hier nu uit besluiten?

- Het laatste getal op de derde rij is een 0. Dat betekent dat we de factor $(x - a)$ gaan kunnen afzonderen, in dit geval zonderen we dus $(x - 2)$ af, omdat $a = 2$.
- De overblijvende factor kan je aflezen op de laatste rij. Hier staan immers de coëfficiënten van deze factor. Deze staan geordend van hoogste naar laagste, en zijn in exponent eentje minder dan de oorspronkelijke opgave (geen derdemacht, maar een tweedemacht).

$$\begin{array}{c|cccc c}
 & 1 & 1 & -4 & & -4 \\
2 & \downarrow & 2 & 6 & & 4 \\
\hline
 & 1 & 3 & 2 & || & 0 \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
 & x^2 & x & c^{te} & &
\end{array}$$

We lezen dus af dat de overblijvende factor is:

$$1 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 2$$

De eerste ontbinding is dan

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x - 2)(x^2 + 3x + 2)$$

We kunnen deze uitdrukking nog verder ontbinden door de factor $x^2 + 3x + 2$ te ontbinden met de discriminant. We vinden dat $D = 1$ en dat $x_1 = -1$ en $x_2 = -2$. De factor $x^2 + 3x + 2$ is dan gelijk aan $(x + 1)(x + 2)$. Dit kunnen we invullen en krijgen tenslotte:

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x - 2)(x^2 + 3x + 2) = (x - 2)(x + 1)(x + 2)$$

Opmerking

1. In de laatste stap hebben we de methode van de discriminant gebruikt om de overblijvende factor x^3+x^2-4x nog verder te ontbinden. Maar we hadden evengoed nog eens het schema van Horner kunnen toepassen, nu met $a = -1$ (of met $a = -2$) om de factor $(x + 1)$ (of om de factor $(x + 2)$) af te zonderen. Zie ook het 2de voorbeeld hieronder.
2. In plaats van eerst $(x - 2)$ af te zonderen, hadden we ook eerst $(x + 2)$ en daarna $(x - 2)$ kunnen afzonderen, of eerst $(x + 2)$ en dan $(x + 1)$ of ...
3. Welke waarde moet je voor a kiezen? Een goede tip is om de delers te proberen van de constante term. In dit eerste voorbeeld zijn de delers van -4: ± 1, ± 2 en ± 4. Ga nu na of het beeld voor $x = 1$ nul is, m.a.w. is $f(a) = 0$? Stel, we kiezen $a = +1$, dan is $f(1) = (1)^3 + (1)^2 - 4(1) - 4 = -6 \neq 0$. Dus de factor kan niet afgezonderd worden. We proberen nu $a = +2$, dan is $f(2) = (2)^3 + (2)^2 - 4(2) - 4 = 0$. Dus de factor $(x - 2)$ kan afgezonderd worden.

4. In feite kan je wel de factor $(x-1)$ afzonderen, maar dan vinden we bij het schema van Horner niet als laatste getal 0, maar wel de rest. Dit is dus de rest die overblijft als je de veelterm x^3+x^2-4x deelt door $(x-1)$.

Voorbeeld 2 We werken een tweede voorbeeld volledig uit:

$$x^3-7x+6$$

Stap 1. Orden de machten van x van groot naar klein

Dit is reeds in orde.

Stap 2. Zorg dat elke macht van x voorkomt, anders vul je aan

De term voor x^2 ontbreekt. We vullen dus aan:

$$x^3-7x+6=x^3+0x^2-7x+6$$

Stap 3. Kies een waarde voor a

We proberen met $a=-1$.

Stap 4. Teken het Hornerschema

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ -1 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Uiteindelijk krijg je als uitgewerkt schema (doe dit zelf!):

$$\begin{array}{r|rrrcr} & 1 & 0 & -7 & & 6 \\ -1 & \downarrow & -1 & 1 & & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \| & 12 \end{array}$$

Het laatste getal is geen 0! Dat betekent dat we deze uitdrukking niet kunnen ontbinden met $a=-1$! We zullen dus een nieuwe a-waarde moeten kiezen, bijvoorbeeld $a=1$. We starten opnieuw.

Stap 5. Kies een nieuwe waarde voor a

We proberen met $a=1$.

Stap 6. Teken het Hornerschema

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Uitwerken geeft:

$$\begin{array}{r|rrrcr}
 & 1 & 0 & -7 & & 6 \\
1 & \downarrow & 1 & 1 & & -6 \\ \hline
 & 1 & 1 & -6 & \| & 0
\end{array}$$

Nu krijgen we wel een 0 en kunnen besluiten dat we kunnen ontbinden:

$$x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6)$$

We zijn nog niet klaar. Misschien kan je x^2+x-6 nog verder ontbinden. Je kan deze ontbinding doen met Horner of je kan ze doen met de methode van de discriminant. We passen nog eens Horner toe op $x^2 + x - 6$ met $a = -3$:

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & 1 & -6 \\
-3 & & & \\ \hline
 & & &
\end{array}$$

Uitwerken geeft:

$$\begin{array}{r|rrcr}
 & 1 & 1 & & -6 \\
-3 & \downarrow & -3 & & 6 \\ \hline
 & 1 & -2 & \| & 0
\end{array}$$

We vinden een 0, dus is het ontbindbaar met $a = -3$. Dat betekent dat we de factor $(x+3)$ kunnen afzonderen. De overblijvende factor kan je aflezen op de onderste rij. Deze is in graad eentje lager dan de oorspronkelijke, dus van de eerste graad.

$$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$$

Vergeet niet dat dit niet de oorspronkelijke opgave was! We kunnen dit wel gebruiken door onze bevindingen in te vullen:

$$x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6) = (x-1)(x+3)(x-2)$$

Opmerking:

we hadden dus ook 2 maal na elkaar Horner kunnen toepassen; dit ziet er dan zo uit:

$$\begin{array}{r|rrcrcr}
 & 1 & 0 & & -7 & & 6 \\
1 & \downarrow & 1 & & 1 & & -6 \\ \hline
 & 1 & 1 & & -6 & \| & 0 \\
-3 & \downarrow & -3 & & 6 & & \\ \hline
 & 1 & -2 & \| & 0 & &
\end{array}$$

We kunnen dus de factor $(x-1)$ en de factor $(x-(-3)) = (x+3)$ afzonderen en krijgen terug als resultaat:

$$x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x+3)(x-2)$$

3.6 Regel van Horner - voorbeeld

Zie filmpje MOOC.

3.7 Test - ontbinden in factoren

Module 2

Elementaire rekenvaardigheden B

0 Intro

Zie filmpje MOOC.

1 Functies

1.1 Reële functies

Definitie, notatie, functievoorschrift

Definitie Een functie is een verband: een functie f associeert bij elk gegeven getal x hoogstens één ander getal (de functiewaarde $f(x)$). De functie f kan een functievoorschrift hebben om volgens een bepaalde vaste regel van zo'n x de bijhorende functiewaarde $f(x)$ te berekenen.

Er zijn functies met een speciale naam, zoals de sinus-functie: sin en functies met speciale symbolen, zoals de wortel-functie: $\sqrt{\ }$. Het functievoorschrift van deze functies is resp. $f(x) = \sin(x)$ en $f(x) = \sqrt{x}$.

Grafische voorstelling

Definitie Een functie f kan altijd grafisch worden weergeven. De vergelijking $f = f(x)$ geeft het verband tussen de x-waarden op de *horizontale* as en de functiewaarden $f(x)$ op de *verticale* as.

De letter y wordt de *afhankelijke variabele*, de *beeldwaarde* (of kortweg het *beeld*), de *output* of ook nog de *functiewaarde* genoemd. De letter x is hier de *onafhankelijke variabele*, de *input* of ook wel het *argument* genoemd.

Voorbeeld: het verband tussen de temperatuur in graden Celsius $^\circ C$ (x) en graden Fahrenheit $^\circ F$ (y) wordt gegeven door volgende functie: $y = 1,8x + 32$

Domein en beeld

Definitie Het *domein* (of *definitiegebied*) van een functie f is de verzameling van alle getallen $\in \mathbb{R}$ (x-waarden) die en beeld een beeld (y-waarde) hebben. Het domein is dus de verzameling van alle getallen $\in \mathbb{R}$ die acceptabel zijn als input.

Notatie $\text{dom} f$ of $\text{def} f$.

Voorbeeld 1 Voor de functie $y = \sqrt{x}$ mag x geen negatief getal zijn, dus $\text{dom} f = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$

Voorbeeld 2 De functie $y = \frac{1}{x-1}$ heeft geen beeld voor $x = 1$, dus $\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Tips bij het bepalen van het domein:

- Een even machtswortel kan je enkel nemen van positieve getallen $\in \mathbb{R}$.
- Een oneven machtswortel kan je van elk getal $\in \mathbb{R}$ nemen.
- Delen door nul mag niet!

Definitie Het *beeld* (of *bereik*) van een functie f is de verzameling van alle getallen $\in \mathbb{R}$ welke het beeld (de functiewaarde y) van de functie kunnen zijn. Het beeld is dus de verzameling van alle getallen $\in \mathbb{R}$ die kunnen optreden als output.

Notatie $\text{bld} f$.

Merk op dat bij een functie voor elke beeldwaarde hoogstens 1 x-waarde mag bestaan.

Bij een vergelijking waarbij er meerdere beelden bestaan voor een x-waarde, spreken we van een relatie.

Onthoud
- Het domein lees je af op de horizontale x-as (in onderstaande voorbeelden aangeduid met een groene lijn).
- Het beeld lees je af op de verticale y-as (in onderstaande voorbeelden aangeduid met een blauwe lijn).

Voorbeeld 3 Bij de functie $f(x) = 1 - x^2$ kan je voor geen enkele waarde van x een beeldwaarde bekomen die groter is dan 1 (omdat $1 - x^2 \leq 1$), dus $\text{bld} f =]-\infty, 1]$

De vergelijking $y^2 = x$ kunnen we niet zien als een functie in x, omdat zowel $y = 1$ als $y = -1$ zouden horen bij $x = 1$. Dit is dus een voorbeeld van een relatie (maar geen functie)!

Nulpunten

Definitie Een *nulwaarde* van de functie f is een getal a waarvoor geldt dat $f(a) = 0$. Het punt $(a, 0)$ noemen we een nulpunt.

Het berekenen van de nulwaarden van een functie f vereist het oplossen van de vergelijking $f(x) = 0$. Grafisch gezien zijn de nulpunten $(a, 0)$ de snijpunten van de grafiek van de functie f met de horizontale as (de X-as).

Voorbeeld 4 Voor de tweedegraadsfunctie met voorschrift $f(x) = ax^2 + bx + c$ komt dit neer op $ax^2 + bx + c = 0$ oplossen en kunnen we dus de methode van de discriminant toepassen om de nulwaarden te vinden.

Snijpunten met de assen

De snijpunten van de functie f met de x-as vinden we door het oplossen van het stelsel

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

of dus de vergelijking $f(x) = 0$. Het snijpunt van de functie $y = f(x)$ met de y-as vinden we door het oplossen van het stelsel $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$ of dus het berekenen van $f(0)$.

Even en oneven functies

Definitie Een functie $f(x)$ noemt men *even* als $f(-x) = f(x)$.
Een even functie heeft de y-as als as van symmetrie.

Een functie $f(x)$ noemt men *oneven* als $f(-x) = -f(x)$.
Een oneven functie heeft de oorsprong als middelpunt van symmetrie.

Als voor een functie $f(-x)$ niet gelijk is aan $f(x)$ of $-f(x)$ dan is de functie noch even, noch oneven. Dit hoeft niet te betekenen dat deze functie niet ergens anders symmetrisch zou kunnen zijn.

Voorbeeld 5 De functie f met voorschrift $f(x) = x^2$ is een eenvoudig voorbeeld van een even functie. Voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt immers dat

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

De functie g met voorschrift $g(x) = x^3$ is dan weer een eenvoudig voorbeeld van een oneven functie. Voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt immers dat

$$g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$$

Een functie h met voorschrift $h(x) = x + 1$ is noch een even functie, noch een oneven functie. Er zijn namelijk x-waarden waarvoor geen van de verbanden gelden:

$$\begin{array}{lll} h(1) = 2 & \text{maar} & h(-1) = 0 \\ h(2) = 3 & \text{maar} & h(-2) = -1 \end{array}$$

Snijpunten van twee functies

Als je voor twee verschillende functies f en g de eventuele snijpunten van hun grafiek zoekt, dan moet je de vergelijking $f(x) = g(x)$ oplossen. Zo vind je de x-coördinaten van de snijpunten.

Invullen van deze gevonden x-coördinaten in één van de twee functievoorschriften geeft dan de bijhorende y-coördinaten.

Voorbeeld 6 Om te bepalen waar de snijpunten van de grafieken van $f(x) = x^2$ en $g(x) = 3x-2$ liggen, onderzoeken we bijgevolg

$$x^2 = 3x - 2 \iff x^2 - 3x + 2 = 0$$

wat snel opgelost kan worden met de methode van de discriminant:

$$D = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1$$

zodat

$$x_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \text{ en } x_2 = \frac{3-1}{2} = 1.$$

De snijpunten van de grafieken van f en g hebben dus als x-waarden 1 en 2. Ook de beeldwaarden van deze snijpunten kunnen we nu snel berekenen: $f(1) = 1$ en $f(2) = 4$.

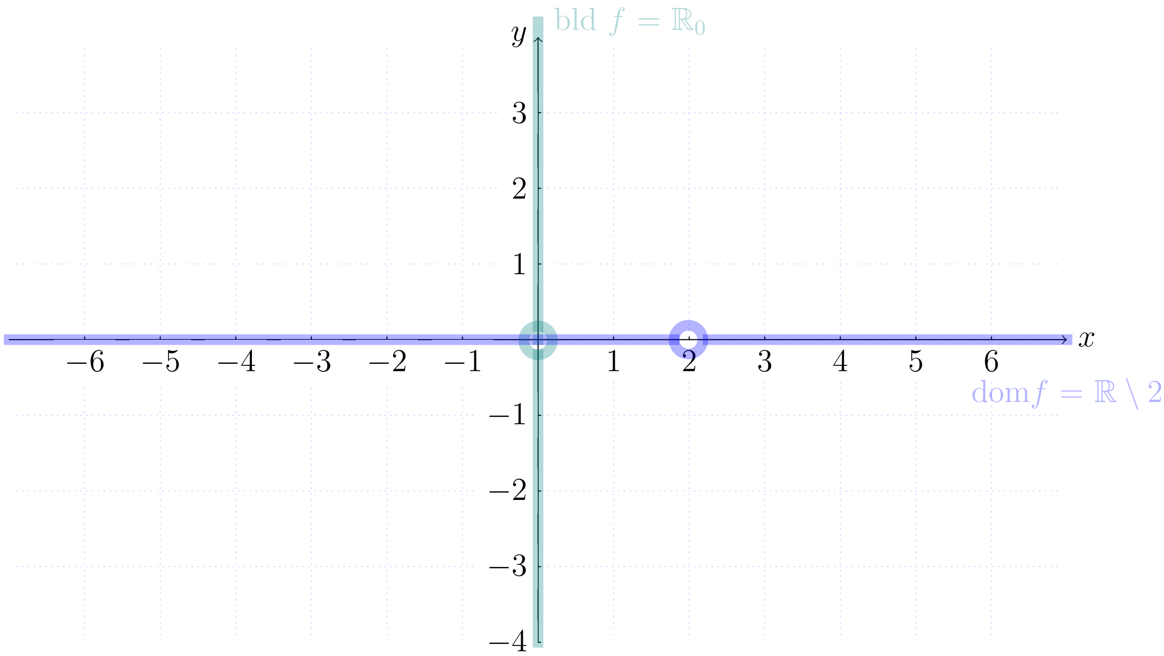
1.2 Voorbeelden

Voorbeeld 1 Bespreek de functie f met voorschrift $f(x) = \sqrt{10 - 2x} - 2$.

Domein: de uitdrukking onder de vierkantswortel mag niet negatief worden:

$$\begin{array}{rccc} & 10 - 2x & \geqslant & 0 \\ \iff & 10 & \geqslant & 2x \\ \iff & 5 & \geqslant & x \\ \iff & x & \leqslant & 5 \end{array}$$

Besluit: voor x zijn alle waarden van $-\infty$ tot en met 5 toegelaten. We schrijven: dom $f(x) =]-\infty, 5]$



Figuur .1: voorbeeld 1

Beeld: de kleinste functiewaarde wordt bekomen als de wortel 0 is. Vierkantwortels geven altijd een positief resultaat (of nul). De uitdrukking onder de wortel wordt 0 als $x = 5$. We zien dat $f(5) = -2$. Er is geen bovengrens, dus het bereik loopt tot $+\infty$.

Besluit: bld$f = [-2, +\infty[$

Nulpunten: voor welke waarden van x wordt $f(x) = 0$?

$$\begin{array}{rccc} & \sqrt{10-2x}-2 & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & \sqrt{10-2x} & = & 2 \\ \Longleftrightarrow & \left(\sqrt{10-2x}\right)^2 & = & 2^2 \\ \Longleftrightarrow & 10-2x & = & 4 \\ \Longleftrightarrow & 6 & = & 2x \\ \Longleftrightarrow & x & = & 3 \end{array}$$

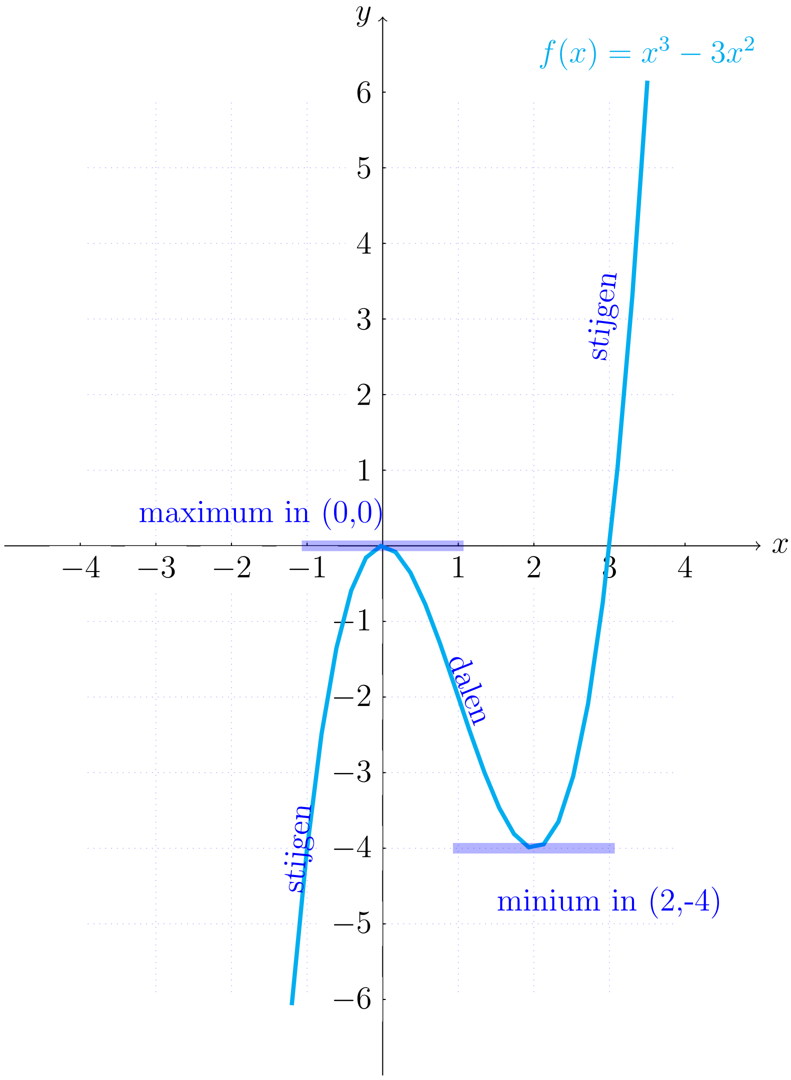
Besluit: er is slechts 1 nulwaarde, en dit is $x = 3$.

Symmetrie: we gaan na of het beeld van $-x$ hetzelfde of het tegengestelde resultaat geeft als de gegeven functie. $f(-x) = \sqrt{10-2(-x)} - 2 = \sqrt{10+2x} - 2$. Dit is noch gelijk aan $f(x)$ noch gelijk aan $-f(x)$. Deze functie is dus noch even, noch oneven.

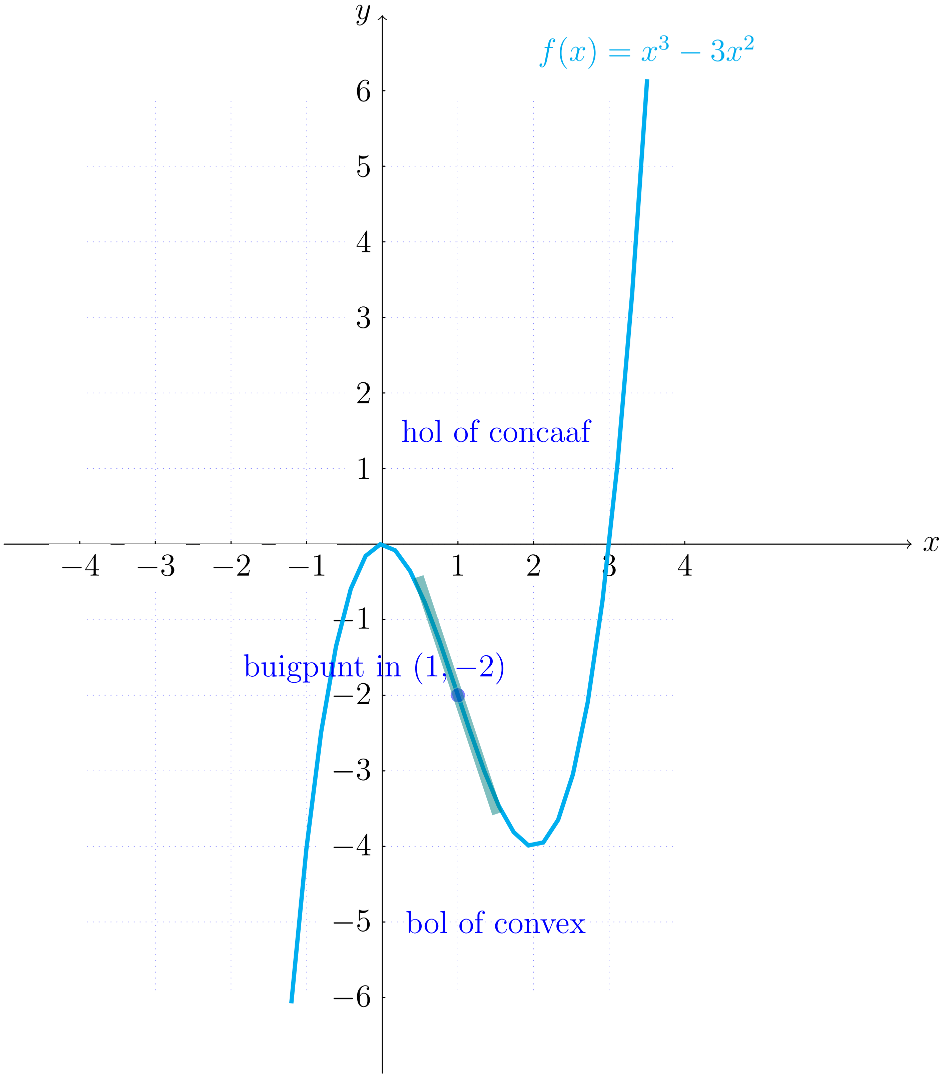
Voorbeeld 2 Bespreek de functie met voorschrift $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

Domein: de noemer mag niet nul worden (omdat een getal delen door 0 geen getal $\in \mathbb{R}$ is):

$$\begin{array}{rccc} & x-2 & \neq & 0 \\ \Longleftrightarrow & x & \neq & 2 \end{array}$$



Figuur .2: voorbeeld 2



Figuur .3: voorbeeld 3

Besluit: $\text{dom}\, y = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Beeld: er is geen bovengrens en geen ondergrens, maar de breuk zal echter nooit 0 worden.

Besluit: $\text{bld} f = \mathbb{R}_0$

Nulpunten: aangezien een breuk enkel nul kan worden als de teller nul is, zal dit bij deze functie nooit gebeuren. Er is dus geen snijpunt met de x-as.

Besluit: deze functie heeft geen nulpunten.

Symmetrie: we gaan na of het beeld van $-x$ hetzelfde of het tegengestelde resultaat geeft als de gegeven functie. $f(-x) = \frac{1}{(-x)-2} = -\frac{1}{x+2}$. Dit is noch gelijk aan $f(x)$ noch gelijk aan $-f(x)$. Deze functie is dus noch even, noch oneven.

Voorbeeld 3 Bespreek de sinusfunctie $f(x) = \sin(x)$

Domein: we mogen op de plaats van x gelijk welke hoek invullen, de sinus zal steeds bestaan.

Besluit: $\text{dom}\, y = \mathbb{R}$

Beeld: we lezen op de y-as het beeld af. De functiewaarden voor de sinus kunnen nooit groter zijn dan 1 of kleiner dan -1

Besluit: $\text{bld}f = [-1, 1]$

Nulpunten: de x-as wordt gesneden als $\sin(x) = 0$. Dit gebeurt zowel voor x-waarden gelijk aan $\{0, \pi, 2\pi, 3\pi, ...\}$ als ook voor $\{..., -3\pi, -2\pi, -\pi, 0\}$

Besluit: de snijpunten met de x-as zijn de punten $\{..., (-2\pi, 0), (-\pi, 0), (0, 0), (\pi, 0), (2\pi, 0), ...\}$ of iets korter genoteerd als: $\{(k\pi, 0) \text{ met } k \in \mathbb{Z}\}$

Symmetrie: via de goniometrische formules vinden we snel dat $f(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -f(x)$, dus kunnen we zeggen dat deze functie oneven is (symmetrisch t.o.v. de oorsprong).

1.3 Verloop van functies

Absolute en relatieve extrema

Definitie Een functie f heeft een **absoluut maximum** $f(x_0)$ in het punt $x_0 \in \text{dom}\, f$, als voor alle $x \in \text{dom}\, f$ geldt dat $f(x_0) \geqslant f(x)$

Een functie f heeft een **absoluut minimum** $f(x_0)$ in het punt $x_0 \in \text{dom}\, f$, als voor alle $x \in \text{dom}\, f$ geldt dat $f(x_0) \leqslant f(x)$

Een functie f heeft een **relatief of lokaal maximum** in het punt x_0, indien er een open interval I bestaat rond het punt x_0 zodat voor alle x in het interval I geldt dat $f(x_0) \geqslant f(x)$

Een functie f heeft een **relatief of lokaal minimum** in het punt x_0, indien er een open interval I bestaat rond het punt x_0 zodat voor alle x in het interval I geldt dat $f(x_0) \leqslant f(x)$

Voorbeeld 1 Voor de functie in gegeven in bovenstaande figuur zijn x_1, x_2, x_3, x_4 relatieve of lokale extrema. Hiervan zijn x_2 en x_3 absolute extrema.

x_1, x_3 zijn relatieve of lokale maxima. Hiervan is x_3 een absoluut maximum.

x_2, x_4 zijn relatieve of lokale minima. Hiervan is x_2 een absoluut minimum.

Stijgen, dalen en extrema

De eerste afgeleide speelt een belangrijke rol bij het onderzoek naar het verloop van een functie. Men zal dus het tekenverloop van deze afgeleide onderzoeken.

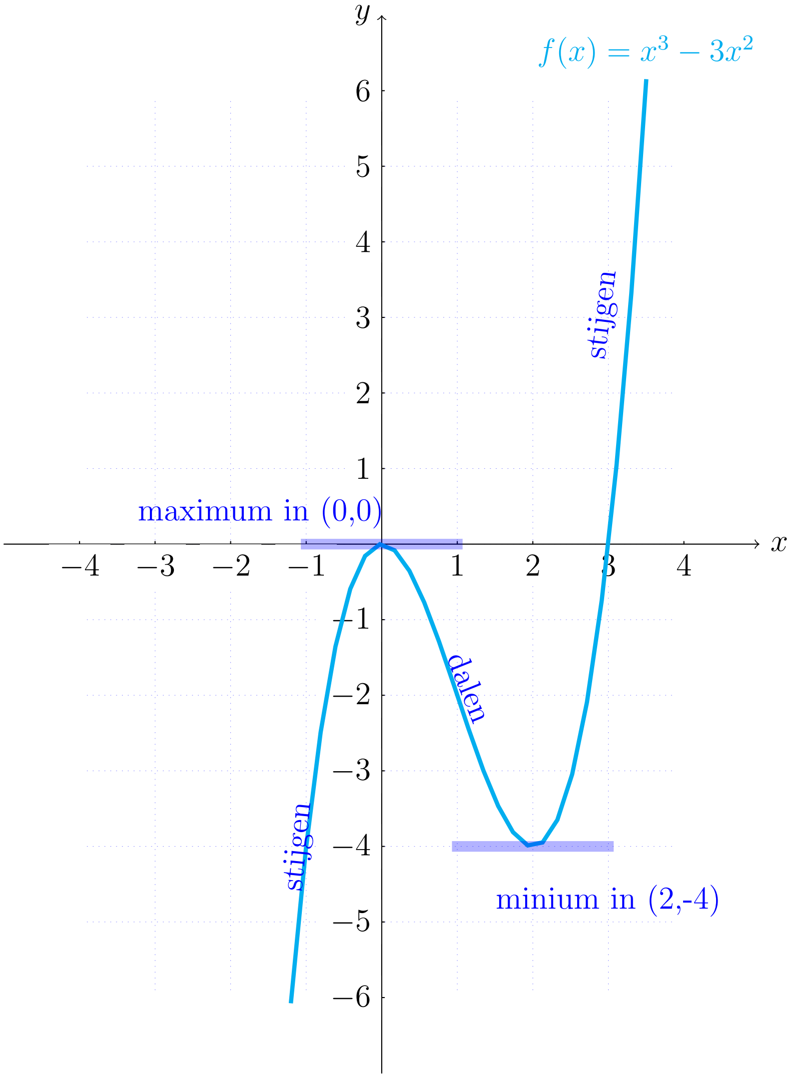
Definitie Als de eerste afgeleide $f'(x) > 0$ is in een interval, dan zal deze functie in dat interval **stijgen**.

Als de eerste afgeleide $f'(x) < 0$ is in een interval, dan zal deze functie in dat interval **dalen**.

De functie zal een relatief of lokaal extremum (maximum of minimum) bereiken waar de kromme overgaat van een stijgende functie naar een dalende functie of omgekeerd.

Een functie $f(x)$ heeft in het punt (x_0, y_0) een extremum als in dat punt aan de volgende voorwaarden voldaan is:

- als $f'(x_0) = 0$ en $f''(x_0) > 0$ zal het extremum een minimum zijn, en



Figuur .4: voorbeeld 1

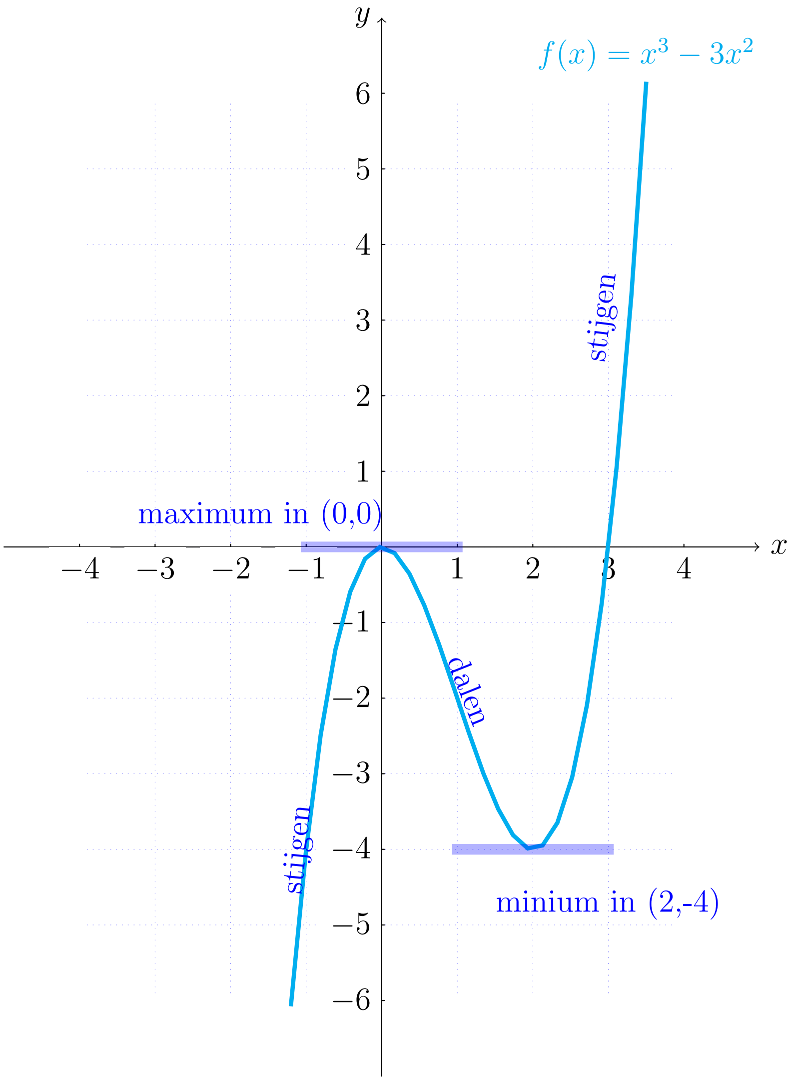
- als $f^{'}(x_0) = 0$ en $f^{''}(x_0) < 0$ zal het extremum een maximum zijn.

Opmerking

- Opmerking 1: in een extremum bezit de functie een horizontale raaklijn (aangezien $f^{'}(x_0) = 0$ is).
- Opmerking 2: indien $f^{'}(x_0) = 0$ en ook $f^{''}(x_0) = 0$ werkt deze methode niet om na te gaan of er in x_0 een extremum is. In dat geval gaan we naar de derde afgeleide kijken. Als $f^{'''}(x_0) \neq 0$ dan is het punt x_0 een buigpunt. Indien ook de derde afgeleide nul is moeten we naar de eerstvolgende afgeleide gaan kijken die niet nul is. Stel dat deze van de n^{de} orde is, dus $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Als dan n even is, is er in x_0 een lokaal minimum als $f^{(n)}(x_0) > 0$, en een lokaal maximum als $f^{(n)}(x_0) < 0$. Is de n^{de} oneven dan is x_0 terug een buigpunt.

Tip: als je dit moeilijk kan onthouden, denk dan aan de eenvoudige functies $f(x) = x^2$ en $f(x) = x^3$. De functie x^2 heeft een minimum in nul, terwijl x^3 in de oorsprong een buigpunt heeft.

Voorbeeld 2 Onderzoek het stijgen en dalen van volgende functie f met voorschrift: $f(x) = x^3 - 3x^2$ in onderstaande figuur.



Figuur .5: Voorbeeld stijgen en dalen

De eerste afgeleide $f'(x) = 3x^2 - 6x$ is nul als $3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0$, dus als $x = 0$ of als $x = 2$.

Om de y-coördinaat van deze extrema punten te vinden vullen we $x = 0$ en $x = 2$ in in de functie $f(x)$. Dit geeft: $f(0) = 0$ en $f(2) = -4$.

De functie f zal in de punten $(0, 0)$ en $(2, -4)$ een extremum bezitten. In het punt $(0, 0)$ is dit een maximum en in het punt $(2, -4)$ een minimum. De raaklijn is in die punten ook telkens horizontaal.

Aangezien de eerste afgeleide een tweedegraadsfunctie is, zullen we het tekenverloop van de tweedegraadsfunctie toepassen, zie onderstaande tabel.

x		0		2	
$f'(x) = 3x(x-2)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0 max	$\searrow$	-4 min	$\nearrow$

Convex, concaaf en buigpunten

Ook de tweede afgeleide speelt een belangrijke rol bij het onderzoek naar het verloop van een functie. Men zal dus ook het tekenverloop van de tweede afgeleide onderzoeken.

Definitie Als de tweede afgeleide $f''(x) > 0$ is in een interval, dan zal de functie in dat interval **hol of concaaf** zijn (symbool: $\bigcup$).

Als de tweede afgeleide $f''(x) < 0$ is in een interval, dan zal de functie in dat interval **bol of convex** zijn (symbool: $\bigcap$).

Punten waar de kromme overgaat van convex naar concaaf of omgekeerd, noemt men **buigpunten**. In een buigpunt verandert dus de tweede afgeleide van teken. Een functie $f(x)$ heeft in het punt (x_0, y_0) een buigpunt als in dat punt aan de volgende voorwaarden voldaan zijn: $f''(x_0) = 0$ en $f'''(x_0) \neq 0$

Opmerking

- Opmerking 1: in een buigpunt snijdt de raaklijn de kromme, deze raaklijn noemt men de buigraaklijn.
- Opmerking 2: aangezien de kromming in een buigpunt verandert, is een buigpunt nooit een extremum.

Voorbeeld 3 Onderzoek het hol en bol zijn van de functie f met voorschrift $f(x) = x^3 - 3x^2$, zie onderstaande figuur.

De eerste afgeleide is $f'(x) = 3x^2 - 6x$

De tweede afgeleide is $f''(x) = 6x - 6$ en is nul als $6x - 6 = 6(x-1) = 0$, en dus als $x = 1$.

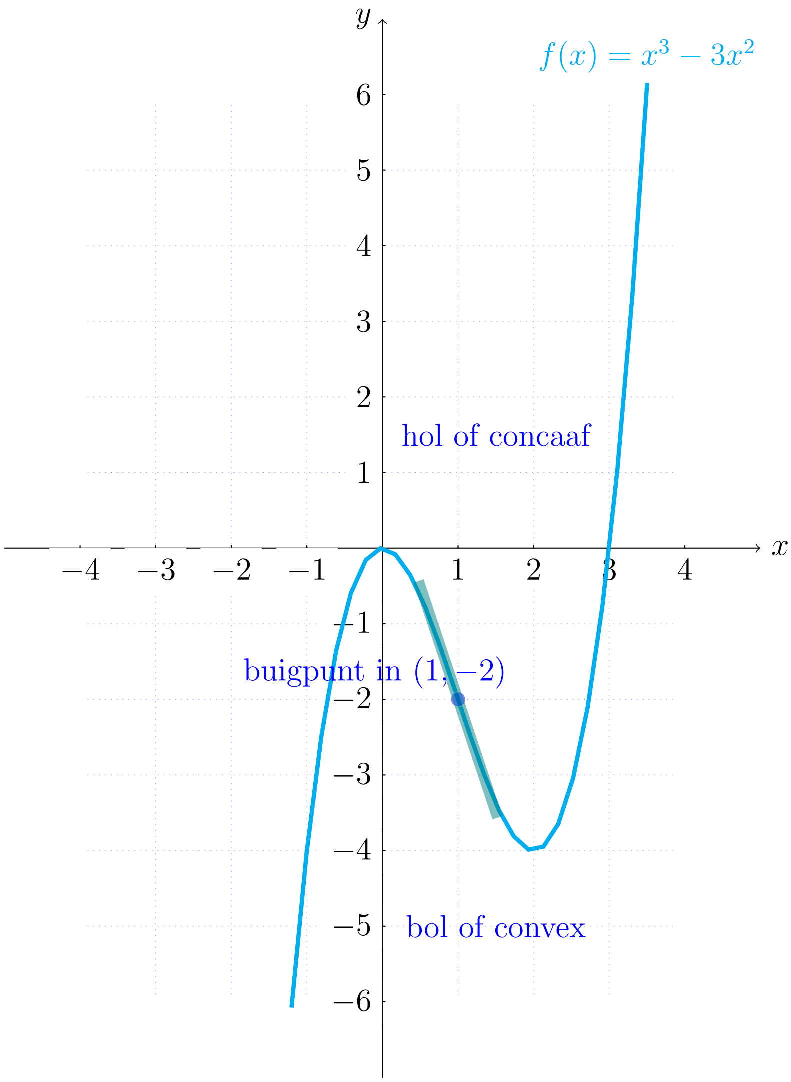
Om de y-coördinaat van dit buigpunt te vinden vullen we $x = 1$ in in de functie $f(x)$. Dit geeft: $f(1) = -2$.

Aangezien de tweede afgeleide een eerstegraadsfunctie is, zullen we het tekenverloop van de eerstegraadsfunctie toepassen, zie onderstaande tabel.

x		1	
$f''(x) = 6(x-1)$	-	0	+
$f(x)$	$\bigcap$	-2 buigpunt	$\bigcup$

Voorbeeld 4 Wat kan je zeggen over de functie f met voorschrift $f(x) = x^3$ in het punt waar $x = 0$ is?

De eerste afgeleide is $f'(x) = 3x^2$ en is nul als $x = 0$. Dus $x = 0$ kan een extremum zijn.



Figuur .6: Voorbeeld convex, concaaf en buigpunten

De tweede afgeleide is $f''(x) = 6x$ en is nul als $x = 0$. We kunnen niks zeggen; we moeten naar de eerstvolgende afgeleide gaan kijken die niet nul is.

De derde afgeleide is $f'''(x) = 6$. De derde orde afgeleide (n=3 is oneven) is niet nul, dus het punt $x = 0$ is een buigpunt (en geen extremum).

Voorbeeld 5 Zoek de buigpunten van de functie f met voorschrift $f(x) = \cos(x)$.

De eerste afgeleide is $f'(x) = -\sin(x)$. De nulpunten van $\sin x$ zijn $\{x = n\pi \text{ met } n \in \mathbb{Z}\}$. In deze punten kan $f(x) = \cos(x)$ een extremum bereiken.

De tweede afgeleide is $f''(x) = -\cos(x)$. De nulpunten van $\cos(x)$ zijn $\{x = \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ met } n \in \mathbb{Z}\}$. In deze punten verandert de cosinus en dus ook de tweede afgeleide van teken, dus dit zijn buigpunten. M.a.w. de nulpunten van de functie $f(x) = \cos(x)$ zijn tevens de buigpunten (dit geldt ook voor de sinus).

1.4 Eerste- en tweedegraadsfuncties

Constante functies

Definitie Functievoorschrift: $f(x) = a$ met $a \in \mathbb{R}$

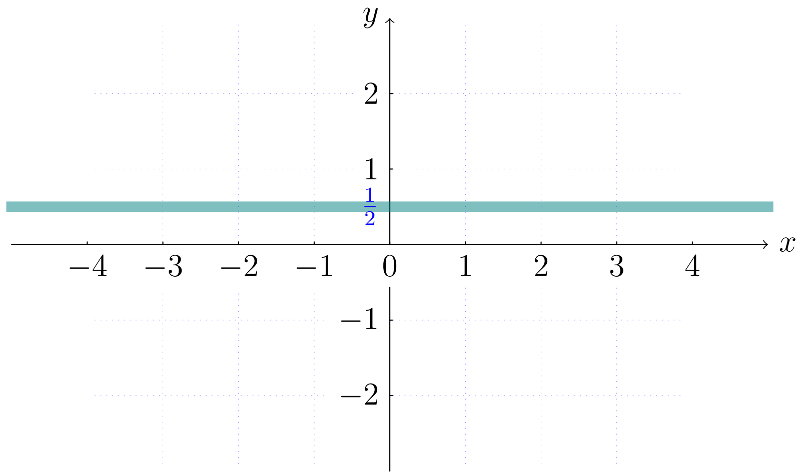
Grafische voorstelling van de constante functie met vergelijking $f(x) = a$ is een horizontale rechte, waarbij de y-as wordt gesneden in het punt $(0, a)$.

Tekenverloop:

x	
$f(x)$	teken van a

Tabel 1. Tekenverloop van een constante functie

Voorbeeld 1 Gegeven de functie: $f(x) = \frac{1}{2}$.



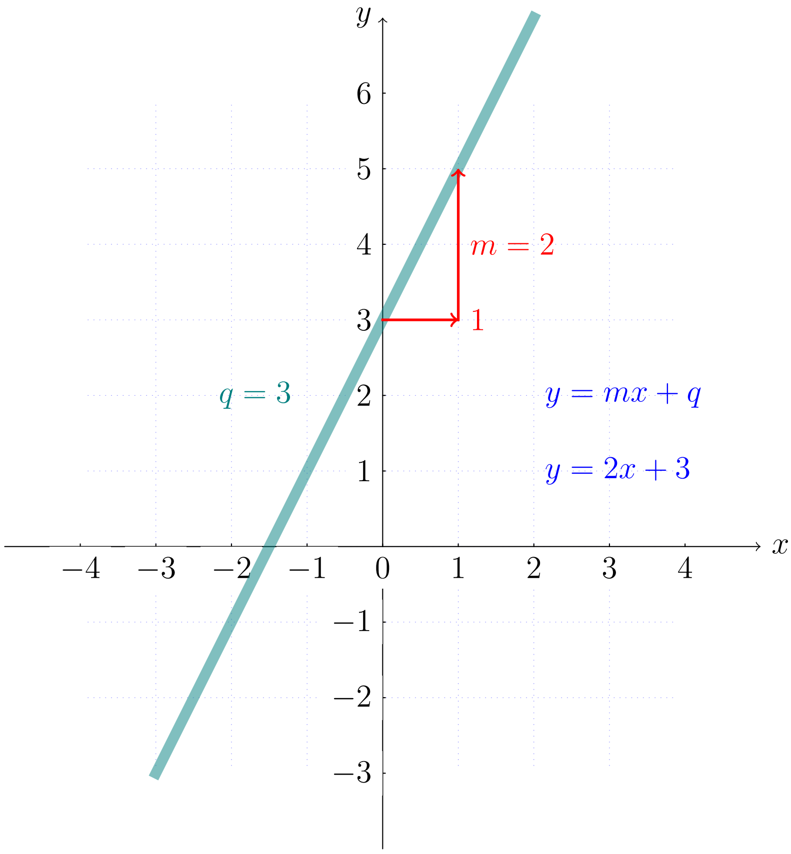
Figuur .7: Voorbeeld constante functie

Grafische voorstelling:

- het domein van de constante functie is altijd: $\text{dom} f = \mathbb{R}$
- het beeld van deze constante functie is: $\text{bld} f = \frac{1}{2}$

Tekenverloop

x	
$f(x)$	$+$



Figuur .8: Voorbeeld van een eerstegraadsfunctie

Eerstegraadsfuncties of lineaire functies

Definitie Functievoorschrift: $f(x) = ax + b$ met $a \in \mathbb{R}_0$ en $b \in \mathbb{R}$.

Voorbeeld 2 $f(x) = 10x + 1$, $f(x) = 8 - 5x$, $f(x) = 3x$

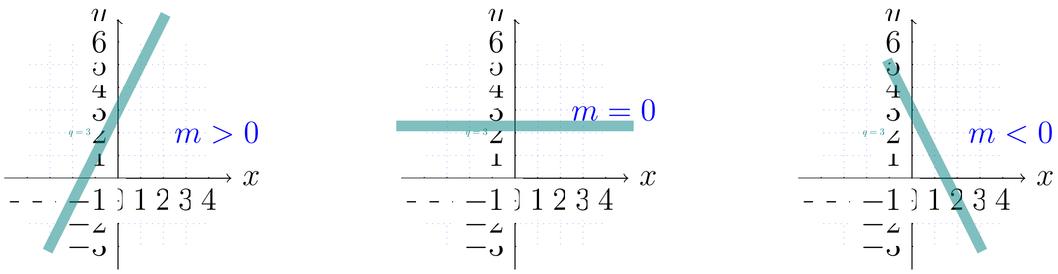
Grafische voorstelling van de lineaire functie is een rechte.

- Het domein van elke lineaire functie is: $\text{dom} f = \mathbb{R}$.
- Het beeld van deze lineaire functie is: $\text{bld} f = \mathbb{R}$.

De rechte wordt bepaald door de **richtingscoëfficiënt** (de **rico**) 'a' en de intercept 'b'. De rico bepaalt de helling van de rechte. Als x met 1 eenheid toeneemt, dan neemt y met a eenheden toe. Hoe groter de absolute waarde van de rico a, hoe steiler de rechte.

- een positieve rico hoort bij een stijgende rechte
- een negatieve rico hoort bij een dalende rechte

Een rechte evenwijdig met de x-as heeft een rico gelijk aan 0. Dit is in feite de constante functie $f(x) = b$.



(a) (b) (c)

Figuur .9: Het teken van de richtingscoëfficiënt bepaalt of de rechte stijgt, constant is of daalt.

Een rechte evenwijdig met de y-as heeft geen rico (in dit geval zou $m = \infty$ moeten zijn).
Nulpunten: het snijpunt met de x-as is het punt $(-\frac{b}{a}, 0)$.
Tekenverloop:

x		$-\frac{b}{a}$	
$f(x)$	-	0	+

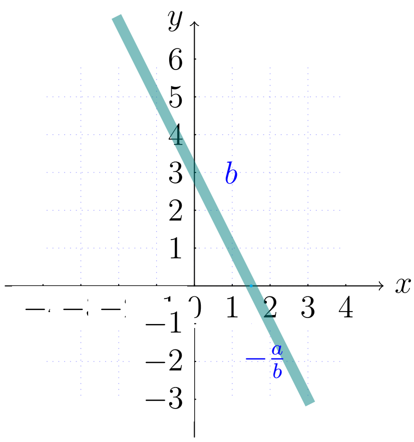
Tabel 2. Tekenverloop voor $a > 0$

x		$-\frac{b}{a}$	
$f(x)$	+	0	-

Tabel 3. Tekenverloop voor $a < 0$.

Voorbeeld 3 Gegeven de functie: $f(x) = -2x + 3$.
Grafische voorstelling:

- het domein van elke lineaire functie is: $\text{dom} f = \mathbb{R}$
- het beeld van deze lineaire functie is: $\text{bld} f = \mathbb{R}$



Figuur .10: Voorbeeld van de grafische voorstelling van een eerstegraadsfunctie

Nulpunten:

We lossen de vergelijking $y = f(x) = -2x + 3 = 0$ op en vinden: $x = \frac{3}{2}$. Het snijpunt met de x-as is het punt $(\frac{3}{2}, 0)$.

Tekenverloop: zie Tabel 4.

x		$\frac{3}{2}$	
$f(x)$	$+$	0	$-$

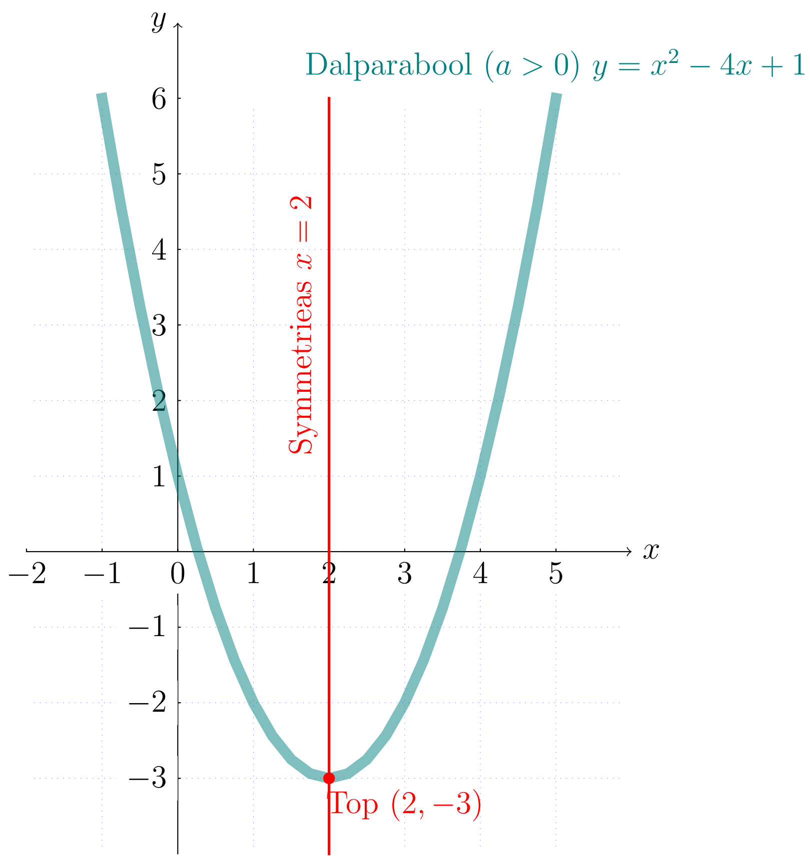
Tabel 4. Voorbeeld eerstegraadsfunctie: tekenverloop

Tweedegraadsfuncties of kwadratische functies

Definitie Functievoorschrift: $f(x) = ax^2 + bx + c$ met $a \in \mathbb{R}_0$ en $b, c \in \mathbb{R}$

Voorbeeld 4 $f(x) = 3x^2 + 10x + 1$, $f(x) = -2x^2 + 5$, $f(x) = x^2$

Grafische voorstelling van de kwadratische functie is een parabool.



Figuur .11: Grafische voorstelling van een tweedegraadsfunctie.

- als $a > 0$ is de top van de **dalparabool** het minimum
- als $a < 0$ is de top van de **bergparabool** het maximum

Hoe groter de absolute waarde van a, hoe smaller de opening van de parabool is.

De verticale lijn door de top is de **symmetrieas**. De vergelijking van de symmetrieas is: $x = -\frac{b}{2a}$

Het laagste punt van een dalparabool of het hoogste punt van een bergparabool heet de **top** van de parabool. De top is het snijpunt van de parabool met de verticale symmetrieas. De coördinaten van de top zijn dus $(-\frac{b}{2a}, y)$. De y-waarde vinden we door de gevonden x-waarde in het functievoorschrift $f(x)$ in te vullen, dus $y = f(-\frac{b}{2a})$.

Nulpunten: stellen we $y = f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ (in dat geval spreken we van de **vierkantsvergelijking**), dan vinden we de snijpunten met de x-as. Hiervoor moeten we dus de (vierkants)vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ oplossen. Daarvoor bepaal je best eerst de **discriminant** $D = b^2 - 4ac$ (van de abc formule). Met de discriminant bepaal je het aantal snijpunten van de kwadratische functie met de x-as.

- als $D > 0$, dan heeft de vergelijking twee oplossing: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ en $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$. De parabool snijdt de x-as op twee plaatsen.
- als $D = 0$, dan heeft de vergelijking één oplossing: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. De parabool raakt met zijn top de x-as in één punt.
- als $D < 0$, dan heeft de vergelijking geen reële oplossingen. De parabool ligt ofwel boven ofwel onder de x-as.

Tekenverloop:

- Als $D > 0$

x		x_1		x_2	
$f(x)$	teken van a	0	tegengesteld teken van a	0	teken van a

- Als $D = 0$

x		$x_1 = x_2$	
$f(x)$	teken van a	0	teken van a

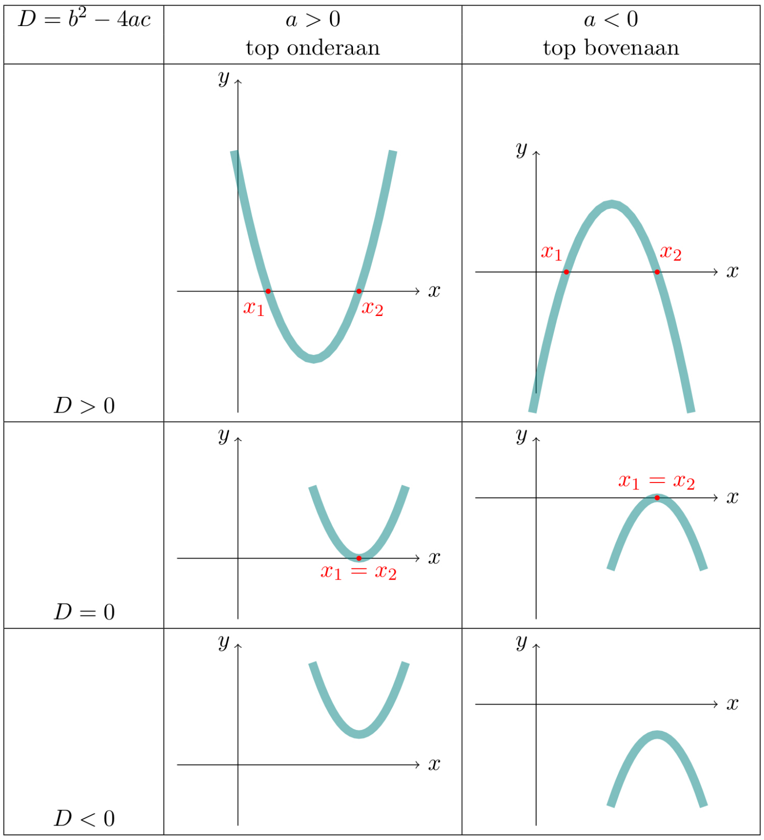
- Als $D < 0$

x	
$f(x)$	teken van a

Voorbeeld 5 Gegeven de functie f met voorschrift: $f(x) = -x^2 - 5x + 6$

Grafische voorstelling:

- het domein van elke kwadratische functie is: $\text{dom} f = \mathbb{R}$



Figuur .12: Grafische voorstelling van tweedegraadsfuncties voor verschillende waarden van a en D.

- $a = -1 < 0$ dus het is een bergparabool
- de symmetrieas ligt bij $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{2.(-1)} = -\frac{5}{2} = -2,5$
- de top heeft de coördinaten $(x, y) = (-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a})) = (-2,5; 12,25)$
- de top van deze bergparabool ligt op $y = 12,25$. Dit is dus de grootste waarde die y kan bereiken. Het beeld van deze kwadratische functie is daarom: $\text{bld} f =]-\infty; 12,25]$

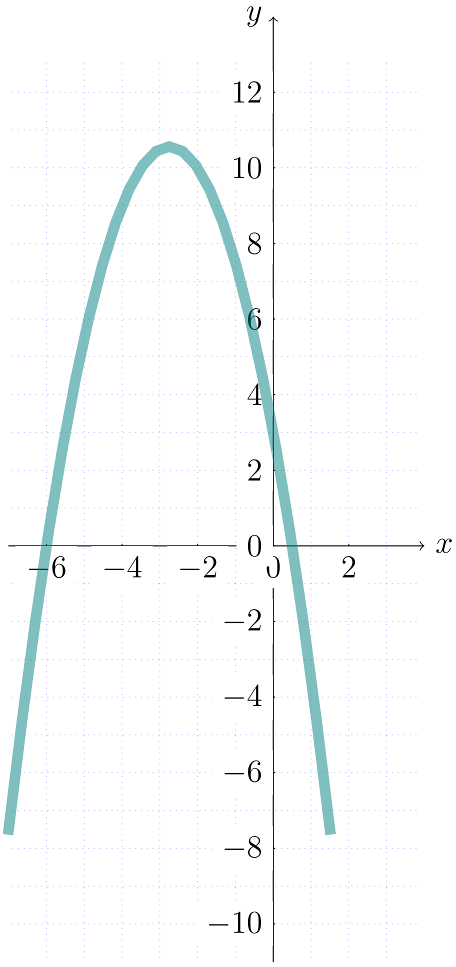
Nulpunten:

We lossen de vergelijking $y = f(x) = -x^2 - 5x + 6 = 0$ op d.m.v. de abc formule. We berekenen daarvoor eerst de discriminant D:

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4.(-1).6 = 25 + 24 = 49$$

Omdat $D > 0$ zijn er 2 reële oplossingen, dus 2 snijpunten met de x-as. Deze zijn:

- $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5)+\sqrt{49}}{2.(-1)} = -6$
- $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5)-\sqrt{49}}{2.(-1)} = 1$



Figuur .13: Voorbeeld tweedegraadsfuncties: grafische voorstelling

De parabool snijdt de horizontale as in de koppels (-6,0) en (1,0) en de top ligt boven de x-as (want het is een bergparabool).

Tekenverloop:

x		-6		1	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Tabel 5. Voorbeeld tweedegraadsfuncties: tekenverloop

1.5 Tweedegraadsvergelijking - voorbeeld 1

Zie filmpje MOOC.

1.6 Tweedegraadsvergelijking - voorbeeld 2

Zie filmpje MOOC.

1.7 Veeltermfuncties of polynoomfuncties

Functievoorschrift

Definitie Een veelterm- of polynoomfunctie heeft als functievoorschrift een veelterm in 1 onbekende, dus $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ met $a_n \in \mathbb{R}_0$ en $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$. De constanten a_i noemen we de **coëfficiënten**.

De (meestal eerste) term met de hoogste macht bepaalt de **graad** van de veeltermfunctie.

Voorbeeld 1 $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + 10x$, $f(x) = x^3$

Grafische voorstelling

Het domein van een veeltermfunctie is: $\text{dom} f = \mathbb{R}$

De grafieken van de elementaire machtsfuncties $y = x^n$ met positieve exponent zijn hieronder weergegeven:

Nulwaarden

Een n^{de} graadsveeltermfunctie met oneven n heeft minimum 1 en maximum n snijpunten met de x-as.

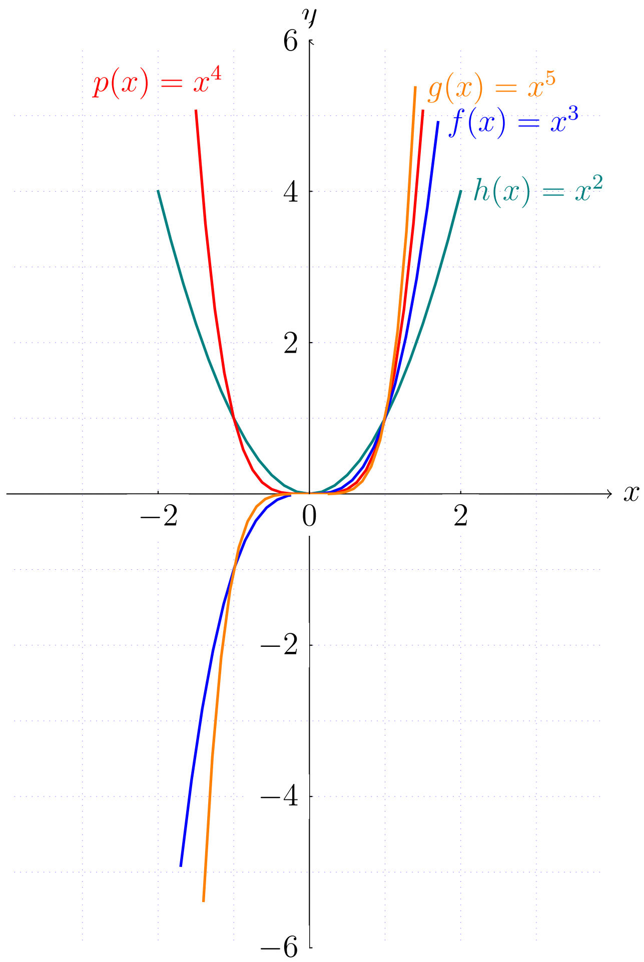
De grafieken van de elementaire machtsfuncties $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ met negatieve exponent zijn hieronder weergegeven:

Een n^{de} graadsveeltermfunctie met even n heeft minimum 0 en maximum n snijpunten met de x-as. De grafiek kan namelijk helemaal boven of onder de x-as liggen, en dus geen snijpunten hebben met de x-as.

Voorbeeld 2 De functie f met voorschrift $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2 + x$ is een 4^{de} graadsvergelijking en heeft in dit geval 4 snijpunten met de x-as:

Nulwaarden vinden

De nulwaarden voor een veeltermfunctie vinden we door het functievoorschrift te ontbinden in een product van factoren met ten hoogste een tweede graad, m.a.w. we ontbinden de veeltermfunctie $f(x)$ in lineaire factoren $x + a$ en in kwadratische factoren $ax^2 + bx + c$. De nulpunten van de functie $f(x)$ zijn dan de nulpunten van de verschillende factoren.



Tekenverloop

Eens een veelterm ontbonden is in factoren, is het eenvoudig om het tekenverloop er van te bepalen. Het tekenverloop van een constante, een lineaire en een kwadratische functie is immers gekend. Het teken van een veeltermfunctie is het product van de tekens van de factoren.

Voorbeeld 3 (een tweedegraadsfunctie herleiden door substitutie)

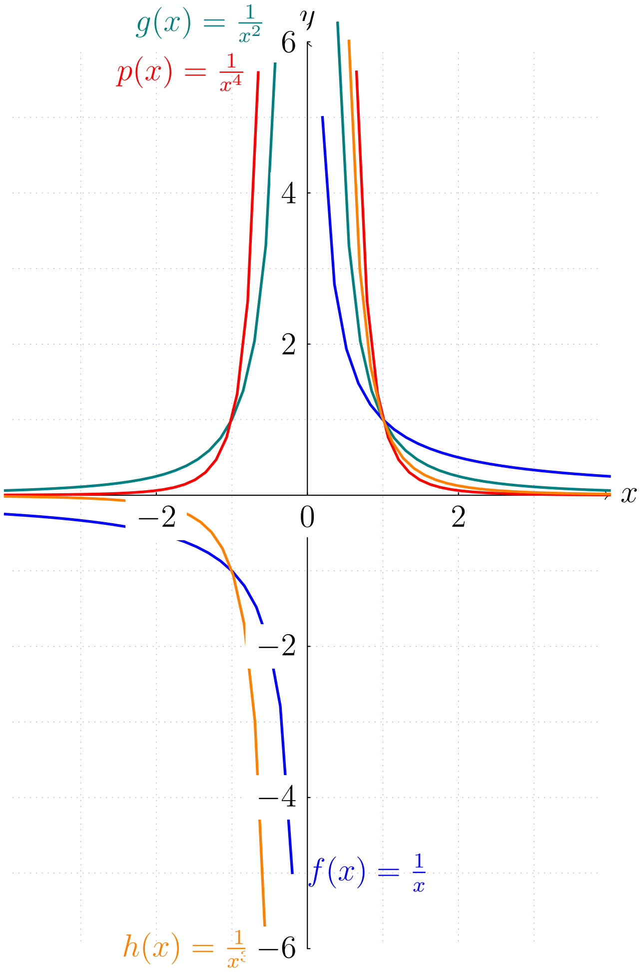
Deze methode is toepasbaar bij bikwadratische vergelijkingen. Dit zijn vergelijkingen van de vorm $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Dit type van vergelijkingen kan herleid worden tot een kwadratische vergelijking met behulp van de substitutiemethode. Stel hierbij $x^2 = t$.

We bekijken de veelterm $f(x) = 4x^4 - 5x^2 + 1$

Nulwaarden

We bepalen de nulwaarden door de veelterm te ontbinden in factoren, gebruik makend van de substitutiemethode:

$$4x^4 - 5x^2 + 1 = 0 \xrightarrow{x^2 = t} 4t^2 - 5t + 1 = 0$$



We bekomen een kwadratische vergelijking. Hiervan zijn de nulpunten:

$$t_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5)+\sqrt{9}}{2.4} = 1$$
$$t_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5)-\sqrt{9}}{2.4} = \frac{1}{4}$$

De 2 oplossingen voor t zijn $t_1 = 1$ en $t_2 = \frac{1}{4}$ zodat de vergelijking kan geschreven worden als: $4t^2 - 5t + 1 = (t-1)(t-\frac{1}{4})$.

Aangezien $x^2 = t$ zijn de 4 oplossingen voor x: $x_{1 \text{ en } 2} = \pm\sqrt{t_1}$ en $x_{3 \text{ en } 4} = \pm\sqrt{t_2}$

Dit geeft $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{1}{2}$ en $x_4 = -\frac{1}{2}$.

De gegeven vergelijking kan dus ook geschreven worden als:

$$f(x) = 4x^4 - 5x^2 + 1 = (x-1)(x+1)(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$$

Tekenverloop

Maak één overzichtelijke tabel met bovenaan alle nulpunten in stijgende volgorde. Per rij onderzoek je het teken van elke factor van $f(x)$. Het teken van $f(x)$ is dan het product van deze tekens.

x		-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1	
$(x-1)$	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$(x-\frac{1}{2})$	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$(x+\frac{1}{2})$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$(x+1)$	$-$	0	+	+	+	+	+	+	+
$f(x)$	+	0	$-$	0	+	0	$-$	0	+

Voorbeeld 4 (ontbinden in factoren)

We bekijken de veelterm $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 6x + 8$

Nulwaarden

We bepalen de nulwaarden door de veelterm te ontbinden in factoren. Soms kunnen we gebruik maken van merkwaardige producten of, zoals in dit geval, door het groeperen van gemeenschappelijke termen:

$$\begin{aligned} 3x^3 - 4x^2 - 6x + 8 &= (3x^3 - 4x^2) - (6x - 8) \\ &= x^2(3x-4) - 2(3x-4) \\ &= (x^2-2)(3x-4) \\ &= (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(3x-4) \end{aligned}$$

De gegeven vergelijking $3x^3 - 4x^2 - 6x + 8 = 0$ heeft dus 3 nulpunten:

$$x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2} \text{ en } x_3 = \frac{4}{3}$$

Tekenverloop

in stijgende volgorde. Per rij onderzoek je het teken van elke factor van $f(x)$. Het teken van $f(x)$ is dan het product van deze tekens.

x		$-\sqrt{2}$		$\frac{4}{3}$		$\sqrt{2}$	
$(x-\sqrt{2})$	-	-	-	-	-	0	+
$(x+\sqrt{2})$	$-$	0	+	+	+	+	+
$(3x-4)$	-	-	-	0	+	+	+
$f(x)$	$-$	0	+	0	$-$	0	+

Voorbeeld 5 (regel van Horner)

We bekijken de veelterm $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$

Nulpunten

We bepalen de nulpunten door de veelterm te ontbinden in factoren gebruik makend van de regel van Horner.

Ga na welke mogelijke delers van a_0 kunnen afgesplitst worden zonder rest. Hier zijn de delers van $a_0 = 4$: ± 1, ± 2 en ± 4

We proberen $x = +2$: $f(2) = (2)^4 - 4(2)^3 + 5(2)^2 - 4(2) + 4 = 0$

Dus de factor $(x-2)$ kan afgesplitst worden. De coëfficiënten van de resterende veelterm vinden we via de regel van Horner:

	1	-4	5	-4	4
2	$\downarrow$	2	-4	2	-4
	1	-2	1	-2	**0**

We vinden $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = (x-2)(x^3 - 2x^2 + x - 2)$

We kunnen proberen om nog een factor af te splitsten.

We proberen nog eens $x = +2$: $f(2) = (2)^3 - 2(2)^2 + (2) - 2 = 0$

Dus de factor $(x - 2)$ kan nog eens afgesplitst worden. De coëfficiënten van de resterende veelterm vinden we terug via de regel van Horner:

	1	-2	1	-2
2	$\downarrow$	2	0	2
	1	0	1	**0**

We vinden tenslotte: $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2(x^2+1)$

Merk op dat de discriminant D van (x^2+1) negatief is zodat deze factor geen nulpunten heeft.

We vinden voor $x = 2$ een dubbel nulpunt; deze veelterm heeft dus 2 samenvallende snijpunten met de x-as.

Aangezien zowel de factor $(x-2)^2$ als ook de factor (x^2+1) steeds positief zijn, is er voor geen enkele waarde van x een negatief beeld (de functie bevindt zich overal boven de x-as, en in het punt $x = 2$ raakt deze veelterm de x-as).

Tekenverloop

Maak één overzichtelijke tabel met bovenaan alle nulpunten in stijgende volgorde. Per rij onderzoek je het teken van elke factor van $f(x)$. Het teken van $f(x)$ is dan het product van deze tekens.

x		2	
$(x-2)^2$	$+$	0	$+$
(x^2+1)	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	0	$+$

1.8 Rationale functies

Definitie Functievoorschrift

$f(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$ met $t(x)$ en $n(x)$ veeltermfuncties en waarbij de graad van $n(x)$ minstens 1 is.

Voorbeeld 1 Voorbeelden van rationale functies: $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, $f(x) = \dfrac{3x-9}{x-3}$

Voorbeelden van niet-rationale functies: $f(x) = \dfrac{\sin x}{4x}$, $f(x) = \dfrac{2^x}{3x+5}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-3}$

Grafische voorstelling

Het domein van een rationale functie is $\mathbb{R}\backslash\{\text{nulpunten van de noemer}\}$.

Definitie Voorbeeld: het domein van $f(x) = \dfrac{2x+2}{x-8}$ is $\mathbb{R} \setminus \{8\}$

Nulpunten

De nulpunten van een rationale functie $f(x)$, zijn de nulpunten van de teller, die niet de nulpunten van de noemer zijn.

De nulpunten van de noemer, noemen we de polen van de rationale functie $f(x)$. Bij elke pool hoort een verticale asymptoot.

Punten die zowel nulpunt zijn van teller als noemer, geven aanleiding tot de vorm $\frac{0}{0}$. Aangezien deze punten de noemer nul maken, horen ze niet tot het domein, maar geven ook geen aanleiding tot een asymptoot.

Asymptoten

1. De rechte $x = a$ is een **verticale asymptoot** (VA) van de rationale functie $f(x)$ als en slechts als a een nulpunt is van de noemer en geen nulpunt van de teller.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \pm\infty \quad \text{of} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \ x = a \text{ is een VA}$$

   Voorbeeld 2

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

   Het nulpunt van de noemer, of de pool is $x = 1$. Dit punt is geen nulpunt van de teller. Dus, $x = 1$ is een verticale asymptoot. De functie $f(x)$ is niet gedefinieerd in het punt $x = 1$.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = -\infty \quad \text{en} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = +\infty \Rightarrow \ x = 1 \text{ is een VA}$$

2. Een rationale functie $f(x)$ heeft een **horizontale asymptoot** (HA) als en slechts als de graad van de teller $\leq$ graad van de noemer.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \Rightarrow \ y = b \text{ is een HA}$$

   Voorbeeld 3

$$f(x) = \frac{2x+7}{4x^2+x+2}$$

De graad van de teller is 1, en de graad van de noemer is 2; dus deze functie heeft een horizontale asymptoot.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+7}{4x^2+x+2} \overset{HGT}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{4x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2x} = 0 \Rightarrow \; y = 0 \text{ is een HA}$$

3. Een rationale functie $f(x)$ heeft een **schuine asymptoot** (SA) als en slechts als de graad van de teller = graad van de noemer +1.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{en} \quad q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] \Rightarrow \; y = mx + q \text{ is een SA}$$

Voorbeeld 4

$$f(x) = \frac{x^3-4}{2x^2}$$

De graad van de noemer is 2, en de graad van de teller is (2+1=) 3, dus deze functie heeft een schuine asymptoot.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-4}{2x^3} \overset{HGT}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2} \\ q &= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^3-4}{2x^2} - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^3-4-x^3}{2x^2}\right] = 0 \\ &\Rightarrow \; y = \frac{1}{2}x \text{ is een SA} \end{aligned}$$

Opmerking Als een functie $f(x)$ voor $x \to +\infty$ een horizontale asymptoot heeft, kan ze voor $x \to +\infty$ geen schuine asymptoot meer hebben. Hetzelfde geldt voor $x \to -\infty$.

Tekenverloop

Om het tekenverloop van een rationale functie te bepalen, moet het tekenonderzoek van de teller en de noemer worden uitgevoerd. Het tekenverloop van een constante, een lineaire en een kwadratische functie is gekend (zie Module 2 sectie 1.4 en 1.7). Het teken van de rationale functie is het product van het teken van de teller en het teken van de noemer.

Voorbeeld 5 Bespreek de rationale functie

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2-2}$$

<u>Domein</u>

$\operatorname{dom} f(x) = \mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ want de noemer mag niet nul worden. Dit gebeurt als $x^2 - 2 = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}$.

<u>Nulwaarden</u>

Stap 1: Bepaal de nulpunten van de teller, deze zijn de nulpunten van de functie $f(x)$. Dus $3x^2 = 0 \iff x = 0$.

$x = 0$ is een nulpunt van de teller, maar niet van de noemer, dus dit punt is een nulpunt van de functie $f(x)$.

Stap 2: Bepaal de nulpunten van de noemer, deze zijn de polen van de functie $f(x)$. Bij elke pool hoort een verticale asymptoot.

$x = -\sqrt{2}$ en $x = +\sqrt{2}$ zijn de nulpunten van de noemer, de functie $f(x)$ heeft dus twee verticale asymptoten.

Asymptoten

Stap 3: Ga na of de functie een verticale asymptoot bezit.

De rechte $x = -\sqrt{2}$ is een verticale asymptoot (VA) van de functie $f(x)$ aangezien $-\sqrt{2}$ een nulpunt is van de noemer en geen nulpunt van de teller is.

Hoe verloopt de functie $f(x)$ in de buurt van deze asymptoot:

$$\text{LL}: \lim_{\substack{x \to -\sqrt{2} \\ <}} \left(\frac{3x^2}{x^2-2}\right) = +\infty \quad \text{en} \quad \text{RL}: \lim_{\substack{x \to -\sqrt{2} \\ >}} \left(\frac{3x^2}{x^2-2}\right) = -\infty \Rightarrow x = -\sqrt{2} \text{is een VA.}$$

De rechte $x = +\sqrt{2}$ is een verticale asymptoot (VA) van de functie $f(x)$ aangezien $+\sqrt{2}$ een nulpunt is van de noemer en geen nulpunt van de teller is.

Hoe verloopt de functie $f(x)$ in de buurt van deze asymptoot:

$$\text{LL}: \lim_{\substack{x \to \sqrt{2} \\ <}} \left(\frac{3x^2}{x^2-2}\right) = -\infty \quad \text{en} \quad \text{RL}: \lim_{\substack{x \to \sqrt{2} \\ >}} \left(\frac{3x^2}{x^2-2}\right) = +\infty \Rightarrow x = +\sqrt{2} \text{is een VA.}$$

Stap 4: Ga na of de functie een horizontale asymptoot bezit. De functie $f(x)$ heeft een horizontale asymptoot (HA) aangezien de graad van teller (2^{de} graad) = graad van de noemer (2^{de} graad).

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2-2} \overset{HGT}{=} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3 \Rightarrow y = 3 \text{ is een HA.}$$

Stap 5: Ga na of de functie een schuine asymptoot heeft. De functie $f(x)$ heeft voor $x \to +\infty$ en $x \to -\infty$, al een horizontale asymptoot en kan bijgevolg geen schuine asymptoot meer hebben.

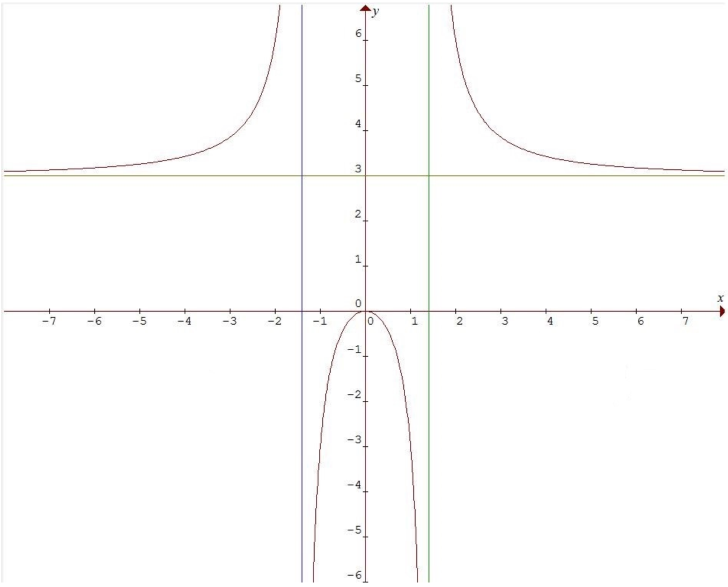
Tekenverloop

Stap 6: - Schrijf in één tabel bovenaan alle nulpunten en alle polen in stijgende volgorde.

- Onderzoek het teken voor elke factor van $f(x)$.
- Het teken van $f(x)$ is dan het product van deze tekens.

x		$-\sqrt{2}$		0		$-\sqrt{2}$		$\longrightarrow \mathbb{R}$
$3x^2$	+		+	0	+		+	
x^2-2	+	0	-	-	-	0	+	
$f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2-2}$	+	|	-	0	-	|	+	

Grafiek



Onthoud De grafiek en het tekenverloop van een rationale functie bepaal je als volgt: $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ met $t(x)$ en $n(x)$ veeltermfuncties en waarbij de graad van $n(x)$ minstens 1 is.

Het domein van een rationale functie is $\mathbb{R}\backslash\{\text{nulpunten van de noemer}\}$.

Stap 1: Bepaal de nulpunten van de teller, dit zijn de nulpunten van de functie $f(x)$.

Stap 2: Bepaal de nulpunten van de noemer, dit zijn de polen van de functie $f(x)$.

Stap 3: De rechte $x = a$ is een **verticale asymptoot** (VA) van de rationale functie $f(x)$ als en slechts als a een nulpunt is van de noemer en maar geen nulpunt van de teller.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \pm\infty \quad \text{of} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \pm\infty \quad \Rightarrow \ x = a \text{ is een VA}$$

Stap 4: Een rationale functie $f(x)$ heeft een **horizontale asymptoot** (HA) als en slechts als de graad van de teller $\leq$ graad van de noemer. Maar hou wel rekening met het domein.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \quad \Rightarrow \ y = b \text{ is een HA}$$

Stap 5: Een rationale functie $f(x)$ heeft een **schuine asymptoot** (SA) als en slechts als de graad van de teller = graad van de noemer +1. Maar hou wel rekening met het domein.

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{en} \quad q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$$
$$\Rightarrow \ y = mx + q \text{ is een SA}$$

Stap 6: Bepaal het tekenverloop

- Schrijf in één tabel bovenaan alle nulpunten en alle polen in stijgende volgorde.
- Onderzoek het teken voor elke factor van $f(x)$.
- Het teken van $f(x)$ is dan het product van deze tekens.

1.9 Irrationale functies

Voorbeeld 1 $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$, $f(x)=2\cdot\sqrt[3]{x^5-3x^2+7}-x-1$, $f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{10-x^2}}$

Grafische voorstelling

De grafiek van de elementaire wortelfuncties $y=\sqrt[n]{x}$ is hieronder weergegeven. Denk eraan dat (machts)wortels ook als macht kunnen geschreven worden: $y=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$.

)

Om het domein (de toegelaten waarden voor x) te bepalen moeten we rekening houden met zowel de *bestaansvoorwaarden* als de *kwadrateringsvoorwaarde*.

- Bestaansvoorwaarde(n): de uitdrukking onder een even machtswortel moet steeds positief zijn!! En niet vergeten, de eventuele noemer mag niet nul worden.
- Kwadrateringsvoorwaarde: we spreken af dat een even machtswortel uit een uitdrukking steeds positief is.

Het domein van een irrationale functie valt samen met de intervallen, waar de vorm onder de vierkantswortel niet negatief is en waar de uitdrukking van een even machtsfunctie steeds een positief resultaat oplevert.

Voorbeeld 2

$$f(x)=\sqrt{x^2-4}$$

)

Om het domein van de functie $f(x)$ te bepalen moet er aan de bestaansvoorwaarde(n) voldaan zijn. In dit geval mag de functie onder het wortelteken niet negatief worden. We werken dit verder uit:

De bestaansvoorwaarde: $$\begin{aligned} x^2-4\geq 0 &\iff x^2\geq 4\\ &\iff x\geq 2 \text{ en } x\leq -2\end{aligned}$$

De kwadrateringsvoorwaarde is reeds voldaan (want er staat infeite $f(x)=+\sqrt{x^2-4}$).

Welke waarden van x voldoen hier nu aan? dom$f(x)$ is voor $x\in]-\infty,-2]\bigcup[2,+\infty[$.

Voorbeeld 3

$$f(x)=x+\sqrt{5x+2}-1$$

)

Om het domein van de functie $f(x)$ te bepalen moet er aan de bestaansvoorwaarde(n) voldaan zijn. In dit geval mag de functie onder het wortelteken niet negatief worden. We werken dit verder uit:

De bestaansvoorwaarde:
$$\begin{array}{llcl} & 5x+2 \geq 0 & \iff x & \geq & -\frac{2}{5} \\ \text{dus} & & \iff x & \in & [-\frac{2}{5}, +\infty[\end{array}$$

Nu moeten we nog de kwadrateringsvoorwaarde controleren, m.a.w. volgens onze gemaakte afspraak is een even machtswortel uit een uitdrukking steeds positief is:

De bestaansvoorwaarde:
$$\begin{array}{llcccl} & x+\sqrt{5x+2}=1 & \iff & \sqrt{5x+2} & = & 1-x \geq 0 \\ & & \iff & 1-x & \geq & 0 \\ \text{dus} & & \iff & x & \leq & 1 \\ \text{of} & & \iff & x & \in &]-\infty, 1] \end{array}$$

De mogelijke waarden voor x moeten aan beide voorwaarden voldoen. Dit betekent: $\text{dom} f(x)$ is voor $x \in [-\frac{2}{5}, 1]$

Nulpunten

De vergelijking wordt $f(x) = 0$.

De wortelvormen kan je wegwerken door beide leden van de vergelijking te verheffen tot een gepaste macht. Bepaal vervolgens de nulpunten van de functie. Wanneer een breuk voorkomt in het functievoorschrift, bepaal dan ook de nulpunten van de noemer, deze zijn de polen.

Asymptoten

1. De rechte $x = a$ is een **verticale asymptoot** (VA) van de irrationale functie $f(x)$ als en slechts als a een nulpunt is van de noemer en geen nulpunt van de teller.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \pm\infty \quad \text{of} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = a \text{ is een VA}$$

2. Een irrationale functie $f(x)$ heeft een **horizontale asymptoot** (HA) als en slechts als de graad van de teller $\leq$ graad van de noemer.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \Rightarrow y = b \text{ is een HA}$$

3. Een irrationale functie $f(x)$ heeft een **schuine asymptoot** (SA) als en slechts als de graad van de teller $=$ graad van de noemer $+1$.

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{en} \quad q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] \Rightarrow y = mx + q \text{ is een SA}$$

Tekenverloop

Wanneer je de wortels hebt weggewerkt door de vergelijking te verheffen tot een gepaste macht, zal je een veeltermfunctie, een kwadratische of een lineaire functie bekomen. Pas het desbetreffend tekenonderzoek toe.

Voorbeeld 4 Bespreek de irrationale functie $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$

Domein

$$\text{dom} f(x) = [-2, 1[\bigcup]1, 2] \tag{1}$$

want de bestaansvoorwaarden zijn:

$$\begin{array}{rcl} 4-x^2 \geq 0 & \iff & x^2 \leq 4 \\ \text{dus} & \iff & x \leq 2 \text{ en } x \geq -2 \\ \text{of} & \iff & x \in [-2,2] \end{array}$$

en:

$$x-1 \neq 0 \text{ dus } x \neq 1$$

De kwadrateringsvoorwaarde is hier niet van toepassing (vanwege de noemer kan $f(x)$ ook negatief worden).

Nulpunten

Stap 1: Bepaal de nulpunten van de teller, deze zijn de nulpunten van de functie $f(x)$.

Dus

$$\begin{array}{rcl} f(x)=0 & \iff & \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}=0 \\ & \iff & \sqrt{4-x^2}=0 \\ & \iff & 4-x^2=0 \\ & \iff & x^2=4 \\ & \iff & x=\pm 2 \end{array}$$

Stap 2: Bepaal eventueel de nulpunten van de noemer, deze zijn de polen van de functie $f(x)$. Bij elke pool hoort een verticale asymptoot.

Het nulpunt van de noemer is $x=1$ (dit is dan tevens de vergelijking van de verticale asymptoot).

Asymptoten

Stap 3: Ga na of de functie een verticale asymptoot bezit.

De rechte $x=1$ is een verticale asymptoot (VA) van de functie $f(x)$ aangezien 1 een nulpunt is van de noemer en geen nulpunt van de teller is.

Hoe verloopt de functie $f(x)$ in de buurt van deze asymptoot:

$$\text{LL}: \lim_{\substack{x\to 1 \\ <}} \left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}\right) = -\infty \quad \text{en} \quad \text{RL}: \lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} \left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}\right) = +\infty \Rightarrow x=1 \text{ is een VA}$$

Stap 4: Ga na of de functie een horizontale asymptoot bezit.

De functie heeft geen horizontale asymptoot, want x die nadert naar $+\infty$ of $-\infty$ behoort niet tot het domein.

Stap 5: Ga na of de functie een schuine asymptoot heeft.

De functie heeft geen schuine asymptoot, want x die nadert naar $+\infty$ of $-\infty$ behoort niet tot het domein.

Tekenverloop

Stap 6:

- Schrijf in één tabel bovenaan alle nulpunten en alle polen in stijgende volgorde.

- Onderzoek het teken voor elke factor van $f(x)$.
- Het teken van $f(x)$ is dan het product van deze tekens.

x		-2		1		2		$\longrightarrow \mathbb{R}$
$\sqrt{4-x^2}$	/	0	+		+	0	/	
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+	
$f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$	/	0	-	|	+	0	/	

Tabel 6. Voorbeeld irrationale functies: tekenverloop.

Grafiek

)

Onthoud De grafiek en het tekenverloop van een irrationale functie bepaal je als volgt:

Het domein van een irrationale functie valt samen met de intervallen, waar de vorm onder de vierkantswortel niet negatief (BVW) is en waar de uitdrukking van een even machtsfunctie steeds een positief resultaat oplevert (KVW).

Stap 1: Bepaal de nulpunten van de teller, dit zijn de nulpunten van de functie $f(x)$.

Stap 2: Bepaal eventueel de nulpunten van de noemer, dit zijn de polen van de functie $f(x)$.

Stap 3: De rechte $x = a$ is een **verticale asymptoot** (VA) van de irrationale functie $f(x)$ als en slechts als a een nulpunt is van de noemer en maar geen nulpunt van de teller.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \pm\infty \quad \text{of} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \pm\infty \quad \Rightarrow \ x = a \text{ is een VA}$$

Stap 4: Een irrationale functie $f(x)$ heeft een **horizontale asymptoot** (HA) als en slechts als de graad van de teller $\leq$ graad van de noemer.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \quad \Rightarrow \ y = b \text{ is een HA}$$

Stap 5: Een irrationale functie $f(x)$ heeft een **schuine asymptoot** (SA) als en slechts als de graad van de teller $=$ graad van de noemer $+1$.

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{en} \quad q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] \Rightarrow \ y = mx + q \text{ is een SA}$$

Stap 6: Bepaal het tekenverloop

- Schrijf in één tabel bovenaan alle nulpunten en alle polen in stijgende volgorde.
- Hou rekening met de bestaansvoorwaarde en de kwadrateringsvoorwaarde.

- Onderzoek het teken voor elke factor van $f(x)$.
- Het teken van $f(x)$ is dan het product van deze tekens.

1.10 Exponentiële functies

Definitie De exponentiële functie is van de vorm:

$$y = a^x \text{ met } a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} \text{ en } x \in \mathbb{R}$$

a noemen we het **grondtal**, en moet strikt positief en verschillend van 1 zijn.

x noemen we de **exponent**, en is een reëel getal.

Voorbeeld 1

$$\begin{aligned}
4^2 &= 16\\
3^{-2} &= \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}\\
5^{\frac{2}{3}} &= \sqrt[3]{5^2}\\
5^{-\frac{3}{2}} &= \frac{1}{5^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5^3}} = \frac{1}{\sqrt{5^2.5}} = \frac{1}{5\sqrt{5}}\\
\sqrt{25} &= 5\\
\sqrt[4]{10000} &= 10\\
\sqrt[5]{-32} &= -2\\
\sqrt[3]{8} &= 2
\end{aligned}$$

Opmerking De positieve tweedemachts- of vierkantswortel van 25 is 5, want $5 > 0$ en $5^2 = 25$, dit wordt genoteerd als $\sqrt{25} = 5$.

En de negatieve tweedemachts- of vierkantswortel van 25 is -5, want $-5 < 0$ en $(-5)^2 = 25$, dit wordt genoteerd als $-\sqrt{25} = -5$.

Ook je rekenmachine zal bij $\sqrt{25}$ als resultaat 5 geven. Verwar dit niet met het oplossen van de vergelijking $x^2 = 25$. In dit geval zijn de twee oplossingen van de vergelijking: $x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$.

Bijzondere gevallen

- De exponentiële functie met grondtal e ($e = 2,718281828$) wordt genoteerd als $y = e^x$.
- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- Als n even is spreekt men van een *evenmachtswortel* ($\sqrt{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, ...), is n oneven dan spreekt men van een *onevenmachtswortel* ($\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[5]{\ }$, ...).
- Positieve reële getallen hebben twee tegengestelde evenmachtswortels en juist één positieve onevenmachtswortel.

- als n even is, dan heeft elk reëel getal a twee n^{de} machtswortels die tegengesteld zijn, genoteerd door $-\sqrt[n]{a}$ en $+\sqrt[n]{a}$, of kortweg $\pm\sqrt[n]{a}$.
- als n oneven is, dan heeft elk reëel getal a juist één n^{de} machtswortel, genoteerd door $\sqrt[n]{a}$.
- Als n even is, dan hebben de negatieve getallen geen n^{de} machtswortel; dus negatieve reële getallen hebben geen (reële) evenmachtswortel en juist één onevenmachtswortel welke negatief is.

Let op: worteltrekken is niet hetzelfde als het oplossen van een vergelijking:

worteltrekken	vergelijking oplossen
$\sqrt{4} = 2$	$x^2 = 4$ $x = \pm\sqrt{4}$ $x = \pm 2$
	$x_1 = -2$ en $x_2 = +2$

Tabel 7

Rekenregels

machten	wortels
$a^m a^n = a^{m+n}$	$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^{m+n}}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
$\left(\frac{1}{a}\right)^n = a^{-n}$	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Tabel 8

Opmerking

- aangezien $1 = \frac{a}{a} = a^{1-1} = a^0$ zie je waarom we zeggen dat $a^0 = 1$.
- formules met wortels kan je (gemakkelijk) terugvinden als je de wortelvorm herschrijft d.m.v. machten:

$$\sqrt[m]{a}.\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m}}.a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} = a^{\frac{m+n}{m.n}} = \sqrt[m.n]{a^{m+n}}$$

- laat je niet vangen: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- een veel gebruikte bewerking is het wortelvrij maken van de noemen, bv.: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Oplossen van exponentiële vergelijkingen

Algemeen

In sommige opgaves kom je exponentiële vergelijkingen tegen. Dit zijn vergelijkingen waar de onbekende voorkomt in de exponent. Om exponentiële vergelijkingen vlot te kunnen oplossen, maak je best gebruik van onderstaand stappenplan:

Stap 1: Noteer de vergelijking in haar standaardvorm: $a^{f(x)} = c$ of $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ of $a^{f(x)} = b^{g(x)}$

Stap 2: Laat op beide leden van de vergelijking een geschikte logaritmische functie inwerken.

Stap 3: Stop de uitkomst in de opgave en controleer.

Voorbeeld 2 Los op: $8^{x-1} - 4 = 0$

$$\begin{aligned} 8^{x-1} - 4 = 0 &\iff 8^{x-1} = 4 && \text{(stap 1)} \\ &\iff 2^{3x-3} = 2^2 && \text{(zoek een verband tss 8, 4 en 2)} \\ &\iff \log 2^{3x-3} = \log 2^2 && \text{(stap 2)} \\ &\iff 3x - 3 = 2 \\ &\iff x = \tfrac{5}{3} \end{aligned}$$

In stap 3 controleer je dat $8^{\frac{5}{3}-1} - 4 = 0$? Dit is ok.

Opmerking: stap 2 kan je ook in gedachten doen, m.a.w. hoef je niet op te schrijven.

Voorbeeld 3

$$a^{f(x)} = b^{g(x)}$$

Los op: $50\sqrt{0,1^x} = 10^{x+1}\sqrt{2,5}$

$$\begin{aligned} 50\sqrt{0,1^x} = 10^{x+1}\sqrt{2,5} &\iff 50.\,(0,1)^{\frac{x}{2}} = 10^{x+1}\sqrt{2,5} && \text{(stap 1)} \\ &\iff 50.10^{-\frac{x}{2}} = 10^x.10.\sqrt{2,5} && \text{(zoek een verband tss 0,1 en 10)} \\ &\iff 10^{-\frac{x}{2}}.10^{-x} = \tfrac{10.\sqrt{2,5}}{50} && \text{(zet alle factoren met x bij elkaar)} \\ &\iff 10^{-\frac{3}{2}x} = \sqrt{\tfrac{100.2,5}{2500}} \\ &\iff \log 10^{-\frac{3}{2}x} = \log 10^{-\frac{1}{2}} && \text{(stap 2)} \\ &\iff -\tfrac{3}{2}x = -\tfrac{1}{2} \\ &\iff x = \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

In stap 3 controleer je dat $50\sqrt{0,1^{\frac{1}{3}}} = 10^{\frac{1}{3}+1}\sqrt{2,5}$? Dit is ok.

Opmerking: stap 2 kan je ook in gedachten doen, m.a.w. hoef je niet op te schrijven.

Voorbeeld 4 Los op:

$$2^{2x} - 3 \cdot 2^{(x+2)} + 36 = 0$$

$$\begin{aligned} &2^{2x} - 3 \cdot 2^{(x+2)} + 36 = 0 \\ &2^{2x} - 3 \cdot 2^x \cdot 2^2 + 36 = 0 \\ &2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 36 = 0 && \text{(herken dat } 2^{2x} = (2^x)^2\text{)} \\ & && \text{stel } 2^x = t \\ &t^2 - 12 \cdot t + 36 = 0 && \text{(los de vierkantsvgl op)} \end{aligned}$$

$$t_{1 \text{ en } 2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm 0}{2} = 6$$

We zoeken niet $t_{1 \text{ en } 2}$ maar wel de waarde van x. Dus: $2^x = t = 6$ zodat $x = \log_2 6$.

Ook hier kan je terug controleren of de gevonden waarde van x voldoet aan de gegeven vergelijking.

Merk op dat in dit geval hier t_1 en t_2 gelijk zijn, waardoor er slechts één x-waarde is. Indien $t_1 \neq t_2$ dan vind je ook een x_1 en x_2.

Tenslotte, als je een t-waarde vindt die negatief is, dan... bestaat de bijhorende x-waarde niet. Je kan immer geen logaritme nemen van een negatief getal.

De exponentiële functie

Grafische voorstelling

- Het domein van de exponentiële functie is $\mathbb{R}$.
- Het beeld van de exponentiële functie is $\mathbb{R}_0^+$, dus alle strikt positieve getallen; de grafiek ligt boven de x-as.
- De punten $(0,1)$ en $(1,a)$ behoren steeds tot de exponentiële functie $f(x) = a^x$.
- Als het grondtal $a > 1$ is het een stijgende functie.
- Als het grondtal $0 < a < 1$ is het een dalende functie.
- De grafieken $y = a^x$ en $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ zijn elkaars spiegelbeeld t.o.v. de y-as.

Nulpunten

- Er zijn geen nulpunten. De exponentiële functie heeft geen snijpunten met de x-as. De x-as is de horizontale asymptoot.
- Het punt $(0,1)$ is het enige snijpunt met de y-as.

Tekenverloop

- Alle functiewaarden $f(x)$ zijn strikt positief, de grafiek ligt overal boven de x-as.

Voorbeeld 5 $y = 2^x$

Grafische voorstelling (stap1): het grondtal is 2, en $2 > 0$, dus krijgen we een stijgende functie. Het punt $(1,a)$ is hier dus $(1,2)$ en behoort tot de functie $y = 2^x$.

Nulpunten (stap2): er zijn geen nulpunten. De x-as wordt nooit gesneden. De x-as is de horizontale asymptoot. De y-as wordt gesneden in het punt $(0,1)$.

Tekenverloop (stap3)

x	$\longrightarrow \mathbb{R}$
2^x	$+$

Tabel 9

Grafiek (stap4)

1.11 Logaritmische functies

Definitie De logaritmische functie wordt gedefinieerd als de inverse van de exponentiële functie.

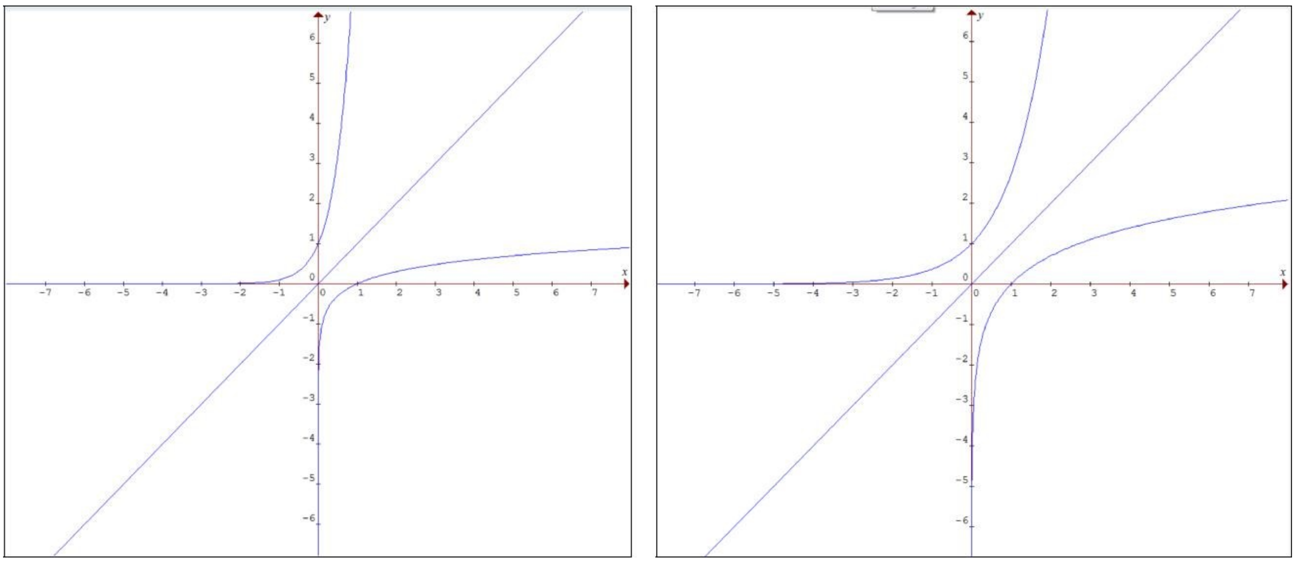
De logaritmische functie is van de vorm:

$$y = \log_a(x) = {}^a\log(x) \quad \Longleftrightarrow \quad a^y = x \tag{2}$$

met $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$ en $x \in \mathbb{R}_0^+$

a noemen we het **grondtal**, en moet strikt positief en verschillend van 1 zijn. x is een strikt positief reëel getal.

Om de waarde van y te vinden, stel je jezelf de vraag: "tot welke macht moet ik het grondtal a verheffen om x uit te komen?"



Figuur 1. Grafische voorstelling va $y = \log_{10}(x) = \log(x)$ (links) en $y = \log_e(x) = \ln(x)$ (rechts).

$\log_a(x)$ is de inverse functie van de functie a^x; beide functies zijn elkaar spiegelbeeld t.o.v. de eerste bissectrice ($y = x$).

$\ln(x)$ is de inverse functie van de functie e^x; beide functies zijn elkaar spiegelbeeld t.o.v. de eerste bissectrice ($y = x$).

Voorbeeld 1

$$
\begin{aligned}
\log_{10}(100) &= 2 \text{ (want } 10^2 = 100) \\
\log_2 8 &= 3 \\
\log_4 16 &= 2 \\
\log_3 9 &= 2 \\
\log_3 \sqrt{3} &= \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \\
\log_5 \frac{1}{5} &= \log_5 5^{-1} = -1
\end{aligned}
$$

Bijzondere gevallen

- De **tiendelige of Briggse logaritme** is de logaritme met grondtal 10. In de notatie wordt vaak het grondtal 10 weggelaten: $y = \log_{10}(x) = \log(x)$
- De **natuurlijke of Neperiaanse logaritme** is de logaritme met grondtal e (e=2,718281828) en wordt genoteerd als $y = \log_e(x)$. Ook hier wordt het grondtal e weggelaten, en gebruikt men de specifieke notatie: $y = \ln(x)$
- $\log_a(a) = 1$ (want $a^1 = a$)
- $\log_a(1) = 0$ (want $a^0 = 1$)
- $\log_a(0)$ en $\log_a(-...)$ bestaan niet!

Rekenregels

Rekenregel

$$\log(x.y) = \log x + \log y \tag{3}$$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y \tag{4}$$

$$\log(x^n) = n \log x \tag{5}$$

$$\log\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n}\log x \tag{6}$$

$$\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)} \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

Opmerking

- voor de eenvoud hebben we enkele keren het grondtal weggelaten.
- laat je niet verleiden, er bestaat geen eenvoudige formule voor $\log(x+y) = \ldots$

- $\log\left(x^n\right) = \log\left(x \cdot x \cdot x \cdot\ \dots\ x\right) = \log x + \log x + \dots + \log x = n \log x$. Toch niet zo moeilijk hé!?

- om een logaritme met grondtal a om te zetten naar een logaritme met grondtal c maken we gebruiken van de volgende eigenschap: $\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$ Hiermee vind je trouwens ook gemakkelijk het laatste rekenregeltje. Stel, je moet uitrekenen hoeveel $\log_2 8$ is door over te gaan op een ander grondtal (bijvoorbeeld 10, wat immers op je rekentoestel staat). Dan is $\log_2 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 2} = \frac{\log 8}{\log 2} = \frac{0{,}9031}{0{,}3010} = 3,000$ (en dat hadden we natuurlijk ook al lang uit het hoofd uitgerekend via een andere eigenschap).

- soms is het nodig om de variabele x of een getal, op een andere manier te schrijven. Zowel de notatie $x = 10^{log_{10}(x)}$ als $x = \log_{10^x}$ worden regelmatig gebruikt. Hetzelfde geldt voor $x = e^{log_e(x)} = e^{\ln x}$ en $x = \log_e e^x = \ln e^x$. Het idee hierachter is dat de logaritmische en exponentiële functies elkaars inverse zijn, waardoor ze elkaar opheffen als ze na elkaar worden toegepast op x. Maar let wel op met bijvoorbeeld $\sqrt{x^2} \neq x$ maar wel $\sqrt{x^2} = |x|$(zie ook Module 1 - Absolute waarde).

Oplossen van logaritmische vergelijkingen

In sommige opgaves kom je logaritmische vergelijkingen tegen. Dit zijn vergelijkingen waar de onbekende voorkomt in een logaritmische functie. Om logaritmische vergelijkingen vlot te kunnen oplossen, maak je best gebruik van onderstaand stappenplan:

Stap 1: Noteer de vergelijking in haar standaardvorm: $\log_a\left(f(x)\right) = c$ of $\log_a\left(f(x)\right) = \log_a\left(g(x)\right)$.

Stap 2: Laat op beide leden van de vergelijking een geschikte exponentiële functie inwerken.

Stap 3: Controleer of de bekomen oplossingen voldoen aan de voorwaarden:

- het grondtal moet strikt positief zijn, en verschillend van 1 zijn, en
- de $\log_a\left(f(x)\right)$ bestaat enkel als $f(x) > 0$.

Stap 4: Stop de uitkomst in de opgave en controleer.

Voorbeeld 2 $\log_a\left(f(x)\right) = \log_a\left(g(x)\right)$

Los op: $\log_3(x+4) + \log_3(x-2) = 2\log_3 x$

$$\begin{array}{rcll}
\log_3(x+4) + \log_3(x-2) = 2\log_3 x & \iff & \log_3\left[(x+4)(x-2)\right] = \log_3 x^2 & \text{(stap 1)} \\
& \iff & 3^{\log_3[(x+4)(x-2)]} = 3^{\log_3 x^2} & \text{(stap 2)} \\
& \iff & (x+4)(x-2) = x^2 & \\
& \iff & x^2 - 2x + 4x - 8 = x^2 & \\
& \iff & 2x - 8 = 0 & \\
& \iff & x = 4 &
\end{array}$$

In stap 3 controleren we de voorwaarden voor $x = 4$:

1. Voor $\log_3(x+4)$ moet gelden: $x+4>0 \iff x>-4$? ok.
2. 2) Voor $\log_3(x-2)$ moet gelden: $x-2>0 \iff x>2$? ok.
3. Voor $2\log_3 x$ moet gelden: $x>0$? ok.

Besluit: de oplossing $x=4$ voldoet aan de voorwaarden, en is dus een oplossing van de vergelijking.

Stap 4: controleer je oplossing: $\log_3(4+4)+\log_3(4-2)=2\log_3 4$? ok.

Opmerking: stap 2 kan je ook in gedachten doen, m.a.w. hoef je niet op te schrijven.

Voorbeeld 3 $\log_a(f(x))=c$

Los op: $\log_{(x+3)}(x+5)=2$

$$\begin{aligned}\log_{(x+3)}(x+5)=2 &\iff (x+3)^2=x+5 && \text{(stap 1)}\\ & && \text{definitie: } y=\log_a x \Leftrightarrow a^y=x\\ &\iff x^2+6x+9=x+5\\ &\iff x^2+5x+4=0\end{aligned}$$

$$x_{1\text{ en }2}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\frac{-5\pm3}{2}\iff x_1=-1 \text{ en } x_2=-4$$

In stap 3 controleren we de voorwaarden voor x_1 en x_2:

1. Is $x+3>0 \iff x>-3$?
2. Is $x+5>0 \iff x>-5$?

Besluit: $x_1=-1$ voldoet aan de voorwaarden, maar $x_2=-4$ niet. Dus enkel $x_1=-1$ is een oplossing van de vergelijking.

Stap 4: controleer je oplossing: $\log_{(-1+3)}(-1+5)=2$? ok. Maar $\log_{(-4+3)}(-4+5)=2$ gaat niet.

Voorbeeld 4 het grondtal is onbekend

Los op: $\log_a 250=3+\log_a 2$

$$\begin{aligned}\log_a 250=3+\log_a 2 &\iff \log_a 250-\log_a 2=3\\ &\iff \log_a\left(\tfrac{250}{2}\right)=3\\ &\iff \log_a 125=3\\ &\iff a^3=125\\ &\iff a=\sqrt[3]{125}=5\end{aligned}$$

Alternatieve aanpak:

$$\begin{aligned}\log_a 250=3+\log_a 2 &\iff \log_a 250=3\log_a a+\log_a 2 \quad \text{(infeite is } \log_a a=1)\\ &\iff \log_a 250=\log_a a^3+\log_a 2\\ &\iff \log_a 250=\log_a(a^3\cdot 2)\\ &\iff 250=2a^3\\ &\iff a=\sqrt[3]{\tfrac{250}{2}}=5\end{aligned}$$

Voorbeeld 5 rekenen met zeer grote en kleine getallen

Uit hoeveel cijfers bestaat het getal 1995^{1995}?

Stel $x = 1995^{1995}$

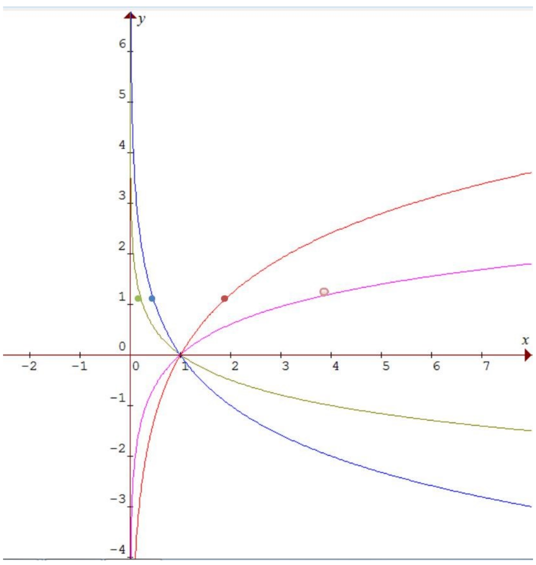
Dan is:

$$\begin{aligned}
\log_{10} x &= \log_{10}\left(1995^{1995}\right) \\
&= 1995.\log_{10}(1995) \\
&= 6583,386\ldots \\
\text{of} & \\
6583 &< \log_{10} x < 6584 \\
\log_{10} 10^{6583} &< \log_{10} x < \log_{10} 10^{6584} \\
10^{6583} &< x < 10^{6584}
\end{aligned}$$

Besluit: x is een geheel getal dat bestaat uit 6584 cijfers

De logaritmische functie

Grafische voorstelling



- Het domein van de logaritmische functie is $\mathbb{R}_0^+$, dus alle strikt positieve getallen, de grafiek ligt rechts van de y-as.
- Het beeld van de logaritmische functie is $\mathbb{R}$.
- De punten $(1, 0)$ en $(a, 1)$ behoren steeds tot de logaritmische functie $f(x) = \log_a x$.
- Als het grondtal $a > 1$ is het een stijgende functie.
- Als het grondtal $0 < a < 1$ is het een dalende functie.

- De grafieken $y = \log_a x$ en $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ zijn elkaars spiegelbeeld t.o.v. de x-as.

Nulpunten

- De logaritmische functie heeft 1 nulpunt: het punt (1,0) is het enige snijpunt met de x-as.
- Er zijn geen snijpunten met de y-as. De y-as is de verticale asymptoot.

Tekenverloop

x	0		1		$\longrightarrow \mathbb{R}$
$\log_a x$ met $0 < a < 1$	/	+	0	-	
$\log_a x$ met $a > 1$	/	-	0	+	

Tabel 10

Voorbeeld 6 $y = \log_2 x$

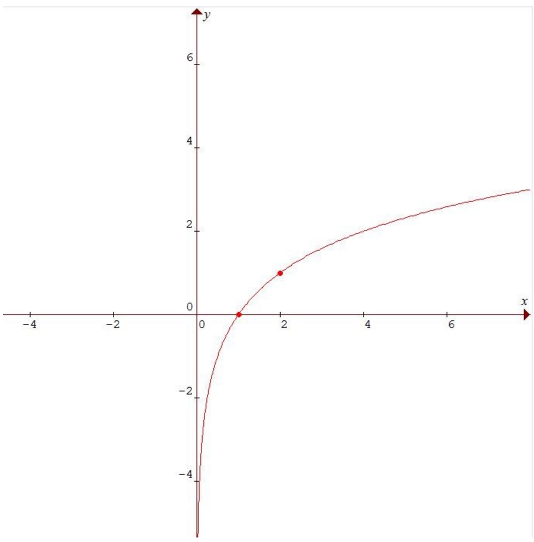
Grafische voorstelling: (stap1) het grondtal is 2, en $2 > 0$, dus krijgen we een stijgende functie. Het punt $(a, 1)$ is hier dus $(2, 1)$ en behoort tot de functie $y = \log_2 x$.

Nulpunten: (stap2) er is altijd één nulpunt; de x-as wordt altijd gesneden in het punt $(1, 0)$. De y-as wordt nooit gesneden. De y-as is de verticale asymptoot.

Tekenverloop: (stap3)

x	0		1		$\longrightarrow \mathbb{R}$
$\log_2 x$ met $a = 2 > 1$	/	-	0	+	

Grafiek: (stap4)



1.12 Goniometrische functies

De periode

Veel fenomenen in ons dagelijks leven herhalen zich, bijvoorbeeld je hartslag, de slingerbeweging van een staande klok, ... Ook in technische wetenschappen komen zichzelf herhalende patronen vaak voor, denk maar aan de trillingen in een gebouw, of het principe van wisselstroom. Deze zichzelf herhalende fenomenen worden voorgesteld door periodieke functies.

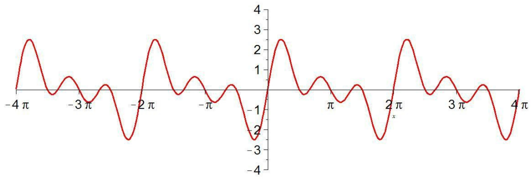
We noemen een functie periodiek als er een getal $\mathrm{T} > 0$ bestaat zodat

$$f(x) = f(x+\mathrm{T}) = f(x+2\mathrm{T}) = \ldots \text{ en ook } f(x) = f(x-\mathrm{T}) = f(x-2\mathrm{T}) = \ldots$$

en dat voor alle x. Het kleinste getal T met deze eigenschap noemen we **de periode**.

We kunnen dit ook iets korter noteren: $f(x) = f(x+k\mathrm{T})$ met $k \in \mathbb{Z}$ en dit $\forall x \in \mathbb{R}$.

Een periodieke functie met periode T herhaalt zich dus telkens na een 'afstand' T. Je kan de periode ook zien als de 'breedte' van het zich herhalende stuk. Een voorbeeld:



Deze functie herhaalt zichzelf met periode 2π.

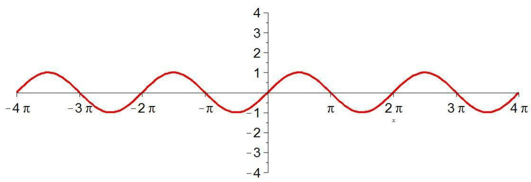
Goniometrische functies

Goniometrische functies zijn functies opgebouwd uit de basisfuncties sin, cos en tan.

Goniometrische functies gebruiken *radialen* als argument, en geen graden. Omdat deze basisfuncties zo belangrijk zijn, zetten we ze even op een rijtje met bijhorende grafieken.

- Sinusfunctie

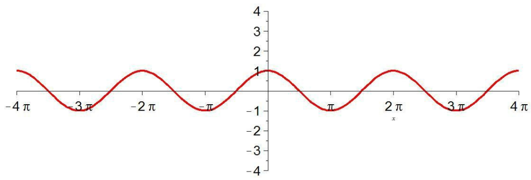
  $f(x) = \sin x$



  - De sinusfunctie kan je voor elke x berekenen.
  - De sinusfunctie ligt altijd tussen -1 en 1.
  - De periode is 2π.

   - De sinusfunctie is een oneven functie want $\sin(-x) = -\sin(x)$

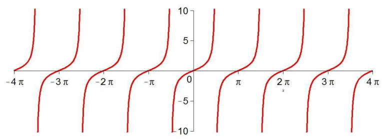
- Cosinusfunctie
  $f(x) = \cos x$



   - De cosinusfunctie kan je voor elke x berekenen.
   - De cosinusfunctie ligt altijd tussen -1 en 1.
   - De periode is 2π.
   - De cosinusfunctie is een even functie want $\cos(-x) = \cos(x)$

- Tangensfunctie

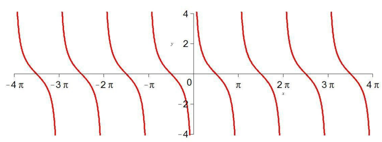
$$f(x) = \tan x = \text{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$$



   - De tangensfunctie kan je niet berekenen voor $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} + \pi$, ... Dus kortweg als $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$. In deze punten zou de noemer immers nul worden; hier heeft de tangens verticale asymptoten.
   - De tangensfunctie kan oneindig groot $(+\infty)$ en oneindig klein $(-\infty)$ worden.
   - De periode is π.
   - De tangensfunctie is een oneven functie want $\tan(-x) = -\tan(x)$

- Cotangensfunctie

$$f(x) = \cot x = \text{cotg}x = \frac{\cos x}{\sin x}$$



   - De cotangensfunctie kan je niet berekenen voor 0, π, $-\pi$, 2π ... Dus kortweg als $x = k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$. In deze punten zou de noemer immers nul worden; hier heeft de cotangens verticale asymptoten.
   - De cotangensfunctie kan oneindig groot $(+\infty)$ en oneindig klein $(-\infty)$ worden.
   - De periode is π.
   - De cotangensfunctie is een oneven functie want $\cot(-x) = -\cot(x)$

1.13 Cyclometrische functies

Relatie versus functie

Wanneer we van een (in radialen gemeten) hoek x weten dat $\sin x = \frac{1}{2}$, dan zijn er voor x oneindig veel mogelijkheden. De sinus is namelijk een periodieke functie, en bovendien wordt elke waarde (behalve 1 en -1) gedurende één periode twee maal aangenomen. Zo geldt $\sin x = \frac{1}{2}$ voor $x = \frac{\pi}{6}$ en voor $x = \frac{5\pi}{6}$, en bij elk van die hoeken kunnen we nog willekeurige gehele veelvouden van 2π optellen. Als je je nu zou afvragen welke x-waarde levert voor de sinusfunctie $\frac{1}{2}$ op, dan zou je moeten antwoorden met $x = \ldots, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + 2\pi, \ldots$ En dat is nu niet bepaald duidelijk.

We definiëren de cyclometrische functies (ook wel arcfuncties of boogfuncties) als de inverse functies van de goniometrische functies. Maar, zoals we net gezien hebben, is de inverse van de goniometrische functie in feite geen functie maar gewoon een *relatie*. In een relatie horen bij één waarde uit het domein (x-waarde) meerdere (tot zelfs oneindig) veel beelden (y-waarden). Om tot een functie te komen moeten we het domein van de oorspronkelijk functie beperken (hier was dit de sinus functie). Dit beperkt domein noemen we een hoofdwaarde-interval.

De cyclometrische functie wordt met een hoofdletter geschreven (bijv: Arcsin).

De cyclometrische relatie wordt met een kleine letter geschreven (bijv: arcsin).

De vergelijking $y = \arcsin(x)$ is geen functie, want met elke x-waarde komen oneindig veel y-waarden overeen.

Zo voldoet $y = ...,\ \frac{\pi}{6}\ (30°),\ \frac{5\pi}{6}\ (150°),\ \frac{13\pi}{6}\ (390°), ...$ aan $y = \arcsin(\frac{1}{2})$

Om tot een functie te komen zullen we het domein van $y = \sin(x)$ beperken. We kiezen als hoofdwaarde-interval voor $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. En we noteren nu de inverse functie van de sinusfunctie als $y = \text{Arcsin}(x)$

Nu geldt: $\text{Arcsin}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}\ (30°)$

Voor de cosinus, tangens en cotangens, waarbij soortgelijke problemen spelen, heeft men eveneens zulke voorkeursintervallen afgesproken: $[0, \pi]$ voor de cosinus en $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ voor de tangens. Aangezien $\tan(\frac{\pi}{2})$ oneindig is, is de tangens niet gedefiniëerd voor hoeken gelijk aan $\frac{\pi}{2}$ en $-\frac{\pi}{2}$, vandaar de notatie met open i.p.v. gesloten haakjes.

Opmerking Op je rekenmachine vind je de cyclometrische functies meestal terug onder de namen (toetsen) $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ en $\tan^{-1}$. Verwar dit niet met $\frac{1}{\sin x} = (\sin x)^{-1}$!!

In tekstboeken vind je ook de notatie $\text{bgsin}(x)$ of $\text{argsin}(x)$ voor $\arcsin(x)$ en $\text{Bgsin}(x)$ of $\text{Argsin}(x)$ voor $\text{Arcsin}(x)$. Hierbij staan de letter “bg” voor boog en “arg” voor argument.

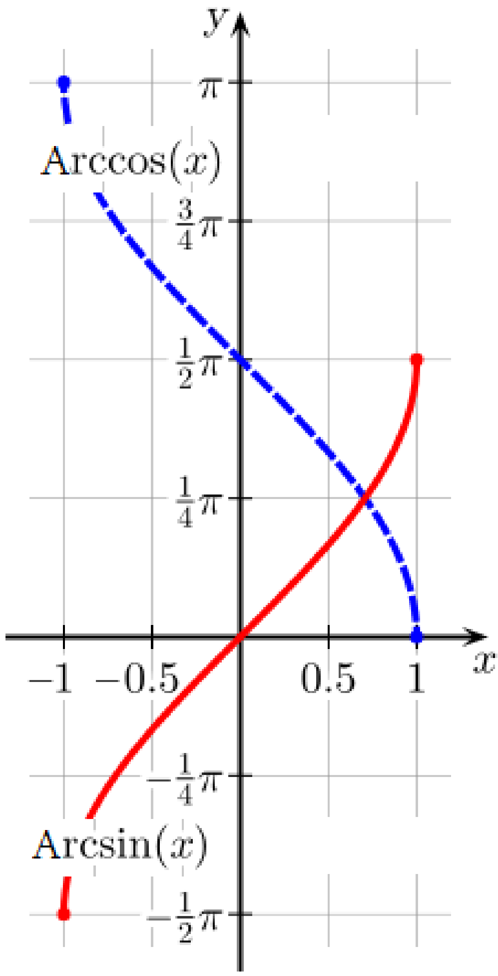
De cyclometrische functies

De grafieken van deze functies worden bekomen door spiegeling ten opzichte van de rechte $y = x$ van een gepaste beperking van de grafiek van de overeenkomstige goniometrische functies.

- De inverse van de sinusfunctie

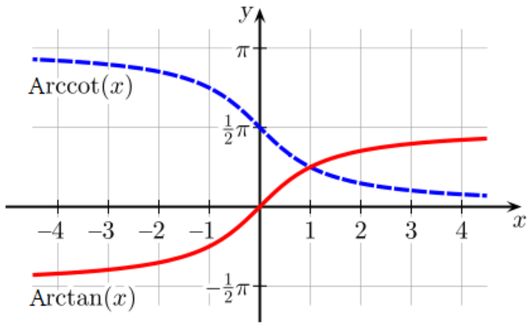
  $y = \text{Arcsin}(x)$ met $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

De inverse van de sinusfunctie $y = \text{Arcsin}(x)$ kan je enkel voor $x \in [-1, 1]$ berekenen.
De inverse van de sinusfunctie ligt altijd tussen $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



- De inverse van de cosinusfunctie
  $y = \text{Arccos}(x)$ met $y \in [0, \pi]$
  De inverse van de cosinusfunctie $y = \text{Arccos}(x)$ kan je enkel voor $x \in [-1, 1]$ berekenen.
  De inverse van de cosinusfunctie ligt altijd tussen $y \in [0, \pi]$.

- De inverse van de tangensfunctie
  $y = \text{Arctan}(x)$ met $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
  De inverse van de tangensfunctie $y = \text{Arctan}(x)$ kan je voor alle x berekenen.
  De inverse van de tangensfunctie ligt altijd tussen $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
  De grafiek toont twee horizontale asymptoten: de lijnen $y = -\frac{\pi}{2}$ en $y = \frac{\pi}{2}$.
  We noteren ook: $\lim_{x\to-\infty} \text{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}$ en $\lim_{x\to+\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$.



- De inverse van de cotangensfunctie

  $y = \text{Arccot}(x)$ met $y \in]0, \pi[$

  De inverse van de cotangensfunctie $y = \text{Arccot}(x)$ kan je voor alle x berekenen.

  De inverse van de cotangensfunctie ligt altijd tussen $y \in]0, \pi[$.

  De grafiek toont twee horizontale asymptoten: de lijnen $y = 0$ en $y = \pi$.

  We noteren ook: $\lim_{x \to -\infty} \text{Arccot}(x) = 0$ en $\lim_{x \to +\infty} \text{Arccot}(x) = \pi$.

Rekenregels

Past men op een cyclometrische functie de overeenkomstige goniometrische functie toe, dan bekomt men als resultaat het argument waarvan men is uitgegaan.

$$\begin{array}{rcl}
\sin(\text{Arcsin}(x)) & = & x \\
\cos(\text{Arccos}(x)) & = & x \\
\tan(\text{Arctan}(x)) & = & x \\
\cot(\text{Arccot}(x)) & = & x
\end{array}$$

Past men in een goniometrische functie de overeenkomstige cyclometrische functie toe, dan bekomt men als resultaat *niet noodzakelijk* het argument waarvan men is uitgegaan, maar wel een waarde van het overeenkomstig hoofdwaarde-interval.

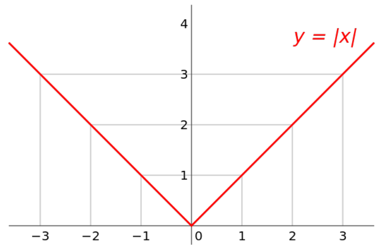
1.14 Bijzondere functies

De absolute waarde

In Module 1: Elementaire vaardigheden A heb je reeds de definitie gezien van de absolute waarde:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{als } x < 0 \\ x & \text{als } x \geq 0 \end{cases}$$

en de bijhorende grafiek:



We hebben er toen ook op gewezen dat je voorzichtig moet zijn met formules van het type $\sqrt{x^2}$. Passen we dit toe op een functie die horizontaal verschoven is: $y = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$.

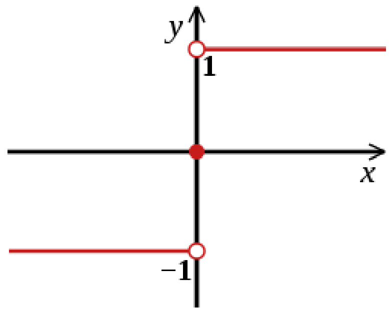
Als deze functie zou gegeven zijn als de veelterm $x^2 - 2x + 1$, dan loont het dus de moeite om dit te herschrijven als een volledig kwadraat: $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.

De signum functie

De sign of signum functie $\text{sgn}(x)$ is een eenvoudige wiskundige functie, die eigenlijk het teken van het argument aangeeft:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{als } x < 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \\ +1 & \text{als } x > 0 \end{cases}$$

De grafiek van de signum functie:



1.15 Verschuiven en herschalen

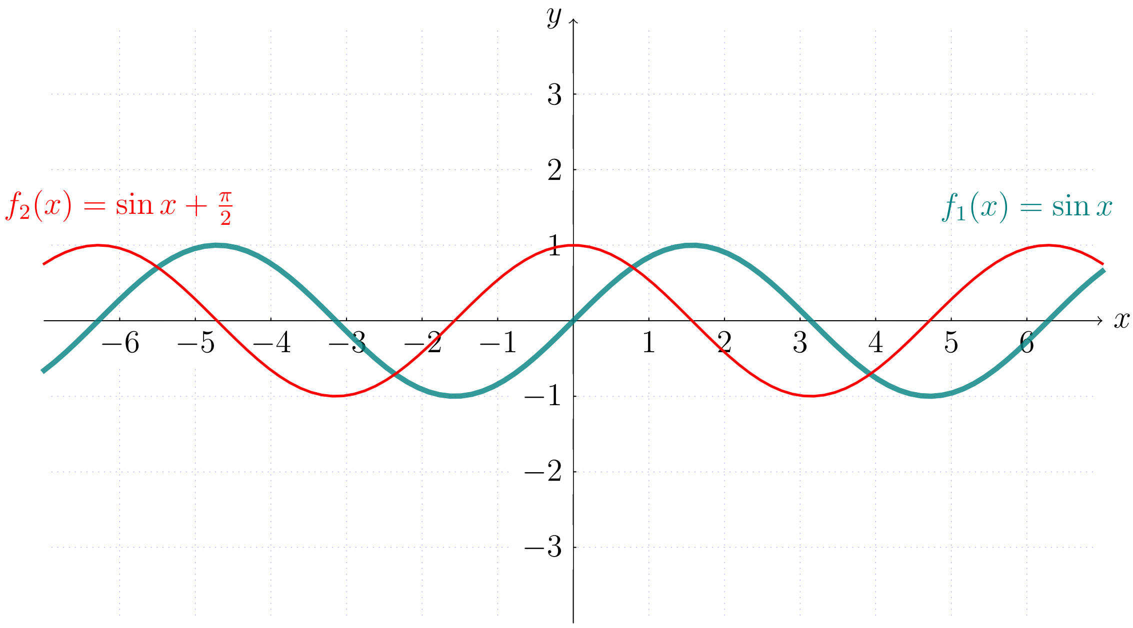
Verschuiven

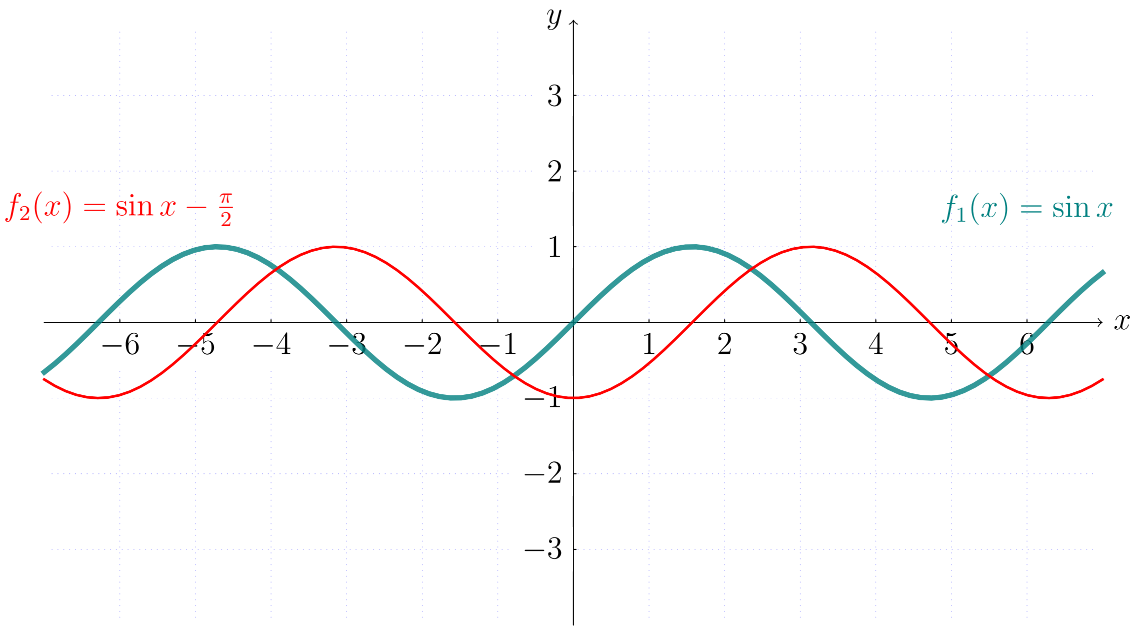
Wanneer we de grafiek van $y = f(x)$ kennen, kunnen we met verschuivingen (of translaties) de grafiek van $y = f(x+a)$ en $y = f(x) + a$ daaruit afleiden (met $a \in \mathbb{R}$).

De grafiek van $y = f(x+a)$ wordt verkregen uit de grafiek van $y = f(x)$ door alle punten op de grafiek met een afstand van a eenheden horizontaal te verschuiven (naar links als $a > 0$, en naar rechts als $a < 0$).

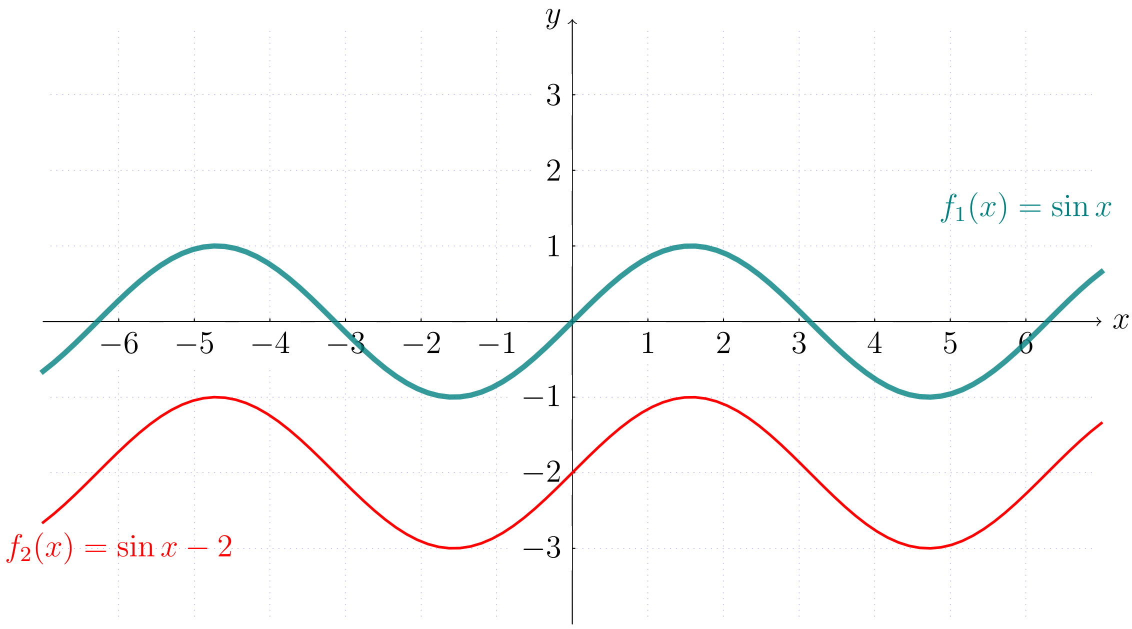
Het lijkt misschien een beetje tegenstrijdig dat de grafiek van een functie naar rechts verschuift als je bij het argument x een negatief getal optelt. Maar kijk eens naar de sinus functie $f_1(x) =$

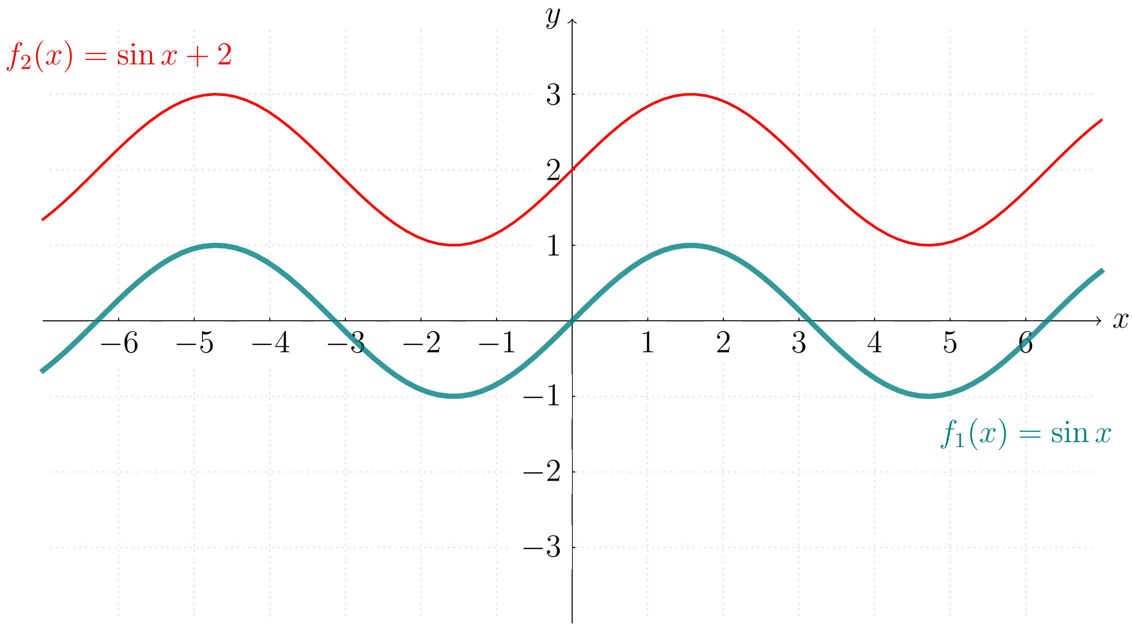
$\sin(x)$ in onderstaand voorbeeld. We weten dat de sinus functie onder andere een nulpunt heeft als het argument nul is, dus voor $x = 0$. Als we van x de waarde $\frac{\pi}{2}$ aftrekken, dan bekomen we terug datzelfde nulpunt als het argument nul is. Uit $x - \frac{\pi}{2} = 0$ volgt dat dit het geval zal zijn als $x = +\frac{\pi}{2}$. Met andere woorden, de functie $f_2(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ heeft dezelfde grafiek als de functie $f_1(x) = \sin(x)$ maar is $\frac{\pi}{2}$ eenheden naar rechts verschoven.





De grafiek van $y = f(x) + a$ wordt verkregen uit de grafiek van $y = f(x)$ door alle punten op de grafiek met een afstand van a eenheden verticaal te verschuiven (naar beneden als $a < 0$, en naar boven als $a > 0$).





Voorbeeld 1 hoe ziet de grafiek eruit van de functie $y = x^2 + 2x + 3$?

We herschrijven de functie als: $y = (x^2 + 2x + 1) + 2 = (x + 1)^2 + 2$

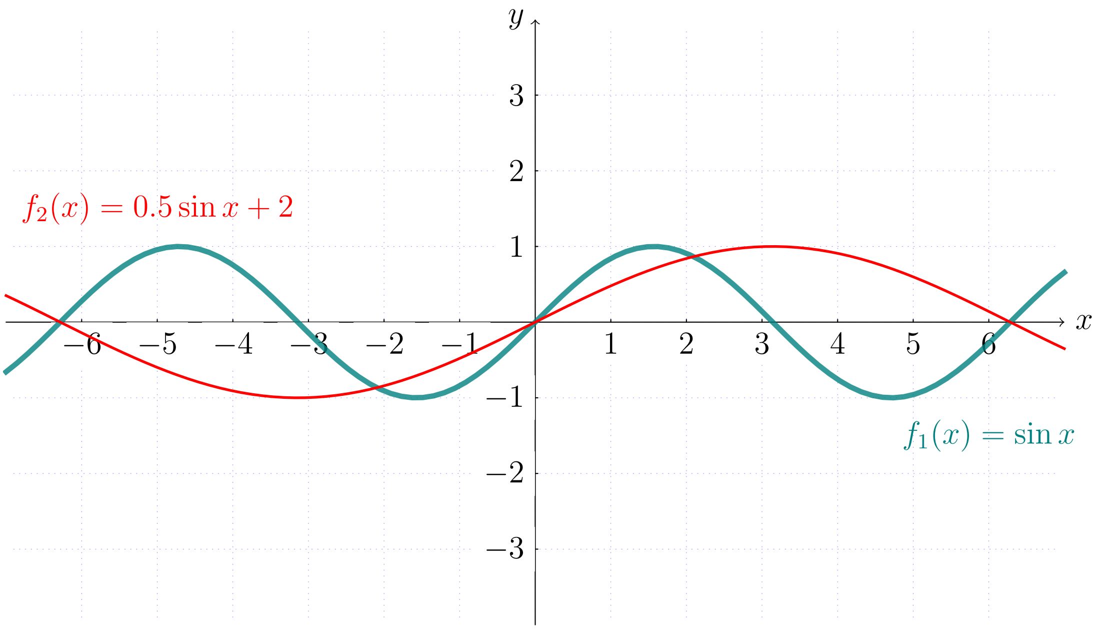
We herkennen hierin de basisfunctie $y = x^2$. De gegeven functie stelt dus een parabool voor die over 1 eenheid naar links en 2 eenheden naar boven is verschoven.

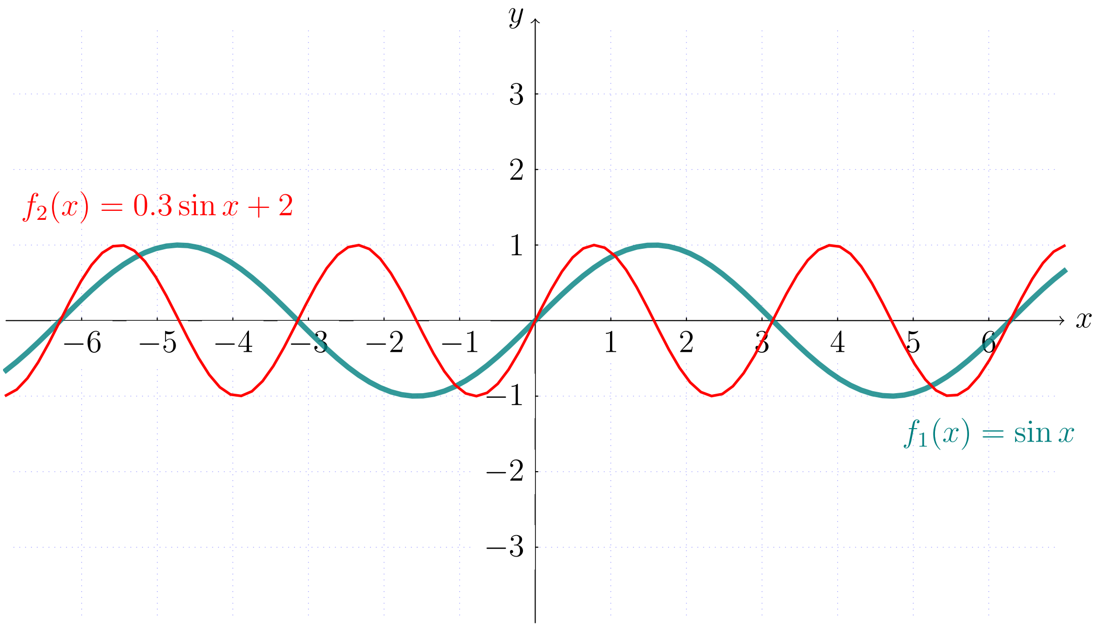
Herschalen

Wanneer we de grafiek van $y = f(x)$ kennen, kunnen we met herschalen (of vermenigvuldigen) de grafiek van $y = f(ax)$ en $y = af(x)$ daaruit afleiden (met $a \in \mathbb{R}$).

De grafiek van $y = f(ax)$ wordt verkregen uit de grafiek van $y = f(x)$ door, bij gelijkblijvende y-coördinaten, alle x-coördinaten van de punten op de grafiek met een factor $\frac{1}{a}$ te vermenigvuldigen (openrekken als $0 < a < 1$, en inkrimpen als $a > 1$).

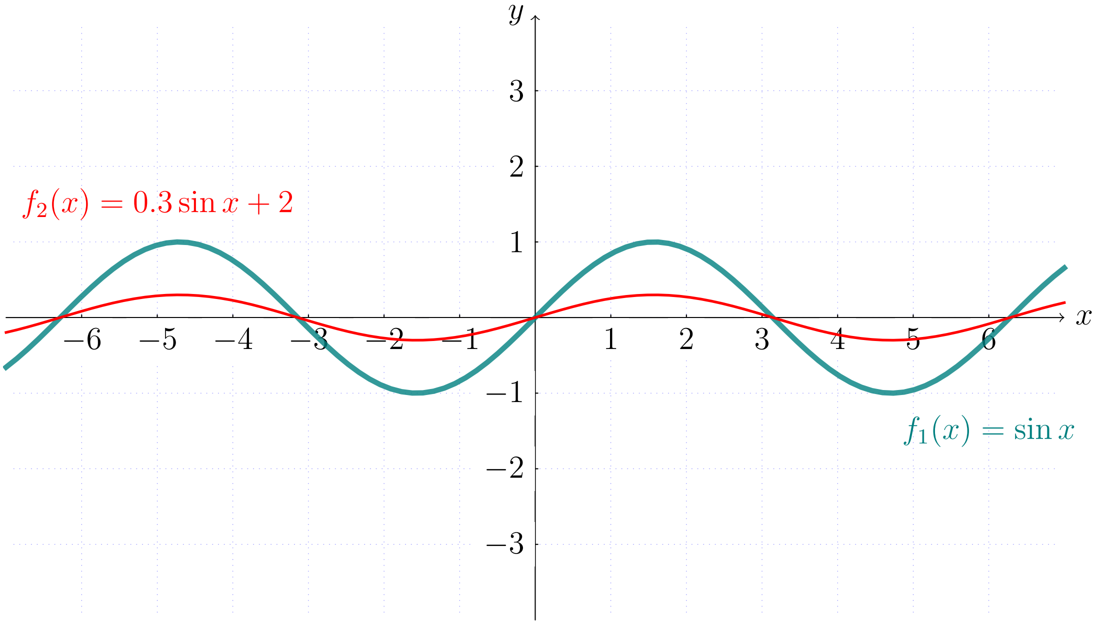
Voor $a = 2$ bijvoorbeeld krimpt de grafiek in elkaar. Het is alsof de functie dubbel zo snel verloopt.

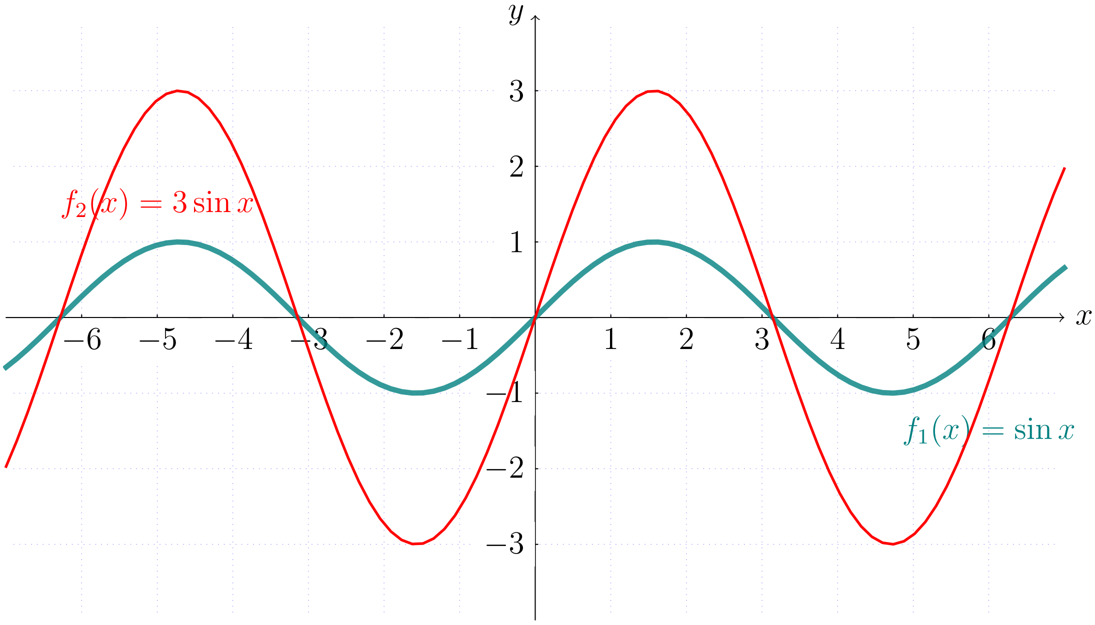




Een bijzonder geval treedt op als $a = -1$: de grafiek van $g(x) = f(-x)$ kan uit de grafiek van $f(x)$ worden verkregen door van alle punten op de grafiek de x-coördinaten met -1 te vermenigvuldigen, dus door de grafiek van $f(x)$ te spiegelen ten opzichte van de y-as. Op die manier kan je bijvoorbeeld heel eenvoudig afleiden dat de grafiek van de functie $g(x) = \sqrt{-x}$ bestaat en het spiegelbeeld is van $f(x) = \sqrt{x}$. Terwijl de functie $f(x)$ enkel gedefinieerd is voor alle positieve reële getallen, is de functie $g(x)$ dit enkel voor alle negatieve reële getallen.

De grafiek van $y = af(x)$ wordt verkregen uit de grafiek van $y = f(x)$ door, bij gelijkblijvende x-coördinaten, alle y-coördinaten van de punten op de grafiek met een factor a te vermenigvuldigen (inkrimpen als $0 < a < 1$, en openrekken als $a > 1$).



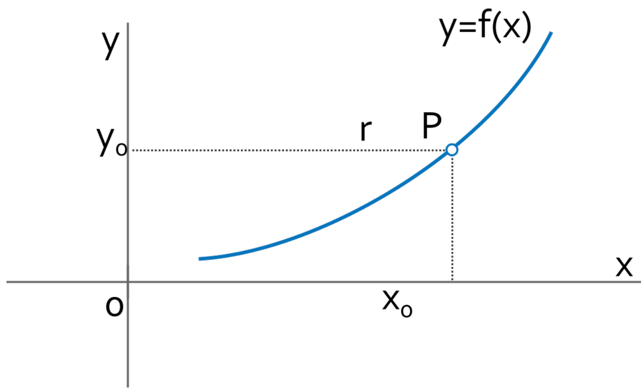


1.16 Coördinatenstelsels

Cartesisch of rechthoekig coördinatenstelsel

De vergelijking $y = f(x)$ voegt aan iedere x-waarde éénduidig een y-waarde toe. Met x_0 komt bijvoorbeeld y_0 overeen volgens $y_0 = f(x_0)$. Het getallenpaar $(x_0\,,\,y_0)$ kunnen we als punt P in een rechthoekig of cartesisch coördinatenstelsel tekenen. De twee coördinaat-assen staan loodrecht op elkaar, de horizontale as noemen we de x-as en de verticale as de y-as. Het snijpunt is de oorsprong O.

Voor ieder getallenpaar krijgen we precies één punt. De verzameling van alle punten $(x\,,\,y = f(x))$ vormt de grafiek of kromme van de functie. De grafiek laat het verloop van de functie in een figuur zien.



We zeggen dat:	x_0, y_0	zijn de rechthoekige of cartesische coördinaten
	x_0	is de abscis van het punt P
	y_0	is de ordinaat van het punt P

Het cartesisch coördinatenstelsel is de gebruikelijke manier om een punt in een vlak aan te duiden. Omdat in dit platte vlak twee coördinaten nodig zijn om een punt vast te leggen, zeggen we dat een vlak tweedimensionaal is. In feite is 'de dimensie van een ruimte' het aantal coördinaten dat nodig is om de plaats van alle punten in die ruimte precies te kunnen bepalen. Zo bestaat de klassieke 3D-ruimte uit 3 dimensies en zijn er dus 3 coördinaten (x, y, z) nodig om de plaats van elk punt éénduidig te beschrijven.

Parametervoorstelling van een functie

Het is bij de wiskundige beschrijving van een bewegend lichaam vaak handig om de positie van het lichaam weer te geven door cartesische coördinaten die zelf een functie van de tijd zijn. We noteren dan:

$$x = x(t)\ ,\ y = y(t) \quad \text{met } t_1 \leq t \leq t_2$$

We noemen een dergelijke voorstelling met een hulpvariabele t de parametervoorstelling van een functie. In de natuurwetenschappen en de techniek betekent de parameter t meestal de tijd of een hoek.

We krijgen voor iedere waarde van t uit het interval $t_1 \leq t \leq t_2$ precies één punt van de kromme.

Voorbeeld 1 de horizontale worp

een lichaam wordt van een bepaalde hoogte horizontaal met een constante beginsnelheid v_0 weggeworpen. T.g.v. de zwaartekracht verloopt de beweging vervolgens als een parabool (parabolische baan). De parametervergelijkingen van deze beweging zijn:

$$x = v_0 t\ ,\ y = \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{met } t \geq 0$$

Door het elimineren van de parameter vinden we de expliciete vergelijking van de grafiek (parabool). Dit doen we door t uit de vergelijking van x te halen en te substitueren in de vergelijking van y: uit $x = v_0 t$ volgt dat $t = \frac{x}{v_0}$ zodat

$$y = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = \frac{g}{2v_0^2}x$$

Voorbeeld 2 de cirkel

Een veel gebruikte parametrisatie voor de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = R^2$ is de volgende:

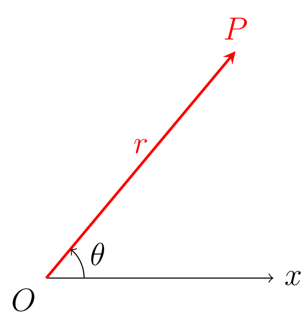
$$x = R\cos(t)\ ,\ y = R\sin(t) \quad \text{met } 0 \leq t < 2\pi$$

Opmerking

- de parameter t stelt nu een hoek voor (uitgedrukt in radialen). Omdat $t = 0$ en $t = 2\pi$ hetzelfde punt voorstellen, zal men meestal 2π niet opnemen in het interval. Vandaar het $<$ en niet nog eens het $\leq$-symbool.
- om uit de parametervergelijkingen de cartesische vergelijking voor de cirkel te bekomen moeten we de parameter t elimineren. Daarvoor gebruiken we een trucje. We weten dat voor elke hoek α de goniometrische grondformule geldt: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Substitueren we nu $\cos(t) = \frac{x}{R}$ en $\sin(t) = \frac{y}{R}$ in de grondformule dan bekomen we inderdaad $x^2 + y^2 = R^2$.

Poolcoördinaten

De poolcoördinaten (r, θ) van een punt P in een vlak zijn de afstandscoördinaat r en de hoekcoördinaat θ. We noemen de afstand r de radius of de voerstraal en de hoek θ het argument.



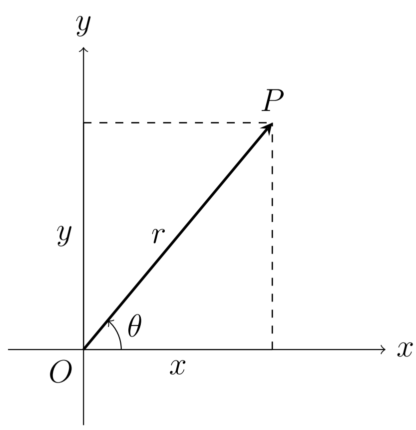
Enkele opmerkingen:

- we definiëren de voerstraal r steeds positief, dus $r \geq 0$.

- we definiëren de hoek θ positief als de pijl van de positieve x-as naar de plaatsvector van P tegen de klok in draait (andersom is de hoek negatief). Een hoek θ is éénduidig bepaald op veelvouden van 360° (of veelvouden van 2π in radialen) na. Meestal wordt de hoek θ gegeven in het interval $0° \leq \theta \leq 360°$ of $0 \leq \theta \leq 2\pi$. I.p.v. de Griekse letter theta (θ) wordt ook vaak de letter phi (φ) als hoekaanduiding gebruikt.
- de x- en y-as maken geen deel uit van dit coördinatenstelsel. We tekenen echter wel vaak een horizontale en verticale hulplijn om het uitzetten van de hoeken te vergemakkelijken.
- het poolcoördinatenstelsel is een kromlijnig coördinatenstelsel: de coördinaatlijnen zijn concentrische cirkels met de oorsprong O als middelpunt en langs stralen die radiaal vanuit O lopen. We noemen de oorsprong ook vaak 'de pool' en de x-as de 'poolas'.
- de pool (dus de oorsprong O) heeft als voerstraal $r = 0$ terwijl de hoek θ onbepaald is.
- poolcoördinaten worden ook gebruikt bij het voorstellen van en het werken met complexe getallen.

Soms is het handig of noodzakelijk om over te stappen van cartesische coördinaten naar poolcoördinaten of omgekeerd. Daarvoor gebruiken we het volgende stel transformatievergelijkingen:

cartesische coördinaten		poolcoördinaten
gegeven P met (x, y)	$\rightarrow$	dan is $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \end{cases}$
dan is $\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \end{cases}$	$\leftarrow$	gegeven P met (r, θ)



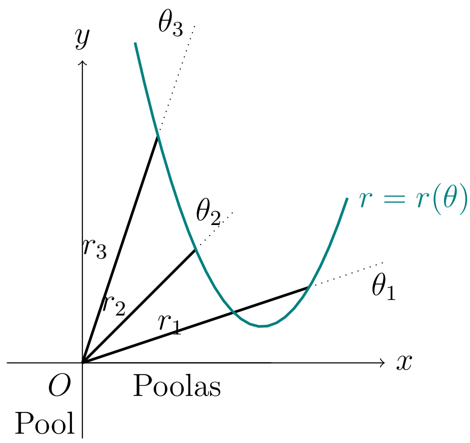
Opmerking let op bij het berekenen van de hoek θ. Je rekenmachine zal als resultaat van de Arctan $\left(\frac{y}{x}\right)$ een hoek geven in het 1ste of 4de kwadrant. Je moet dus zelf, bij het resultaat van je rekenmachine nog 180° of π optellen als het punt P in het 2de of 3de kwadrant ligt.

De voorstelling van een functie in poolcoördinaten

Een functie (kromme) in poolcoördinaten wordt beschreven door een vergelijking van de vorm: $r = r(\theta)$

We stellen een functiewaardentabel op voordat we de grafiek van de functie tekenen. Voor verschillende waarden θ_1 , θ_2 , θ_3 , ... berekenen we de bijhorende voerstralen $r_1 = r(\theta_1)$, ... Daarna tekenen we de punten met coördinaten (r_1, θ_1) , ... en verbinden deze d.m.v. een vloeiende lijn.

θ	$r = r(\theta)$
θ_1	$r_1 = r(\theta_1)$
θ_2	$r_2 = r(\theta_2)$
$\vdots$	$\vdots$

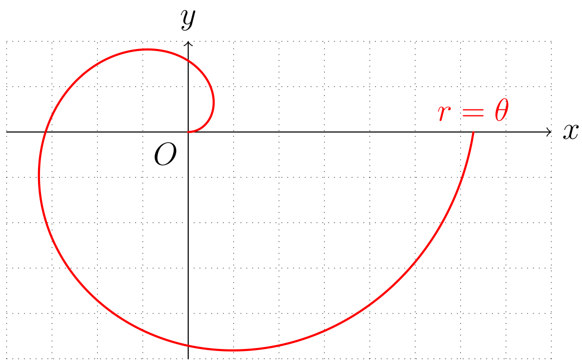


Voorbeeld 3 de spiraal van Archimedes

Schets de kromme met vergelijking $r = \theta$ waarbij $0 \leq \theta \leq 2\pi$

We stellen een functiewaardentabel op (tip: kies niet te veel, maar ook niet te weinig hoeken; de intervallen tussen de hoeken hoeft niet noodzakelijk overal even groot te zijn).

θ	$r = r(\theta) = \theta$
0	0
$\frac{\pi}{4}$	0,785
$\frac{\pi}{2}$	1,571
$3\frac{\pi}{4}$	2,356
π	3,142
$3\frac{\pi}{2}$	4,712
2π	6,283

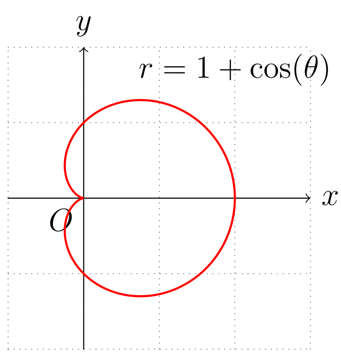


Voorbeeld 4 de cardioïde

Schets de kromme met vergelijking $r = 1 + \cos\theta$ waarbij $0° \leq \theta \leq 360°$

We stellen een functiewaardentabel op. Wegens de symmetrie t.o.v. de x-as berekenen we slechts de radius-waarden tussen 0° en 180°.

θ	$r = r(\theta)$
0°	2
30°	1,866
60°	1,5
90°	1
120°	0,5
150°	0,134
180°	0



Voorbeeld 5 de cirkel

Schets de kromme met vergelijking $r = 2$ waarbij $0° \leq \theta < 360°$

Bij elke hoek θ hoort dezelfde voerstraal, namelijk $r = 2$. Het heeft dus weinig zin om een functiewaardentabel op te stellen.

Opmerking: de cartesische vergelijking van een cirkel heeft een duidelijk ingewikkeldere notatie: $x^2 + y^2 = 2^2$. Schrijven we y expliciet dan zien we meteen ook dat dit eigenlijk geen functie is (met elke x-waarde komen immers 2 y-waarden overeen): $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

2 Limieten

2.1 Het begrip limiet

Bij het bestuderen van het gedrag van een functie stuiten we soms op het probleem dat de functie in een bepaald punt niet gedefiniëerd is. Dit kan bijvoorbeeld optreden als het voorschrift van de functie een breuk is waarvan de noemer nul wordt in dat punt. Toch willen we vaak weten hoe de grafiek van die functie in de buurt van zo'n punt er uitziet. Ook zijn we geïnteresseerd in het gedrag van een functie als het argument zeer groot of zeer sterk negatieve waarden aanneemt.

Het begrip limiet is dus een belangrijke bouwsteen van de analyse. De begrippen continuïteit, onbepaalde integraal en bepaalde integraal steunen allen op het limietbegrip. Ook meetkundig is het limietbegrip van belang: men heeft het nodig bij de definitie van afgeleiden en asymptoten.

De verzameling $\bar{\mathbb{R}}$

Gegeven is de verzameling van de reële getallen $\mathbb{R}$. Stel, we nemen als deelverzameling het halfopen interval $[5, 10[$ van $\mathbb{R}$. Er bestaat dan bijvoorbeeld een getal uit die verzameling dat kleiner of gelijk is aan alle elementen uit die deelverzameling. We noteren dit als $\forall x \in [5, 10[$ waarvoor geldt dat $x \geq 5$. In dit geval is het gezochte getal 5. Maar dit is niet altijd zo eenvoudig.

Nemen we de deelverzameling $\{...3, 5, 7, 9\}$ van $\mathbb{R}$. Welk getal kunnen we vinden dat kleiner is dan alle elementen uit deze deelverzameling? Het getal 1? Of -1? Of -100? Het antwoord wordt gevonden door de verzameling uit te breiden met de elementen plus oneindig $(+\infty)$ en min oneindig $(-\infty)$.

We zeggen nu dat "streep R streep" gelijk is aan: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ waarbij $\forall x \in \mathbb{R}$ geldt dat $-\infty < x < +\infty$.

Merk op dat de elementen $-\infty$ en $+\infty$ zelf geen reële getallen zijn. Let ook op met het symbool ∞: afhankelijk van de context kan dit "$+\infty$"betekenen, maar ook "$+\infty$ of $-\infty$". In dit laatste geval schrijven we soms $\pm\infty$.

Rekenen met ∞

Alhoewel $-\infty$ en $+\infty$ geen reële getallen zijn (maar wel symbolen), kunnen we er toch (mits enige voorzichtigheid) mee rekenen.

vermenigvuldiging			optelling	
$a \cdot (+\infty) = +\infty$	als	$a > 0$	$\pm\infty + a = \pm\infty$	met $a \in \mathbb{R}$
$a \cdot (+\infty) = -\infty$	als	$a < 0$		
$a \cdot (-\infty) = -\infty$	als	$a > 0$		
$a \cdot (-\infty) = +\infty$	als	$a < 0$		
$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$			$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	
$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$			$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$	
$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$				

$\frac{1}{\infty} = 0$ maar let op: $\frac{1}{0} = \infty$ en dus onbepaald (want ∞ is geen reëel getal).

Soms maken we nog onderscheid tussen een heel klein positief of heel klein negatief getal: $\frac{1}{0^+} = +\infty$ en $\frac{1}{0^-} = -\infty$

De volgende vormen zijn ook onbepaald: $\frac{0}{0}$ en $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $+\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞.

Hoezo, 1^∞ is onbepaald? Dit is toch gewoon $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots$ en dus gelijk aan 1!? Het antwoord hierop vind je op het einde van dit hoofdstukje.

Merk op dat de vormen $\frac{0}{0}$ en $\frac{\infty}{\infty}$ infeite hetzelfde betekenen, immers $\frac{a}{b}$ kan je ook schrijven als $\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}}$.

2.2 Intuïtieve uitleg limieten

Zie filmpje MOOC.

2.3 Limieten en continuïteit

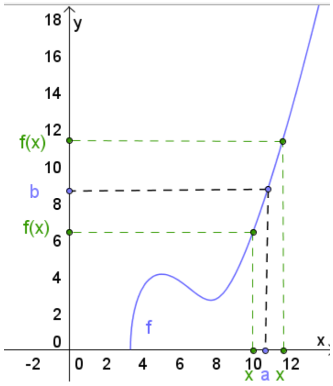
Het limietbegrip

Als x nadert tot a, dan nadert $f(x)$ tot b.

We zeggen wiskundig: de limiet van $f(x)$ voor x gaande naar a is b.

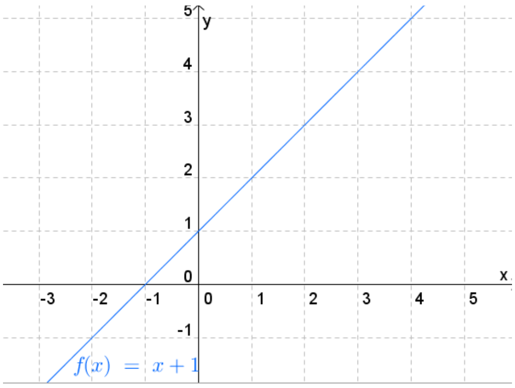
We noteren dit als: $\lim_{x\to a} f(x) = b$

Grafisch:



Voorbeeld 1 de functie is continu in a

$f(x) = x + 1$



We merken meteen op dat $dom\, f = \mathbb{R}$ (m.a.w. we mogen voor x elk reëel getal kiezen).

Als we x voldoende dicht laten naderen tot bijvoorbeeld 1, dan nadert $f(x)$ tot 2 (zie grafiek).

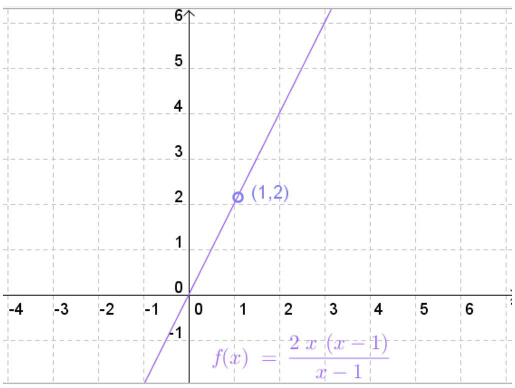
We noteren dit als: $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$ en dit is hier ook $= f(1)$.

Omdat $\lim_{x\to 1}(x+1) = f(1)$ zeggen we dat deze functie **continu** is in het punt $x = 1$.

Voorbeeld 2 de functie is discontinu in a

$f(x) = \frac{2x^2-2x}{x-1} = \frac{2x(x-1)}{x-1}$

De noemer mag niet nul worden. Dus het domein van de functie is: $domf = \mathbb{R} \setminus \{1\}$



Als we nu terug x voldoende dicht laten naderen tot 1, dan nadert $f(x)$ terug tot 2 (zie grafiek). We noteren dit als: $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{2x(x-1)}{x-1} = 2$ maar dit is $\neq f(1)$ want 1 behoort niet tot het domein van deze functie. En toch bestaat de limiet voor $x \to 1$.

Hier is $\lim_{x\to 1} \frac{2x(x-1)}{x-1} \neq f(1)$. De limiet is dus niet gelijk aan de functiewaarde; we zeggen dat de functie **niet-continu** of **discontinu** is in het punt $x = 1$.

Continu versus discontinu

Een functie f is continu in een **punt** $x = a$ als: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Het is belangrijk dat je inziet dat voor de limietberekenaar de functiewaarde niet belangrijk is, immers je gaat naar het punt a zonder het punt a zelf ooit te bereiken. Dit is het principe van het limietbegrip. Pas als je gaat kijken naar continuïteit moet je ook rekening houden met (het al dan niet bestaan van) de functiewaarde.

Het is je waarschijnlijk al opgevallen dat we nog niks gezegd hebben over "hoe je naar het punt a kan gaan". Dit kan immers langs de linkerkant van a, of langs de rechterkant van a gebeuren (we spreken van respectievelijk de linker- en de rechterlimiet).

Notatie We noteren:

linkerlimiet	$\lim_{\substack{x\to a \\ <}} f(x)$
rechterlimiet	$\lim_{\substack{x\to a \\ >}} f(x)$

Onthoud Twee belangrijke besluiten:

- als de linkerlimiet en de rechterlimiet beiden bestaan en gelijk zijn aan elkaar, dan bestaat **de** limiet $\lim_{x\to a} f(x)$. De grafiek loopt van beide kanten naar dat punt $(a, f(a))$ toe.
- als bovendien de limiet ook nog gelijk is aan $f(a)$ dan zit daar geen discontinuïteit (geen gaatje), dus de grafiek bestaat in dat punt. Dit betekent dat de limiet gelijk is aan de functiewaarde en dat de functie continu is in het punt a.

Vereenvoudigd zegt men soms ook dat een functie continu is als je de grafiek ervan kunt tekenen zonder je potlood van het papier te halen.

Tenslotte zeggen we dat een functie f continu is over het gesloten interval $[a, b]$ indien:

- f rechts continu is in a (m.a.w. $\lim_{\substack{x\to a \\ >}} f(x) = f(a)$)
- f links continu is in b (m.a.w. $\lim_{\substack{x\to b \\ <}} f(x) = f(b)$)
- $\forall x \in]a, b[$ geldt dat f continu is in x (m.a.w. $f(x)$ is continu in elk punt binnen het interval).

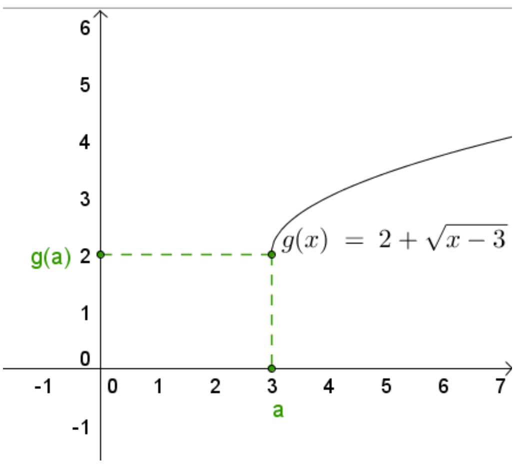
Je ziet dat een functie f discontinu kan zijn in een punt a omdat:

- ze in dat punt niet gedefinieerd is: $f(a)$ bestaat niet

- ze in dat punt een sprong maakt: $\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)$
- haar definitie in dat punt niet overeenkomt met de limiet: $\lim_{x \to a} f(x) = b \neq f(a)$
- haar waarde onbeperkt toeneemt naarmate men het punt nadert: $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

2.4 Voorbeelden

Voorbeeld 1



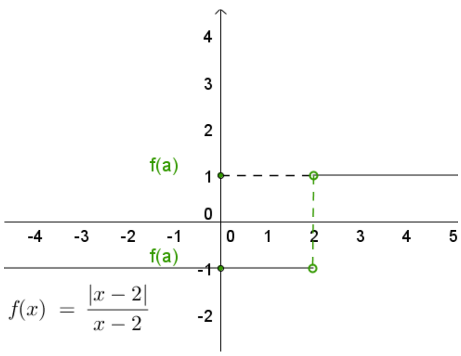
Bestaan de limieten als $x = 3$?

$\left.\begin{array}{l} \lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} g(x) \text{ bestaat niet want dom } g = [3, +\infty[\\ \lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} g(x) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 3} g(x) \text{bestaat niet want } \lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} g(x) \neq$
$\lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} g(x)$.

Is de functie continu in $x = 3$?

$\left.\begin{array}{l} g \text{ is niet linkscontinu in } 3 \\ g \text{ is rechtscontinu in } 3 \end{array}\right\} \Rightarrow g \text{ is discontinu in } 3.$

Voorbeeld 2



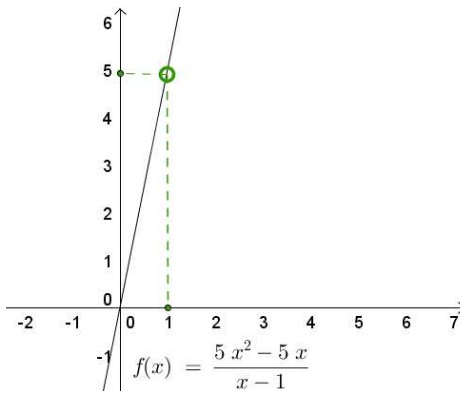
Bestaan de limieten in $x = 2$?

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = -1 \\ \lim_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = +1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) \text{bestaat niet want } \lim_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x).$$

Is de functie continu in $x = 2$?

$$\left.\begin{array}{l} g \text{ is niet linkscontinu in } 2 \\ g \text{ is niet rechtscontinu in } 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ is discontinu in } 2.$$

Voorbeeld 3



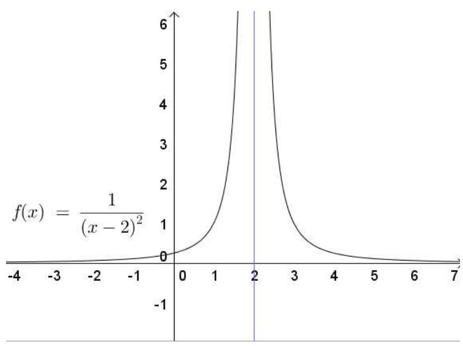
Bestaan de limieten in $x = 1$?

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = 5 \\ \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) \text{ bestaat en is } 5$$

Is de functie continu in $x = 1$?

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ is niet linkscontinu in } 1 \\ f \text{ is niet rechtscontinu in } 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ is discontinu in } 1.$$

Voorbeeld 4



Bestaan de limieten in $x = 2$?

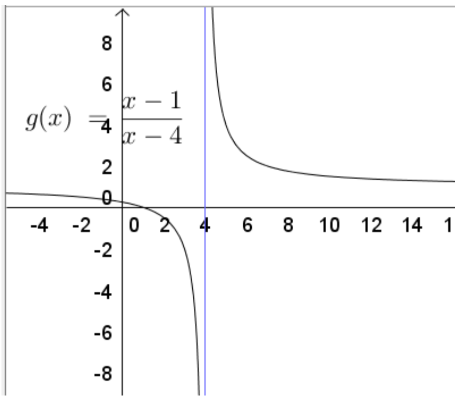
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = +\infty \\ \lim_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = +\infty.$$

Is de functie continu in $x = 2$?

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ is niet linkscontinu in } 2 \\ f \text{ is niet rechtscontinu in } 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ is discontinu in } 2.$$

We merken nog op dat $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ en $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Hier spreken we over een horizontale asymptoot met vergelijking $y = 0$.

Voorbeeld 5



Bestaan de limieten in $x = 4$?

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{\substack{x\to 4\\ <}} g(x) = -\infty \\ \lim_{\substack{x\to 4\\ >}} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 4} g(x) \text{ bestaat niet.}$$

Is de functie continu in $x = 4$?

$$\left.\begin{array}{l} g \text{ is niet linkscontinu in } 4 \\ g \text{ is niet rechtscontinu in } 4 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ is discontinu in } 4.$$

Er is een verticale asymptoot met vergelijking $x = 4$. Merk verder op dat $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$ en $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$. Er is dus ook een horizontale asymptoot met vergelijking $y = 1$.

2.5 Limieten - voorbeeld

Zie filmpje MOOC.

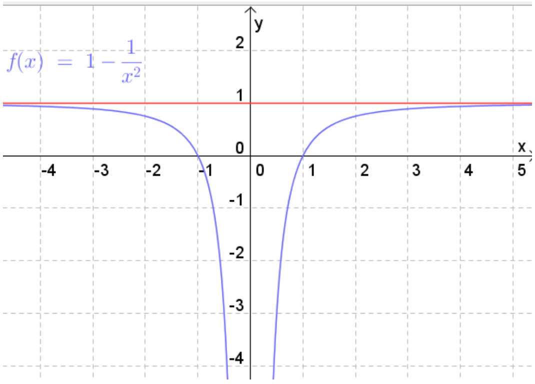
2.6 Limieten van functies (en asymptoten)

Limiet bij onbeperkte toename van het argument

We stellen ons de vraag wat $f(x)$ wordt als we x naar (plus of min) oneindig laten gaan.

Laten we eerst naar een voorbeeld kijken.

Voorbeeld 1 Stel $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$



We stellen vast dat naarmate x toeneemt, $f(x)$ waarden aanneemt die onbeperkt dicht bij 1 komen te liggen. Hetzelfde gebeurt wanneer x negatief is, maar in absolute waarde onbeperkt toeneemt. We kunnen dit noteren (en berekenen) a.d.h.v. de limietnotatie: $\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$ en $\lim_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$

Algemeen:

De afstand tussen de waarden van $f(x)$ en b wordt willekeurig klein, als het argument x maar voldoende groot wordt (argument neemt onbeperkt toe of af).

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0,\ \exists m > 0 :\ x > m \ \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0,\ \exists m > 0 :\ x < -m \ \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

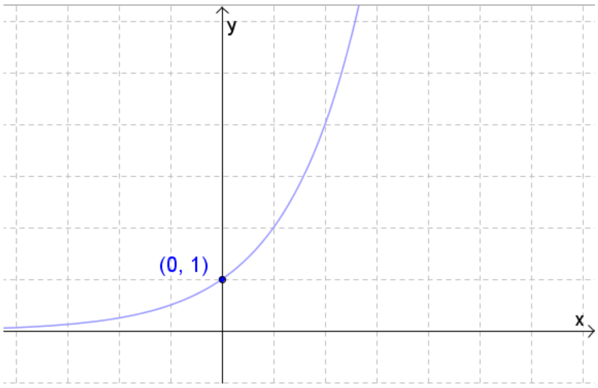
Dit houdt in dat men eerst een willekeurig positief getal ε kiest en in functie van deze gekozen ε, vastlegt hoe groot dan m moet zijn. Dit is uitvoerbaar, hoe klein men ε ook kiest. We kunnen ook zeggen: je kan $f(x)$ oneindig dicht bij b laten komen, mits je maar een heel grote waarde voor x kiest.

De horizontale rechte met vergelijking $y = b$ noemen we de **horizontale asymptoot** van de functie $f(x)$. In ons voorbeeld met de functie $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ is er één horizontale asymptoot met als vergelijking $y = 1$. Merk op dat de functie $f(x)$ deze horizontale rechte (de asymptoot) zowel voor $x \to -\infty$ als voor $x \to +\infty$ langs de onderkant benadert.

Het is ook mogelijk dat de waarden van $f(x)$ onbeperkt toenemen, naarmate x toeneemt, denk maar aan de veeltermfunctie $f(x) = x^2 + 1$ of de exponentiële functie $f(x) = 3^x$.

We stellen vast dat naarmate x toeneemt, ook $f(x)$ onbeperkt toeneemt: $\lim_{x\to+\infty} 3^x = +\infty$.

Merk op dat de limiet van de functie 3^x voor x gaande naar $-\infty$ gewoon naar 0 gaat. Dus de rechte met vergelijking $y = 0$ is hier dan een horizontale asymptoot.



Algemeen:

De waarden van $f(x)$ worden groter dan om het even welk (groot) reëel getal, als men x maar voldoende groot neemt (argument neemt onbeperkt toe of af).

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall n > 0, \exists m > 0: \; x > m \; \Rightarrow f(x) > n$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall n > 0, \exists m > 0: \; x > m \; \Rightarrow f(x) < -n$$

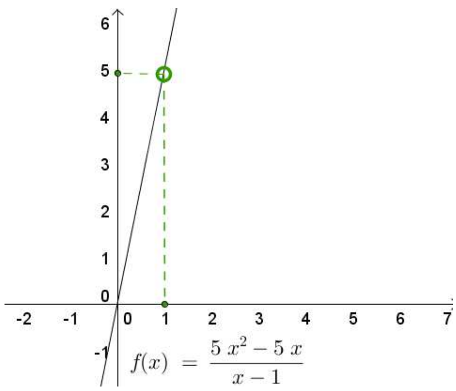
Hierbij legt men eerst vast hoe groot men wil dat $f(x)$ wordt; dit is het getal n. In functie van die gekozen n bepaalt men de benodigde m .

(gelijkaardige redenering en formuleringen voor $x \to -\infty$).

Limiet van een functie wanneer het argument onbeperkt nadert tot een vaste waarde a

Laten we nu even kijken naar het geval waarbij we x naar een welbepaalde vaste waarde a laten gaan: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. We kunnen alvast zeggen dat $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Voorbeeld 2 Als voorbeeld beschouwen we de functie $f(x) = \dfrac{5x^2 - 5x}{x-1} = \dfrac{5x(x-1)}{x-1}$



Wanneer we het argument x laten naderen tot 1, dan stellen we vast dat $f(x)$ nadert naar 5, en dit zowel langs de linker als langs de rechterkant van 1.

We schrijven: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{5x^2-5x}{x-1} = 5$ en $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \dfrac{5x^2-5x}{x-1} = 5$

Algemeen:

De afstand tussen de waarden $f(x)$ en b wordt willekeurig klein, als het argument x maar dicht genoeg nabij a komt.

$$\lim_{\substack{x\to a\\ <}} f(x) = b \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0:\ x\in]a-\delta,a[\,\Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$$
$$\lim_{\substack{x\to a\\ >}} f(x) = b \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0:\ x\in]a,a+\delta[\,\Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$$

Hierbij gaat men ervan uit dat men eerst ε vrij (willekeurig klein) gekozen heeft en dat men dan δ bepaalt in functie van de gekozen ε .

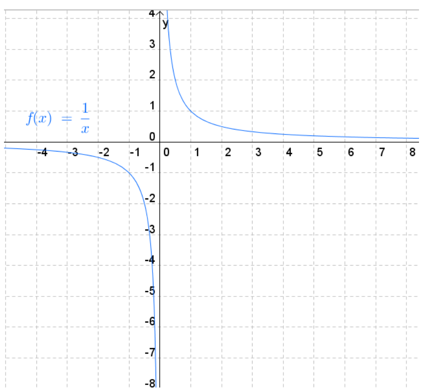
Het gebruik van deze definitie veronderstelt dat $f(x)$ gedefinieerd is in een omgeving van a , maar niet noodzakelijk in a zelf (herinner je dat de limietberekenaar niet geïnteresseerd is in $f(a)$)!

Even terzijde: aangezien in bovenstaand voorbeeld zowel de linker- als rechterlimiet bestaan en gelijk zijn, bestaat de limiet: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x^2-5x}{x-1} = 5$. Maar aangezien deze niet gelijk is aan de functiewaarde $f(1)$, want $1 \notin \mathit{dom}\, f$, kunnen we besluiten dat de functie discontinu is in het punt $x = 1$. Er zit bijgevolg een perforatie (gaatje) in de grafiek van f. Maar we zouden dit 'gat' in het domein kunnen opheffen door de functiewaarde in $x = 1$ 'erbij te definiëren': we stellen de functiewaarde gelijk aan de limiet (zodat de nieuwe, uitgebreide functie nu wel overal gedefinieerd is, en bovendien overal continu is). We spreken dan van een ophefbare discontinuïteit.

De "nieuwe" functie $f(x)$ wordt nu gedefinieerd als: $f(x) : \begin{cases} x \to \frac{5x^2-5x}{x-1} & \text{als } x \neq 1 \\ x \to 5 & \text{als } x = 1 \end{cases}$

Uiteraard is het ook mogelijk dat $f(x)$ onbeperkt toeneemt als x onbeperkt nadert tot a.

Voorbeeld 3 Als voorbeeld bekijken we de functie $f(x) = \frac{1}{x}$.



Nadert x langs rechts naar 0, dit wil zeggen langs waarden die groter zijn dan nul, dan worden de functiewaarden onbegrensd groot in positieve zin. $f(x)$ nadert naar plus oneindig als x langs rechts naar 0 nadert.

Nadert x langs links naar 0, dit wil zeggen langs waarden die kleiner zijn dan nul, dan worden de functiewaarden onbegrensd groot in negatieve zin. $f(x)$ nadert naar min oneindig als x langs links naar 0 nadert.

We schrijven: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ en $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

Algemeen:

Indien de waarden van $f(x)$ onbeperkt toenemen als x maar dicht genoeg bij a komt, zegt men:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \forall n > 0,\ \exists \delta > 0:\ 0 < |x-a| < \delta\ \Rightarrow f(x) > n \\
\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \forall n > 0,\ \exists \delta > 0:\ 0 < |x-a| < \delta\ \Rightarrow f(x) < -n
\end{aligned}$$

Hierbij gaat men ervan uit dat men eerst n vrij gekozen heeft en dat men dan δ bepaalt in functie van de gekozen n .

De verticale rechte met vergelijking $x = a$ noemen we de **verticale asymptoot** van de functie $f(x)$. In ons voorbeeld met de functie $f(x) = \frac{1}{x}$ is er één verticale asymptoot met als vergelijking $x = 0$. Merk op dat de functie $f(x)$ deze verticale rechte (de asymptoot) voor $x \to 0^-$ naar $-\infty$ nadert, en voor $x \to 0^+$ naar $+\infty$ benadert.

2.7 Epsilon delta definitie voor limieten

Zie filmpje MOOC.

2.8 Linkerlimiet en rechterlimiet

Soms is de waarde van $\lim_{x\to a} f(x)$ afhankelijk van de manier waarop we naar a naderen. We maken in dat geval een onderscheid tussen

de linkerlimiet	$\lim_{\substack{x\to a\\ <}} f(x)$	we naderen a langs de te kleine kant van a (" $<$ ")
	$\lim_{x\uparrow a} f(x)$	x stijgt tot aan de waarde van a
de rechterlimiet	$\lim_{\substack{x\to a\\ >}} f(x)$	we naderen a langs de te grote kant van a (" $>$ ")
	$\lim_{x\downarrow a} f(x)$	x daalt tot aan de waarde van a

Wanneer de linker- en rechterlimiet van elkaar verschillen, zeggen we dat de limiet niet bestaat.

Enkel als $\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = b \ (\in \mathbb{R})$ zeggen we dat **de** limiet bestaat.

Zie ook het paragraafje over *continu versus discontinu*.

Redenen om een onderscheid te maken tussen een linker- en een rechterlimiet kunnen zijn:

- dat $f(x)$ slechts aan één van beide kanten van a bestaat
- dat naarmate x nadert tot a, de waarden die $f(x)$ doorloopt naar een ander waarde toe leiden naargelang x kleiner of groter blijft dan a (sprongdiscontinuïteit).

Voorbeeld 1 Stel de functie $g(x) = \sqrt{x-4}$

Deze functie bestaat enkel voor $x \geq 4$ (we schrijven $dom\, g = [4, +\infty[$)

We berekenen de linkerlimiet: $\lim_{\substack{x \to 4 \\ <}} \sqrt{x-4}$ maar deze bestaat niet.

We berekenen de rechterlimiet: $\lim_{\substack{x \to 4 \\ >}} \sqrt{x-4} = 0$

We kunnen besluiten dat de limiet $\lim_{x \to 4} \sqrt{x-4}$ niet bestaat (enkel de rechterlimiet bestaat wel).

2.9 Rekenregels

In de onderstelling dat de limieten bestaan en eindig zijn gelden de onderstaande rekenregels.

De limieten van $f(x)$ en $g(x)$ bestaan en zijn eindig, dus: $\lim_{x \to a} f(x) = F$ en $\lim_{x \to a} g(x) = G$.

Rekenregel

1	$\lim_{x \to a} c = c$ met c een constante ($c \in \mathbb{R}$)
2	$\lim_{x \to a} x = a$
3	$\lim_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x) = c \cdot F$ met $c \in \mathbb{R}$
4	$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = F \pm G$
5	$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = F \cdot G$
6	$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{F}{G}$ mits $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$
7	$\lim_{x \to a} [f(g(x))] = f(\lim_{x \to a} g(x))$ mits f continu is in het punt $\lim_{x \to a} g(x) = b$

Eigenschap 7 in woorden: het omwisselen van het nemen van de limiet en het nemen van de functiewaarde door de functie f is enkel toegestaan als f een continue functie is in het betreffende punt. We zeggen ook wel eens 'de limiet passeert de functie f'.

Tip1: de rekenregels voor ∞ zijn vrij eenvoudig te onthouden en te gebruiken als $(+)\infty$ gelezen wordt als 'een heel groot (positief) getal', $-\infty$ als 'een heel groot negatief getal', 0^+ als 'een heel klein positief getal'en tenslotte 0^- als 'een heel klein negatief getal'.

Tip2: lees bijvoorbeeld de rekenregels 4, 5 en 6 ook eens op een andere manier: "de limiet van een som, is de som van de limieten" ...

Voorbeeld 1

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{4} &= \frac{1}{4} \lim_{x \to +\infty} x = \frac{1}{4} \cdot (+\infty) = +\infty \\
\lim_{x \to 3} [(x-2)(x+1)] &= \lim_{x \to 3} (x-2) \cdot \lim_{x \to 3} (x+1) = 1 \cdot 4 = 4 \\
\lim_{x \to 3} (x^2 - x - 2) &= \lim_{x \to 3} x^2 - \lim_{x \to 3} x - 2 \cdot \lim_{x \to 3} 1 = 9 - 3 - 2 = 4 \\
\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(2x - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} 2x - \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = 2 \cdot 0 - (+\infty) = -\infty \\
\lim_{x \to a} [\cos(g(x))] &= \cos\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) \\
\lim_{x \to a} \left[e^{f(x)}\right] &= e^{\lim_{x \to a} f(x)}
\end{aligned}
$$

2.10 Berekenen van limieten

Veeltermfuncties

Een veeltermfunctie van n$^{\text{de}}$ graad:

$$
f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \text{ met } a_n \in \mathbb{R}_0 \text{ en } a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}
$$

Elke veeltermfunctie is continu over $\mathbb{R}$ (want het domein is immers $\mathbb{R}$).

De limiet voor x gaande naar $a \in \overline{\mathbb{R}}$ van een veeltermfunctie is gelijk aan de functiewaarde (m.a.w. vervang overal x door a):

$$
\lim_{x \to a} \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right) = f(a)
$$

Een speciaal geval is de limiet voor x gaande naar oneindig. In dit geval is het infeite enkel de hoogste graad term die van belang is. Kijk maar:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right) &= \lim_{x \to +\infty} a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1} x^{n-1}}{a_n x^n} + \ldots + \frac{a_1 x}{a_n x^n} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right) \\
&= \lim_{x \to +\infty} a_n x^n (1 + 0 + \ldots + 0) \\
&= \lim_{x \to +\infty} a_n x^n
\end{aligned}
$$

Voorbeeld 1

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(-x^3+6x+14) &= \lim_{x\to+\infty} x^3\left(-1+\frac{6x}{x^3}+\frac{14}{x^3}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty} x^3(-1)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}(3x^2-4x+2) &= \lim_{x\to-\infty} 3x^2\left(1-\frac{4x}{3x^2}+\frac{2}{3x^2}\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty} 3x^2\\ &= +\infty\end{aligned}$$

Goniometrische en cyclometrische functies

Laat ons meteen opmerken dat bij de berekeningen van deze limieten het argument van de goniometrische of cyclometrische functie moet uitgedrukt zijn in radialen.

Enkele van deze limieten geven in eerste instantie aanleiding tot de onbepaalde vorm $\frac{0}{0}$, maar toch kan men de limiet vinden. We bekijken als voorbeeld de limiet van $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. Maken we een tabel met x-waarden die steeds dichter naar 0 naderen, dan zien we dat de verhouding $\frac{\sin x}{x}$ naar 1 gaat.

x	$\frac{\sin x}{x}$
1	0,84147098480
0,1	0,99833416646
0,01	0,99998333341
0,001	0,99999983333
0,0001	0,99999999999

Aangezien $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{\sin x}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\sin x}{x} = 1$ kunnen we concluderen dat $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (hetzelfde geldt trouwens ook voor $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$).

De limiet $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$ kunnen we dan weer wiskundig bewijzen a.d.h.v. de zogenaamde insluitstelling. Het komt er hierbij op neer dat je probeert een functie in te sluiten tussen twee andere functies die beide een gelijke limiet L hebben. De limiet van de ingesloten functie is dan ook gelijk aan L.

We weten dat de sinus-functie altijd een waarde oplevert tussen -1 en +1: $-1 \leq \sin x \leq +1$.

Dit blijft gelden als we de vergelijking delen door een positieve x waarde: $\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{+1}{x}$.

We weten ook dat: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-1}{x}\right) = 0$ en $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Passen we nu de insluitstelling toe dan concluderen we dat $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$.

De limiet $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ noemen we een 'standaardlimiet', en we kunnen hiermee een andere standaardlimiet afleiden:

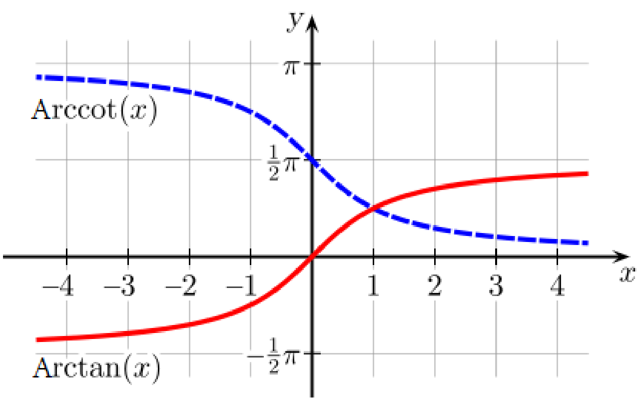
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\\ &= 1\cdot\frac{1}{1}=1\end{aligned}$$

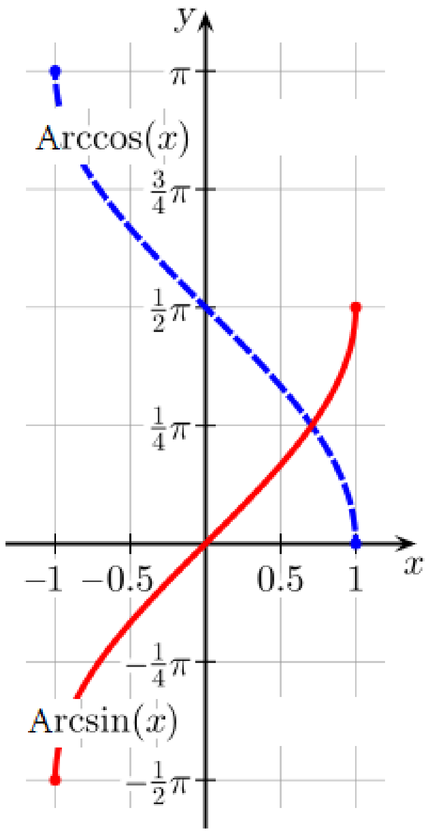
Voorbeeld 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}\cdot\frac{2x}{2x}\cdot\frac{3x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{2x}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}=\frac{2}{3}$$

Nog enkele veel voorkomende limieten van goniometrische en cyclometrische functies (tip: kijk ook eens naar hun grafiek of de goniometrische cirkel)

$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ <}}\tan x=+\infty$	$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$	$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\arcsin x=\frac{\pi}{2}$
$\lim_{\substack{x\to-\frac{\pi}{2}\\ >}}\tan x=-\infty$	$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$	$\lim_{\substack{x\to -1\\ >}}\arcsin x=-\frac{\pi}{2}$
$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\cot x=-\infty$	$\lim_{x\to+\infty}\text{arccot}x=0$	$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\arccos x=0$
s $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\cot x=+\infty$	$\lim_{x\to-\infty}\text{arccot}x=\pi$	$\lim_{\substack{x\to -1\\ >}}\arccos x=\pi$



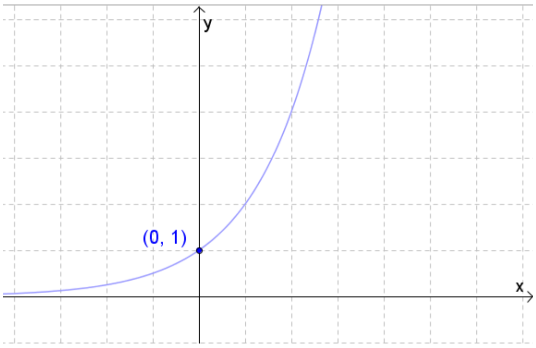


Exponentiële en logaritmische functies

Deze limieten laten zich gemakkelijk afleiden uit de grafieken:

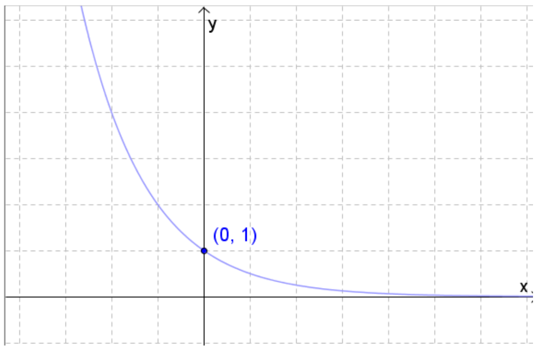
Exponentiële functies

$a > 1$



$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0} a^x = 1$$
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

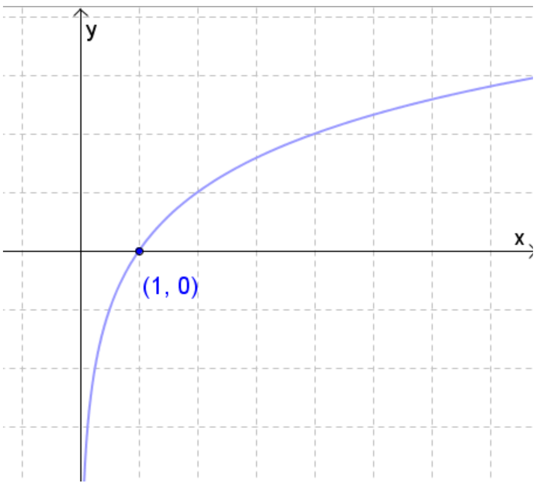
$0 < a < 1$



$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$$
$$\lim_{x\to 0} a^x = 1$$
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$$

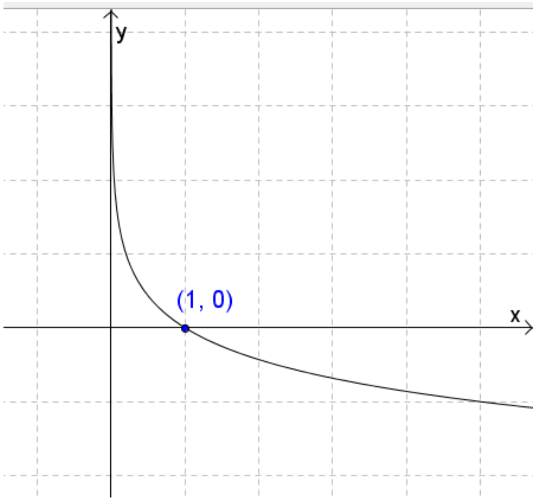
Logaritmische functies

$a > 1$



$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$$
$$\lim_{x\to 1} \log_a x = 0$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \log_a x = -\infty$$

$0 < a < 1$



$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1} \log_a x = 0$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \log_a x = +\infty$$

Enkele bijzondere limieten

Een bijzondere limiet is:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e = 2,718281828... \text{ en ook } \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

Hier zie je ook al waarom we gezegd hebben dat 1^∞ niet zomaar gelijk is aan 1.

Deze bijzondere limiet kan worden uitgebreid naar:

$$\lim_{x\to 0}(1+px)^{\frac{q}{x}} = e^{pq} \text{ met } p,q \in \mathbb{R}_0 \text{ en ook } \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{p}{x}\right)^{qx} = e^{pq}$$

2.11 Schijnbare onbepaaldheden

Onbepaalde vormen

Om de limiet $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ te berekenen moeten we dikwijls onbepaaldheden wegwerken. Daartoe gaan we opzoek naar functies die gelijkwaardig zijn met de oorspronkelijke functie, maar bij berekening van de limiet geen aanleiding meer geven tot een onbepaaldheid.

Soms kan een onbepaalde vorm omgezet worden naar een andere (eveneens onbepaalde) vorm: $0.\infty = \frac{1}{\frac{1}{0}}.\infty = \frac{1}{\infty}.\infty = \frac{\infty}{\infty}$.

Hetzelfde geldt voor de factor oneindig: $0.\infty = 0.\frac{1}{\frac{1}{\infty}} = 0.\frac{1}{0} = \frac{0}{0}$.

We merken hier meteen op dat een andere aanpak om de onbepaaldheden $\frac{0}{0}$ en $\frac{\infty}{\infty}$ te evalueren de regel van de l'Hôpital is.

Limieten van functies van het type $f(x)^{g(x)}$ kunnen aanleiding geven tot de onbepaalde vormen 0^0 , ∞^0 en 1^∞. In deze gevallen kan het herschrijven van de functie een oplossing bieden: $f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x).\ln f(x)}$. De functie $g(x).\ln f(x)$ leidt dan vaak tot iets van het type $0.\infty$.

De onbepaalde vorm $\frac{\infty}{\infty}$

- Rationale functies

  We spreken van rationale functies, als $f(x)$ een quotiënt van is van twee veeltermen. Rationale functies zijn niet gedefinieerd in de eventuele nulpunten van de noemer; ze hebben daar geen functiewaarde. Het domein van een rationale functie is $\mathbb{R}$, met uitzondering van de verzameling nulpunten van de noemer. Elke rationale functie is continu over zijn domein.

  Bij een rationale breuk die een onbepaalde vorm oplevert van het type $\frac{\infty}{\infty}$ omdat het argument naar ∞ streeft, hanteert men volgende regel:

  beschouw in teller en noemer enkel de hoogstegraadstermen en bepaal de limiet van hun verhouding.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_px^p+b_{p-1}x^{p-1}+\ldots+b_1x+b_0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_px^p}=\begin{cases}\pm\infty & \text{als } n>p\\ \frac{a_n}{b_p} & \text{als } n=p\\ 0 & \text{als } n<p\end{cases}$$

Merk op dat het teken van $\pm\infty$ moet nog nader bepaald worden.

Voorbeeld 1

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-11}{x^2+x-10}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}2x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6-x^2}{2x^2+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

- Irrationale functies

  Een irrationale functie is een functie waarin wortelvormen van rationale functies voorkomen. Elke irrationale functie is continu over haar domein. De uitdrukking onder het wortelteken van een even machtswortel moet wel positief zijn!

  Bij een irrationale breuk die een onbepaalde vorm oplevert van het type $\frac{\infty}{\infty}$ omdat het argument naar ∞ streeft, hanteert men volgende regel:

  zet in teller en noemer de hoogst mogelijke macht van x voorop en werk verder uit.

  Hierbij maken we gebruik van het feit dat:

$$\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x & \text{als } x>0\\ -x & \text{als } x<0\end{cases}$$

Voorbeeld 2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-2x}{\sqrt[3]{x^3+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2x}{\sqrt[3]{x^3}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}\right)}$$

Nu moeten we een onderscheid maken tussen de limiet gaande naar $+\infty$ en $-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2x}{x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}}=\frac{1-2}{1}=-1$$

en

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(-x)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2x}{x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}}=\frac{-1-2}{1}=-3$$

Voorbeeld 3

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{4x-\sqrt{x^2+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(3+\frac{2}{x}\right)}{4x-|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}$$

We maken terug onderscheid tussen de limiet gaande naar $+\infty$ en $-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3+\frac{2}{x}\right)}{4x - x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{2}{x}}{4-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = \frac{3}{4-1} = 1$$

en

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(3+\frac{2}{x}\right)}{4x - (-x)\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3+\frac{2}{x}}{4+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = \frac{3}{4+1} = \frac{3}{5}$$

De onbepaalde vorm $\frac{0}{0}$

- Rationale functies

  Bij de limiet van een rationale functie in het punt a, waarbij a het nulpunt is van zowel de teller als noemer, zal zowel teller als noemer als limiet nul hebben. We zullen in teller en noemer de factoren $(x-a)$ af zonderen en daarna deze factor $(x-a)$ wegdelen. Daarom gaan we eerst op zoek naar gemeenschappelijke factoren in teller en noemer; eventueel kan de regel van Horner helpen bij het ontbinden van de veelterm in factoren.

  Voorbeeld 4

  $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-7x+10} = \frac{0}{0}$$

  Teller en noemer ontbinden in factoren:

  teller: $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

  noemer (via Horner):
  $$\begin{array}{c|cc||c} & 1 & -7 & 10 \\ 2 & \downarrow & 2 & -10 \\ \hline & 1 & -5 & 0 \end{array}$$

  dus

  $$x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$$

  zodat

  $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-7x+10} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-5)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)}{(x-5)} = \frac{2+2}{2-5} = -\frac{4}{3}$$

  Voorbeeld 5

  $$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2+x-12} = \frac{0}{0}$$

  Teller en noemer ontbinden in factoren:

  teller: $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$

  noemer (via Horner):
  $$\begin{array}{c|cc||c} & 1 & 1 & -12 \\ 3 & \downarrow & 3 & 12 \\ \hline & 1 & 4 & 0 \end{array}$$

  dus

  $$x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4)$$

zodat

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4}{x^2-7x+10}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+4)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)}{(x+4)}=\frac{3+3}{3+4}=\frac{6}{7} \tag{9}$$

- Irrational functies

  Wanneer het nul worden van teller of noemer veroorzaakt wordt door het aftrekken of het optellen van wortelvormen, zal men teller en noemer met eenzelfde factor vermenigvuldigen. Deze factor wordt zo gekozen dat zijn product met de irrationale uitdrukking die nul werd, nu rationaal zal worden. Men noemt deze factor *een toegevoegde*.

Voorbeeld 6

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\frac{0}{0}$$

De teller gaan we rationaal maken door de teller (en de noemer) te vermenigvuldigen met $\left(\sqrt{x+1}+2\right)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} &= \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}.\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{(x+1-4)}{(x-3)\,.\left(\sqrt{x+1}+2\right)}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\,.\left(\sqrt{x+1}+2\right)}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Voorbeeld 7

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}=\frac{0}{0}$$

De noemer gaan we rationaal maken door de noemer (en de teller) te vermenigvuldigen met $\left(\sqrt{x+7}+3\right)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} &= \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}.\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\,.\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{(x+7-9)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\,.\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2}\left(\sqrt{x+7}+3\right)\\ &= 6\end{aligned}$$

De onbepaalde vorm $\infty-\infty$

Bij irrationale functies vermenigvuldig je met en deel je door de toegevoegde irrationale vorm (en hoop je op die manier de onbepaaldheid weg te werken).

Voorbeeld 8

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x+3}\right)=\infty-\infty$$

(zowel voor $x \to +\infty$ als voor $x \to -\infty$)

We vermenigvuldigen met het toegevoegde:

$$\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+3}\right)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x+3}\right).\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+3}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+3}\right)} &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1-(x^2-x+3)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+3}\right)}\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+3}\right)}\end{aligned}$$

Nu moeten we een onderscheid maken tussen de limiet gaande naar $+\infty$ en $-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}\right)}=\frac{1}{2}$$

en

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+3}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{(-x)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}\right)}=-\frac{1}{2}$$

Voorbeeld 9

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{2x^2+5}-x\right)$$

Hier maken we meteen onderscheid tussen de limiet gaande naar $+\infty$ en $-\infty$ (omdat de limiet voor $x \to -\infty$ eigenlijk geen probleem oplevert) :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+5}-x\right)=+\infty-(-\infty)=+\infty$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+5}-x\right) &= +\infty-(+\infty) \text{ dus...}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+5}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{2x^2+5}+x}{\sqrt{2x^2+5}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+5-x^2}{\sqrt{2x^2+5}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5}{\sqrt{2x^2+5}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(1+\frac{5}{x^2})}{(+x)\sqrt{2+\frac{5}{x^2}}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x(1+\frac{5}{x^2})}{\sqrt{2+\frac{5}{x^2}}+1}\\
&= +\infty
\end{aligned}$$

De onbepaalde vorm 1^∞

We hebben ons reeds eerder verbaasd over het feit dat 1^∞ niet zomaar hetzelfde is als $1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot\ldots$ en dus niet zomaar gelijk hoeft te zijn aan 1!?

De reden is eigenlijk heel eenvoudig: we zitten hier in het hoofdstukje "Limieten", met andere woorden zowel 1 als ∞ kunnen het resultaat zijn van het nemen van een limiet:

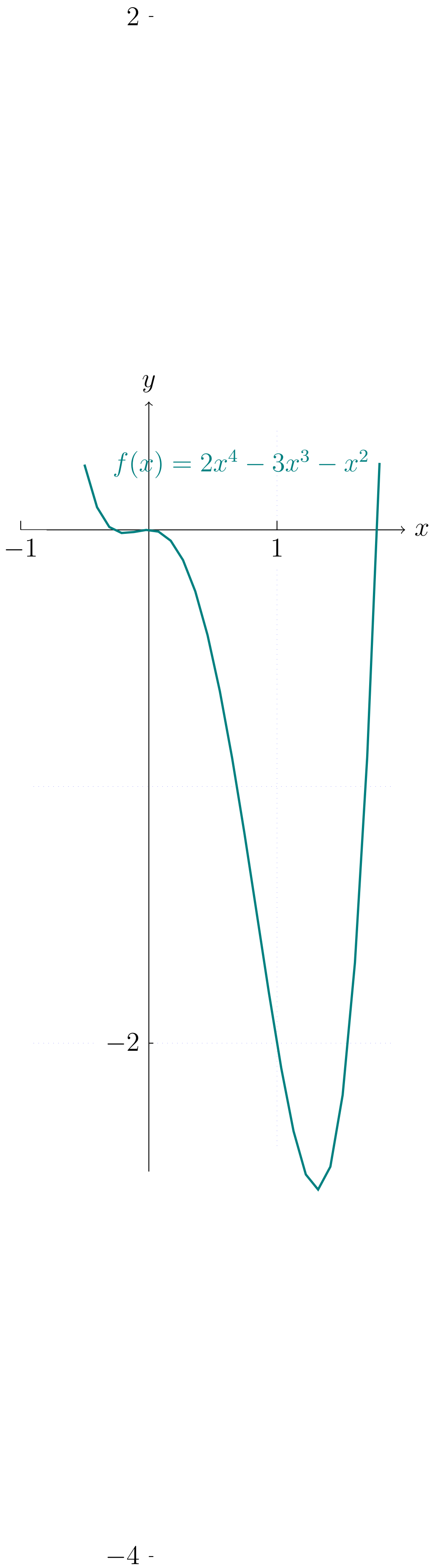
$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \ldots = 1^\infty.$$

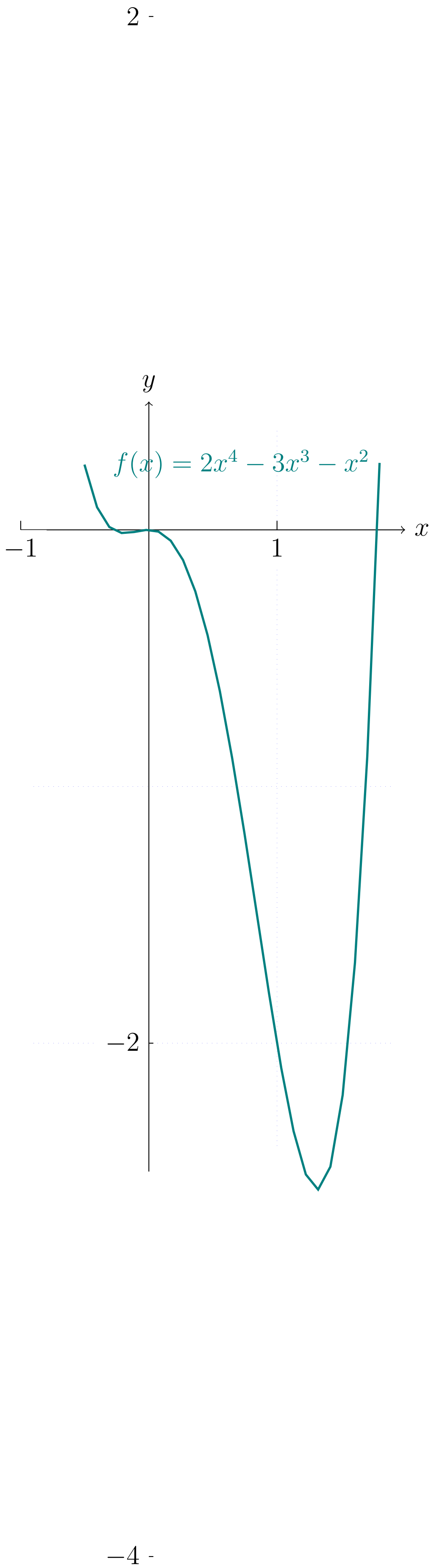
Laten we, om deze module af te sluiten, kijken naar een numeriek voorbeeldje. In paragraaf 2.10 hebben we gezien dat:

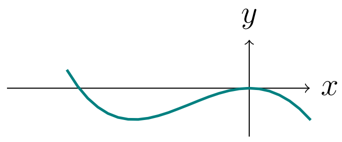
$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e = 2,718281828\ldots \text{ en ook } \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

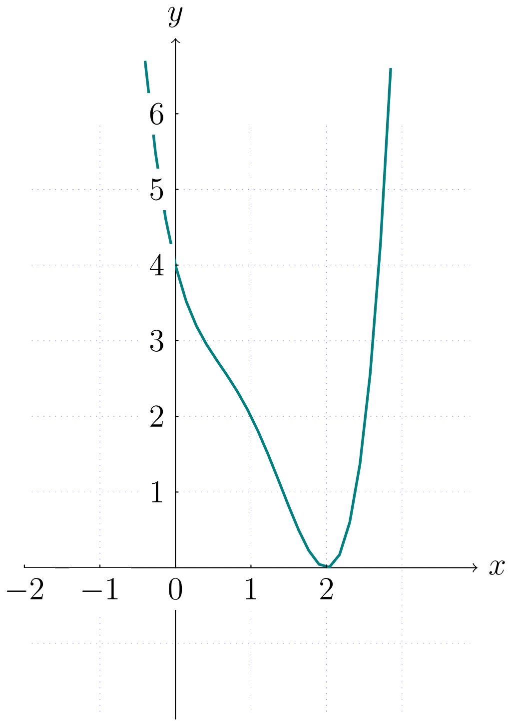
x	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$			x	$(1+\frac{1}{x})^x$		
1	2^1	=	2,0	1	2^1	=	2,0
0,1	$1,1^{10}$	=	2,59374246	10	$1,1^{10}$	=	2,59374246
0,01	$1,01^{100}$	=	2,70481382	100	$1,01^{100}$	=	2,70481382
0,0001	$1,0001^{10000}$	=	2,71814592	10000	$1,0001^{10000}$	=	2,71814592

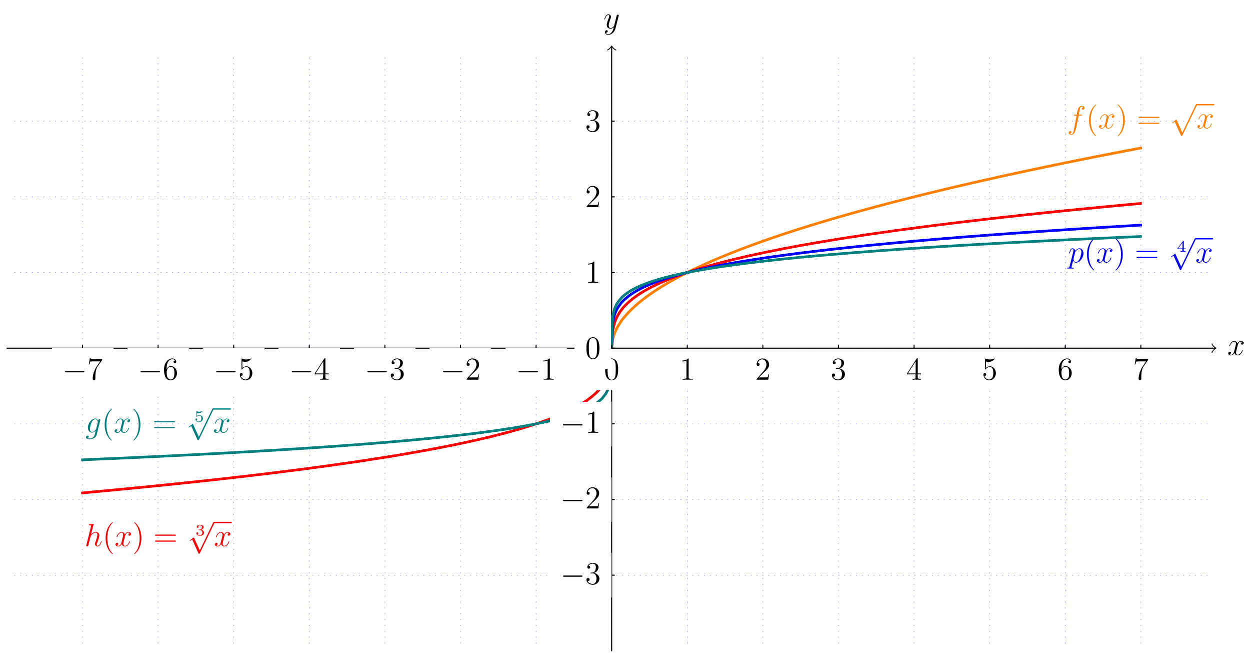
We zien dat, afhankelijk van de vorm die we bekijken, als x heel dicht bij 0 of bij oneindig nadert, de vorm schijnbaar naar 1^∞ gaat, maar de echte waarde gaat echter naar het "magische getal e".

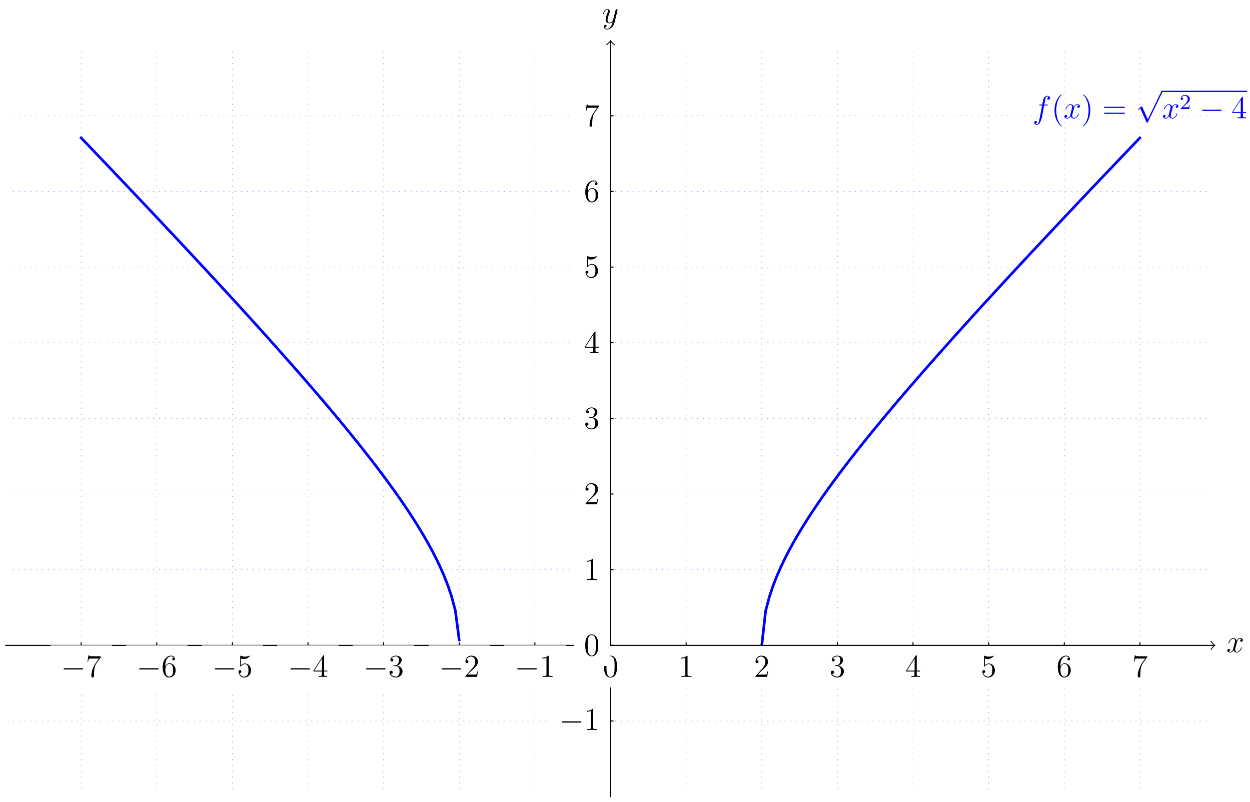

2
y
$f(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2$
x
-1
1
-2
-4

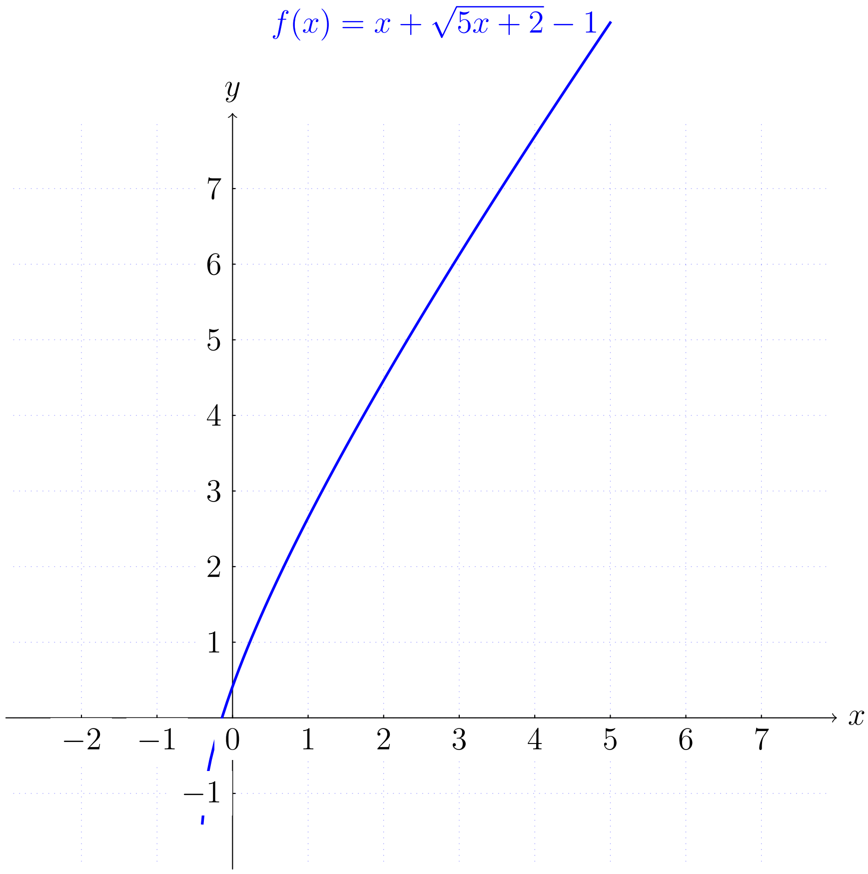

2
y
$f(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2$
x
−1
1
−2
−4

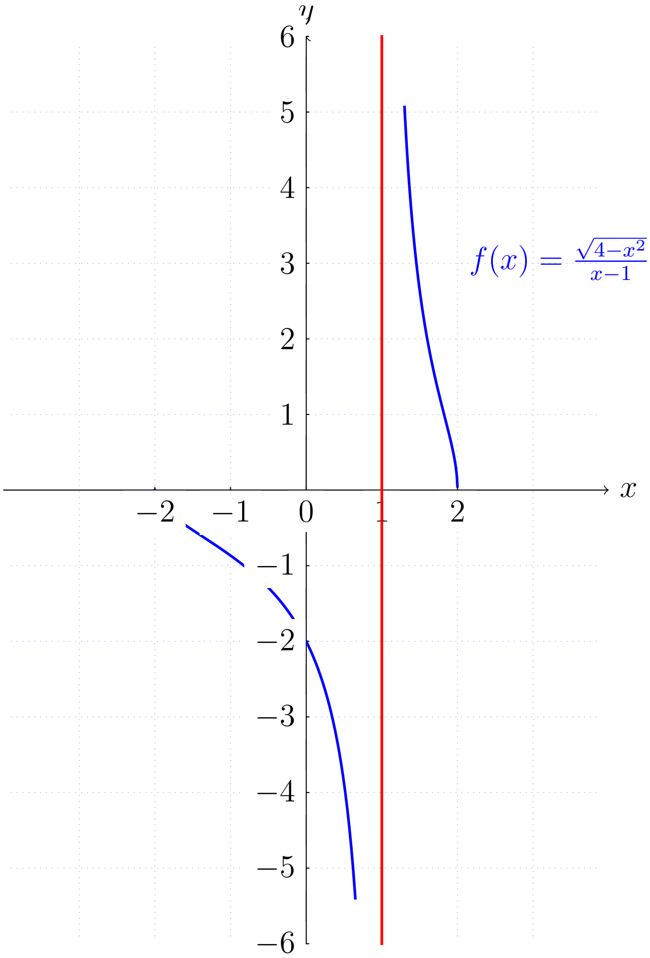

y
x

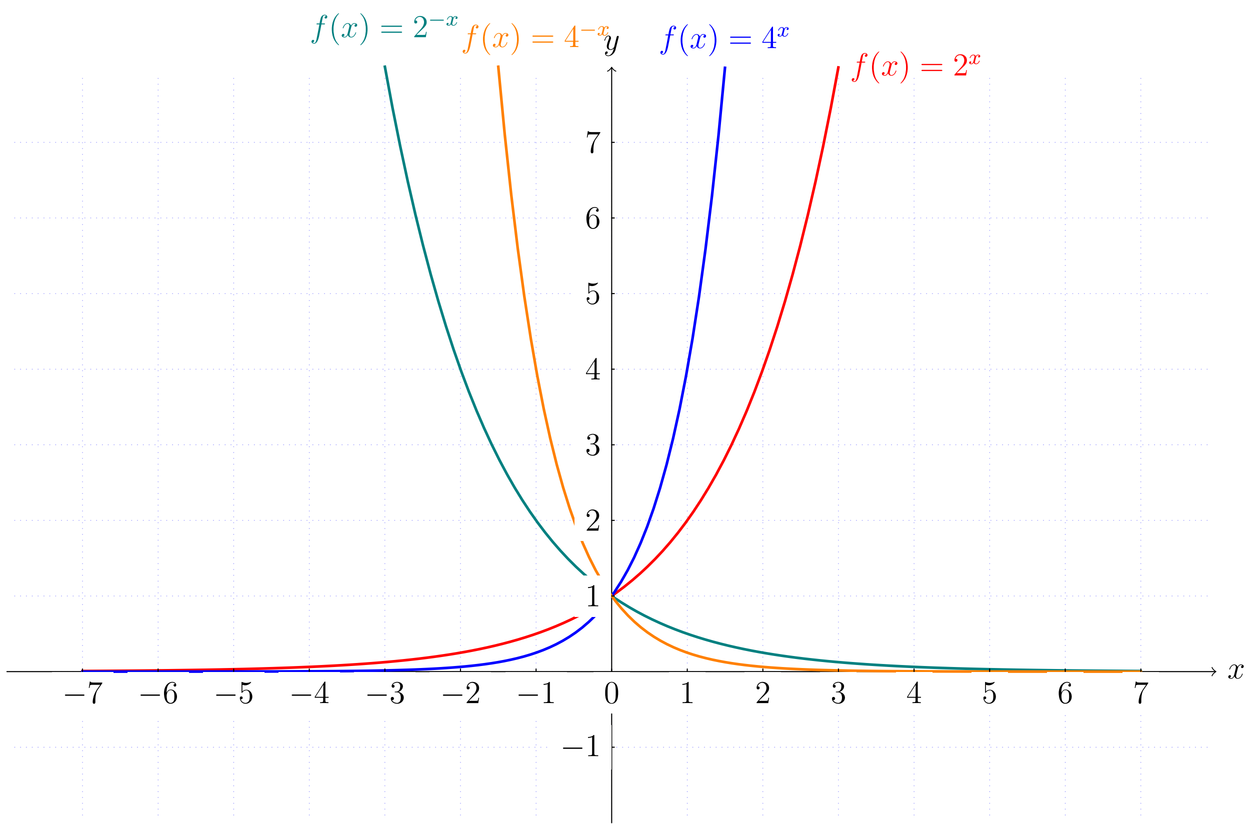

y
6
5
4
3
2
1
x
−2
−1
0
1
2

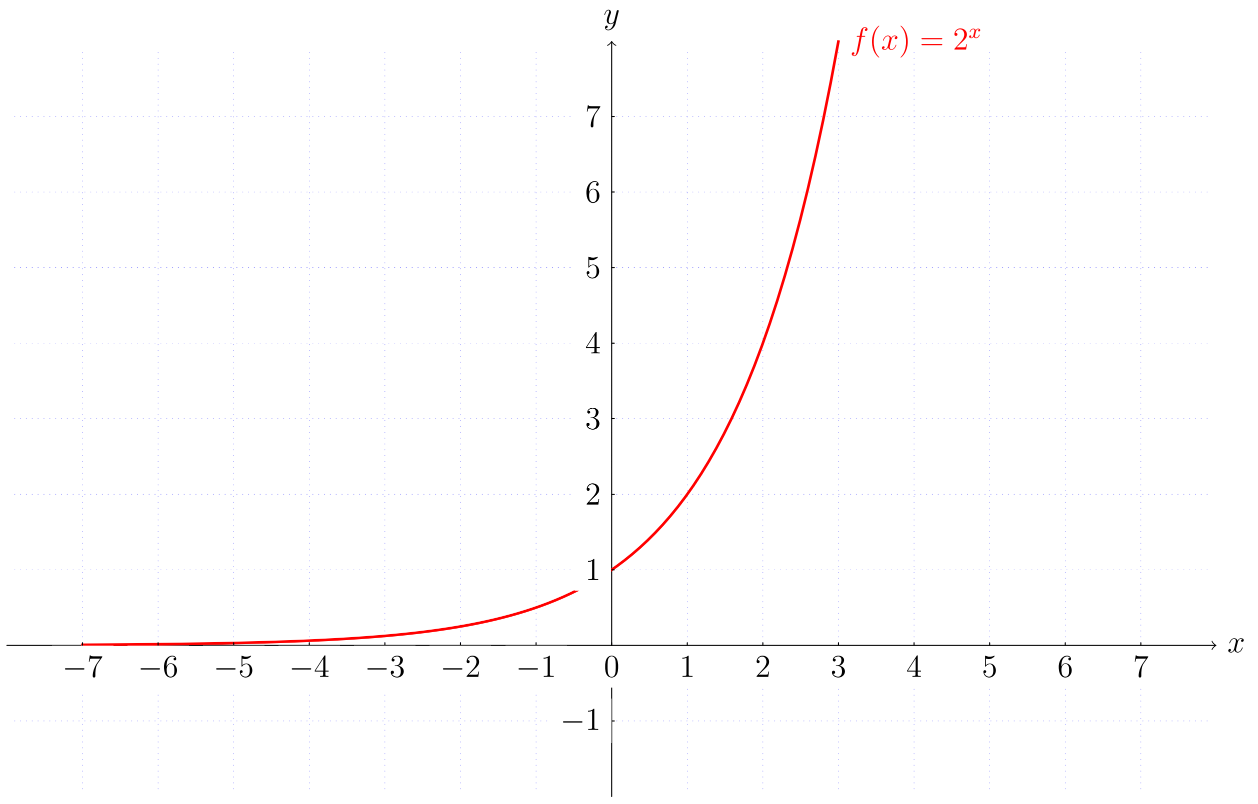

y
$f(x) = \sqrt{x}$
$p(x) = \sqrt[4]{x}$
$g(x) = \sqrt[5]{x}$
$h(x) = \sqrt[3]{x}$
3
2
1
0
−1
−2
−3
x
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7


$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
y
x
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
-1 0 1 2 3 4 5 6 7


$f(x) = x + \sqrt{5x + 2} - 1$
y
x
-2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
-1 1 2 3 4 5 6 7


y
6
5
4
3
2
1
x
−2
−1
0
1
2
−1
−2
−3
−4
−5
−6
$f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$


$f(x) = 2^{-x}$
$f(x) = 4^{-x}$
$f(x) = 4^{x}$
$f(x) = 2^{x}$
y
x
7
6
5
4
3
2
1
-1
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7


$f(x) = 2^{x}$
y
x
7
6
5
4
3
2
1
-1
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

Module 3

Goniometrie & complexe getallen

0 Intro

Zie filmpje MOOC.

1 Goniometrie

Inleiding

Wie technische wetenschappen studeert wordt voortdurend en soms onverwacht geconfronteerd met goniometrie en driehoeksmeetkunde. Van optica tot machinebouw, van elektrotechniek tot staalbouw, er is bijna geen vak of vakgebied te vinden waarbij goniometrie geen rol speelt. Hieronder staan enkele voorbeelden: een instrument uit de topografie en een toepassing uit de bouwkunde.

Een theodoliet is een instrument om hoeken te meten dat veel gebruikt wordt door landmeters. Het toestel wordt op een staander horizontaal (waterpas) geplaatst en door een kijker op verschillende referentiepunten te richten kan men de hoeken tussen deze punten meten.

(Bron figuur: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Askania_Sekunden-Theodolit_TU_e_400.jpg)

De staalconstructie van een hoogspanningsmast is gebaseerd op driehoeken.

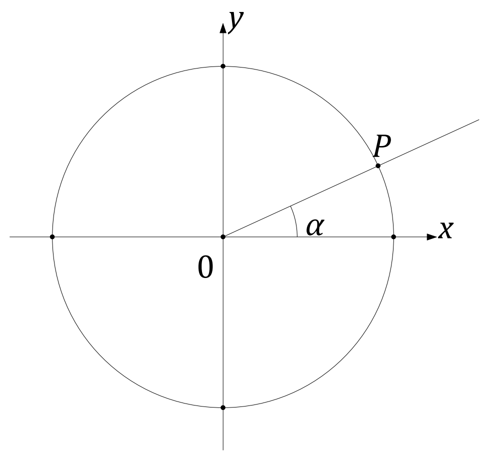
(Bron figuur: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pylon_ds.jpg).

In de volgende paragrafen bespreken we praktisch de basis van goniometrie en driehoeksmeetkunde.

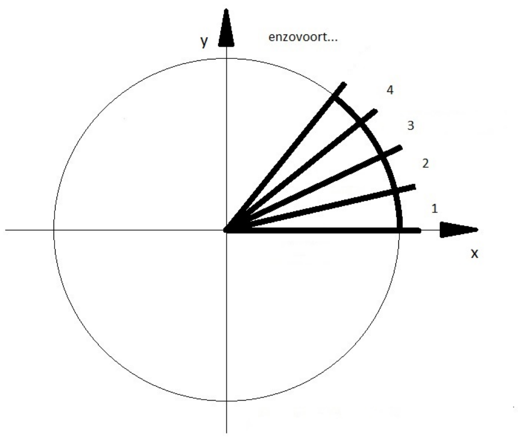
1.1 Meten van hoeken

Graden, minuten, seconden

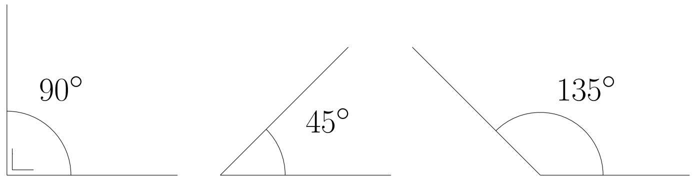
Een hoekmaat wordt bepaald door een hoek voor te stellen op een cirkel met willekeurige straal r waarbij men de top van de hoek laat samenvallen met het middelpunt van de cirkel. Elke hoek α komt dan overeen met een zekere afstand gemeten langs de omtrek van de cirkel. Men zegt dat met elke hoek α een zekere booglengte op de cirkel met straal r overeenkomt.



Door nu de cirkelomtrek onder te verdelen in allemaal stukjes met gelijke booglengte bekomt men een maat voor een hoek. Op de figuur hieronder zijn enkele onderverdelingen getekend.



Deze onderverdelingen noemt men graden. Meestal (maar niet altijd!) wordt een cirkel onderverdeeld in 360°: een rechte hoek komt dan overeen met 90° en een gestrekte hoek met 180°. Hieronder staan enkele tekeningen:



Graden zijn zelf ingedeeld in minuten (zoals meters kunnen ingedeeld worden in centimeters) en minuten kunnen op hun beurt worden ingedeeld in seconden (zoals centimeters kunnen worden ingedeeld in millimeters). Graden, minuten en seconden worden echter ingedeeld in een 60-tallig talstelsel, waardoor je volgende regels krijgt:

$$\begin{aligned} 1 \text{ graad} &= 60 \text{ minuten} \\ 1 \text{ minuut} &= 60 \text{ seconden} \end{aligned}$$

Deze hoekmaat noemt men de zestigdelige graad. De zestigdelige graad wordt soms afgekort als 'deg' van het Engelse woord 'degree'.
Graden, minuten en seconden hebben hun eigen eenheid/symbool, zoals het symbool voor centimeter 'cm' is:

$$\begin{aligned} 1 \text{ graad} &= 1^\circ \\ 1 \text{ minuut} &= 1' \\ 1 \text{ seconde} &= 1'' \end{aligned}$$

Enkele voorbeelden:

- Een hoek van 1° lees je als een hoek van '1 graad'. Ze bestaat zelf uit $1 \cdot 60 = 60$ minuten (want elke graad is 60 minuten), of uit $60 \cdot 60 = 3600$ seconden (want elke minuut is 60 seconden).
- Een hoek van 42° lees je dus als '42 graden' en bestaat zelf uit $42 \cdot 60 = 2520$ minuten (want elke graad is 60 minuten), of uit $2520 \cdot 60 = 151200$ seconden (want elke minuut is 60 seconden).
- Een hoek van $5^\circ 12' 13$" lees je als 5 graden, 12 minuten en 13 seconden.

Soms wordt het gebruik van minuten en seconden vermeden in de notatie van een hoek, en gebruikt men een decimale notatie. Zo kan het zijn dat je een hoek tegenkomt die genoteerd is als:

$$22,5^\circ \quad \text{of ook} \quad 22^\circ,5$$

Dat betekent dan ook letterlijk 22 en een halve graad. Ofwel 22 graden en de helft van 60 minuten. Met andere woorden:

$$22,5^\circ = 22^\circ 30'$$

Een tweede, iets moeilijker voorbeeld:

$$\begin{aligned} 42,21^\circ &= 42^\circ + 0,21 \cdot 1^\circ && \text{herschrijven van een kommagetal} \\ &= 42^\circ + 0,21 \cdot 60' && \text{1 graad is 60 minuten} \\ &= 42^\circ + 12,6' && \text{uitrekenen} \\ &= 42^\circ + 12' + 0,6 \cdot 1' && \text{herschrijven van een kommagetal} \\ &= 42^\circ + 12' + 0,6 \cdot 60'' && \text{1 minuut is 60 seconden} \\ &= 42^\circ + 12' + 36'' && \text{uitrekenen} \\ &= 42^\circ 12' 36'' \end{aligned}$$

Gelukkig hebben veel rekentoestellen de mogelijkheid om graden in decimale notatie om te zetten in graden in notatie van graden, minuten, seconden. Raadpleeg daarvoor de handleiding van je rekentoestel.

Rekenen met graden, minuten, seconden is anders dan rekenen met tiendelige getallen. Een voorbeeld:

$$12°45' + 36°50' = 48°95' = 49°35'$$

Telkens als je meer dan 60 minuten hebt, moet je het aantal graden verhogen met 1. Net zo bij meer dan 60 seconden, dan verhoog je het aantal minuten!

Decimale graad of honderddelige graad

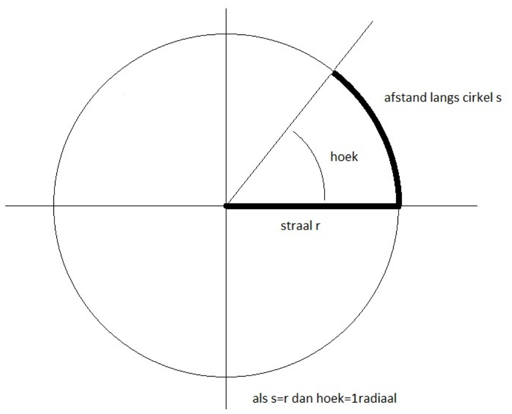
Zoals eerder gezegd is de onderverdeling van een cirkel in 360° alleen maar een afspraak. Volgens een andere conventie wordt een cirkel onderverdeeld in 400 stukjes zodat een rechte hoek overeenkomt met 100 onderverdelingen: men spreekt dan van decimale graden of honderddelige graden. Honderddelige graden komen vooral voor in de topografie en de weg- en waterbouw. Vooral studenten bouwkunde zullen deze hoekmaat tegen komen. De eenheid van de 100-delige hoek is 'gon' (maar ook 'gr' of 'grad' komen voor). In principe is deze hoekmaat erg eenvoudig. Men start met de afspraak:

Een rechte hoek meet 100 gon.

Bijgevolg zal een getrekte hoek 200 gon meten, en een hoek van 45° de helft van 100 gon en dus 50 gon. Honderddelige graden rekenen gemakkelijker dan 60-delige graden.

Radialen

Een andere veel gebruikte hoekmaat is de radiaal. Men neemt een cirkel met straal r en zet daarop een bepaalde hoek uit. Met deze hoek komt dan een welbepaalde booglengte s op de cirkelomtrek overeen. Men zegt nu dat die hoek waarvoor de booglengte s gelijk is aan de straal r een hoek is van 1 radiaal.



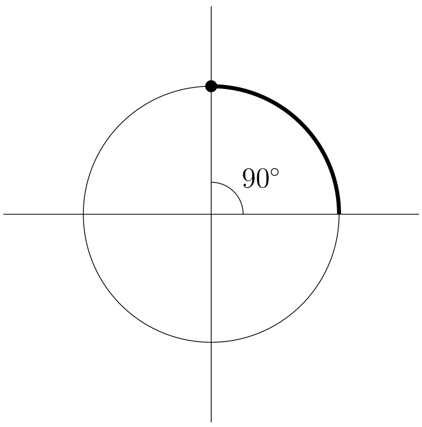
Voor een hoek van 2 radialen geldt dus dat $s = 2r$, voor een hoek van 5 radialen geldt dan $s = 5r$, enz... M.a.w. voor een hoek θ kan men schrijven dat het verband tussen de cirkelboog s en de straal r gegeven wordt door:

$$s = r \cdot \theta$$

Let op! Deze formule is alléén geldig als de hoek θ wordt uitgedrukt in radialen...

In theoretische berekeningen (fysica, mechanica,...) wordt bijna altijd ondersteld dat een hoek wordt uitgedrukt in radialen zodat men van deze formule kan gebruik maken.

De omtrek van een cirkel met straal r is de gekende formule $2 \cdot \pi \cdot r$. Uit $s = r \cdot \theta$ volgt dan dat de hoek die overeenkomt met de volledige cirkelomtrek gelijk is aan $\theta = 2\pi$. Om gemakkelijk te rekenen kiest men dikwijls een cirkel met $r = 1$, de omtrek van zo een éénheidscirkel is 2π. Met dit in het achterhoofd berekenen we de grootte van een rechte hoek ($90°$), maar nu in radialen:



Je ziet dat de rechte hoek een kwart van de cirkel beslaat. De gehele cirkel heeft een omtrek van 2π en bijgevolg bepaalt de rechte hoek een cirkelboog met lengte $\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$.
We zeggen:

De rechte hoek meet $\frac{\pi}{2}$ radialen.

Op je rekentoestel worden radialen vaak aangegeven met 'rad'. Ook radialen hebben een eenheid, namelijk 'rad'. Vaak laten we deze eenheid weg:

$$90° = \frac{\pi}{2}\text{rad} = \frac{\pi}{2}$$

Het voordeel van radialen is dat deze al kommagetallen zijn, en je ermee kan rekenen zoals je met gewone getallen doet. Het moeilijke is dat radialen vaak 'ongewoon' zijn, omdat het getal π er zo vaak in opduikt. Nog enkele veel voorkomende hoeken:

- De nulhoek meet $0°$ en beschrijft geen omtrek op de cirkel (het beginpunt van de cirkelboog is hetzelfde als het eindpunt ervan). Bijgevolg is de nulhoek ook een hoek van 0 radialen.
- De gestrekte hoek meet $180°$ en beschrijft de helft van een cirkel (tekenen!). De omtrek van een halve cirkel is π en dus meet de gestrekte hoek π radialen.

- De volle hoek meet 360° en beschrijft de volledige cirkel. De omtrek van de volledige cirkel is 2π en dus meet de volle hoek 2π radialen.

Volgende regel is zeer belangrijk:

$$180° = \pi$$

Hieruit kan je vaak snel de grootte van een eenvoudige hoek in radialen afleiden. Bijvoorbeeld:

- 60° is gelijk aan 180° : 3, en dus is de hoek van 60° gelijk aan $\frac{\pi}{3}$ radialen.
- 30° is gelijk aan 180° : 6, en dus is de hoek van 30° gelijk aan $\frac{\pi}{6}$ radialen.
- 45° is gelijk aan 180° : 4, en dus is de hoek van 45° gelijk aan $\frac{\pi}{4}$ radialen.

Nog even een lijstje formules, waarvan de bovenste de belangrijkste is:

$$\begin{aligned} 180° &= \pi \\ 360° &= 2\pi \\ 90° &= \frac{\pi}{2} \\ 60° &= \frac{\pi}{3} \\ 45° &= \frac{\pi}{4} \\ 30° &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Overgangen tussen de verschillende hoekeenheden

Algemeen verband

De overgang tussen de verschillende hoekeenheden kan je gemakkelijk maken als je weet dat een gestrekte hoek gelijk is aan:

Onthoud 180°=π rad=200 gon.

Van graden naar radialen en terug

Omdat $180° = \pi$ rad, zal $1° = \frac{180°}{180} = \frac{\pi \text{ rad}}{180}$. Je kan dit gebruiken om een willekeurige hoek in graden om te zetten in radialen:

$$32° = 32 \cdot 1° = 32 \cdot \frac{\pi}{180}\text{rad} \approx \frac{32 \cdot 3,14}{180}\text{rad} = 0,56\text{rad}$$

Het is wel erg belangrijk dat je een hoek in graden eerst omzet in een decimale notatie, en niet met minuten en seconden erbij. De regel wordt nu:

$$x° \text{ is gelijk aan } x \cdot \frac{\pi}{180}\text{rad}$$

of met andere woorden, omzetten van **graden naar radialen** is vermenigvuldigen met

$$\frac{\pi}{180}\text{rad} \approx 0,0175\text{rad}$$

Nog een voorbeeldje:

$$42°12'36'' = 42,21° \approx 42,21 \cdot 0,0175\text{rad} \approx 0,74\text{rad}$$

Omdat $\pi\text{rad} = 180°$, vind je dat $1\text{rad} = \frac{\pi}{\pi}\text{ rad} = \frac{180°}{\pi}$. Je kan dit gebruiken om een willekeurige hoek in radialen om te zetten in graden:

$$1,35\text{ rad} = 1,35 \cdot 1\text{rad} = 1,35 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx \frac{1,35 \cdot 180°}{3,14} \approx 77,35°$$

Het resultaat is dus altijd een hoek in graden, in decimale notatie. De algemene regel is dus

$$x\text{rad is gelijk aan } x \cdot \frac{180°}{\pi}$$

of met andere woorden, omzetten van **radialen naar graden** is vermenigvuldigen met

$$\frac{180°}{\pi} \approx 57,3°$$

Nog een voorbeeldje:

$$0,456\text{rad} \approx 0,456 \cdot 57,3° = 26,13°$$

Merk op dat we bij deze omzettingen vaak afronden. Dat mag enkel als het voor de opgave mag, soms moet je nauwkeurig en symbolisch werken, en dan gebruik je de formules zonder afronden!

Van graden naar gon en terug

We gebruiken de regel dat $90° = 100$ gon, dus vind je:

$$1° = \frac{100\text{ gon}}{90} = 1,111\text{ gon}$$
$$1\text{ gon} = \frac{90°}{100} = 0,9°$$

Dit gebruik je om de volgende omzettingsregels te vinden:

$$x° = x \cdot 1,111\text{ gon}$$
$$x\text{ gon} = x \cdot 0,9°$$

Voorbeeld 1

- $12,13° = 12,13 \cdot 1,111\text{ gon} \approx 13,48\text{ gon}$.
- $78,85\text{ gon} = 78,85 \cdot 0,9° \approx 70,97°$

Ook hier is het belangrijk dat je de decimale notatie van de graden gebruikt, en niet de notatie in minuten en seconden!

Onthoud

Onthoud

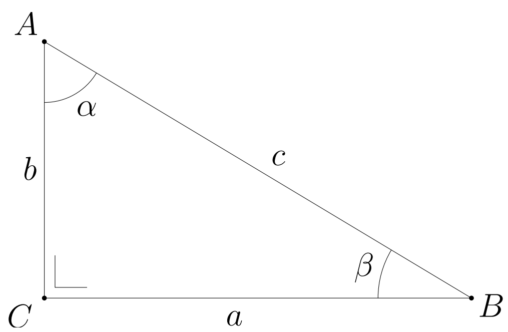
- Hoeken kan je meten in
  - graden (°), minuten ('), seconden (")
  - radialen (rad), de lengte van een cirkelboog van een cirkel met straal 1
  - 100-delige graden(gon)
- $180° = \pi$ rad
- $90° = 100$ gon

Volgende formules zijn zeer nuttig:

$$\begin{aligned} x^\circ &= x \cdot \frac{\pi}{180}\text{rad} \approx x \cdot 0,0175\text{rad} \\ x\text{rad} &= x \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx x \cdot 57,3^\circ \\ x^\circ &= x \cdot \frac{10}{9}\text{ gon} \approx x \cdot 1,111 \text{ gon} \\ x \text{ gon} &= x \cdot 0,9^\circ \end{aligned}$$

1.2 Rechthoekige driehoeken

Tekening en definities



Een algemene rechthoekige driehoek wordt vaak weergegeven zoals in bovenstaande figuur. Een rechthoekige driehoek bestaat uit zijden en hoeken:

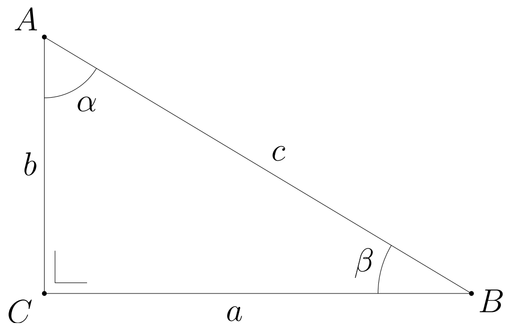
- De zijden, aangeduid met de kleine letters a, b en c.
- De hoekpunten A, B en C.
- De hoeken α (alfa) en β (beta).

De plaats van deze letters wordt meestal op dezelfde manier gedaan:

- De rechte hoek krijgt als hoekpunt C. De rechte hoek krijgt vaak geen aparte naam, omdat je reeds weet dat deze $90°$ is. Als ze dan toch een naam krijgt, wordt dat γ (gamma).
- α is de hoek horende bij hoekpunt A, β is de hoek horende bij hoekpunt B.
- De zijde tegenover de hoek α is de zijde a, en de zijde tegenover de hoek β is de zijde b. Deze zijden noemt men de **rechthoekszijden**.
- De zijde c ligt tegenover de rechte hoek en het hoekpunt C en wordt de **hypothenusa** of **schuine zijde** genoemd.

De stelling van Pythagoras

In een rechthoekige driehoek is de som van de kwadraten van de rechthoekszijden gelijk aan het kwadraat van de schuine zijde



Voor deze tekening is dit dan:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

De stelling van Pythagoras is erg nuttig om de zijden van een driehoek te berekenen. Telkens je twee zijden hebt, kan je de derde berekenen.

Goniometrische getallen in een rechthoekige driehoek

Aan een hoek α van een rechthoekige driehoek kunnen we een aantal getallen koppelen:

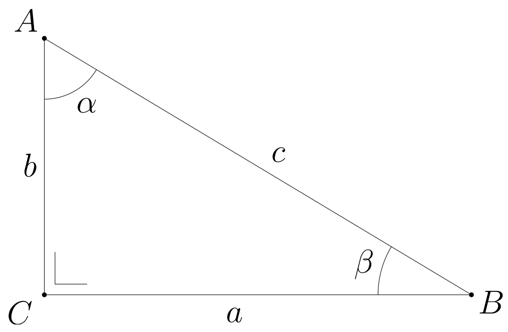
$$\text{de sinus van } \alpha = \sin\alpha = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$

$$\text{de cosinus van } \alpha = \cos\alpha = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$

$$\text{de tangens van } \alpha = \tan\alpha = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$$

$$\text{de cotangens van } \alpha = \cot\alpha = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{overstaande rechthoekszijde}}$$

Voor de driehoek



Is dat dan:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a}$$

Uiteindelijk zijn sinus, cosinus, ... van een hoek niet afhankelijk van de driehoek waar je ze in tekent. Daarom kan je ook met je rekentoestel een sinus, cosinus, ... berekenen. Zorg wel dat je hoekmaat juist staat ingesteld!

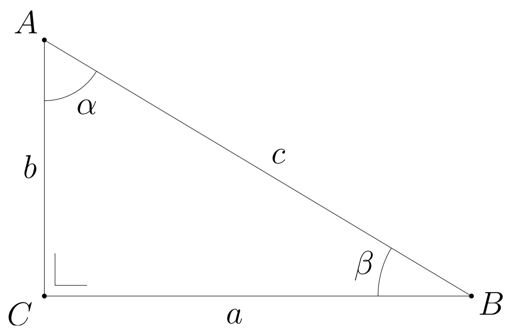
Nuttige formules

Volgende formules zijn vaak nuttig om hoeken terug te vinden (met $\sin^2\alpha$ bedoelen we het kwadraat van de sinus van α, of met andere woorden, $(\sin\alpha)^2$):

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1\\ \tan\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\ \cot\alpha &= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\\ \tan\alpha\cdot\cot\alpha &= 1\end{aligned}$$

Oplossen van rechthoekige driehoeken

We hebben enkele formules nodig, studeer deze goed! Voor een **rechthoekige** driehoek geldt:



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \sin\beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \tan\beta = \frac{b}{a}$$

Wat kan je hier nu mee? Als je enkele onderdelen van een rechthoekige driehoek gegeven hebt, kan je met deze formules en gegevens de andere onderdelen berekenen. Vaak heb je met 2 gegeven waarden genoeg. Dit noemen we het oplossen van een rechthoekige driehoek. De bedoeling is a, b, c, α en β te bepalen.

Voorbeeld 1 Van de driehoek is gegeven $a = 3$ en $b = 4$. Bereken de overige getallen.
Met de stelling van Pythagoras vind je:

$$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow 3^2 + 4^2 = c^2 \Leftrightarrow 9 + 16 = c^2 \Leftrightarrow 25 = c^2 \Leftrightarrow c = 5$$

We hebben de 3 zijden, dus nu moeten we nog de twee hoeken berekenen. Dat doen we met sinus, cosinus, ...:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{3}{5} = 0,6$$

Nu kan je met je rekentoestel uitrekenen wat α is, vaak met de toets $\sin^{-1}$. Je vindt:

$$\alpha \approx 36,87°$$

Ook β kan je vinden op deze manier:

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{4}{5} = 0,8$$

En dus

$$\beta \approx 53,13°$$

Zie je dat $\alpha + \beta = 90°$! Dit is geen toeval. De som van de hoeken van een driehoek is 180°. Omdat je 1 hoek al kent, namelijk de rechte hoek van 90°, is de som van de andere 2 90°. Onthoud dus:

- **De som van de hoeken van een driehoek is** 180°, of met andere woorden

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

- **De som van de scherpe hoeken in een rechthoekige driehoek is** 90°, of m.a.w.

$$\alpha + \beta = 90°$$

Voorbeeld 2 Er is gegeven dat $\alpha = 30°$ en c (de schuine zijde) is 7. Bereken de overige getallen.
Je kan meteen β vinden:

$$\alpha + \beta = 90° \Leftrightarrow 30° + \beta = 90° \Leftrightarrow \beta = 60°$$

De zijden bereken je via een sinus:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \Leftrightarrow \sin 30° = \frac{a}{7} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{a}{7}$$

Je zondert nu a af door links en rechts met 7 te vermenigvuldigen en je krijgt:

$$a = \frac{7}{2}$$

De laatste zijde b vind je nu met de stelling van Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{2}\right)^2 + b^2 = 7^2 \Leftrightarrow 12,25 + b^2 = 49$$

Je zondert b^2 af

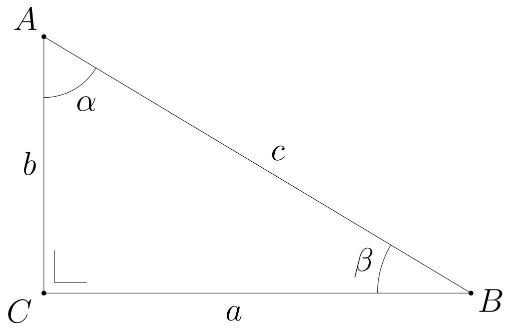
$$b^2 = 49 - 12,25 = 36,75$$

En dan neem je links en rechts de vierkantswortel

$$b = \sqrt{36,75} \approx 6,06$$

De algemene truc is dus telkens een formule te kiezen waar 2 van de symbolen bekend zijn, om zo het derde te vinden.

Onthoud



Onthoud

- **De stelling van Pythagoras**

$$a^2 + b^2 = c^2$$

- **sin, cos, tan, cot**

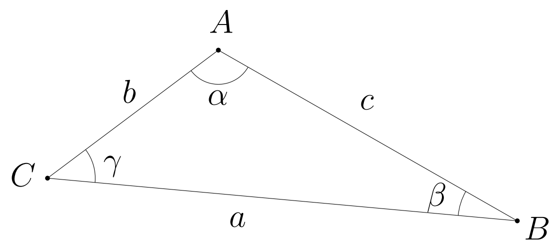
$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a}$$

- $\alpha + \beta = 90°$
- Een rechthoekige driehoek los je op door formules te kiezen uit Pythagoras, $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, \sin\beta, \ldots$ waarin twee waarden bekend zijn om zo de derde te vinden.

1.3 Willekeurige driehoeken

Tekening en afspraken

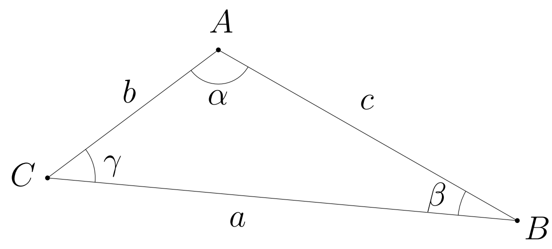


- De hoekpunten duiden we aan met A, B, C.
- De bijhorende hoeken duiden we aan met α (alfa) bij A, β (beta) bij B en γ (gamma) bij C.
- De zijde tegenover duiden we aan met a (tegenover A), b (tegenover B) en c (tegenover C).

Sinus- en cosinusregel

We herinneren er nog eens aan dat de stelling van Pythagoras en de formules voor sinus, cosinus, tangens en cotangens die we tot nu toe besproken hebben alléén geldig zijn voor rechthoekige driehoeken.
Voor een willekeurige driehoek gelden iets ingewikkelder formules die de sinusregel en de cosinusregel genoemd worden.

De **cosinusregel:**



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Je ziet dat in het linkerlid altijd 1 bepaalde zijde voorkomt, dat er in het rechterlid de twee andere voorkomen, samen met de cosinus van de hoek die hoort bij het linkerlid. Vergeet zeker de -2 niet bij de cosinus!

Opmerking: als één van de hoeken een rechte hoek is, bijvoorbeeld de hoek $\alpha = 90°$, dan is $\cos\alpha = 1$ en vereenvoudigt de cosinusregel tot de stelling van Pythagoras: $a^2 = b^2 + c^2$.

De **sinusregel:**

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

De sinusregel splits je meestal op in

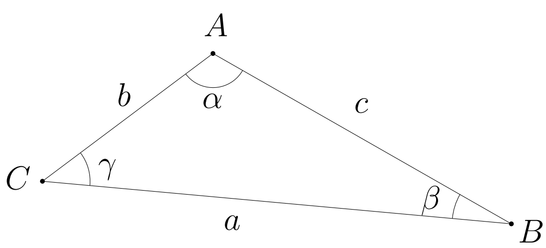
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$
$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Een andere vorm van de sinusregel is:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$$
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$$
$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

Oplossen van willekeurige driehoeken

Het oplossen van een willekeurige driehoek doe je op dezelfde manier als het oplossen van een rechthoekige driehoek, al zijn de formules anders. Vergeet ook niet dat de som van de hoeken van een driehoek 180° is! We gebruiken in dit onderdeel volgende tekening voor de aanduidingen:



$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Bij een willekeurige driehoek heb je ook meestal meer gegevens nodig dan bij een rechthoekige driehoek om hem op te lossen. De techniek blijft hetzelfde:

Kies een formule waar 3 onderdelen gegeven zijn, en bepaal de vierde.

Voorbeeld 1 In een willekeurige driehoek zijn gegeven $\alpha = 20°$, $\gamma = 50°$ en $a = 10$. Geef de andere waarden.
We moeten dus nog β, b en c berekenen. Omdat je al twee hoeken hebt, is de derde gemakkelijk te vinden uit:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Leftrightarrow 20° + \beta + 50° = 180° \Leftrightarrow \beta = 110°$$

Om b te berekenen, kunnen we de cosinusregel niet gebruiken, want we kennen 2 zijden niet, en bij de cosinusregel treden altijd alle zijden op. Dus moeten we de sinusregel gebruiken:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

We kennen zowel a als α, dus gebruiken we van de sinusregel:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Leftrightarrow \frac{10}{\sin 20°} = \frac{c}{\sin 50°}$$

Je ziet dat er nog maar 1 onbekende is, namelijk c. Dus we vinden, door alles uit te rekenen:

$$\frac{10}{0,34} = \frac{b}{0,77} \Leftrightarrow c = \frac{10}{0,34} \cdot 0,77 \approx 22,65$$

Blijft er nog b over, die we ook doen met de sinusregel:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Leftrightarrow \frac{10}{0,34} = \frac{c}{0,94} \Leftrightarrow b = 27,65$$

Voorbeeld 2 In een willekeurige driehoek zijn gegeven $\beta = 45°$, $a = 5$, $c = 6$. Bepaal de andere waarden.
Hier hebben we slechts 1 hoek, dus de som van de hoeken van een driehoek zal ons niet helpen. Ook met de sinusregel zijn we niet veel, omdat we teveel gegevens missen. Dus blijft er over: de cosinusregel. Welke neem je dan? Die waar β, a en c in staan:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \Leftrightarrow b^2 = 25 + 36 - 2 \cdot 5 \cdot 6\cos 45° \Leftrightarrow b^2 = 61 - 60 \cdot 0,71 \approx 18,4$$

Dus neem je aan beide kanten een vierkantswortel en vind je:

$$b \approx 4,29$$

Nu je b kent, en β ook, kan je met de sinusregel α vinden:

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a} \Leftrightarrow \frac{\sin 45°}{4,29} = \frac{\sin\alpha}{5}$$

Afzonderen en uitrekenen, levert je dan op

$$\sin\alpha = \frac{45°}{4,29} \cdot 5 = 0,82$$

Je kan nu met $\sin^{-1}$ het juiste antwoord vinden:

$$\alpha = 55,08°$$

γ vind je nu met

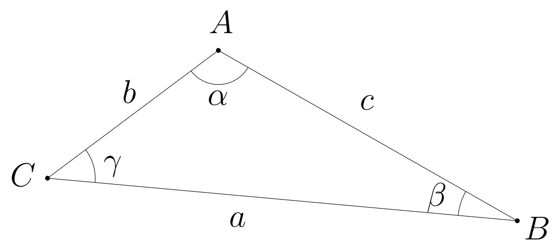
$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Leftrightarrow 55,08° + 45° + \gamma = 180° \Leftrightarrow \gamma = 79,92°$$

Opmerking

- De som van de hoeken van een driehoek is $180°$, elke hoek apart heeft een grootte tussen $0°$ en $180°$.
- Bij het berekenen van de hoeken in een driehoek zal je gebruik maken van de commando's $\sin^{-1}$ en $\cos^{-1}$ op je rekentoestel. Bij gebruik van $\cos^{-1}$ zal dit de juiste hoek geven maar bij gebruik van $\sin^{-1}$ kan dit een verkeerde uitkomst geven. Dit komt omdat $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ en het commando $\sin^{-1}$ steeds die hoek oplevert die kleiner is dan $90°$.
  Bijvoorbeeld: $\alpha = 45°$ en $180° - 45° = 135°$ hebben dezelfde sinus. Als de onbekende hoek in de driehoek $135°$ is zal $\sin^{-1}$ echter $45°$ geven...
  Praktisch ga je bij gebruik van $\sin^{-1}$ bij het oplossen van driehoeken als volgt te werk:
  - Indien je een meetkundig correcte tekening van de driehoek hebt kan je zien of de hoek die je berekent groter of kleiner dan $90°$ is. Als de hoek die je berekent met $\sin^{-1}$ groter is dan $90°$ vervang dan je uitkomst α door $180° - \alpha$.
  - Indien je niet zeker bent van de tekening dan controleer je of de som van de hoeken van de driehoek $180°$ is. Als dat niet het geval is vervang dan je uitkomst α door $180° - \alpha$.

Onthoud

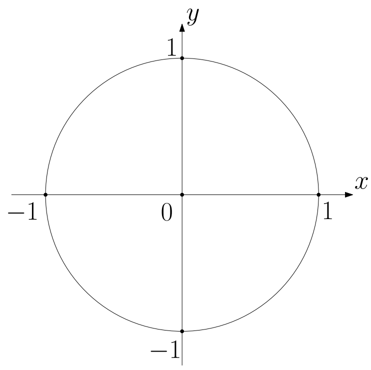
- **De sinusregel**
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$
- **De cosinusregel**
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$
- Bij het oplossen van een willekeurige driehoek, neem je best formules waar alle gegevens behalve 1 kan ingevuld worden.
- Pas op met de sinus en $\sin^{-1}$



1.4 De goniometrische cirkel

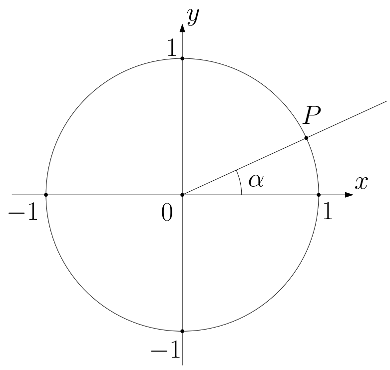
Tekening

In een vorig hoofdstukk hebben we de goniometrische getallen van hoeken ingevoerd met behulp van een rechthoekige driehoek. We kunnen ze echter ook voorstellen op een cirkel. We tekenen een cirkel met straal 1 die met zijn middelpunt in de oorsprong van een orthonormaal* assenstelsel ligt. Deze cirkel noemen we de goniometrische cirkel.

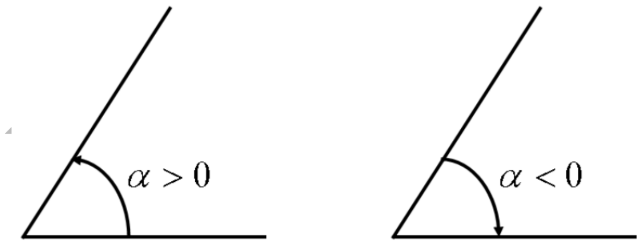


*: een orthonormaal assenstelsel is een rechthoekig (orthogonaal) assenstelsel waarbij de eenheid op beide assen gelijk is.

In de goniometrische cirkel kan je nu een hoek α tekenen, die zijn beginbeen heeft op de x-as, en zijn hoekpunt in de oorsprong. Zijn eindbeen snijdt de goniometrische cirkel in een punt P dat we het beeldpunt van de hoek α op de goniometrische cirkel noemen.

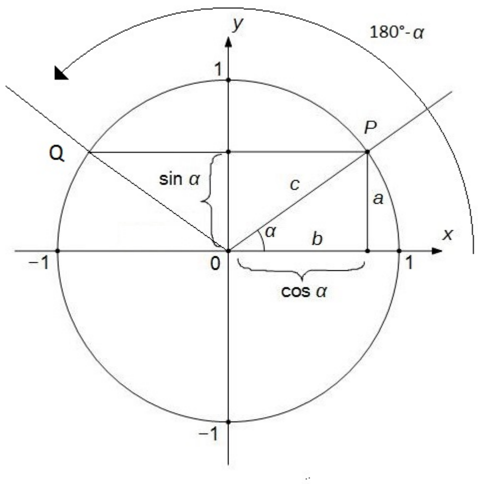


Elk punt van de goniometrische cirkel wordt zo het beeldpunt van een hoek door als beginbeen de x-as te nemen, als hoekpunt de oorsprong, en als eindbeen de halve rechte door de oorsprong en het punt. De hoek die bij het beeldpunt hoort is niet uniek, integendeel, tel je bij de hoek een aantal volledige omwentelingen op (of trek je die ervan af), dan kom je op hetzelfde beeldpunt terecht. Op die manier hoort bij elk punt van de goniometrische cirkel een oneindig aantal hoeken die onderling een geheel aantal omwentelingen van elkaar verschillen. In het algemeen spreken we van omwentelingshoeken. Omwentelingshoeken hebben een oriëntatie, in tegenuurwijzerzin is een hoek positief, in uurwijzerzin negatief.



Kwadranten

De goniometrische cirkel wordt ingedeeld in kwadranten. Ze zijn genummerd, meestal in Romeinse cijfers, tegenkloksgewijs, beginnend rechtsboven in de cirkel.



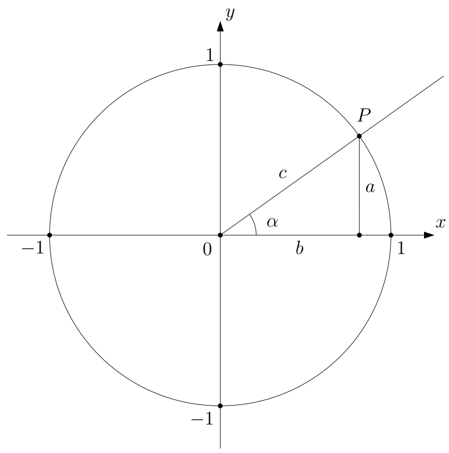
Goniometrische getallen

We kennen de goniometrische getallen als verhoudingen van zijden in een rechthoekige driehoek:

$$\sin\alpha = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}} \qquad \cot\alpha = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{overstaande rechthoekszijde}}$$

Scherpe hoeken hebben een beeldpunt in het eerste kwadrant, daarmee kunnen we kunnen een rechthoekige driehoek tekenen in de goniometrische cirkel laten overeenkomen, met zijden a, b en c:



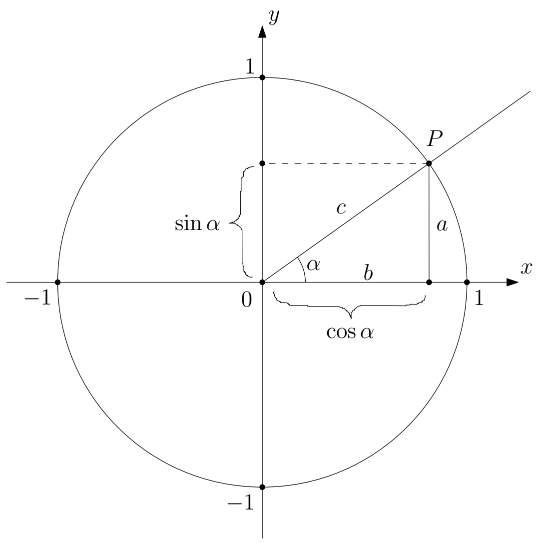
In deze rechthoekige driehoek kan je nu de sinus en de cosinus berekenen:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

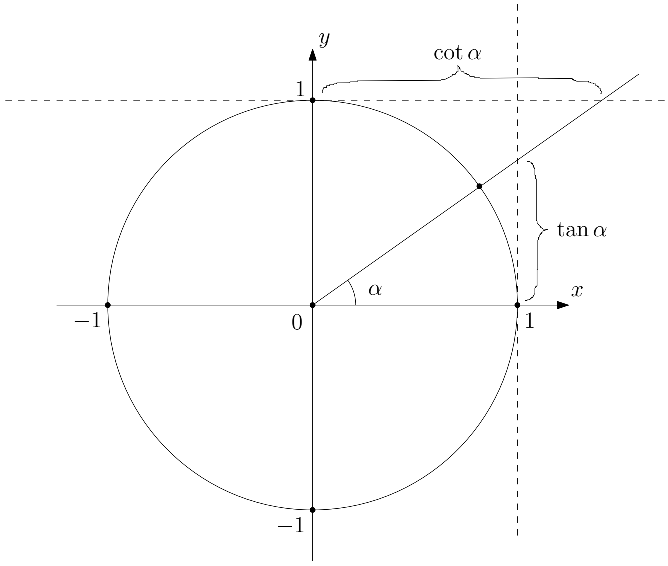
Je weet dat de lengte van zijde c gelijk is aan 1, omdat c net de straal is van de goniometrische cirkel! Dus:

$$\sin\alpha = a \qquad \cos\alpha = b$$

De waarde van de sinus kan je dus aflezen op de y-as, en de waarde van de cosinus lees je af op de x-as, als je het punt P ernaar projecteert.



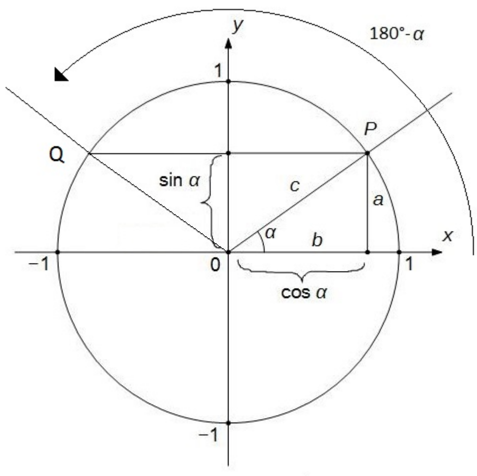
Ook de tangens en cotangens kan je aflezen van de goniometrische cirkel.



Uit deze twee figuren blijkt duidelijk dat de sinus en de cosinus niet kleiner kunnen zijn dan -1, en niet groter dan 1. De tangens en de cotangens hebben deze beperkingen niet.

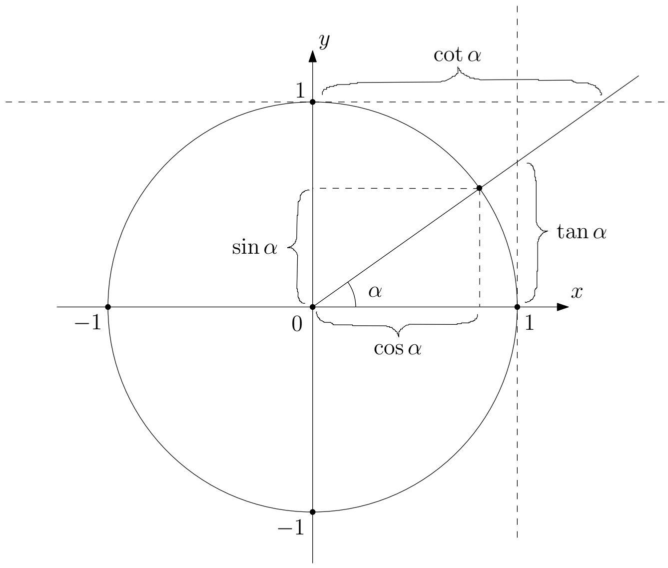
Wat we tot nu toe gevonden hebben voor hoeken uit het eerste kwadrant veralgemenen we voor alle omwentelingshoeken . De sinus van een hoek is de loodrechte projectie op de y-as van het beeldpunt van de hoek, de cosinus van de hoek is de loodrechte projectie op de x-as van het beeldpunt van de hoek. Ook de tangens en de cotangens van om het even welke hoek wordt afgelezen via de goniometrische cirkel zoals dat voor hoeken uit het eerste kwadrant gebeurt.

Opmerking Bij het bespreken van willekeurige driehoeken hebben we vermeld dat het gebruik van het commando $\sin^{-1}$ op een rekentoestel om een hoek α te bepalen soms een verkeerd resultaat kan opleveren. Hieronder is op een figuur gedemonstreerd dat een hoek α uit het eerste kwadrant en een hoek $180° - \alpha$ uit het tweede kwadrant dezelfde sinus hebben. De punten P en Q hebben immers dezelfde projectie op de y-as.

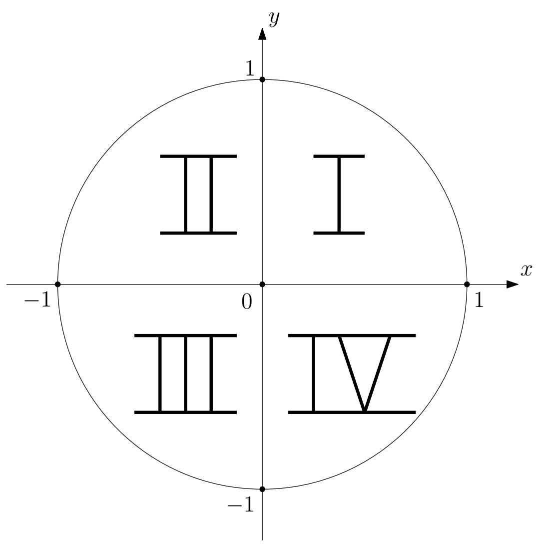


Onthoud

- De goniometrische cirkel is een cirkel met straal 1 met als middelpunt de oorsprong van een orthornormaal assenkruis.
- Elk punt van de goniometrische cirkel is het beeldpunt van oneindig veel hoeken die elk een geheel aantal volledige omwentelingen van elkaar verschillen.
- De goniometrische getallen van elke hoek kan je aflezen van de goniometrische cirkel:



- De kwadranten verdelen de goniometrische cirkels in 4 sectoren:



$$\alpha \in \mathrm{I} \Leftrightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ$$
$$\alpha \in \mathrm{II} \Leftrightarrow 90^\circ < \alpha < 180^\circ$$
$$\alpha \in \mathrm{III} \Leftrightarrow 180^\circ < \alpha < 270^\circ$$
$$\alpha \in \mathrm{IV} \Leftrightarrow 270^\circ < \alpha < 360^\circ$$

1.5 Bijzondere hoeken en aanverwante hoeken

In volgende tabel vind je een overzicht van de belangrijkste goniometrische getallen van bijzondere hoeken. Het bewijs voor de waarden van de goniometrische getallen van deze bijzondere hoeken laten we hier achterwege. Leer deze tabel uit het hoofd.

x	0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad
x	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\vert$

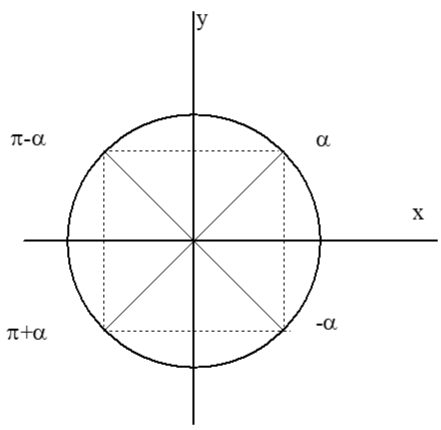
Uit deze tabel lees je eenvoudig af dat de sinus en de cosinus van hoeken die samen een rechte hoek vormen eenzelfde waarde hebben. Zo'n hoeken noemen we complementaire hoeken.

We onderscheiden nog andere hoeken waarvan de cosinus en/of de sinus verwant zijn aan elkaar, we noemen ze verwante hoeken. We zetten ze hier allemaal op een rijtje:

- complementaire omwentelingshoeken: $\alpha + \beta = 90° = \frac{\pi}{2}$ rad
- omwentelingshoeken met hetzelfde beeldpunt: $\beta = \alpha + 360°; \beta = \alpha + 2\pi$ rad
- tegengestelde omwentelingshoeken: $\beta = -\alpha$
- supplementaire omwentelingshoeken:$\alpha + \beta = 180°; \alpha + \beta = 2\pi$ rad
- anticomplementaire omwentelingshoeken: $\beta = \alpha + 90°; \beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ rad
- antisupplementaire omwentelingshoeken: $\beta = \alpha + 180°; \beta = \alpha + \pi$ rad

Het is niet belangrijk om de namen van deze verwante hoeken te kennen, maar wel dat je vanuit een schets van de goniometrische cirkel het verband kan zien tussen de goniometrische getallen van deze hoeken.

Een voorstelling van verwante hoeken van de hoek α vind je in volgende figuur:



1.6 Overgang van goniometrische getallen van hoeken naar goniometrische functies

Tot nu toe hebben we steeds goniometrische getallen van hoeken bestudeerd. Nu definiëren we eveneens de goniometrische getallen van reële getallen. Definities:

- de goniometrische getallen van een reëel getal x, zijn de goniometrische getallen van de hoek x rad
- het beeldpunt van een reëel getal x op de goniometrische cirkel is het beeldpunt van de hoek x rad op de goniometrische cirkel.
- de tabel van de goniometrische getallen van bijzondere hoeken geeft een tabel van goniometrische getallen van bijzondere getallen.
- aanverwante hoeken geven aanleiding tot aanverwante getallen en bijbehorende formules voor hun goniometrische getallen.

Door een getal x in $\mathbb{R}$ te laten variëren bekomen we de goniometrische functies (zie mooc wiskunde 2.1.12).

1.7 Goniometrische formules

Dit hoofdstuk bestaat uit een opsomming van de belangrijkste formules in goniometrie.

Bijzondere goniometrische getallen

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Grondformules

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$
$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$$
$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

Verwante hoeken

Gelijke hoeken

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + k\cdot 360°) &= \sin(\alpha)\\ \cos(\alpha + k\cdot 360°) &= \cos(\alpha)\\ \tan(\alpha + k\cdot 360°) &= \tan(\alpha)\\ \cot(\alpha + k\cdot 360°) &= \cot(\alpha)\end{aligned}$$

Tegengestelde hoeken

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha)\\ \cos(-\alpha) &= \cos(\alpha)\\ \tan(-\alpha) &= -\tan(\alpha)\\ \cot(-\alpha) &= -\cot(\alpha)\end{aligned}$$

Supplementaire hoeken

$$\begin{aligned}\sin(180° - \alpha) &= \sin(\alpha)\\ \cos(180° - \alpha) &= -\cos(\alpha)\\ \tan(180° - \alpha) &= -\tan(\alpha)\\ \cot(180° - \alpha) &= -\cot(\alpha)\end{aligned}$$

Antisupplementaire hoeken

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + 180°) &= -\sin(\alpha)\\ \cos(\alpha + 180°) &= -\cos(\alpha)\\ \tan(\alpha + 180°) &= \tan(\alpha)\\ \cot(\alpha + 180°) &= \cot(\alpha)\end{aligned}$$

Complementaire hoeken

$$\begin{aligned}\sin(90° - \alpha) &= \cos(\alpha)\\ \cos(90° - \alpha) &= \sin(\alpha)\\ \tan(90° - \alpha) &= \cot(\alpha)\\ \cot(90° - \alpha) &= \tan(\alpha)\end{aligned}$$

Anticomplementaire hoeken

$$\begin{aligned}\sin(90° + \alpha) &= \cos(\alpha)\\ \cos(90° + \alpha) &= -\sin(\alpha)\\ \tan(90° + \alpha) &= -\cot(\alpha)\\ \cot(90° + \alpha) &= -\tan(\alpha)\end{aligned}$$

Som- en verschilformules

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta\\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}\\ \cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\alpha \pm \cot\beta}\end{aligned}$$

Verdubbelingsformules

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\\ \tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\\ &= 1 - 2\sin^2\alpha\\ &= 2\cos^2\alpha - 1\end{aligned}$$

Simpson-formules

$$
\begin{aligned}
\sin(x) + \sin(y) &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\
\sin(x) - \sin(y) &= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\\
\cos(x) + \cos(y) &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\
\cos(x) - \cos(y) &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}
\end{aligned}
$$

Omgekeerde Simpson-formules

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]\\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]\\
\sin\alpha\sin\beta &= -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right]
\end{aligned}
$$

1.8 Oplossen van goniometrische vergelijkingen in $\mathbb{R}$

Bij het oplossen van goniometrische vergelijkingen zoek je alle reële getallen die aan de vergelijking voldoen. Het spreekt vanzelf dat je dan ook gebruik zal moeten maken van verwante getallen die je terugvindt via de goniometrische cirkel. Het is de bedoeling om elke goniometrische vergelijking te herleiden tot één of meerdere basisvergelijkingen.

Basisvergelijkingen:

- $\cos(x) = \cos(a) \iff x = \pm a + 2k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$
- $\sin(x) = \sin(a) \iff x = a + 2k\pi$ of $x = \pi - a + 2k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$
- $\tan(x) = \tan(a) \iff x = a + k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$

Voorbeeld 1 $\sin(x) = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ of $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$

Voorbeeld 2 $\cos(x) = 0,7 \iff x = \pm 0,795 + 2k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$

Voorbeeld 3 $\tan(x) = -1,5 \iff x = -0,983 + k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$

Voorbeeld 4 $\sin(x) = 1,5$: heeft geen oplossingen

1.9 Oefeningen

1 Druk uit in radialen:

1. $108,17°$

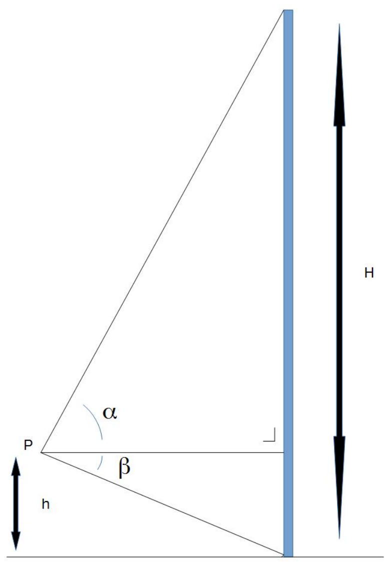
2. $12°40'33''$
3. 190 gon

2 Reken uit:

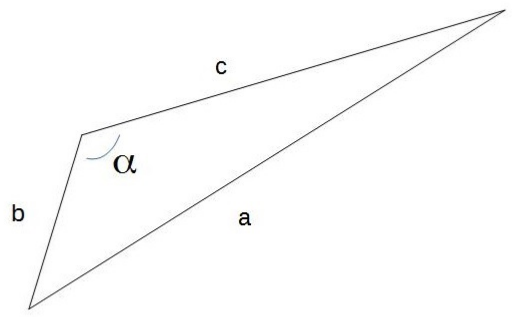
1. $267,83° - 117,85°$
2. $12°02'58'' + 4°13'07''$
3. $\frac{5}{3}\pi$ rad - $5°12'57''$ (in radialen)
4. $15,15$ gon + $15,15°$ (in decimale graad)

Rekenen met driehoeken

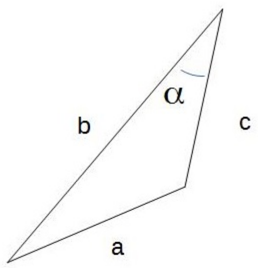
3 Om de hoogte van een mast te bepalen plaatst een landmeter een theodoliet in het punt P op een hoogte $h = 1,65$ m. Ze meet dan de hoeken α en β met de horizontale: $\alpha = 78,12°$ en $\beta = 4,71°$.
Bereken de hoogte H van de mast.



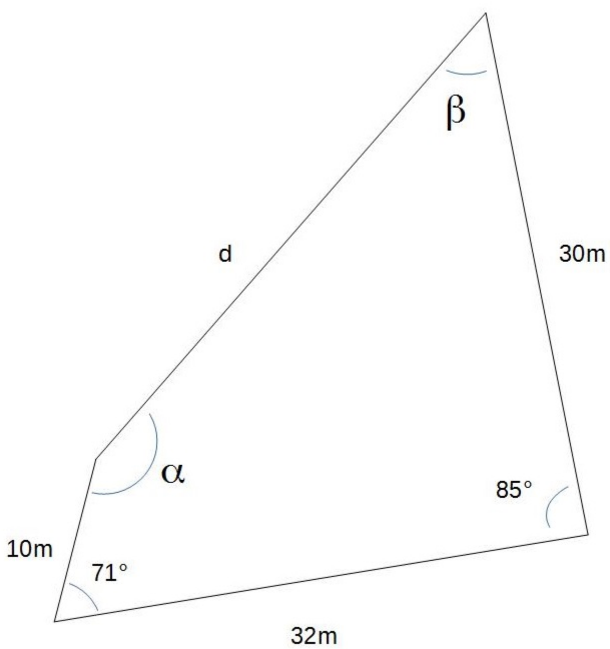
4 e lengte van elke zijde van de gegeven driehoek zijn gekend: $a = 53$ cm, $b = 18$ cm en $c = 41$ cm.
Bereken de hoek α.



5 Bereken de lengte van zijde c van de gegeven driehoek.
Gegevens: $a = 13$ mm, $b = 20$ mm, $\alpha = 21°$.



6 Op de figuur is een schets van een stuk weiland met de gekende gegevens weergegeven.
Bereken de lengte van zijde d en de hoeken α en β.



2 Complexe getallen

Inleiding

De verzameling van de complexe getallen $\mathbb{C}$ is een uitbreiding van de verzameling van de reële getallen $\mathbb{R}$ waarbij elk complex getal bestaat uit twee reële getallen. Het ene reëel getal wordt het reëel deel van het complex getal genoemd, het andere reëel getal het imaginaire deel.
Alhoewel een eerste kennismaking met complexe getallen heel wat mensen hun wenkbrauwen doet fronsen blijkt dit soort getallen heel wat rekenwerk in de fysica en de techniek eenvoudiger te maken. Dit is bijvoorbeeld zeker het geval in vakgebieden als mechanica (trillingen), akoestiek (golven) en elektrotechniek (wisselstroom).

2.1 De imaginaire eenheid

Definitie Als eerste stap bij het bespreken van complexe getallen definiëren we de imaginaire eenheid i als het getal waarvoor geldt:

$$i^2 = -1$$

Opmerking Hierbij moeten we enkele bedenkingen maken:

- Het gebeurt wel eens dat deze definitie wordt herschreven als $i = \sqrt{-1}$. Dit is echter totaal **fout**. We zullen verderop zien dat -1 meer dan één vierkantswortel heeft.
- In sommige vakgebieden zoals elektrotechniek geeft men de voorkeur aan de letter j als symbool voor de imaginaire eenheid.
- Een eigenschap van i die heel wat rekenwerk kan vereenvoudigen is het volgende:

  Eigenschap 1

$$i^2 = -1 \iff i = -\frac{1}{i} \iff -i = \frac{1}{i}$$

2.2 Het complex getal

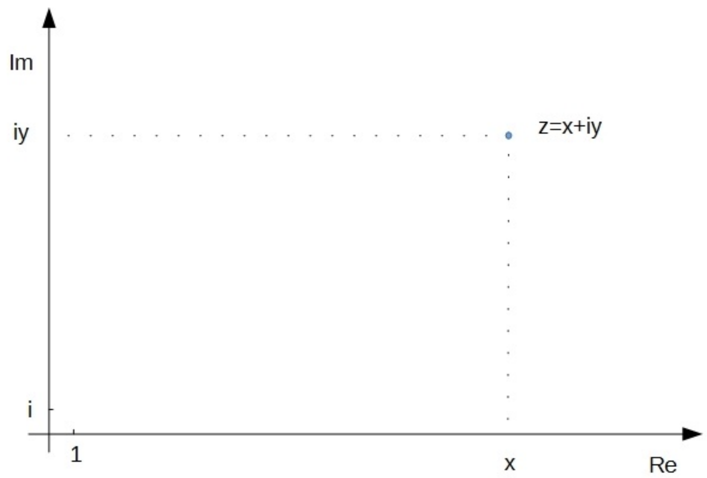
Definitie Twee reële getallen x en y worden gecombineerd tot een complex getal z:

$$z = x + iy$$

Het reële getal x wordt het reële deel van z genoemd: $x = Re(z) = \Re(z)$.
Het reële getal y wordt het imaginaire deel van z genoemd: $y = Im(z) = \Im(z)$.
Merk op dat als $y = 0$ dan $z = x$ met $x \in \mathbb{R}$. Met andere woorden de verzameling van de reële getallen is een deelverzameling van de verzameling van de complexe getallen: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Analoog

geldt dat als $x = 0$ dan $z = iy$. Het getal iy wordt een **imaginair getal** genoemd.

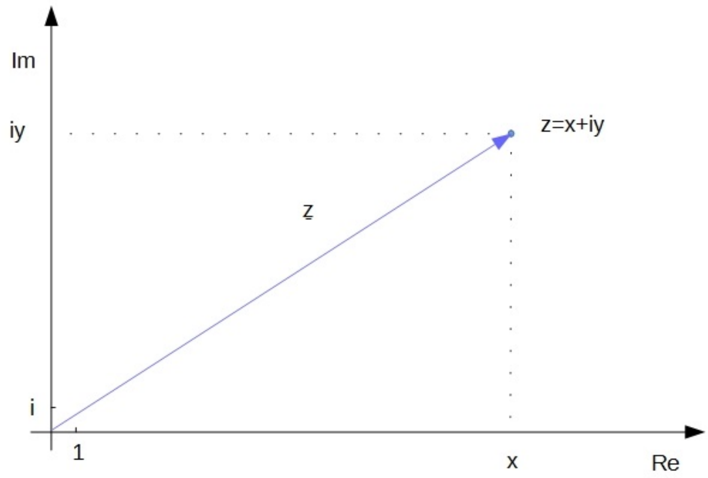
Aangezien een complex getal bestaat uit twee reële getallen kan een complex getal meetkundig worden voorgesteld door een punt in een vlak. Dit vlak, **het complex vlak**, wordt bepaald door de getallenas van de reële getallen, de reële as, met loodrecht daarop de imaginaire as. Deze laatste is de reële as waarop de eenheid (het getal 1) vervangen is door i.



Met behulp van schuifknoppen kan je in de volgende interactieve voorstelling het reële en imaginaire deel van het getal veranderen en nagaan waar in het complex vlak het complex getal zich bevindt.

Scan QR code voor animatie.

De plaats van een punt in een vlak is ook bepaald door de plaatsvector van het punt. Een complex getal z kan dus ook worden voorgesteld als een vector in het complex vlak. Een dergelijke vector wordt meestal aangeduid met het symbool $\underline{z}$.



Een interactieve voorstelling van een vector in het complex vlak.

Scan QR code voor animatie.

2.3 Rekenen met complexe getallen

Som van complexe getallen

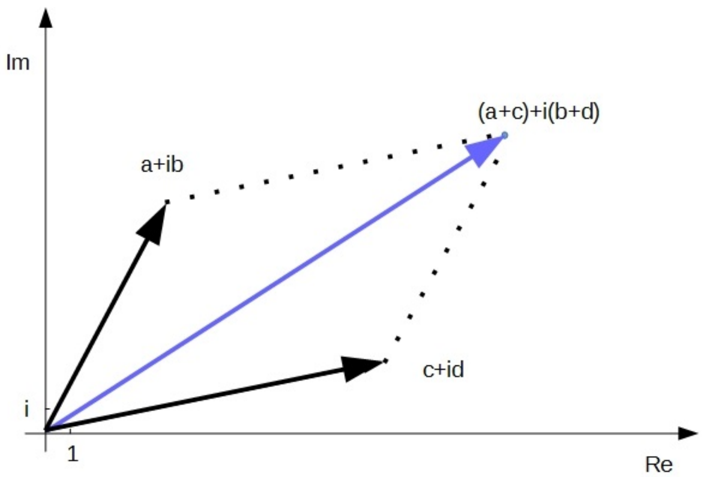
Definitie De som van twee complexe getallen $z_1 = a + ib$ en $z_2 = c + id$ is gedefinieerd als

$$z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$$

ofwel

$$\Re(z_1 + z_2) = \Re(z_1) + \Re(z_2) \qquad \Im(z_1 + z_2) = \Im(z_1) + \Im(z_2)$$

Het afzonderlijk optellen van de reëele en imaginaire delen van de complexe getallen kan beschouwd worden als het optellen van componenten van vectoren in het complex vlak. Met andere woorden: optellen van complexe getallen komt neer op optellen van vectoren in het complex vlak.



Product van complexe getallen

Als we twee complexe getallen $z_1 = a + ib$ en $z_2 = c + id$ met elkaar willen vermenigvuldigen kunnen we dit in eerste instantie neerschrijven als $z_1z_2 = (a + ib)(c + id)$.
Om het product te berekenen worden de haakjes uitgewerkt op de klassieke manier maar wordt er expliciet rekening gehouden met $i^2 = -1$.

Eigenschap 2

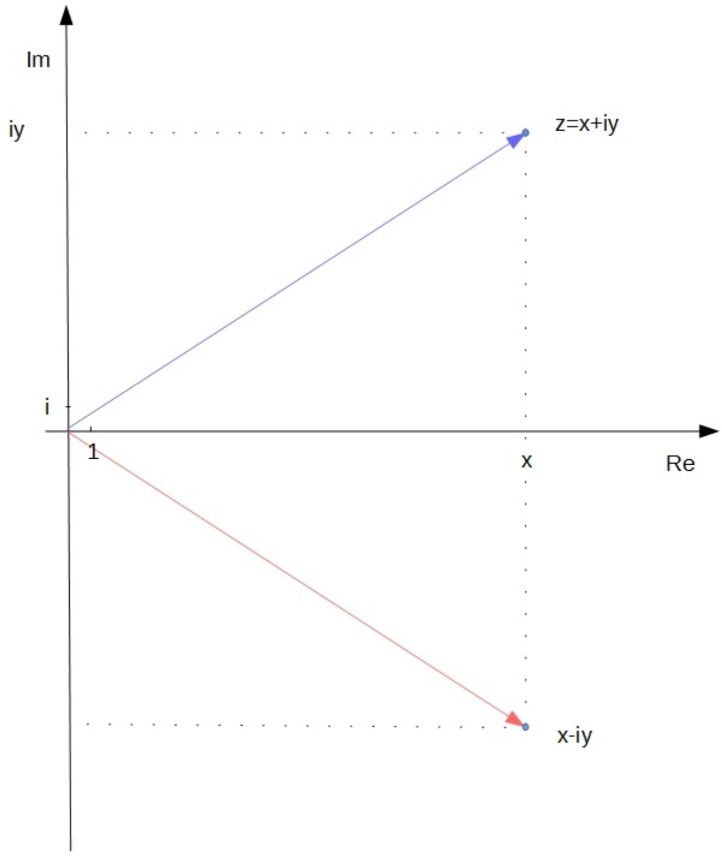
$$z_1z_2 = (a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Complex toegevoegde van een complex getal

Definitie De complex toegevoegde van een complex getal vindt men door het imaginair deel van een complex getal van teken te veranderen. Men noteert de complex toegevoegde van z als $\overline{z}$.
Dus, als $z = x + iy$ dan is de complex toegevoegde van z het getal $\overline{z} = x - iy$.

Eigenschap 3 *Een getal vermenigvuldigen met zijn complex toegevoegde geeft het volgende interessante resultaat:*

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + iyx - i^2y^2 = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$$



Een meer interactieve voorstelling vind je hier.

Scan QR code voor animatie.

Modulus van een complex getal

Definitie De grootte van de plaatsvector van een complex getal wordt de modulus van dat getal genoemd.

Met behulp van de stelling van Pythagoras wordt de grootte berekend als $|\underline{z}| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Eigenschap 4 *De modulus van het complex getal $z = x + iy$ kan dus ook geschreven worden als*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

Quotiënt van complexe getallen

Het berekenen van het quotiënt van twee complexe getallen komt er op neer dat men er voor zorgt dat de noemer van de uitdrukking een reëel getal wordt. De gehele uitdrukking wordt dan een duidelijk leesbaar complex getal.
De eenvoudigste manier om dit te doen is teller en noemer vermenigvuldigen met de complex toegevoegde van de noemer.
Laten we de getallen $z_1 = a + ib$ en $z_2 = c + id$ delen door elkaar:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

Voorbeeld 1

$$\frac{4 - i}{1 + i} = \frac{(4 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{4 - 4i - i - 1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$$

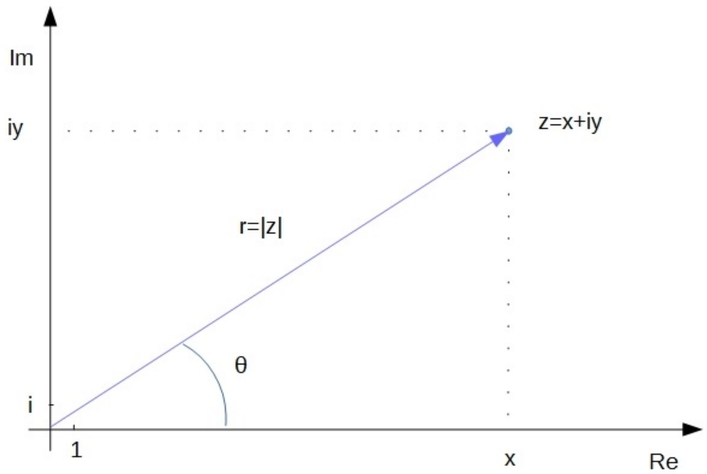
2.4 Rekenen met complexe getallen - voorbeeld

Zie filmpje MOOC.

2.5 Goniometrische vorm van een complex getal

De plaats van een punt P in een vlak wordt traditioneel vastgelegd met behulp van de cartesische coördinaten (x, y). Het is echter evengoed mogelijk hiervoor andere coördinaten te kiezen. Een mogelijk alternatieve keuze zijn de afstand r van het punt P tot de oorsprong en de hoek θ die de rechte OP maakt met de $x-$as. (r, θ) worden poolcoördinaten genoemd.

Passen we dit toe op een complex getal z in het complex vlak dat wordt de afstand r de modulus $|z|$ en de hoek θ de hoek die de vector $\underline{z}$ maakt met de $x-$as.



Figuur .1: *Goniometrische vorm van een complex getal. De plaats van het getal in het complex vlak wordt vastgelegd door de poolcoördinaten $r = |z|$ en θ*

Door de bij het getal $z = x + iy$ horende vector te projecteren op de reële as en op de imaginaire as vindt men

$$\begin{cases} x = \Re(z) = |z|\cos\theta \\ y = \Im(z) = |z|\sin\theta \end{cases}$$

Eigenschap 5 *In goniometrische vorm wordt dat*

$$z = x + iy = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Met

modulus van $z = x + iy$	$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
argument van $z = x + iy$	$\theta = \arctan\frac{y}{x}$

Opmerking

- Een punt in het complex vlak met $r = |z|$ en poolhoek θ kan ook beschreven worden met dezelfde r maar een poolhoek $\theta + 2\pi$, een poolhoek $\theta + 4\pi$, enz... Men zegt dat de hoek

θ bepaald is op een geheel aantal keer 2π na.

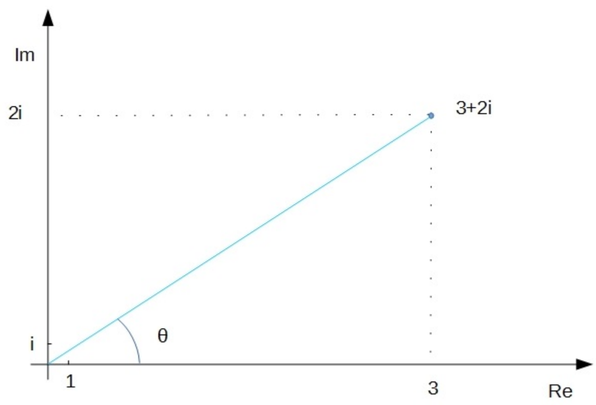
$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|(\cos(\theta + k2\pi) + i\sin(\theta + k2\pi))$$

met k een geheel getal.
De hoek waarvoor geldt $\theta \in [0, 2\pi[$ is de **hoofdwaarde van het argument**.

- Bij het berekenen van het argument wordt gebruik gemaakt van de Arctan-functie. Het bereik van deze functie is $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ waardoor het berekende argument het complex getal altijd in het eerste of vierde kwadrant plaatst.
Het is dus zeer belangrijk om te controleren of het complex getal in werkelijkheid niet in het tweede of derde kwadrant ligt. Als dat het geval is moet een correctie op het berekende argument worden toegepast!
We illustreren hoe dit in zijn werk gaat met enkele voorbeelden.

We zetten de volgende complexe getallen in goniometrische vorm:

Voorbeeld 1 $z = 3 + 2i$
We maken een figuur om duidelijk te maken in welk kwadrant het getal ligt.

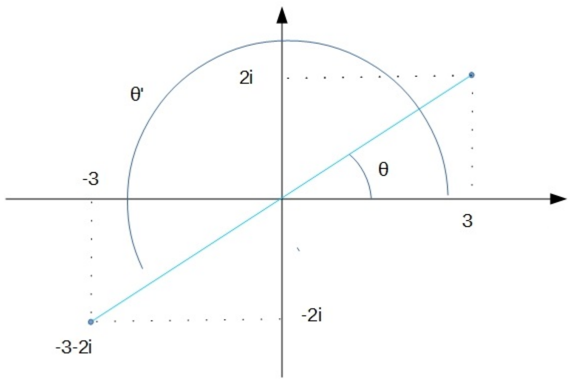


Het getal ligt in het eerste kwadrant. We kunnen dus gewoon de formule voor het argument gebruiken zonder correctie.

$$|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} \qquad |z| = \sqrt{13}$$
$$\tan\theta = \frac{2}{3} \qquad \theta = 33,69^o$$

$$z = \sqrt{13}(\cos(33,69^o) + i\sin(33,69^o))$$

Voorbeeld 2 $z = -3 - 2i$
We maken een figuur om duidelijk te maken in welk kwadrant het getal ligt.



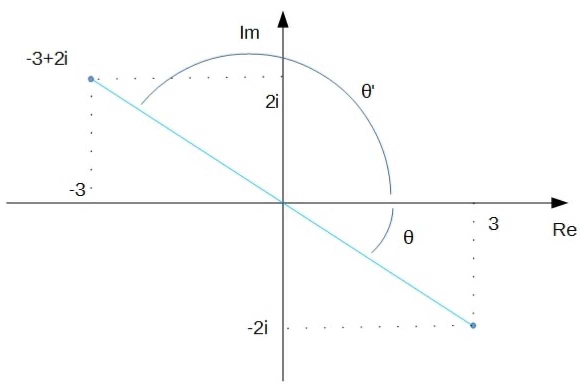
Het getal ligt in het derde kwadrant. We moeten dus een correctie toepassen op het berekende argument θ om het werkelijke argument θ' te vinden. We tellen π of 180^o bij het berekende argument.

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} \qquad |z| = \sqrt{13}$$
$$\tan\theta = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \qquad \theta = 33,69^o$$
$$\theta' = \theta + 180^o \qquad \theta' = 213,69^o$$

$$z = \sqrt{13}(\cos(213,69^o) + i\sin(213,69^o))$$

Voorbeeld 3 $\quad z = -3 + 2i$

We maken een figuur om duidelijk te maken in welk kwadrant het getal ligt.



Het getal ligt in het tweede kwadrant. We moeten dus een correctie toepassen op het berekende argument θ om het werkelijke argument θ' te vinden. We tellen π of 180^o bij het berekende argument.

$$\begin{array}{ll} |z| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} & |z| = \sqrt{13} \\ \tan\theta = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3} & \theta = -33,69^o \\ \theta' = \theta + 180^o & \theta' = 146,31^o \end{array}$$

$$z = \sqrt{13}(\cos(146,31^o) + i\sin(146,31^o))$$

2.6 De exponentiële vorm van een complex getal

De formule van Euler

De formule van Euler drukt uit hoe de functies cos en sin in verband staan met de natuurlijke exponentiële functie.

Eigenschap 6 *Voor elk getal $x \in \mathbb{R}$ geldt:*

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Deze formule wordt bewezen in de analyse door aan te tonen dat de Taylorreeksontwikkeling van de functie e^{ix} en van de functie $\cos(x) + i\sin(x)$ hetzelfde zijn.

Eigenschap 7 *Voor praktisch rekenwerk met complexe getallen wordt de formule van Euler neergeschreven als:*

$$\begin{array}{l} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \end{array}$$

Waarbij θ het argument voorstelt van de goniometrische vorm van een complex getal.

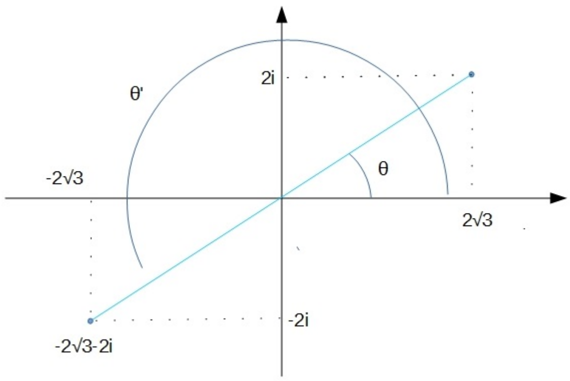
Eigenschap 8 *De formule van Euler leidt dus tot een derde, voor de praktijk zeer belangrijke, schrijfwijze voor complexe getallen.*

de algebraïsche vorm	$z = x + iy$
de goniometrische vorm	$z = \lvert z\rvert(\cos\theta + i\sin\theta)$
de exponentiële vorm	$z = \lvert z\rvert e^{i\theta}$

In principe moet in de formule van Euler, en dus ook in de exponentiële vorm van een complex getal, het argument θ uitgedrukt worden in radialen. Het gebeurt echter dikwijls dat het argument wordt uitgedrukt in graden. Dit is geen probleem zolang men beseft dat om de **numerieke waarde** van bijvoorbeeld e^{i45^o} rechtstreeks te berekenen men $e^{i\frac{\pi}{4}}$ moet uitrekenen.

Voorbeeld 1 We schrijven het getal $z = -2\sqrt{3} - 2i$ in exponentiële vorm.

Als eerste stap maken we een figuur die het getal voorstelt in het complex vlak.



Het getal ligt in het derde kwadrant. Er zal dus een correctie op de berekende waarde voor het argument moeten worden toegepast.

$$
\begin{array}{ll}
|z| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} & |z| = 4 \\
\tan\theta = \frac{-2}{-2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} & \theta = 30^o \\
\theta' = \theta + 180^o & \theta' = 210^o
\end{array}
$$

$$z = 4e^{i210^o} \text{ of ook } z = 4e^{i\frac{7}{6}\pi}$$

2.7 Bewerkingen in exponentiële vorm: som, product en quotiënt

De som

Er bestaat geen snelle manier om twee complexe getallen in exponentiële vorm op te tellen. Als je met dit probleem geconfronteerd wordt kan je op twee manieren te werk gaan.

Eerste werkwijze:

1. Reken de complexe getallen om naar hun algebraïsche vorm met behulp van de formule van Euler

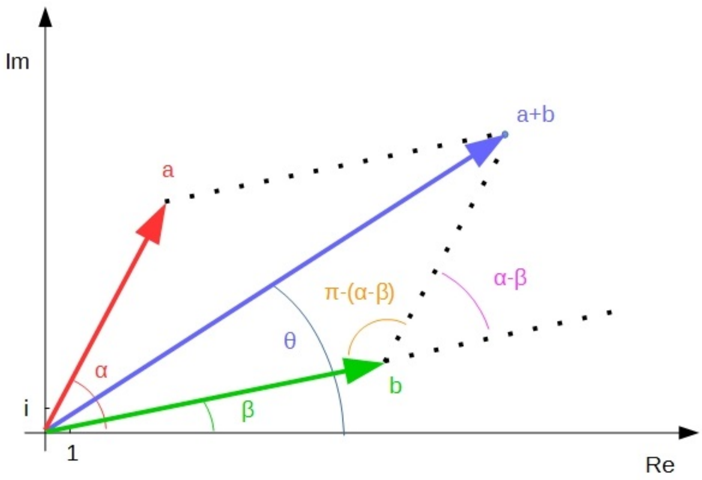
2. Tel de getallen in algebraïsche vorm op

3. Zet de som terug om naar exponentiële vorm.

Tweede werkwijze:

Beschouw het optellen van de twee complexe getallen als het optellen van twee vectoren in het complex vlak en gebruik driehoeksmeetkunde om de grootte (modulus) en de oriëntatie (argument) van de somvector te bepalen.

Beschouw twee complexe getallen $a = |a|e^{i\alpha}$ en $b = |b|e^{i\beta}$ waarvan je de som wil berekenen. Je wil dus modulus en argument van het complex getal $z = a + b = |z|e^{i\theta}$ vinden.
Maak nu een figuur waarin je de optelling grafisch voorstelt als de optelling van vectoren in het complex vlak:



Figuur 1. Grafische voorstelling van de optelling van twee complexe getallen als optelling van vectoren in het complex vlak. De modulus van de som $z = a + b$ wordt berekend met behulp van de cosinusregel.

In de driehoek gevormd door de vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ en de somvector $\underline{z} = \underline{a + b}$ kan je de cosinusregel toepassen om de grootte van $\underline{z}$ te berekenen:

$$|z|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos(\pi - (\alpha - \beta))$$

Aangezien $\cos(\pi - (\alpha - \beta)) = -\cos(\alpha - \beta)$ kan de modulus van de som $z = a + b$ geschreven worden als:

Eigenschap 9

$$|z| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos(\alpha - \beta)}$$

Het argument θ van de som kan je vinden door op de driehoek de sinusregel toe te passen om de hoek tussen de vectoren $\underline{b}$ en $\underline{a+b}$ te berekenen en deze hoek op te tellen bij β.

Je kan ook een algemene maar vrij ingewikkelde formule opstellen voor het argument door met de formule van Euler het reëele deel en imaginaire deel van de getallen apart op te tellen.

$$\Re(z) = \Re(a) + \Re(b) = |a|\cos\alpha + |b|\cos\beta$$
$$\Im(z) = \Im(a) + \Im(b) = |a|\sin\alpha + |b|\sin\beta$$

Het argument vind je via de algemene formule:

Eigenschap 10

$$\tan\theta = \frac{\Im(z)}{\Re(z)} = \frac{|a|\sin\alpha + |b|\sin\beta}{|a|\cos\alpha + |b|\cos\beta}$$

Het product

In tegenstelling tot het optellen van complexe getallen in exponentiële vorm is het vermenigvuldigen zeer eenvoudig. Men kan gewoon de rekenregels voor het vermenigvuldigen van exponentiële functies toepassen.

Eigenschap 11 *Neem twee getallen $a = |a|e^{i\alpha}$ en $b = |b|e^{i\beta}$. Het product geeft dan:*

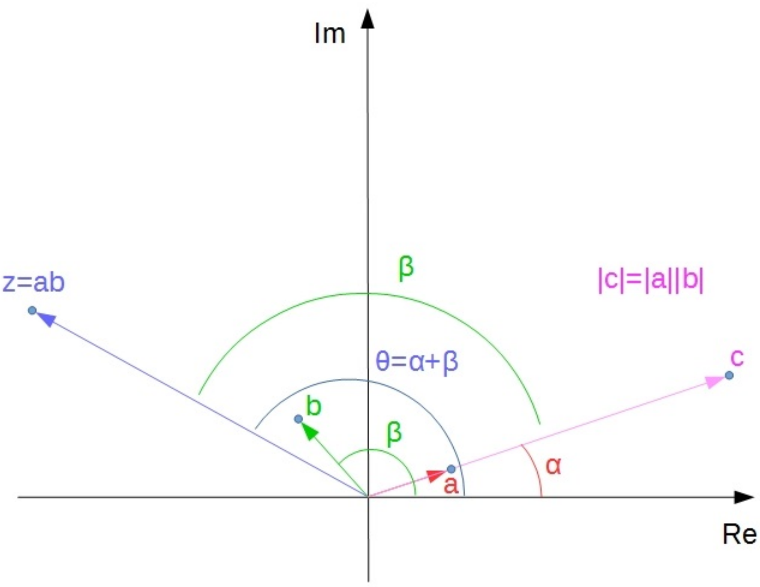
$$z = |z|e^{i\theta} = ab = (|a|e^{i\alpha})(|b|e^{i\beta})$$

Dus:

$$z = |z|e^{i\theta} = |a||b|e^{i(\alpha+\beta)}$$

Met andere woorden: de nieuwe modulus wordt gevonden door de twee oorspronkelijke moduli te vermenigvuldigen, en het nieuwe argument wordt gevonden door de oorspronkelijke argumenten op te tellen.

Het vermenigvuldigen van twee complexe getallen kan ook grafisch geïnterpreteerd worden. De vermenigvuldiging van $a = |a|e^{i\alpha}$ met $b = |b|e^{i\beta}$ komt neer op het veranderen van de lengte van de met a geassocieerde vector gevolgd door het roteren van de nieuwe vector over een rotatiehoek β.



- De met $a = |a|e^{i\alpha}$ en $b = |b|e^{i\beta}$ geassocieerde vectoren in het complex vlak worden voorgesteld in de figuur.
- Als eerste stap wordt een nieuw getal c geconstrueerd met hetzelfde argument als a maar met modulus $|c| = |a||b|$. De met c geassocieerde vector ligt dus evenwijdig met de met a geassocieerde vector maar heeft een andere lengte.
- Vervolgens wordt de nieuwe vector $\underline{c}$ geroteerd over een hoek β wat de vector $\underline{z}$ oplevert. Het met deze vector geassocieerde complex getal $z = |a||b|e^{i(\alpha+\beta)}$ is het product van a en b.

Deze stappen worden geïllustreerd in deze demo:

Scan QR code voor animatie.

Het quotiënt

Het complex getal $a = |a|e^{i\alpha}$ delen door het complex getal $b = |b|e^{i\beta}$ gebeurt op analoge manier als bij de vermenigvuldiging:

Eigenschap 12

$$z = \frac{|a|e^{i\alpha}}{|b|e^{i\beta}} = \frac{|a|}{|b|}e^{i(\alpha-\beta)}$$

Grafisch wordt dit geïnterpreteerd als het opeenvolgens construeren van een vector $\underline{c}$, evenwijdig met de met a geassocieerde vector en met grootte $|c| = \frac{|a|}{|b|}$, gevolgd door rotatie van de nieuwe vector $\underline{c}$ over een hoek $-\beta$.

2.8 Bewerkingen in exponentiële vorm: machtsverheffing en worteltrekking

Machtsverheffing

Een complex getal verheffen tot de macht $n \in \mathbb{N}$ kan je beschouwen als een speciaal geval van het vermenigvuldigen van complexe getallen. Het getal z wordt n keer met zichzelf vermenigvuldigd. Dus:

Definitie

Voor $z \in \mathbb{C}$ met $z = |z|e^{i\theta}$ en $n \in \mathbb{Z}$ geldt $z^n = (|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{in\theta}$.

Opmerking

- Door de uitdrukking $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ om te zetten naar goniometrische vorm met de formule van Euler vindt men

  Eigenschap 13

  $$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

  Deze uitdrukking staat bekend als de **formule van de Moivre** .

- Zelfs als een complex getal gegeven is in algebraïsche vorm is het voor de machtsverheffing meestal aan te raden om het getal om te zetten in exponentiële vorm.

  $$(1+i)^5 = (1+i)(1+i)(1+i)(1+i)(1+i) = \ldots$$

In exponentiële vorm (het getal ligt in het eerste kwadrant):

$$(1+i) = \sqrt{(1^2+1^2)}e^{i\arctan 1}$$

dus

$$(1+i) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Machtsverheffing:

$$\begin{aligned}
(1+i)^5 &= (\sqrt{2})^5 e^{i\frac{5}{4}\pi} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi}\\
(1+i)^5 &= 4\sqrt{2}(\cos(\tfrac{5}{4}\pi) + i\sin(\tfrac{5}{4}\pi))\\
(1+i)^5 &= 4(-1-i)\\
(1+i)^5 &= -4-4i
\end{aligned}$$

Worteltrekking

Definitie Een $n-$de machtswortel z_n van een complex getal (met $n \in \mathbb{N}$) wordt als volgt gedefinieerd:

$$z_n \text{ is } \textbf{een } n - \text{de machtswortel van } z \in \mathbb{C} \iff (z_n)^n = z$$

Om de wortels te vinden schrijven we de complexe getallen in exponentiële notatie en drukken we expliciet uit dat het argument op een geheel aantal keer 2π na bepaald is.

het complex getal in exponentiële vorm	$z = \lvert z\rvert e^{i(\theta+k2\pi)}, k \in \mathbb{Z}$
een n-de machtswortel van z	$z_n = \lvert z_n\rvert e^{i\theta_n}$

Toepassen van de definitie geeft:

$$\begin{aligned}
&(|z_n|e^{i\theta_n})^n = |z|e^{i(\theta+k2\pi)}\\
\iff\ & |z_n|^n e^{in\theta_n} = |z|e^{i(\theta+k2\pi)}\\
\iff\ & |z_n| = \sqrt[n]{|z|} \text{ en } \theta_{n,k} = \tfrac{\theta+k2\pi}{n}, k = 0,1,2,...,n-1
\end{aligned}$$

Er zijn maar n verschillende waarden voor k want zodra $k = n$ bekomt men hetzelfde argument als voor $k = 0$:

$$k = 0 \iff \theta_{n,0} = \tfrac{\theta}{n}$$

$$k = n \iff \theta_{n,n} = \tfrac{\theta+n2\pi}{n} = \tfrac{\theta}{n} + 2\pi$$

Onthoud Elk complex getal $z = |z|e^{i\theta}$ heeft n verschillende $n-$de machtswortels:

$$z_{n,k} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\theta+k2\pi}{n}}$$

met $k = 0, 1, ..., n - 1$

Voorbeeld 1 Bereken de tweedemachtswortels van $z = -1$ (m.a.w. $\sqrt{-1}$).

We schrijven -1 eerst in exponentiële vorm:

$$z = -1 \iff z = 1e^{i\pi} \iff z = e^{i(\pi + k2\pi)}, k \in \mathbb{Z}$$

We passen de definitie van $2-$de machtswortel toe:

$$\begin{aligned} &(|z_2|e^{i\theta_2})^2 = e^{i(\pi+k2\pi)} \\ \iff &|z_2|^2 e^{i2\theta_2} = 1e^{i(\pi+k2\pi)} \\ \iff &\begin{cases} |z_2|^2 = 1 \\ 2\theta_2 = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} |z_2| = 1 \\ \theta_2 = \frac{\pi+k2\pi}{2}, k = 0, 1 \end{cases} \end{aligned}$$

De twee tweedemachtswortels van $z = -1$ zijn dus

$$\begin{cases} z_{2,0} = 1e^{i\frac{\pi}{2}} = i \\ z_{2,1} = 1e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i \end{cases}$$

Het complex getal $z = -1$ heeft dus **twee** vierkantswortels: i en $-i$. De in technische teksten veel gebruikte uitdrukking $i = \sqrt{-1}$ is dus **niet correct**...

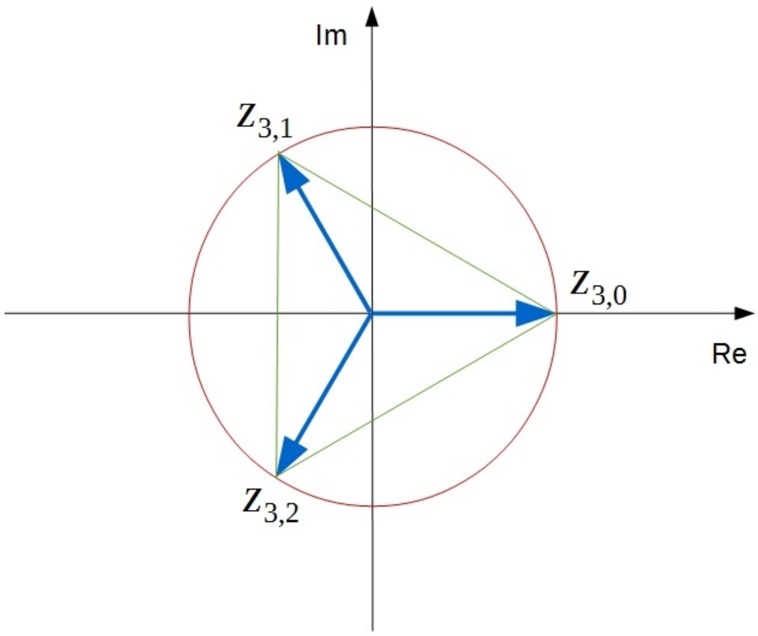
Voorbeeld 2 Bereken de derdemachtswortels van 125: $\sqrt[3]{125} =?$.

We beschouwen $z = 125$ als een complex getal en schrijven het in exponentiële vorm: $z = 125e^{i(0+k2\pi)}, k \in \mathbb{Z}$
Dan gebruiken we de definitie van de derde machtswortels: $(z_3)^3 = 125$

$$|z_3|^3 e^{i3\theta_3} = 125e^{ik2\pi} \iff |z_3| = \sqrt[3]{125} = 5 \text{ and } \theta_3 = k\frac{2\pi}{3}, k = 0, 1, 2$$

De derdemachtswortels van 125 zijn dus:

$$\begin{cases} z_{3,0} = 5 \\ z_{3,1} = 5e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ z_{3,2} = 5e^{i\frac{4\pi}{3}} \end{cases}$$



In het complex vlak liggen de wortels op een cirkel met de oorsprong als middelpunt en met straal $|z_3|$. De argumenten van de verschillende wortels zijn zodanig dat de drie wortels op de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek liggen.

Dit laatste kan veralgemeend worden. De n verschillende n-de machtswortels van een complex getal liggen allemaal op een cirkel met middelpunt de oorsprong van het complex vlak. De wortels vormen de hoekpunten van een gelijkzijdige n-hoek.

2.9 Toepassing: fasoren

Een complex getal $z = |z|e^{i\theta}$ komt meetkundig overeen met een punt in het complex vlak. De plaats van dat punt wordt aangeduid met een vector in het complex vlak.
Door nu het argument van het complex getal te veranderen als functie van de tijd, bijvoorbeeld $\theta = \omega t + \alpha$, kan met de vector laten roteren met hoeksnelheid ω in het complex vlak, α komt dan overeen met het argument op tijdstip $t = 0$.
Een roterende vector in het complex vlak noemt men een **fasor**.

Hier is een fasor met beginfase $\alpha = \frac{\pi}{4}$ voorgesteld:

Scan QR code voor animatie.

Fasoren kennen veel toepassingen, zo worden ze gebruikt in de elektrotechniek bij rekenwerk met wisselspanning, en in de mechanica bij de beschrijving van trillingen.
Met de formule van Euler kan bijvoorbeeld een wisselspanning $V = V_0 \cos(\omega t + \alpha)$ even goed geschreven worden als $V = \Re(V_0 e^{i(\omega t+\alpha)})$. Bovendien is rekenen met de exponentiële functie $e^{i\theta}$ dikwijls eenvoudiger dan rekenen met de cos of sin functies. Daarom wordt in elektrotechniek dikwijls gebruik gemaakt van de complexe spanning $V = V_0 e^{i(\omega t+\alpha)}$, de werkelijke, fysische spanning vindt men dan door het reële deel van de complexe spanning te nemen.
Een complexe wisselspanning of wisselstroom kan dus voorgesteld worden door een fasor waarvan het reële deel, dus de projectie op de reële as, de fysische spanning voorstelt. Op dezelfde manier kan men in de mechanica van trillingen werken met complexe plaatscoördinaten en complexe snelheden.

Hier zie je een fasor met de projecties op de reële en imaginaire as en de voorstelling van het reële en imaginaire deel als functie van de tijd.

Scan QR code voor animatie.

Een gedempte trilling met startamplitude u_0 wordt beschreven door een fasor $u(t) = u_0 e^{-\alpha t} e^{i\omega t}$. Het reële deel van $u(t)$ beschrijft dan de fysische trilling. Hierbij kan $u(t)$, afhankelijk van de toepassing, zowel een spanning, een plaatscoördinaat, een snelheid of nog een andere grootheid voorstellen.

Scan QR code voor animatie.

2.10 Test complexe getallen

Module 4

Oppervlakteberekeningen, inhoudsberekeningen en analytische meetkunde

0 Intro

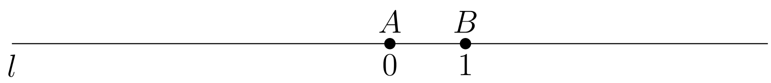
Zie filmpje MOOC.

1 Oppervlakte- en inhoudsberekeningen

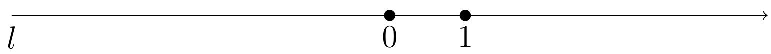
2 Analytische meetkunde

2.1 Abscis van een punt op een geijkte rechte

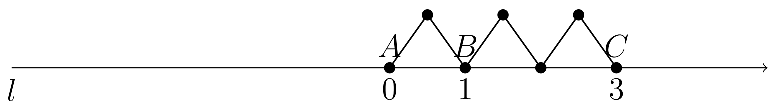
De verzameling $\mathbb{R}$ van de reële getallen kun je voorstellen als de verzameling van de punten op een geijkte rechte. Een geijkte rechte is een rechte l waarop een paar van 2 verschillende punten $(A; B)$ gekozen is. De volgorde van zulke punten heeft belang. Het eerste punt A heet de oorsprong van de ijk. Deze oorsprong komt overeen met het getal 0. Het tweede punt B komt overeen met het getal 1.



De richting van A naar B noem je de positieve richting van de geijkte rechte. Omdat op l door de ijk een positieve richting gedefinieerd is noem je l ook een georiënteerde rechte. Die oriëntatie duidt je vaak aan met een pijl. Je stelt een georiënteerde rechte ook voor zoals op volgende tekening.



Een natuurlijk getal n (bijvoorbeeld 3) komt overeen met het punt C op l langs dezelfde kant van A als het punt B door n keer vanuit A de afstand van A naar B af te passen. Je ziet dit geïllustreerd voor $n = 3$.



Rationaal getal

Een rationaal getal gegeven door een positieve breuk $\frac{n}{m}$ stel je als volgt voor door een punt C op l. Je verdeelt het lijnstuk van A naar B in m gelijke delen (je ziet straks hoe je dat kunt construeren). Noem B' het eerste deelpunt na A. Als $\frac{n}{m} = a + \frac{n'}{m}$ met $0 < n' < m$ en a een natuurlijk getal, dan duidt je eerst het punt C' aan op l dat overeenkomt met het natuurlijke getal a. Vervolgens pas je vanuit C' in de positieve richting n' keer de afstand van A naar B' af. Dit is het punt C.

Je ziet dit geïllustreerd voor $\frac{n}{m} = \frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4}$ (dus $a = 2$ en $n' = 3$).

Negatief getal

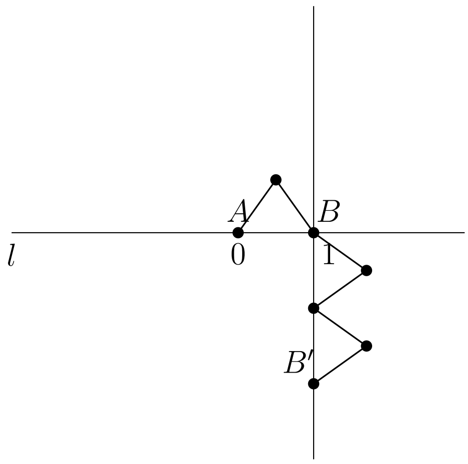
Een negatief geheel getal of een negatief rationaal getal construeer je door afstanden af te passen naar de negatieve richting van de geijkte rechte l.

Reëel getal

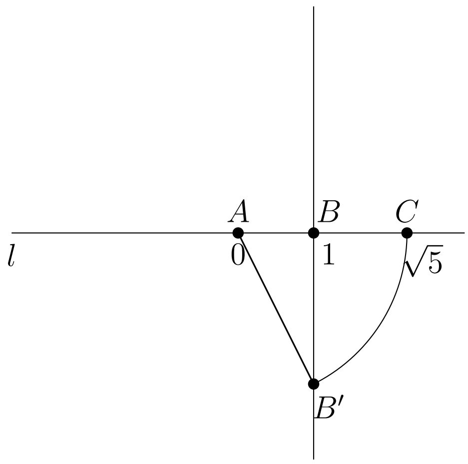
Met veel meer geavanceerde wiskunde kan aangetoond worden dat ieder reëel getal (kommagetal) overeenkomt met een punt van l en dat ieder punt van l ook overeenkomt met een reëel getal. Een geijkte rechte is daardoor een meetkundige voorstelling van de verzameling $\mathbb{R}$ van de reële getallen.

Door gebruik te maken van de Stelling van Pythagoras kun je bijvoorbeeld ook het punt van l dat overeenkomt met een vierkantswortels uit een natuurlijk getal construeren. Je ziet dit geïllustreerd voor $\sqrt{5}$. Je gebruikt daarbij dan $\sqrt{5}$ de schuine zijde is van een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden 1 en 2.

Je start met de geijkte rechte waar A en B op liggen. Loodrecht (winkelhaak) op l door B trek je een rechte en daarop pas je met passer tweemaal vanuit B de afstand van A tot B af. Dit geeft het punt B', hieronder te zien in de figuur.



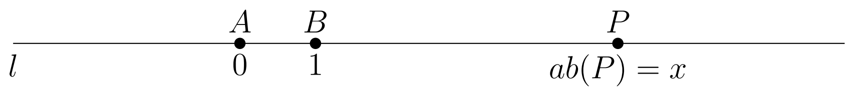
Met de passer met middelpunt A en straal de afstand van A tot B' maak je een cirkelboog die op l het punt C geeft. Het resultaat is hieronder te zien in de figuur.



Algemeen kan voor ieder positief rationaal getal het punt op l dat overeenkomt met de vierkanstwortel geconstrueerd worden.

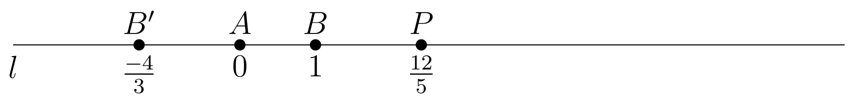
Wiskundig kan aangetoond worden dat je het punt dat op l overeenkomt met $\sqrt[3]{2}$ niet op soortgelijke wijze kunt construeren. Ook een reëel getal zoals π kun je niet op l construeren.

Definitie Voor een punt P op l noem je het reële getal x dat met P overeenkomt de abscis van P en je schrijft $\mathrm{ab}(P) = x$.

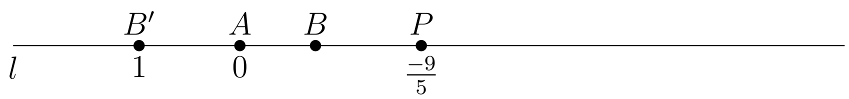


Merk op dat je pas over de abscis van een punt op een rechte kunt spreken nadat een ijk op de rechte vastgelegd is.

Voorbeeld 1 l is een geijkte rechte met ijk $(A; B)$. B' is het punt op l met $\mathrm{ab}(B') = -\frac{4}{3}$ en P is het punt op l met $\mathrm{ab}(P) = \frac{12}{5}$. Wat is de abscis van P als je op l de ijk $(A; B')$ neemt?



Het kleinste gemeenschappelijk veelvoud van 3 en 5 is 15. Met deze noemer bekom je $\mathrm{ab}(B') = -\frac{20}{15}$ en $\mathrm{ab}(P) = \frac{36}{15}$. De afstand van P tot A is $\frac{36}{15} \cdot \frac{15}{20} = \frac{36}{20}$-ste van de afstand van A tot B'. Omdat P aan de andere kant van A ligt als B' is de abscis van P ten opzichte van de ijk $(A; B')$ gelijk aan $-\frac{36}{20} = -\frac{9}{5}$.



Kies een vaste lengte-eenheid (bijvoorbeeld 1 cm) . Op een rechte l kies je een ijk $(A; B)$ zodat de afstand van A tot B gelijk is aan die lengte-eenheid. Je zegt dat de geijkte rechte dan overeenkomt met de lengte-eenheid.

Op een geijkte rechte l die overeenkomt met de lengte-eenheid kies je twee punten P en Q. De afstand van P tot Q is dan het verschil tussen de abscissen $\mathrm{ab}(P)$ en $\mathrm{ab}(Q)$. Noteer $d(P; Q)$ voor de afstand van P tot Q. Je bekomt in dat geval:

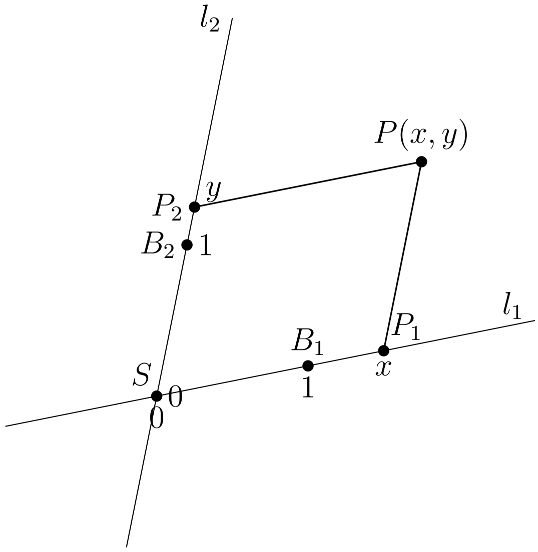
$$d(P; Q) = |\,\mathrm{ab}(Q) - \mathrm{ab}(P)|\ .$$

2.2 Reëel getal - voorbeeld

Zie filmpje MOOC.

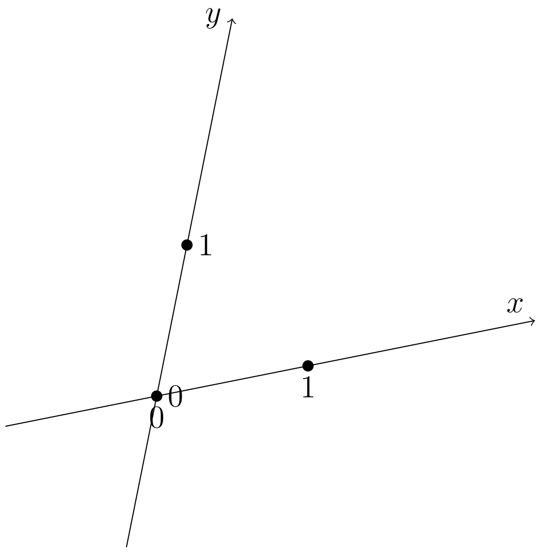
2.3 Euclidische coördinaten in het vlak

In het vlak kies je een paar $(l_1; l_2)$ van snijdende rechten met snijpunt S, zie Figuur **??**. Herinner, bij een paar is de volgorde van belang. Op beide rechten kies je een ijk met oorsprong S. Op l_1 noteer je $(S; B_1)$ voor die ijk en op l_2 noteer je $(S; B_2)$. Zulke twee geijkte rechten in het vlak noem je een assenstelsel in het vlak. Het snijpunt S van l_1 en l_2 noem je de oorsprong van het assenstelsel, vaak aangeduid met O.



Neem een punt P in het vlak. Het beeld door P te projecteren evenwijdig aan l_2 op l_1 noem je P_1. De abscis van P_1 op de geijkte rechte l_1 is x. Het beeld door P te projecteren evenwijdig aan l_1 op l_2 noem je P_2. De abscis van P_2 op de geijkte rechte l_2 is y. Je noemt het paar reële getallen $(x; y)$ de coördinaten van P ten opzichte van het assenstelsel. Je noteert $\text{co}(P) = (x; y)$. Ook hier bedoelen we met een paar getallen $(x; y)$ dat de volgorde belang heeft. In dit geval mogen (en kunnen) de twee getallen x en y gelijk zijn.

Je noemt in deze situatie de geijkte rechte l_1 vaak de x-as en de geijkte rechte l_2 de y-as. Op een tekening noteer je vaak x en y bij die assen en je duidt ook de pijl van de oriëntatie aan, zoals hieronder.



Opmerking

- de coördinaten van de oorsprong O zijn $(0; 0)$.
- de coördinaten van punten op de x-as zijn van de vorm $(x; 0)$.
- de coördinaten van punten op de y-as zijn van de vorm $(0; y)$.

Kies een vaste lengte-eenheid (bijvoorbeeld 1 cm). Een Euclidisch assenstelsel in het vlak is een assenstelsel dat voldoet aan de twee volgende eisen

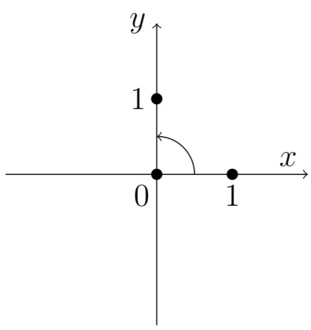
- de x-as en y-as staan loodrecht op elkaar.
- de geijkte assen x en y komen overeen met de lengte-eenheid.

De coördinaten van een punt P in het vlak voorzien van een Euclidisch assenstelsel heten Euclidische coördinaten. In het vervolg van de cursus (tenzij anders vermeld) gebruiken we enkel Euclidische coördinaten in een vlak.

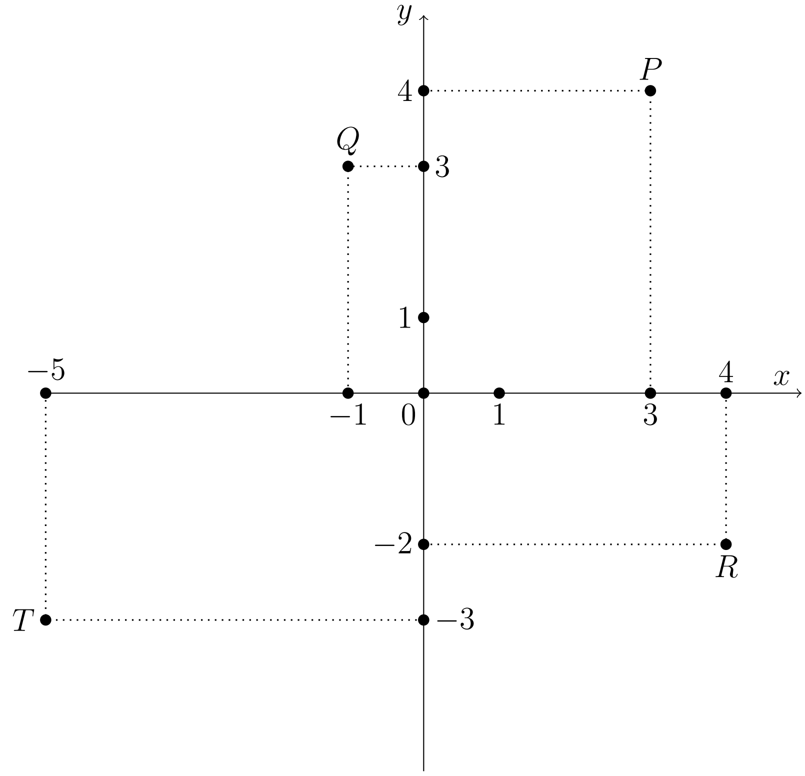
Vaak teken je een Euclidisch assenstelsel als volgt

- de x-as horizontaal met de positieve richting naar rechts.
- de y-as verticaal met de positieve richting naar boven.

In deze ligging is de georiënteerde hoek van de positieve richting van de x-as naar de positieve richting van de y-as 90° in tegenwijzerszin, zoals hieronder. Zulk assenstelsel in het vlak noem je positief georiënteerd.

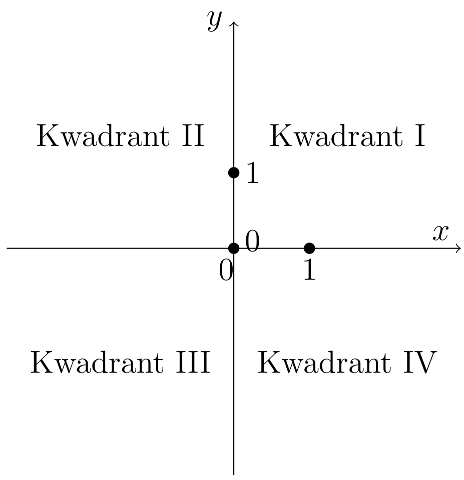


Op de volgende figuur zijn in een Euclidisch assenstelsel met die ligging de volgende punten met hun coördinaten aangeduidt: $P(3; 4)$, $Q(-1; 3)$, $R(4; -2)$ en $T(-5; -3)$.



Een assenstelsel verdeelt het vlak in 4 delen. Je noemt dat de kwadranten. Deze nummer je in tegenwijzerszin. Je start met het deel waar x en y allebei positief zijn. Dat noem je het eerste kwadrant, zoals in de figuur hieronder.

Kwadrant	x	y
I	+	+
II	-	+
III	-	-
IV	+	-

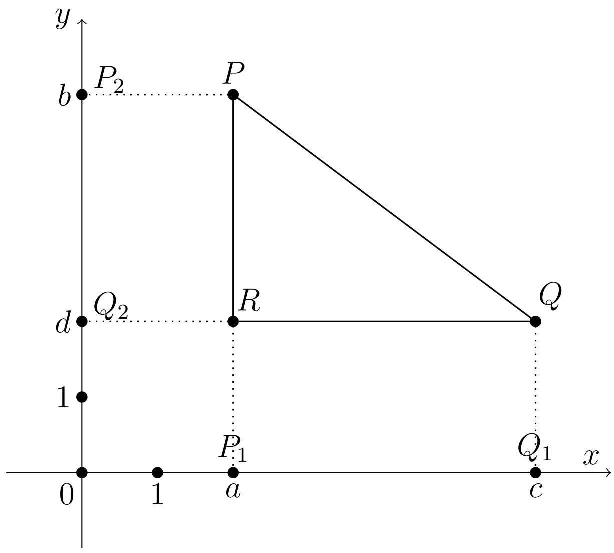


2.4 Afstand tussen twee punten in het vlak

Het vlak is voorzien van een Euclidisch assenstelsel. Neem twee verschillende punten $P(a;b)$ en $Q(c;d)$ in het vlak. We stellen de formule op waarmee je de afstand tussen P en Q (genoteerd $d(P;Q)$ uitdrukt met de Euclidische coördinaten van P en Q.

De loodrechte projecties van P en Q op de x-as noem je P_1 en Q_1. De loodrechte projecties van P en Q op de y-as noem je P_2 en Q_2. Deze punten hebben coördinaten $P_1(a;0)$, $Q_1(c;0)$, $P_2(0;b)$ en $Q_2(0;d)$.

Als $b = d$ dan is de rechte PQ evenwijdig met de x-as. Als $a = c$ dan is de rechte PQ evenwijdig met de y-as. Stel dat de rechte PQ noch horizontaal, noch verticaal is (dus $b \neq d$ en $a \neq c$). Het snijpunt van de rechte door P evenwijdig met de y-as met de rechte door Q evenwijdig met de x-as noem je R.



In de rechthoekige driehoek PQR geeft de Stelling van Pythagoras:

$$|PQ|^2 = |PR|^2 + |QR|^2.$$

Er geldt $|PR| = |Q_2P_2| = d(Q_2; P_2) = |b - d|$. Dit laatste is waar omdat b en d abscissen zijn van P_2 en Q_2 op de geijkte y-as die overeenkomt met de lengte-eenheid. Er geldt ook $|QR| = |P_1Q_1| = d(P_1; Q_1) = |a - c|$. Invullen in de Stelling van Pythagoras geeft

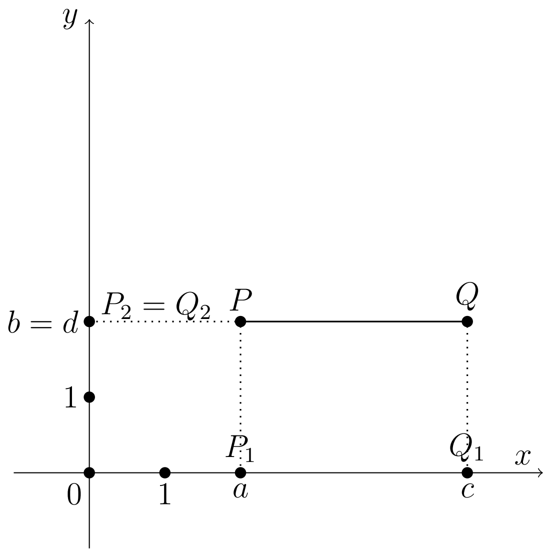
$$|PQ|^2 = (b - d)^2 + (a - c)^2 \ .$$

Hieruit vind je

$$d(P; Q) = \sqrt{(b - d)^2 + (a - c)^2} \ .$$

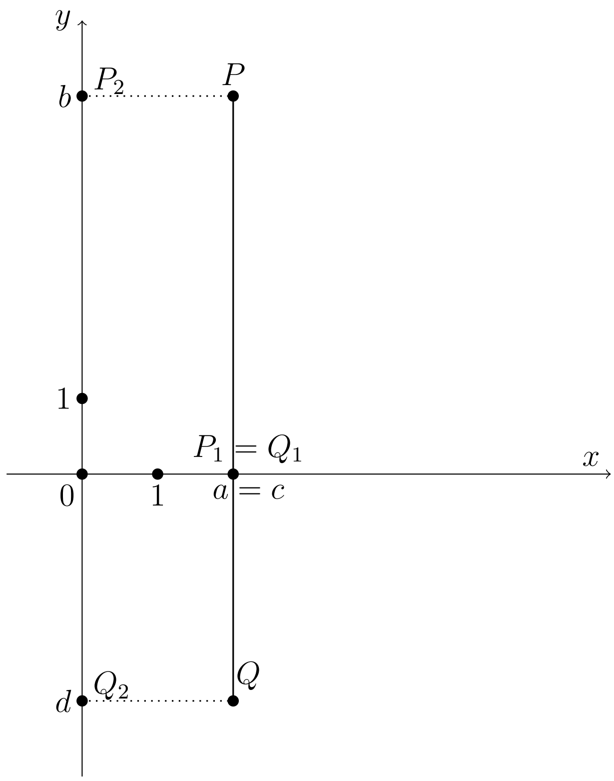
De formule geldt ook als de rechte PQ wel evenwijdig is met de x-as of de y-as.

- De rechte PQ is horizontaal, dus $b = d$.



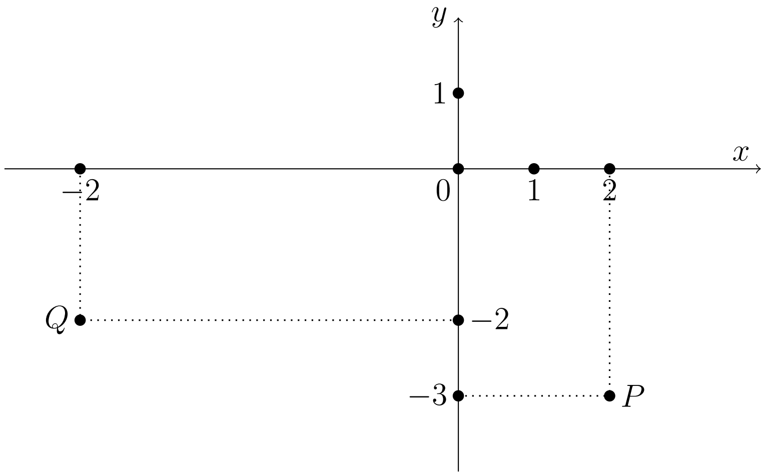
$$d(P;Q) = d(P_1;Q_1) = |c-a| \text{ en } \sqrt{(b-d)^2+(a-c)^2} = |c-a|$$

- De rechte PQ is verticaal, dus $a = c$.



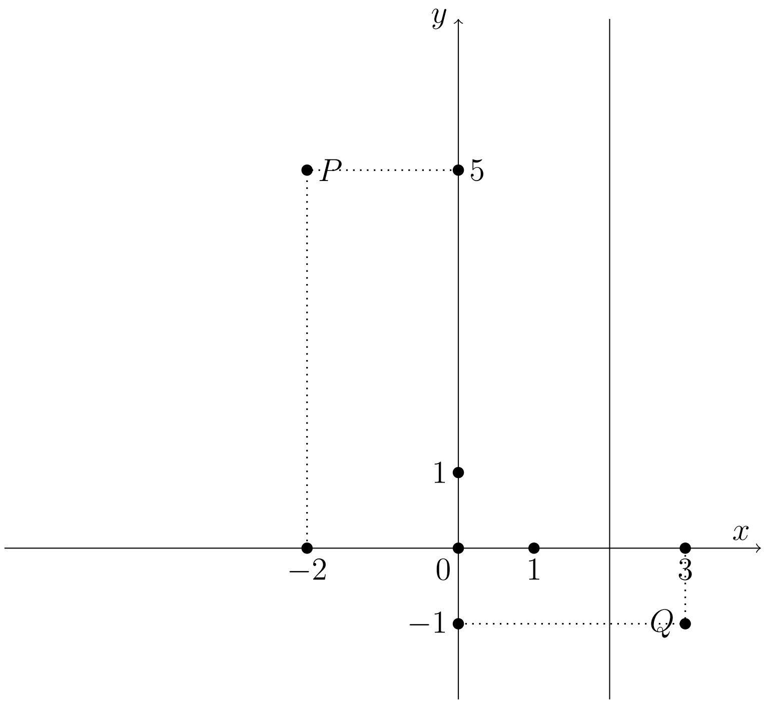
$$d(P;Q) = d(P_2;Q_2) = |d-b| \text{ en } \sqrt{(b-d)^2+(a-c)^2} = |b-d|$$

Voorbeeld 1 Bereken de afstand tussen $P(2; -3)$ en $Q(-5; -2)$.



$$d(P; Q) = \sqrt{(-5-2)^2 + (-2-(-3))^2} = \sqrt{50}$$

Voorbeeld 2 Gegeven zijn de punten $P(-2; 5)$ en $Q(3; -1)$. Wat zijn de coördinaten van het punt R met x-coördinaat gelijk aan 2 dat even ver van P als van Q ligt?



R heeft coördinaten $(2; y)$. We zoeken y zodat $d(R; P) = d(R; Q)$.

$$d(R; P) = \sqrt{(-2-2)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{16 + (y-5)^2}$$

$$d(R;Q) = \sqrt{(3-2)^2 + (y-(-1))^2} = \sqrt{1+(y+1)^2}$$

Hieruit volgt dat $d(R;P) = d(R;Q)$ als en alleen als

$$16 + (y-5)^2 = 1 + (y+1)^2$$

Uitwerken van de kwadraten geeft

$$16 + y^2 - 10y + 25 = 1 + y^2 + 2y + 1 \text{ dus } 12y = 39 \ .$$

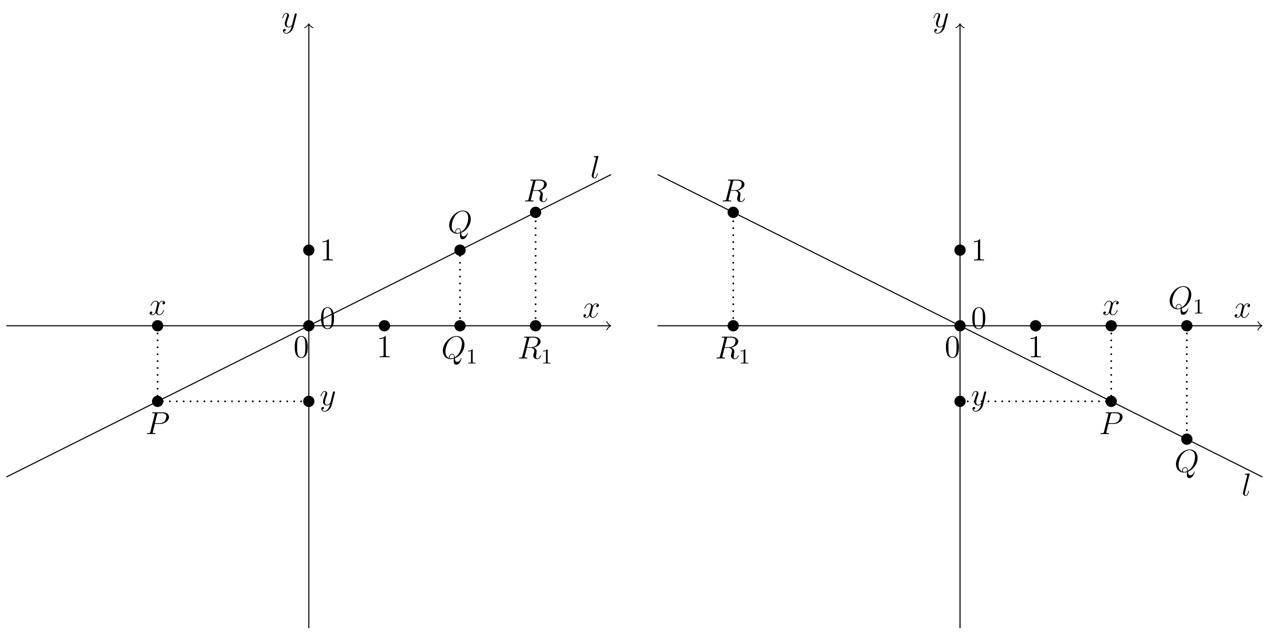
Het punt R heeft coördinaten $(2; \frac{39}{12})$.

2.5 Afstand tussen twee punten - voorbeeld

Zie filmpje MOOC.

2.6 Vergelijking van een rechte

Het vlak is voorzien van een Euclidisch assenstelsel met oorsprong O. In het vlak is l een rechte door O verschillend van één van de assen van het assenstelsel. Je neemt op l twee verschillende punten $Q(x_1; y_1)$ en $R(x_2; y_2)$ allebei verschillend van O. Je noemt Q_1 (resp.R_1) de loodrechte projectie van Q (resp. R) op de x-as. Omdat de rechthoekige driehoeken OQQ_1 en ORR_1 even grote overeenkomstige hoeken hebben zijn ze gelijkvormig.



Hieruit volgt dat de verhoudingen van lengten van overeenkomstige zijden gelijk zijn, dus

$$\frac{|RR_1|}{|QQ_1|} = \frac{|OR_1|}{|OQ_1|} \ .$$

In termen van coördinaten bekom je

$$\frac{|y_1|}{|y_2|} = \frac{|x_1|}{|x_2|} \text{ en dus } \frac{|y_1|}{|x_1|} = \frac{|y_2|}{|x_2|} \ .$$

Merk op dat op de linkse figuur voor een punt $P(x;y)$ op l verschillende van O steeds geldt dat $\frac{y}{x} > 0$ terwijl op de rechtse figuur steeds geldt $\frac{y}{x} < 0$. De tekens van $\frac{y_1}{x_1}$ en $\frac{y_2}{x_2}$ zijn dus steeds gelijk en je bekomt daardoor zelfs

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \ .$$

Je bekomt hieruit dat een getal $m \in \mathbb{R}_0$ bestaat zodat voor ieder punt $P(x;y)$ op l verschillende van O geldt

$$\frac{y}{x} = m \text{ en dus } y = mx \ .$$

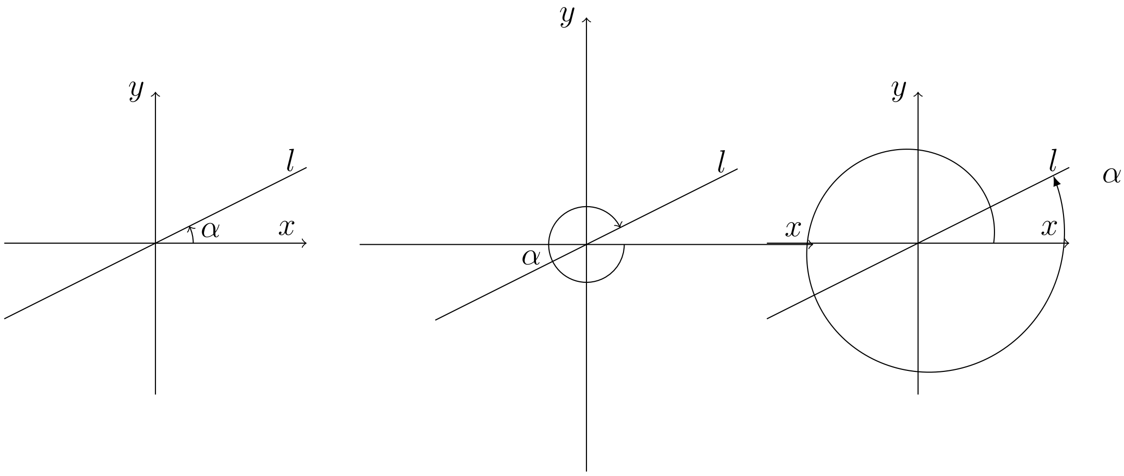
Deze laatste vergelijking is een nodige en voldoende voorwaarde opdat een punt $P(x;y)$ in het vlak tot de rechte l behoort. Het is een vergelijking van l. Voor l als op de linkse figuur is $m > 0$ en voor l als op de rechtse figuur is $m < 0$.

Als l de x-as is dan behoort een punt $P(x;y)$ van het vlak tot l als en alleen als $y = 0$. Dit laatste is dan een vergelijking van l (dus van de x-as). Merk op, door $m = 0$ te nemen in vorig resultaat bekom je dat je de vergelijking eveneens in de vorm $y = 0.x$ kan schrijven.

Als l de y-as is dan behoort een punt $P(x;y)$ van het vlak tot l als en alleen als $x = 0$. Dit laatste is dan een vergelijking van l (dus van de y-as). Merk op, er is geen enkel getal m zodat je die laatste vergelijking kunt schrijven in de vorm $y = mx$.

Voor een rechte l door de oorsprong is α een georiënteerde hoek van de x-as naar l.

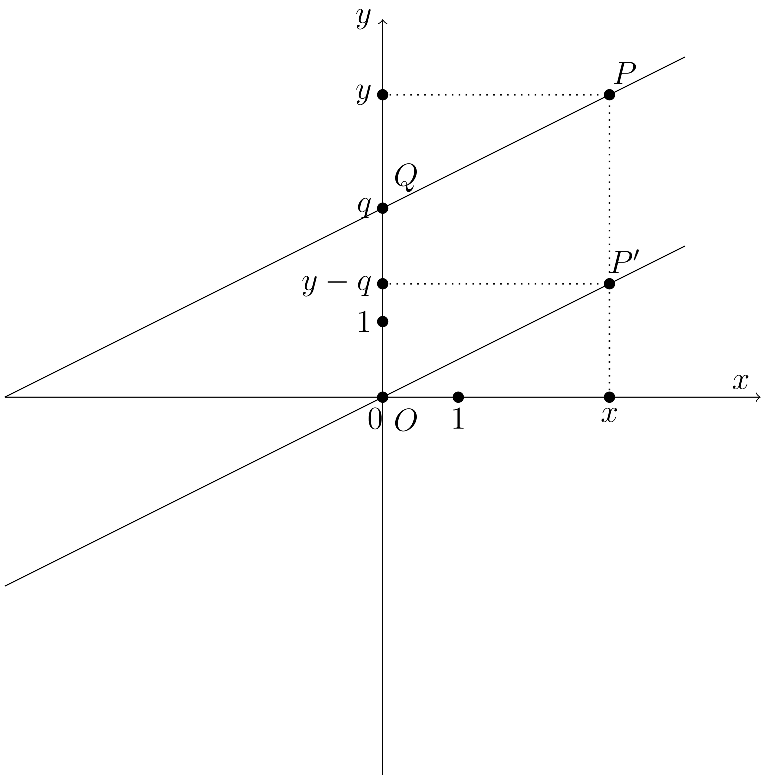
- Een georiënteerde hoek is positief in tegenwijzerszin en negatief in wijzerszin.
- De hoek α is slechts op een veelvoud van 180^o (π radialen) na bepaald.



Zulke georiënteerde hoek komt overeen met een punt op de goniometrische cirkel. Uit de constructie van de tangens bekom je dat $(1; \tan\alpha)$ de coördinaten zijn van een punt op l (als l niet de y-as is). Omdat de punten van l moeten voldoen aan een vergelijking $y = mx$ bekom je $m = \tan\alpha$.

Samengevat bekomen we het volgende resultaat. De vergelijking van een rechte l door de oorsprong O verschillend van de y-as is $y = (\tan\alpha)x$. Hierbij is α de georiënteerde hoek tussen de positieve x-as en de rechte l. De vergelijking van de y-as is $x = 0$.

Een rechte l die niet door de oorsprong O gaat en niet evenwijdig is met de y-as snijdt de y-as in een punt $Q(0; q)$. De rechte l' door de oorsprong O die evenwijdig is aan l heeft een vergelijking $y = mx$.



Voor een punt $P(x; y)$ op l is P' de projectie van P op l evenwijdig met de y-as.

De coördinaten van P' zijn $(x; y - q)$ en omdat P' tot de rechte l' met vergelijking $y = mx$ behoort moet $y - q = mx$. Je bekomt dat een nodige en voldoende voorwaarde opdat een $P(x; y)$ in het vlak tot de rechte l behoort is $y = mx + q$. Dat getal m is $\tan\alpha$ met α de georiënteerde hoek tussen de positieve x-as en de rechte l. Je noemt m de richtinscoëfficiënt van l en je noteert $m = \text{rico}(l)$.

Je besluit : een vergelijking van l is $y = mx + q$.

Indien l een rechte is evenwijdig met de y-as dan bestaat $a \in \mathbb{R}$ zodat l bestaat uit alle punten $P(x; y)$ in het vlak waarvoor $x = a$. In dat geval in $x = a$ een vergelijking van l. Merk op dat je zulke vergelijking niet kunt schrijven in vorm $y = mx + q$, zulke rechte l heeft geen richtingscoëfficiënt.

Opmerking Als rico(l) $= m$ en $P_0(x_0; y_0)$ is een punt op l dan is

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

een vergelijing van l. Duidelijk voldoen de coördinaten van P_0 aan de vergelijking. Je kunt de vergelijking herleiden tot de vorm $y = mx + (y_0 - mx_0)$. Dit is van de vorm $y = mx + q$ met $q = y_0 - mx_0$ en dus de vergelijking van een rechte. In die laatste vorm herken je ook dat m de richtinscoëfficiënt is van die rechte.

2.7 Vergelijking rechte - voorbeeld

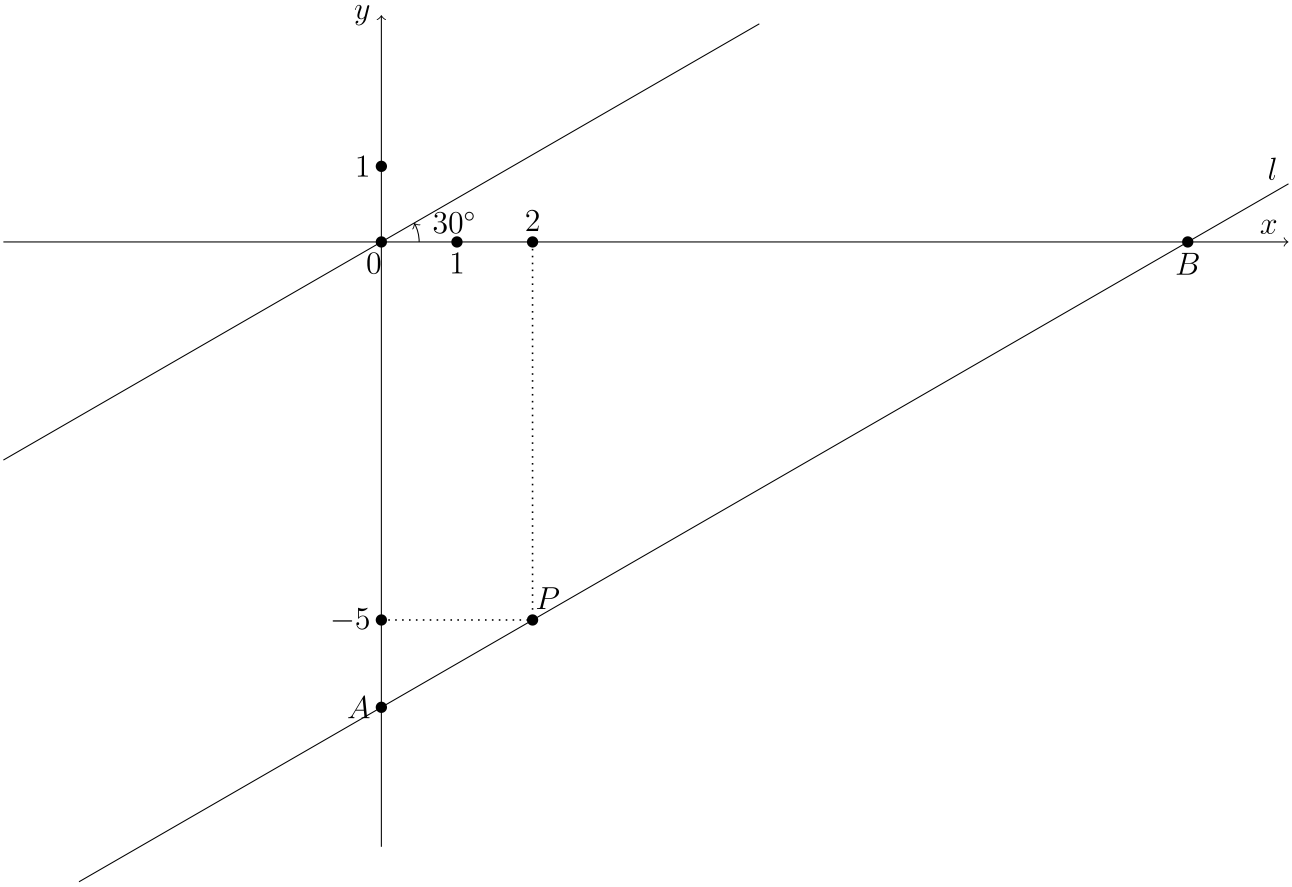
Zie filmpje MOOC.

2.8 Vergelijking rechte met richting en door gegeven punt - extra voorbeelden

Zie filmpje MOOC.

2.9 Vergelijking rechte met richting en door gegeven punt - extra voorbeelden

Voorbeeld 1 Geef een vergelijking van de rechte l zodat de georiënteerde hoek tussen de positieve x-as en l gelijk is aan 30^o en zodat het punt $P(2; -5)$ tot l behoort. Geef eveneens de coördinaten van het snijpunt van l met de x-as en met de y-as.



Er geldt rico$(l) = \tan(30^o) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. De vergelijking van l is $y - (-5) = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 2)$ en je bekomt

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 5 - \frac{2}{5} \text{ dus } y = 0,577x - 6,155 \ .$$

Omdat $q = -6,155$ is heeft het snijpunt A met de y-as coördinaten $(0; -6,155)$. (Dit vind je ook door $x = 0$ in de vergelijking in te vullen.) Op de x-as is $y = 0$. Voor het snijpunt B met de x-as geldt daarom $0,577x - 6,155 = 0$. Je bekomt

$$x = \frac{6,155}{0,577} = 10,667 \ .$$

Het snijpunt B met de x-as heeft coördinaten $(10,667; 0)$.

We stellen nu de vergelijking op van een rechte door twee gegeven verschillende punten $P_1(x_1; y_1)$ en $P_2(x_2; y_2)$. Als $x_1 = x_2$ dan is de rechte evenwijdig met de y-as en de vergelijking is $x = a$ (met $a = x_1$).

Stel dat $x_1 \neq x_2$ (de rechte is dus niet evenwijdig met de y-as). De rechte heeft een vergelijking van de vorm $y = mx + q$. Deze vergelijking moet gelden als je de coördinaten van P_1 en P_2 invult. Dit geeft volgende gelijkheden:

$$y_1 = m.x_1 + q \text{ en } y_2 = m.x_2 + q \ .$$

Neem je van beide leden van deze twee gelijkheden telkens het verschil dan bekom je

$$y_2 - y_1 = m.(x_2 - x_1)$$

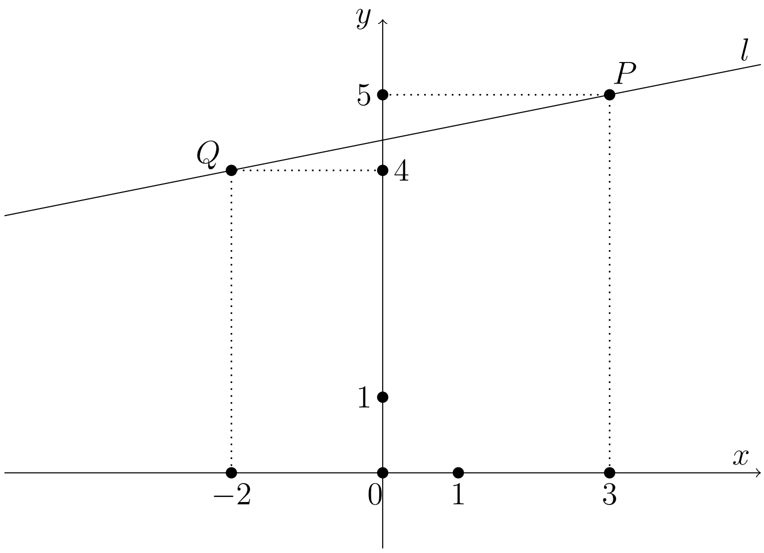
en omdat $x_1 \neq x_2$ bekom je

$$\text{rico}(P_1P_2) = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \; .$$

Je bekomt als vergelijking van de rechte P_1P_2

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \; .$$

Voorbeeld 2 Geef een vergelijking van de rechte l door de punten $P(3;5)$ en $Q(-2;4)$.



Invullen in voorgaande formule geeft

$$y - 5 = \frac{4-5}{-2-3}(x - 3)$$

en mits wat rekenwerk bekom je hieruit

$$y = \frac{1}{5}x + \frac{22}{5} \; .$$

Je kunt een vergelijking van een rechte steeds schrijven in de vorm $ax + by + c = 0$ met a en b niet allebei 0. Omgekeerd, een vergelijking van de vorm $ax + by + c = 0$ met a en b niet allebei gelijk aan 0 steeds een vergelijking van een rechte.

- Indien $b = 0$ dan is $a \neq 0$ en je kunt de vergelijking omvormen tot $x = -\frac{c}{a}$. Je bekomt een rechte evenwijdig met de y-as (door het punt $(-\frac{c}{a};0)$).
- Indien $b \neq 0$ dan kun je de vergelijking omvormen tot

  $$y = \left(-\frac{a}{b}\right)x + \left(-\frac{c}{b}\right) \; .$$

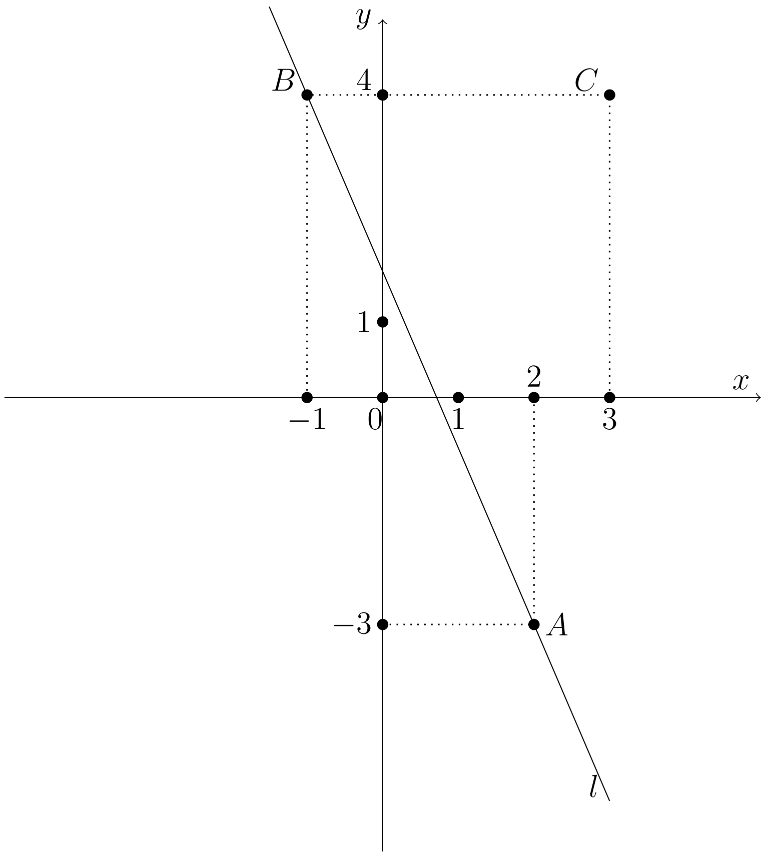
  Je bekomt de rechte met richtingscoëfficiënt $-\frac{a}{b}$ door het punt $(0;-\frac{c}{b})$.

2.10 Onderlinge ligging van twee rechten

Twee rechten l_1 en l_2 in het vlak zijn evenwijdig als en alleen als de positieve richting van de x-as even grote georiënteerde hoeken maakt met l_1 en met l_2. Hieruit volgen twee mogelijkheden:

- l_1 en l_2 zijn allebei evenwijdig met de y-as.
- $\text{rico}(l_1) = \text{rico}(l_2)$ (en dan zijn l_1 en l_2 niet evenwijdig met de y-as).

Voorbeeld 1 Gegeven zijn 3 punten $A(2 : -3)$, $B(-1; 4)$ en $C(3; 4)$. Geef een vergelijking van de rechte l door C evenwijdig aan de rechte AB.



De richtingscoëfficiënt m van rechte AB is

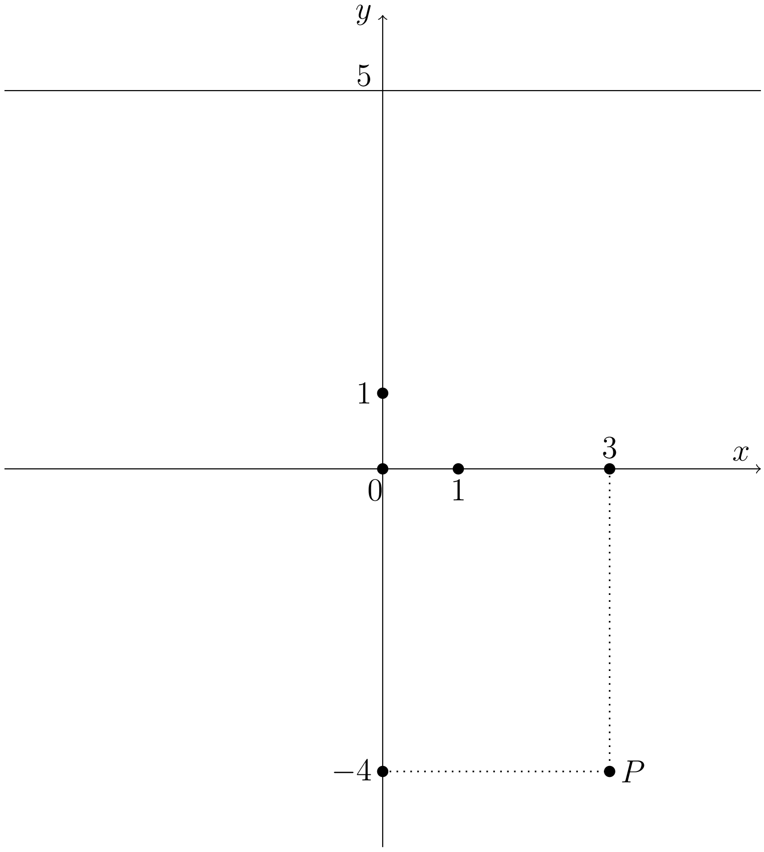
$$m = \frac{4-(-3)}{-1-2} = -\frac{7}{3} \ .$$

De richtingscëfficiënt van l moet dus ook -4 zijn. Omdat l ook door het punt C moet gaan bekomen we volgende vergelijking van l:

$$y - 4 = (-\frac{7}{3})(x-3) \text{ dus } 7x + 3y - 33 = 0 \ .$$

Een loodlijn op een rechte evenwijdig met de x-as (vergelijking van de vorm $y = b$) is een rechte evenwijdig met de y-as (vergelijking van de vorm $x = a$).

Voorbeeld 2 l is de rechte met vergelijking $y = 5$. Geef een vergelijking van de loodlijn l' op l door $P(3; -4)$.



Omdat l' een rechte is evenwijdig met de y-as heeft l' een vergelijking van de vorm $x = a$. Omdat $(P3; -4)$ op l' moet liggen moet $a = 3$. Een vergelijking van l' is dus $x = 3$.

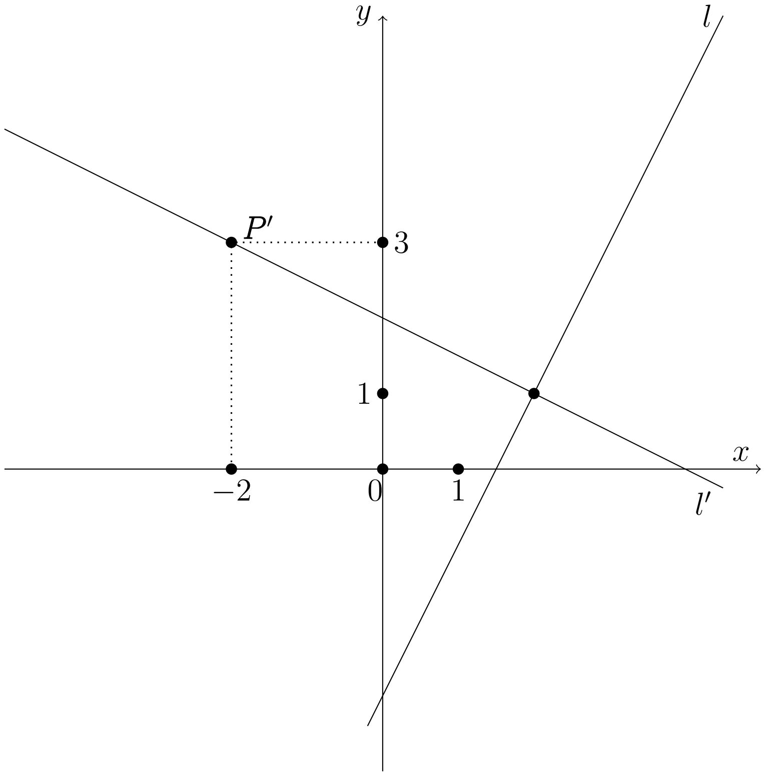
Een loodlijn op een rechte evenwijdig met de y-as (vergelijking van de vorm $x = a$) is een rechte evenwijdig met de x-as (vergelijking van de vorm $y = b$).

Stel nu dat l aan geen van beide assen evenwijdig is. Stel dat α een geöriënteerde hoek is tussen de positieve richting van de x-as en de rechte l. In dat geval is de grootte van de hoek α geen veelvoud van 90^o. Dit impliceert dat de richtingscoëfficiënt $m = \tan(\alpha$ van de rechte l bestaat en verschillend is van 0. Als l' een loodlijn is op l dan is $\alpha + 90^o$ een georiënteerde hoek tussen de positieve richting van de x-as en l'. Omdat $\tan(\alpha + 90^o) = -\cot(\alpha) = -\frac{1}{\tan(\alpha)}$ bekom je dat $\text{rico}(l') = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{\text{rico}(l)}$.

Besluit: Als l en l' loodrechte op elkaar staan en geen van beide is evenwijdig met een as van het assenstelsel dan is

$$\text{rico}(l).\,\text{rico}(l') = -1 \ .$$

Voorbeeld 3 Gegeven zijn de rechte l met vergelijking $y = 2x - 3$ en het punt $P(-2; 3)$. Geef een vergelijking voor de loodlijn l' door P op l. Geef eveneens de coördinaten van de loodrechte projectie van P op l.



Omdat $\text{rico}(l) = 2$ is $\text{rico}(l') = -\frac{1}{2}$. Omdat l' ook door $P(-2;3)$ moet gaan is de vergelijking van l'

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x+2) \text{ dus } y = -\frac{1}{2} + 2 \ .$$

De loodrechte projectie van P op l is het snijpunt P' van de rechten l en l'. De coördinaten (x, y) van het punt P' moeten dus voldoen aan de vergelijkingen van beide rechten:

$$l \leftrightarrow y = 2x - 3 \text{ en } l' \leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2 \ .$$

Voor de x-coördinaat van P' bekom je hieruit de vergelijking

$$2x - 3 = -\frac{1}{2}x + 2$$

met als oplossing $x = 2$. Vul je dit in de vergelijking van l (of l') in dan bekom je de y-coördinaat van P':

$$y = 2.2 - 3 = 1 \ .$$

De coördinaten van P' zijn $(2;1)$.

Twee verschillende punten A en B in het vlak bepalen een lijnstuk $[AB]$. De middelloodlijn van dat lijnstuk $[AB]$ is de rechte l loodrecht op de rechte AB door het midden M van het lijnstuk $[AB]$. Deze middelloodlijn is eveneens de verzameling van alle punten P in het vlak die evenver van A als van B liggen. In volgend voorbeeld zie je dit nagerekend.

Voorbeeld 4 Gegeven zijn de punten $A(3;4)$ en $B(-2;1)$.

- We berekenen eerst een vergelijking van de middelloodlijn l op $[AB]$ door de definitie te gebruiken. Het midden M van het lijnstuk $[AB]$ is het punt waarvan de coördinaten de gemiddelden zijn van de coördinaten van A en B, dus
$$M(\frac{3+(-2)}{2};\frac{4+1}{2}) = (\frac{1}{2};\frac{5}{2})\ .$$
De richtingscoëfficiënt van de rechte AB is $\text{rico}(AB) = \frac{1-4}{-2-3} = \frac{3}{5}$. De richtingscoëfficiënt van de middelloodlijn l is dus $\text{rico}(l) = -\frac{5}{3}$. Je bekomt daardoor als vergelijking van de rechte l:
$$y - \frac{5}{2} = -\frac{5}{3}(x-\frac{1}{2}) \text{ dus } y = -\frac{5}{3}x + \frac{10}{3}\ .$$
- We stellen nu een vergelijking op voor de verzameling van de punten P in het vlak die evenver van A als van B liggen. Een punt $P(x,y)$ ligt evenver van A als van B als en alleen als
$$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2} = \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}\ .$$
Kwadrateren van beide positieve leden in voorgaande gelijkheid en uitrekenen van de kwadraten geeft volgende nodige en voldoende voorwaarde
$$x^2-6x+9+y^2-8y+16 = x^2+4x+4+y^2-2y+1\ .$$
Merk op dat de kwadraten verdwijnen en als je alles oplost naar de veranderlijke y dan bekom je
$$y = -\frac{5}{3}x + \frac{10}{3}\ .$$

Je merkt op dat je in beide delen dezelfde vergelijking bekomt. In dit voorbeeld bekomen we dus dat de verzameling van de punten P evenver gelegen van A en B hetzelfde is als de middelloodlijn op het lijnstuk $[AB]$. Dit kan met behulp van elementaire meetkunde in alle gevallen bewezen worden (dat doen we in deze cursus niet).

Gegeven zijn twee rechten l en l' met vergelijkingen
$$l \leftrightarrow ax+by+c=0 \text{ en } l' \leftrightarrow a'x+b'y+c'=0\ .$$

Hoe vind je de scherpe hoek $\angle(l,l')$ tussen de rechten l en l'?

Uit de vergelijkingen kun je direct zien of een rechte evenwijdig is met de y-as. Van een rechte die niet evenwijdig is met de y-as kun je de richtingscoëfficiënt uit de vergelijking vinden. De richtingscoëfficiënt (als deze bestaat) van l duiden we aan met m en van l' met m'. Met deze richtingscoëfficiënten bereken je dan de georiënteerde hoek α (resp α') tussen de positieve richting van de x-as en de rechte l (resp. l') en genomen met grootte in het interval $]-90^o;90^o]$ (voor een verticale rechte nemen we dus 90^o).

Door eventueel l en l' te verwisselen kunnen we aannemen dat $\alpha \geq \alpha'$. Dan is $\angle(l,l')$ gelijk aan $\alpha-\alpha'$ als dit hoogstens 90^o is en anders is $\angle(l,l')$ gelijk aan $180^o-(\alpha-\alpha')$. Als l evenwijdig is met de y-as dan bekomen we dat $\angle(l,l') = 90^o-|\alpha|$. We veronderstellen nu dat l niet evenwijdig is met de y-as (en l' dus ook niet).

Uit de vergelijkingen bekom je

$$\text{rico}(l) = m = -\frac{a}{b} \text{ en dus } \tan(\alpha) = m = -\frac{a}{b}$$

$$\text{rico}(l') = m' = -\frac{a'}{b'} \text{ en dus } \tan(\alpha') = m' = -\frac{a'}{b'}$$

Omdat $\tan(\alpha - \alpha') = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\alpha')}{1+\tan(\alpha).\tan(\alpha')}$; $\tan(180^o - (\alpha - \alpha')) = -\tan(\alpha - \alpha')$ en de tangens van een scherpe hoek steeds positief is bekom je

$$\tan(\angle(l, l')) = |\frac{m - m'}{1 + m.m'}|$$

(als $1 + m.m' = 0$ dan staan l en l' loodrecht op elkaar) of nog

$$\tan(\angle(l, l')) = |\frac{-\frac{a}{b} - (-\frac{a'}{b'})}{1 + (-\frac{a}{b})(-\frac{a'}{b'})}| = |\frac{a'b - ab'}{aa' + bb'}| \ .$$

Vanwege de absolute waarden is het niet meer nodig dat in deze formules $\alpha \geq \alpha$.

2.11 Onderlinge ligging van twee rechten - voorbeeld 1

Zie filmpje MOOC.

2.12 Onderlinge ligging van twee rechten - voorbeeld 2

Zie filmpje MOOC.

2.13 Onderlinge ligging van twee rechten - voorbeeld 3

Zie filmpje MOOC.

2.14 Afstand van een punt tot een rechte

De afstand $d(P;l)$ van een punt P tot een rechte l is de afstand van P tot de loodrechte projectie P' van P op l.

Voorbeeld 1 Gegeven zijn een punt $P(2;-4)$ en de rechte l met vergelijking $2x-5y+7=0$. De rechte $l'=PP'$ zal loodrecht staan op l. Omdat $\text{rico}(l)=\frac{2}{5}$ moet $\text{rico}(l')=-\frac{5}{2}$. De vergelijking van de rechte $PP'=l'$ is daarom

$$y-(-4)=-\frac{5}{2}(x-2) \text{ dus } y=-\frac{5}{2}x+1\ .$$

Het punt P' is het snijpunt van l en l'. De coördinaten van P' zijn daarom de oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} y=\frac{2}{5}x+\frac{7}{5} \\ y=-\frac{5}{2}x+1 \end{cases}$$

De x-coördinaat van P' is daardoor de oplossing van

$$\frac{2}{5}x+\frac{7}{5}=-\frac{5}{2}x+1 \text{ dus } x=-\frac{4}{29}\ .$$

Door deze waarde van x in te vullen in $y=-\frac{5}{2}+1$ (vergelijking van l') bekom je de y-coördinaat van P'.

$$y=-\frac{5}{2}.(-\frac{4}{29})+1=\frac{39}{29}$$

De coördinaten van P' zijn $(-\frac{4}{29};\frac{39}{29})$.

De afstand van P tot de rechte l is de afstand van P tot P'. Je bekomt als afstand

$$\sqrt{\left(2+\frac{4}{29}\right)^2+\left(-4-\frac{39}{29}\right)^2}=\frac{\sqrt{62^2+155^2}}{29}=5,76\ .$$

Er is een heel eenvoudige formule waarmee je de afstand van een punt $P(x_0;y_0)$ tot een rechte l met vergelijking $ax+by+c=0$ kunt uitrekenen. Je hoeft dan de vorige werkwijze in het voorbeeld niet telkens uit te voeren. Deze formule is

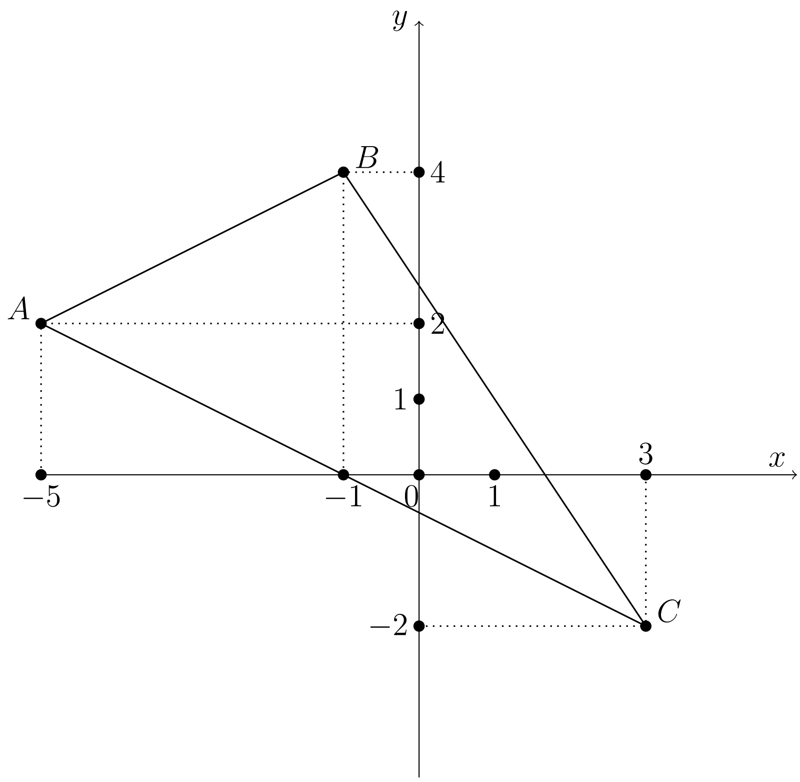
$$d(P;l)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\ .$$

Pas je voorgaande formule toe op het voorbeeld dan bekom je

$$d(P;l) = \frac{|2.2 - 5.(-4) + 7|}{\sqrt{4+25}} = \frac{31}{\sqrt{29}} = 5,76 \ .$$

Je merkt dat je inderdaad dezelfde uitkomst bekomt.

Voorbeeld 2 Gegeven zijn de punten $A(-5;2)$, $B(-1;4)$ en $C(3;-2)$. Bereken de oppervlakte van driehoek ABC.



We vatten het lijnstuk $[A;B]$ op als basis van de driehoek. Dan is $d(A;B)$ de lengte van de basis. De hoogte van de driehoek is dan de afstand $d(C;AB)$ van het punt C tot de rechte AB. Je bekomt

$$d(A;B) = \sqrt{(-1-(-5))^2 + (4-2)^2} = \sqrt{20} \ .$$

Een vergelijking van de rechte AB is

$$y - 2 = \frac{4-2}{-1-(-5)}(x-(-5)) \text{ dus } 2y - x - 9 = 0 \ .$$

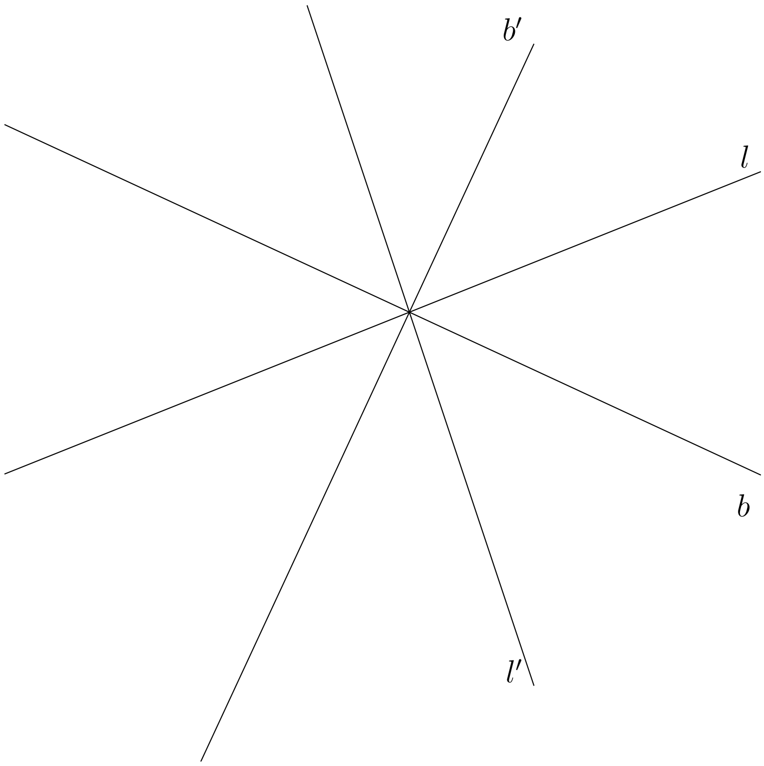
De afstand van C tot de rechte AB is dan

$$d(C;AB) = \frac{|2.(-2) - 3 - 9|}{\sqrt{4+1}} = \frac{16}{\sqrt{5}} \ .$$

De oppervlakte van driehoek ABC is dus gelijk aan

$$\frac{d(A;B).d(C;AB)}{2} = \frac{\sqrt{20}.\frac{16}{\sqrt{5}}}{2} = 16 \ .$$

De bissectrices van twee niet evenwijdige rechten l en l' zijn de rechten die een hoek tussen l en l' in twee gelijke delen verdelen. Twee niet evenwijdige lijnen l en l' hebben twee bissectrices b en b' die loodrecht op elkaar staan.



Er kan aangetoond worden dat deze twee rechten b en b' samen de verzameling is van alle punten P in het vlak die evenver van de rechten l en l' liggen. Door middel van de formule voor de afstand van een punt tot een rechte kun je met die formule vergelijkingen voor die bissectrices vinden.

Voorbeeld 3 Stel vergelijkingen op van de bissectrices van de rechten l en l' gegeven door de volgende vergelijkingen.

$$l \leftrightarrow 2x - 5y + 4 = 0 \text{ en } l' \leftrightarrow 3x + y - 2 = 0$$

Een punt $P(x;y)$ behoort tot één van de bissectrices b en b' als en alleen als $d(P;l) = d(P;l')$. Omdat

$$d(P;l) = \frac{|2x - 5y + 4|}{\sqrt{4 + 25}} \text{ en } d(P;l') = \frac{|3x + y - 2|}{\sqrt{9 + 1}}$$

bekom je dat P op een bissectrice ligt als en alleen als

$$\frac{|2x - 5y + 4|}{\sqrt{29}} = \frac{|3x + y - 2|}{\sqrt{10}} \ .$$

Laat je hierin de absolute waarde weg dan zijn de uitdrukkingen aan weerszijden van de gelijkheid gelijk of tegengesteld. Dit geeft aanleiding tot vergelijkingen van twee rechten: de bissectrices b en b'. Deze vergelijkingen zijn:

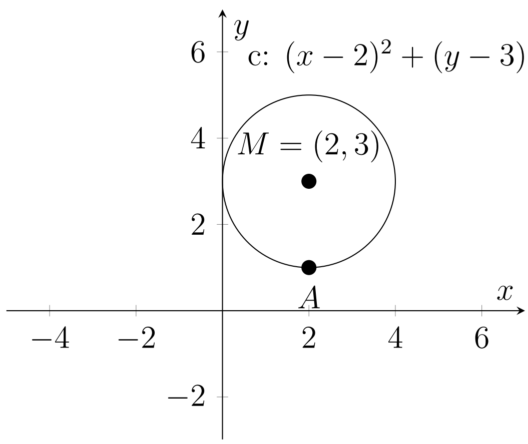
- voor b
$$\frac{2x - 5y + 4}{\sqrt{29}} = \frac{3x + y - 2}{\sqrt{10}}$$
$$(2\sqrt{10} - 3\sqrt{29})x + (-5\sqrt{10} - \sqrt{29})y + (4\sqrt{10} + 2\sqrt{29}) = 0$$
$$-9,83x - 21,20y + 23,42 = 0$$

- voor b'
$$\frac{2x - 5y + 4}{\sqrt{29}} = -\frac{3x + y - 2}{\sqrt{10}}$$
$$(2\sqrt{10} + 3\sqrt{29})x + (-5\sqrt{10} + \sqrt{29})y + (4\sqrt{10} - 2\sqrt{29}) = 0$$
$$22,48x - 10,43y + 1,88 = 0 \ .$$

2.15 Vergelijking van een cirkel in het vlak

Definitie De cirkel met middelpunt $M(x_0; y_0)$ en straal r ($r > 0$) is de verzameling van de punten P in het vlak die op dezelfde afstand r van het middelpunt M liggen.

Notatie $C(M, r)$



Bovenstaande figuur stelt de cirkel voor met middelpunt $M(2; 3)$ en straal $r = 2$. Dit is dus de cirkel $C((2; 3), 2)$.

Uit de formule voor de afstand tussen twee punten in het vlak (met Euclidische coördinaten) vinden we dat een punt $P(x;y)$ behoort tot de cirkel $C(M,r)$ met $M(x_0;y_0)$ als en alleen als

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=r\ .$$

Omdat beide leden van deze vergelijking positief zijn is deze voorwaarde geldig als en alleen als de gelijkheid tussen de kwadraten van beide leden geldt. We bekomen dan volgende vergelijking voor de cirkel $C(M,r)$:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2\ .$$

Deze vergelijking zie je ook ingevuld in de tekening.

Voorbeeld 1 De vergelijking van de cirkel met middelpunt $M(1;4)$ en straal 5 is

$$(x-1)^2+(y-4)^2=25\ .$$

Voorbeeld 2 De vergelijking van de cirkel met middelpunt $O(0;0)$ en straal 4 is

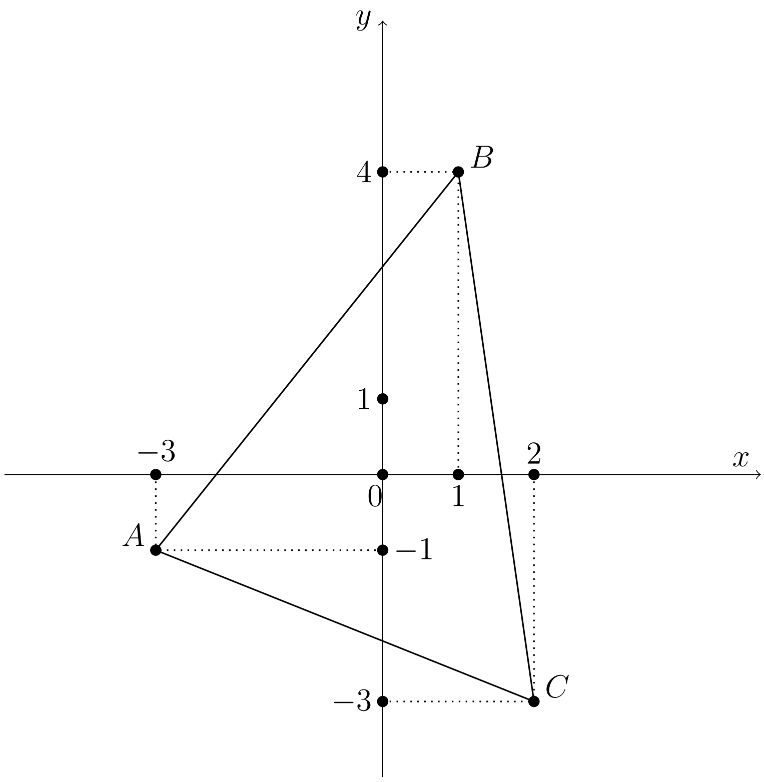
$$x^2+y^2=16\ .$$

Voorbeeld 3 De goniometrische cirkel is de cirkel met middelpunt $O(0;0)$ en straal 1. De vergelijking van de goniometrische cirkel is

$$x^2+y^2=1\ .$$

Stel dat C een cirkel is met middelpunt M en P een punt C. De raaklijn T aan C in P staat loodrecht op de straal MP. Dit kun je gebruiken om de vergelijking op de stellen van een raaklijn aan een cirkel.

Voorbeeld 4 Δ is de driehoek met hoekpunten $A(-3;-1)$, $B(1;4)$ en $C(2;-3)$. Stel een vergelijking op van de omgeschreven cirkel van Δ.



Omdat het middelpunt M het snijpunt is van de middelloodlijnen van Δ berekenen we eerst twee middelloodlijnen van Δ. De middelloodlijn van het lijnstuk $[A;B]$ is de verzameling van de punten $P(x;y)$ die evenver van A als van B liggen. Als we $d(P;A)^2 = d(P;B)^2$ in coördinaten uitdrukken bekomen we

$$(x+3)^2 + (y+1)^2 = (x-1)^2 + (y-4)^2 \ .$$

Door de machten uit te werken en te vereenvoudigen bekom je

$$8x + 10y - 7 = 0 \ .$$

Dit is de vergelijking van de middelloodlijn m_C van de zijde BC van Δ.

Door $d(P;A)^2 = d(P;C)^2$ in coördinaten uit te schrijven bekom je

$$(x+3)^2 + (y+1)^2 = (x-2)^2 + (y+3)^2 \ .$$

Hieruit bekom je

$$10x - 4y + 3 = 0 \ .$$

Dit is de vergelijking van de middelloodlijn m_B van de zijde AC van Δ.

De coördinaten van het middelpunt $M(x_0;y_0)$ van de omgeschreven cirkel van Δ is de oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} 8x + 10y - 7 = 0 \\ 10x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

Lossen we beide vergelijkingen op naar y dan bekomen we

$$\begin{cases} y = -\frac{8}{10}x + \frac{7}{10} \\ y = \frac{10}{4}x - \frac{3}{4} \end{cases}$$

Hieruit volgt dat x_0 de oplossing is van de vergelijking

$$-\frac{8}{10}x + \frac{7}{10} = \frac{10}{4}x - \frac{3}{4} \ .$$

Hieruit bekom je dat $x_0 = \frac{29}{66} = 0,44$. Vul je dit in $y = -\frac{8}{10}x + \frac{7}{10}$ is dan bekom je y_0, dus

$$y_0 = -\frac{8}{10}.\frac{29}{66} + \frac{7}{10} = \frac{23}{66} = 0,35 \ .$$

Het middelpunt M van de omgeschreven cirkel van Δ is $M(0,44;0,35)$.

De straal r van de omgeschreven cirkel is de afstand van M tot A:

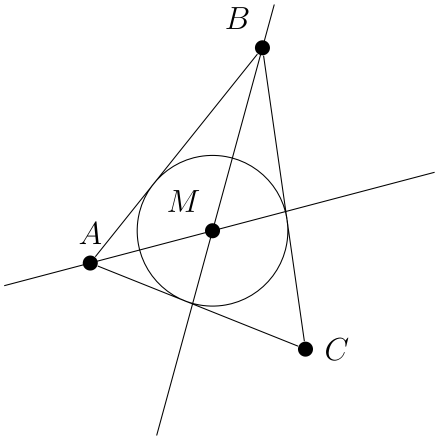
$$r = d(M;A) = \sqrt{\left(-3 - \frac{29}{66}\right)^2 + \left(-1 - \frac{23}{66}\right)^2} = 3,69 \ .$$

Je rekent zelf na dat dit ook $d(M;B)$ en $d(M;C)$ is.

De vergelijking van de omgeschreven cirkel is dus

$$(x - 0,44)^2 + (y - 0,35)^2 = 3,69^2 = 13,62 \ .$$

Een ingeschreven cirkel van een driehoek is een cirkel binnen de driehoek die raakt aan de drie zijden van de driehoek.



Het is de cirkel met maximale oppervlakte die binnen de driehoek ligt.

Noem M het middelpunt van die cirkel. Omdat iedere zijde van de driehoek een raaklijn aan de cirkel is en omdat de bijbehorende straal van cirkel (lijnstuk van M naar de zijde) loodrecht staat op de zijde is de afstand van M tot een zijde van de driehoek de straal r van de cirkel. Omdat deze afstand voor iedere zijde gelijk is ligt M evenver van iedere zijde van de driehoek. Hieruit bekom je dat M evenver ligt van iedere twee zijden van de driehoek en dus voor iedere twee zijden van de driehoek op een bissectrice ligt. Omdat M eveneens binnen de driehoek moet liggen moet M voor iedere twee zijden van driehoek gelegen zijn op de binnenbissectrice (diegene die de hoek van driehoek in twee gelijke delen verdeelt). Je vindt daarom M door twee binnenbissectrices van de driehoek te berekenen de daarvan het snijpunt te bepalen. De straal is dan de afstand van M tot eender welke zijde van de driehoek.

Voorbeeld 5 Voor de driehoek Δ uit het vorige voorbeeld stel je een vergelijking op van de ingesloten cirkel.

Omdat we binnenbissectrices van Δ (dus bissectrices van de zijden van Δ) gaan we eerst vergelijkingen van de zijden van de driehoek opstellen. Door de formule voor een vergelijking van een rechte door twee gegeven punten te gebruiken bekom je de volgende vergelijkingen:

$$AB \leftrightarrow 5x - 4y + 11 = 0$$

$$AC \leftrightarrow 2x + 5y + 11 = 0$$

$$BC \leftrightarrow 7x + y - 11 = 0$$

Een bissectrice tussen AB en AC is gegeven door volgende vergelijking

$$\frac{5x - 4y + 11}{\sqrt{25 + 16}} = \frac{2x + 5y + 11}{\sqrt{4 + 25}}$$

$$(5\sqrt{29} - 2\sqrt{41})x + (-4\sqrt{29} - 5\sqrt{41})y + (11\sqrt{29} - 11\sqrt{41}) = 0\ .$$

Je rekent na dat de richtingscoëfficiënt van deze bissectrice gelijk is aan 0,26. Deze bissectrice is dus een licht stijgende rechte. Dit komt overeen met de tekening, dit is dus een vergelijking van een binnenbissectrice b_A van de driehoek.

Een bissectrice van AB en BC is gegeven door volgende vergelijking

$$\frac{5x-4y+11}{\sqrt{25+16}}=\frac{7x+y-11}{\sqrt{49+1}}$$

$$(5\sqrt{50}-7\sqrt{41})x+(-4\sqrt{50}-\sqrt{41})y+(11\sqrt{50}+11\sqrt{41})=0\ .$$

Je rekent na dat de richtingscoëfficiënt van deze bissectrice gelijk is aan $-0,27$. Deze bissectrice is een licht dalende rechte. Dit komt niet overeen met de tekening, het is dus niet een binnenbissectrice van de driehoek.

De binnenbissectrice heeft daarom vergelijking

$$\frac{5x-4y+11}{\sqrt{25+16}}=-\frac{7x+y-11}{\sqrt{49+1}}$$

$$(5\sqrt{50}+7\sqrt{41})x+(-4\sqrt{50}+\sqrt{41})y+(11\sqrt{50}-11\sqrt{41})=0\ .$$

De coördinaten van het middelpunt $M(x_0;y_0)$ van de ingeschreven cirkel is de oplossing van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases}(5\sqrt{29}-2\sqrt{41})x+(-4\sqrt{29}-5\sqrt{41})y+(11\sqrt{29}-11\sqrt{41})=0\\(5\sqrt{50}+7\sqrt{41})x+(-4\sqrt{50}+\sqrt{41})y+(11\sqrt{50}-11\sqrt{41})=0\end{cases}$$

Na enig rekenwerk bekom je $M(-0,16;-0,25)$.

De straal r van de ingeschreven cirkel is de afstand van M tot de rechte AB. Je bekomt

$$r=\frac{|5.(-0,16)-4.(-0,25)+11|}{\sqrt{25+16}}=1,75\ .$$

Je rekent zelf na dat die ook de afstand van M tot de rechte AC en van M tot de rechte BC is.

De vergelijking van de ingeschreven cirkel is

$$(x+0,16)^2+(y+0,25)^2=1,75^2=3,06\ .$$

2.16 Vergelijking van een cirkel in het vlak - voorbeeld

Zie filmpje MOOC.

2.17 Test analytische meetkunde

Module 5

Vergelijkingen, Ongelijkheden, Stelsels en Matrices

0 Intro

Zie filmpje MOOC.

1 Vergelijkingen, ongelijkheden en stelsels

Inleiding

Het oplossen van vergelijkingen is een praktische wiskundige vaardigheid waarvan ondersteld wordt dat elke ingenieur ze beheerst. Op het eerste zicht lijkt vergelijkingen oplossen een spel met rare regeltjes bedacht door wereldvreemde leraars wiskunde. Zodra je echter gaat narekenen of een voorgestelde technische oplossing voor een probleem eigenlijk wel mogelijk is, iets wat in het Engels heel toepasselijk wordt aangeduid als “do the math”, behoort het oplossen van vergelijkingen tot de standaardactiviteiten.

Enkele voorbeelden:

- In de thermodynamica speelt de toestandsvergelijking van een ideaal gas (in de volksmond “de ideale gaswet” genoemd) een belangrijke rol. Deze vergelijking geeft voor een hoeveelheid (aantal mol n) ideaal gas het verband tussen druk P, temperatuur T en volume V bij thermisch evenwicht van het gas:

$$PV = nRT$$

R is een gekende constante.
Als het volume van de gasfles en de druk en temperatuur van het gas in de fles gekend zijn kan je de hoeveelheid gas in de fles berekenen door de vergelijking op te lossen naar de onbekende n.

- Uit de fysica weten we dat een voorwerp dat op tijdstip $t = 0$ op een hoogte h_0 wordt losgelaten zich na een valtijd t op een hoogte h zal bevinden gegeven door:

  $$h(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

  Door de hoogte gelijk aan nul te stellen bekomt men de vergelijking:

  $$h_0 - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

  Oplossen van deze vergelijking naar de onbekende t geeft de tijd die het voorwerp nodig heeft om de grond te bereiken.

Bij sommige toepassingen, zoals bijvoorbeeld het doorrekenen van elektrische netwerken, komt men meerdere vergelijkingen met meerdere onbekenden tegen waarvoor men een oplossing zoekt die moet voldoen aan alle vergelijkingen tegelijkertijd. In zo een geval spreekt men van het oplossen van een stelsel van vergelijkingen.

1.1 Definities

Definitie Een vergelijking drukt uit dat twee wiskundige uitdrukkingen aan elkaar gelijk zijn door een gelijkheidsteken tussen de uitdrukkingen te plaatsen.

Voorbeeld 1

$$5x^3 + 2x = 8x^2 + 17$$

De uitdrukking voor het gelijkheidsteken noemt met het linkerlid, de andere uitdrukking noemt men het rechterlid.

In een vergelijking staat altijd minstens één onbekende die met een letter wordt aangeduid. Dikwijls wordt hiervoor de letter x gebruikt maar een onbekende kan met eender welke letter worden aangeduid. Het oplossen van een vergelijking komt erop neer dat je die waarden voor de onbekende (of onbekenden) zoekt waarvoor het linkerlid inderdaad gelijk is aan het rechterlid.

Definitie In deze nota's beperken we ons tot **veeltermvergelijkingen**, dat zijn vergelijkingen waarbij zowel het rechterlid als het linkerlid veeltermen zijn, zoals in het voorbeeld hierboven.

Er bestaan echter ook andere vergelijkingen.

Voorbeeld 2 De vergelijkingen

$$3\sin(x+2) = x^3 - 4x - 1$$

en

$$\frac{1}{2}e^{-\pi y} - 4 = 37\cos(y^2+1)$$

zijn géén veeltermvergelijkingen.

Definitie De **graad van een veeltermvergelijking** is de hoogste macht van de onbekende die in de vergelijking voorkomt.

De manier waarop men een veeltermvergelijking oplost is verschillend naargelang de graad van de vergelijking.

Voorbeeld 3

$$8t - 2 = 0$$

is een veeltermvergelijking van de eerste graad in de onbekende t, en

$$h^{23} - 2h^{12} + \frac{17}{3}h^7 + 4h^3 = \pi h - \frac{\pi}{2}$$

is een veeltermvergelijking van de 23-ste graad in de onbekende h.

1.2 Eerstegraadsvergelijkingen

We zullen het oplossen van eerstegraadsvergelijkingen verduidelijken met enkele voorbeelden.

Voorbeeld 1

$$5x + 3 = 3x + 1$$

Het oplossen van de vergelijking komt er eigenlijk op neer dat je de vergelijking herschrijft op een zodanige manier dat je in één lid, en alleen daar, de onbekende hebt staan. Op die manier kan je de oplossing direct aflezen. Het herschrijven van de vergelijking kan je doen door op het linkerlid en het rechterlid steeds dezelfde bewerkingen uit te voeren, op die manier blijft de gelijkheid tussen linkerlid en rechterlid gelden.
In bovenstaande vergelijking kunnen we van beide leden $3x$ aftrekken:

$$5x + 3 \boldsymbol{- 3x} = 3x + 1 \boldsymbol{- 3x}$$

dit geeft

$$2x + 3 = 1$$

Vervolgens trekken we van beide leden 3 af:

$$2x + 3\mathbf{-3} = 1\mathbf{-3}$$

dit geeft

$$2x = -2$$

Om nu in het linkerlid alleen nog de onbekende over te houden kunnen we linkerlid en rechterlid delen door 2:

$$\frac{2x}{\mathbf{2}} = \frac{-2}{\mathbf{2}}$$

dit geeft

$$x = -1$$

als oplossing van de vergelijking.

Opmerking

- Het uitvoeren van dezelfde optelling of aftrekking op het linker- en rechterlid komt erop neer dat je termen van het ene lid naar het andere verplaatst. Hierbij moet je er wel op letten dat het teken van de term verandert bij overbrenging naar het andere lid.
- Het uitvoeren van dezelfde deling (of vermenigvuldiging) op linker- en rechterlid komt neer op het overbrengen van een factor naar het andere lid. Hierbij wordt een vermenigvuldiging een deling en omgekeerd.
- Soms wordt de oplossing van een vergelijking genoteerd als een verzameling S. Voor het hierboven uitgewerkte voorbeeld schrijven we dan als oplossingenverzameling

$$S = \{-1\}$$

Voorbeeld 2

$$5y + 4 = 5y - 1$$

We gaan opnieuw op dezelfde manier te werk. We kunnen bijvoorbeeld de term $5y$ uit het rechterlid overbrengen naar het linkerlid:

$$5y + 4\mathbf{-5y} = -1$$

ofwel

$$4 = -1$$

Dit is natuurlijk onzin!
Er is geen enkele waarde voor y die ervoor kan zorgen dat $4 = -1$, deze vergelijking heeft geen oplossingen...
Dit kan men ook noteren door te schrijven dat de oplossingenverzameling leeg is:

$$S = \varnothing$$

Voorbeeld 3

$$2(x-4) = 7(3x-1)$$

De eerste stap is hier het uitwerken van de haakjes:

$$2(x-4) = 7(3x-1) \Leftrightarrow 2x - 8 = 21x - 7$$

Vervolgens verplaatsen we de -8 naar rechts (min wordt plus):

$$2x = 21x - 7 + 8 \Leftrightarrow 2x = 21x + 1$$

Nu verplaatsen we de $21x$ van rechts naar links (plus wordt min):

$$2x - 21x = 1 \Leftrightarrow -19x = 1$$

Dan brengen we -19 over naar het rechterlid (pas op: teken verandert niet!):

$$x = \frac{1}{-19} = -\frac{1}{19}$$

Onthoud Een goed stappenplan voor het oplossen van een eerstegraadsvergelijking is:

1. Reken alle haakjes uit.
2. Verplaats alle termen met onbekenden in naar een lid, alle termen zonder onbekenden naar het andere lid.
   - Elke bewerking die je links uitvoert, moet je rechts ook uitvoeren.
   - Termen kan je overbrengen door het teken te veranderen: min wordt plus, plus wordt min.
   - Factoren verplaats je door te delen of te vermenigvuldigen: een vermenigvuldiging wordt een deling en omgekeerd.

1.3 Oplossen van tweedegraadsvergelijkingen

Een tweedegraadsvergelijking wordt in de praktijk dikwijls vierkantsvergelijking of kwadratische vergelijking genoemd.

Algemene methode om een tweedegraadsvergelijking op te lossen

Een tweedegraadsvereglijking in de onbekende x is een vergelijking van de vorm

$$ax^2 + bx + c = 0$$

met a, b en c reële getallen, bovendien moet $a \neq 0$ zijn want anders hebben we een eerstegraadsvergelijking.
Om een dergelijke vergelijking op te lossen herschrijven we de vergelijking door ze te delen door a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Dit kan je ook schrijven als

$$(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

Dit kan je controleren door de term met de haakjes uit te werken volgens het merkwaardige product $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$.
De term met de onbekende wordt nu naar het linkerlid verplaatst en de termen zonder de onbekende naar het rechterlid:

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

ofwel

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Het berekenen van de vierkantswortel van linkerlid en rechterlid geeft

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dit is echter maar de helft van de oplossing. We zoeken immers die uitdrukkingen waarvan het kwadraat gelijk is aan $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, dit zijn zowel $+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ als $-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Vergelijk dit bijvoorbeeld met $\sqrt{9} = 3$ want $3^2 = 9$, maar er geldt ook $(-3)^2 = 9$ ... Als je dus de oplossingen zoekt van $y^2 = 9$ geeft dit $y = 3$ en $y = -3$.
We moeten dus rekening houden met de twee mogelijkheden:

$$x + \frac{b}{2a} = +\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ en } x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Deze eestegraadsvergelijkingen oplossen naar x geeft dan

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ en } x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

We vinden dus in principe **twee oplossingen** voor een tweedegraadsvergelijking.
Merk op dat de uitdrukking onder de vierkantswortel, $b^2 - 4ac$, een belangrijke rol speelt. Als deze uitdrukking groter dan nul is hebben we twee verschillende reële oplossingen, als deze uitdrukkig echter gelijk is aan nul dan zijn de twee oplossingen gelijk aan elkaar (praktisch gezien is er dan maar één reële oplossing), en als de uitdrukking kleiner is dan nul dan zijn er twee complexe oplossingen. Deze complexe oplossingen zijn bovendien elkaars complex toegevoegde. De tweedemachtswortels van een negatief reëel getal z zijn immers $\sqrt{|z|}i$ en $-\sqrt{|z|}i$.
De uitdrukking $b^2 - 4ac$ maakt dus een onderscheid (discrimineert) tussen de verschillende soorten oplossingen die mogelijk zijn. Men noemt deze uitdrukking dan ook de **discriminant**, meestal aangeduid met de Griekse hoofdletter delta Δ of soms ook met de hoofdletter D.

De algemene methode om een tweedegraadsvergelijking op te lossen kan dus worden samengevat als volgt:

Onthoud

- Schrijf de vergelijking in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b en c reële getallen)
- Bereken de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
- Ga na hoeveel oplossingen er zijn:
  - Als $\Delta > 0$ dan zijn er 2 verschillende reële oplossingen
  - Als $\Delta = 0$ dan is er 1 reële oplossing (de 2 oplossingen zijn gelijk aan elkaar)
  - Als $\Delta < 0$ dan zijn er twee complexe oplossingen die elkaars complex toegevoegde zijn
- De oplossingen worden gegeven door

  $$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ en } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

  Opmerking: In het geval dat $\Delta < 0$ kan men (moet niet) de oplossingen ook schrijven als

  $$x_1 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \text{ en } x_2 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Voorbeeld 1

$$x(4x+2)+4 = -3x+2$$

We schrijven deze vergelijking in de standaardvorm $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x(4x+2)+4 = -3x+2 \Leftrightarrow 4x^2+2x+4 = -3x+2 \Leftrightarrow 4x^2+5x+2 = 0$$

Het symbool $\Leftrightarrow$ betekent zoveel als "is equivalent met" of "als en slechts als".
We berekenen nu de discriminant:

$$\Delta = 5^2 - 4.4.2 = 25 - 32 = -7$$

Aangezien $\Delta < 0$ zijn er twee copmlex toegevoegde complexe oplossingen:

$$S = \frac{-5 + i\sqrt{7}}{8}, -\frac{5 + i\sqrt{7}}{8}$$

Voorbeeld 2

$$-4x^2 + 5x + 2 = 0$$

We berekenen de discriminant:

$$\Delta = 5^2 - 4.(-4).2 = 25 + 32 = 57$$

Er zijn dus twee verschillende oplossingen:

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{57}}{2.(-4)} \text{ en } x_2 = \frac{-5 - \sqrt{57}}{2.(-4)}$$

ofwel

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{57}}{8} \text{ en } x_2 = \frac{5 + \sqrt{57}}{8}$$

De oplossingenverzameling is

$$S = \{\frac{5 - \sqrt{57}}{8}, \frac{5 + \sqrt{57}}{8}\}$$

Opmerking Slordig zijn met haakjes veroorzaakt fouten... Gebruik haakjes en respecteer de regels om met haakjes te werken!

1.4 Speciale gevallen

Elke vergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ kan opgelost worden met de algemene methode met de discriminant. In sommige gevallen is het echter eenvoudiger om deze methode niet te gebruiken. We illustreren dit met enkele voorbeelden.

Voorbeeld 1

$$x^2 = 36$$

Dit is een tweedegraadsvergelijking in de meest eenvoudige vorm ($b = 0$): in het linkerlid staat alleen een term met de onbekende en in het rechtermlid staat alleen een getal. Om de onbekende te vinden trekken we van beide leden de vierkantswortel:

$$x = 6$$

Dit is zeker **een** oplossing want $6^2 = 36$. Maar er geldt ook dat $(-6)^2 = 36$... Dus heeft de vergelijking nog een tweede oplossing:

$$x = -6$$

De oplossingen van de vergelijking zijn dus $x_1 = +\sqrt{36}$ en $x_2 = -\sqrt{36}$.
Met de oplossingenverzameling wordt dit genoteerd als

$$S = \{-6, 6\}$$

Uiteraard had je hier ook de algemene methode kunnen gebruiken.
Door de oorspronkelijke vergelijking in de standaardvorm te zetten vinden we:

$$x^2 - 36 = 0$$

De discriminant is $\Delta = 0^2 - 4.1.(-36) = 144$.
De twee verschillende oplossingen zijn dan

$$x_1 = \frac{-0 + \sqrt{144}}{2.1} \text{ en } x_2 = \frac{-0 - \sqrt{144}}{2.1}$$

ofwel

$$x_1 = 6 \text{ en } x_2 = -6$$

Voorbeeld 2

$$3x^2 = 10x$$

We kunnen deze vergelijking oplossen door ze in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ te zetten:

$$3x^2 - 10x = 0$$

Hier is dus $a = 3$, $b = -10$ en $c = 0$.
We berekenen de discriminat:

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0 = 100 - 0 = 100$$

De twee oplossingen zijn dus:

$$x_1 = \frac{10 + \sqrt{100}}{2.3} \text{ en } x_2 = \frac{10 - \sqrt{100}}{2.3}$$

ofwel

$$x_1 = \frac{10}{3} \text{ en } x_2 = 0$$

Dit had echter veel eenvoudiger kunnen opgelost worden door de oorspronkelijke vergelijking te ontbinden in factoren:

$$3x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 10) = 0$$

De laatste vergelijking kan alleen maar nul zijn als $x = 0$ of $3x - 10 = 0$, met andere woorden de oplossingen zijn

$$x_1 = 0 \text{ en } x_2 = \frac{10}{3}$$

Voorbeeld 3

$$17(x - 1)(x + \pi) = 0$$

De kwadratische vergelijking is hier gegeven als een product van factoren waarin de onbekende x lineair voorkomt. In dit geval is het **niet** interessant om de haakjes uit te werken (het mag wel!). Het product kan alleen maar nul zijn als minstens één van de factoren nul is. Er is dus voldaan aan de vergelijking als $x - 1 = 0$ of $x + \pi = 0$.
De oplossingen zijn dus:

$$x_1 = 1 \text{ en } x_2 = -\pi$$

Oplossen van tweedegraadsvergelijkingen:

Onthoud

- Schrijf de vergelijking in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b en c reële getallen)
- Bereken de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
- Ga na hoeveel oplossingen er zijn:
  - Als $\Delta > 0$ dan zijn er 2 verschillende reële oplossingen
  - Als $\Delta = 0$ dan is er 1 reële oplossing (de 2 oplossingen zijn gelijk aan elkaar)
  - Als $\Delta < 0$ dan zijn er twee complexe oplossingen die elkaars complex toegevoegde zijn
- De oplossingen worden gegeven door

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ en } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Als $\Delta < 0$ dan zijn er twee imaginaire oplossingen voor $\sqrt{\Delta}$: $i\sqrt{|\Delta|}$ en $-i\sqrt{|\Delta|}$

Opmerking Respecteer de rekenregels voor haakjes, voor het optellen en vermenigvuldigen van breuken, enz... Denk niet dat je het sneller en beter kan op "jouw manier"!

1.5 Hogeregraadsvergelijkingen

Enkele nuttige weetjes over veeltermvergelijkingen in het algemeen

Uit de theoretische algebra weet men dat:

- een veeltermvergelijking van de $n-$de graad met reële coëfficiënten n complexe oplossingen heeft. Zo kan je op het zicht weten dat bijvoorbeeld de vergelijking $y^5 - \pi y^2 + 4y - 28 = 0$ vijf complexe oplossingen heeft. Denk er aan dat een reëel getal ook een complex getal is!
- een veeltermvergelijking met een oneven graad en reële coëfficiënten heeft altijd minstens één reële oplossing (de vergelijking uit het voorbeeld heeft dus zeker 1 reële oplossing).
- voor vergelijkingen van de derde en vierde graad bestaan er algemene oplossingsmethoden zoals voor tweedegraadsvergelijkingen (deze methoden zijn echter zeer langdradig en ingewikkeld en worden in de praktijk niet zoveel gebruikt).
- voor vergelijkingen vanaf de vijfde graad bestaan er geen algemene theoretische oplossingsmethoden (dergelijke vergelijkingen worden numeriek opgelost, meestal met behulp van een computer of rekenmachine).

In een aantal speciale gevallen is het echter mogelijk om een hogeregraadsvergelijking toch met de hand op te lossen. Deze gevallen bespreken we hier.

Substitutiemethode

Sommige hogeregraadsvergelijkingen kunnen opgelost worden door een slimme substitutie. Neem bijvoorbeeld de volgende vierdegraadsvergelijking:

$$x^4 + 3x^2 - 1 = 0$$

Door de substitutie $y = x^2$ toe te passen wordt deze vergelijking omgezet in een tweedegraadsvergelijking in de onbekende y.

$$y^2 + 3y - 1 = 0$$

Deze vergelijking kunnen we oplossen!
We berekenen de discriminant:

$$\Delta = 3^2 - 4.1.(-1) = 9 + 4 = 13$$

Aangezien $\Delta > 0$ zijn er 2 verschillende oplossingen **voor de tweedegraadsvergelijking**.

$$y_1 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \text{ en } y_2 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$$

Dit zijn echter niet de oplossingen van de oorspronkelijke vierdegraadsvergelijking in de onbekende x. Het verband tussen de oplossingen van de vierdegraadsvergelijking en de waarden y_1 en y_2 wordt gegeven door de vergelijking $y = x^2$. We zoeken dus die waarden voor x waarvoor het kwadraat y_1 en y_2 oplevert.

$$x_1 = \sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}, x_2 = -\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}, x_3 = i\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}, x_4 = -i\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}$$

De oplossingenverzameling is

$$S = \{\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}, -\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}, i\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}, -i\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}\}$$

Ontbinden in factoren

Beschouw de volgende derdegraadsvergelijking

$$5x^3 - 2x^2 + 3x = 0$$

Het linkerlid van deze vergelijking kunnen we schrijven als een product

$$x(5x^2 - 2x + 3) = 0$$

Aan deze vergelijking kan alleen maar voldaan worden als $x = 0$ of $5x^2 - 2x + 3 = 0$.
We hebben dus al één oplossing gevonden:

$$x_1 = 0$$

Om de eventuele andere oplossingen (maximaal drie) te vinden lossen we de vergelijking $5x^2 - 2x + 3 = 0$ op.
We berekenen de discriminant: $\Delta = (-2)^2 - 4.5.3 = 4 - 60 = -56 < 0$. Er zijn dus twee complexe oplossingen voor $5x^2 - 2x + 3 = 0$.

De oplossingenverzameling is

$$S = \{0, \frac{1+i\sqrt{14}}{5}, \frac{1-i\sqrt{14}}{5}\}$$

Onthoud Er bestaan geen algemene methoden om vergelijkingen van vijfde graad of hoger met de hand op te lossen. Deze methoden bestaan wel voor derdegraadsvergelijkingen en vierdegraadsvergelijkingen maar deze methoden zijn zeer omslachtig en worden daarom weinig gebruikt in de praktijk.

In een aantal speciale gevallen kunnen hogeregraadsvergelijkingen echter opgelost worden met één van de volgende technieken:

- **Substitutiemethode**
  1. Als de onbekende x is vervang dan x^2 door een andere onbekende (zoals y) om een kwadratische vergelijking te bekomen.
  2. Los deze vergelijking op naar y.
  3. Los de vergelijkingen $y = x^2$ op naar de onbekende x.
- **Ontbinden in factoren**
  1. Zet alle termen in het linkerlid zodat het rechterlid 0 is.
  2. Ontbind het linkerlid in factoren door af te zonderen.
  3. De oplossingen worden gevonden door elke factor gelijk te stellen aan 0.

Opmerking Respecteer de rekenregels voor haakjes, voor het optellen en vermenigvuldigen van breuken, enz...

1.6 Stelsels van vergelijkingen

Inleiding

Definitie Een stelsel van vergelijkingen bestaat uit minstens twee vergelijkingen in minstens twee onbekenden. Het bepalen van de onbekenden die tegelijkertijd oplossing zijn voor al de vergelijkingen van het stelsel noemt men het oplossen van het stelsel van vergelijkingen.

Als het stelsel van vergelijkingen alleen bestaat uit veeltermvergelijkingen van de eerste graad noemt men dit stelsel **een lineair stelsel** of **een stelsel van lineaire vergelijkingen**.
Een voorbeeld van een lineair stelsel van drie vergelijkingen in drie onbekenden x, y en z:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 0 \\ 3x + 2y = 5 \\ -x - 7y + z = -1 \end{cases}$$

In de ingenieurswereld is het niet ongewoon om stelsels van tientallen vergelijkingen in tientallen onbekenden tegen te komen.

In de algebra toont men aan er voor een stelsel van eerstegraadsvergelijkkingen drie mogelijkheden zijn:

- Het stelsel is oplosbaar en heeft juist één oplossing.
- Het stelsel is oplosbaar en heeft oneindig veel oplossingen.

- Het stelsel heeft geen oplossingen.

In deze cursus beperken we ons tot het oplossen van stelsels van twee lineaire vergelijkingen. Voor dergelijke eenvoudige stelsels wordt gebruik gemaakt van de **substitutiemethode**.

De substitutiemethode toegepast bij een stelsel van twee lineaire vergelijkingen werkt als volgt:

- Kies één van de vergelijking en los deze op naar één van de onbekenden, hierbij doe je net alsof je de andere onbekende kent.
- Substitueer nu de oplossing van de ene vergelijking in de andere vergelijking, je bekomt nu een eerstegraadsvergelijking in één onbekende.
- Los de bekomen vergelijking op en substitueer de gevonden onbekende in de andere vergelijking, dit levert een eerstegraadsvergelijking in de nog te vinden onbekende.
- Los de overblijvende vergelijking op.
- De gevonden oplossing(en) zijn oplossing voor allebei de vergelijkingen van het stelsel. Controleer dit door de waarden te substitueren!

We demonstreren de substitutiemethode met enkele voorbeelden.

Voorbeeld 1

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

We kiezen bijvoorbeeld de eerste vergelijking en lossen deze op naar de onbekende y waarbij we net doen alsof x een gekend getal is:

$$2x + y = 0 \Leftrightarrow y = -2x$$

We substitueren nu $y = -2x$ in de tweede vergelijking en lossen de nieuwe vergelijking op naar x:

$$x - 3(-2x) + 1 = 0 \Leftrightarrow x + 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow 7x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{7}$$

We substitueren de gevonden x nu terug in de eerste vergelijking $y = -2x$:

$$y = -2(-\frac{1}{7}) \Leftrightarrow y = \frac{2}{7}$$

De oplossing voor het stelsel is dus

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{7} \\ y = \frac{2}{7} \end{cases}$$

Controle door deze waarden voor x en y in het oorspronkelijke stelsel te substitueren:

$$\left\{\begin{array}{l} 2(-\frac{1}{7}) + \frac{2}{7} = 0 \\ -\frac{1}{7} - 3(\frac{2}{7}) + 1 = 0 \end{array}\right.$$

Voorbeeld 2

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = 22 \end{array}\right.$$

Soms wordt om de zaken overzichtelijk te houden bij elke stap het volledige stelsel opnieuw opgeschreven. Dit vraagt heel wat extra schrijfwerk maar het kan wel helpen om fouten te vermijden.
We kiezen bijvoorbeeld de eerste vergelijking en lossen deze op naar x:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = 22 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x = 4 - 2y \\ 2x - 3y = 22 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{4-2y}{3} \\ 2x - 3y = 22 \end{array}\right.$$

Vervolgens substitueren we

$$x = \frac{4 - 2y}{3}$$

in de tweede vergelijking:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{4-2y}{3} \\ 2(\frac{4-2y}{3}) - 3y = 22 \end{array}\right.$$

Dit geeft dan:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{4-2y}{3} \\ \frac{2.4}{3} - \frac{2.2}{3}y - 3y = 22 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{4-2y}{3} \\ \frac{8}{3} - \frac{4}{3}y - 3y = 22 \end{array}\right.$$

en

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{4-2y}{3} \\ \frac{-4-9}{3}y = \frac{66-8}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{4-2y}{3} \\ -13y = 58 \end{array}\right.$$

dus

$$y = -\frac{58}{13}$$

Dit substitueren we nu in de eerste vergelijking:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{4-2(-\frac{58}{3})}{3} \\ y = -\frac{58}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{4+\frac{116}{13}}{3} \\ y = -\frac{58}{13} \end{array}\right.$$

Uitwerken geeft:

$$\begin{cases} x = \frac{\frac{52+116}{13}}{3} \\ y = -\frac{58}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{56}{13} \\ y = -\frac{58}{13} \end{cases}$$

Controleer zelf de correctheid van de gevonden oplossing door x en y te substitueren in het oorspronkelijke stelsel van vergelijkingen.

Opmerking Hopelijk heb je gemerkt dat het zo goed als onmogelijk is dergelijke berekeningen uit te voeren zonder op een correcte manier met de rekenregels voor haakjes en breuken om te springen...

Voorbeeld 3

$$\begin{cases} \pi x - 5y = 0 \\ 2\pi x - 10y = \frac{\pi}{17} \end{cases}$$

De eerste vergelijking oplossen naar x geeft:

$$x = \frac{5}{\pi} y$$

Dit substitueren in de tweede vergelijking en uitwerken geeft:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{\pi} y \\ 2\pi(\frac{5}{\pi} y) - 10y = \frac{\pi}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{\pi} y \\ 10y - 10y = \frac{\pi}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{\pi} y \\ 0 = \frac{\pi}{17} \end{cases}$$

De tweede vergelijking van het stelsel is duidelijk onzin, er bestaat geen x en y die ervoor kan zorgen dat deze vergelijking klopt.

Het stelsel van vergelijkingen heeft geen oplossingen!

Voorbeeld 4

$$\begin{cases} 84x - 210y = 21 \\ 2x - 5y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

We lossen de tweede vergelijking op naar y:

$$2x - 5y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2x - \frac{1}{2}}{5} = y \Leftrightarrow y = \frac{4x - 1}{10}$$

Substitutie in de eerste vergelijking geeft dan

$$\begin{cases} 84x - 210(\frac{4x-1}{10}) = 21 \\ y = \frac{4x-1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 84x - 84x + 21 = 21 \\ y = \frac{4x-1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21 = 21 \\ y = \frac{4x-1}{10} \end{cases}$$

Hier zien we dat de eerste vergelijking altijd geldig is, welke waarden voor x en y men ook kiest. Alleen de tweede vergelijking legt beperkingen op aan x en y, namelijk dat om een oplossing van het stelsel te hebben het verband tussen x en y moet gegeven worden door

$$y = \frac{4x-1}{10}$$

Je kan dus ofwel x, ofwel y willekeurig kiezen. Als je de andere onbekende berekent met de tweede vergelijking zijn x,y een oplossing voor het stelsel.

Dit betekent dat het stelsel een oneindig aantal oplossingen heeft!

De oplossingen worden gegeven door

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{4x-1}{10} \end{cases}$$

Onthoud

- Kies één van de vergelijking en los deze op naar één van de onbekenden, hierbij doe je net alsof je de andere onbekende kent.
- Substitueer nu de oplossing van de ene vergelijking in de andere vergelijking, je bekomt nu een eerstegraadsvergelijking in één onbekende.
- Los de bekomen vergelijking op en substitueer de gevonden onbekende in de andere vergelijking, dit levert een eerstegraadsvergelijking in de nog te vinden onbekende.
- Los de overblijvende vergelijking op.
- De gevonden oplossing(en) zijn oplossing voor allebei de vergelijkingen van het stelsel. Controleer dit door de waarden te substitueren!

Opmerking Respecteer de rekenregels voor haakjes, voor het optellen en vermenigvuldigen van breuken, enz...

Tips:

- Let goed op bij substitutie dat je de hele uitdrukking substitueert, gebruik haakjes!
- Je mag een vergelijking apart afhandelen, maar vergeet niet op het einde alles terug in het stelsel te zetten!

1.7 Ongelijkheden

Inleiding

Men bekomt een ongelijkheid door in een vergelijking het “is gelijk aan” teken te vervangen door één van de volgende ongelijkheidstekens:

- $<$ "is kleiner dan"
- $>$ "is groter dan"
- $\leq$ "is kleiner dan of gelijk aan"
- $\geq$ "is groter dan of gelijk aan"

Je kan ongelijkheden op een soortgelijke manier manipuleren als vergelijkingen.

- Door bij het linkerlid en rechterlid van een ongelijkheid hetzelfde positieve of negatieve getal op te tellen blijft de ongelijkheid geldig. Door bijvoorbeeld in beide leden van de ongelijkheid $x + 1 > 8$ het getal 2 op te tellen vinden we $x + 3 > 10$ en door het getal 2 af te trekken bekomt men $x - 1 > 6$. Dit zijn drie equivalente ongelijkheden met dezelfde oplossingen: $x > 7$.
- Door beide leden van een ongelijkheid met hetzelfde (van nul verschillende) positieve getal te vermenigvuldigen bekomt men een equivalente ongelijkheid, door bijvoorbeeld $x + 1 > 8$ te vermenigvuldigen met 10 bekomt men $10x + 10 > 80$ met nog steeds dezelfde oplossingen $x > 7$.
- **Pas op!** Als men een ongelijkheid vermenigvuldigt met een negatief getal dan keert het ongelijkheidsteken om! Nemen we weer hetzelfde voorbeeld $x+1 > 8$ en vermenigvuldigen we deze uitdrukking met -1 dan bekomen we $-x-1 < -8$. Alleen op deze manier blijven de oplossingen hetzelfde: $x > 7$.

In deze cursus zullen we met behulp van een aantal voorbeelden illustreren hoe men ongelijkheden van de eerste graad kan oplossen.

Voorbeeld 1

$$5x - 7 < 2x + 1$$

Door bij beide leden $2x$ af te trekken en 7 bij te tellen vinden we

$$3x < 8$$

Delen door 3 geeft

$$x < \frac{8}{3}$$

Deze ongelijkheid heeft dus oneindig veel oplossingen!

Deze oplossingen worden soms ook genoteerd met de oplossingenverzameling:

$$S =]-\infty, \frac{8}{3}[$$

Met deze notatie wordt de verzameling van alle getallen tussen $-\infty$ en $\frac{8}{3}$ aangegeven, merk op dat $-\infty$ en $\frac{8}{3}$ niet tot de oplossingenverzameling behoren (dit wordt aangegeven door de naar buiten wijzende vierkante haakjes).

Voorbeeld 2

$$5x - 7 < 8x + 1$$

Door bij beide leden $8x$ af te trekken en 7 bij te tellen vinden we

$$-3x < 8$$

Delen door -3 geeft

$$x > -\frac{8}{3}$$

Let op! Het "$<$"-teken wordt het "$>$"-teken!

De oplossingenverzameling wordt genoteerd als

$$S =]-\frac{8}{3}, +\infty[$$

Voorbeeld 3

$$17x + 7 \geq 17x + 3\pi$$

Van beide leden $17x$ aftrekken geeft

$$7 \geq 3\pi$$

Er is geen enkele x die ervoor kan zorgen dat hieraan voldaan is. Deze ongelijkheid heeft geen oplossingen. De oplossingenverzameling is leeg:

$$S = \varnothing$$

Voorbeeld 4

$$\frac{x}{3} + 1 \leq -\frac{5}{7}x - 12$$

Vermenigvuldigen met 3 geeft

$$x + 3 \leq -\frac{15}{7}x - 36$$

Het wegwerken van de term met x in het rechterlid en de constante term in het linkerlid geeft

$$\frac{22}{7}x \leq -39$$

Vermenigvuldigen met $\frac{7}{22}$ geeft tenslotte

$$x \leq -\frac{273}{22}$$

De oplossingenverzameling is

$$S =]-\infty, -\frac{273}{22}]$$

Merk op dat het naar binnen wijzende vierkante haakje aanduidt dat $-\frac{273}{22}$ wel degelijk tot de oplossingenverzameling behoort.

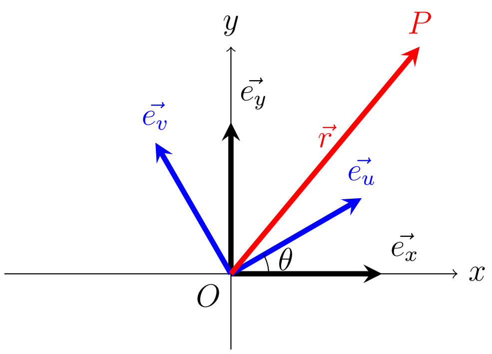
Onthoud

- Ongelijkheden van de eerste graad lost men op door de onbekende af te zonderen op een soortgelijke manier als bij veeltermvergelijkingen van de eerste graad.
- Let op dat bij het vermenigvuldigen van de ongelijkheid met een negatief getal “groter dan (of gelijk aan)” wordt omgezet in “kleiner dan (of gelijk aan)” en omgekeerd.
- Een ongelijkheid heeft ofwel oneindig veel oplossingen ofwel geen oplossingen.

2 Matrices

Inleiding

Stel dat je een computerspel speelt en je op een beeldscherm, of eventueel door een virtual reality headset, naar een door een computer gegenereerd landschap kijkt. Kijk je in deze wereld een beetje naar links of naar rechts dan berekent de computer hoe het landschap eruit ziet in je nieuwe kijkrichting en je ziet de virtuele wereld als het ware rond je gezichtspunt roteren. Misschien heb je er nog niet bij stilgestaan maar bij dit soort zaken wordt stevig gebruikt gemaakt van wiskunde.
We kunnen een idee krijgen van hoe dit in zijn werk gaat door ons in eerste instantie te beperken tot een twee dimensionale situatie. In de figuur is een punt P voorgesteld waarvan de positie in het vlak is vastgelegd door een plaatsvector $\vec{r}$. Deze plaatsvector kan voorgesteld worden ten opzichte van verschillende basissen.



In de figuur worden twee orthonormale basissen (m.a.w. basissen van loodrecht op elkaar staande éénheidsvectoren) gebruikt waarbij de basis $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v\}$ over een hoek θ is geroteerd ten opzichte van de basis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$.
De plaatsvector van het punt P wordt ten opzichte van de basis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ geschreven als

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$$

en ten opzichte van de basis $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v\}$ als

$$\vec{r} = u\vec{e}_u + v\vec{e}_v$$

Om te beschrijven wat er gebeurt bij een rotatie van ons referentiestelsel over een hoek θ moeten we het verband vinden tussen de coördinaten van het punt P in de twee referentiestelsels, met andere woorden we moeten het verband vinden tussen de componenten van $\vec{r}$ ten opzichte van de basis $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v\}$ en ten opzichte van de basis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$.

Door te projecteren kunnen we de componenten van de éénheidsvectoren van de basis $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v\}$ schrijven ten opzichte van de basis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$.

$$\begin{cases} \vec{e}_u = \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y \\ \vec{e}_v = -\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y \end{cases}$$

Omgekeerd kunnen we de componenten van de basisvectoren $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ ten opzichte van de basis $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v\}$ neerschrijven als volgt:

$$\begin{cases} \vec{e}_x = \cos\theta\vec{e}_u - \sin\theta\vec{e}_v \\ \vec{e}_y = \sin\theta\vec{e}_u + \cos\theta\vec{e}_v \end{cases}$$

Door substitutie in $\vec{r} = u\vec{e}_u + v\vec{e}_v$ vinden we

$$\vec{r} = u(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y) + v(-\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y)$$

ofwel

$$\vec{r} = (u\cos\theta - v\sin\theta)\vec{e}_x + (u\sin\theta + v\cos\theta)\vec{e}_y$$

De coördinaten van het punt P in het oorspronkelijke referentiestelsel worden dus als volgt geschreven in functie van de coördinaten van het punt P in het nieuwe referentiestelsel:

$$\begin{cases} x = u\cos\theta - v\sin\theta \\ y = u\sin\theta + v\cos\theta \end{cases}$$

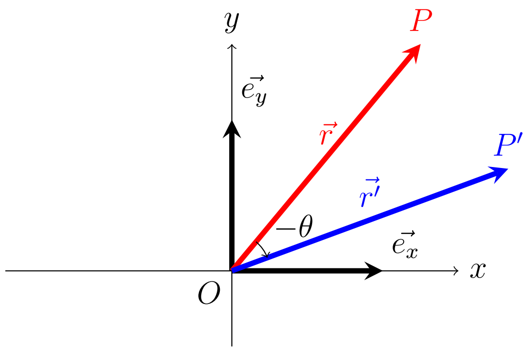
Op dezelfde manier vindt men door substitutie de coördinaten van het punt P in het nieuwe referentiestelsel, uitgedrukt in functie van de coördinaten van P in het oude referentiestelsel:

$$\begin{cases} u = x\cos\theta + y\sin\theta \\ v = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Deze uitdrukkingen kan men ook op een alternatieve, elegante manier neerschrijven met behulp van getallenschema's. De coördinaten in een referentiestelsel schrijft met in een kolom, een **kolommatrix** en het verband tussen de coördinaten in beide referentiestelsels drukt met uit met een **coördinatentransformatiematrix**.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

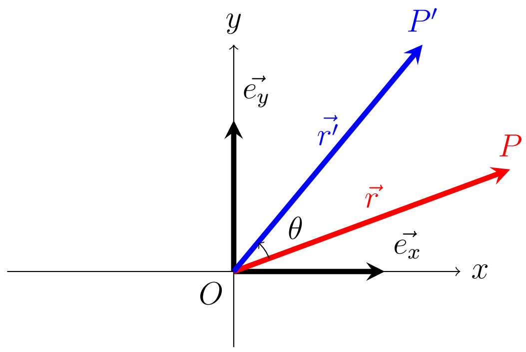
Een soortgelijke, maar verschillende situatie wordt in de volgende figuur voorgesteld. Een vector $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ roteert over een hoek $-\theta$ (dus gemeten in wijzerszin), na deze rotatie wordt de vector, die we nu $\vec{r'}$ noemen, gegeven door $\vec{r'}$=$x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y$.



De componenten van $\vec{r'}$ worden nu uitgedrukt in functie van de componenten van $\vec{r}$ met

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

In de volgende figuur is de rotatie van een vector $\vec{r}$ over een hoek θ in tegenwijzerszin voorgesteld.



De transformatie voor deze rotatie vinden we door in de bovenstaande uitdrukking θ te vervangen door $-\theta$. We vinden dan:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

De matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

wordt de rotatiematrix voor rotatie over een hoek θ genoemd.

Matrices zijn een handige manier om veranderingen van referentiestelsel, coördinatentransformaties, te beschrijven.
Daarnaast is er een hele familie bewerkingen, lineaire transformaties, waarbij een vector via een matrixbewerking wordt omgezet in een nieuwe vector. Typisch voorbeeld is het roteren van een vector zoals hierboven beschreven.

In dit hoofdstuk zullen we een aantal definities en eigenschappen van matrices bespreken en zullen we rekenwerk met matrices inoefenen met het oog op praktische toepassingen. Alle eigenschappen die besproken worden kunnen wiskundig bewezen worden maar dat gaan we in dit hoofdstuk dus niet doen.

2.1 Definities

Definitie van een matrix

Definitie Een $m \times n$ matrix A is een rechthoekig getallenschema waarin reële en/of complexe getallen in m rijen en n kolommen zijn gerangschikt. Het getal op de i-de rij en j-de kolom wordt symbolisch weergegeven als a_{ij}.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Enkele veel voorkomende speciale matrices

- Een rijmatrix

  Een matrix A met 1 rij en n kolommen wordt een $1xn$ matrix of rijmatrix genoemd.

  $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

- Een kolommatrix

  Een matrix A met m rijen en 1 kolom wordt een $mx1$ matrix of kolommatrix genoemd.

  $$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

- Een vierkante matrix

  Een matrix met evenveel rijen als kolommen wordt een vierkante matrix genoemd.
  De onderstaande matrix A is een $n \times n$ matrix.

  $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Een diagonaalmatrix

  Een vierkante matrix A waarin alle getallen die niet op de diagonaal liggen nul zijn ($a_{ij} = 0$ als $i \neq j$) en minstens één getal op de diagonaal verschillend is van nul (voor minstens 1 getal a_{ii} geldt $a_{ii} \neq 0$) noemt men een diagonaalmatrix.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Een driehoeksmatrix

  Een driehoeksmatrix is een vierkante matrix waarbij alle elementen onder de diagonaal nul zijn. De overige elementen zijn niet allemaal nul.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Een symmetrische matrix

  Een vierkante matrix A waarbij de diagonaal een spiegellijn vormt (m.a.w. voor alle $a_{ij} \in A$ geldt $a_{ij} = a_{ji}$) is een symmetrische matrix.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Een éénheidsmatrix

  Een diagonaal matrix waarbij alle getallen op de diagonaal gelijk zijn aan één (alle $a_{ii} = 1$) is een éénheidsmatrix I.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- Een nulmatrix

  Een $m \times n$ matrix waarin alle $a_{ij} = 0$ is een nulmatrix O.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Opmerking De nulmatrix is niet noodzakelijk een vierkante matrix.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots$$

worden allemaal nulmatrix genoemd.

2.2 Bewerkingen met matrices

Transponeren van een matrix

De getransponeerde A^t van een matrix A vindt men door de rijen en kolommen van A om te wisselen.

Voorbeeld 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 0 & 8 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Voor een symmetrische matrix B geldt dat $B^t = B$.

Voorbeeld 2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

De getransponeerde van een rijmatrix is een kolommatrix en omgekeerd.

Voorbeeld 3

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 84 & -1 \end{pmatrix} \quad C^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 84 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Product van een matrix met een getal

Het product van een $m \times n$ matrix A met een reëel of complex getal λ is een nieuwe $m \times n$ matrix B die men vindt door elk element a_{ij} van de matrix te vermenigvuldigen met λ.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda_{12} & \lambda a_{13} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \lambda a_{m3} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Optellen van matrices

Het optellen van twee matrices A en B is alleen gedefiniëerd als het aantal rijen van beide matrices gelijk is en als het aantal kolommen van beide matrices gelijk is. In dat geval is de som een matrix C met hetzelfde aantal rijen en kolommen als A en B die men als volgt vindt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{m3} + b_{m3} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Voorbeeld 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A + B = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Voorbeeld 5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

De som $A + C$ is niet gedefiniëerd.

Vermenigvuldiging van twee matrices

Het product van een matrix A met een matrix B is alleen gedefiniëerd als het aantal kolommen van de eerste matrix A gelijk is aan het aantal rijen van de tweede matrix B.

In dat geval geldt dat het product van de $m \times n$ matrix A met de nxp matrix B een nieuwe matrix $C = AB$ is met m-rijen en p-kolommen.
Elk element c_{ij} van de productmatrix C wordt gegeven door:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

m.a.w. c_{ij} wordt gevonden door het eerste element van de i-de rij van A te vermenigvuldigen met het eerste element van de j-de kolom van B, het tweede element van de i-de rij van A te vermenigvuldigen met het tweede element van de j-de kolom van B, het derde element van de i-de rij van A te vermenigvuldigen met het derde element van de j-de kolom van B, enz... en vervolgens al deze producten op te tellen.

Voorbeeld 6 Bereken de producten $C = AB$ en $D = BA$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Het aantal kolommen van A is gelijk aan het aantal rijen van B, het product AB is dus gedefiniëerd en is een $2x1$ matrix C

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 10 + 0 \cdot 12 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \\ 0 \cdot 10 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Het aantal kolommen van B is verschillend van het aantal rijen van A. Dit betekent dat het product $D = BA$ niet gedefiniëerd is.

Voorbeeld 7 Bereken de producten $C = AB$ en $D = BA$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Het aantal kolommen van A is gelijk aan het aantal rijen van B, het product AB is dus gedefiniëerd en is een $1x1$ matrix C

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} = 2$$

Het aantal kolommen van B is gelijk aan het aantal rijen van A, het product BA is dus gedefiniëerd en is een $3x3$ matrix D

$$D = BA = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 & 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 & 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Opmerking

- Bij het vermenigvuldigen van matrices geldt dus over het algemeen **NIET** dat $AB = BA$
- Het is zelfs **NIET** zo dat uit het feit dat het product van twee matrices $C = AB$ bestaat volgt dat het product BA ook bestaat.

2.3 Determinant

Inleiding

De determinant van een matrix is een getal dat via een welbepaalde procedure uit de elementen van een vierkante matrix kan berekend worden.
De determinant van een matrix is alleen **gedefiniëerd voor vierkante matrices**.

Determinant van een 1x1 matrix

De determinant van een 1x1 matrix A is het enige element van de matrix.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix} \quad detA = |a_{11}| = a_{11}$$

Determinant van een 2x2 matrix

De determinant van een $2x2$ matrix A wordt als volgt berekend:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Minor van een element van een vierkante matrix

De minor van een element a_{ij} van een vierkante matrix A is het getal dat men bekomt door in de matrix A de i-de rij en de j-de kolom te schrappen, en van de overblijvende matrix de determinant te berekenen.

Voorbeeld 1 We berekenen de minor van het element a_{13} van de matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

We schrappen de eerste rij en de derde kolom van A en berekenen de determinant van de overblijvende matrix.

$$minor(a_{13}) = det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$$

Cofactor van een element van een vierkante matrix

De cofactor van een element a_{ij} van een vierkante matrix A is het getal dat men bekomt door de minor van a_{ij} te vermenigvuldigen met $(-1)^{i+j}$

$$\text{cofactor}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} minor(a_{ij})$$

Voorbeeld 2 We berekenen de cofactor van het element a_{ij} van de bovenstaande matrix A

$$\text{cofactor}(a_{ij}) = (-1)^{1+3} minor(a_{13}) = minor(a_{13}) = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$$

Voorbeeld 3 Bereken de cofactor van het element $a_{23} = 8$ van de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

We schrappen de tweede rij en de derde kolom en berekenen de determinant van de resterende vierkante matrix.

$$\text{cofactor}(a_{23}) = (-1)^{2+3}(1.5 - 2.2) = (-1).1 = -1$$

Merk op dat in de berekening van de cofactor van a_{23} de waarde van a_{23}, in dit geval 8, geen enkele rol speelt.

Determinant van een $n \times n$ matrix

Om de determinant van een willekeurige $n \times n$ matrix te berekenen maken we gebruik van de ontwikkelingsformule van Laplace. Deze formule kan toegepast worden op eender welke rij of kolom van een $n \times n$ matrix, het resultaat is steeds de determinant van de matrix.

Toegepast op de i-de rij van de matrix noemt men dit **de ontwikkeling van de determinant naar de i-de rij**:

$$detA = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\text{cofactor}(a_{ik})$$

Toegepast op de j-de kolom noemt men dit **de ontwikkeling van de determinant naar de j-de kolom**:

$$detA = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\text{cofactor}(a_{kj})$$

Voorbeeld 4 Bereken de determinant van de volgende matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Oplossing: we passen ontwikkeling naar de eerste rij toe.

$$detA = 1(-1)^{1+1}det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + 2(-1)^{1+2}det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 0(-1)^{1+3}det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$detA = (4 - 2(8 - 9)) = 6$$

Voorbeeld 5 Bereken de determinant van de volgende matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & -5 \\ \pi & 0 & 3 & 11 \\ 0 & \pi^2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Oplossing: de matrix B is geen vierkante matrix, de determinant bestaat niet.

Voorbeeld 6 Bereken de determinant van de volgende matrix:

$$C = \begin{pmatrix} \pi & \pi^2 & \pi^3 & \pi^4 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oplossing: we passen ontwikkeling naar de eerste kolom toe.

$$detC = \pi(-1)^{1+1}det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Op de overblijvende determinant passen we opnieuw ontwikkeling naar de eerste kolom toe.

$$detC = \pi 3(-1)^{1+1}det \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$detC = \pi \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = 12\pi$$

Er geldt algemeen dat **de determinant van een driehoeksmatrix het product van de diagonaalelementen is**.

Eigenschappen van determinanten

Alle matrices die in deze paragraaf voorkomen worden ondersteld vierkante matrices te zijn.

Eigenschap 1 *De determinant van de getransponeerde van een matrix is hetzelfde als de determinant van de oorspronkelijke matrix.*

$$detA^t = detA$$

Eigenschap 2 *Als men twee rijen (of twee kolommen) van plaats wisselt in een matrix dat verandert de determinant van teken.*

Voorbeeld 7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad detA = 1$$

Wissel de eerste en tweede rij van plaats:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad detA' = 1(-1)^{1+2}det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad detA' = -1$$

Eigenschap 3 *Als de elementen van een rij (of kolom) van een matrix vermenigvuldigt worden met een getal λ dan wordt de determinant van de matrix vermenigvuldigt met λ.*

Voorbeeld 8

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad detB = 12 - 4 = 8$$

We vermenigvuldigen de eerste rij met $\lambda = 2$

$$B' = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad detB' = 24 - 8 = 16$$

Eigenschap 4 *Als men de elementen van een rij (kolom) van een matrix vermenigvuldigt met een getal $\lambda \neq 0$ en deze vervolgens optelt bij de elementen van een andere rij (kolom) dan verandert de waarde van de determinant niet.*

Voorbeeld 9 We vertrekken opnieuw van de matrix B uit het vorige voorbeeld. We vermenigvuldigen nu de eerste rij met 2 en tellen deze rij op bij de tweede rij.

$$B'' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \quad detB'' = 24 - 16 = 8$$

Eigenschap 5 *De determinant van een matrix met een nulrij (nulkolom) is nul.*

Voorbeeld 10

$$C = \begin{pmatrix} \pi & \pi + 1 & \pi + 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \pi - 1 & \pi & \pi + 1 \end{pmatrix}$$

De determinant ontwikkelen naar de tweede rij geeft onmiddellijk $detC = 0$

Voorbeeld 11 Als twee rijen (kolommen) van een matrix gelijk zijn dan is de determinant nul.

Voorbeeld 12

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 3 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad detD = 1det \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 1det \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + 8det \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$detD = 0 + 8(6 - 6) = 0$$

Eigenschap 6 *Als twee rijen (kolommen) van een matrix evenredig zijn met elkaar dan is de determinant nul.*

Voorbeeld 13 de tweede rij is drie maal de eerste rij.

$$E = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 30 \end{pmatrix} \quad detE = 150 - 150 = 0$$

Eigenschap 7 *Als een rij (kolom) van een matrix een lineaire combinatie is van andere rijen (kolommen) van de matrix dan is de determinant nul.*

Voorbeeld 14 De tweede rij is de derde rij waarbij twee keer de eerste rij is opgeteld. We ontwikkelen naar de derde rij.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 10 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad detF = 4det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} + 4det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$
$$detF = 4(20-12) + 4(4-12) = 4(8-8) = 0$$

Eigenschap 8 *Als A en B beide $n \times n$ matrices zijn dan geldt:*

$$det(AB) = (detA)(detB)$$

Voorbeeld 15

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$detA = 8 \quad detB = -8 \quad (detA)(detB) = -64$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2+18 & 4+12 \\ 4+60 & 8+40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 16 \\ 64 & 48 \end{pmatrix} \quad det(AB) = 20.48 - 64.16$$
$$det(AB) = 16(20.3 - 64) = 16(-4) = -64$$

2.4 Inverse van een matrix

Reguliere en singuliere matrix

Een vierkante matrix A waarvoor geldt $detA \neq 0$ is een reguliere matrix.

Een vierkante matrix A waarvoor geldt $detA = 0$ is een singuliere matrix.

Inverse van een matrix

Als er voor een vierkante matrix A een vierkante matrix X bestaat waarvoor geldt $AX = XA = I$, met I de éénheidsmatrix dan is de matrix X de inverse van A.
Notatie:

$$X = A^{-1}$$

Opmerking

- Opdat X de inverse van A zou zijn moet dus aan **beide** uitdrukkingen $AX = I$ en $XA = I$ voldaan zijn.
- Als de inverse van A bestaat dan geldt $(A^{-1})^{-1} = A$
- Als de inverse van A bestaat dan zegt men dat A inverteerbaar is.
- Men kan aantonen dat voor een inverteerbare matrix A geldt $detA \neq 0$, met andere woorden "A is inverteerbaar"$\Leftrightarrow$ "A is regulier".

Voorbeeld 1 De inverse van de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ is de matrix $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Controle:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en

$$BA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Adjunctmatrix van een vierkante matrix

De adjunctmatrix van een vierkante matrix A is de matrix die men bekomt door elk element van A te vervangen door zijn cofactor en vervolgens de matrix te transponeren.

Dus, met a_{ij} de elementen van de $n \times n$ matrix A geldt:

$$adj A = \begin{pmatrix} \text{cofactor}(a_{11}) & \text{cofactor}(a_{12}) & \text{cofactor}(a_{13}) & \ldots & \text{cofactor}(a_{1n}) \\ \text{cofactor}(a_{21}) & \text{cofactor}(a_{22}) & \text{cofactor}(a_{23}) & \ldots & \text{cofactor}(a_{2n}) \\ \text{cofactor}(a_{31}) & \text{cofactor}(a_{32}) & \text{cofactor}(a_{33}) & \ldots & \text{cofactor}(a_{3n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cofactor}(a_{n1}) & \text{cofactor}(a_{n2}) & \text{cofactor}(a_{n3}) & \ldots & \text{cofactor}(a_{nn}) \end{pmatrix}^t$$

Het is mogelijk om aan te tonen dat voor een reguliere vierkante matrix A geldt:

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{detA}$$

Voorbeeld 2 De vierkante matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 1 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

We gaan na of deze matrix regulier is (m.a.w. of er een inverse matrix A^{-1} bestaat.

$$detA = 1det\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 8det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -7$$

Dus $detA \neq 0$ zodat A is regulier, A^{-1} bestaat.

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{detA} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -8 & 1 & -3 \\ 16 & -2 & -1 \end{pmatrix}^t$$

De inverse van A is dus

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{8}{7} & -\frac{16}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

2.5 De rang van een matrix

Onderdeterminant van p-de orde van een matrix

Een onderdeterminant van p-de orde van een $m \times n$ matrix A is een getal dat men bekomt door:

- $m - p$ rijen en $n - p$ kolommen van de matrix A te schrappen
- de determinant van de overblijvende vierkante matrix te berekenen

Opmerking

- onderdeterminanten zijn dus ook voor niet-vierkante matrices gedefiniëerd
- er staat **een** onderdeterminant... naargelang welke rijen en kolommen geschrapt worden zal je een andere onderdeterminant vinden

Voorbeeld 1 Beschouw de 3x4 matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

We berekenen een onderdeterminant van 3-de orde door $3-3=0$ rijen te schrappen en $4-3=1$ kolom te schrappen en de determinant van de overblijvende vierkante matrix te berekenen.

- Schrappen van de vierde kolom levert als onderdeterminant van 3-orde:

$$det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 15$$

- Schrappen van de derde kolom levert als onderdeterminant van 3-de orde:

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 18$$

We berekenen een onderdeterminant van 1-ste orde door $3 - 1 = 2$ rijen en $4 - 1 = 3$ kolommen te schrappen en de determinant van de overblijvende matrix te berekenen.

- Schrap de eerste twee rijen en de eerste drie kolommen. De onderdeierminant van 1-ste orde is
$$det \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix} = 6$$
- Schrap de eerste twee rijen en de laatste drie kolommen. De onderdeterminant van 1-ste orde is
$$det \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} = 0$$

Rang van een matrix

De rang van een $m \times n$ matrix A is nu gedefiniëerd als de hoogste orde r van alle van nul verschillende onderdeterminanten van A.

Er bestaan verschillende notaties voor de rang van een matrix maar de meest voorkomende zijn:

$$rang(A) = r, Rg(A) = r \quad \text{of} \quad Rank(A) = r$$

Opmerking

- De rang van een $m \times n$ matrix A is nooit groter dan het minimum van m en n.
$$rang(A) \leq min(m, n)$$
Bij het berekenen van de onderdeterminanten kan men immers nooit minder dan 0 rijen of kolommen schrappen...
- Voor een nulmatrix geldt: $rang(O) = 0$
- Voor een vierkante $n \times n$ matrix A geldt:
  - as A regulier is (m.a.w. $detA \neq 0$) dan geldt $rang(A) = n$
    De van nul verschillende determinant van A is immers de onderdeterminant van orde n.
  - als A singulier is (m.a.w. $detA = 0$ dan geldt $rang(A) < n$

Voorbeeld 2 We bepalen de rang van $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

De matrix A is een $3x4$ matrix. We weten dus op voorhand dat $rang(A) \leq 3$

We berekenen nu de onderdeterminanten, startend van onderdeterminanten van orde 3, tot we een onderdeterminant tegenkomen die verschillend is van nul. De orde van deze onderdeterminant is volgens de definitie de rang van de matrix.

- Onderdeterminanten van orde 3.
  We schrappen 0 rijen en 1 kolom.
  $det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 0$, $det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} = 0$, $det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 0$, $det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = 0$ De rang van de matrix zal dus kleiner zijn dan 3.

- Onderdeterminanten van orde 2.
  We schrappen 1 rij en 2 kolommen.
  Door de derde rij en de twee laatste kolommen te schrappen vinden we:
  $$det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$
  We vinden dus dat
  $$rang(A) = 2$$

2.6 Elementaire omvormingen van een matrix

Definitie

Definitie Elementaire omvormingen van een matrix zijn omvormingen die de rang van een matrix niet veranderen. Er zijn drie elementaire omvormingen die men kan toepassen op de rijen of op de kolommen van een matrix.

- Twee rijen (of twee kolommen) van plaats wisselen.
- Alle elementen van een rij (of kolom) vermenigvuldigen met een getal $\lambda \neq 0$.
- Alle elementen van een rij (of kolom) vermenigvuldigen met een getal $\lambda \neq 0$ en deze dan optellen bij de elementen van een andere rij (kolom).

Opmerking De rang van een matrix wordt bepaald door na te gaan of determinanten verschillen zijn van nul of niet. De omvormingen die hierboven staan kunnen de waarde van een determinant wel veranderen maar hebben geen effect op het al dan niet nul zijn van een determinant (zie: eigenschappen van determinanten).

De rang van een matrix bepalen met elementaire omvormingen

- Echelonvorm van een matrix

  Een matrix is in echelonvorm als

  - alle eventuele nulrijen van de matrix onderaan de matrix staan
  - de eerste rij begint met een element dat niet nul is, de tweede rij begint met een nul gevolgd door een element dat niet nul is, de derde rij begint met twee nullen gevolgd door een element dat niet nul is, enz... tot ofwel de nulrijen ofwel het einde van de matrix wordt bereikt.

  Een $m \times n$ matrix in echelonvorm:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & \dots & b_{1r} & b_{1,r+1} & b_{1,r+2} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & \dots & b_{2r} & b_{2,r+1} & b_{2,r+2} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & b_{3r} & b_{3,r+1} & b_{3,r+2} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & b_{rr} & b_{r,r+1} & b_{r,r+2} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

  met alle $b_{ii} \neq 0$ $(i = 1..r)$ de elementen b_{ij} met $i \neq j$ kunnen zowel gelijk als verschillend van nul zijn.

- Praktische manier om de rang van een matrix te bepalen

  De rang van een $m \times n$ matrix A bepalen door onderdeterminanten te berekenen blijkt in de praktijk nogal lastig en tijdrovend te zijn. Een veel handiger manier is gebaseerd op elementaire omvormingen.

  Men gaat als volgt te werk:

  - zet de matrix A met behulp van elementaire omvormingen om in een nieuwe matrix A' die in echelonvorm staat

$$A' = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & \dots & b_{1r} & b_{1,r+1} & b_{1,r+2} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & \dots & b_{2r} & b_{2,r+1} & b_{2,r+2} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & b_{3r} & b_{3,r+1} & b_{3,r+2} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & b_{rr} & b_{r,r+1} & b_{r,r+2} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

– Het aantal niet-nulrijen van A' is dan gelijk aan de rang van de matrix A

$$rang(A) = r = \text{aantal niet nulrijen van} \quad A'$$

Verklaring:

Elementaire omvormingen veranderen de rang van een matrix niet. Er geldt dus $rang(A) = rang(A')$.
De matrix A' heeft minstens één onderdeterminant van orde r want alle $b_{ii} \neq 0$ $(i = 1..r)$ zodat de determinant van de rxr driehoeksmatrix, waarvan de b_{ii} de diagonaal vormen, niet nul is. Alle onderdeterminanten van een grotere orde dan r van A' zijn zeker nul, ze bevatten immers altijd minstens één nulrij.

Voorbeeld 1 Bereken de rang van $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

We gaan de matrix nu stap voor stap, met elementaire opvormingen, omzetten in een echelonmatrix. Hierbij gaan we van links naar rechts door de matrix: eerst maken we alle elementen onder het eerste element van de eerste rij nul, vervolgens maken we alle elementen onder het tweede element van de tweede rij nul, enz... tot we de echelonvorm bekomen.

- stap 1: rij 3 - rij 1 en rij 4 -2 rij 1

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

- stap 2: rij 3 - rij 2 en rij 4 + 4 rij 2

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

- stap 3: wissel rij 3 en rij 4

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De resulterende $4x4$ matrix A' staat in echelonvorm en heeft drie niet-nulrijen:

$$rang(A) = rang(A') = 3$$

2.7 Praktische berekening van de inverse van een matrix

Om na te gaan of een vierkante matrix regulier is moeten we de determinant berekenen. Voor een iets grotere matrix kan dit behoorlijk tijdrovend zijn. Als blijkt dat de matrix regulier is, kan men de inverse vinden door de adjunctmatrix te berekenen. Hiervoor moeten opnieuw talrijke determinanten worden uitgerekend. Dit maakt dat het berekenen van de inverse van een matrix op deze manier enorm veel tijd en moeite kost, in die mate zelfs dat het voor grotere matrices, zelfs met een computer, onpraktisch wordt.

Er is echter een methode ontwikkeld die toelaat om, met elementaire omvormingen, na te gaan of een matrix inverteerbaar is en eventueel de inverse te vinden. Deze methode staat bekend als de methode van **Gauss-Jordan**. We geven hier deze methode zonder bewijs.

Methode van Gauss-Jordan om na te gaan of een vierkante $n \times n$ matrix A inverteerbaar is en om eventueel de inverse van A te vinden:

- Stap 1: Schrijf een nieuwe $nx2n$ matrix met links de matrix A en rechts de éénheidsmatrix I

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- Stap 2: Probeer de matrix A, door opeenvolgnede elementaire omvormingen, om te zetten in de éénheidsmatrix I en pas tegelijkertijd dezelfde elementaire omvormingen toe op I. Om geen rekenfouten te maken is het aan te raden je te beperken tot elementaire rij-omvormingen.
  Er zijn nu twee mogelijkheden:

  1. Na een aantal omvormingen wordt de $n \times n$ matrix A omgezet in een matrix met een nulrij. Dus $rang(A) < n$, $detA = 0$ en A is singulier. De inverse van A bestaat niet.

2. Na een aantal elementaire omvormingen is A omgezet in de éénheidsmatrix I. Dit betekent dat $rang(A) = n$, $detA \neq 0$ en A is regulier (inverteerbaar). De éénheidsmatrix I is dan door de elementaire omvormingen omgezet in een nieuwe $n \times n$ matrix $B = A^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & b_{11} & \dots & \dots & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & & & 0 & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & b_{n1} & \dots & \dots & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Voorbeeld 1 We gebruiken de methode van Gauss-Jordan om na te gaan of de vierkante matrix A inverteerbaar is. Als dat zo is bepalen we meteen de inverse van A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

We schrijven de $3x3$ matrix A in een $3x6$ matrix door de éénheidsmatrix rechts bij te voegen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

We passen nu elementaire rij-omvormingen toe waarbij we proberen A om te zetten in de éénheidsmatrix. Tegelijkertijd passen we dezelfde rij-omvormingen toe op de éénheidsmatrix I. We gaan hierbij systematisch te werk waarbij we in A, van links naar rechts, de elementen onder de diagonaal omzetten in nullen.

- Stap 1: rij 3 - 2 rij 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 8 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Stap 2: rij 3 + 3/2 rij 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{19}{2} & -2 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

- Stap 3: 1/6 rij 2 en 2/19 rij 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{19} & \frac{3}{19} & \frac{2}{19} \end{pmatrix}$$

Pas als alle elementen onder de diagonaal nul gemaakt zijn bekijken we de elementen boven de diagonaal. We maken opnieuw gebruik van elementaire rij-omvormingen om deze elementen om te zetten in nullen. Deze keer gaan we systematisch van rechts naar links door de matrix.

- Stap 4: rij 2 - 1/6 rij 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{57} & \frac{8}{57} & \frac{-1}{57} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{19} & \frac{3}{19} & \frac{2}{19} \end{pmatrix}$$

- Stap 5: rij 1 - 7 rij 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{43}{57} & \frac{-56}{57} & \frac{7}{57} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{57} & \frac{8}{57} & \frac{-1}{57} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{19} & \frac{3}{19} & \frac{2}{19} \end{pmatrix}$$

De linkerhelft van de $3x6$ matrix, A is omgezet in de éénheidsmatrix. De matrix A is dus inverteerbaar en tegelijkertijd is de rechterkant van de $3x6$ matrix omgezet in $B = A^{-1}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{43}{57} & \frac{-56}{57} & \frac{7}{57} \\ \frac{2}{57} & \frac{8}{57} & \frac{-1}{57} \\ \frac{-4}{19} & \frac{3}{19} & \frac{2}{19} \end{pmatrix}$$

2.8 Methode van Gauss voor het oplossen van een stelsel van vergelijkingen

Stelsels van lineaire vergelijkingen in matrixnotatie

Een stelsel van lineaire vergelijkingen kan ook geschreven worden in matrixvorm. Neem een stelsel van m vergelijkingen in n onbekenden x_1, x_2,...,x_n:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

We merken op dat het **niet** noodzakelijk is dat het aantal vergelijkingen m gelijk is aan het aantal onbekenden n.

Door alle coëfficiënten a_{ij} in een $m \times n$ matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ te schrijven,

de onbekenden in een $nx1$ kolommatrix $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ te plaatsen en de rechterleden van de vergelijkingen in een $mx1$ kolommatrix $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ te schrijven, kunnen we het stelsel van vergelijkingen beschouwen als een matrixvermenigvuldiging $AX = C$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

In plaats van de matrixvermenigvuldiging expliciet op te schrijven wordt het stelsel in matrixvorm dikwijls verkort genoteerd met behulp van de **verhoogde coëfficiëntenmatrix** $\left(\begin{array}{c|c} A & C \end{array}\right)$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} & c_1 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & \dots & a_{mn} & c_m \end{array}\right)$$

Equivalentietransformaties van een stelsel lineaire vergelijkingen

Een equivalentietransformatie van een stelsel van vergelijkingen is een omvorming van het stelsel tot een nieuw stelsel van lineaire vergelijkingen dat nog steeds dezelfde oplossingen heeft als het oorspronkelijke stelsel.

Er zijn drie equivalentietransformaties:

- Twee vergelijkingen van het stelsel van plaats verwisselen
- Een vergelijking vermenigvuldigen met een getal $\lambda \neq 0$
- Een vergelijking vermenigvuldigen met een getal $\lambda \neq 0$ en het resultaat optellen bij een andere vergelijking.

Het is niet moeilijk in te zien dat de eerste twee inderdaad de oplossingen van het stelsel niet veranderen. De derde transformatie komt neer op de substitutiemethode voor het oplossen van een stelsel van vergelijkingen die we in het hoofdstuk over vergelijkingen besproken hebben.

Schrijven we nu een stelsel van lineaire vergelijkingen eerst in matrixvorm $AX = C$ en vervolgens in verkorte vorm met de verhoogde coëfficiëntenmatrix $\left(\begin{array}{c|c} A & C \end{array} \right)$. **Het toepassen van de equivalentietransformaties op het stelsel komt dan neer op het toepassen van elementaire rij-omvormingen op de verhoogde coëfficiëntenmatrix**.

Hierop is de methode van Gauss voor het oplossen van een stelsel van vergelijkingen gebaseerd.

Methode van Gauss

We schrijven een stelsel van m vergelijkingen in n onbekenden

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

eerst in matrixvorm $AX = C$ en vervolgens in de verkorte notatie $\left(\begin{array}{c|c} A & C \end{array} \right)$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} & c_1 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & \dots & a_{mn} & c_m \end{array} \right)$$

We maken dan gebruik van elementaire rij-omvormingen (equivalentietransformaties) om de matrix om te zetten in echelonvorm $\left(\begin{array}{c|c} A' & C' \end{array} \right)$. Omdat we alleen elementaire omvormingen gebruiken geldt dan steeds $rang(A) = rang(A')$ en $rang \left(\begin{array}{c|c} A & C \end{array} \right) = rang \left(\begin{array}{c|c} A' & C' \end{array} \right)$.

In de meest algemene schrijfwijze heeft de echelonmatrix de vorm

$$\left(\begin{array}{c|c} A' & C' \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccccccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & \dots & a'_{1r} & a'_{1,r+1} & \dots & \dots & \dots & a'_{1n} & c'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & \dots & a'_{2r} & a'_{2,r+1} & \dots & \dots & \dots & a'_{2n} & c'_2 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & a'_{rr} & a'_{r,r+1} & \dots & \dots & \dots & a'_{rn} & c'_r \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & c'_{r+1} \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & c'_m \end{array} \right)$$

Merk op dat de rang van A het aantal niet-nulrijen van A' is: $rang(A) = r$

Er kunnen zich nu drie verschillende situaties voordoen.

Onthoud **Geval 1:** voor minstens één van de $m-r$ laatste vergelijkingen (rijen) geldt $c_i' \neq 0$.
Dit betekent dat in het stelsel minstens één vergelijking voorkomt van de vorm $0 \neq 0$. Het is natuurlijk onmogelijk om aan deze vergelijking te voldoen: **het stelsel van vergelijkingen heeft geen oplossingen**.
Merk op dat in deze situatie geldt: $rang(A) \neq rang\left(\begin{array}{c|c} A' & C' \end{array}\right)$

Geval 2: voor alle $m-r$ laatste rijen geldt $c_i' = 0$ (m.a.w. $rang(A) = rang\left(\begin{array}{c|c} A' & C' \end{array}\right)$) en bovendien geldt $rang(A) = n$ met n het aantal onbekenden.
De echelonmatrix heeft dan de vorm:

$$\left(\begin{array}{c|c} A' & C' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & \dots & a'_{1n} & c'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & \dots & a'_{2n} & c'_2 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & a'_{nn} & c'_n \\ 0 & & & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & & & & 0 & 0 \end{array}\right)$$

In dit geval heeft het stelsel van vergelijkingen juist één oplossing die men vindt door de vergelijkingen één voor één op te lossen, beginnend met de laatste vergelijking. De oplossing van de laatste vergelijking $a'_{nn}x_n = c'_n$ wordt dan in de voorlaatste gesubstitueerd, enz...
Dit geeft een unieke oplossing $x_1, x_2, ..., x_n$

Geval 3: voor alle $m-r$ laatste rijen geldt $c_i' = 0$ (m.a.w. $rang(A) = rang\left(\begin{array}{c|c} A' & C' \end{array}\right)$) en $rang(A) < n$ met n het aantal onbekenden.
De echelonmatrix heeft nu de vorm:

$$\left(\begin{array}{c|c} A' & C' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccccccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & \dots & a'_{1r} & a'_{1,r+1} & \dots & \dots & \dots & a'_{1n} & c'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & \dots & a'_{2r} & a'_{2,r+1} & \dots & \dots & \dots & a'_{2n} & c'_2 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & a'_{rr} & a'_{r,r+1} & \dots & \dots & \dots & a'_{rn} & c'_r \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Het stelsel is oplosbaar en heeft een oneindig aantal oplossingen.
Men vindt de oplossingen door de vergelijkingen in het stelsel, van onder naar boven, één

voor één op te lossen. De oplossing van de r-de vergelijking substitueert men in de $r-1$-ste vergelijking, enz...
De r-de vergelijking kan men oplossen naar de onbekende x_r door de onbekenden x_{r+1},...,x_n als parameters te kiezen.

Voorbeeld 1 We controleren met de methode van Gauss of het volgende stelsel oplosbaar is en we zoeken de eventuele oplossing(en.)

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 10x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

We schrijven de verhoogde coëfficiëntenmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -10 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

We gebruiken elementaire rijomvormingen om de matrix in echelonvorm te brengen.

rij 2 - 2 rij 1 en rij 3 + rij 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -20 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

Verwissel rij 2 en rij 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & -20 & 2 \end{array}\right)$$

rij 3 + 7 rij 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 15 & 9 \end{array}\right)$$

We lezen af op de matrix dat $rang(A) = rang\left(\begin{array}{c|c} A & C \end{array}\right)$ (het stelsel is oplosbaar) en $rang(A) =$ 3, het aantal onbekenden. Het stelsel heeft dus juist één oplossing.
We lossen het stelsel van onder naar boven op:
$x_3 = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$, substitutie in de voorlaatste vergelijking geeft $-x_2 + 5\frac{3}{5} = 1$, dus $x_2 = 2$, substitutie in de eerste vergelijking geeft $x_1 - 6 + 3 = 0$, dus $x_1 = 3$.
Het stelsel heeft als oplossing $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = \frac{3}{5}$

Voorbeeld 2 We controleren met de methode van Gauss of het volgende stelsel oplosbaar is en we zoeken de eventuele oplossing(en.)

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 10x_3 = 2 \\ -3x_1 + 9x_2 - 15x_3 = 0 \end{cases}$$

We schrijven de verhoogde coëfficiëntenmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -10 & 2 \\ -3 & 9 & -15 & 0 \end{array}\right)$$

We gebruiken elementaire rijomvormingen om de matrix in echelonvorm te brengen.

rij 2 -2 rij 1 en rij 3 + 3 rij 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -20 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

We lezen af dat $rang(A) = rang\left(A \mid C \right)$ (het stelsel is oplosbaar) en $rang(A) = 2$, dit is kleiner dan het aantal onbekenden. In deze situatie heeft het stelsel een oneindig aantal oplossingen.
We lossen de tweede vergelijking op naar x_2 waarbij we x_3 gelijk stellen aan een willekeurig te kiezen parameter $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$. Dit geeft $x_2 = \frac{2+20\lambda}{7}$. Substitutie van x_2 en x_3 in de eerste vergelijking geeft $x_1 = \frac{25\lambda+6}{7}$.
Aangezien x_1, x_2, x_3 telkens een andere oplossing geeft als men een andere waarde voor λ kiest heeft men hier inderdaad een oneindig aantal oplossingen.

Opmerking

- We herhalen nog eens dat het niet noodzakelijk is dat het aantal vergelijkingen gelijk is aan het aantal onbekenden.
- Laten we een homogeen stelsel van vergelijkingen (een stelsel waarbij alle rechterleden nul zijn) beschouwen:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

  Dergelijk stelsel is altijd oplosbaar want in dit geval geldt $rang(A) = rang\left(A \mid C \right)$
  Het stelsel kan één of oneindig veel oplossingen hebben maar $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ ...\ ,\ x_n = 0$ is altijd een oplossing van een homogeen stelsel.

2.9 De regel van Cramer

Inleiding

We bekijken hier het speciale geval van een niet homogeen stelsel van lineaire vergelijkingen waarbij er evenveel vergelijkingen als onbekenden zijn.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = c_n \end{cases}$$

In matrixnotatie wordt dit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

en met de verhoogde coëfficiëntenmatrix

$$\left(\begin{array}{c|c} A & C \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} & c_1 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} & c_n \end{array} \right)$$

Volgens de methode van Gauss heeft een dergelijk $n \times n$ stelsel juist één oplossing als en slechts als $rang(A) = n$ met n het aantal onbekenden.
Omdat A een vierkante $n \times n$ matrix is geldt

$$rang(A) = n \Leftrightarrow detA \neq 0 \Leftrightarrow A \quad \text{is inverteerbaar}$$

De regel van Cramer is een manier om, onafhankelijk van de methode van Gauss, de unieke oplossing van een dergelijk $n \times n$ stelsel te vinden.

Pas op! De regel van Cramer is op geen enkele andere situatie toepasbaar...

De regel van Cramer

Stel dat je een niet homogeen stelsel van n lineaire vergelijkingen in n onbekenden x_1, ... , x_n hebt waarbij de coëfficiëntenmatrix A regulier is.
In matrixnotatie wordt dit

$$AX = C \quad \text{met} \quad detA \neq 0$$

Door de matrixvergelijking links te vermenigvuldigen met de inverse van A vinden we

$$A^{-1}AX = A^{-1}C$$

of

$$X = A^{-1}C$$

Dit kan je ook schrijven als

$$X = \frac{1}{detA} adj(A)C$$

of

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} \text{cofactor}(a_{11}) & \text{cofactor}(a_{21}) & \ldots & \ldots & \text{cofactor}(a_{n1}) \\ \text{cofactor}(a_{12}) & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \text{cofactor}(a_{1n}) & \ldots & & \ldots\ \ldots & \text{cofactor}(a_{nn}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Dit geeft voor elke x_i met $i = 1...n$ de volgende uitdrukking

$$x_i = \frac{1}{detA}(c_1\text{cofactor}(a_{1i}) + c_2\text{cofactor}(a_{2i}) + ... + c_n\text{cofactor}(a_{ni}))$$

ofwel

$$x_i = \frac{detA_i}{detA}$$

met $i = 1...n$ en A_i de coëfficiëntenmatrix A waarin de i-de kolom vervangen is door de kolommatrix C.

Voorbeeld 1 Neem het volgende stelsel van 3 vergelijkingen in 3 onbekenden:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

We controleren of de coëfficiëntenmatrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ regulier is.

$$det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Dus A is regulier, A^{-1} bestaat.

We berekenen de unieke oplossing van het stelsel:

$$x_1 = \frac{detA_1}{detA} = det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$x_2 = \frac{detA_2}{detA} = det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 5$$

$$x_3 = \frac{detA_3}{detA} = det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -1$$

Module 6

Afgeleiden en integralen

0 Intro

Zie filmpje MOOC.

1 Afgeleiden

1.1 Inleidend voorbeeld

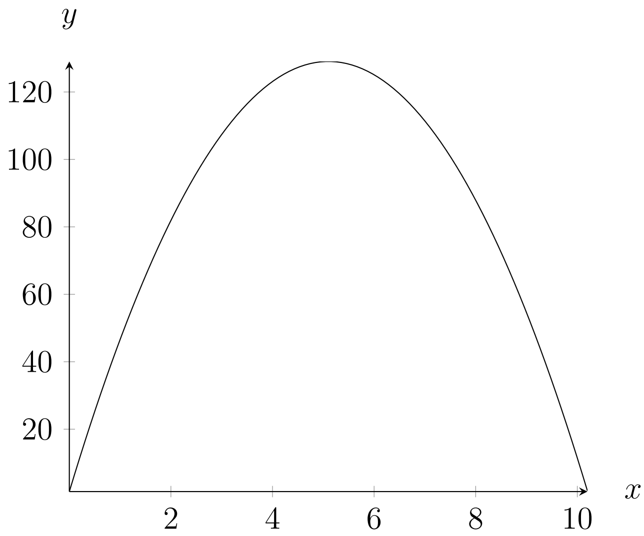
Zie filmpje MOOC.

1.2 Algemeenheden

Algemeenheden

In de algemene definities is $f(x)$ het voorschrift van een functie f en $a \in \text{dom}(f)$ zodat f continu is op een omgeving van a. Intuïtief betekent dit dat een open interval $I \subset \text{dom}(f)$ bestaat dat a bevat en zodat de grafiek van f boven het interval I geen "sprongen" vertoont.

Voorbeeld 1 In het inleidende voorbeeld is $f(x) = 1,5 + 50x - 4,9x^2$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$ en $a = 2$. Deze functie is continu in 2. Je ziet hieronder de grafiek van de functie.



Naar analogie met dit inleidende voorbeeld introduceren we de volgende definitie.

Definitie Als de limietwaarde van $\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ voor $\Delta x = 0$ bestaat, m.a.w. het is een reëel getal, dan heet dat reëel getal de afgeleide van f in a. In dat geval zeg je dat f afleidbaar is in a. We schrijven:

$$Df(a) = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta_x}$$

Notatie Als $y = f(x)$ afleidbaar is in a dan zijn volgende notaties toegelaten om de afgeleide van f in a aan te duiden

$$f'(a), Df(a), \frac{d}{dx}f(a)$$

Voorbeeld 2 In het inleidend voorbeeld heb je voor de functie $f(x) = 1,5 + 50x - 4,9x^2$ gevonden dat deze afleidbaar is in 2 en voor de afgeleide in 2 heb je gevonden dat $Df(2) = 30,4$.

We kunnen deze limiet ook berekenen door met de variabele x naar het punt a toe te gaan. De afstand tussen het punt x en a is dan $\triangle x = x - a$ en we schrijven:

$$Df(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Vanuit het inleidende voorbeeld ken je een betekenis voor de afgeleide van een functie f in a.

De afgeleide van f in a is de snelheid waarmee de functiewaarde $f(x)$ verandert als x verandert vertrekkende met de waarde $x = a$

De afgeleide heeft ook een belangrijke meetkundige betekenis.

De afgeleide van f in a is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $P(a, f(a))$.

De verklaring hiervan zie je in de animatie in de MOOC.

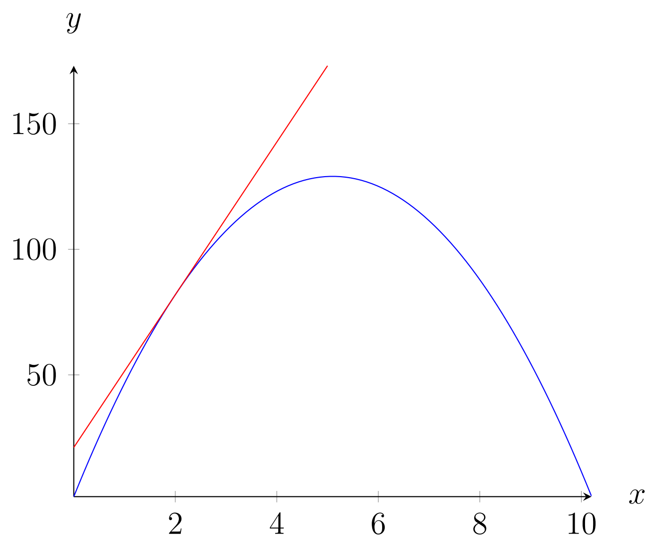
Zie filmpje MOOC.

Voorbeeld 3 Voor de functie $f(x) = 1,5 + 50x - 4,9x^2$ uit het inleidend voorbeeld berekende je dat $Df(2) = 30,4$. Het punt op de grafiek bij $x = 2$ is het punt met coördinaten $P(2; 81,9)$. De vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f in P is

$$y - 81,9 = 30,4(x - 2)$$

of nog

$$y = 30,4x + 21,1$$



Definitie Als je a laat variëren in de punten waarin een functie f afleidbaar is, dan verandert $Df(a)$ (meestal) ook. Je bekomt dan de afgeleide functie Df of $Df(x)$ van de gegeven functie f. Dus, voor een willekeurig punt a (laat ons dit dan bijvoorbeeld gewoon het punt x noemen) krijgen we dan:

$$Df(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}$$

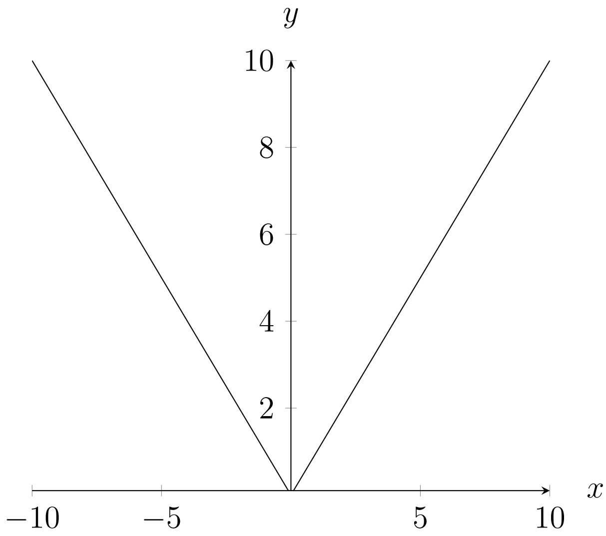
Notatie Voor het aanduiden van de afgeleide functie van een functie $y = f(x)$ mag je de volgende notaties gebruiken

$$f', Df, \frac{df}{dx}$$

Bovenstaande limieten zijn in feite allemaal gelijkaardig. Ze zeggen allemaal iets over hoe snel de functie f verandert in de buurt van een willekeurig punt x of in de buurt van een welbepaald punt $x = a$.

We komen nog even terug op "...als de limietwaarde bestaat dan is de functie afleidbaar." Dit betekent dat als de limietwaarde niet bestaat (of niet kan berekend worden), dat in zo'n geval de afgeleide in dat punt niet bestaat. We bekijken 2 voorbeelden.

Voorbeeld 4 Wat is de afgeleide in het punt $a = 0$ van de absolute waarde functie $f = |x|$?



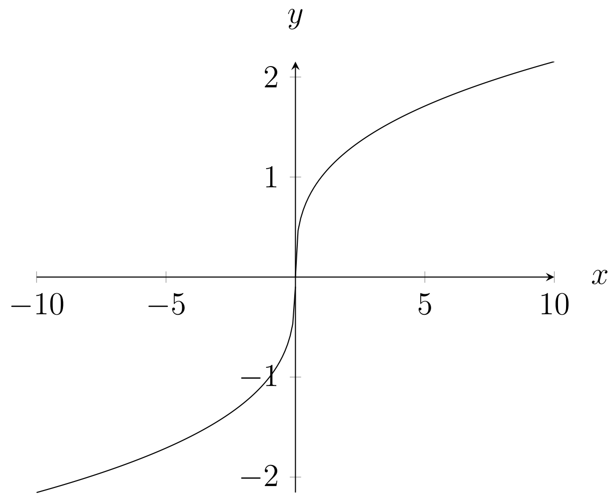
Passen we eerst de limietdefinitie toe op punten links en op punten rechts van de oorsprong, dan vinden we voor de afgeleide (functie) respectievelijk $Df(x) = -1$ als $x < 0$ en $Df(x) = +1$ als $x > 0$. Hoe dicht we de oorsprong ook naderen, links zal de afgeleide steeds -1 zijn, en rechts steeds $+1$. We kunnen nu ook spreken over een linker en een rechter afgeleide, en gebruiken daarvoor de notatie voor de linker en de rechter limiet (zie ook ****):

de linker afgeleide	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$	we naderen a langs de te kleine kant van a ("$<$")
de rechter afgeleide	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$	we naderen a langs de te grote kant van a ("$>$")

Enkel als de linker en de rechter afgeleide van een functie f in een punt a bestaan en gelijk zijn kunnen we zeggen dat "de" afgeleide van f in a bestaat. Grafisch zien we snel dat functies met een "knikpunt" dus niet over hun ganse domein afleidbaar zullen zijn.

Een doordenkertje: elke differentiëerbare functie is continu. Maar deze stelling is niet omkeerbaar, want er zijn functies die wel continu zijn en niet differentiëerbaar.

Voorbeeld 5 Wat is de afgeleide in het punt $a = 0$ van de functie $f = \sqrt[3]{x}$?



We passen de limietdefinitie toe om de afgeleide te berekenen:

$$Df(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

Het maakt hier niet uit of we het punt a (de oorsprong) langs de linker- of de rechterkant benaderen, de waarde van x^2 is steeds positief. Aangezien de definitie van de afgeleide zegt dat de limietwaarde moet bestaan én een reëel getal moet zijn, kunnen we hier terug besluiten dat de functie f in het punt $a = 0$ niet afleidbaar is. Meetkundig vertaalt zich dat naar een verticale raaklijn in het punt $a = 0$. Onthoud dus dat, ook al kan je de verticale raaklijn aan een gegeven functie in een punt tekenen, toch is de functie daar niet afleidbaar.

1.3 Afgeleide raaklijn

Zie filmpje MOOC.

1.4 Afgeleiden van veeltermfuncties

Afgeleide van een constante functie

Voor $c \in \mathbb{R}$ is $y = c$ het voorschrift van een constante functie. Intuïtief (afgeleide geeft snelheid aan waarmee een functiewaarde verandert) is $D(c) = 0$.

Via de definitie:

$$f(a) = c \text{ en } f(a + \Delta x) = c \text{ dus } \frac{y(a + \Delta x) - y(a)}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

In de limiet als Δx nul wordt blijft dit 0. Je bekomt

$$D(c) = 0$$

Afgeleide van de identieke functie

Het voorschrift $f(x) = x$ is het voorschrift van de identieke functie. Waaraan is $D(x)$ gelijk?

Via de definitie:

$$f(a) = a \text{ en } f(a + \Delta x) = a + \Delta x \text{ dus } \frac{y(a + \Delta x) - y(a)}{\Delta x} = \frac{a + \Delta x - a}{\Delta x} = 1$$

In de limiet als als Δx nul wordt blijft dit 1. Je bekomt

$$D(x) = 1$$

Afgeleide van $y = x^2$

Voor $f(x) = x^2$ is

$$\begin{aligned} f(a) = a^2 \text{ en } f(a + \Delta x) = (a + \Delta x)^2 = a^2 + 2a\Delta x + \Delta x^2 \\ \text{dus } \frac{y(a + \Delta x) - y(a)}{\Delta x} = \frac{2a\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2a + \Delta x. \end{aligned}$$

In de limiet als Δx nul wordt dan bekom je $2a$. Je bekomt $Dy(a) = 2a$ en daarom

$$D(x^2) = 2x$$

Afgeleide van $y = x^n$

Algemeen geldt voor $n \in \mathbb{N}$ dat

$$D(x^n) = nx^{n-1}$$

Merk op, als $n = 0$ dan geeft dit $D(x^0) = 0x^{-1} = 0$. Omdat $x^0 = 1$ geeft dit $D(1) = 0$. Dat komt overeen met de afgeleide van een constante functie.

Afgeleiden van veeltermfuncties

Uit de afgeleide van $y = x^n$ met $n \in \mathbb{N}$ volgt dat je door middel van de volgende twee rekenregels van alle veeltermfuncties de afgeleide kunt berekenen.

Eigenschap 1 *Afgeleide van een som :*

$$D(f+g) = Df + Dg$$

Eigenschap 2 *Afgeleide van een functie vermenigvuldigd met een constante :*

$$D(cf) = cD(f)$$

Voorbeeld 1

$$\begin{aligned} D(5x^3 &- 7x^2 + 18x - 9) \\ &= D(5x^3) + D(-7x^2) + D(18x) + D(9) \text{ (rekenregel som)} \\ &= 5D(x^3) - 7D(x^2) + 18D(x) + D(9) \text{ (rekenregel product met c)} \\ &= 5.3x^2 - 7.2x + 18.1 + 0 \ (D(x^n) = nx^{n-1}) \\ &= 15x^2 - 14x + 18 \end{aligned}$$

Voorbeeld 2 Bekijk terug de functie uit het beginvoorbeeld

$$f(x) = 1,5 + 50t - 4,9t^2$$

Met de rekenregels en afleiden van x^n bekom je

$$Df(x) = 50 - 9,8t$$

Merk op dat je door invullen vindt $Df(2) = 50 - 9,8.2 = 30,4$. Dit is het resultaat dat we eerder gevonden hadden.

Uit de twee rekenregels volgt ook

Eigenschap 3 *Algeleide van een verschil*

$$D(f-g) = Df - Dg$$

Eigenschap 4 *De afgeleide $D(x^n) = nx^{n-1}$ geldt algemener voor alle $n \in \mathbb{R}$.*

Voorbeeld 3 $D(\sqrt[5]{x}) = D(x^{1/5}) = \frac{1}{5}x^{-4/5} = \frac{1}{5x^{4/5}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

Voorbeeld 4 $D(\frac{1}{x^3}) = D(x^{-3}) = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$

Voorbeeld 5 $D(\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt{x^3}) = D(\sqrt[3]{x^2}) - 5D(\sqrt{x^3})$

$= D(x^{2/3}) - 5D(x^{3/2})$

$= \frac{2}{3}x^{-1/3} - 5\frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{15}{2}\sqrt{x}$

1.5 Afgeleiden van veeltermfuncties - voorbeeld

Zie filmpje MOOC.

1.6 Basisafgeleiden en rekenregels

Basisafgeleiden

Met behulp van de limietdefinitie van afgeleide, kan men de afgeleide bepalen van een aantal elementaire functies. Hieronder worden de belangrijkste basisafgeleiden opgesomd. (te kennen!)

Merk op dat $r \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_0^+$ en x steeds de variabele is.

$$\begin{array}{rclrcl}
D(x^r) & = & r \cdot x^{r-1} & & & \\
D(e^x) & = & e^x & D(a^x) & = & a^x \cdot \ln a \\
D(\ln x) & = & \frac{1}{x} & D(\log_a x) & = & \frac{1}{x \cdot \ln a} \\
D(\sin x) & = & \cos x & D(\arcsin x) & = & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
D(\cos x) & = & -\sin x & D(\arccos x) & = & -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
D(\tan x) & = & \frac{1}{\cos^2 x} & D(\arctan x) & = & \frac{1}{1+x^2} \\
D(\cot x) & = & -\frac{1}{\sin^2 x} & D(\mathrm{Bgcot} x) & = & -\frac{1}{1+x^2}
\end{array}$$

Enkele vaak voorkomende gevallen van $D(x^r) = r \cdot x^{r-1}$ zijn

$$\begin{array}{rcl}
D(1) & = & D(x^0) = 0 \\
D(x) & = & D(x^1) = 1 \\
D(\frac{1}{x}) & = & D(x^{-1}) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \\
D(\sqrt{x}) & = & D(x^{1/2}) = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}
\end{array}$$

Rekenregels

Rekenregel Afgeleide van een functie vermenigvuldigd met een constante r:

$$D(r \cdot f(x)) = r \cdot D(f(x))$$

Voorbeeld 1

$$\begin{aligned} D(2\cdot\sin(x)) &= 2\cdot D(\sin(x)) = 2\cdot\cos(x)\\ D(5x^3) &= 5\cdot D(x^3) = 5\cdot 3x^2 = 15x^2\\ D(7e^x) &= 7\cdot D(e^x) = 7e^x \end{aligned}$$

Rekenregel Afgeleide van een som of verschil:

$$D(f(x)\pm g(x)) = Df(x)\pm Dg(x)$$

Deze rekenregel kan je veralgemenen: $D\left(f(x)+g(x)+h(x)+\ldots\right) = Df(x)+Dg(x)+Dh(x)+\ldots$

Voorbeeld 2

$$\begin{aligned} D(x^3-x+1) &= 3x^2-1+0 = 3x^2-1\\ D(4-x) &= 0-1=-1\\ D(x+\sin x) &= 1+\cos x \end{aligned}$$

Rekenregel Afgeleide van een product:

$$D(f(x)\cdot g(x)) = Df(x)\cdot g(x) + Dg(x)\cdot f(x)$$

Ook deze rekenregel kan je veralgemenen: $D\left(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)\cdot\ldots\right) = Df(x)\cdot g(x)\cdot h(x)\cdot\ldots + f(x)\cdot Dg(x)\cdot h(x)\cdot\ldots + f(x)\cdot g(x)\cdot Dh(x)\cdot\ldots +$

Voorbeeld 3

$$\begin{aligned} D(x\cdot\sin x) &= D(x)\cdot\sin x + x\cdot D(\sin x) = 1\cdot\sin x + x\cdot\cos x\\ D((x+1)\cdot 4x) &= D(x+1)\cdot 4x + (x+1)\cdot D(4x) = 1\cdot(4x)+(x+1)\cdot 4 = 4x+4x+4 = 8x+4 \end{aligned}$$

Rekenregel Afgeleide van een quotiënt:

$$D(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{Df(x)\cdot g(x) - Dg(x)\cdot f(x)}{g(x)^2}$$

Voorbeeld 4

$$\begin{aligned} D(\frac{x+5}{x+1}) &= \frac{D(x+5)\cdot(x+1)-(x+5)\cdot D(x+1)}{(x+1)^2}\\ &= \frac{1\cdot(x+1)-(x+5)\cdot 1}{x^2+2x+1}\\ &= \frac{x+1-x-5}{(x^2+2x+1)}\\ &= \frac{-4}{x^2+2x+1} \end{aligned}$$

Voorbeeld 5

$$\begin{aligned} D(\tan x) &= D(\frac{\sin x}{\cos x}) \\ &= \frac{D(\sin x)\cdot\cos x - \sin x D(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Rekenregel Voor samengestelde functies = kettingregel: Beschouw twee afleidbare functies f en g. Dan is de samengestelde functie $h = f \circ g$ met $h(x) = f(g(x))$ ook afleidbaar. Zo'n samengestelde functies wordt afgeleid met behulp van de kettingregel:

$$D(f(g(x))) = Df(g(x))\cdot Dg(x)$$

Om een samengestelde functie af te leiden, moeten we de kettingregel toepassen: leid eerst de buitenste functie af en werk zo naar binnen toe. In bovenstaande formule is f de buitenste functie, we leiden dus eerst f af en vermenigvuldigen deze met de afgeleide van de functie g die binnen f staat.

Soms wordt de kettingregel ook genoteerd als volgt:

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g(x))}{dg(x)}\cdot\frac{dg(x)}{dx}$$

of kortweg:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dx}$$

Het zou duidelijk moeten zijn dat je de samengestelde functie $f(g(x))$ niet meteen kan afleiden naar x. Je moet dus f eerst afleiden naar zijn argument, dus naar $g(x)$. Pas daarna kan je de functie $g(x)$ naar x afleiden. Indien nodig moet je de kettingregel herhaaldelijk toepassen, bijvoorbeeld:

$$D(f(g(h(x))) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dh}\cdot\frac{dh}{dx}$$

Voorbeeld 6

$$\begin{aligned} D(\sin 4x) &= \cos 4x\cdot D(4x) = 4\cdot\cos 4x \\ D(\cos^2 x) &= 2\cdot\cos x\cdot D(\cos x) = -2\cdot\cos x\sin x \\ D\frac{1}{\sin^2(4x)} &= D\sin^{-2}(4x) = (-2)\cdot\sin^{-3}(4x)\cdot\cos 4x\cdot 4 = -8\frac{\cos 4x}{\sin^3 4x} \\ D(\sqrt{^2+1}) &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}D(\sqrt{x^2+1}) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

Voorbeeld 7 Een meer uitgewerkt voorbeeld is

$$D((4x+1)^3)) = ?$$

Hier staat in feite $D(f(g(x))$ met:

$$\begin{array}{rclrcl} f(y) & = & y^3 & Df(y) & = & 3y^2 \\ y = g(x) & = & 4x+1 & Dg(x) & = & 4 \end{array}$$

zodat

$$D((4x+1)^3) = 3(g(x)))^2 \cdot 4 = 12(4x+1)^2$$

Komen we nog even terug op voorbeeld 5. Soms kan het interessant zijn om een quotiënt ook eens als een breuk te bekijken:

$$\begin{aligned} D(\tan x) &= D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) \\ &= D\left(\sin x \,.\, \cos^{-1} x\right) \\ &= \cos x \cdot \cos^{-1} x + \sin x \cdot (-1) \cdot \cos^{-2} x \cdot (-\sin x) \\ &= 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

1.7 Basisafgeleiden en rekenregels - voorbeeld

Zie filmpje MOOC.

1.8 Enkele oefeningen

Je krijgt nog enkele oefeningen op het berekenen van afgeleiden.

1. Bereken $D\left(5\sqrt[7]{x^{10}} + \frac{2}{\sqrt[4]{x^7}} - 9\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5\right)$

   - Hoe schrijf je dit zodat je afgeleiden van machten van x moet uitrekenen?
     Antwoord :
     $$D\left(5x^{10/7} + 2x^{-7/4} - 9x^{-5/3}\right)$$

- Wat is het resultaat van het toepassen van de regel voor het afleiden van machten ($D(x^a) = ax^{a-1}$)?
  Antwoord :
  $$5\frac{10}{7}x^{3/7} + 2\left(-\frac{7}{4}\right)x^{-11/4} - 9\left(-\frac{5}{3}\right)x^{-8/3}$$
- Wat is de oplossing?
  Antwoord :
  $$\frac{50}{7}\sqrt[7]{x^3} - \frac{7}{2\sqrt[4]{x^{11}}} + \frac{15}{\sqrt[3]{x^8}}$$

2. Bereken $D\left(3\sqrt[5]{\frac{1}{1-2x^3}} + 4\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-3x+1}} - 9\sqrt{(5x-7)^3}\right)$

- Hoe schrijf je dit zodat je afgeleiden van machten van veeltermen moet uitrekenen?
  Antwoord :
  $$D\left(3\left(1-2x^3\right)^{-1/5} + 4\left(x^2-3x+1\right)^{-1/3} - 9\left(5x-7\right)^{3/2}\right)$$
- Wat bekom je als je die machten afleidt?
  Antwoord :
  $$\begin{aligned} & 3\left(-\frac{1}{5}\right)\left(1-2x^3\right)^{-4/5}D\left(1-2x^3\right) \\ + \; & 4\left(-\frac{1}{3}\right)\left(x^2-3x+1\right)^{-4/3}D\left(x^2-3x+1\right) \\ - \; & 9\frac{3}{2}\left(5x-7\right)^{1/2}D(5x-7) \end{aligned}$$
  (denk eraan dat je na het afleiden van de machten door het gebruik van de kettingregel die veeltermen nog moet afleiden).
- Wat bekom je als je die veeltermen nog afleidt?
  Antwoord :
  $$3\left(-\frac{1}{5}\right)\left(1-2x^3\right)^{-4/5}\left(-6x^2\right)+4\left(-\frac{1}{3}\right)\left(x^2-3x+1\right)^{-4/3}(2x-3)-9\frac{3}{2}\left(5x-7\right)^{1/2}5$$
- Wat is de oplossing?
  Antwoord :
  $$\frac{18x^2}{5\sqrt[5]{\left(1-2x^3\right)^4}} - \frac{8x-12}{3\sqrt[3]{\left(x^2-3x+1\right)^4}} + \frac{135\sqrt{5x-7}}{2}$$

3. Bereken $D\left(\sqrt[6]{\frac{1}{\sin^5 x}}\right)$

- Hoe schrijf je dit als een machtsverheffing die je moet afleiden?
  Antwoord :
  $$D\left((\sin x)^{-5/6}\right)$$

- Wat bekom je als die macht afleidt?
  Antwoord :
  $$-\frac{5}{6}(\sin x)^{-11/6}D(\sin x)$$
  (denk eraan dat je na het afleiden van de macht door het gebruik van de kettingregel de sinusfunctie nog moet afleiden).
- Wat bekom je nadat je ook de sinusfunctie nog afleidt?
  Antwoord :
  $$-\frac{5}{6}(\sin x)^{-11/6}\cos x$$
- Wat is de oplossing?
  Antwoord :
  $$-\frac{5\cos x}{6\sqrt[6]{\sin^{11} x}}$$

4. $D\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}\right)\right)$

- Welke functie moet je als eerste afleiden en wat bekom je dan?
  Antwoord : Je moet eerst de functie cos afleiden. Je bekomt dan
  $$-\sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}\right)D\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}\right)$$
  Denk er aan dat je na het afleiden van de cosinusfunctie vanwege de kettingregel de functie nog moet afleiden waarop de cosinus werkt.
- welke macht moet je vervolgens afleiden en wat bekom je dan?
  Antwoord : Omdat $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/3}$ moet je een macht $-1/3$ afleiden. Je bekomt
  $$-\sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(1+x^2\right)^{-4/3}D\left(1+x^2\right)$$
- Wat bekom je als je ook die veelterm afleidt?
  Antwoord :
  $$-\sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(1+x^2\right)^{-4/3}2x$$
- Wat is de oplossing?
  Antwoord :
  $$\frac{2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}\right)}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}$$

5. $D\left(\frac{1}{1+e^{5x}}\right)$

- Wat bekom je na het gebruik van de rekenregel $D\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{1}{f(x)^2}Df(x)$?
  Antwoord :
  $$-\frac{1}{(1+e^{5x})^2}D\left(1+e^{5x}\right)$$

- Wat bekom je door het afleiden van de e-macht?
  Antwoord :
  $$-\frac{1}{\left(1+e^{5x}\right)^2}e^{5x}D(5x)$$
  (denk aan het gebruik van de kettingregel).
- Wat bekom je als afgeleide?
  Antwoord :
  $$-\frac{1}{\left(1+e^{5x}\right)^2}e^{5x}5$$
- Wat is de oplossing?
  Antwoord :
  $$-\frac{5e^{5x}}{\left(1+e^{5x}\right)^2}$$

6. $D\left(\cos\left(\tan\left(x^4\right)\right)\right)$

- Wat bekom je nadat je de eerste keer de kettingregel gebruikt?
  Antwoord :
  $$-\sin\left(\tan\left(x^4\right)\right)D\left(\tan\left(x^4\right)\right)$$
- Wat bekom je nadat je de tweede keer de kettingregel gebruikt?
  Antwoord :
  $$-\sin\left(\tan\left(x^4\right)\right)\frac{1}{\cos^2\left(x^4\right)}D\left(x^4\right)$$
- Wat bekom je nadat je de derde keer de kettingregel gebruikt?
  Antwoord :
  $$-\sin\left(\tan\left(x^4\right)\right)\frac{1}{\cos^2\left(x^4\right)}4x^3$$
- Wat is de oplossing?
  Antwoord :
  $$-\frac{4x^3\sin\left(\tan\left(x^4\right)\right)}{\cos^2\left(x^4\right)}$$

7. $D\left(\sin\left(e^{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}\right)\right)$

- Wat bekom je nadat je de eerste keer de kettingregel toepast?
  Antwoord :
  $$\cos\left(e^{arctan\left(\frac{1}{x}\right)}\right)D\left(e^{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}\right)$$
- Wat bekom je nadat je de tweede keer de kettingregel toepast?
  Antwoord :
  $$\cos\left(e^{arctan\left(\frac{1}{x}\right)}\right)e^{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}D\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

- Wat bekom je nadat je de derde keer de kettingregel toepast?
  Antwoord :
$$\cos\left(e^{arctan\left(\frac{1}{x}\right)}\right) e^{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} D\left(\frac{1}{x}\right)$$
- Wat bekom je nadat je de vierde keer de kettingregel toepast?
  Antwoord :
$$\cos\left(e^{arctan\left(\frac{1}{x}\right)}\right) e^{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
- Wat is de oplossing?
  Antwoord:
$$-\frac{\cos\left(e^{arctan\left(\frac{1}{x}\right)}\right) e^{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}}{1+x^2}$$

8. $D\left(\sin\left(x^3\right) e^{5x}\right)$

- Wat bekom je door het toepassen van de rekenregel van de afgeleide van een product ($D(uv) = uDv + vDu$)?
  Antwoord :
$$\sin\left(x^3\right) D\left(e^{5x}\right) + e^{5x} D\left(\sin\left(x^3\right)\right)$$
- Wat bekom je als je op de twee afgeleiden de kettingregel toepast?
  Antwoord :
$$\sin\left(x^3\right) e^{5x} D(5x) + e^{5x}\cos\left(x^3\right) D\left(x^3\right)$$
- Wat is de oplossing?
  Antwoord :
$$5\sin\left(x^3\right) e^{5x} + 3x^2 e^{5x}\cos\left(x^3\right)$$

9. $D\left(\arcsin(7x)\log_5(1+9x)\right)$

- Wat bekom je door het toepassen van de rekenregel van de afgeleide van een product?
  Antwoord :
$$\arcsin(7x) D\left(\log_5(1+9x)\right) + \log_5(1+9x) D\left(\arcsin(7x)\right)$$
- Wat bekom je als je op de twee afgeleiden de kettingregel toepast?
  Antwoord :
$$\arcsin(7x)\frac{\ln 5}{1+9x} D(1+9x) + \log_5(1+9x)\frac{1}{\sqrt{1-(7x)^2}} D(1+7x)$$
- Wat is de oplossing?
  Antwoord :
$$\frac{9(\ln 5)\arcsin(7x)}{1+9x} + \frac{7\log_5(1+9x)}{\sqrt{1-49x^2}}$$

10. $D\left(\frac{\arctan(x^3)}{\cos(4x-1)}\right)$

- Wat bekom je door het toepassen van de rekenregel van de afgeleide van een deling ($D\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vDu-uDv}{v^2}$)?
  Antwoord :
  $$\frac{\cos(4x-1)D\left(\arctan\left(x^3\right)\right) - \arctan\left(x^3\right)D\left(\cos(4x-1)\right)}{\cos^2(4x-1)}$$

- Wat bekom je als je op de twee afgeleiden de kettingregel toepast?
  Antwoord :
  $$\frac{\cos(4x-1)\frac{1}{1+x^6}D\left(x^3\right) - \arctan\left(x^3\right)\left(-\sin(4x-1)\right)D(4x-1)}{\cos^2(4x-1)}$$

- Wat is de oplossing?
  Antwoord :
  $$\frac{3x^2\cos(4x-1) + 4(1+x^6)\arctan\left(x^3\right)\sin(4x-1)}{(1+x^6)\cos^2(4x-1)}$$

11. $D\left(\frac{\sin(x^5)}{\cos^5(x)}\right)$

- Wat bekom je door het toepassen van de rekenregel van de afgeleide van een deling?
  Antwoord :
  $$\frac{\cos^5(x)D\left(\sin\left(x^5\right)\right) - \sin\left(x^5\right)D\left(\cos^5(x)\right)}{\cos^{10}(x)}$$

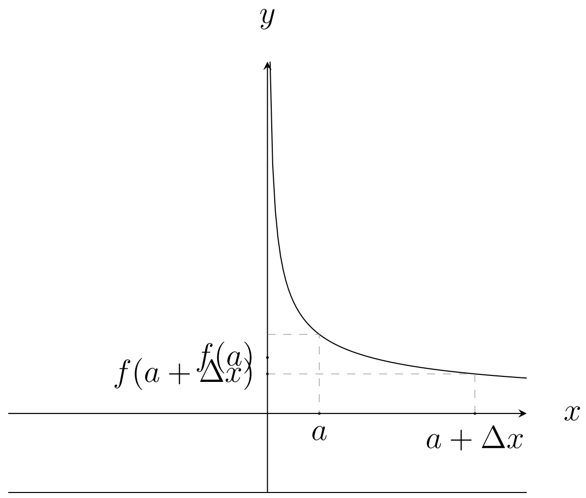
- Wat bekom je als je op de twee afgeleiden de kettingregel toepast?
  Antwoord :
  $$\frac{\cos^5(x)\cos\left(x^5\right)D\left(x^5\right) - \sin\left(x^5\right)5\cos^4(x)D(\cos(x))}{\cos^{10}(x)}$$

- Wat is de oplossing?
  Antwoord :
  $$\frac{5x^4\cos^5(x)\cos\left(x^5\right) + \sin\left(x^5\right)5\cos^4(x)\sin(x)}{\cos^{10}(x)}$$

1.9 Afgeleide en verloop van een functie

Je weet dat $Df(a)$ aangeeft met welke snelheid functiewaarden veranderen als x vanuit $x=a$ verandert. Als $Df(a)<0$ dan is dat met een negatieve snelheid. Wat betekent dat?

Dit betekent dat de functiewaarde $f(x)$ afneemt als je start met $x=a$ en dan x laat toenemen. Dit komt overeen met de volgende figuur.



In zulk geval heet de functie f dalend in a.

Op dezelfde manier bekom je dat als $Df(a) > 0$ dan is de functie stijgend in a. Je bekomt de volgende verbanden tussen Df en het verloop van f.

Eigenschap 5 *Als de eerste afgeleide $f'(x) > 0$ is in een interval, dan zal de functie in dat interval **stijgen**.*

*Als de eerste afgeleide $f'(x) < 0$ is in een interval, dan zal de functie in dat interval **dalen**.*

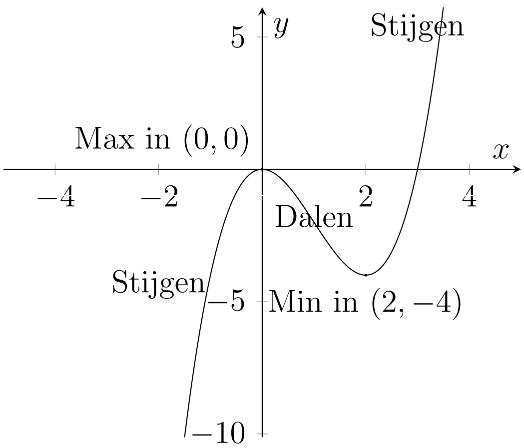
*De functie zal een **relatief of lokaal extremum (maximum of minimum)** bereiken waar de kromme overgaat van een stijgende naar een dalende functie of omgekeerd. Dit gebeurt wanneer de eerste afgeleide van teken verandert.*

Een functie $f(x)$ heeft in het punt (x_0, y_0) een extremum (relatief minimum of relatief maximum) als in dat punt aan volgende voorwaarden voldaan zijn: $f'(x_0) = 0$ en $f''(x_0) \neq 0$ Voor $f''(x_0) > 0$ is het extremum een lokaal minimum.

Voor $f''(x_0) < 0$ is het extremum een lokaal maximum.

Voorbeeld 1

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x^2 \\ f(x) &= 3x^2 - 6x \\ f''(x) &= '6x - 6 \end{aligned}$$



Voor welke waarden van x is de afgeleide gelijk aan 0? Stel dat $f'(x) = 0$, dus

$$3x^2 - 6x = 0,$$

maar aangezien $3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ moet dan gelden dat

$$3x = 0 \text{ of } x - 2 = 0$$

dus

$$x = 0 \text{ of } x = 2$$

zodat meteen volgt dat enkel $f'(0) = 0$ en $f'(2) = 0$.

Om de y-coördinaat van de bijhorende punten te vinden, berekenen we de functiewaarden van f in 0 en 2. We vinden

$$\begin{aligned} f(0) &= (0)^3 - 3.(0)^2 = 0 \\ f(2) &= (2)^3 - 3.(2)^2 = 8 - 12 = -4 \end{aligned}$$

De functie bezit in die punten $(0,0)$ en $(2,-4)$ dus een horizontale raaklijn. Zijn de punten ook extrema? Aangezien $f''(0) = -6 < 0$ is het punt $(0,0)$ een lokaal maximum. Verder is $f''(2) = 6 > 0$ en dus is $(2,.4)$ een lokaal minimum.

Aangezien de eerste afgeleide een tweedegraadsfunctie is, zullen we het tekenverloop van de tweedegraadsfunctie toepassen.

x		0		2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\uparrow$	$\frac{0}{\text{max}}$	$\downarrow$	$\frac{-4}{\text{min}}$	$\uparrow$

1.10 Test afgeleiden

2 Integralen

2.1 Inleidend voorbeeld

Zie filmpje MOOC.

2.2 Primitieve functies en onbepaalde integralen

Beschouw een reële functie van één reëel veranderlijke, bijvoorbeeld de functie:

$$F(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1.$$

Deze functie heeft als afgeleide:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{d} = 3x^2 - 6x + 1.$$

Men zegt dat $F(x)$ een **stamfunctie** of een **primitieve functie** is van $f(x)$.

Definitie Een primitieve functie $F(x)$ van een functie $f(x)$ is een willekeurige functie die als afgeleide naar x $f(x)$ heeft:

$$F'(x) = DF(x) = f(x)$$

Het zoeken naar een primitieve functie van een functie is eigenlijk het omgekeerde van afleiden.
$F(x)$ is niet de enige functie die als afgeleide $f(x)$ heeft.
De functies:

$$\begin{aligned} F(x) &= x^3 - 4x^2 + x - 1 \\ F(x) &= x^3 - 4x^2 + x + 3 \\ F(x) &= x^3 - 4x^2 + x - 2 \end{aligned}$$

Hebben allen als afgeleide:

$$f(x) = 3x^2 - 8x + 1$$

Functies die slechts een constante van elkaar verschillen, hebben immers allen dezelfde afgeleide. Omgekeerd kan men ook aantonen dat functies die dezelfde afgeleide hebben op een interval I een constant verschil op dat interval I hebben.

Definitie De verzameling van alle primitieve functies van $f(x)$ noemt men de onbepaalde integraal van $f(x)$. Als $F(x)$ een primitieve functie van $f(x)$ is dan schrijft men:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Terminologie:

$\int$	Het integraalteken
$f(x)$	De integrand (de te integreren functie)
dx	De differentiaal van de integratieveranderlijke
C	De integratieconstante

2.3 Stelling van Newton Leibniz

Zie filmpje MOOC.

2.4 Bijzondere onbepaalde integralen

Iedere afgeleide van een bijzondere functie geeft aanleiding tot een bijzondere onbepaalde integraal.

Voorbeeld 1 Omdat $D(\sin x) = \cos x$ is $\int \cos x dx = \sin x + C$.

Voorbeeld 2 Omdat $Dx^n = nx^{n-1}$ is $\int nx^{n-1}dx = x^n + C$.

Als je dit wat herwerkt bekom je $D\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right) = x^m$ en dus $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$. Deze onbepaalde integraal geldt voor alle $m \neq -1$. Die laatste voorwaarde komt door de noemer $m+1$ die niet 0 mag zijn.

Voorbeeld 3 Omdat $D(\ln|x|) = \frac{1}{x}$ is $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$. Vanwege $\frac{1}{x} = x^{-1}$ staat hier ook een uitkomst voor $\int x^m dx$ als $m = -1$, namelijk $\int x^{-1}dx = \ln|x| + C$.

Op deze wijze ontstaat de volgende lijst van bijzondere onbepaalde integralen.

Rekenregel

$$\int \mathrm{dx} = x + C$$

$$\int x^n \, \mathrm{dx} = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$$

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int e^x \, \mathrm{dx} = e^x + C$$

$$\int a^x \, \mathrm{dx} = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x \, \mathrm{dx} = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, \mathrm{dx} = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{dx} = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, \mathrm{dx} = -\cot x + C$$

$$\int \sec^2 x \, \mathrm{dx} = \int \frac{1}{\cos^2 x \, \mathrm{dx}} = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x \, \mathrm{dx} = \int \frac{1}{\sin^2 x} \, \mathrm{dx} = -\cot x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

2.5 Eenvoudige rekenregels

Uit $D(f+g) = Df + Dg$ bekom je

Eigenschap 6 *Onbepaalde integraal van een som :*

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Uit $D(cf) = cDf$ (c is een getal) bekom je

Eigenschap 7 *Onbepaalde integraal van een functie vermenigvuldigd met een constante :*

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

Met behulp van deze eigenschappen kun je alle integralen van veeltermfuncties uitrekenen.

Voorbeeld 1

$$\begin{aligned}
\int(7x^3-4x^2+9x+13)dx &= \int 7x^3dx+\int -4x^2dx+\int 9xdx+\int 13dx \text{ (rekenregel som)}\\
&= 7\int x^3dx-4\int x^2dx+9\int xdx+13\int dx \text{ (rekenregel product met c)}\\
&= \frac{7x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+\frac{9x^2}{2}+13x+C \ (\int x^ndx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C)
\end{aligned}$$

Voorbeeld 2

$$\begin{aligned}
\int(x+2)^2\,\mathrm{dx} &= \int(x^2+4x+4)\,\mathrm{dx}\\
&= \int x^2\,\mathrm{dx}+4\int x\,\mathrm{dx}+4\int \mathrm{dx}\\
&= \frac{x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}+4x+C\\
&= \frac{x^3}{3}+2x^2+4x+C
\end{aligned}$$

Algemener kun je onbepaalde integralen uitrekenen van de vorm zoals in het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 3

$$\begin{aligned}
\int(7\sqrt[3]{x^5}+\frac{2}{\sqrt[5]{x}}-\frac{3}{x})dx &= \int(7x^{5/3}+2x^{-1/5}-\frac{3}{x})dx\\
&= 7\int x^{5/3}dx+2\int x^{-1/5}dx-3\int\frac{dx}{x}\\
&= \frac{7x^{8/3}}{8/3}+\frac{2x^{4/5}}{4/5}-3\ln|x|+C\\
&= \frac{21\sqrt[3]{x^8}}{8}+\frac{5\sqrt[5]{x^4}}{2}-3\ln|x|+C
\end{aligned}$$

Sommige sommen zie je direct zoals in volgend voorbeeld

Voorbeeld 4

$$\begin{aligned}
\int(3\sin x+5\cos x)\,\mathrm{dx} &= 3\int\sin x\,\mathrm{dx}+5\int\cos x\,\mathrm{dx}\\
&= 3(-\cos x)+5\sin x+C\\
&= -3\cos x+5\sin x+C
\end{aligned}$$

Andere sommen zie je niet zo direct zoals in volgend voorbeeld

Voorbeeld 5

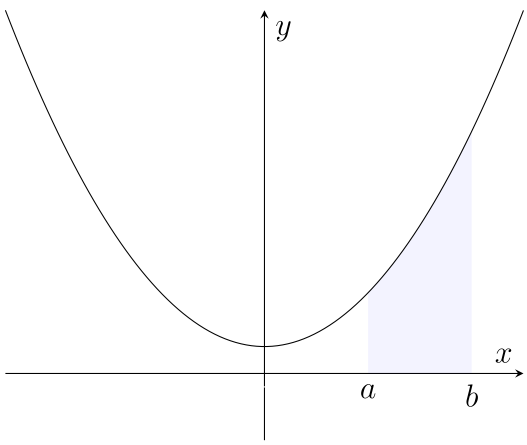
$$\begin{aligned}
\int \tan^2 x dx &= \int \frac{\sin^2 x}{cos^2 x} dx \\
&= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx \text{ (hoofdformule van goniometrie)} \\
&= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\
&= \int \frac{1}{\cos^2 x} - \int dx \\
&= \tan x - x + C
\end{aligned}$$

2.6 Eenvoudige rekenregels - voorbeeld

Zie filmpje MOOC.

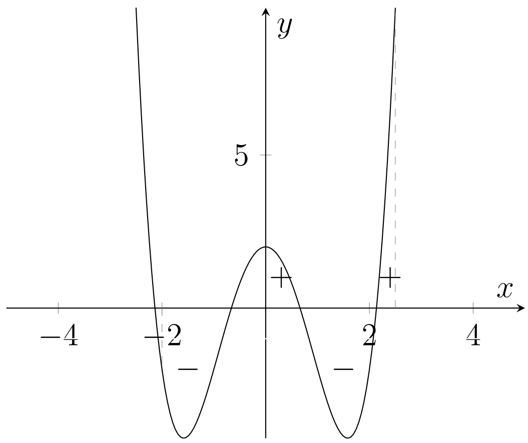
2.7 De bepaalde integraal

Voor een functie f continu en positief op een interval I en a, b binnen I met $a < b$ noteren we $\int_a^b f(x)dx$ voor de oppervlakte van het vlakdeel begrensd door de x-as, de grafiek van f en de verticale rechten $x = a$ en $y = b$. (Je ziet die oppervlakte gearceerd in de figuur.)



Algemener, als f continu is op een interval I en a, b binnen I met $a < b$ dan is $\int_a^b f(x)dx$ gedefinieerd als de som van de oppervlakten tussen de x-as en de grafiek waar de functie f

positief is minus de som van de oppervlakten tussen de x-as en de grafiek waar de functie f negatief is. Een + op de volgende figuur duidt een oppervlakte aan die positief meetelt en een - duidt een oppervlakte aan die negatief meetelt.



Nog algemener, als f continu is op een interval I en a en b binnen I dan is $\int_a^b f(x)dx$

reeds gedefinieerd als $a < b$

$-\int_b^a f(x)dx$ als $a > b$

0 als $a = b$.

Je noemt $\int_a^b f(x)dx$ de bepaalde integraal van de functie f van a naar b.

Dank zij de volgende eigenschap kun je bepaalde integralen uitrekenen door middel van onbepaalde integralen.

Eigenschap 8 *Als f een continue functie is op een interval I en F is een primitieve functie van f dan geldt voor elementen a en b van I dat*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Vorige eigenschap is een gevolg van de belangrijke stelling van Newton-Leibnitz die volgend verband geeft tussen afgeleiden en bepaalde integralen.

Eigenschap 9 *Als f een functie is continu op een interval I en a is een element van I dan voldoet de functie $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ aan $DF(x) = f(x)$ voor alle x in I.*

Deze stelling van Newton-Leibnitz wordt aan de hand van een filmpje getoond in een voorbeeld.

2.8 De bepaalde integraal - voorbeeld

Zie filmpje MOOC.

2.9 Berekenen van bepaalde integralen

Uit het voorgaande weten we dat uit $\int f(x)dx = F(x) + C$ volgt dat $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ (onder voorwaarde dat f continu is op een interval dat a en b bevat).

Hierbij maakt men vaak gebruik van de voorstellingswijze:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Voorbeeld 1

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{dx} = [-\cos x]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = 0 + 1 = 1$$

$$\int_1^3 2x^2\,\mathrm{dx} = 2\int_1^3 x^2\,\mathrm{dx} = [\frac{2x^3}{3}]_{x=1}^{x=3} = \frac{2.27}{3} - \frac{2-1}{3} = 18 - \frac{2}{3} = \frac{52}{3}$$

$$\int_{-3}^2 e^x\,\mathrm{dx} = [e^x]_{x=-3}^{x=2} = e^2 - e^{-3} \approx 7.339...$$

Opmerking Bij berekening van de bepaalde integraal, noteer je de onbepaalde integraal tussen vierkante haken. Aan de rechterkant schrijf je onderaan de ondergrens en bovenaan de bovengrens. De integratieconstante C noteer je niet bij de berekening van de bepaalde integraal.

Eigenschap 10 *Bepaalde integraal van een som*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Eigenschap 11 *Bepaalde integraal van een functie vermenigvuldigd met een getal*

$$\int_a^b c.f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

Eigenschap 12 *Opsplitsing van grenzen van een bepaalde integraal*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Uit de defintie volgen ook nog de volgende twee rekenregels:

Rekenregel

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Voorbeeld 2

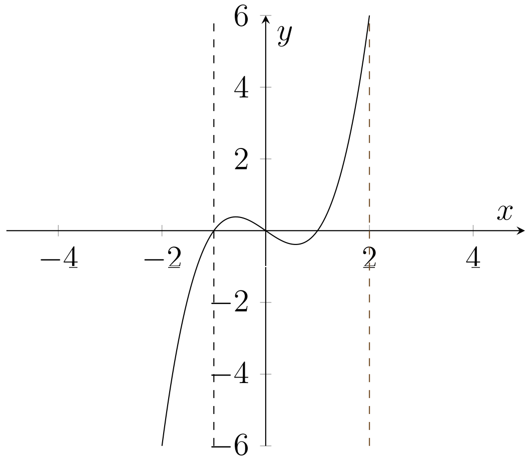
$$\begin{aligned}
\int_1^5 [4-(x-3)^2]\,\mathrm{dx} &= \int_1^5 4\,\mathrm{dx} - \int_1^5 (x-3)^2\,\mathrm{dx} \\
&= 4\int_1^5 \mathrm{dx} - \int_1^5 (x^2-6x+9)\,\mathrm{dx} \\
&= 4\int_1^5 \mathrm{dx} - \int_1^5 x^2\,\mathrm{dx} + 6\int_1^5 d\;dx - 9\int_1^5 \mathrm{dx} \\
&= 4[x]_{x=1}^{x=5} - [\frac{x^3}{3}]_{x=1}^{x=5} + 6[\frac{x^2}{2}]_{x=1}^{x=5} - 9[x]_{x=1}^{x=5} \\
&= 20 - 4 - \frac{125}{3} + \frac{1}{3} + 75 - 3 - 45 + 9 \\
&= 52 - \frac{124}{3} \\
&= \frac{156}{3} - \frac{124}{3} \\
&= \frac{32}{3}
\end{aligned}$$

2.10 Oppervlakte berekenen met bepaalde integralen - voorbeeld

Zie filmpje MOOC.

2.11 Oppervlakte berekenen met bepaalde integralen

Voorbeeld 1 Bereken de oppervlakte begrensd door $y = x^3 - x$, $x = -1$, $x = 2$ en de x-as, zie de figuur.



Tekenonderzoek van de functie:

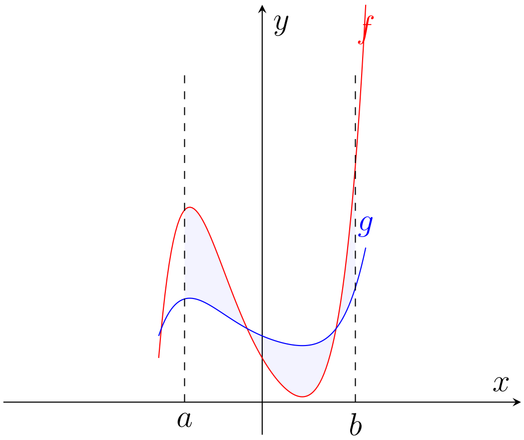
$$y = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$$

De nulwaarden zijn dus 0, -1 en 1. Het tekenverloop is

x		-1		0		1	
x	-	-	-	0	+	+	+
x^2-2	+	0	-	-	-	0	+
$y = x^3 - x$	-	0	+	0	-	0	+

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{2} |x^3 - x|\,\mathrm{dx} = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,\mathrm{dx} - \int_{0}^{1} (x^3 - x)\,\mathrm{dx} - \int_{1}^{2} (x^3 - x)\,\mathrm{dx} \\ &= [\frac{x^4}{4}\frac{x^2}{2}]_{-1}^{0} - [\frac{x^4}{4}\frac{x^2}{2}]_{0}^{1} + [\frac{x^4}{4}\frac{x^2}{2}]_{1}^{2} \\ &= 0 - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) + 0 + (4-2) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 2 + \frac{1}{4} \\ &= \frac{11}{4} \end{aligned}$$

Algemener, stel dat f en g twee functies zijn die allebei continu zijn op een interval I. Stel dat a en b tot I behoren met $a < b$. Op figuur hieronder is de gearceerde oppervlakte de oppervlakte begrensd door de grafieken van $f(x)$ en $g(x)$ en de verticale rechten $x = a$ en $x = b$.



Deze oppervlakte bereken je met de volgende bepaalde integraal

$$\int_a^b |g(x) - f(x)| \, \mathrm{dx}$$

Methode:

- Maak een schets.
- Bepaal de grenzen van het interval welke het gebied begrenzen. Wanneer je de oppervlakte van het gebied bepaald door twee krommen wil bereken, zoek je de snijpunten van de krommen.
- Duid door middel van een rechthoekje een infinitesimaal klein deeltje aan. Duid op de figuur de breedte en de hoogte van het rechthoekje aan.
- Maak de som van de "deelintegralen". Elke deelintegraal stelt een oppervlakte voor en moet positief zijn.
- Oppervlakte gebied begrensd door $y = f(x)$ en $y = g(x)$:

$$S = \int_{x_2}^{x_1} |f(x) - g(x)| \, \mathrm{dx}$$

Voorbeeld 2 Bereken de oppervlakte tussen de rechte $y = x$ en de parabool $y = x^2$.

$y = x$: stijgende rechte door de oorsprong $= 1^{\text{ste}}$ bissectrice.

$y = x^2$: dalparabool met top in de oorsprong en de y-as als symmetrieas.

Om de krommen te kunnen schetsen zoek je best nog enkele punten die voldoen aan de vergelijking. De punten vind je hier door in de vergelijking willekeurige -waarden in te vullen en de bijhorende -coördinaat te berekenen.

Hierboven zie je de grafiek van beide functies. De oppervlakte die we wensen te berekenen is de oppervlakte tussen de twee krommen. De verticale strookjes zullen dus moeten vertrekken van het eerste snijpunt en moeten stoppen bij het tweede snijpunt. Dit zijn de onder- en bovengrenzen van de integraal.

De hoogte van het strookje is $x - x^2$, de breedte is dx, de oppervlakte van het rechthoekje is dan: We bepalen nu de grenzen van de integraal: dit zijn de x-waarden van de snijpunten van de parabool en de rechte, waar tussen de verticale strookjes gelegen zijn.

Om deze snijpunten te vinden, lossen we de volgende vergelijking op:

$$x = x^2 \iff x - x^2 = 0 \iff x(1-x) = 0$$

De x-waarden van de snijpunten zijn dus: $x = 0$ en $x = 1$. De oppervlakte van het gebied tussen de parabool en de rechte vinden we dan door de volgende integraal:

$$\int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{dx} = [\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

2.12 Test integralen

3 Substitutie en partiële integratie

3.1 Onbepaalde integraal en de kettingregel voor het afleiden

Zie filmpje MOOC.

3.2 Differentialen en de substitutiemethode

Voor een functie $y = f(x)$ en $a \in \operatorname{dom} f$ is $Df(a)$ de richtingscoëfficiënt van de raaklijn T aan de grafiek G van f in $P(a, f(a))$. De vergelijking van de raaklijn is dan

$$y - f(a) = Df(a).(x-a)\ .$$

Het punt op die raaklijn dat behoort bij $x = a$ voldoet aan $y = f(a)$ en is dus $P(a; f(a))$ (wat logisch is). Als je bij die x-waarden Δx bijtelt dan vul je $x = a + \Delta x$ in. Je bekomt dan de volgende waarde van y op de raaklijn:

$$y - f(a) = Df(a).(a + \Delta x - a) = Df(a).\Delta x$$

$$y = f(a) + Df(a).\Delta x\ .$$

De verandering van de y-waarde op de raaklijn is dan

$$\Delta y = Df(a).\Delta x\ .$$

Hierdoor wordt Δy een functie in Δx en je noemt deze functie de differentiaal van f in a. Je noteert $df(a)$ voor deze functie, dus

$$df(a) = Df(a).\Delta x \ .$$

Neem je als bijzonder geval $f(x) = x$ dan is $Df(a) = 1$ en dus $df(a) = \Delta x$. Deze functie in Δx noem je de differentiaal van x en je schrijft dx. Je bekomt dus

$$dx = \Delta x \ .$$

Daarom schrijft men ook

Definitie

$$df(a) = Df(a).dx \ .$$

Opmerking Let wel op: het gaat hier over twee functies in de veranderlijke Δx die een veelvoud zijn van elkaar.

Als je de oorspronkelijke functie noteert als $y = f(x)$ dan schrijf je ook $dy(a)$ in plaats van $df(a)$. Je bekomt dan

$$dy(a) = Df(a).dx \ .$$

Vervang je a door een willekeurig getal x dan schrijf je

$$dy = Df(x).dx \ .$$

Een onbepaalde integraal van een functie $y = f(x)$ genoteerd $\int f(x)dx$ kun je ook opvatten als een onbepaalde integraal van de differentiaal $f(x)dx$.

Uit de kettingregel voor het afleiden vinden we

$$\int Dg(f(x))Df(x) = g(f(x)) + C \ .$$

Stel nu $u = f(x)$, dan is $du = Df(x)dx$ en dan bekom je

$$\int Dg(f(x))Df(x) = \int Dg(u)du \ .$$

Per definitie is $\int Dg(u)du = g(u) + C$ en door u terug in te vullen vind je

Definitie

$$\int Dg(f(x))Df(x)dx = \int Dg(u)du = g(u) + C = g(f(x)) + C \ .$$

Omdat je in deze redenering $f(x)$ vervangt (substitutie) door een variabele u noem je dit de methode van substitutie. Het is gewoon een handige werkwijze om de kettingregel van het afleiden te gebruiken voor het berekenen van een onbepaalde integraal.

We hermaken nu de twee laatste voorbeelden uit vorig deel.

Voorbeeld 1 $\int \sqrt[3]{x+7}dx$

Stel $u = x+7$, dan is $du = D(x+7)dx = dx$. Je bekomt

$$\int \sqrt[3]{x+7}dx = \int \sqrt[3]{u}du = \int u^{1/3}du =$$

$$= \frac{u^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3u^{4/3}}{4} + C = \frac{3\sqrt[3]{(x+7)^4}}{4} + C\ .$$

Voorbeeld 2 Een iets moeilijker voorbeeld dat aantoont dat je niet steeds dx moet vervangen: $\int \frac{xdx}{x^2+1}$. (Dit lijkt mij geschikt om door middel van een filmpje te geven.)

Stel $u = x^2+1$ dan is $du = 2xdx$ en dus $xdx = \frac{du}{2}$. Je bekomt

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \int \frac{du/2}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C = \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) + C.$$

3.3 Differentialen en de substitutiemethode - voorbeeld

Zie filmpje MOOC.

3.4 Voorbeelden van de substitutiemethode

Je leest nog enkele voorbeelden op het berekenen van integralen door middel van substitutie.

Voorbeeld 1 $\int e^{5x}dx$

Stel je $u = 5x$ dan is $du = 5dx$.

Je vervangt dan dx door $\frac{du}{5}$ en je bekomt

$$\int e^{5x}dx = \int e^u\frac{du}{5} = \frac{1}{5}\int e^u du = \frac{1}{5}e^u + C = \frac{1}{5}e^{5x} + C\ .$$

Voorbeeld 2 $\int \frac{dx}{1+9x^2}$

Deze integraal lijkt sterk op $\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + C$.

Stel $u = 3x$, dan is $du = \frac{du}{3}$ en je bekomt

$$\int \frac{dx}{1+9x^2} = \int \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{1+u^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\arctan u + C = \frac{1}{3}\arctan(3x) + C\ .$$

Voorbeeld 3 $\int \frac{xdx}{\sqrt{16-x^4}}$

Als je substitutie $u = 16 - x^4$ overweegt dan bekom je $du = -4x^3 dx$. In de teller staat enkel x.
De teller suggereert daarom eerder $u = x^2$ te gebruiken.
Omdat je $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C$ kent schrijf je

$$16 - x^4 = 16\left(1 - \frac{x^4}{16}\right) = 16\left(1 - \left(\frac{x^2}{4}\right)^2\right)\ .$$

De integraal die je moet oplossen is dus

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{16-x^4}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{16\left(1-\left(\frac{x^2}{4}\right)^2\right)}} = \frac{1}{4}\int \frac{xdx}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{4}\right)^2}}\ .$$

Stel $u = \frac{x^2}{4}$, dan is $du = \frac{xdx}{2}$ en dus $xdx = 2du$. De integraal wordt $\frac{1}{4}\int \frac{2du}{\sqrt{1-u^2}}$, dus

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{16-x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}\arcsin u + C = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x^2}{4}\right) + C\ .$$

Voorbeeld 4 $\int \frac{(\arctan x)^3 dx}{1+x^2}$

Stel $u = \arctan x$. Dan is $du = \frac{dx}{1+x^2}$ en je bekomt

$$\int \frac{(\arctan x)^3 dx}{1+x^2} = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{(\arctan x)^4}{4} + C\ .$$

Je merkt dat de juiste keuze maken bij substitutie wel wat oefenen vergt.

3.5 Substitutie bij bepaalde integralen

Stel dat je $\int_a^b f(x)dx$ moet berekenen en dat je $\int f(x)dx$ kunt berekenen door middel van substitutie. Als je eerst de onbepaalde integraal volledig uitrekent en daarna de grenzen invult, dan is er geen enkel probleem. Je kunt ook in de bepaalde integraal zelf substitutie toepassen. Je moet dan wel de grenzen aanpassen.

Voorbeeld 1 $\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx$

Je lost eerst de onbepaalde integraal $\int \sqrt{2x+1}$ op. Je stelt $t = 2x+1$ dus $dt = 2dx$ en je bekomt $\int \sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}dt = \frac{1}{2}\frac{1}{3/2}t^{3/2} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3} + C$. Hieruit vind je

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx &= \frac{1}{3}\left[\sqrt{(2x+1)^3}\right]_0^4 \\
&= \frac{1}{3}\left(\sqrt{9^3}-\sqrt{1^3}\right) \\
&= \frac{26}{3}
\end{aligned}$$

Let op: $\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx \neq \frac{1}{2}\int_0^4 \sqrt{t}dt$ immers $\int_0^4 \sqrt{t}dt = \frac{3}{2}\sqrt{t^3}|_0^4 = \frac{3}{2}\left(\sqrt{4^3}-\sqrt{0^3}\right) = 12$ en $\frac{1}{2}12 = 8 \neq \frac{26}{3}$.

De volgende redenering is wel goed om $\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx$ te berekenen. Stel $t = 2x+1$ dan is $dt = 2dx$ en $t = 1$ als $x = 0$ en $t = 9$ als $x = 4$. Je bekomt

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx &= \frac{1}{2}\int_1^9 \sqrt{t}dt \\
&= \left[\frac{1}{2}\frac{1}{3/2}\sqrt{t^3}\right]_1^9 \\
&= \frac{1}{3}\left(\sqrt{9^3}-\sqrt{1^3}\right) \\
&= \frac{26}{3}
\end{aligned}$$

In deze laatste berekening pas je de genzen bij de substitutie aan.

3.6 Substitutie bij bepaalde integralen - voorbeeld

Zie filmpje MOOC.

3.7 Oefeningen op de substitutiemethode

Je krijgt nog enkele oefeningen op het integreren door middel van substitutie.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{1-4x}}$

   - Welke substitutie?
     Antwoord: $u = 1-4x$

- Welke integraal bekom je dan?
  Antwoord: Uit $du = -4dx$ volgt $dx = -\frac{du}{4}$. Je bekomt
$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{1-4x}} = -\frac{1}{4}\int \frac{du}{\sqrt[5]{u}}$$
- Hoe bekom je daaruit de oplossing?
  Antwoord:
$$-\frac{1}{4}\int \frac{du}{\sqrt[5]{u}} = -\frac{1}{4}\int u^{-1/5}du = -\frac{1}{4}\frac{u^{4/5}}{4/5} + C = -\frac{5}{16}\sqrt[5]{1-4x} + C$$
- Wat is de oplossing?
$$-\frac{5}{16}\sqrt[5]{1-4x} + C$$

2. $\int \frac{dx}{2x-9}$

- Welke substitutie?
  Antwoord: $u = 2x - 9$
- Welke integraal bekom je dan?
  Antwoord: Uit $du = 2dx$ bekom je $dx = \frac{du}{2}$. Je bekomt
$$\int \frac{dx}{2x-9} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$
- Hoe bekom je daaruit de oplossing?
  Antwoord:
$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|2x-9| + C$$
- Wat is de oplossing?
$$\frac{1}{2}\ln|2x-9| + C$$

3. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+2}}$

- Welke substitutie?
  Antwoord: $t = x^2 + 2$
- Welke integraal bekom je dan?
  Antwoord: $x^3dx = \frac{1}{2}.x^2.2xdx$
  Omdat $t = x^2 + 2$ is $x^2 = t - 2$ en $dt = 2xdx$. Daardoor gaat x^3dx vervangen worden door $\frac{1}{2}(t-2)dt$.
  Bovendien wordt $\sqrt{x^2+2}$ vervangen door $\sqrt{t}$ en je bekomt
$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{2}\int \frac{t-2}{\sqrt{t}}dt$$

- Hoe bekom je daaruit de oplossing?

$$\frac{1}{2}\int \frac{t-2}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{t}{\sqrt{t}}dt - \frac{1}{2}\int \frac{2dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int t^{1/2}dt - \int t^{-1/2}dt = \frac{k1}{2}\frac{t^{3/2}}{3/2} - \frac{t^{1/2}}{1/2} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} - 2\sqrt{x^2+1} + C$$

- Wat is de oplossing?

$$\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} - 2\sqrt{x^2+1} + C$$

3.8 Test integraalrekening - substitutiemethode

TODO

3.9 Onbepaalde integralen en de productregel voor het afleiden

Zie filmpje MOOC.

3.10 Methode van partiële integratie

De productregel voor het afleiden is

$$D(f(x)g(x)) = Df(x).g(x) + f(x).Dg(x)\ .$$

Je kunt dit ook schrijven als

$$f(x)Dg(x) = D(f(x)g(x)) - g(x)Df(x)\ .$$

Omdat per definitie $\int D(f(x)g(x))dx = f(x)g(x) + C$ bekom je hieruit

$$\int f(x)Dg(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)Df(x)dx$$

We noteren dit met differentialen. We stellen $u = f(x)$ en $v = g(x)$ zodat $du = Df(x)dx$ en $dv = Dg(x)dx$. Je bekomt dan

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Voorbeeld 1 $\int xe^x dx$.

Stel $u = x$ en $dv = e^x dx$. Je vindt v uit $\int e^x dx = e^x + C$, dus $v = e^x$. Er geldt $du = dx$. Je bekomt

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C \ .$$

Het is belangrijk goed na te denken over de keuze van u en v. Voor het oplossen van $\int x \sin x dx$ zou je ook volgende keuze kunnen maken:

Stel $u = \sin x$ en $dv = xdx$. Uit $dv = xdx$ en $\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$ bekom je $v = \frac{x^2}{2}$. Uit $u = \sin x$ bekom je $du = \cos x dx$. Je bekomt

$$\int x \sin x dx = \frac{x^2}{2} \sin x - \int \frac{x^2}{2} \cos x dx \ .$$

Dit is correct, maar je moet $\int x \sin x dx$ vinden en je probeert dat te doen met $\int x^2 \cos x dx$. Deze laatste integraal is door de factor x^2 in plaats van de factor x moeilijker dan de integraal die je wil oplossen. Dit komt omdat je een verkeerde keuze maakt van u en van v. Je moet u afleiden en v vind je door te integreren. Dit moet er voor zorgen dat de integraal die je daarna nog moet uitrekenen er eenvoudiger uitziet dan de oorspronkelijke integraal.

Voorbeeld 2 $\int x^2 \ln x dx$.

Als je x^2 gaat afleiden dan wordt dit $2x$; dit is eenvoudiger. Je moet dan wel $\ln x$ integreren maar je kent $\int \ln x dx$ mogelijk nog niet.

Als je x^2 gaat integreren dan wordt dit $\frac{x^3}{3}$; dit is moeilijker. Maar je moet dan $\ln x$ afleiden en $D(\ln x) = \frac{1}{x}$. Dit is veel eenvoudiger.

Daaruit volgt dat de laatste keuze toch de meest geschikte is.

$u = \ln x$ en dus $du = \frac{dx}{x}$.

$dv = x^2 dx$ en dus $v = \frac{x^3}{3}$.

Hieruit bekom je

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx =$$
$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C \ .$$

3.11 Methode van partiële integratie - voorbeeld 1

Zie filmpje MOOC.

3.12 Methode van partiële integratie - voorbeeld 2

Zie filmpje MOOC.

3.13 Voorbeelden

Welke types van integralen kun je oplossen door gebruik te maken van partiële integratie?

Rekenregel **Types:**

$\int x^n \sin(ax)dx$
$\int x^n \cos(ax)dx$
$\int x^n e^{ax}dx$ met $n \in \mathbb{N}$ en $a \in \mathbb{R}$.

Je neemt $u = x^n$ en $dv = \sin(ax)dx$; $dv = \cos(ax)dx$; $dv = e^{ax}dx$.

Voorbeeld 1 $\int x^2 \cos\left(\frac{2x}{5}\right) dx$.
Neem $u = x^2$ en $dv = \cos\left(\frac{2x}{5}\right) dx$.
Dan is $du = 2xdx$ en uit $\int \cos\left(\frac{2x}{5}\right) dx = \frac{5}{2}\sin\left(\frac{2x}{5}\right) + C$ vind je dat je $v = \frac{5}{2}\sin\left(\frac{2x}{5}\right)$ kunt nemen.
Je bekomt
$$\int x^2 \cos\left(\frac{2x}{5}\right) dx = \frac{5}{2}x^2 \sin\left(\frac{2x}{5}\right) - 5\int x \sin\left(\frac{2x}{5}\right) dx\ .$$

Je past op de bekomen integraal opnieuw partiële integratie toe.
Je stelt $u = x$ en $dv = \sin\left(\frac{2x}{5}\right) dx$.
Je bekomt $du = dx$ en uit $\int \sin\left(\frac{2x}{5}\right) dx = -\frac{5}{2}\cos\left(\frac{2x}{5}\right) + C$ bekom je dat je $v = -\frac{5}{2}\cos\left(\frac{2x}{5}\right)$ kunt nemen.
Je bekomt

$$\begin{aligned}\int x \sin\left(\frac{2x}{5}\right) dx &= -\frac{5}{2}x \cos\left(\frac{2x}{5}\right) + \frac{5}{2}\int \cos\left(\frac{2x}{5}\right) dx &(1)\\ &= -\frac{5}{2}x \cos\left(\frac{2x}{5}\right) + \frac{25}{4}\sin\left(\frac{2x}{5}\right) + C &(2)\end{aligned}$$

Voor de op te lossen integraal bekom je

$$\begin{aligned}\int x^2\cos\left(\frac{2x}{5}\right)dx &= \frac{5}{2}x^2\sin\left(\frac{2x}{5}\right)-5\left(-\frac{5}{2}x\cos\left(\frac{2x}{5}\right)+\frac{25}{4}\sin\left(\frac{2x}{5}\right)\right)+C\\ &= \frac{5}{2}x^2\sin\left(\frac{2x}{5}\right)+\frac{25}{2}x\cos\left(\frac{2x}{5}\right)-\frac{125}{4}\sin\left(\frac{2x}{5}\right)+C\end{aligned}$$

Rekenregel **Types:**

$\int x^n \ln(x)dx$
$\int x^n \arcsin(ax)dx$
$\int x^n \arctan(ax)dx$ met $n \in \mathbb{N}$ en $a \in \mathbb{R}$ (bij de integraal met ln mag $n \in \mathbb{R}$).

Je neemt $u = \ln(x)$; $u = \arcsin(ax)$; $u = \arctan(ax)$ en $dv = x^n dx$.
Je bekomt weliswaar $u = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ maar omdat $dv = \frac{dx}{x}$; $dv = \frac{adx}{\sqrt{1-a^2x^2}}$; $dv = \frac{adx}{1+a^2x^2}$ bekom je daarna de integraal uit een eenvoudiger functie die je mogelijk kunt oplossen.

Voorbeeld 2 $\int x^2 \arctan(5x)dx$.

Neem $u = \arctan(5x)$ en dus $du = \frac{5dx}{1+25x^2}$ en $dv = x^2dx$ en dus $v = \frac{x^3}{3}$.
Je bekomt

$$\int x^2\arctan(5x)dx = \frac{x^3\arctan(5x)}{3}-\frac{5}{3}\int\frac{x^3dx}{1+25x^2}\ .$$

In de laatste integraal gebruik je substitutie $t = 1 + 25x^2$. Dan is $dt = 50xdx$ en $x^2 = \frac{t-1}{25}$. Je bekomt

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3dx}{1+25x^2} &= \frac{1}{50}\int\frac{x^2}{1+25x^2}50xdx &(3)\\ &= \frac{1}{50}\int\frac{(t-1)/25}{t}dt &(4)\\ &= \frac{1}{1250}\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt &(5)\\ &= \frac{1}{1250}(t-\ln|t|)+C &(6)\\ &= \frac{1}{1250}\left(1+25x^2-\ln\left(1+25x^2\right)\right) &(7)\end{aligned}$$

Voor de op te lossen integraal bekom je

$$\int x^2\arctan(5x)dx = \frac{x^3\arctan(5x)}{3}-\frac{5}{3750}\left(1+25x^2-\ln\left(1+25x^2\right)\right)+C\ .$$

Voorbeeld 3 $\int \arcsin x dx$

Neem $u = \arcsin x$ dus $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ en $dv = dx$ dus $v = x$. Je bekomt

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \ .$$

In deze laatste integraal gebruik je substitutie $t = 1 - x^2$. Dan is $dt = -2x dx$ en je bekomt

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{t}}{1/2} + C \\ &= -\sqrt{t} + C \\ &= -\sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$

Voor de op te lossen integraal bekom je

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \left(-\sqrt{1-x^2}\right) + C = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \ .$$

Rekenregel **Types:**

$\int \sin(ax)e^{bx} dx$ met $a; b \in \mathbb{R}$ (en in plaats van sin dan er ook cos staan).

Door tweemaal na elkaar dezelfde rollen voor u en v te gebruiken bekom je de som van een functie en een getal vermenigvuldigd met de te zoeken integraal. Hieruit vind je de te zoeken integraal door het oplossen van een vergelijking.

Voorbeeld 4 $\int e^{3x} \cos(5x) dx$

Stel $u = e^{3x}$ en $dv = \cos(5x)dx$. Je bekomt $du = 3e^{3x} dx$ en uit $\int \cos(5x)dx = \frac{1}{5}\sin(5x) + C$ vind je dat je $v = \frac{1}{5}\sin(5x)$ kunt nemen. Je bekomt

$$\int e^{3x} \cos(5x) dx = \frac{1}{5}\sin(5x)e^{3x} - \frac{3}{5}\int \sin(5x)e^{3x} dx \ .$$

Stel in de nieuwe integraal opnieuw $u = e^{3x}$ en $dv = \sin(5x)dx$. Je bekomt $du = 3e^{3x}dx$ en uit $\int \sin(5x)dx = -\frac{\cos(5x)}{5} + C$ vind je dat je $v = -\frac{\cos(5x)}{5}$ kunt nemen. Je bekomt

$$\int \sin(5x)e^{3x} dx = -\frac{\cos(5x)e^{3x}}{5} + \frac{3}{5}\int e^{3x}\cos(5x) dx \ .$$

Voor de op te lossen integraal bekom je dan

$$\begin{aligned} \int e^{3x}\cos(5x)dx &= \frac{1}{5}\sin(5x)e^{3x} - \frac{3}{5}\left(-\frac{\cos(5x)e^{3x}}{5} + \frac{3}{5}\int e^{3x}\cos(5x)dx\right) \\ &= \frac{1}{5}\sin(5x)e^{3x} + \frac{3}{25}\cos(5x)e^{3x} - \frac{9}{25}\int e^{3x}\cos(5x)dx \end{aligned}$$

Breng je de laatste integraal over naar het linkerlid dan bekom je

$$\left(1+\frac{9}{25}\right)\int e^{3x}\cos(5x)dx = \left(\frac{1}{5}\sin(5x)+\frac{3}{25}\cos(5x)\right)e^{3x}+C$$

Hieruit vind je

$$\int e^{3x}\cos(5x)dx = \frac{25}{34}\left(\frac{1}{5}\sin(5x)+\frac{3}{25}\cos(5x)\right)e^{3x}+C$$

3.14 Oefeningen

Je krijgt nog enkele oefeningen op het berekenen van integralen door middel van partiële integratie.

1. Bereken $\int x^3e^{-5x}dx$

- Wat neem je voor u en wat neem je voor dv als je partiële integratie $\int udv = uv - \int vdu$ gebruikt?
  Antwoord : Neem $u = x^3$ en $dv = e^{-5x}dx$.
- Wat zijn dan du en v?
  Antwoord : $du = 3x^2dx$ en uit $\int e^{-5x}dx = -\frac{e^{-5x}}{5} + C$ vind je dat je $v = -\frac{e^{-5x}}{5}$ kunt nemen.
- Wat bekom je als resultaat van deze partiële integratie?
  Antwoord :
  $$\int x^3e^{-5x}dx = -\frac{x^3e^{-5x}}{5}+\frac{3}{5}\int x^2e^{-5x}dx$$
- Wat bekom je als je op die nieuwe integraal dezelfde soort van partiële integratie toepast?
  Antwoord : Je stelt $u = x^2$ en dus $du = 2xdx$ en opnieuw $dv = e^{-5x}dx$ en dus $v = -\frac{e^{-5x}}{5}$. Je bekomt
  $$\int x^2e^{-5x}dx = -\frac{x^2e^{-5x}}{5}+\frac{2}{5}\int xe^{-5x}dx$$
- Wat bekom je als je op die nieuwe integraal nogmaals partiële integratie toepast?
  Antwoord :
  $$\int xe^{-5x}dx = -\frac{xe^{-5x}}{5}+\frac{1}{5}\int e^{-5x}dx = -\frac{xe^{-5x}}{5}-\frac{1}{25}e^{-5x}+C$$
- Wat bekom je voor de integraal die je moet oplossen?
  Antwoord :
  $$\int x^3e{-5x}dx = -\frac{x^3e^{-5x}}{5}+\frac{3}{5}\left(-\frac{x^2e^{-5x}}{5}+\frac{2}{5}\left(-\frac{xe^{-5x}}{5}-\frac{1}{25}e^{-5x}+C\right)\right)+C$$

- Wat is de oplossing?
  Antwoord :
  $$\int x^3 e^{-5x} dx = \left(-\frac{x^3}{5} - \frac{3x^2}{25} - \frac{6x}{125} - \frac{6}{625}\right) e^{-5x} + C$$

2. Bereken $\int \sqrt[3]{x^5} \ln x dx$

- Wat neem je voor u en wat neem je voor dv als je partiële integratie $\int u dv = uv - \int v du$ gebruikt?
  Antwoord : Neem $u = \ln x$ en $dv = \sqrt[3]{x^5} dx$.
- Wat zijn dan du en v?
  Antwoord : $du = \frac{dx}{x}$ en uit $\int \sqrt[3]{x^5} dx = \int x^{5/3} dx = \frac{x^{8/3}}{8/3} + C$ bekom je dat je kan nemen $v = \frac{3x^{8/3}}{8}$.
- Wat bekom je als resultaat van deze partiële integratie?
  Antwoord :
  $$\int \sqrt[3]{x^5} \ln x dx = \frac{3x^{8/3}}{8} \ln x - \frac{3}{8} \int x^{8/3} \frac{1}{x} dx$$
- Wat bekom je als oplossing van die nieuwe integraal?
  Antwoord :
  $$\int x^{8/3} \frac{1}{x} dx = \int x^{5/3} dx = \frac{x^{8/3}}{8/3} + C = \frac{3x^{8/3}}{8} + C$$
- Wat bekom je voor de integraal die je moet oplossen?
  Antwoord :
  $$\int \sqrt[3]{x^5} \ln x dx = \frac{3x^{8/3}}{8} \ln x - \frac{3}{8} \left(\frac{3x^{8/3}}{8}\right) + C$$
- Wat is de oplossing?
  Antwoord :
  $$\int \sqrt[3]{x^5} \ln x dx = \frac{3}{8} \sqrt[3]{x^8} \left(\ln x - \frac{3}{8}\right) + C$$

3. Bereken $\int e^{-x/2} \sin\left(\frac{x}{3}\right) dx$

- Wat neem je voor u en wat neem je voor dv als je partiële integratie $\int u dv = uv - \int v du$ gebruikt?
  Antwoord : Neem $u = e^{-x/2}$ en $dv = \sin\left(\frac{x}{3}\right) dx$ (je mag ook $u = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$ en $dv = e^{-x/2} dx$ nemen).
- Wat zijn dan du en v?
  Antwoord : $du = -\frac{e^{-x/2}}{2} dx$ en uit $\int \sin\left(\frac{x}{3}\right) dx = -3\cos\left(\frac{x}{3}\right) + C$ vind je dat je $v = -3\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ kan nemen.
- Wat bekom je als resultaat van deze partiële integratie?
  Antwoord :
  $$\int e^{-x/2} \sin\left(\frac{x}{3}\right) dx = -3e^{-x/2} \cos\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{3}{2} \int e^{-x/2} \cos\left(\frac{x}{3}\right) dx$$

- Wat bekom je als je op die nieuwe integraal dezelfde soort van partiële integratie toepast?
Antwoord: Je neemt opnieuw $u = e^{-x/2}$ en dus $du = -\frac{e^{-x/2}}{2}dx$ en $dv = \cos\left(\frac{x}{3}\right)dx$ waaruit je bekomt
$$v = 3\sin\left(\frac{x}{3}\right)$$
Je bekomt
$$\int e^{-x/2}\cos\left(\frac{x}{3}\right)dx = 3e^{-x/2}\sin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{3}{2}\int e^{-x/2}\sin\left(\frac{x}{3}\right)dx$$

- Wat bekom je voor de integraal die je moet oplossen?
Antwoord:
$$\int e^{-x/2}\sin\left(\frac{x}{3}\right)dx = -3e^{-x/2}\cos\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{3}{2}\left(3e^{-x/2}\sin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{3}{2}\int e^{-x/2}\sin\left(\frac{x}{3}\right)dx\right)$$

- Wat bekom je als je de integraal in het rechterlid mee naar het linkerlid brengt?
Antwoord :
$$\left(1+\frac{9}{4}\right)\int e^{-x/2}\sin\left(\frac{x}{3}\right)dx = -3e^{-x/2}\cos\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{9}{2}e^{-x/2}\sin\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

- Wat is de oplossing?
Antwoord:
$$\int e^{-x/2}\sin\left(\frac{x}{3}\right)dx = \frac{4}{13}e^{-x/2}\left(-3\cos\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{9}{2}\sin\left(\frac{x}{3}\right)\right) + C$$

3.15 Partiële integratie bij bepaalde integralen

Je kunt partiële integratie onmiddellijk toepassen bij bepaalde integralen zoals in volgend voorbeeld.

$$\begin{aligned}
\int_1^e \ln x dx &= [x\cdot\ln x]_1^e - \int_1^e xd(\ln x)\\
&= [x\cdot\ln x]_1^e - \int_1^e dx\\
&= [x\cdot\ln x - x]_1^e\\
&= e.\ln e - e - (1.\ln 1 - 1) = 1
\end{aligned}$$

Denk er aan dat je ook in het deel vu van de regel $\int udv = uv + \int vdu$ de grenzen moet invullen. Als je dat vergeet dan bekom je als uitkomst van een bepaalde integraal immers een functievoorschrift terwijl het resultaat van een bepaalde integraal een getal moet zijn.

3.16 Test integraalrekening - partiële integratie

Oplossingen van de oefeningen zonder $*$

1 $1,887923$ rad; $0,221235$ rad; $2,984513$ rad (of ook: $\frac{19}{20}\pi$ rad)

2 $149,98°$; $16°16'05''$; $5,144954$ rad; $31,9833$ gon

3 $H = 96,85$ m

4 $\alpha = 123,01°$

5 $c = 7,83$ mm

6 $d = 33,17$ m; $\alpha = 147,02°$; $\beta = 56,98°$

Oplossingen van alle oefeningen

1 $1,887923$ rad; $0,221235$ rad; $2,984513$ rad (of ook: $\frac{19}{20}\pi$ rad)

2 $149,98°$; $16°16'05''$; $5,144954$ rad; $31,9833$ gon

3 $H = 96,85$ m

4 $\alpha = 123,01°$

5 $c = 7,83$ mm

6 $d = 33,17$ m; $\alpha = 147,02°$; $\beta = 56,98°$

We kunnen (en willen) er niet rond: wiskunde speelt een sleutelrol in veel opleidingen. Bij een groot aantal vakken vormt wiskunde vaak de taal om complexe fenomenen te omschrijven. Ben je wat bezorgd over je parate wiskunde kennis?
Dan is deze Massive Open Online Course (MOOC) Basiswiskunde voor (startende) studenten zeker iets voor jou.

Deze MOOC is een online leeromgeving waarmee je zelfstandig je wiskundekennis kan opfrissen of bijspijkeren. Deelname is volledig gratis.

Je neemt op eigen tempo verschillende modules rond een wiskundig thema door. Een module neemt ongeveer 3 uur in beslag en bestaat uit verschillende onderdelen. Elk onderdeel bestaat uit theorie, video's en voorbeeldoefeningen. Na elke module kun je een test afleggen om te zien of je alles onder de knie hebt.

Voor wie?

Studenten in de laatste jaren van het secundair onderwijs die zich willen voorbereiden op het hoger onderwijs, professionele bachelor studenten die eraan denken om te schakelen, eerstejaarsstudenten die nog wat extra oefening willen.

www.iiw.kuleuven.be/mooc-wiskunde