1.

$$\int \left(6x^3 - 9x^2 + 11x + 3\right) dx = 6\int x^3 dx - 9\int x^2 dx + 11\int x dx + 3\int dx =$$

$$= 6\frac{x^4}{4} - 9\frac{x^3}{3} + 11\frac{x^2}{2} + 3x + C = \frac{3}{2}x^4 + (-3)x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 3x + C$$

Vergelijken met $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + C$ geeft

$a = \frac{3}{2}$; $b = -3$; $c = \frac{11}{2}$; $d = 2$.

2.

$$\int (2x-1)^2 dx = \int \left(4x^2 - 4x + 1\right) dx = 4\int x^2 dx - 4\int x dx + \int dx =$$

$$= 4\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + x + C = \frac{4}{3}x^3 + (-2)x^2 + x + C$$

Vergelijken met $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + C$ geeft

$a = 0$; $b = \frac{4}{3}$; $c = -2$; $d = 1$.

3.

$$\int \sqrt[7]{5x^4} dx = \int \sqrt[7]{5}.\sqrt[7]{x^4} dx = \sqrt[7]{5}\int x^{4/7} dx =$$

$$= \sqrt[7]{5}.\frac{x^{11/7}}{11/7} + C = \frac{7}{11}\sqrt[7]{5}\sqrt[7]{x^{11}} + C$$

Vergelijkgen met $a\sqrt[b]{x^c} + C$ geeft

$a = \frac{7}{11}\sqrt[7]{5}$; $b = 7$; $c = 11$.

4. $\int f(x)dx = 3x^3 + 2x^2 + C$ betekent dat de functie $y = 3x^3 + 2x^2$ een primitieve functie is van f. Dus

$$f(x) = D\left(3x^3 + 2x^2\right) = 9x^2 + 4x\ .$$

Vergelijken met $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ geeft

$a = b = e = 0$; $c = 9$; $d = 4$.

5. Als $\int x \sin x dx = -\frac{x^2}{2}\cos x + C$ dan zou $y = -\frac{x^2}{2}\cos x$ een primitieve functie zijn van $y = x\sin x$, dus dan zou $D\left(-\frac{x^2}{2}\cos x\right) = x\sin x$.

Uit de productregel voor de afgeleide volgt

$$D\left(-\frac{x^2}{2}\cos x\right) = -\left(D\left(\frac{x^2}{2}\right)\cos x + \frac{x^2}{2}D(\cos x)\right) = -\left(\frac{2x}{2}\cos x - \frac{x^2}{2}\sin x\right) = -x\cos x - \frac{x^2}{2}\sin x$$

Maar $x\sin x \neq -x\cos x - \frac{x^2}{2}\sin x$. Bijvoorbeeld als $x = \frac{\pi}{2}$ dan is

$$\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{8}$$

en $\frac{\pi}{2} \neq -\frac{\pi^3}{8}$.

Bij het kiezen van het antwoord JA gebruik je allicht dat de integraal van een product het product van integralen is. Immers $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$ en $\sin x dx = -\cos x + C$.

Maar dat is geen correcte rekenregel voor het integreren.

6. Denk eraan dat per definitie van de functie ln geldt $e^{\ln x} = x$. Dus $\int \left(e^{\ln x} + x\right) dx = \int 2x dx = x^2 + C$.

7. Uit $\int f(x)dx = F(x) + C$ volgt dat $DF(x) = f(x)$.

   Dan is $D(xF(x)) = Dx.F(x) + x.DF(x) = F(x) + xf(x)$.

   Dus $xF(x)$ is een primitieve functie van $F(x)+xf(x)$ en dus $\int (F(x) + xf(x))\, dx = xF(x) + C$.

8. $\int \left(3x^2 + 1\right) dx = 3\frac{x^3}{3} + x + C = x^3 + x + C$.

   Dus $\int_2^5 \left(3x^2 + 1\right) dx = \left(x^3 + x\right)|_2^5 = \left(5^3 + 5\right) - \left(2^3 + 2\right) = (125+5) - (8+2) = 120$.

9. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-1/3} dx = \frac{x^{2/3}}{2/3} + C = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + C$.

   Dus $\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}|_8^{27} = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{27^2} - \sqrt[3]{8^2}\right) = \frac{3}{2}(9-4) = \frac{15}{2}$.

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$.

    Dus $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x|_{\pi/6}^{\pi/4} = \arctan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \arctan\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$.

11.
$$\int_9^4 3f(x)dx = 3\left(\int_9^4 f(x)dx\right) = 3\left(\int_9^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx\right) =$$

$$= 3\left(-\int_3^9 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx\right) = 3(-20+7) = 3.(-13) = -39\ .$$

12. Een tekening geeft het volgende:

    Om de x-coördinaat van het punt P te vinden los je de vergelijking $2x+1 = -3x + 6$ op. Je bekomt hieruit $5x = 5$, dus $x = 1$.

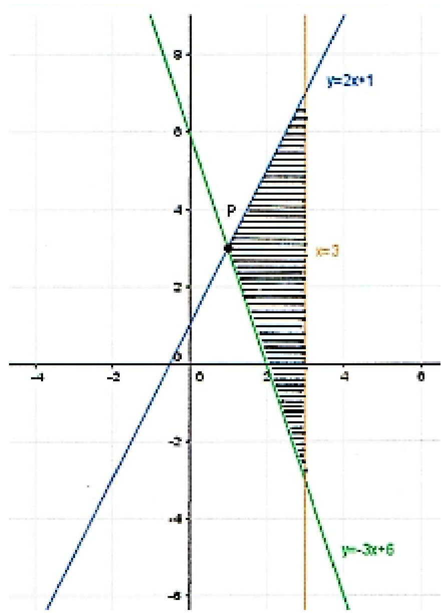

Figure 1: figuur bij opgave 12

De oppervlakte is daarom

$$\int_1^3 ((2x+1) - (-3x+6))\,dx$$

(hoogste grafiek - laagste grafiek).

$$\int_1^3 (5x-5)dx = \left(\frac{5x^2}{2} - 5x\right)|_1^3 =$$

$$= \left(\frac{5.9}{2} - 5.2\right) - \left(\frac{5.1}{2} - 5.1\right) = \frac{45}{2} - 15 - \frac{5}{2} + 5 = 10$$

13. Een tekening geeft het volgende:

    De x-coördinaten van de snijpunten van de twee grafieken vind je door het oplossen van de vergelijking $x^2 + 1 = 19 - x^2$. Je bekomt $2x^2 = 18$, dus $x^2 = 9$ en dat geeft de oplossingen -3 en 3.

    De oppervlakte is daarom

$$\int_{-3}^3 \big((19 - x^2) - (x^2 + 1)\big)\,dx$$

(hoogste grafiek)-(laagste grafiek).

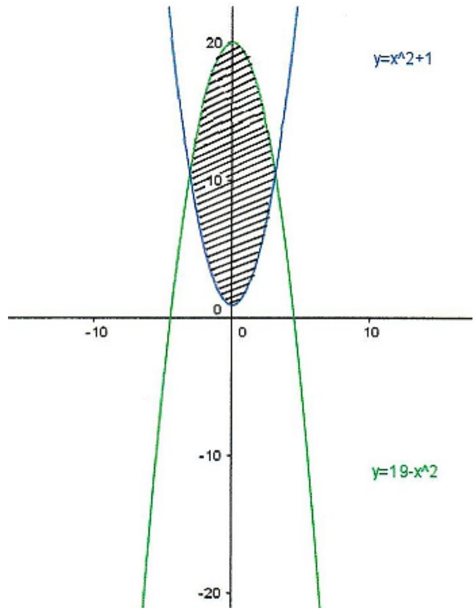

Figure 2: figuur bij opgave 13

$$\int_{-3}^{3} \left(-2x^2 + 18\right) dx = \left(-\frac{2x^3}{3} + 18x\right) |_{-3}^{3} =$$

$$= \left(-\frac{2.3^3}{3} + 18.3\right) - \left(-\frac{2.(-3)^3}{3} + 18.(-3)\right) = (-18+18.3)+(-18+18.3) = 72$$