KU LEUVEN

MASSIVE OPEN ONLINE COURSE

BASISWISKUNDE VOOR (STARTENDE) STUDENTEN

www.iiw.kuleuven.be/mooc-wiskunde

Inhoudsopgave

Module 2. Elementaire rekenvaardigheden B **3**

1 Functies . . . 3

2 Rationale functies . . . 3

2.1 Algemeen . . . 3

2.2 Een voorbeeld . . . 5

2.3 Onthoud . . . 6

3 Irrationale functies . . . 7

3.1 Algemeen . . . 7

3.2 Een voorbeeld . . . 10

3.3 Onthoud . . . 12

4 Exponentiële functies . . . 13

4.1 Definities . . . 13

4.2 Bijzondere gevallen . . . 14

4.3 Rekenregels . . . 15

4.4 Oplossen van exponentiële vergelijkingen . . . 15

4.5 De exponentiële functie . . . 17

5 Limieten . . . 18

Module 5. Vergelijkingen, Ongelijkheden, Stelsels en Matrices **19**

1 Vergelijkingen, ongelijkheden en stelsels . . . 19

1.1 Definities . . . 21

1.2 Eerstegraadsvergelijkingen . . . 22

1.3 Oplossen van tweedegraadsvergelijkingen . . . 25

1.4 Hogeregraadsvergelijkingen . . . 31

1.5 Enkele nuttige weetjes over veeltermvergelijkingen in het algemeen . . . 31

1.6 Stelsels van vergelijkingen . . . 34

1.7 Ongelijkheden . . . 38

2 Matrices . . . 41

2.1 Definities . . . 45

2.2 Bewerkingen met matrices . . . 47

2.3 Determinant . . . 50

2.4 Inverse van een matrix 55
2.5 De rang van een matrix 57
2.6 Elementaire omvormingen van een matrix 60
2.7 Praktische berekening van de inverse van een matrix 62
2.8 Methode van Gauss voor het oplossen van een stelsel van vergelijkingen . 65
2.9 De regel van Cramer 70

Oplossingen van de oefeningen zonder $*$ **73**

Oplossingen van alle oefeningen **74**

Module 2
Elementaire rekenvaardigheden B

0 Intro

1 Functies

2 Rationale functies

2.1 Algemeen

Functievoorschrift

$f(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$ met $t(x)$ en $n(x)$ veeltermfuncties en waarbij de graad van $n(x)$ minstens 1 is.

Voorbeelden van rationale functies: $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, $f(x) = \dfrac{3x-9}{x-3}$

Voorbeelden van geen rationale functies: $f(x) = \dfrac{\sin x}{4x}$, $f(x) = \dfrac{2^x}{3x+5}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-3}$

Grafische voorstelling

Het domein van een rationale functie is $\mathbb{R}\backslash\{\text{nulpunten van de noemer}\}$.

Voorbeeld: het domein van $f(x) = \dfrac{2x+2}{x-8}$ is $\mathbb{R} \setminus \{8\}$

Nulpunten

De nulpunten van een rationale functie $f(x)$, zijn de nulpunten van de teller, die niet de nulpunten van de noemer zijn.

De nulpunten van de noemer, noemen we de polen van de rationale functie $f(x)$. Bij elke pool hoort een verticale asymptoot.

Punten die zowel nulpunt zijn van teller als noemer, geven aanleiding tot de vorm $\frac{0}{0}$. Aangezien deze punten de noemer nul maken, horen ze niet tot het domein, maar geven ook geen aanleiding tot een asymptoot.

Asymptoten

1) De rechte $x = a$ is een **verticale asymptoot** (VA) van de rationale functie $f(x)$ als en slechts als a een nulpunt is van de noemer en geen nulpunt van de teller.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \pm\infty \quad \text{of} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \pm\infty$$

$$\Rightarrow \; x = a \text{ is een VA}$$

Voorbeeld 1: $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

Het nulpunt van de noemer, of de pool is $x = 1$. Dit punt is geen nulpunt van de teller. Dus, $x = 1$ is een verticale asymptoot. De functie $f(x)$ is niet gedefinieerd in het punt $x = 1$.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = -\infty \quad \text{en} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = +\infty$$

$$\Rightarrow \; x = 1 \text{ is een VA}$$

2) Een rationale functie $f(x)$ heeft een **horizontale asymptoot** (HA) als en slechts als de graad van de teller $\leq$ graad van de noemer.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$$

$$\Rightarrow \; y = b \text{ is een HA}$$

Voorbeeld 2: $f(x) = \dfrac{2x+7}{4x^2+x+2}$

De graad van de teller is 1, en de graad van de noemer is 2; dus deze functie heeft een horizontale asymptoot.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x+7}{4x^2+x+2} \overset{HGT}{=} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{4x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

$$\Rightarrow \; y = 0 \text{ is een HA}$$

3) Een rationale functie $f(x)$ heeft een **schuine asymptoot** (SA) als en slechts als de graad van de teller = graad van de noemer +1.

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{en} \quad q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$$

$$\Rightarrow \; y = mx + q \text{ is een SA}$$

Voorbeeld 3: $f(x) = \dfrac{x^3-4}{2x^2}$

De graad van de noemer is 2, en de graad van de teller is (2+1=) 3, dus deze functie heeft een schuine asymptoot.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-4}{2x^3} \overset{HGT}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^3-4}{2x^2} - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^3-4-x^3}{2x^2}\right] = 0$$

$$\Rightarrow\ y = \frac{1}{2}x \text{ is een SA}$$

Opmerking: Als een functie $f(x)$ voor $x \to +\infty$ een horizontale asymptoot heeft, kan ze voor $x \to +\infty$ geen schuine asymptoot meer hebben. Hetzelfde geldt voor $x \to -\infty$.

Tekenverloop

Om het tekenverloop van een rationale functie te bepalen, moet het tekenonderzoek van de teller en de noemer worden uitgevoerd. Het tekenverloop van een constante, een lineaire en een kwadratische functie is gekend (zie Module 2 B - Eerstegraads-, tweedegraads- en veeltermfuncties). Het teken van de rationale functie is het product van het teken van de teller en het teken van de noemer.

2.2 Een voorbeeld

Bespreek de rationale functie $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2-2}$

Domein

$\text{dom} f(x) = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

want de noemer mag niet nul worden. Dit gebeurt als $x^2 - 2 = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}$

Nulpunten

Stap 1: Bepaal de nulpunten van de teller, deze zijn de nulpunten van de functie $f(x)$.

Dus $3x^2 = 0 \iff x = 0$

$x = 0$ is een nulpunt van de teller, maar niet van de noemer, dus dit punt is een nulpunt van de functie $f(x)$.

Stap 2: Bepaal de nulpunten van de noemer, deze zijn de polen van de functie $f(x)$. Bij elke pool hoort een verticale asymptoot.

$x = -\sqrt{2}$ en $x = +\sqrt{2}$ zijn de nulpunten van de noemer, de functie $f(x)$ heeft dus twee verticale asymptoten.

Asymptoten

Stap 3: Ga na of de functie een verticale asymptoot bezit.

De rechte $x = -\sqrt{2}$ is een verticale asymptoot (VA) van de functie $f(x)$ aangezien $-\sqrt{2}$ een nulpunt is van de noemer en geen nulpunt van de teller is.

Hoe verloopt de functie $f(x)$ in de buurt van deze asymptoot:

$$\text{LL}: \lim_{\substack{x\to -\sqrt{2} \\ <}} \left(\frac{3x^2}{x^2-2}\right) = +\infty \quad \text{en} \quad \text{RL}: \lim_{\substack{x\to -\sqrt{2} \\ >}} \left(\frac{3x^2}{x^2-2}\right) = -\infty$$

dus $\Rightarrow x = -\sqrt{2}$ is een VA

De rechte $x = +\sqrt{2}$ is een verticale asymptoot (VA) van de functie $f(x)$ aangezien $+\sqrt{2}$ een nulpunt is van de noemer en geen nulpunt van de teller is.

Hoe verloopt de functie $f(x)$ in de buurt van deze asymptoot:

$$\text{LL}: \lim_{\substack{x\to \sqrt{2} \\ <}} \left(\frac{3x^2}{x^2-2}\right) = -\infty \quad \text{en} \quad \text{RL}: \lim_{\substack{x\to \sqrt{2} \\ >}} \left(\frac{3x^2}{x^2-2}\right) = +\infty$$

dus $\Rightarrow x = +\sqrt{2}$ is een VA

Stap 4: Ga na of de functie een horizontale asymptoot bezit. De functie $f(x)$ heeft een horizontale asymptoot (HA) aangezien de graad van teller (2^{de} graad) = graad van de noemer (2^{de} graad).

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{x^2-2} \overset{HGT}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

dus $\Rightarrow y = 3$ is een HA

Stap 5: Ga na of de functie een schuine asymptoot heeft. De functie $f(x)$ heeft voor $x \to +\infty$ en $x \to -\infty$, al een horizontale asymptoot en kan bijgevolg geen schuine asymptoot meer hebben.

Tekenverloop

Stap 6: - Schrijf in /’e/’en tabel bovenaan alle nulpunten en alle polen in stijgende volgorde.

- Onderzoek het teken voor elke factor van $f(x)$.

- Het teken van $f(x)$ is dan het product van deze tekens.

x		$-\sqrt{2}$		0		$-\sqrt{2}$		$\longrightarrow \mathbb{R}$
$3x^2$	+		+	0	+		+	
x^2-2	+	0	-	-	-	0	+	
$f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2-2}$	+	|	-	0	-	|	+	

Grafiek

2.3 Onthoud

De grafiek en het tekenverloop van een rationale functie bepaal je als volgt:

$f(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$ met $t(x)$ en $n(x)$ veeltermfuncties en waarbij de graad van $n(x)$ minstens 1 is.

Het domein van een rationale functie is $\mathbb{R}\backslash\{\text{nulpunten van de noemer}\}$.

Stap 1: Bepaal de nulpunten van de teller, dit zijn de nulpunten van de functie $f(x)$.

Stap 2: Bepaal de nulpunten van de noemer, dit zijn de polen van de functie $f(x)$.

Stap 3: De rechte $x = a$ is een **verticale asymptoot** (VA) van de rationale functie $f(x)$ als en slechts als a een nulpunt is van de noemer en maar geen nulpunt van de teller.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \pm\infty \quad \text{of} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \pm\infty \quad \Rightarrow \; x = a \text{ is een VA}$$

Stap 4: Een rationale functie $f(x)$ heeft een **horizontale asymptoot** (HA) als en slechts als de graad van de teller $\leq$ graad van de noemer. Maar hou wel rekening met het domein.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \quad \Rightarrow \; y = b \text{ is een HA}$$

Stap 5: Een rationale functie $f(x)$ heeft een **schuine asymptoot** (SA) als en slechts als de graad van de teller = graad van de noemer +1. Maar hou wel rekening met het domein.

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{en} \quad q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$$

$$\Rightarrow \; y = mx + q \text{ is een SA}$$

Stap 6: Bepaal het tekenverloop

- Schrijf in /'e/'en tabel bovenaan alle nulpunten en alle polen in stijgende volgorde.
- Onderzoek het teken voor elke factor van $f(x)$.
- Het teken van $f(x)$ is dan het product van deze tekens.

3 Irrationale functies

3.1 Algemeen

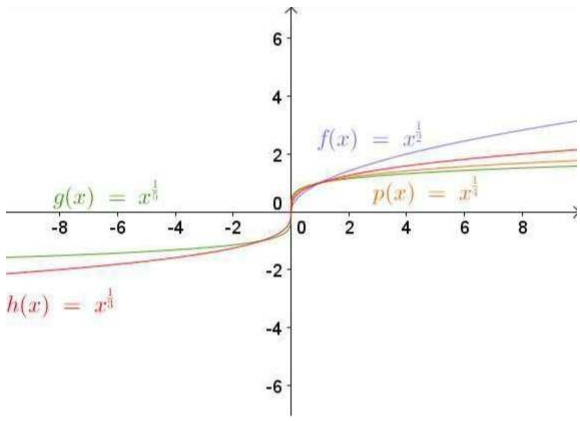
Voorbeelden van irrationale functies

$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$, $f(x) = 2.\sqrt[3]{x^5 - 3x^2 + 7} - x - 1$, $f(x) = \dfrac{x - 2}{\sqrt{10 - x^2}}$

Grafische voorstelling

De grafiek van de elementaire wortelfuncties $y = \sqrt[n]{x}$ is hieronder weergegeven. Denk eraan dat (machts)wortels ook als macht kunnen geschreven worden: $y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Om het domein (de toegelaten waarden voor x) te bepalen moeten we rekening houden met zowel de *bestaansvoorwaarden* als de *kwadrateringsvoorwaarde*.

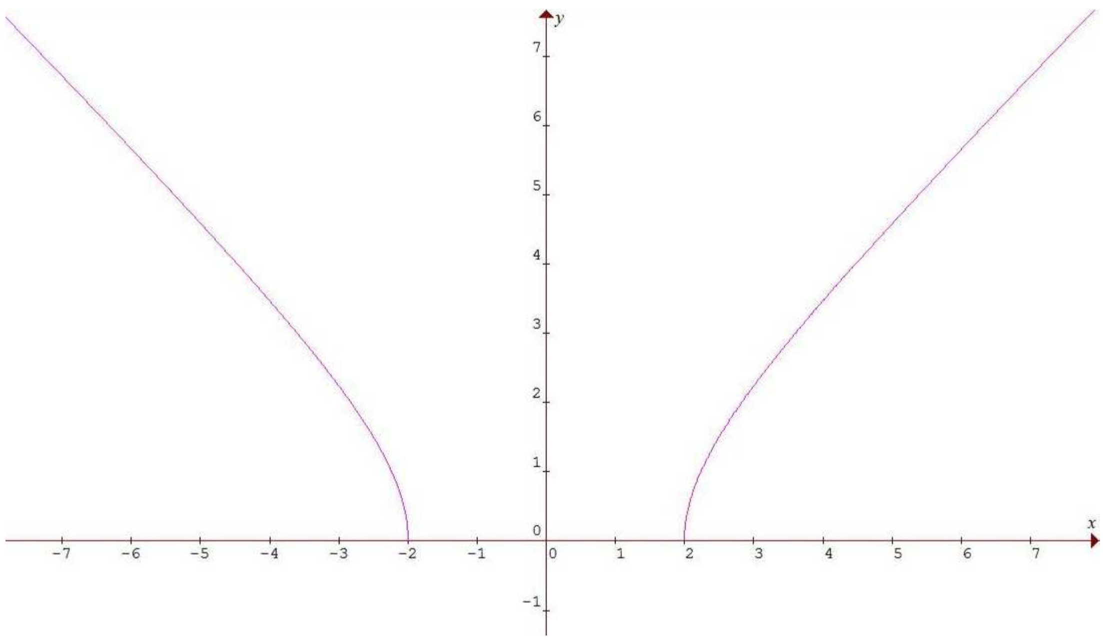


Bestaansvoorwaarde(n): de uitdrukking onder een even machtswortel moet steeds positief zijn!! En niet vergeten, de eventuele noemer mag niet nul worden.

Kwadrateringsvoorwaarde: we spreken af dat een even machtswortel uit een uitdrukking steeds positief is.

Het domein van een irrationale functie valt samen met de intervallen, waar de vorm onder de vierkantswortel niet negatief is en waar de uitdrukking van een even machtsfunctie steeds een positief resultaat oplevert.

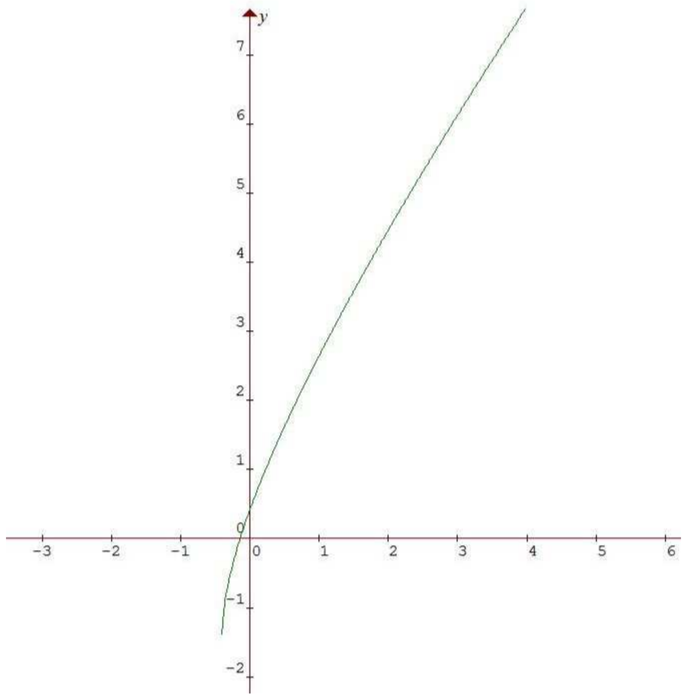
Voorbeeld 1: $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$



Om het domein van de functie $f(x)$ te bepalen moet er aan de bestaansvoorwaarde(n) voldaan zijn. In dit geval mag de functie onder het wortelteken niet negatief worden. We werken dit verder uit:

De bestaansvoorwaarde:
$$\begin{aligned} & x^2 - 4 \geq 0 \\ \iff & \quad x^2 \geq 4 \\ \iff & \quad x \geq 2 \quad \text{en} \quad x \leq -2 \end{aligned}$$

De kwadrateringsvoorwaarde is reeds voldaan (want er staat infeite $f(x) = +\sqrt{x^2 - 4}$)



Welke waarden van x voldoen hier nu aan?

$\text{dom} f(x)$ is voor $x \in]-\infty, -2] \bigcup [2, +\infty[$

Voorbeeld 2: $f(x) = x + \sqrt{5x+2} - 1$

Om het domein van de functie $f(x)$ te bepalen moet er aan de bestaansvoorwaarde(n) voldaan zijn. In dit geval mag de functie onder het wortelteken niet negatief worden. We werken dit verder uit:

$$\begin{array}{lccc} & 5x+2 \geq 0 & & \\ \text{De bestaansvoorwaarde:} & \Longleftrightarrow & x \geq & -\frac{2}{5} \\ \text{dus} & \Longleftrightarrow & x \in & [-\frac{2}{5}, +\infty[\end{array}$$

Nu moeten we nog de kwadrateringsvoorwaarde controleren, m.a.w. volgens onze gemaakte afspraak is een even machtswortel uit een uitdrukking steeds positief is:

$$\begin{array}{lcccl} & x + \sqrt{5x+2} = 1 & & & \\ & \Longleftrightarrow & \sqrt{5x+2} & = & 1-x \quad \geq 0 \\ \text{De bestaansvoorwaarde:} & \Longleftrightarrow & 1-x & \geq & 0 \\ \text{dus} & \Longleftrightarrow & x & \leq & 1 \\ \text{of} & \Longleftrightarrow & x & \in &]-\infty, 1] \end{array}$$

De mogelijke waarden voor x moeten aan beide voorwaarden voldoen. Dit betekent:

$\text{dom} f(x)$ is voor $x \in [-\frac{2}{5}, 1]$

Nulpunten

De vergelijking wordt $f(x) = 0$.

De wortelvormen kan je wegwerken door beide leden van de vergelijking te verheffen tot een gepaste macht. Bepaal vervolgens de nulpunten van de functie. Wanneer een breuk voorkomt in het functievoorschrift, bepaal dan ook de nulpunten van de noemer, deze zijn de polen.

Asymptoten

1) De rechte $x = a$ is een **verticale asymptoot** (VA) van de irrationale functie $f(x)$ als en slechts als a een nulpunt is van de noemer en geen nulpunt van de teller.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \pm\infty \quad \text{of} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \pm\infty$$

$$\Rightarrow \; x = a \text{ is een VA}$$

2) Een irrationale functie $f(x)$ heeft een **horizontale asymptoot** (HA) als en slechts als de graad van de teller $\leq$ graad van de noemer.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$$

$$\Rightarrow \; y = b \text{ is een HA}$$

3) Een irrationale functie $f(x)$ heeft een **schuine asymptoot** (SA) als en slechts als de graad van de teller $=$ graad van de noemer $+1$.

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{en} \quad q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$$

$$\Rightarrow \; y = mx + q \text{ is een SA}$$

Tekenverloop

Wanneer je de wortels hebt weggewerkt door de vergelijking te verheffen tot een gepaste macht, zal je een veeltermfunctie, een kwadratische of een lineaire functie bekomen. Pas het desbetreffend tekenonderzoek toe.

3.2 Een voorbeeld

Bespreek de irrationale functie $f(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 1}$

Domein

$\text{dom} f(x) = [-2, 1[\bigcup]1, 2]$

want de bestaansvoorwaarden zijn:

$$\begin{array}{lcl} & 4-x^2 \geq 0 & \\ & \Longleftrightarrow & x^2 \leq 4 \\ \text{dus} & \Longleftrightarrow & x \leq 2 \text{ en } x \geq -2 \\ \text{of} & \Longleftrightarrow & x \in [-2,2] \end{array}$$

en:

$$\begin{array}{lcl} & x-1 \neq 0 & \\ \text{dus} & \Longleftrightarrow & x \neq 1 \end{array}$$

De kwadrateringsvoorwaarde is hier niet van toepassing (vanwege de noemer kan $f(x)$ ook negatief worden).

Nulpunten

Stap 1: Bepaal de nulpunten van de teller, deze zijn de nulpunten van de functie $f(x)$.

Dus

$$\begin{array}{lccc} f(x)=0 & & & \\ \Longleftrightarrow & \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1} & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & \sqrt{4-x^2} & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & 4-x^2 & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & x^2 & = & 4 \\ \Longleftrightarrow & x & = & \pm 2 \end{array}$$

Stap 2: Bepaal eventueel de nulpunten van de noemer, deze zijn de polen van de functie $f(x)$. Bij elke pool hoort een verticale asymptoot.

Het nulpunt van de noemer is $x = 1$ (dit is dan tevens de vergelijking van de verticale asymptoot).

Asymptoten

Stap 3: Ga na of de functie een verticale asymptoot bezit.

De rechte $x = 1$ is een verticale asymptoot (VA) van de functie $f(x)$ aangezien 1 een nulpunt is van de noemer en geen nulpunt van de teller is.

Hoe verloopt de functie $f(x)$ in de buurt van deze asymptoot:

$$\text{LL} : \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1} \right) = -\infty \quad \text{en} \quad \text{RL} : \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1} \right) = +\infty$$

dus $\Rightarrow x = 1$ is een VA

Stap 4: Ga na of de functie een horizontale asymptoot bezit.

De functie heeft geen horizontale asymptoot, want x die nadert naar $+\infty$ of $-\infty$ behoort niet tot het domein.

Stap 5: Ga na of de functie een schuine asymptoot heeft.

De functie heeft geen schuine asymptoot, want x die nadert naar $+\infty$ of $-\infty$ behoort niet tot het domein.

Tekenverloop

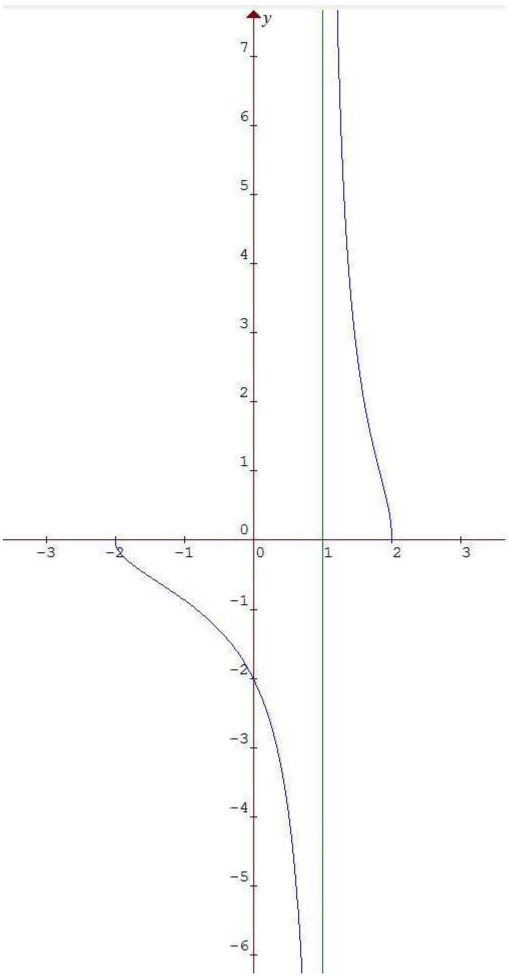
Stap 6:

- Schrijf in /'e/'en tabel bovenaan alle nulpunten en alle polen in stijgende volgorde.

x		-2		1		2		$\longrightarrow \mathbb{R}$
$\sqrt{4-x^2}$	/	0	+		+	0	/	
$x-1$	/		-	0	+		/	
$f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$	/	0	-	$\vert$	+	0	/	

- Onderzoek het teken voor elke factor van $f(x)$.
- Het teken van $f(x)$ is dan het product van deze tekens.

Grafiek



3.3 Onthoud

De grafiek en het tekenverloop van een irrationale functie bepaal je als volgt:

Het domein van een irrationale functie valt samen met de intervallen, waar de vorm onder de vierkantswortel niet negatief (BVW) is en waar de uitdrukking van een even machtsfunctie steeds een positief resultaat oplevert (KVW).

Stap 1: Bepaal de nulpunten van de teller, dit zijn de nulpunten van de functie $f(x)$.

Stap 2: Bepaal eventueel de nulpunten van de noemer, dit zijn de polen van de functie $f(x)$.

Stap 3: De rechte $x = a$ is een **verticale asymptoot** (VA) van de irrationale functie $f(x)$ als en slechts als a een nulpunt is van de noemer en maar geen nulpunt van de teller.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \pm\infty \quad \text{of} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \pm\infty \quad \Rightarrow \ x = a \text{ is een VA}$$

Stap 4: Een irrationale functie $f(x)$ heeft een **horizontale asymptoot** (HA) als en slechts als de graad van de teller $\leq$ graad van de noemer.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \quad \Rightarrow \ y = b \text{ is een HA}$$

Stap 5: Een irrationale functie $f(x)$ heeft een **schuine asymptoot** (SA) als en slechts als de graad van de teller = graad van de noemer +1.

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{en} \quad q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$$

$$\Rightarrow \ y = mx + q \text{ is een SA}$$

Stap 6: Bepaal het tekenverloop

- Schrijf in /'e/'en tabel bovenaan alle nulpunten en alle polen in stijgende volgorde.
- Hou rekening met de bestaansvoorwaarde en de kwadrateringsvoorwaarde.
- Onderzoek het teken voor elke factor van $f(x)$.
- Het teken van $f(x)$ is dan het product van deze tekens.

4 Exponentiële functies

4.1 Definities

De exponentiële functie is van de vorm:

$y = a^x$ met $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$ en $x \in \mathbb{R}$

a noemen we het **grondtal**, en moet strikt positief en verschillend van 1 zijn.

x noemen we de **exponent**, en is een reëel getal.

Voorbeelden:

$4^2 = 16$

$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$

$5^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{5^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5^3}} = \frac{1}{\sqrt{5^2.5}} = \frac{1}{5\sqrt{5}}$

$\sqrt{25} = 5$

$\sqrt[4]{10000} = 10$

$\sqrt[5]{-32} = -2$

$\sqrt[3]{8} = 2$

Opmerking: de positieve tweedemachts- of vierkantswortel van 25 is 5, want $5 > 0$ en $5^2 = 25$, dit wordt genoteerd als $\sqrt{25} = 5$. En de negatieve tweedemachts- of vierkantswortel van 25 is -5, want -5 ¡ 0 en $(-5)^2 = 25$, dit wordt genoteerd als $-\sqrt{25} = -5$. Ook je rekenmachine zal bij $\sqrt{25}$ als resultaat 5 geven. Verwar dit niet met het oplossen van de vergelijking $x^2 = 25$. In dit geval zijn de twee oplossingen van de vergelijking: $x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$.

4.2 Bijzondere gevallen

- De exponentiële functie met grondtal e ($e = 2,718281828$) wordt genoteerd als $y = e^x$.
- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- Als n even is spreekt men van een *evenmachtswortel* ($\sqrt{}$, $\sqrt[4]{}$, ...), is n oneven dan spreekt men van een *onevenmachtswortel* ($\sqrt[3]{}$, $\sqrt[5]{}$, ...).
- Positieve reële getallen hebben twee tegengestelde evenmachtswortels en juist /'e/'en positieve onevenmachtswortel.
- als n even is, dan heeft elk reëel getal a twee n$^{\text{de}}$ machtswortels die tegengesteld zijn, genoteerd door $-\sqrt[n]{a}$ en $+\sqrt[n]{a}$, of kortweg $\pm\sqrt[n]{a}$.
- als n oneven is, dan heeft elk reëel getal a juist /'e/'en n$^{\text{de}}$ machtswortel, genoteerd door $\sqrt[n]{a}$.
- Als n even is, dan hebben de negatieve getallen geen n$^{\text{de}}$ machtswortel; dus negatieve reële getallen hebben geen (reële) evenmachtswortel en juist /'e/'en onevenmachtswortel welke negatief is.

Let op: worteltrekken is niet hetzelfde als het oplossen van een vergelijking:

worteltrekken	vergelijking oplossen
$\sqrt{4} = 2$	$\begin{aligned} x^2 &= 4 \\ x &= \pm\sqrt{4} \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$
	$x_1 = -2$ en $x_2 = +2$

machten		wortels
$a^m a^n = a^{m+n}$		$\sqrt[m]{a}.\sqrt[n]{a} = \sqrt[m.n]{a^{m+n}}$
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$		$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
$\left(\dfrac{1}{a}\right)^n = a^{-n}$		$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
$(a^m)^n = a^{m.n}$		$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$
$(a.b)^n = a^n.b^n$		$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$		$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

4.3 Rekenregels

Opmerkingen:

- aangezien $1 = \dfrac{a}{a} = a^{1-1} = a^0$ zie je waarom we zeggen dat $a^0 = 1$.
- formules met wortels kan je (gemakkelijk) terugvinden als je de wortelvorm herschrijft d.m.v. machten:

$$\sqrt[m]{a}.\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m}}.a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} = a^{\frac{m+n}{m.n}} = \sqrt[m.n]{a^{m+n}}$$

- laat je niet vangen: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- een veel gebruikte bewerking is het wortelvrij maken van de noemen, bv.: $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4.4 Oplossen van exponentiële vergelijkingen

Algemeen

In sommige opgaves kom je exponentiële vergelijkingen tegen. Dit zijn vergelijkingen waar de onbekende voorkomt in de exponent. Om exponentiële vergelijkingen vlot te kunnen oplossen, maak je best gebruik van onderstaand stappenplan:

Stap 1: Noteer de vergelijking in haar standaardvorm: $a^{f(x)} = c$ of $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ of $a^{f(x)} = b^{g(x)}$

Stap 2: Laat op beide leden van de vergelijking een geschikte logaritmische functie inwerken.

Stap 3: Stop de uitkomst in de opgave en controleer.

Voorbeeld1: $a^{f(x)} = c$

Los op: $8^{x-1} - 4 = 0$

$$\begin{aligned}
&8^{x-1} - 4 = 0 \\
&\iff 8^{x-1} &&= 4 && \text{(stap 1)} \\
&\iff 2^{3x-3} &&= 2^2 && \text{(zoek een verband tss 8, 4 en 2)} \\
&\iff \log 2^{3x-3} &&= \log 2^2 && \text{(stap 2)} \\
&\iff 3x - 3 &&= 2 \\
&\iff x &&= \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

In stap 3 controleer je dat $8^{\frac{5}{3}-1} - 4 = 0$? Dit is ok.

Opmerking: stap 2 kan je ook in gedachten doen, m.a.w. hoef je niet op te schrijven.

Voorbeeld2: $a^{f(x)} = b^{g(x)}$

Los op: $50\sqrt{0,1^x} = 10^{x+1}\sqrt{2,5}$

$$\begin{aligned}
&50\sqrt{0,1^x} = 10^{x+1}\sqrt{2,5} \\
&\iff 50.\,(0,1)^{\frac{x}{2}} &&= 10^{x+1}\sqrt{2,5} && \text{(stap 1)} \\
&\iff 50.10^{-\frac{x}{2}} &&= 10^x.10.\sqrt{2,5} && \text{(zoek een verband tss 0,1 en 10)} \\
&\iff 10^{-\frac{x}{2}}.10^{-x} &&= \frac{10.\sqrt{2,5}}{50} && \text{(zet alle factoren met x bij elkaar)} \\
&\iff 10^{-\frac{3}{2}x} &&= \sqrt{\frac{100.2,5}{2500}} \\
&\iff \log 10^{-\frac{3}{2}x} &&= \log 10^{-\frac{1}{2}} && \text{(stap 2)} \\
&\iff -\frac{3}{2}x &&= -\frac{1}{2} \\
&\iff x &&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

In stap 3 controleer je dat $50\sqrt{0,1^{\frac{1}{3}}} = 10^{\frac{1}{3}+1}\sqrt{2,5}$? Dit is ok.

Opmerking: stap 2 kan je ook in gedachten doen, m.a.w. hoef je niet op te schrijven.

Voorbeeld3: substitutie

Los op: $2^{2x} - 3.2^{(x+2)} + 36 = 0$

$$\begin{aligned}
2^{2x} - 3.2^{(x+2)} + 36 = {} & 0 \\
2^{2x} - 3.2^{x}.2^{2} + 36 = {} & 0 \\
2^{2x} - 12.2^{x} + 36 = {} & 0 \text{ (herken dat } 2^{2x} = (2^x)^2\text{)} \\
& \text{ stel } 2^x = t \\
t^2 - 12.t + 36 = {} & 0 \text{ (los de vierkantsvgl op)}
\end{aligned}$$

$$t_{1\text{en}2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4.1.36}}{2.1} = \frac{12 \pm 0}{2} = 6$$

We zoeken niet $t_{1\text{en}2}$ maar wel de waarde van x. Dus:

$2^x = t = 6$ zodat $x = \log_2 6$

Ook hier kan je terug controleren of de gevonden waarde van x voldoet aan de gegeven vergelijking.

Merk op dat in dit geval hier t_1 en t_2 gelijk zijn, waardoor er slechts /'e/'en x-waarde is. Indien $t_1 \neq t_2$ dan vind je ook een x_1 en x_2.

Tenslotte, als je een t-waarde vindt die negatief is, dan... bestaat de bijhorende x-waarde niet. Je kan immer geen logaritme nemen van een negatief getal.

4.5 De exponentiële functie

Algemeen

Grafische voorstelling

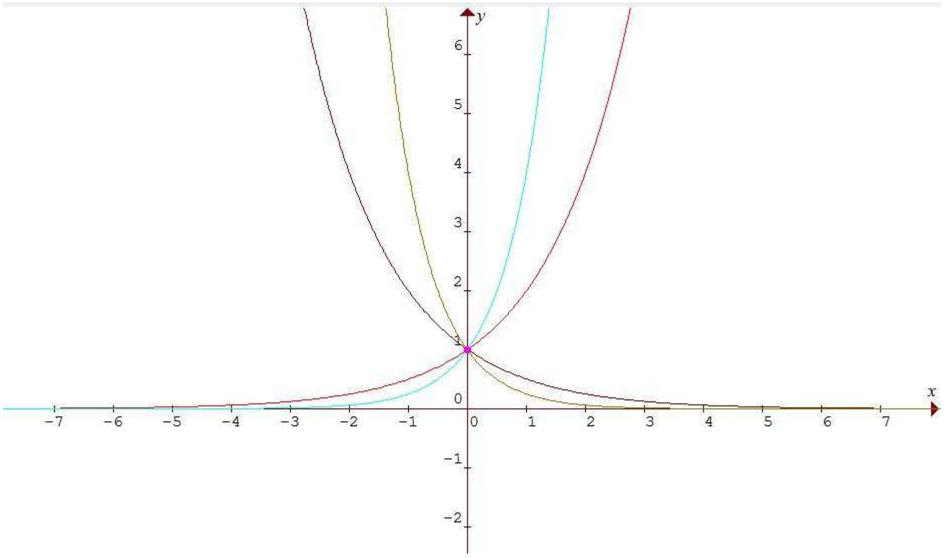
- Het domein van de exponentiële functie is $\mathbb{R}$.
- Het beeld van de exponentiële functie is $\mathbb{R}_0^+$, dus alle strikt positieve getallen; de grafiek ligt boven de X-as.
- De punten $(0, 1)$ en $(1, a)$ behoren steeds tot de exponentiële functie $f(x) = a^x$.
- Als het grondtal $a > 1$ is het een stijgende functie.
- Als het grondtal $0 < a < 1$ is het een dalende functie.
- De grafieken $y = a^x$ en $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ zijn elkaars spiegelbeeld t.o.v. de Y-as.

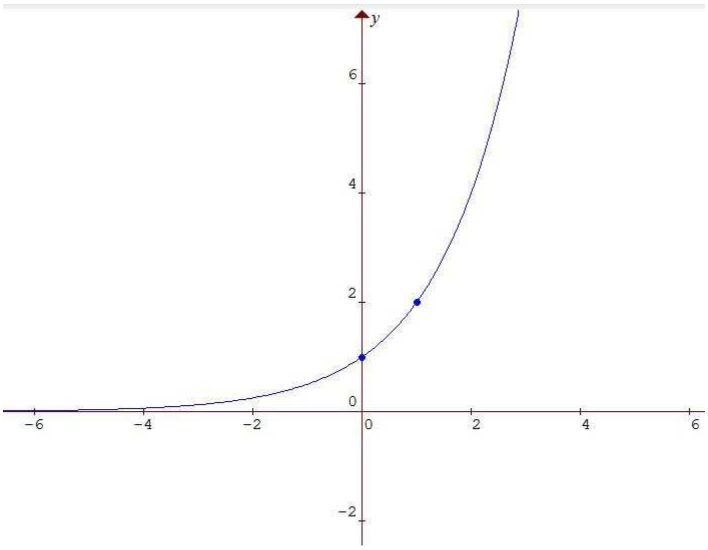
Nulpunten

- Er zijn geen nulpunten. De exponentiële functie heeft geen snijpunten met de X-as. De X-as is de horizontale asymptoot.
- Het punt $(0, 1)$ is het enige snijpunt met de Y-as.

Tekenverloop

- Alle functiewaarden $f(x)$ zijn strikt positief, de grafiek ligt overal boven de X-as.





Voorbeeld: $y = 2^x$

Grafische voorstelling: (stap1) het grondtal is 2, en $2 > 0$, dus krijgen we een stijgende functie. Het punt $(1, a)$ is hier dus $(1, 2)$ en behoort tot de functie $y = 2^x$.

Nulpunten: (stap2) er zijn geen nulpunten. De X-as wordt nooit gesneden. De X-as is de horizontale asymptoot. De Y-as wordt gesneden in het punt $(0, 1)$.

Tekenverloop: (stap3)

x	$\longrightarrow \mathbb{R}$
2^x	

Grafiek: (stap4)

5 Limieten

Module 5

Vergelijkingen, Ongelijkheden, Stelsels en Matrices

1 Vergelijkingen, ongelijkheden en stelsels

Inleiding

Het oplossen van vergelijkingen is een praktische wiskundige vaardigheid waarvan ondersteld wordt dat elke ingenieur ze beheerst. Op het eerste zicht lijkt vergelijkingen oplossen een spel met rare regeltjes bedacht door wereldvreemde leraars wiskunde. Zodra je echter gaat narekenen of een voorgestelde technische oplossing voor een probleem eigenlijk wel mogelijk is, iets wat in het Engels heel toepasselijk wordt aangeduid als "do the math", behoort het oplossen van vergelijkingen tot de standaardactiviteiten.

Enkele voorbeelden:

- In de thermodynamica speelt de toestandsvergelijking van een ideaal gas (in de volksmond "de ideale gaswet"genoemd) een belangrijke rol. Deze vergelijking geeft voor een hoeveelheid (aantal mol n) ideaal gas het verband tussen druk P, temperatuur T en volume V bij thermisch evenwicht van het gas:

  $$PV = nRT$$

  R is een gekende constante.
  Als het volume van de gasfles en de druk en temperatuur van het gas in de fles gekend zijn kan je de hoeveelheid gas in de fles berekenen door de vergelijking op te lossen naar de onbekende n.

- Uit de fysica weten we dat een voorwerp dat op tijdstip $t = 0$ op een hoogte h_0 wordt losgelaten zich na een valtijd t op een hoogte h zal bevinden gegeven door:

  $$h(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

  Door de hoogte gelijk aan nul te stellen bekomt men de vergelijking:

  $$h_0 - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

Oplossen van deze vergelijking naar de onbekende t geeft de tijd die het voorwerp nodig heeft om de grond te bereiken.

Bij sommige toepassingen, zoals bijvoorbeeld het doorrekenen van elektrische netwerken, komt men meerdere vergelijkingen met meerdere onbekenden tegen waarvoor men een oplossing zoekt die moet voldoen aan alle vergelijkingen tegelijkertijd. In zo een geval spreekt men van het oplossen van een stelsel van vergelijkingen.

1.1 Definities

- Wat is een vergelijking?
- Wat is een onbekende?
- Zijn er verschillende soorten vergelijkingen?

Een vergelijking drukt uit dat twee wiskundige uitdrukkingen aan elkaar gelijk zijn door een gelijkheidsteken tussen de uitdrukkingen te plaatsen.
Bijvoorbeeld:

$$5x^3 + 2x = 8x^2 + 17$$

De uitdrukking voor het gelijkheidsteken noemt met het linkerlid, de andere uitdrukking noemt men het rechterlid.

In een vergelijking staat altijd minstens één onbekende die met een letter wordt aangeduid. Dikwijls wordt hiervoor de letter x gebruikt maar een onbekende kan met eender welke letter worden aangeduid. Het oplossen van een vergelijking komt erop neer dat je die waarden voor de onbekende (of onbekenden) zoekt waarvoor het linkerlid inderdaad gelijk is aan het rechterlid.

In deze nota's beperken we ons tot **veeltermvergelijkingen**, dat zijn vergelijkingen waarbij zowel het rechterlid als het linkerlid veeltermen zijn, zoals in het voorbeeld hierboven. Er bestaan echter ook andere vergelijkingen. Bijvoorbeeld de vergelijkingen

$$3\sin(x+2) = x^3 - 4x - 1$$

en

$$\frac{1}{2}e^{-\pi y} - 4 = 37\cos(y^2+1)$$

zijn géén veeltermvergelijkingen.

De **graad van een veeltermvergelijking** is de hoogste macht van de onbekende die in de vergelijking voorkomt. De manier waarop men een veeltermvergelijking oplost is verschillend naargelang de graad van de vergelijking.
Bijvoorbeeld

$$8t - 2 = 0$$

is een veeltermvergelijking van de eerste graad in de onbekende t, en

$$h^{23} - 2h^{12} + \frac{17}{3}h^7 + 4h^3 = \pi h - \frac{\pi}{2}$$

is een veeltermvergelijking van de 23-ste graad in de onbekende h.

1.2 Eerstegraadsvergelijkingen

We zullen het oplossen van eerstegraadsvergelijkingen verduidelijken met enkele voorbeelden.

Voorbeeld 1.

$$5x + 3 = 3x + 1$$

Het oplossen van de vergelijking komt er eigenlijk op neer dat je de vergelijking herschrijft op een zodanige manier dat je in één lid, en alleen daar, de onbekende hebt staan. Op die manier kan je de oplossing direct aflezen. Het herschrijven van de vergelijking kan je doen door op het linkerlid en het rechterlid steeds dezelfde bewerkingen uit te voeren, op die manier blijft de gelijkheid tussen linkerlid en rechterlid gelden.
In bovenstaande vergelijking kunnen we van beide leden $3x$ aftrekken:

$$5x + 3 \mathbf{-3\boldsymbol{x}} = 3x + 1 \mathbf{-3\boldsymbol{x}}$$

dit geeft

$$2x + 3 = 1$$

Vervolgens trekken we van beide leden 3 af:

$$2x + 3 \mathbf{-3} = 1 \mathbf{-3}$$

dit geeft

$$2x = -2$$

Om nu in het linkerlid alleen nog de onbekende over te houden kunnen we linkerlid en rechterlid delen door 2:

$$\frac{2x}{\mathbf{2}} = \frac{-2}{\mathbf{2}}$$

dit geeft

$$x = -1$$

als oplossing van de vergelijking.

Enkele opmerkingen:

- Het uitvoeren van dezelfde optelling of aftrekking op het linker- en rechterlid komt erop neer dat je termen van het ene lid naar het andere verplaatst. Hierbij moet je er wel op letten dat het teken van de term verandert bij overbrenging naar het andere lid.

- Het uitvoeren van dezelfde deling (of vermenigvuldiging) op linker- en rechterlid komt neer op het overbrengen van een factor naar het andere lid. Hierbij wordt een vermenigvuldiging een deling en omgekeerd.
- Soms wordt de oplossing van een vergelijking genoteerd als een verzameling S. Voor het hierboven uitgewerkte voorbeeld schrijven we dan als oplossingenverzameling

$$S = \{-1\}$$

Voorbeeld 2.

$$5y + 4 = 5y - 1$$

We gaan opnieuw op dezelfde manier te werk. We kunnen bijvoorbeeld de term $5y$ uit het rechterlid overbrengen naar het linkerlid:

$$5y + 4 \mathbf{-5y} = -1$$

ofwel

$$4 = -1$$

Dit is natuurlijk onzin!
Er is geen enkele waarde voor y die ervoor kan zorgen dat $4 = -1$, deze vergelijking heeft geen oplossingen...
Dit kan men ook noteren door te schrijven dat de oplossingenverzameling leeg is:

$$S = \varnothing$$

Voorbeeld 3.

$$2(x - 4) = 7(3x - 1)$$

De eerste stap is hier het uitwerken van de haakjes:

$$2(x - 4) = 7(3x - 1) \Leftrightarrow 2x - 8 = 21x - 7$$

Vervolgens verplaatsen we de -8 naar rechts (min wordt plus):

$$2x = 21x - 7 + 8 \Leftrightarrow 2x = 21x + 1$$

Nu verplaatsen we de $21x$ van rechts naar links (plus wordt min):

$$2x - 21x = 1 \Leftrightarrow -19x = 1$$

Dan brengen we -19 over naar het rechterlid (pas op: teken verandert niet!):

$$x = \frac{1}{-19} = -\frac{1}{19}$$

Onthoud

Een goed stappenplan voor het oplossen van een eerstegraadsvergelijking is:

1. Reken alle haakjes uit.
2. Verplaats alle termen met onbekenden in naar een lid, alle termen zonder onbekenden naar het andere lid.
   - Elke bewerking die je links uitvoert, moet je rechts ook uitvoeren.
   - Termen kan je overbrengen door het teken te veranderen: min wordt plus, plus wordt min.
   - Factoren verplaats je door te delen of te vermenigvuldigen: een vermenigvuldiging wordt een deling en omgekeerd.

1.3 Oplossen van tweedegraadsvergelijkingen

- Hoeveel oplossingen heeft een tweedegraadsvergelijking?
- Hoe kan je die oplossingen vinden?

Een tweedegraadsvergelijking wordt in de praktijk dikwijls vierkantsvergelijking of kwadratische vergelijking genoemd.

Algemene methode om een tweedegraadsvergelijking op te lossen

Een tweedegraadsvereglijking in de onbekende x is een vergelijking van de vorm

$$ax^2 + bx + c = 0$$

met a, b en c reële getallen, bovendien moet $a \neq 0$ zijn want anders hebben we een eerstegraadsvergelijking.
Om een dergelijke vergelijking op te lossen herschrijven we de vergelijking door ze te delen door a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Dit kan je ook schrijven als

$$(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

Dit kan je controleren door de term met de haakjes uit te werken volgens het merkwaardige product $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$.
De term met de onbekende wordt nu naar het linkerlid verplaatst en de termen zonder de onbekende naar het rechterlid:

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

ofwel

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Het berekenen van de vierkantswortel van linkerlid en rechterlid geeft

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dit is echter maar de helft van de oplossing. We zoeken immers die uitdrukkingen waarvan het kwadraat gelijk is aan $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, dit zijn zowel $+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ als $-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Vergelijk dit bijvoorbeeld

met $\sqrt{9} = 3$ want $3^2 = 9$, maar er geldt ook $(-3)^2 = 9$ ... Als je dus de oplossingen zoekt van $y^2 = 9$ geeft dit $y = 3$ en $y = -3$.
We moeten dus rekening houden met de twee mogelijkheden:

$$x + \frac{b}{2a} = +\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ en } x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Deze eestegraadsvergelijkingen oplossen naar x geeft dan

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ en } x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

We vinden dus in principe **twee oplossingen** voor een tweedegraadsvergelijking.
Merk op dat de uitdrukking onder de vierkantswortel, $b^2 - 4ac$, een belangrijke rol speelt. Als deze uitdrukking groter dan nul is hebben we twee verschillende reële oplossingen, als deze uitdrukkig echter gelijk is aan nul dan zijn de twee oplossingen gelijk aan elkaar (praktisch gezien is er dan maar één reële oplossing), en als de uitdrukking kleiner is dan nul dan zijn er twee complexe oplossingen. Deze complexe oplossingen zijn bovendien elkaars complex toegevoegde. De tweedemachtswortels van een negatief reëel getal z zijn immers $\sqrt{|z|}i$ en $-\sqrt{|z|}i$.
De uitdrukking $b^2 - 4ac$ maakt dus een onderscheid (discrimineert) tussen de verschillende soorten oplossingen die mogelijk zijn. Men noemt deze uitdrukking dan ook de **discriminant**, meestal aangeduid met de Griekse hoofdletter delta Δ of soms ook met de hoofdletter D.

De algemene methode om een tweedegraadsvergelijking op te lossen kan dus worden samengevat als volgt:

- Schrijf de vergelijking in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b en c reële getallen)
- Bereken de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
- Ga na hoeveel oplossingen er zijn:
  - Als $\Delta > 0$ dan zijn er 2 verschillende reële oplossingen
  - Als $\Delta = 0$ dan is er 1 reële oplossing (de 2 oplossingen zijn gelijk aan elkaar)
  - Als $\Delta < 0$ dan zijn er twee complexe oplossingen die elkaars complex toegevoegde zijn
- De oplossingen worden gegeven door

  $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ en } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  Opmerking: In het geval dat $\Delta < 0$ kan men (moet niet) de oplossingen ook schrijven als

  $$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \text{ en } x_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Voorbeeld 1

$$x(4x+2)+4=-3x+2$$

We schrijven deze vergelijking in de standaardvorm $ax^2+bx+c=0$:

$$x(4x+2)+4=-3x+2 \Leftrightarrow 4x^2+2x+4=-3x+2 \Leftrightarrow 4x^2+5x+2=0$$

Het symbool $\Leftrightarrow$ betekent zoveel als "is equivalent met" of "als en slechts als".
We berekenen nu de discriminant:

$$\Delta = 5^2 - 4.4.2 = 25 - 32 = -7$$

Aangezien $\Delta < 0$ zijn er twee copmlex toegevoegde complexe oplossingen:

$$S = \frac{-5+i\sqrt{7}}{8}, -\frac{5+i\sqrt{7}}{8}$$

Voorbeeld 2

$$-4x^2+5x+2=0$$

We berekenen de discriminant:

$$\Delta = 5^2 - 4.(-4).2 = 25 + 32 = 57$$

Er zijn dus twee verschillende oplossingen:

$$x_1 = \frac{-5+\sqrt{57}}{2.(-4)} \text{ en } x_2 = \frac{-5-\sqrt{57}}{2.(-4)}$$

ofwel

$$x_1 = \frac{5-\sqrt{57}}{8} \text{ en } x_2 = \frac{5+\sqrt{57}}{8}$$

De oplossingenverzameling is

$$S = \{\frac{5-\sqrt{57}}{8}, \frac{5+\sqrt{57}}{8}\}$$

Opmerking: slordig zijn met haakjes veroorzaakt fouten... Gebruik haakjes en respecteer de regels om met haakjes te werken!

Speciale gevallen

Elke vergelijking van de vorm $ax^2+bx+c=0$ met $a \neq 0$ kan opgelost worden met de algemene methode met de discriminant. In sommige gevallen is het echter eenvoudiger om deze methode niet te gebruiken. We illustreren dit met enkele voorbeelden.

- Voorbeeld speciaal geval 1

$$x^2 = 36$$

Dit is een tweedegraadsvergelijking in de meest eenvoudige vorm ($b=0$): in het linkerlid staat alleen een term met de onbekende en in het rechtermlid staat alleen een getal. Om de onbekende te vinden trekken we van beide leden de vierkantswortel:

$$x = 6$$

Dit is zeker **een** oplossing want $6^2 = 36$. Maar er geldt ook dat $(-6)^2 = 36$... Dus heeft de vergelijking nog een tweede oplossing:

$$x = -6$$

De oplossingen van de vergelijking zijn dus $x_1 = +\sqrt{36}$ en $x_2 = -\sqrt{36}$.
Met de oplossingenverzameling wordt dit genoteerd als

$$S = \{-6, 6\}$$

Uiteraard had je hier ook de algemene methode kunnen gebruiken.
Door de oorspronkelijke vergelijking in de standaardvorm te zetten vinden we:

$$x^2 - 36 = 0$$

De discriminant is $\Delta = 0^2 - 4.1.(-36) = 144$.
De twee verschillende oplossingen zijn dan

$$x_1 = \frac{-0+\sqrt{144}}{2.1} \text{ en } x_2 = \frac{-0-\sqrt{144}}{2.1}$$

ofwel

$$x_1 = 6 \text{ en } x_2 = -6$$

- Voorbeeld speciaal geval 2

$$3x^2 = 10x$$

We kunnen deze vergelijking oplossen door ze in de vorm $ax^2+bx+c=0$ te zetten:

$$3x^2 - 10x = 0$$

Hier is dus $a = 3$, $b = -10$ en $c = 0$.
We berekenen de discriminat:

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0 = 100 - 0 = 100$$

De twee oplossingen zijn dus:

$$x_1 = \frac{10 + \sqrt{100}}{2.3} \text{ en } x_2 = \frac{10 - \sqrt{100}}{2.3}$$

ofwel

$$x_1 = \frac{10}{3} \text{ en } x_2 = 0$$

Dit had echter veel eenvoudiger kunnen opgelost worden door de oorspronkelijke vergelijking te ontbinden in factoren:

$$3x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 10) = 0$$

De laatste vergelijking kan alleen maar nul zijn als $x = 0$ of $3x - 10 = 0$, met andere woorden de oplossingen zijn

$$x_1 = 0 \text{ en } x_2 = \frac{10}{3}$$

- Voorbeeld speciaal geval 3

$$17(x - 1)(x + \pi) = 0$$

De kwadratische vergelijking is hier gegeven als een product van factoren waarin de onbekende x lineair voorkomt. In dit geval is het **niet** interessant om de haakjes uit te werken (het mag wel!). Het product kan alleen maar nul zijn als minstens één van de factoren nul is. Er is dus voldaan aan de vergelijking als $x - 1 = 0$ of $x + \pi = 0$.
De oplossingen zijn dus:

$$x_1 = 1 \text{ en } x_2 = -\pi$$

Onthoud

Oplossen van tweedegraadsvergelijkingen:

- Schrijf de vergelijking in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b en c reële getallen)
- Bereken de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$
- Ga na hoeveel oplossingen er zijn:
  - Als $\Delta > 0$ dan zijn er 2 verschillende reële oplossingen
  - Als $\Delta = 0$ dan is er 1 reële oplossing (de 2 oplossingen zijn gelijk aan elkaar)
  - Als $\Delta < 0$ dan zijn er twee complexe oplossingen die elkaars complex toegevoegde zijn
- De oplossingen worden gegeven door

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ en } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  Als $\Delta < 0$ dan zijn er twee imaginaire oplossingen voor $\sqrt{\Delta}$: $i\sqrt{|\Delta|}$ en $-i\sqrt{|\Delta|}$

Opmerking: Respecteer de rekenregels voor haakjes, voor het optellen en vermenigvuldigen van breuken, enz... Denk niet dat je het sneller en beter kan op “jouw manier”!

1.4 Hogeregraadsvergelijkingen

- Hoe kan je vergelijkingen met een graad hoger dan twee oplossen?

1.5 Enkele nuttige weetjes over veeltermvergelijkingen in het algemeen

Uit de theoretische algebra weet men dat:

- een veeltermvergelijking van de $n-$de graad met reële coëfficiënten n complexe oplossingen heeft. Zo kan je op het zicht weten dat bijvoorbeeld de vergelijking $y^5 - \pi y^2 + 4y - 28 = 0$ vijf complexe oplossingen heeft. Denk er aan dat een reëel getal ook een complex getal is!
- een veeltermvergelijking met een oneven graad en reële coëfficiënten heeft altijd minstens één reële oplossing (de vergelijking uit het voorbeeld heeft dus zeker 1 reële oplossing).
- voor vergelijkingen van de derde en vierde graad bestaan er algemene oplossingsmethoden zoals voor tweedegraadsvergelijkingen (deze methoden zijn echter zeer langdradig en ingewikkeld en worden in de praktijk niet zoveel gebruikt).
- voor vergelijkingen vanaf de vijfde graad bestaan er geen algemene theoretische oplossingsmethoden (dergelijke vergelijkingen worden numeriek opgelost, meestal met behulp van een computer of rekenmachine).

In een aantal speciale gevallen is het echter mogelijk om een hogeregraadsvergelijking toch met de hand op te lossen. Deze gevallen bespreken we hier.

Substitutiemethode

Sommige hogeregraadsvergelijkingen kunnen opgelost worden door een slimme substitutie. Neem bijvoorbeeld de volgende vierdegraadsvergelijking:

$$x^4 + 3x^2 - 1 = 0$$

Door de substitutie $y = x^2$ toe te passen wordt deze vergelijking omgezet in een tweedegraadsvergelijking in de onbekende y.

$$y^2 + 3y - 1 = 0$$

Deze vergelijking kunnen we oplossen!
We berekenen de discriminant:

$$\Delta = 3^2 - 4.1.(-1) = 9 + 4 = 13$$

Aangezien $\Delta > 0$ zijn er 2 verschillende oplossingen **voor de tweedegraadsvergelijking**.

$$y_1 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \text{ en } y_2 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$$

Dit zijn echter niet de oplossingen van de oorspronkelijke vierdegraadsvergelijking in de onbekende x. Het verband tussen de oplossingen van de vierdegraadsvergelijking en de waarden y_1 en y_2 wordt gegeven door de vergelijking $y = x^2$. We zoeken dus die waarden voor x waarvoor het kwadraat y_1 en y_2 oplevert.

$$x_1 = \sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}, x_2 = -\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}, x_3 = i\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}, x_4 = -i\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}$$

De oplossingenverzameling is

$$S = \{\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}, -\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}, i\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}, -i\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}\}$$

Ontbinden in factoren

Beschouw de volgende derdegraadsvergelijking

$$5x^3 - 2x^2 + 3x = 0$$

Het linkerlid van deze vergelijking kunnen we schrijven als een product

$$x(5x^2 - 2x + 3) = 0$$

Aan deze vergelijking kan alleen maar voldaan worden als $x = 0$ of $5x^2 - 2x + 3 = 0$.
We hebben dus al één oplossing gevonden:

$$x_1 = 0$$

Om de eventuele andere oplossingen (maximaal drie) te vinden lossen we de vergelijking $5x^2 - 2x + 3 = 0$ op.
We berekenen de discriminant: $\Delta = (-2)^2 - 4.5.3 = 4 - 60 = -56 < 0$. Er zijn dus twee complexe oplossingen voor $5x^2 - 2x + 3 = 0$.

De oplossingenverzameling is

$$S = \{0, \frac{1+i\sqrt{14}}{5}, \frac{1-i\sqrt{14}}{5}\}$$

Onthoud

Er bestaan geen algemene methoden om vergelijkingen van vijfde graad of hoger met de hand op te lossen. Deze methoden bestaan wel voor derdegraadsvergelijkingen en vierdegraadsvergelijkingen maar deze methoden zijn zeer omslachtig en worden daarom weinig gebruikt in de praktijk.

In een aantal speciale gevallen kunnen hogeregraadsvergelijkingen echter opgelost worden met één van de volgende technieken:

- **Substitutiemethode**
  1. Als de onbekende x is vervang dan x^2 door een andere onbekende (zoals y) om een kwadratische vergelijking te bekomen.
  2. Los deze vergelijking op naar y.
  3. Los de vergelijkingen $y = x^2$ op naar de onbekende x.
- **Ontbinden in factoren**
  1. Zet alle termen in het linkerlid zodat het rechterlid 0 is.
  2. Ontbind het linkerlid in factoren door af te zonderen.
  3. De oplossingen worden gevonden door elke factor gelijk te stellen aan 0.

Opmerking: Respecteer de rekenregels voor haakjes, voor het optellen en vermenigvuldigen van breuken, enz...

1.6 Stelsels van vergelijkingen

- Wat is een stelsel van vergelijkingen?
- Hoe kan men een eenvoudig stelsel van eerstegraadsvergelijkingen oplossen?

Inleiding

Een stelsel van vergelijkingen bestaat uit minstens twee vergelijkingen in minstens twee onbekenden. Het bepalen van de onbekenden die tegelijkertijd oplossing zijn voor al de vergelijkingen van het stelsel noemt men het oplossen van het stelsel van vergelijkingen.

Als het stelsel van vergelijkingen alleen bestaat uit veeltermvergelijkingen van de eerste graad noemt men dit stelsel **een lineair stelsel** of **een stelsel van lineaire vergelijkingen**.
Een voorbeeld van een lineair stelsel van drie vergelijkingen in drie onbekenden x, y en z:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 0 \\ 3x + 2y = 5 \\ -x - 7y + z = -1 \end{cases}$$

In de ingenieurswereld is het niet ongewoon om stelsels van tientallen vergelijkingen in tientallen onbekenden tegen te komen.

In de algebra toont men aan er voor een stelsel van eerstegraadsvergelijkkingen drie mogelijkheden zijn:

- Het stelsel is oplosbaar en heeft juist één oplossing.
- Het stelsel is oplosbaar en heeft oneindig veel oplossingen.
- Het stelsel heeft geen oplossingen.

In deze cursus beperken we ons tot het oplossen van stelsels van twee lineaire vergelijkingen. Voor dergelijke eenvoudige stelsels wordt gebruik gemaakt van de **substitutiemethode**.

De substitutiemethode toegepast bij een stelsel van twee lineaire vergelijkingen werkt als volgt:

- Kies één van de vergelijking en los deze op naar één van de onbekenden, hierbij doe je net alsof je de andere onbekende kent.
- Substitueer nu de oplossing van de ene vergelijking in de andere vergelijking, je bekomt nu een eerstegraadsvergelijking in één onbekende.
- Los de bekomen vergelijking op en substitueer de gevonden onbekende in de andere vergelijking, dit levert een eerstegraadsvergelijking in de nog te vinden onbekende.
- Los de overblijvende vergelijking op.

- De gevonden oplossing(en) zijn oplossing voor allebei de vergelijkingen van het stelsel. Controleer dit door de waarden te substitueren!

We demonstreren de substitutiemethode met enkele voorbeelden.

Voorbeeld 1

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

We kiezen bijvoorbeeld de eerste vergelijking en lossen deze op naar de onbekende y waarbij we net doen alsof x een gekend getal is:

$$2x + y = 0 \Leftrightarrow y = -2x$$

We substitueren nu $y = -2x$ in de tweede vergelijking en lossen de nieuwe vergelijking op naar x:

$$x - 3(-2x) + 1 = 0 \Leftrightarrow x + 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow 7x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{7}$$

We substitueren de gevonden x nu terug in de eerste vergelijking $y = -2x$:

$$y = -2(-\frac{1}{7}) \Leftrightarrow y = \frac{2}{7}$$

De oplossing voor het stelsel is dus

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{7} \\ y = \frac{2}{7} \end{cases}$$

Controle door deze waarden voor x en y in het oorspronkelijke stelsel te substitueren:

$$\begin{cases} 2(-\frac{1}{7}) + \frac{2}{7} = 0 \\ -\frac{1}{7} - 3(\frac{2}{7}) + 1 = 0 \end{cases}$$

Voorbeeld 2

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = 22 \end{cases}$$

Soms wordt om de zaken overzichtelijk te houden bij elke stap het volledige stelsel opnieuw opgeschreven. Dit vraagt heel wat extra schrijfwerk maar het kan wel helpen om fouten te vermijden.
We kiezen bijvoorbeeld de eerste vergelijking en lossen deze op naar x:

$$\left\{\begin{array}{l}3x+2y=4\\2x-3y=22\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}3x=4-2y\\2x-3y=22\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\frac{4-2y}{3}\\2x-3y=22\end{array}\right.$$

Vervolgens substitueren we

$$x=\frac{4-2y}{3}$$

in de tweede vergelijking:

$$\left\{\begin{array}{l}x=\frac{4-2y}{3}\\2(\frac{4-2y}{3})-3y=22\end{array}\right.$$

Dit geeft dan:

$$\left\{\begin{array}{l}x=\frac{4-2y}{3}\\\frac{2.4}{3}-\frac{2.2}{3}y-3y=22\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\frac{4-2y}{3}\\\frac{8}{3}-\frac{4}{3}y-3y=22\end{array}\right.$$

en

$$\left\{\begin{array}{l}x=\frac{4-2y}{3}\\\frac{-4-9}{3}y=\frac{66-8}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\frac{4-2y}{3}\\-13y=58\end{array}\right.$$

dus

$$y=-\frac{58}{13}$$

Dit substitueren we nu in de eerste vergelijking:

$$\left\{\begin{array}{l}x=\frac{4-2(-\frac{58}{3})}{3}\\y=-\frac{58}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\frac{4+\frac{116}{13}}{3}\\y=-\frac{58}{13}\end{array}\right.$$

Uitwerken geeft:

$$\left\{\begin{array}{l}x=\frac{\frac{52+116}{13}}{3}\\y=-\frac{58}{13}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\frac{56}{13}\\y=-\frac{58}{13}\end{array}\right.$$

Controleer zelf de correctheid van de gevonden oplossing door x en y te substitueren in het oorspronkelijke stelsel van vergelijkingen.

Opmerking: Hopelijk heb je gemerkt dat het zo goed als onmogelijk is dergelijke berekeningen uit te voeren zonder op een correcte manier met de rekenregels voor haakjes en breuken om te springen...

Voorbeeld 3

$$\begin{cases} \pi x - 5y = 0 \\ 2\pi x - 10y = \frac{\pi}{17} \end{cases}$$

De eerste vergelijking oplossen naar x geeft:

$$x = \frac{5}{\pi}y$$

Dit substitueren in de tweede vergelijking en uitwerken geeft:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{\pi}y \\ 2\pi(\frac{5}{\pi}y) - 10y = \frac{\pi}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{\pi}y \\ 10y - 10y = \frac{\pi}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{\pi}y \\ 0 = \frac{\pi}{17} \end{cases}$$

De tweede vergelijking van het stelsel is duidelijk onzin, er bestaat geen x en y die ervoor kan zorgen dat deze vergelijking klopt.

Het stelsel van vergelijkingen heeft geen oplossingen!

Voorbeeld 4

$$\begin{cases} 84x - 210y = 21 \\ 2x - 5y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

We lossen de tweede vergelijking op naar y:

$$2x - 5y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2x - \frac{1}{2}}{5} = y \Leftrightarrow y = \frac{4x - 1}{10}$$

Substitutie in de eerste vergelijking geeft dan

$$\begin{cases} 84x - 210(\frac{4x-1}{10}) = 21 \\ y = \frac{4x-1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 84x - 84x + 21 = 21 \\ y = \frac{4x-1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21 = 21 \\ y = \frac{4x-1}{10} \end{cases}$$

Hier zien we dat de eerste vergelijking altijd geldig is, welke waarden voor x en y men ook kiest. Alleen de tweede vergelijking legt beperkingen op aan x en y, namelijk dat om een oplossing van het stelsel te hebben het verband tussen x en y moet gegeven worden door

$$y = \frac{4x - 1}{10}$$

Je kan dus ofwel x, ofwel y willekeurig kiezen. Als je de andere onbekende berekent met de tweede vergelijking zijn x,y een oplossing voor het stelsel.

Dit betekent dat het stelsel een oneindig aantal oplossingen heeft!

De oplossingen worden gegeven door

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{4x-1}{10} \end{cases}$$

Onthoud

- Kies één van de vergelijking en los deze op naar één van de onbekenden, hierbij doe je net alsof je de andere onbekende kent.
- Substitueer nu de oplossing van de ene vergelijking in de andere vergelijking, je bekomt nu een eerstegraadsvergelijking in één onbekende.
- Los de bekomen vergelijking op en substitueer de gevonden onbekende in de andere vergelijking, dit levert een eerstegraadsvergelijking in de nog te vinden onbekende.
- Los de overblijvende vergelijking op.
- De gevonden oplossing(en) zijn oplossing voor allebei de vergelijkingen van het stelsel. Controleer dit door de waarden te substitueren!

Opmerking: Respecteer de rekenregels voor haakjes, voor het optellen en vermenigvuldigen van breuken, enz...

Tips:

- Let goed op bij substitutie dat je de hele uitdrukking substitueert, gebruik haakjes!
- Je mag een vergelijking apart afhandelen, maar vergeet niet op het einde alles terug in het stelsel te zetten!

1.7 Ongelijkheden

- Wat is een ongelijkheid?
- Hoeveel oplossingen zijn er voor een ongelijkheid en hoe kan je die vinden?

Inleiding

Men bekomt een ongelijkheid door in een vergelijking het “is gelijk aan” teken te vervangen door één van de volgende ongelijkheidstekens:

- $<$ "is kleiner dan"
- $>$ "is groter dan"
- $\leq$ "is kleiner dan of gelijk aan"
- $\geq$ "is groter dan of gelijk aan"

Je kan ongelijkheden op een soortgelijke manier manipuleren als vergelijkingen.

- Door bij het linkerlid en rechterlid van een ongelijkheid hetzelfde positieve of negatieve getal op te tellen blijft de ongelijkheid geldig. Door bijvoorbeeld in beide leden van de ongelijkheid $x + 1 > 8$ het getal 2 op te tellen vinden we $x + 3 > 10$ en door het getal 2 af te trekken bekomt men $x - 1 > 6$. Dit zijn drie equivalente ongelijkheden met dezelfde oplossingen: $x > 7$.
- Door beide leden van een ongelijkheid met hetzelfde (van nul verschillende) positieve getal te vermenigvuldigen bekomt men een equivalente ongelijkheid, door bijvoorbeeld $x+1 > 8$ te vermenigvuldigen met 10 bekomt men $10x+10 > 80$ met nog steeds dezelfde oplossingen $x > 7$.
- **Pas op!** Als men een ongelijkheid vermenigvuldigt met een negatief getal dan keert het ongelijkheidsteken om! Nemen we weer hetzelfde voorbeeld $x+1 > 8$ en vermenigvuldigen we deze uitdrukking met -1 dan bekomen we $-x-1 < -8$. Alleen op deze manier blijven de oplossingen hetzelfde: $x > 7$.

In deze cursus zullen we met behulp van een aantal voorbeelden illustreren hoe men ongelijkheden van de eerste graad kan oplossen.

Voorbeeld 1

$$5x - 7 < 2x + 1$$

Door bij beide leden $2x$ af te trekken en 7 bij te tellen vinden we

$$3x < 8$$

Delen door 3 geeft

$$x < \frac{8}{3}$$

Deze ongelijkheid heeft dus oneindig veel oplossingen!

Deze oplossingen worden soms ook genoteerd met de oplossingenverzameling:

$$S =]-\infty, \frac{8}{3}[$$

Met deze notatie wordt de verzameling van alle getallen tussen $-\infty$ en $\frac{8}{3}$ aangegeven, merk op dat $-\infty$ en $\frac{8}{3}$ niet tot de oplossingenverzameling behoren (dit wordt aangegeven door de naar buiten wijzende vierkante haakjes).

Voorbeeld 2

$$5x - 7 < 8x + 1$$

Door bij beide leden $8x$ af te trekken en 7 bij te tellen vinden we

$$-3x < 8$$

Delen door -3 geeft

$$x > -\frac{8}{3}$$

Let op! Het “<”-teken wordt het “>”-teken!

De oplossingenverzameling wordt genoteerd als

$$S =]-\frac{8}{3}, +\infty[$$

Voorbeeld 3

$$17x + 7 \geq 17x + 3\pi$$

Van beide leden $17x$ aftrekken geeft

$$7 \geq 3\pi$$

Er is geen enkele x die ervoor kan zorgen dat hieraan voldaan is. Deze ongelijkheid heeft geen oplossingen. De oplossingenverzameling is leeg:

$$S = \varnothing$$

Voorbeeld 4

$$\frac{x}{3} + 1 \leq -\frac{5}{7}x - 12$$

Vermenigvuldigen met 3 geeft

$$x + 3 \leq -\frac{15}{7}x - 36$$

Het wegwerken van de term met x in het rechterlid en de constante term in het linkerlid geeft

$$\frac{22}{7}x \leq -39$$

Vermenigvuldigen met $\frac{7}{22}$ geeft tenslotte

$$x \leq -\frac{273}{22}$$

De oplossingenverzameling is

$$S =]-\infty, -\frac{273}{22}]$$

Merk op dat het naar binnen wijzende vierkante haakje aanduidt dat $-\frac{273}{22}$ wel degelijk tot de oplossingenverzameling behoort.

Onthoud

- Ongelijkheden van de eerste graad lost men op door de onbekende af te zonderen op een soortgelijke manier als bij veeltermvergelijkingen van de eerste graad.
- Let op dat bij het vermenigvuldigen van de ongelijkheid met een negatief getal "groter dan (of gelijk aan)" wordt omgezet in "kleiner dan (of gelijk aan)" en omgekeerd.
- Een ongelijkheid heeft ofwel oneindig veel oplossingen ofwel geen oplossingen.

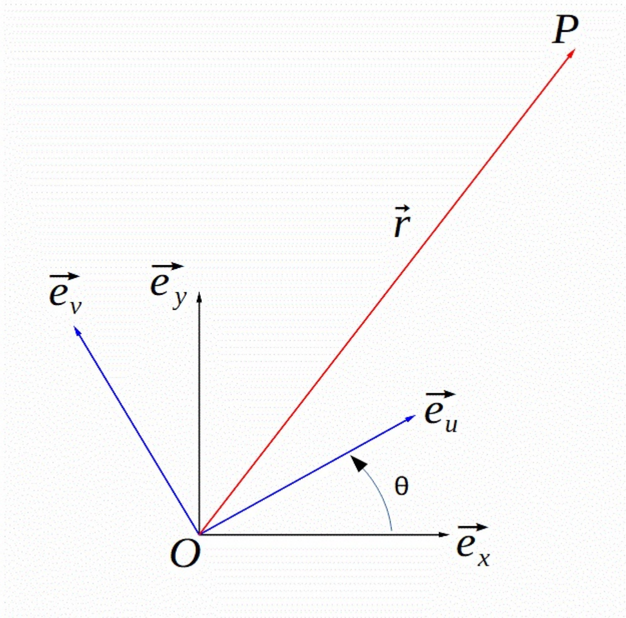
2 Matrices

Inleiding

Stel dat je een computerspel speelt en je op een beeldscherm, of eventueel door een virtual reality headset, naar een door een computer gegenereerd landschap kijkt. Kijk je in deze wereld een beetje naar links of naar rechts dan berekent de computer hoe het landschap eruit ziet in je nieuwe kijkrichting en je ziet de virtuele wereld als het ware rond je gezichtspunt roteren. Misschien heb je er nog niet bij stilgestaan maar bij dit soort zaken wordt stevig gebruikt gemaakt van wiskunde.
We kunnen een idee krijgen van hoe dit in zijn werk gaat door ons in eerste instantie te beperken tot een twee dimensionale situatie. In de figuur is een punt P voorgesteld waarvan de positie in het vlak is vastgelegd door een plaatsvector $\vec{r}$. Deze plaatsvector kan voorgesteld worden ten opzichte van verschillende basissen.

In de figuur worden twee orthonormale basissen (m.a.w. basissen van loodrecht op elkaar staande éénheidsvectoren) gebruikt waarbij de basis $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v\}$ over een hoek θ is geroteerd ten opzichte van de basis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$.
De plaatsvector van het punt P wordt ten opzichte van de basis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ geschreven als

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$$



en ten opzichte van de basis $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v\}$ als

$$\vec{r} = u\vec{e}_u + v\vec{e}_v$$

Om te beschrijven wat er gebeurt bij een rotatie van ons referentiestelsel over een hoek θ moeten we het verband vinden tussen de coördinaten van het punt P in de twee referentiestelsels, met andere woorden we moeten het verband vinden tussen de componenten van $\vec{r}$ ten opzichte van de basis $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v\}$ en ten opzichte van de basis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$.

Door te projecteren kunnen we de componenten van de éénheidsvectoren van de basis $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v\}$ schrijven ten opzichte van de basis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$.

$$\begin{cases} \vec{e}_u = \cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_v = -\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_y \end{cases}$$

Omgekeerd kunnen we de componenten van de basisvectoren $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ ten opzichte van de basis $\{\vec{e}_u, \vec{e}_v\}$ neerschrijven als volgt:

$$\begin{cases} \vec{e}_x = \cos\theta \vec{e}_u - \sin\theta \vec{e}_v \\ \vec{e}_y = \sin\theta \vec{e}_u + \cos\theta \vec{e}_v \end{cases}$$

Door substitutie in $\vec{r} = u\vec{e}_u + v\vec{e}_v$ vinden we

$$\vec{r} = u(\cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y) + v(-\sin\theta \vec{e}_x + \cos\theta \vec{e}_y)$$

ofwel

$$\vec{r} = (u\cos\theta - v\sin\theta)\vec{e}_x + (u\sin\theta + v\cos\theta)\vec{e}_y$$

De coördinaten van het punt P in het oorspronkelijke referentiestelsel worden dus als volgt geschreven in functie van de coördinaten van het punt P in het nieuwe referentiestelsel:

$$\begin{cases} x = u\cos\theta - v\sin\theta \\ y = u\sin\theta + v\cos\theta \end{cases}$$

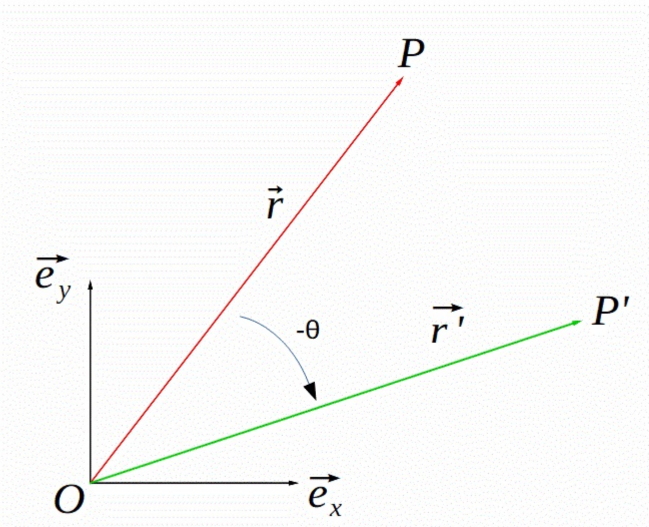
Op dezelfde manier vindt men door substitutie de coördinaten van het punt P in het nieuwe referentiestelsel, uitgedrukt in functie van de coördinaten van P in het oude referentiestelsel:

$$\begin{cases} u = x\cos\theta + y\sin\theta \\ v = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Deze uitdrukkingen kan men ook op een alternatieve, elegante manier neerschrijven met behulp van getallenschema's. De coördinaten in een referentiestelsel schrijft met in een kolom, een **kolommatrix** en het verband tussen de coördinaten in beide referentiestelsels drukt met uit met een **coördinatentransformatiematrix**.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Een soortgelijke, maar verschillende situatie wordt in de volgende figuur voorgesteld. Een vector $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$ roteert over een hoek $-\theta$ (dus gemeten in wijzerszin), na deze rotatie wordt de vector, die we nu $\vec{r'}$ noemen, gegeven door $\vec{r'}{=}x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y$.

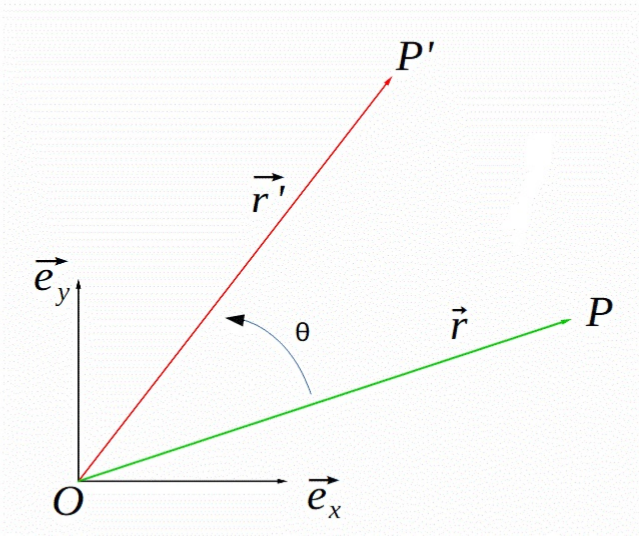


De componenten van $\vec{r'}$ worden nu uitgedrukt in functie van de componenten van $\vec{r}$ met

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

In de volgende figuur is de rotatie van een vector $\vec{r}$ over een hoek θ in tegenwijzerszin voorgesteld.

De transformatie voor deze rotatie vinden we door in de bovenstaande uitdrukking θ te vervangen door $-\theta$. We vinden dan:



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

De matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

wordt de rotatiematrix voor rotatie over een hoek θ genoemd.

Matrices zijn een handige manier om veranderingen van referentiestelsel, coördinatentransformaties, te beschrijven.
Daarnaast is er een hele familie bewerkingen, lineaire transformaties, waarbij een vector via een matrixbewerking wordt omgezet in een nieuwe vector. Typisch voorbeeld is het roteren van een vector zoals hierboven beschreven.

In dit hoofdstuk zullen we een aantal definities en eigenschappen van matrices bespreken en zullen we rekenwerk met matrices inoefenen met het oog op praktische toepassingen. Alle eigenschappen die besproken worden kunnen wiskundig bewezen worden maar dat gaan we in dit hoofdstuk dus niet doen.

2.1 Definities

- Wat is een matrix?
- Welke bewerkingen zijn er mogelijk met matrices?
- Wat hebben matrices te maken met het oplossen van stelsels van vergelijkingen?

Definitie van een matrix

Een mxn matrix A is een rechthoekig getallenschema waarin reële en/of complexe getallen in m rijen en n kolommen zijn gerangschikt. Het getal op de i-de rij en j-de kolom wordt symbolisch weergegeven als a_{ij}.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Enkele veel voorkomende speciale matrices

- Een rijmatrix

  Een matrix A met 1 rij en n kolommen wordt een $1xn$ matrix of rijmatrix genoemd.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

- Een kolommatrix

  Een matrix A met m rijen en 1 kolom wordt een $mx1$ matrix of kolommatrix genoemd.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

- Een vierkante matrix

  Een matrix met evenveel rijen als kolommen wordt een vierkante matrix genoemd.
  De onderstaande matrix A is een nxn matrix.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Een diagonaalmatrix

  Een vierkante matrix A waarin alle getallen die niet op de diagonaal liggen nul zijn ($a_{ij} = 0$ als $i \neq j$) en minstens één getal op de diagonaal verschillend is van nul (voor minstens 1 getal a_{ii} geldt $a_{ii} \neq 0$) noemt men een diagonaalmatrix.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Een driehoeksmatrix

  Een driehoeksmatrix is een vierkante matrix waarbij alle elementen onder de diagonaal nul zijn. De overige elementen zijn niet allemaal nul.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Een symmetrische matrix

  Een vierkante matrix A waarbij de diagonaal een spiegellijn vormt (m.a.w. voor alle $a_{ij} \in A$ geldt $a_{ij} = a_{ji}$) is een symmetrische matrix.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Een éénheidsmatrix

  Een diagonaal matrix waarbij alle getallen op de diagonaal gelijk zijn aan één (alle $a_{ii} = 1$) is een éénheidsmatrix I.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- Een nulmatrix

  Een mxn matrix waarin alle $a_{ij} = 0$ is een nulmatrix O.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Opmerking: de nulmatrix is niet noodzakelijk een vierkante matrix.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots$$

worden allemaal nulmatrix genoemd.

2.2 Bewerkingen met matrices

Transponeren van een matrix

De getransponeerde A^t van een matrix A vindt men door de rijen en kolommen van A om te wisselen.

Voorbeeld:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 0 & 8 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Voor een symmetrische matrix B geldt dat $B^t = B$.

Voorbeeld:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

De getransponeerde van een rijmatrix is een kolommatrix en omgekeerd.

Voorbeeld:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 84 & -1 \end{pmatrix} \quad C^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 84 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Product van een matrix met een getal

Het product van een mxn matrix A met een reëel of complex getal λ is een nieuwe mxn matrix B die men vindt door elk element a_{ij} van de matrix te vermenigvuldigen met λ.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda_{12} & \lambda a_{13} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \lambda a_{m3} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Optellen van matrices

Het optellen van twee matrices A en B is alleen gedefiniëerd als het aantal rijen van beide matrices gelijk is en als het aantal kolommen van beide matrices gelijk is. In dat geval is de som een matrix C met hetzelfde aantal rijen en kolommen als A en B die men als volgt vindt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{m3} + b_{m3} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Voorbeelden:

1.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A + B = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

2.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

De som $A + C$ is niet gedefiniëerd.

Vermenigvuldiging van twee matrices

Het product van een matrix A met een matrix B is alleen gedefiniëerd als het aantal kolommen van de eerste matrix A gelijk is aan het aantal rijen van de tweede matrix B.

In dat geval geldt dat het product van de mxn matrix A met de nxp matrix B een nieuwe matrix $C = AB$ is met m-rijen en p-kolommen.
Elk element c_{ij} van de productmatrix C wordt gegeven door:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

m.a.w. c_{ij} wordt gevonden door het eerste element van de i-de rij van A te vermenigvuldigen met het eerste element van de j-de kolom van B, het tweede element van de i-de rij van A te vermenigvuldigen met het tweede element van de j-de kolom van B, het derde element van de i-de rij van A te vermenigvuldigen met het derde element van de j-de kolom van B, enz... en vervolgens al deze producten op te tellen.

Voorbeelden:

1. Bereken de producten $C = AB$ en $D = BA$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Het aantal kolommen van A is gelijk aan het aantal rijen van B, het product AB is dus gedefiniëerd en is een $2x1$ matrix C

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1.10 + 0.12 + 2.0 + 4.0 \\ 0.10 + 2.12 + 3.0 + 5.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Het aantal kolommen van B is verschillend van het aantal rijen van A. Dit betekent dat het product $D = BA$ niet gedefiniëerd is.

2. Bereken de producten $C = AB$ en $D = BA$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Het aantal kolommen van A is gelijk aan het aantal rijen van B, het product AB is dus gedefiniëerd en is een $1x1$ matrix C

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1.1 + 0.0 + 1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix} = 2$$

Het aantal kolommen van B is gelijk aan het aantal rijen van A, het product BA is dus gedefiniëerd en is een $3x3$ matrix D

$$D = BA = \begin{pmatrix} 1.1 & 0.0 & 1.1 \\ 0.1 & 0.0 & 0.1 \\ 1.1 & 0.0 & 1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Opmerkingen:

- Bij het vermenigvuldigen van matrices geldt dus over het algemeen **NIET** dat $AB = BA$
- Het is zelfs **NIET** zo dat uit het feit dat het product van twee matrices $C = AB$ bestaat volgt dat het product BA ook bestaat.

2.3 Determinant

Inleiding

De determinant van een matrix is een getal dat via een welbepaalde procedure uit de elementen van een vierkante matrix kan berekend worden.
De determinant van een matrix is alleen **gedefiniëerd voor vierkante matrices**.

Determinant van een 1x1 matrix

De determinant van een $1x1$ matrix A is het enige element van de matrix.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix} \quad detA = |a_{11}| = a_{11}$$

Determinant van een 2x2 matrix

De determinant van een $2x2$ matrix A wordt als volgt berekend:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Minor van een element van een vierkante matrix

De minor van een element a_{ij} van een vierkante matrix A is het getal dat men bekomt door in de matrix A de i-de rij en de j-de kolom te schrappen, en van de overblijvende matrix de determinant te berekenen.

Voorbeeld:

We berekenen de minor van het element a_{13} van de matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

We schrappen de eerste rij en de derde kolom van A en berekenen de determinant van de overblijvende matrix.

$$minor(a_{13}) = det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$$

Cofactor van een element van een vierkante matrix

De cofactor van een element a_{ij} van een vierkante matrix A is het getal dat men bekomt door de minor van a_{ij} te vermenigvuldigen met $(-1)^{i+j}$

$$cofactor(a_{ij}) = (-1)^{i+j} minor(a_{ij})$$

Voorbeelden:

1. We berekenen de cofactor van het element a_{ij} van de bovenstaande matrix A

$$cofactor(a_{ij}) = (-1)^{1+3} minor(a_{13}) = minor(a_{13}) = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$$

2. Bereken de cofactor van het element $a_{23} = 8$ van de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

   We schrappen de tweede rij en de derde kolom en berekenen de determinant van de resterende vierkante matrix.

$$cofactor(a_{23}) = (-1)^{2+3}(1.5 - 2.2) = (-1).1 = -1$$

   Merk op dat in de berekening van de cofactor van a_{23} de waarde van a_{23}, in dit geval 8, geen enkele rol speelt.

Determinant van een nxn matrix

Om de determinant van een willekeurige nxn matrix te berekenen maken we gebruik van de ontwikkelingsformule van Laplace. Deze formule kan toegepast worden op eender welke rij of kolom van een nxn matrix, het resultaat is steeds de determinant van de matrix.

Toegepast op de i-de rij van de matrix noemt men dit **de ontwikkeling van de determinant naar de i-de rij**:

$$detA = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} cofactor(a_{ik})$$

Toegepast op de j-de kolom noemt men dit **de ontwikkeling van de determinant naar de j-de kolom**:

$$detA = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} cofactor(a_{kj})$$

Voorbeelden:

Bereken de determinant van de volgende matrices:

1.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Oplossing: we passen ontwikkeling naar de eerste rij toe.

$$detA = 1(-1)^{1+1}det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + 2(-1)^{1+2}det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 0(-1)^{1+3}det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$detA = (4 - 2(8 - 9)) = 6$$

2.
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & -5 \\ \pi & 0 & 3 & 11 \\ 0 & \pi^2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Oplossing: de matrix B is geen vierkante matrix, de determinant bestaat niet.

3.
$$C = \begin{pmatrix} \pi & \pi^2 & \pi^3 & \pi^4 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oplossing: we passen ontwikkeling naar de eerste kolom toe.

$$detC = \pi(-1)^{1+1}det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Op de overblijvende determinant passen we opnieuw ontwikkeling naar de eerste kolom toe.

$$detC = \pi 3(-1)^{1+1}det\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$detC = \pi.3.4.1 = 12\pi$$

Er geldt algemeen dat **de determinant van een driehoeksmatrix het product van de diagonaalelementen is**.

Eigenschappen van determinanten

Alle matrices die in deze paragraaf voorkomen worden ondersteld vierkante matrices te zijn.

- De determinant van de getransponeerde van een matrix is hetzelfde als de determinant van de oorspronkelijke matrix.

$$detA^t = detA$$

- Als men twee rijen (of twee kolommen) van plaats wisselt in een matrix dat verandert de determinant van teken.

  Voorbeeld:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad detA = 1$$

  Wissel de eerste en tweede rij van plaats:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad detA' = 1(-1)^{1+2}det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad detA' = -1$$

- Als de elementen van een rij (of kolom) van een matrix vermenigvuldigt worden met een getal λ dan wordt de determinant van de matrix vermenigvuldigt met λ.

  Voorbeeld:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad detB = 12 - 4 = 8$$

  We vermenigvuldigen de eerste rij met $\lambda = 2$

$$B' = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad detB' = 24 - 8 = 16$$

- Als men de elementen van een rij (kolom) van een matrix vermenigvuldigt met een getal $\lambda \neq 0$ en deze vervolgens optelt bij de elementen van een andere rij (kolom) dan verandert de waarde van de determinant niet.

  Voorbeeld:

  We vertrekken opnieuw van de matrix B uit het vorige voorbeeld. We vermenigvuldigen nu de eerste rij met 2 en tellen deze rij op bij de tweede rij.

$$B'' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \quad detB'' = 24 - 16 = 8$$

- De determinant van een matrix met een nulrij (nulkolom) is nul.

  Voorbeeld:

$$C = \begin{pmatrix} \pi & \pi+1 & \pi+2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \pi-1 & \pi & \pi+1 \end{pmatrix}$$

  De determinant ontwikkelen naar de tweede rij geeft onmiddellijk $detC = 0$

- Als twee rijen (kolommen) van een matrix gelijk zijn dan is de determinant nul.

  Voorbeeld:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 3 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad detD = 1det\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 1det\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + 8det\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$detD = 0 + 8(6-6) = 0$$

- Als twee rijen (kolommen) van een matrix evenredig zijn met elkaar dan is de determinant nul.

  Voorbeeld: de tweede rij is drie maal de eerste rij.

$$E = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 30 \end{pmatrix} \quad detE = 150 - 150 = 0$$

- Als een rij (kolom) van een matrix een lineaire combinatie is van andere rijen (kolommen) van de matrix dan is de determinant nul.

  Voorbeeld: De tweede rij is de derde rij waarbij twee keer de eerste rij is opgeteld. We ontwikkelen naar de derde rij.

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 10 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad detF = 4det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} + 4det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$detF = 4(20-12) + 4(4-12) = 4(8-8) = 0$$

- Als A en B beide nxn matrices zijn dan geldt:

$$det(AB) = (detA)(detB)$$

Voorbeeld:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$detA = 8 \quad detB = -8 \quad (detA)(detB) = -64$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2+18 & 4+12 \\ 4+60 & 8+40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 16 \\ 64 & 48 \end{pmatrix} \quad det(AB) = 20.48 - 64.16$$

$$det(AB) = 16(20.3 - 64) = 16(-4) = -64$$

2.4 Inverse van een matrix

Reguliere en singuliere matrix

Een vierkante matrix A waarvoor geldt $detA \neq 0$ is een reguliere matrix.

Een vierkante matrix A waarvoor geldt $detA = 0$ is een singuliere matrix.

Inverse van een matrix

Als er voor een vierkante matrix A een vierkante matrix X bestaat waarvoor geldt $AX = XA = I$, met I de éénheidsmatrix dan is de matrix X de inverse van A.
Notatie:

$$X = A^{-1}$$

Opmerkingen:

- Opdat X de inverse van A zou zijn moet dus aan **beide** uitdrukkingen $AX = I$ en $XA = I$ voldaan zijn.
- Als de inverse van A bestaat dan geldt $(A^{-1})^{-1} = A$
- Als de inverse van A bestaat dan zegt men dat A inverteerbaar is.
- Men kan aantonen dat voor een inverteerbare matrix A geldt $detA \neq 0$, met andere woorden "A is inverteerbaar" $\Leftrightarrow$ "A is regulier".

Voorbeeld:

De inverse van de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ is de matrix $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Controle:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en

$$BA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Adjunctmatrix van een vierkante matrix

De adjunctmatrix van een vierkante matrix A is de matrix die men bekomt door elk element van A te vervangen door zijn cofactor en vervolgens de matrix te transponeren.

Dus, met a_{ij} de elementen van de nxn matrix A geldt:

$$adjA = \begin{pmatrix} cofactor(a_{11}) & cofactor(a_{12}) & cofactor(a_{13}) & \dots & cofactor(a_{1n}) \\ cofactor(a_{21}) & cofactor(a_{22}) & cofactor(a_{23}) & \dots & cofactor(a_{2n}) \\ cofactor(a_{31}) & cofactor(a_{32}) & cofactor(a_{33}) & \dots & cofactor(a_{3n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cofactor(a_{n1}) & cofactor(a_{n2}) & cofactor(a_{n3}) & \dots & cofactor(a_{nn}) \end{pmatrix}^t$$

Het is mogelijk om aan te tonen dat voor een reguliere vierkante matrix A geldt:

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{detA}$$

Voorbeeld:

De vierkante matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 1 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

We gaan na of deze matrix regulier is (m.a.w. of er een inverse matrix A^{-1} bestaat.

$$detA = 1det\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 8det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -7$$

Dus $detA \neq 0$ zodat A is regulier, A^{-1} bestaat.

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{detA} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -8 & 1 & -3 \\ 16 & -2 & -1 \end{pmatrix}^t$$

De inverse van A is dus

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{8}{7} & -\frac{16}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

2.5 De rang van een matrix

Onderdeterminant van p-de orde van een matrix

Een onderdeterminant van p-de orde van een mxn matrix A is een getal dat men bekomt door:

- $m - p$ rijen en $n - p$ kolommen van de matrix A te schrappen
- de determinant van de overblijvende vierkante matrix te berekenen

Opmerkingen:

- onderdeterminanten zijn dus ook voor niet-vierkante matrices gedefiniëerd
- er staat **een** onderdeterminant... naargelang welke rijen en kolommen geschrapt worden zal je een andere onderdeterminant vinden

Voorbeeld:

Beschouw de $3x4$ matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

We berekenen een onderdeterminant van 3-de orde door $3 - 3 = 0$ rijen te schrappen en $4 - 3 = 1$ kolom te schrappen en de determinant van de overblijvende vierkante matrix te berekenen.

- Schrappen van de vierde kolom levert als onderdeterminant van 3-orde:

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 15$$

- Schrappen van de derde kolom levert als onderdeterminant van 3-de orde:

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 18$$

We berekenen een onderdeterminant van 1-ste orde door $3-1=2$ rijen en $4-1=3$ kolommen te schrappen en de determinant van de overblijvende matrix te berekenen.

- Schrap de eerste twee rijen en de eerste drie kolommen. De onderdeierminant van 1-ste orde is
$$det\begin{pmatrix}6\end{pmatrix}=6$$
- Schrap de eerste twee rijen en de laatste drie kolommen. De onderdeterminant van 1-ste orde is
$$det\begin{pmatrix}0\end{pmatrix}=0$$

Rang van een matrix

De rang van een mxn matrix A is nu gedefiniëerd als de hoogste orde r van alle van nul verschillende onderdeterminanten van A.

Er bestaan verschillende notaties voor de rang van een matrix maar de meest voorkomende zijn:

$$rang(A)=r, Rg(A)=r \quad \text{of} \quad Rank(A)=r$$

:**opmerkingen:**

- De rang van een mxn matrix A is nooit groter dan het minimum van m en n.
$$rang(A)\leq min(m,n)$$
Bij het berekenen van de onderdeterminanten kan men immers nooit minder dan 0 rijen of kolommen schrappen...
- Voor een nulmatrix geldt: $rang(O)=0$
- Voor een vierkante nxn matrix A geldt:
  - as A regulier is (m.a.w. $detA\neq 0$) dan geldt $rang(A)=n$
    De van nul verschillende determinant van A is immers de onderdeterminant van orde n.
  - als A singulier is (m.a.w. $detA=0$ dan geldt $rang(A)<n$

Voorbeeld:

We bepalen de rang van $A=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\0&1&0&7\\2&5&6&7\end{pmatrix}$

De matrix A is een $3x4$ matrix. We weten dus op voorhand dat $rang(A)\leq 3$

We berekenen nu de onderdeterminanten, startend van onderdeterminanten van orde 3, tot we een onderdeterminant tegenkomen die verschillend is van nul. De orde van deze onderdeterminant is volgens de definitie de rang van de matrix.

- Onderdeterminanten van orde 3.
  We schrappen 0 rijen en 1 kolom.
  $det\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\2&5&6\end{pmatrix}=0$, $det\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&7\\2&5&7\end{pmatrix}=0$, $det\begin{pmatrix}1&3&0\\0&0&7\\2&6&7\end{pmatrix}=0$, $det\begin{pmatrix}2&3&0\\1&0&7\\5&6&7\end{pmatrix}=0$ De rang van de matrix zal dus kleiner zijn dan 3.

- Onderdeterminanten van orde 2.
  We schrappen 1 rij en 2 kolommen.
  Door de derde rij en de twee laatste kolommen te schrappen vinden we:
  $$det\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=1\neq 0$$
  We vinden dus dat
  $$rang(A)=2$$

2.6 Elementaire omvormingen van een matrix

Definitie

Elementaire omvormingen van een matrix zijn omvormingen die de rang van een matrix niet veranderen. Er zijn drie elementaire omvormingen die men kan toepassen op de rijen of op de kolommen van een matrix.

- Twee rijen (of twee kolommen) van plaats wisselen.
- Alle elementen van een rij (of kolom) vermenigvuldigen met een getal $\lambda \neq 0$.
- Alle elementen van een rij (of kolom) vermenigvuldigen met een getal $\lambda \neq 0$ en deze dan optellen bij de elementen van een andere rij (kolom).

Opmerking:

De rang van een matrix wordt bepaald door na te gaan of determinanten verschillen zijn van nul of niet. De omvormingen die hierboven staan kunnen de waarde van een determinant wel veranderen maar hebben geen effect op het al dan niet nul zijn van een determinant (zie: eigenschappen van determinanten).

De rang van een matrix bepalen met elementaire omvormingen

- Echelonvorm van een matrix

Een matrix is in echelonvorm als

- alle eventuele nulrijen van de matrix onderaan de matrix staan
- de eerste rij begint met een element dat niet nul is, de tweede rij begint met een nul gevolgd door een element dat niet nul is, de derde rij begint met twee nullen gevolgd door een element dat niet nul is, enz... tot ofwel de nulrijen ofwel het einde van de matrix wordt bereikt.

Een mxn matrix in echelonvorm:

$$\begin{pmatrix}
b_{11} & b_{12} & \dots & \dots & b_{1r} & b_{1,r+1} & b_{1,r+2} & \dots & b_{1n} \\
0 & b_{22} & \dots & \dots & b_{2r} & b_{2,r+1} & b_{2,r+2} & \dots & b_{2n} \\
0 & 0 & \ddots & \dots & b_{3r} & b_{3,r+1} & b_{3,r+2} & \dots & b_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & b_{rr} & b_{r,r+1} & b_{r,r+2} & \dots & b_{rn} \\
0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0
\end{pmatrix}$$

met alle $b_{ii} \neq 0$ $(i = 1..r)$ de elementen b_{ij} met $i \neq j$ kunnen zowel gelijk als verschillend van nul zijn.

- Praktische manier om de rang van een matrix te bepalen

  De rang van een mxn matrix A bepalen door onderdeterminanten te berekenen blijkt in de praktijk nogal lastig en tijdrovend te zijn. Een veel handiger manier is gebaseerd op elementaire omvormingen.

  Men gaat als volgt te werk:

  – zet de matrix A met behulp van elementaire omvormingen om in een nieuwe matrix A' die in echelonvorm staat

$$A' = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & \dots & b_{1r} & b_{1,r+1} & b_{1,r+2} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & \dots & b_{2r} & b_{2,r+1} & b_{2,r+2} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & b_{3r} & b_{3,r+1} & b_{3,r+2} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & b_{rr} & b_{r,r+1} & b_{r,r+2} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

  – Het aantal niet-nulrijen van A' is dan gelijk aan de rang van de matrix A

$$rang(A) = r = \text{aantal niet nulrijen van} \quad A'$$

Verklaring:

Elementaire omvormingen veranderen de rang van een matrix niet. Er geldt dus $rang(A) = rang(A')$.
De matrix A' heeft minstens één onderdeterminant van orde r want alle $b_{ii} \neq 0$ $(i = 1..r)$ zodat de determinant van de rxr driehoeksmatrix, waarvan de b_{ii} de diagonaal vormen, niet nul is.
Alle onderdeterminanten van een grotere orde dan r van A' zijn zeker nul, ze bevatten immers altijd minstens één nulrij.

Voorbeeld:

Bereken de rang van $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

We gaan de matrix nu stap voor stap, met elementaire opvormingen, omzetten in een echelonmatrix. Hierbij gaan we van links naar rechts door de matrix: eerst maken we alle elementen onder het eerste element van de eerste rij nul, vervolgens maken we alle elementen onder het tweede element van de tweede rij nul, enz... tot we de echelonvorm bekomen.

- stap 1: rij 3 - rij 1 en rij 4 -2 rij 1

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

- stap 2: rij 3 - rij 2 en rij 4 + 4 rij 2

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

- stap 3: wissel rij 3 en rij 4

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De resulterende $4x4$ matrix A' staat in echelonvorm en heeft drie niet-nulrijen:

$$rang(A) = rang(A') = 3$$

2.7 Praktische berekening van de inverse van een matrix

Om na te gaan of een vierkante matrix regulier is moeten we de determinant berekenen. Voor een iets grotere matrix kan dit behoorlijk tijdrovend zijn. Als blijkt dat de matrix regulier is, kan men de inverse vinden door de adjunctmatrix te berekenen. Hiervoor moeten opnieuw talrijke determinanten worden uitgerekend. Dit maakt dat het berekenen van de inverse van een matrix op deze manier enorm veel tijd en moeite kost, in die mate zelfs dat het voor grotere matrices, zelfs met een computer, onpraktisch wordt.

Er is echter een methode ontwikkeld die toelaat om, met elementaire omvormingen, na te gaan of een matrix inverteerbaar is en eventueel de inverse te vinden. Deze methode staat bekend als de methode van **Gauss-Jordan**. We geven hier deze methode zonder bewijs.

Methode van Gauss-Jordan om na te gaan of een vierkante nxn matrix A inverteerbaar is en om eventueel de inverse van A te vinden:

- Stap 1: Schrijf een nieuwe $nx2n$ matrix met links de matrix A en rechts de éénheidsmatrix I
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$
- Stap 2: Probeer de matrix A, door opeenvolgnede elementaire omvormingen, om te zetten in de éénheidsmatrix I en pas tegelijkertijd dezelfde elementaire omvormingen toe op I. Om geen rekenfouten te maken is het aan te raden je te beperken tot elementaire rij-omvormingen.
Er zijn nu twee mogelijkheden:
  1. Na een aantal omvormingen wordt de nxn matrix A omgezet in een matrix met een nulrij. Dus $rang(A) < n$, $detA = 0$ en A is singulier. De inverse van A bestaat niet.
  2. Na een aantal elementaire omvormingen is A omgezet in de éénheidsmatrix I. Dit betekent dat $rang(A) = n$, $detA \neq 0$ en A is regulier (inverteerbaar). De éénheidsmatrix I is dan door de elementaire omvormingen omgezet in een nieuwe nxn matrix $B = A^{-1}$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & b_{11} & \dots & \dots & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & & & 0 & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & b_{n1} & \dots & \dots & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Voorbeeld:

We gebruiken de methode van Gauss-Jordan om na te gaan of de vierkante matrix A inverteerbaar is. Als dat zo is bepalen we meteen de inverse van A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

We schrijven de $3x3$ matrix A in een $3x6$ matrix door de éénheidsmatrix rechts bij te voegen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

We passen nu elementaire rij-omvormingen toe waarbij we proberen A om te zetten in de éénheidsmatrix. Tegelijkertijd passen we dezelfde rij-omvormingen toe op de éénheidsmatrix I. We gaan hierbij systematisch te werk waarbij we in A, van links naar rechts, de elementen onder de diagonaal omzetten in nullen.

- Stap 1: rij 3 - 2 rij 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 8 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Stap 2: rij 3 + 3/2 rij 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{19}{2} & -2 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

- Stap 3: 1/6 rij 2 en 2/19 rij 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{19} & \frac{3}{19} & \frac{2}{19} \end{pmatrix}$$

Pas als alle elementen onder de diagonaal nul gemaakt zijn bekijken we de elementen boven de diagonaal. We maken opnieuw gebruik van elementaire rij-omvormingen om deze elementen om te zetten in nullen. Deze keer gaan we systematisch van rechts naar links door de matrix.

- Stap 4: rij 2 - 1/6 rij 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{57} & \frac{8}{57} & \frac{-1}{57} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{19} & \frac{3}{19} & \frac{2}{19} \end{pmatrix}$$

- Stap 5: rij 1 - 7 rij 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{43}{57} & \frac{-56}{57} & \frac{7}{57} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{57} & \frac{8}{57} & \frac{-1}{57} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{19} & \frac{3}{19} & \frac{2}{19} \end{pmatrix}$$

De linkerhelft van de $3x6$ matrix, A is omgezet in de éénheidsmatrix. De matrix A is dus inverteerbaar en tegelijkertijd is de rechterkant van de $3x6$ matrix omgezet in $B = A^{-1}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{43}{57} & \frac{-56}{57} & \frac{7}{57} \\ \frac{2}{57} & \frac{8}{57} & \frac{-1}{57} \\ \frac{-4}{19} & \frac{3}{19} & \frac{2}{19} \end{pmatrix}$$

2.8 Methode van Gauss voor het oplossen van een stelsel van vergelijkingen

Stelsels van lineaire vergelijkingen in matrixnotatie

Een stelsel van lineaire vergelijkingen kan ook geschreven worden in matrixvorm. Neem een stelsel van m vergelijkingen in n onbekenden x_1, x_2,...,x_n:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

We merken op dat het **niet** noodzakelijk is dat het aantal vergelijkingen m gelijk is aan het aantal onbekenden n.

Door alle coëfficiënten a_{ij} in een mxn matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ te schrijven, de onbekenden in een $nx1$ kolommatrix $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ te plaatsen en de rechterleden van de vergelijkingen in een $mx1$ kolommatrix $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ te schrijven, kunnen we het stelsel van vergelijkingen beschouwen als een matrixvermenigvuldiging $AX = C$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

In plaats van de matrixvermenigvuldiging expliciet op te schrijven wordt het stelsel in matrixvorm dikwijls verkort genoteerd met behulp van de **verhoogde coëfficiëntenmatrix** $\left(\, A \, \middle| \, C \, \right)$
:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} & c_1 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & \dots & a_{mn} & c_m \end{array}\right)$$

Equivalentietransformaties van een stelsel lineaire vergelijkingen

Een equivalentietransformatie van een stelsel van vergelijkingen is een omvorming van het stelsel tot een nieuw stelsel van lineaire vergelijkingen dat nog steeds dezelfde oplossingen heeft als het oorspronkelijke stelsel.

Er zijn drie equivalentietransformaties:

- Twee vergelijkingen van het stelsel van plaats verwisselen
- Een vergelijking vermenigvuldigen met een getal $\lambda \neq 0$
- Een vergelijking vermenigvuldigen met een getal $\lambda \neq 0$ en het resultaat optellen bij een andere vergelijking.

Het is niet moeilijk in te zien dat de eerste twee inderdaad de oplossingen van het stelsel niet veranderen. De derde transformatie komt neer op de substitutiemethode voor het oplossen van een stelsel van vergelijkingen die we in het hoofdstuk over vergelijkingen besproken hebben.

Schrijven we nu een stelsel van lineaire vergelijkingen eerst in matrixvorm $AX = C$ en vervolgens in verkorte vorm met de verhoogde coëfficiëntenmatrix $\left(\begin{array}{c|c} A & C \end{array}\right)$. **Het toepassen van de equivalentietransformaties op het stelsel komt dan neer op het toepassen van elementaire rij-omvormingen op de verhoogde coëfficiëntenmatrix**.

Hierop is de methode van Gauss voor het oplossen van een stelsel van vergelijkingen gebaseerd.

Methode van Gauss

We schrijven een stelsel van m vergelijkingen in n onbekenden

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

eerst in matrixvorm $AX = C$ en vervolgens in de verkorte notatie $\left(\begin{array}{c|c} A & C \end{array}\right)$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} & c_1 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & \dots & a_{mn} & c_m \end{array}\right)$$

We maken dan gebruik van elementaire rij-omvormingen (equivalentietransformaties) om de matrix om te zetten in echelonvorm $\left(\begin{array}{c|c} A' & C' \end{array}\right)$. Omdat we alleen elementaire omvormingen gebruiken geldt dan steeds $rang(A) = rang(A')$ en $rang\left(\begin{array}{c|c} A & C \end{array}\right) = rang\left(\begin{array}{c|c} A' & C' \end{array}\right)$.
In de meest algemene schrijfwijze heeft de echelonmatrix de vorm

$$\left(\begin{array}{c|c} A' & C' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccccccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & \dots & a'_{1r} & a'_{1,r+1} & \dots & \dots & \dots & a'_{1n} & c'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & \dots & a'_{2r} & a'_{2,r+1} & \dots & \dots & \dots & a'_{2n} & c'_2 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & a'_{rr} & a'_{r,r+1} & \dots & \dots & \dots & a'_{rn} & c'_r \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & c'_{r+1} \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & c'_m \end{array}\right)$$

Merk op dat de rang van A het aantal niet-nulrijen van A' is: $rang(A) = r$

Er kunnen zich nu drie verschillende situaties voordoen.

Geval 1: voor minstens één van de $m - r$ laatste vergelijkingen (rijen) geldt $c'_i \neq 0$.
Dit betekent dat in het stelsel minstens één vergelijking voorkomt van de vorm $0 \neq 0$. Het is natuurlijk onmogelijk om aan deze vergelijking te voldoen: **het stelsel van vergelijkingen heeft geen oplossingen**.
Merk op dat in deze situatie geldt: $rang(A) \neq rang\left(\begin{array}{c|c} A' & C' \end{array}\right)$

Geval 2: voor alle $m - r$ laatste rijen geldt $c'_i = 0$ (m.a.w. $rang(A) = rang\left(\begin{array}{c|c} A' & C' \end{array}\right)$) en bovendien geldt $rang(A) = n$ met n het aantal onbekenden.
De echelonmatrix heeft dan de vorm:

$$\left(\begin{array}{c|c} A' & C' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & \dots & a'_{1n} & c'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & \dots & a'_{2n} & c'_2 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & a'_{nn} & c'_n \\ 0 & & & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & & & & 0 & 0 \end{array}\right)$$

In dit geval heeft het stelsel van vergelijkingen juist één oplossing die men vindt door de vergelijkingen één voor één op te lossen, beginnend met de laatste vergelijking. De oplossing van de laatste vergelijking $a'_{nn}x_n = c'_n$ wordt dan in de voorlaatste gesubstitueerd, enz...
Dit geeft een unieke oplossing $x_1, x_2, ..., x_n$

Geval 3: voor alle $m - r$ laatste rijen geldt $c'_i = 0$ (m.a.w. $rang(A) = rang\left(\begin{array}{c|c} A' & C' \end{array}\right)$) en $rang(A) < n$ met n het aantal onbekenden.
De echelonmatrix heeft nu de vorm:

$$\left(\begin{array}{c|c} A' & C' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccccccccc|c}
a'_{11} & a'_{12} & \dots & \dots & a'_{1r} & a'_{1,r+1} & \dots & \dots & \dots & a'_{1n} & c'_1 \\
0 & a'_{22} & \dots & \dots & a'_{2r} & a'_{2,r+1} & \dots & \dots & \dots & a'_{2n} & c'_2 \\
\vdots & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & a'_{rr} & a'_{r,r+1} & \dots & \dots & \dots & a'_{rn} & c'_r \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Het stelsel is oplosbaar en heeft een oneindig aantal oplossingen.
Men vindt de oplossingen door de vergelijkingen in het stelsel, van onder naar boven, één voor één op te lossen. De oplossing van de r-de vergelijking substitueert men in de $r-1$-ste vergelijking, enz...
De r-de vergelijking kan men oplossen naar de onbekende x_r door de onbekenden x_{r+1},...,x_n als parameters te kiezen.

Voorbeelden:

We controleren met de methode van Gauss of de volgende stelsels oplosbaar zijn en we zoeken de eventuele oplossingen.

1.
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 10x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

We schrijven de verhoogde coëfficiëntenmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -10 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

We gebruiken elementaire rijomvormingen om de matrix in echelonvorm te brengen.

rij 2 - 2 rij 1 en rij 3 + rij 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -20 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

Verwissel rij 2 en rij 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & -20 & 2 \end{array}\right)$$

rij 3 + 7 rij 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 15 & 9 \end{array}\right)$$

We lezen af op de matrix dat $rang(A) = rang\left(\begin{array}{c|c} A & C \end{array}\right)$ (het stelsel is oplosbaar) en $rang(A) = 3$, het aantal onbekenden. Het stelsel heeft dus juist één oplossing.
We lossen het stelsel van onder naar boven op:
$x_3 = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$, substitutie in de voorlaatste vergelijking geeft $-x_2 + 5\frac{3}{5} = 1$, dus $x_2 = 2$, substitutie in de eerste vergelijking geeft $x_1 - 6 + 3 = 0$, dus $x_1 = 3$.
Het stelsel heeft als oplossing $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = \frac{3}{5}$

2.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 10x_3 = 2 \\ -3x_1 + 9x_2 - 15x_3 = 0 \end{cases}$$

We schrijven de verhoogde coëfficiëntenmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -10 & 2 \\ -3 & 9 & -15 & 0 \end{array}\right)$$

We gebruiken elementaire rijomvormingen om de matrix in echelonvorm te brengen.

rij 2 -2 rij 1 en rij 3 + 3 rij 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -20 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

We lezen af dat $rang(A) = rang\left(\begin{array}{c|c} A & C \end{array}\right)$ (het stelsel is oplosbaar) en $rang(A) = 2$, dit is kleiner dan het aantal onbekenden. In deze situatie heeft het stelsel een oneindig aantal oplossingen.
We lossen de tweede vergelijking op naar x_2 waarbij we x_3 gelijk stellen aan een willekeurig te kiezen parameter $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$. Dit geeft $x_2 = \frac{2+20\lambda}{7}$. Substitutie van x_2 en x_3 in de eerste vergelijking geeft $x_1 = \frac{25\lambda+6}{7}$.
Aangezien x_1, x_2, x_3 telkens een andere oplossing geeft als men een andere waarde voor λ kiest heeft men hier inderdaad een oneindig aantal oplossingen.

Opmerkingen:

- We herhalen nog eens dat het niet noodzakelijk is dat het aantal vergelijkingen gelijk is aan het aantal onbekenden.
- Laten we een homogeen stelsel van vergelijkingen (een stelsel waarbij alle rechterleden nul zijn) beschouwen:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

  Dergelijk stelsel is altijd oplosbaar want in dit geval geldt $rang(A) = rang\left(\begin{array}{c|c} A & C \end{array}\right)$
  Het stelsel kan één of oneindig veel oplossingen hebben maar $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ... , $x_n = 0$ is altijd een oplossing van een homogeen stelsel.

2.9 De regel van Cramer

Inleiding

We bekijken hier het speciale geval van een niet homogeen stelsel van lineaire vergelijkingen waarbij er evenveel vergelijkingen als onbekenden zijn.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = c_n \end{cases}$$

In matrixnotatie wordt dit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

en met de verhoogde coëfficiëntenmatrix

$$\left(\begin{array}{c|c} A & C \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} & c_1 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} & c_n \end{array}\right)$$

Volgens de methode van Gauss heeft een dergelijk nxn stelsel juist één oplossing als en slechts als $rang(A) = n$ met n het aantal onbekenden.
Omdat A een vierkante nxn matrix is geldt

$$rang(A) = n \Leftrightarrow detA \neq 0 \Leftrightarrow A \quad \text{is inverteerbaar}$$

De regel van Cramer is een manier om, onafhankelijk van de methode van Gauss, de unieke oplossing van een dergelijk nxn stelsel te vinden.

Pas op! De regel van Cramer is op geen enkele andere situatie toepasbaar...

De regel van Cramer

Stel dat je een niet homogeen stelsel van n lineaire vergelijkingen in n onbekenden x_1, ... , x_n hebt waarbij de coëfficiëntenmatrix A regulier is.
In matrixnotatie wordt dit

$$\boxed{AX = C \quad \text{met} \quad detA \neq 0}$$

Door de matrixvergelijking links te vermenigvuldigen met de inverse van A vinden we

$$A^{-1}AX = A^{-1}C$$

of

$$X = A^{-1}C$$

Dit kan je ook schrijven als

$$X = \frac{1}{detA} adj(A)C$$

of

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} cofactor(a_{11}) & cofactor(a_{21}) & \dots & \dots & cofactor(a_{n1}) \\ cofactor(a_{12}) & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ cofactor(a_{1n}) & \dots & \dots & \dots & cofactor(a_{nn}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Dit geeft voor elke x_i met $i = 1...n$ de volgende uitdrukking

$$x_i = \frac{1}{detA}(c_1 cofactor(a_{1i}) + c_2 cofactor(a_{2i}) + ... + c_n cofactor(a_{ni}))$$

ofwel

$$\boxed{x_i = \frac{detA_i}{detA}}$$

met $i = 1...n$ en A_i de coëfficiëntenmatrix A waarin de i-de kolom vervangen is door de kolommatrix C.

Voorbeeld:

Neem het volgende stelsel van 3 vergelijkingen in 3 onbekenden:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

We controleren of de coëfficiëntenmatrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ regulier is.

$$det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Dus A is regulier, A^{-1} bestaat.

We berekenen de unieke oplossing van het stelsel:

$$x_1 = \frac{detA_1}{detA} = det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$x_2 = \frac{detA_2}{detA} = det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 5$$

$$x_3 = \frac{detA_3}{detA} = det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -1$$

Oplossingen van de oefeningen zonder ∗

Oplossingen van alle oefeningen

We kunnen (en willen) er niet rond: wiskunde speelt een sleutelrol in veel opleidingen. Bij een groot aantal vakken vormt wiskunde vaak de taal om complexe fenomenen te omschrijven. Ben je wat bezorgd over je parate wiskunde kennis? Dan is deze Massive Open Online Course (MOOC) Basiswiskunde voor (startende) studenten zeker iets voor jou.

Deze MOOC is een online leeromgeving waarmee je zelfstandig je wiskundekennis kan opfrissen of bijspijkeren. Deelname is volledig gratis.

Je neemt op eigen tempo verschillende modules rond een wiskundig thema door. Een module neemt ongeveer 3 uur in beslag en bestaat uit verschillende onderdelen. Elk onderdeel bestaat uit theorie, video's en voorbeeldoefeningen. Na elke module kun je een test afleggen om te zien of je alles onder de knie hebt.

Voor wie?

Studenten in de laatste jaren van het secundair onderwijs die zich willen voorbereiden op het hoger onderwijs, professionele bachelor studenten die eraan denken om te schakelen, eerstejaarsstudenten die nog wat extra oefening willen.

www.iiw.kuleuven.be/mooc-wiskunde