Inhoudsopgave

Module 2

Elementaire rekenvaardigheden B

0 Intro

Zie filmpje MOOC.

1 Functies

1.1 Reëele functies

Definitie, notatie, functievoorschrift

Definitie Een functie is een verband: een functie f associeert bij elk gegeven getal x hoogstens één ander getal (de functiewaarde $f(x)$). De functie f kan een functievoorschrift hebben om volgens een bepaalde vaste regel van zo'n x de bijhorende functiewaarde $f(x)$ te berekenen.

Er zijn functies met een speciale naam, zoals de sinus-functie: sin en functies met speciale symbolen, zoals de wortel-functie: $\sqrt{\ }$. Het functievoorschrift van deze functies is resp. $f(x) = \sin(x)$ en $f(x) = \sqrt{x}$.

Grafische voorstelling

Definitie Een functie f kan altijd grafisch worden weergeven. De vergelijking $f = f(x)$ geeft het verband tussen de x-waarden op de *horizontale* as en de functiewaarden $f(x)$ op de *verticale* as.

De letter y wordt de *afhankelijke variabele*, de *beeldwaarde* (of kortweg het *beeld*), de *output* of ook nog de *functiewaarde* genoemd. De letter x is hier de *onafhankelijke variabele*, de *input* of ook wel het *argument* genoemd.

Voorbeeld: het verband tussen de temperatuur in graden Celsius $°C$ (x) en graden Fahrenheit $°F$ (y) wordt gegeven door volgende functie: $y = 1,8x + 32$

Domein en beeld

Definitie Het *domein* (of *definitiegebied*) van een functie f is de verzameling van alle getallen $\in \mathbb{R}$ (x-waarden) die en beeld een beeld (y-waarde) hebben. Het domein is dus de verzameling van alle getallen $\in \mathbb{R}$ die acceptabel zijn als input.

Notatie $\text{dom} f$ of $\text{def} f$.

Voorbeeld 1 Voor de functie $y = \sqrt{x}$ mag x geen negatief getal zijn, dus $\text{dom} f = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$

Voorbeeld 2 De functie $y = \frac{1}{x-1}$ heeft geen beeld voor $x = 1$, dus $\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Tips bij het bepalen van het domein:

- Een even machtswortel kan je enkel nemen van positieve getallen $\in \mathbb{R}$.
- Een oneven machtswortel kan je van elk getal $\in \mathbb{R}$ nemen.
- Delen door nul mag niet!

Definitie Het *beeld* (of *bereik*) van een functie f is de verzameling van alle getallen $\in \mathbb{R}$ welke het beeld (de functiewaarde y) van de functie kunnen zijn. Het beeld is dus de verzameling van alle getallen $\in \mathbb{R}$ die kunnen optreden als output.

Notatie $\text{bld} f$.

Merk op dat bij een functie voor elke beeldwaarde hoogstens 1 x-waarde mag bestaan.

Bij een vergelijking waarbij er meerdere beelden bestaan voor een x-waarde, spreken we van een relatie.

Onthoud
- Het domein lees je af op de horizontale x-as (in onderstaande voorbeelden aangeduid met een groene lijn).
- Het beeld lees je af op de verticale y-as (in onderstaande voorbeelden aangeduid met een blauwe lijn).

Voorbeeld 3 Bij de functie $f(x) = 1 - x^2$ kan je voor geen enkele waarde van x een beeldwaarde bekomen die groter is dan 1 (omdat $1 - x^2 \leq 1$), dus $\text{bld} f =]-\infty, 1]$

De vergelijking $y^2 = x$ kunnen we niet zien als een functie in x, omdat zowel $y = 1$ als $y = -1$ zouden horen bij $x = 1$. Dit is dus een voorbeeld van een relatie (maar geen functie)!

Nulpunten

Definitie Een *nulwaarde* van de functie f is een getal a waarvoor geldt dat $f(a) = 0$. Het punt $(a, 0)$ noemen we een nulpunt.

Het berekenen van de nulwaarden van een functie f vereist het oplossen van de vergelijking $f(x) = 0$. Grafisch gezien zijn de nulpunten $(a, 0)$ de snijpunten van de grafiek van de functie f met de horizontale as (de X-as).

Voorbeeld 4 Voor de tweedegraadsfunctie met voorschrift $f(x) = ax^2 + bx + c$ komt dit neer op $ax^2 + bx + c = 0$ oplossen en kunnen we dus de methode van de discriminant toepassen om de nulwaarden te vinden.

Snijpunten met de assen

De snijpunten van de functie f met de x-as vinden we door het oplossen van het stelsel

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

of dus de vergelijking $f(x) = 0$. Het snijpunt van de functie $y = f(x)$ met de y-as vinden we door het oplossen van het stelsel $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$ of dus het berekenen van $f(0)$.

Even en oneven functies

Definitie Een functie $f(x)$ noemt men *even* als $f(-x) = f(x)$.
Een even functie heeft de y-as als as van symmetrie.

Een functie $f(x)$ noemt men *oneven* als $f(-x) = -f(x)$.
Een oneven functie heeft de oorsprong als middelpunt van symmetrie.

Als voor een functie $f(-x)$ niet gelijk is aan $f(x)$ of $-f(x)$ dan is de functie noch even, noch oneven. Dit hoeft niet te betekenen dat deze functie niet ergens anders symmetrisch zou kunnen zijn.

Voorbeeld 5 De functie f met voorschrift $f(x) = x^2$ is een eenvoudig voorbeeld van een even functie. Voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt immers dat

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

De functie g met voorschrift $g(x) = x^3$ is dan weer een eenvoudig voorbeeld van een oneven functie. Voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt immers dat

$$g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$$

Een functie h met voorschrift $h(x) = x + 1$ is noch een even functie, noch een oneven functie. Er zijn namelijk x-waarden waarvoor geen van de verbanden gelden:

$$\begin{array}{lcl} h(1) = 2 & \text{maar} & h(-1) = 0 \\ h(2) = 3 & \text{maar} & h(-2) = -1 \end{array}$$

Snijpunten van twee functies

Als je voor twee verschillende functies f en g de eventuele snijpunten van hun grafiek zoekt, dan moet je de vergelijking $f(x) = g(x)$ oplossen. Zo vind je de x-coördinaten van de snijpunten.

Invullen van deze gevonden x-coördinaten in één van de twee functievoorschriften geeft dan de bijhorende y-coördinaten.

Voorbeeld 6 Om te bepalen waar de snijpunten van de grafieken van $f(x) = x^2$ en $g(x) = 3x-2$ liggen, onderzoeken we bijgevolg

$$x^2 = 3x - 2 \iff x^2 - 3x + 2 = 0$$

wat snel opgelost kan worden met de methode van de discriminant:

$$D = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1$$

zodat

$$x_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \text{ en } x_2 = \frac{3-1}{2} = 1.$$

De snijpunten van de grafieken van f en g hebben dus als x-waarden 1 en 2. Ook de beeldwaarden van deze snijpunten kunnen we nu snel berekenen: $f(1) = 1$ en $f(2) = 4$.

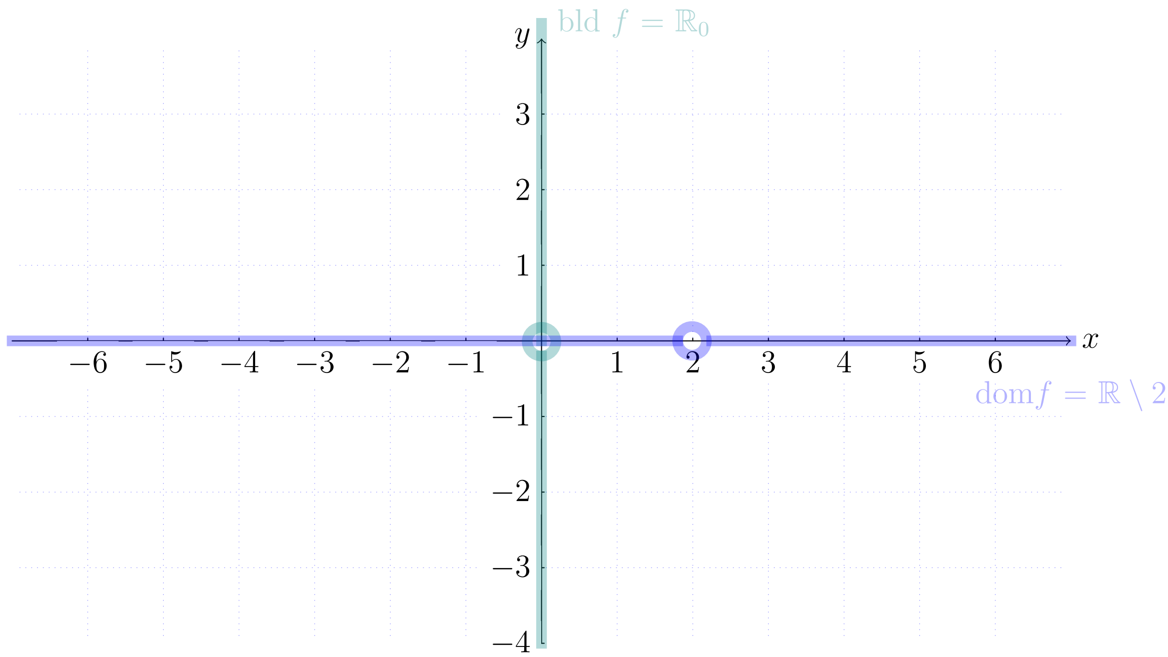
1.2 Voorbeelden

Voorbeeld 1 Bespreek de functie f met voorschrift $f(x) = \sqrt{10 - 2x} - 2$.

Domein: de uitdrukking onder de vierkantswortel mag niet negatief worden:

$$\begin{array}{cccc} & 10 - 2x & \geqslant & 0 \\ \iff & 10 & \geqslant & 2x \\ \iff & 5 & \geqslant & x \\ \iff & x & \leqslant & 5 \end{array}$$

Besluit: voor x zijn alle waarden van $-\infty$ tot en met 5 toegelaten. We schrijven: dom $f(x) =]-\infty, 5]$



Figuur .1: voorbeeld 1

Beeld: de kleinste functiewaarde wordt bekomen als de wortel 0 is. Vierkantwortels geven altijd een positief resultaat (of nul). De uitdrukking onder de wortel wordt 0 als $x = 5$. We zien dat $f(5) = -2$. Er is geen bovengrens, dus het bereik loopt tot $+\infty$.

Besluit: bld$f = [-2, +\infty[$

Nulpunten: voor welke waarden van x wordt $f(x) = 0$?

$$\begin{array}{rccc} & \sqrt{10-2x}-2 & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & \sqrt{10-2x} & = & 2 \\ \Longleftrightarrow & \left(\sqrt{10-2x}\right)^2 & = & 2^2 \\ \Longleftrightarrow & 10-2x & = & 4 \\ \Longleftrightarrow & 6 & = & 2x \\ \Longleftrightarrow & x & = & 3 \end{array}$$

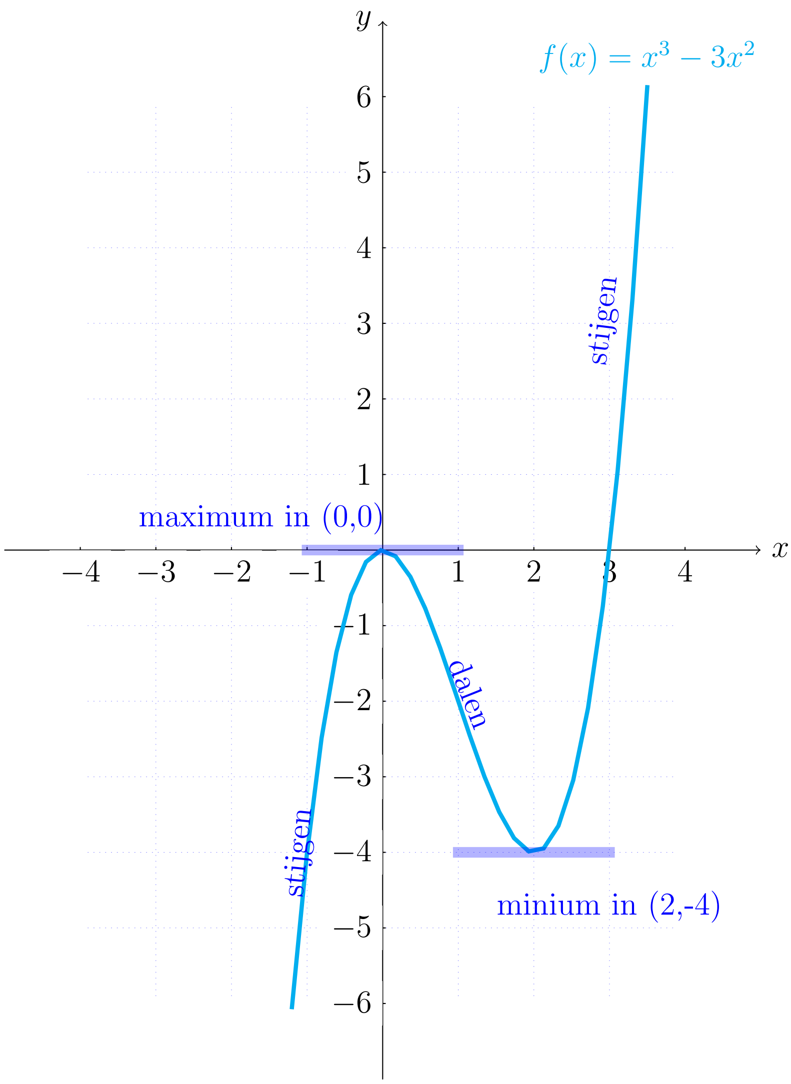
Besluit: er is slechts 1 nulwaarde, en dit is $x = 3$.

Symmetrie: we gaan na of het beeld van $-x$ hetzelfde of het tegengestelde resultaat geeft als de gegeven functie. $f(-x) = \sqrt{10-2(-x)} - 2 = \sqrt{10+2x} - 2$. Dit is noch gelijk aan $f(x)$ noch gelijk aan $-f(x)$. Deze functie is dus noch even, noch oneven.

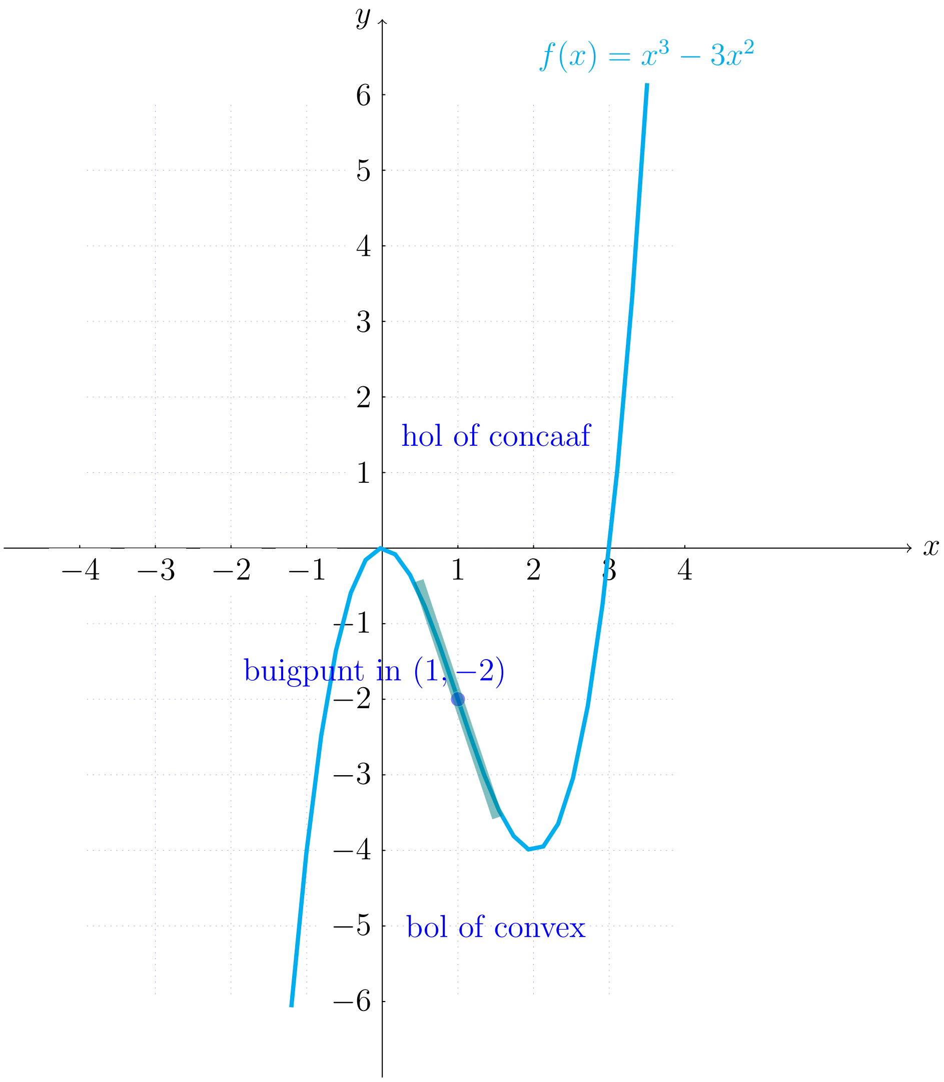
Voorbeeld 2 Bespreek de functie met voorschrift $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

Domein: de noemer mag niet nul worden (omdat een getal delen door 0 geen getal $\in \mathbb{R}$ is):

$$\begin{array}{rccc} & x-2 & \neq & 0 \\ \Longleftrightarrow & x & \neq & 2 \end{array}$$



Figuur .2: voorbeeld 2



Figuur .3: voorbeeld 3

Besluit: $\text{dom}\, y = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Beeld: er is geen bovengrens en geen ondergrens, maar de breuk zal echter nooit 0 worden.

Besluit: $\text{bld} f = \mathbb{R}_0$

Nulpunten: aangezien een breuk enkel nul kan worden als de teller nul is, zal dit bij deze functie nooit gebeuren. Er is dus geen snijpunt met de x-as.

Besluit: deze functie heeft geen nulpunten.

Symmetrie: we gaan na of het beeld van $-x$ hetzelfde of het tegengestelde resultaat geeft als de gegeven functie. $f(-x) = \frac{1}{(-x)-2} = -\frac{1}{x+2}$. Dit is noch gelijk aan $f(x)$ noch gelijk aan $-f(x)$. Deze functie is dus noch even, noch oneven.

Voorbeeld 3 Bespreek de sinusfunctie $f(x) = \sin(x)$

Domein: we mogen op de plaats van x gelijk welke hoek invullen, de sinus zal steeds bestaan.

Besluit: $\text{dom}\, y = \mathbb{R}$

Beeld: we lezen op de y-as het beeld af. De functiewaarden voor de sinus kunnen nooit groter zijn dan 1 of kleiner dan -1

Besluit: $\text{bld} f = [-1, 1]$

Nulpunten: de x-as wordt gesneden als $\sin(x) = 0$. Dit gebeurt zowel voor x-waarden gelijk aan $\{0, \pi, 2\pi, 3\pi, ...\}$ als ook voor $\{..., -3\pi, -2\pi, -\pi, 0\}$

Besluit: de snijpunten met de x-as zijn de punten $\{..., (-2\pi, 0), (-\pi, 0), (0, 0), (\pi, 0), (2\pi, 0), ...\}$ of iets korter genoteerd als: $\{(k\pi, 0) \text{ met } k \in \mathbb{Z}\}$

Symmetrie: via de goniometrische formules vinden we snel dat $f(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -f(x)$, dus kunnen we zeggen dat deze functie oneven is (symmetrisch t.o.v. de oorsprong).

1.3 Verloop van functies

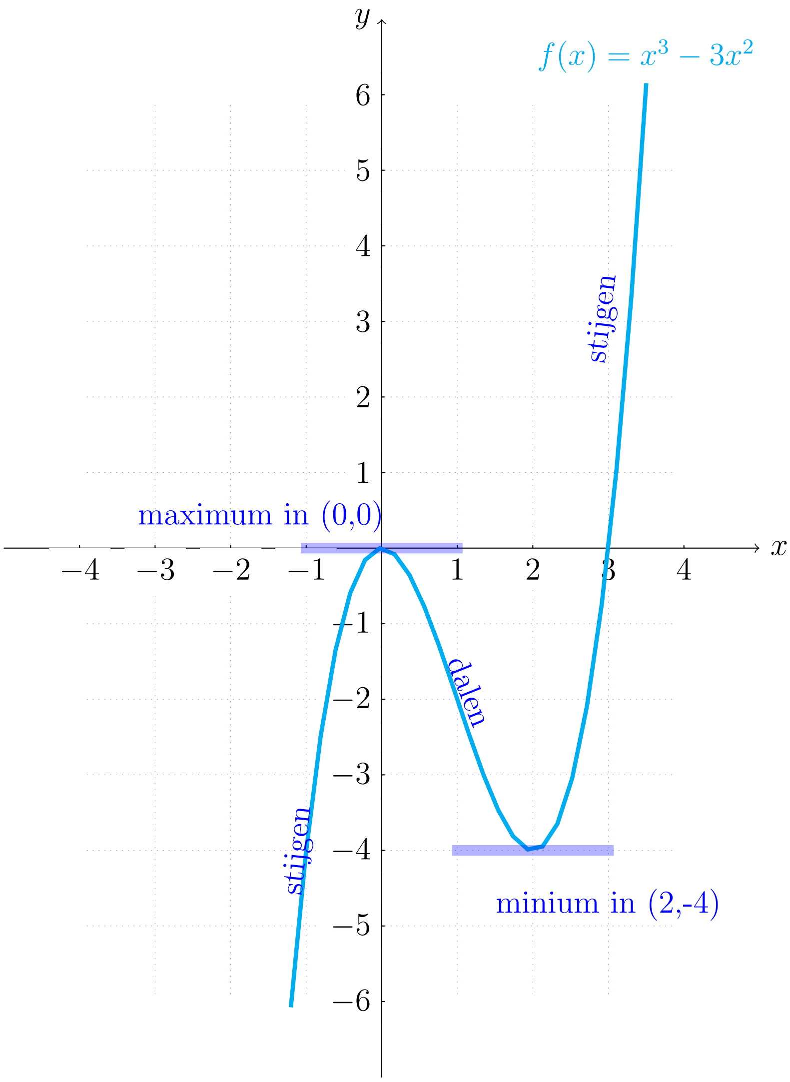
Absolute en relatieve extrema

Definitie Een functie f heeft een **absoluut maximum** $f(x_0)$ in het punt $x_0 \in \text{dom } f$, als voor alle $x \in \text{dom } f$ geldt dat $f(x_0) \geqslant f(x)$

Een functie f heeft een **absoluut minimum** $f(x_0)$ in het punt $x_0 \in \text{dom } f$, als voor alle $x \in \text{dom } f$ geldt dat $f(x_0) \leqslant f(x)$

Een functie f heeft een **relatief of lokaal maximum** in het punt x_0, indien er een open interval I bestaat rond het punt x_0 zodat voor alle x in het interval I geldt dat $f(x_0) \geqslant f(x)$

Een functie f heeft een **relatief of lokaal minimum** in het punt x_0, indien er een open interval I bestaat rond het punt x_0 zodat voor alle x in het interval I geldt dat $f(x_0) \leqslant f(x)$



Figuur .4: voorbeeld 1

Voorbeeld 1 Voor de functie in gegeven in bovenstaande figuur zijn x_1, x_2, x_3, x_4 relatieve of lokale extrema. Hiervan zijn x_2 en x_3 absolute extrema.

x_1, x_3 zijn relatieve of lokale maxima. Hiervan is x_3 een absoluut maximum.

x_2, x_4 zijn relatieve of lokale minima. Hiervan is x_2 een absoluut minimum.

Stijgen, dalen en extrema

De eerste afgeleide speelt een belangrijke rol bij het onderzoek naar het verloop van een functie. Men zal dus het tekenverloop van deze afgeleide onderzoeken.

Definitie Als de eerste afgeleide $f'(x) > 0$ is in een interval, dan zal deze functie in dat interval **stijgen**.

Als de eerste afgeleide $f'(x) < 0$ is in een interval, dan zal deze functie in dat interval **dalen**.

De functie zal een relatief of lokaal extremum (maximum of minimum) bereiken waar de kromme overgaat van een stijgende functie naar een dalende functie of omgekeerd.

Een functie $f(x)$ heeft in het punt (x_0, y_0) een extremum als in dat punt aan de volgende voorwaarden voldaan is:

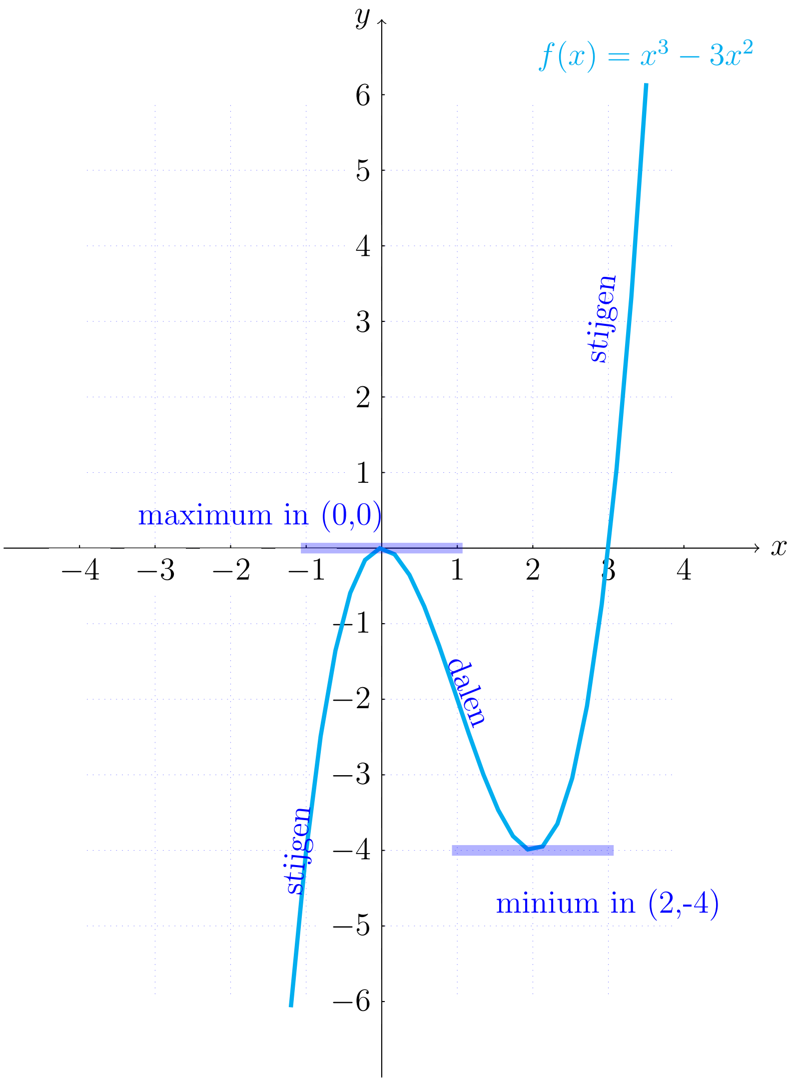
- als $f^{'}(x_0) = 0$ en $f^{''}(x_0) > 0$ zal het extremum een minimum zijn, en
- als $f^{'}(x_0) = 0$ en $f^{''}(x_0) < 0$ zal het extremum een maximum zijn.

Opmerking

- Opmerking 1: in een extremum bezit de functie een horizontale raaklijn (aangezien $f^{'}(x_0) = 0$ is).
- Opmerking 2: indien $f^{'}(x_0) = 0$ en ook $f^{''}(x_0) = 0$ werkt deze methode niet om na te gaan of er in x_0 een extremum is. In dat geval gaan we naar de derde afgeleide kijken. Als $f^{'''}(x_0) \neq 0$ dan is het punt x_0 een buigpunt. Indien ook de derde afgeleide nul is moeten we naar de eerstvolgende afgeleide gaan kijken die niet nul is. Stel dat deze van de n^{de} orde is, dus $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Als dan n even is, is er in x_0 een lokaal minimum als $f^{(n)}(x_0) > 0$, en een lokaal maximum als $f^{(n)}(x_0) < 0$. Is de n^{de} oneven dan is x_0 terug een buigpunt.

  Tip: als je dit moeilijk kan onthouden, denk dan aan de eenvoudige functies $f(x) = x^2$ en $f(x) = x^3$. De functie x^2 heeft een minimum in nul, terwijl x^3 in de oorsprong een buigpunt heeft.

Voorbeeld 2 Onderzoek het stijgen en dalen van volgende functie f met voorschrift: $f(x) = x^3 - 3x^2$ in onderstaande figuur.



Figuur .5: Voorbeeld stijgen en dalen

De eerste afgeleide $f'(x) = 3x^2 - 6x$ is nul als $3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0$, dus als $x = 0$ of als $x = 2$.

Om de y-coördinaat van deze extrema punten te vinden vullen we $x = 0$ en $x = 2$ in in de functie $f(x)$. Dit geeft: $f(0) = 0$ en $f(2) = -4$.

De functie f zal in de punten $(0,0)$ en $(2,-4)$ een extremum bezitten. In het punt $(0,0)$ is dit een maximum en in het punt $(2,-4)$ een minimum. De raaklijn is in die punten ook telkens horizontaal.

Aangezien de eerste afgeleide een tweedegraadsfunctie is, zullen we het tekenverloop van de tweedegraadsfunctie toepassen, zie onderstaande tabel.

x		0		2	
$f'(x) = 3x(x-2)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0 max	$\searrow$	-4 min	$\nearrow$

Convex, concaaf en buigpunten

Ook de tweede afgeleide speelt een belangrijke rol bij het onderzoek naar het verloop van een functie. Men zal dus ook het tekenverloop van de tweede afgeleide onderzoeken.

Definitie Als de tweede afgeleide $f''(x) > 0$ is in een interval, dan zal de functie in dat interval **hol of concaaf** zijn (symbool: $\bigcup$).

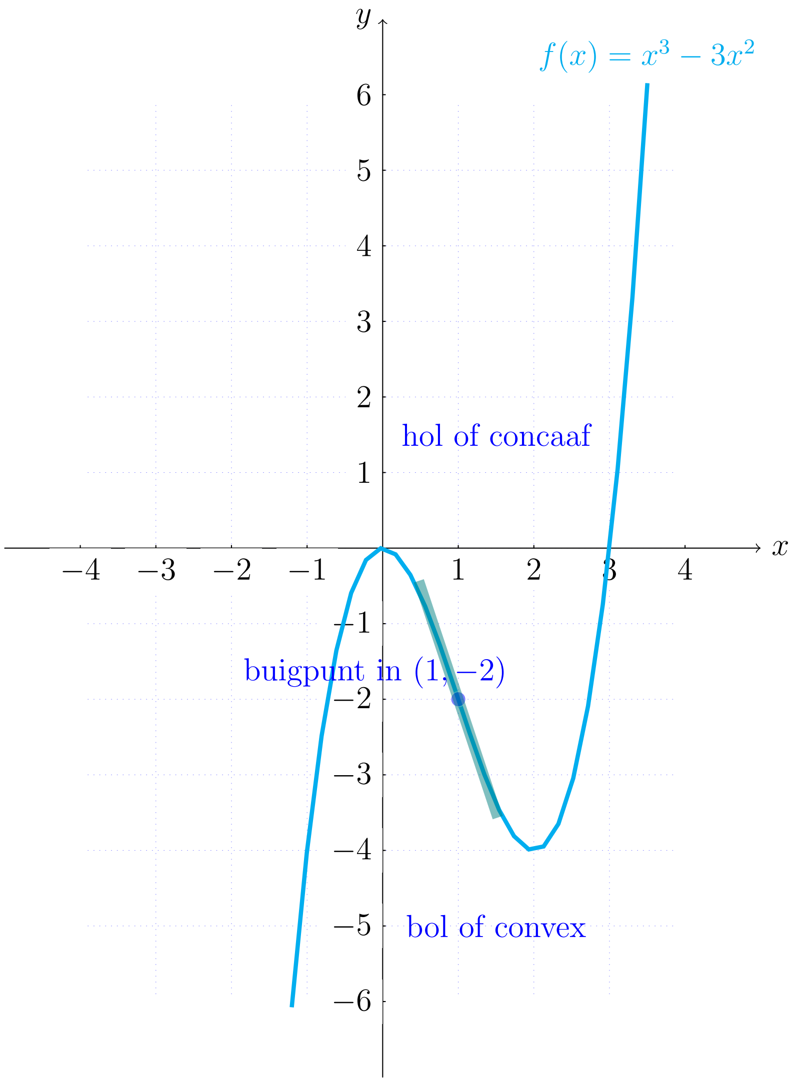
Als de tweede afgeleide $f''(x) < 0$ is in een interval, dan zal de functie in dat interval **bol of convex** zijn (symbool: $\bigcap$).

Punten waar de kromme overgaat van convex naar concaaf of omgekeerd, noemt men **buigpunten**. In een buigpunt verandert dus de tweede afgeleide van teken. Een functie $f(x)$ heeft in het punt (x_0, y_0) een buigpunt als in dat punt aan de volgende voorwaarden voldaan zijn: $f''(x_0) = 0$ en $f'''(x_0) \neq 0$

Opmerking

- Opmerking 1: in een buigpunt snijdt de raaklijn de kromme, deze raaklijn noemt men de buigraaklijn.
- Opmerking 2: aangezien de kromming in een buigpunt verandert, is een buigpunt nooit een extremum.

Voorbeeld 3 Onderzoek het hol en bol zijn van de functie f met voorschrift $f(x) = x^3 - 3x^2$, zie onderstaande figuur.



Figuur .6: Voorbeeld convex, concaaf en buigpunten

De eerste afgeleide is $f'(x) = 3x^2 - 6x$

De tweede afgeleide is $f''(x) = 6x - 6$ en is nul als $6x - 6 = 6(x - 1) = 0$, en dus als $x = 1$.

Om de y-coördinaat van dit buigpunt te vinden vullen we $x = 1$ in in de functie $f(x)$. Dit geeft: $f(1) = -2$.

Aangezien de tweede afgeleide een eerstegraadsfunctie is, zullen we het tekenverloop van de eerstegraadsfunctie toepassen, zie onderstaande tabel.

x		1	
$f''(x) = 6(x-1)$	-	0	+
$f(x)$	$\cap$	-2 buigpunt	$\cup$

Voorbeeld 4 Wat kan je zeggen over de functie f met voorschrift $f(x) = x^3$ in het punt waar $x = 0$ is?

De eerste afgeleide is $f^{'}(x) = 3x^2$ en is nul als $x = 0$. Dus $x = 0$ kan een extremum zijn.

De tweede afgeleide is $f^{''}(x) = 6x$ en is nul als $x = 0$. We kunnen niks zeggen; we moeten naar de eerstvolgende afgeleide gaan kijken die niet nul is.

De derde afgeleide is $f^{'''}(x) = 6$. De derde orde afgeleide (n=3 is oneven) is niet nul, dus het punt $x = 0$ is een buigpunt (en geen extremum).

Voorbeeld 5 Zoek de buigpunten van de functie f met voorschrift $f(x) = \cos(x)$.

De eerste afgeleide is $f^{'}(x) = -\sin(x)$. De nulpunten van $\sin x$ zijn $\{x = n\pi \text{ met } n \in \mathbb{Z}\}$. In deze punten kan $f(x) = \cos(x)$ een extremum bereiken.

De tweede afgeleide is $f^{''}(x) = -\cos(x)$. De nulpunten van $\cos(x)$ zijn $\{x = \frac{\pi}{2} + n\pi \,\text{met}\, n \in \mathbb{Z}\}$. In deze punten verandert de cosinus en dus ook de tweede afgeleide van teken, dus dit zijn buigpunten. M.a.w. de nulpunten van de functie $f(x) = \cos(x)$ zijn tevens de buigpunten (dit geldt ook voor de sinus).

1.4 Eerste- en tweedegraadsfuncties

Constante functies

Definitie Functievoorschrift: $f(x) = a$ met $a \in \mathbb{R}$

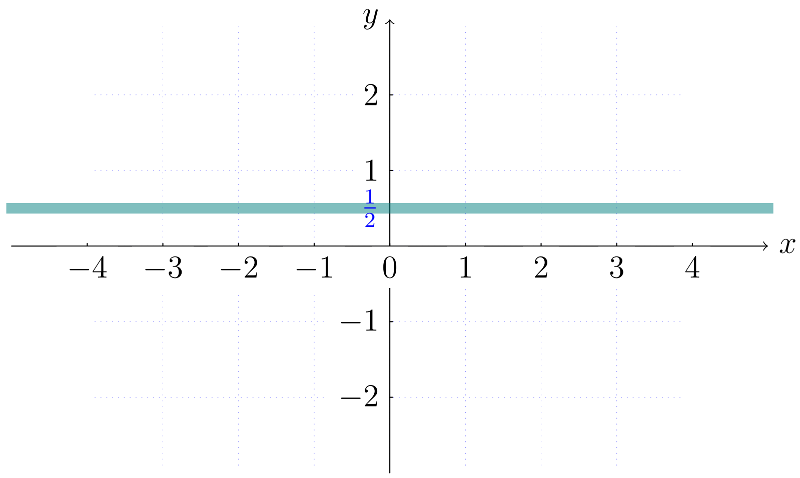
Grafische voorstelling van de constante functie met vergelijking $f(x) = a$ is een horizontale rechte, waarbij de y-as wordt gesneden in het punt $(0, a)$.

Tekenverloop:

x	
$f(x)$	teken van a

Tabel 1. Tekenverloop van een constante functie

Voorbeeld 1 Gegeven de functie: $f(x) = \frac{1}{2}$.



Figuur .7: Voorbeeld constante functie

Grafische voorstelling:

- het domein van de constante functie is altijd: $\text{dom} f = \mathbb{R}$
- het beeld van deze constante functie is: $\text{bld} f = \frac{1}{2}$

Tekenverloop

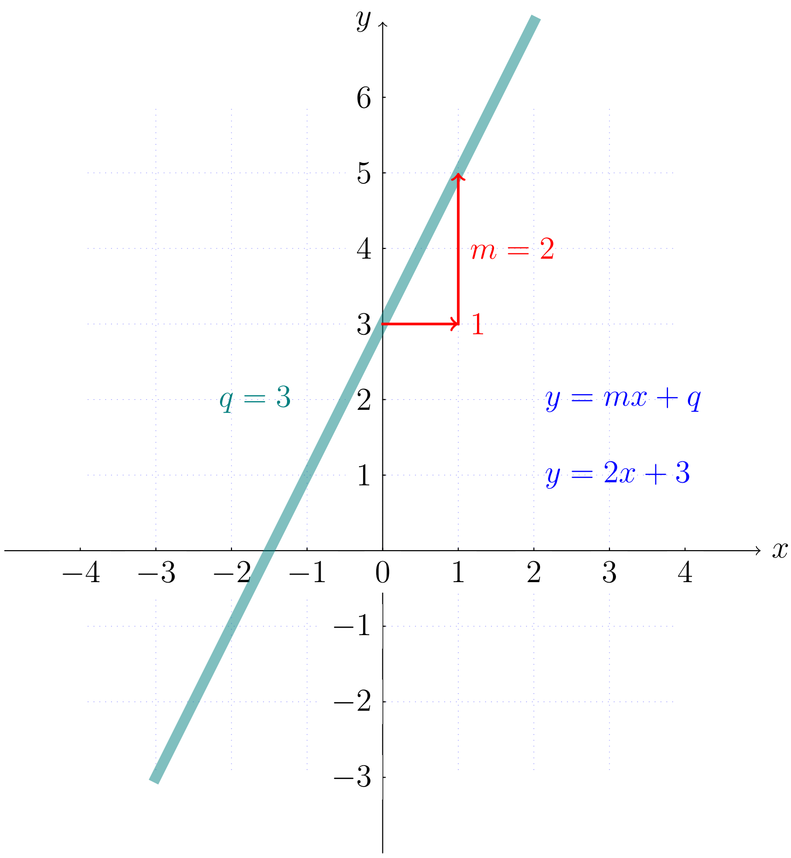
x	
$f(x)$	$+$

Eerstegraadsfuncties of lineaire functies

Definitie Functievoorschrift: $f(x) = ax + b$ met $a \in \mathbb{R}_0$ en $b \in \mathbb{R}$.

Voorbeeld 2 $f(x) = 10x + 1$, $f(x) = 8 - 5x$, $f(x) = 3x$

Grafische voorstelling van de lineaire functie is een rechte.

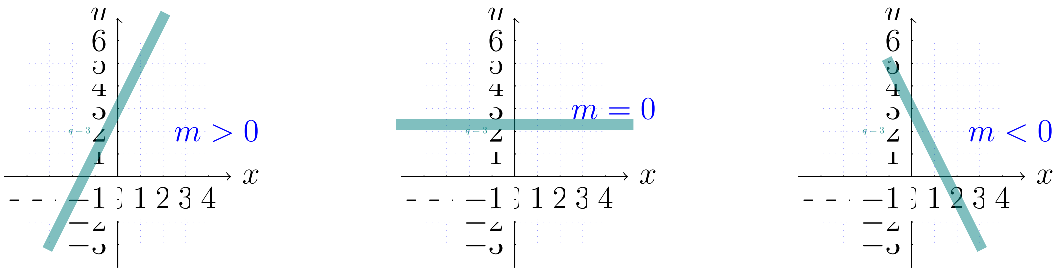


Figuur .8: Voorbeeld van een eerstegraadsfunctie

- Het domein van elke lineaire functie is: $\text{dom} f = \mathbb{R}$.
- Het beeld van deze lineaire functie is: $\text{bld} f = \mathbb{R}$.

De rechte wordt bepaald door de **richtingscoëfficiënt** (de **rico**) ‘a’ en de intercept ‘b’. De rico bepaalt de helling van de rechte. Als x met 1 eenheid toeneemt, dan neemt y met a eenheden toe. Hoe groter de absolute waarde van de rico a, hoe steiler de rechte.

- een positieve rico hoort bij een stijgende rechte
- een negatieve rico hoort bij een dalende rechte



(a) (b) (c)

Figuur .9: Het teken van de richtingscoëfficiënt bepaalt of de rechte stijgt, constant is of daalt.

Een rechte evenwijdig met de x-as heeft een rico gelijk aan 0. Dit is in feite de constante functie $f(x) = b$.

Een rechte evenwijdig met de y-as heeft geen rico (in dit geval zou $m = \infty$ moeten zijn).

Nulpunten: het snijpunt met de x-as is het punt $(-\frac{b}{a}, 0)$.

Tekenverloop:

x		$-\frac{b}{a}$	
$f(x)$	-	0	+

Tabel 2. Tekenverloop voor $a > 0$

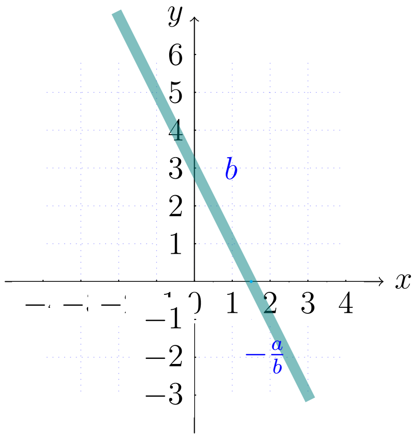
x		$-\frac{b}{a}$	
$f(x)$	+	0	-

Tabel 3. Tekenverloop voor $a < 0$.

Voorbeeld 3 Gegeven de functie: $f(x) = -2x + 3$.

Grafische voorstelling:

- het domein van elke lineaire functie is: $\text{dom} f = \mathbb{R}$
- het beeld van deze lineaire functie is: $\text{bld} f = \mathbb{R}$



Figuur .10: Voorbeeld van de grafische voorstelling van een eerstegraadsfunctie

Nulpunten:

We lossen de vergelijking $y = f(x) = -2x + 3 = 0$ op en vinden: $x = \frac{3}{2}$. Het snijpunt met de x-as is het punt $(\frac{3}{2}, 0)$.

Tekenverloop: zie Tabel 4.

x		$\frac{3}{2}$	
$f(x)$	$+$	0	$-$

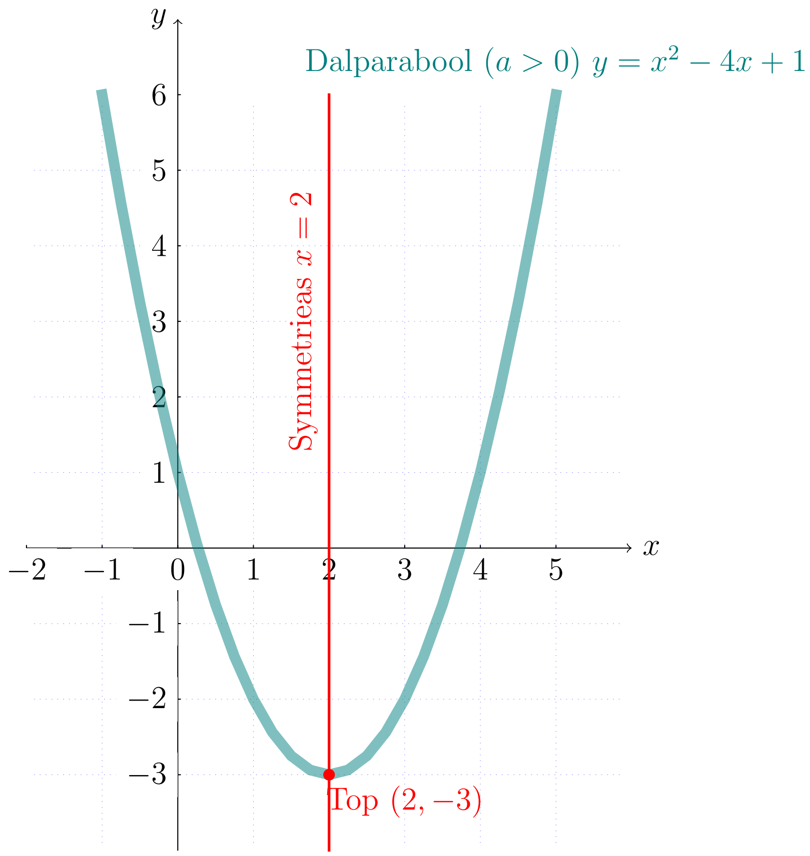
Tabel 4. Voorbeeld eerstegraadsfunctie: tekenverloop

Tweedegraadsfuncties of kwadratische functies

Definitie Functievoorschrift: $f(x) = ax^2 + bx + c$ met $a \in \mathbb{R}_0$ en $b, c \in \mathbb{R}$

Voorbeeld 4 $f(x) = 3x^2 + 10x + 1$, $f(x) = -2x^2 + 5$, $f(x) = x^2$

Grafische voorstelling van de kwadratische functie is een parabool.



Figuur .11: Grafische voorstelling van een tweedegraadsfunctie.

- als $a > 0$ is de top van de **dalparabool** het minimum
- als $a < 0$ is de top van de **bergparabool** het maximum

Hoe groter de absolute waarde van a, hoe smaller de opening van de parabool is.

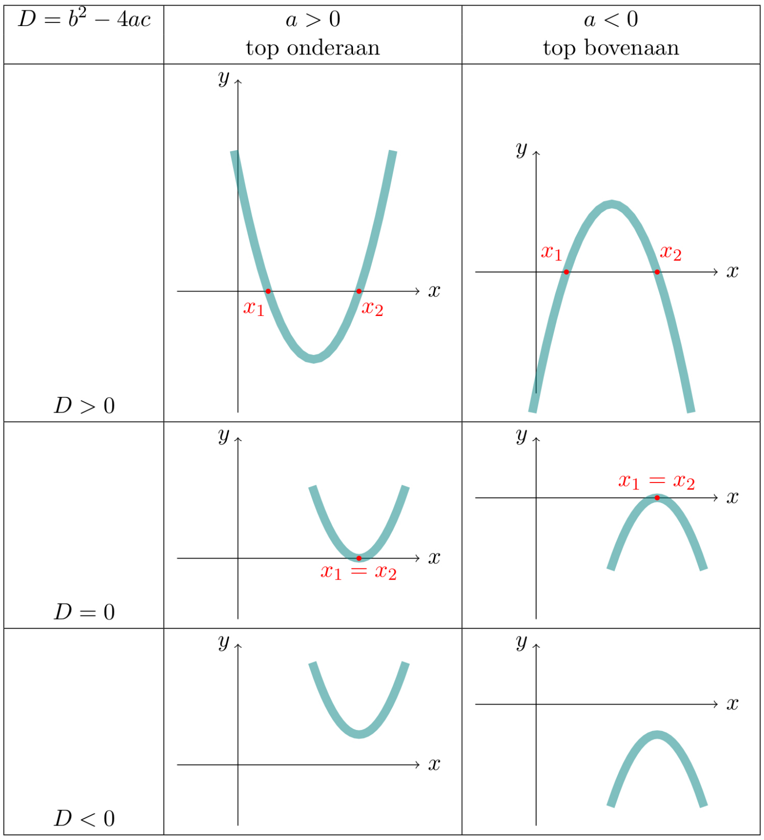
De verticale lijn door de top is de **symmetrieas**. De vergelijking van de symmetrieas is: $x = -\frac{b}{2a}$

Het laagste punt van een dalparabool of het hoogste punt van een bergparabool heet de **top** van de parabool. De top is het snijpunt van de parabool met de verticale symmetrieas. De coördinaten van de top zijn dus $(-\frac{b}{2a}, y)$. De y-waarde vinden we door de gevonden x-waarde in het functievoorschrift $f(x)$ in te vullen, dus $y = f(-\frac{b}{2a})$.

Nulpunten: stellen we $y = f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ (in dat geval spreken we van de **vierkantsvergelijking**), dan vinden we de snijpunten met de x-as. Hiervoor moeten we dus de (vierkants)vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ oplossen. Daarvoor bepaal je best eerst de **discriminant** $D = b^2 - 4ac$ (van de abc formule). Met de discriminant bepaal je het aantal snijpunten van de kwadratische functie met de x-as.

- als $D > 0$, dan heeft de vergelijking twee oplossing: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ en $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$. De parabool snijdt de x-as op twee plaatsen.
- als $D = 0$, dan heeft de vergelijking één oplossing: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. De parabool raakt met zijn top de x-as in één punt.

- als $D < 0$, dan heeft de vergelijking geen reële oplossingen. De parabool ligt ofwel boven ofwel onder de x-as.



Figuur .12: Grafische voorstelling van tweedegraadsfuncties voor verschillende waarden van a en D.

Tekenverloop:

- Als $D > 0$

x		x_1		x_2	
$f(x)$	teken van a	0	tegengesteld teken van a	0	teken van a

- Als $D = 0$

x		$x_1 = x_2$	
$f(x)$	teken van a	0	teken van a

- Als $D < 0$

x	
$f(x)$	teken van a

Voorbeeld 5 Gegeven de functie f met voorschrift: $f(x) = -x^2 - 5x + 6$

Grafische voorstelling:

- het domein van elke kwadratische functie is: dom$f = \mathbb{R}$
- $a = -1 < 0$ dus het is een bergparabool
- de symmetrieas ligt bij $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{2.(-1)} = -\frac{5}{2} = -2,5$
- de top heeft de coördinaten $(x, y) = (-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a})) = (-2,5; 12,25)$
- de top van deze bergparabool ligt op $y = 12,25$. Dit is dus de grootste waarde die y kan bereiken. Het beeld van deze kwadratische functie is daarom: bld$f =]-\infty; 12,25]$

Nulpunten:

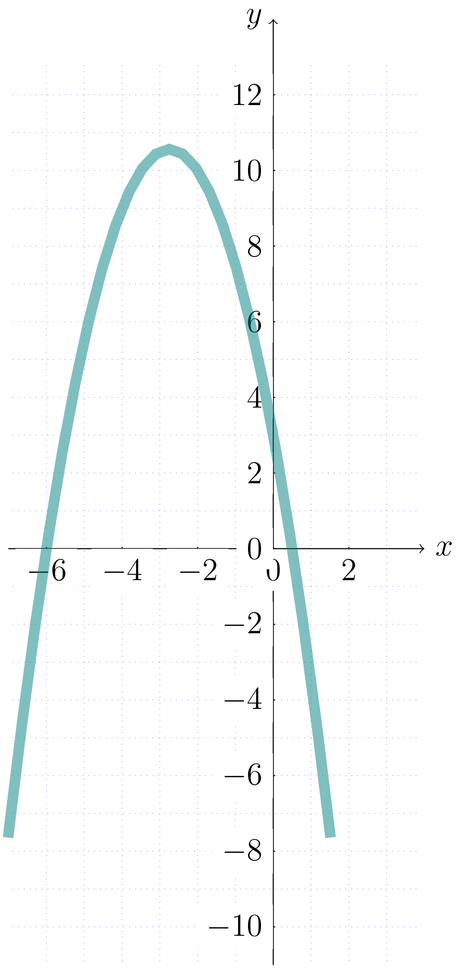
We lossen de vergelijking $y = f(x) = -x^2 - 5x + 6 = 0$ op d.m.v. de abc formule. We berekenen daarvoor eerst de discriminant D:

$$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4.(-1).6 = 25 + 24 = 49$$

Omdat $D > 0$ zijn er 2 reële oplossingen, dus 2 snijpunten met de x-as. Deze zijn:

- $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5)+\sqrt{49}}{2.(-1)} = -6$
- $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5)-\sqrt{49}}{2.(-1)} = 1$

De parabool snijdt de horizontale as in de koppels (-6,0) en (1,0) en de top ligt boven de x-as (want het is een bergparabool).



Figuur .13: Voorbeeld tweedegraadsfuncties: grafische voorstelling

Tekenverloop:

x		-6		1	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Tabel 5. Voorbeeld tweedegraadsfuncties: tekenverloop

1.5 Tweedegraadsvergelijking - voorbeeld 1

Zie filmpje MOOC.

1.6 Tweedegraadsvergelijking - voorbeeld 2

Zie filmpje MOOC.

1.7 Veeltermfuncties of polynoomfuncties

Functievoorschrift

Definitie Een veelterm- of polynoomfunctie heeft als functievoorschrift een veelterm in 1 onbekende, dus $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ met $a_n \in \mathbb{R}_0$ en $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$. De constanten a_i noemen we de **coëfficiënten**.

De (meestal eerste) term met de hoogste macht bepaalt de **graad** van de veeltermfunctie.

Voorbeeld 1 $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + 10x$, $f(x) = x^3$

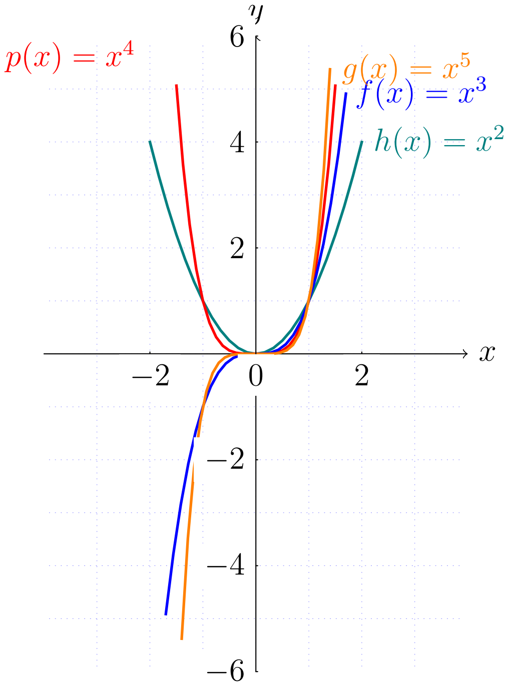
Grafische voorstelling

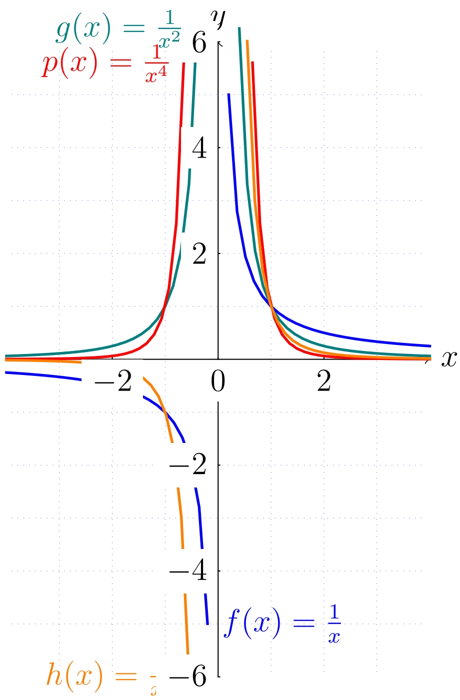
Het domein van een veeltermfunctie is: $\text{dom} f = \mathbb{R}$

De grafieken van de elementaire machtsfuncties $y = x^n$ met positieve exponent zijn hieronder weergegeven:

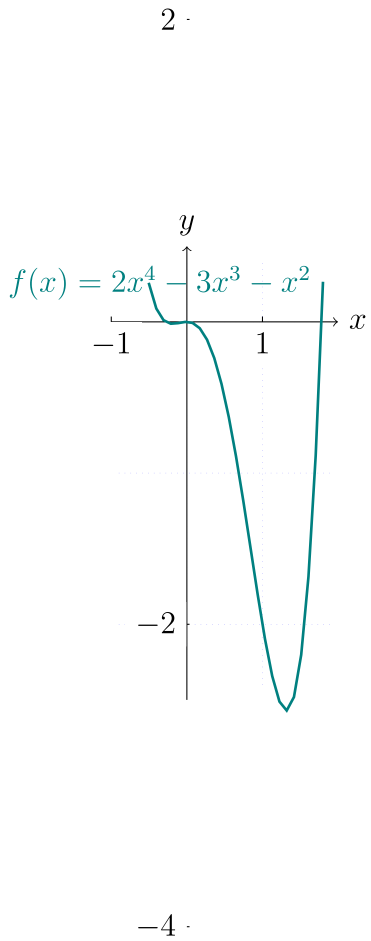
Nulwaarden

Een n^{de} graadsveeltermfunctie met oneven n heeft minimum 1 en maximum n snijpunten met de x-as.



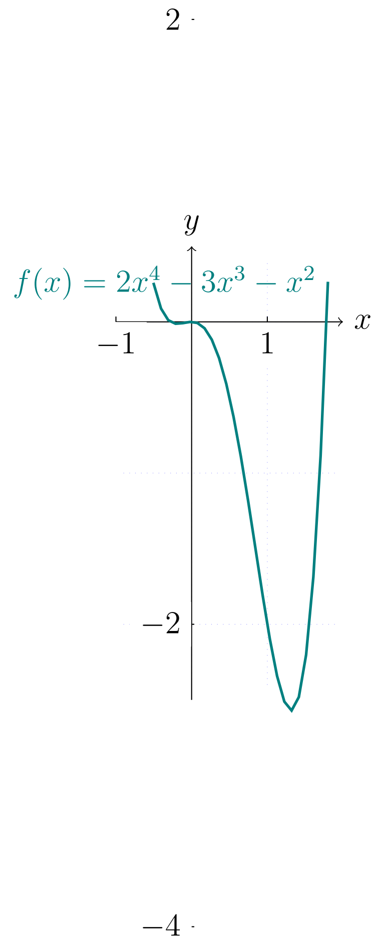


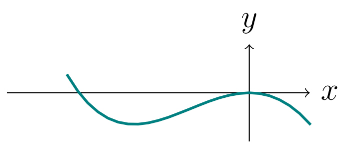
De grafieken van de elementaire machtsfuncties $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ met negatieve exponent zijn hieronder weergegeven:



Een n^{de} graadsveeltermfunctie met even n heeft minimum 0 en maximum n snijpunten met de x-as. De grafiek kan namelijk helemaal boven of onder de x-as liggen, en dus geen snijpunten hebben met de x-as.

Voorbeeld 2 De functie f met voorschrift $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2 + x$ is een 4^{de} graadsvergelijking en heeft in dit geval 4 snijpunten met de x-as:





Nulwaarden vinden

De nulwaarden voor een veeltermfunctie vinden we door het functievoorschrift te ontbinden in een product van factoren met ten hoogste een tweede graad, m.a.w. we ontbinden de veeltermfunctie $f(x)$ in lineaire factoren $x + a$ en in kwadratische factoren $ax^2 + bx + c$. De nulpunten van de functie $f(x)$ zijn dan de nulpunten van de verschillende factoren.

Tekenverloop

Eens een veelterm ontbonden is in factoren, is het eenvoudig om het tekenverloop er van te bepalen. Het tekenverloop van een constante, een lineaire en een kwadratische functie is immers gekend. Het teken van een veeltermfunctie is het product van de tekens van de factoren.

Voorbeeld 3 (een tweedegraadsfunctie herleiden door substitutie)

Deze methode is toepasbaar bij bikwadratische vergelijkingen. Dit zijn vergelijkingen van de vorm $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Dit type van vergelijkingen kan herleid worden tot een kwadratische vergelijking met behulp van de substitutiemethode. Stel hierbij $x^2 = t$.

We bekijken de veelterm $f(x) = 4x^4 - 5x^2 + 1$

Nulwaarden

We bepalen de nulwaarden door de veelterm te ontbinden in factoren, gebruik makend van de substitutiemethode:

$$4x^4 - 5x^2 + 1 = 0 \xrightarrow{x^2 = t} 4t^2 - 5t + 1 = 0$$

We bekomen een kwadratische vergelijking. Hiervan zijn de nulpunten:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} &= \frac{-(-5) + \sqrt{9}}{2.4} = 1 \\ t_2 &= \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} &= \frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2.4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

De 2 oplossingen voor t zijn $t_1 = 1$ en $t_2 = \frac{1}{4}$ zodat de vergelijking kan geschreven worden als: $4t^2 - 5t + 1 = (t - 1)(t - \frac{1}{4})$.

Aangezien $x^2 = t$ zijn de 4 oplossingen voor x: $x_{1 \text{ en } 2} = \pm\sqrt{t_1}$ en $x_{3 \text{ en } 4} = \pm\sqrt{t_2}$

Dit geeft $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{1}{2}$ en $x_4 = -\frac{1}{2}$.

De gegeven vergelijking kan dus ook geschreven worden als:

$$f(x) = 4x^4 - 5x^2 + 1 = (x - 1)(x + 1)(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$$

Tekenverloop

Maak één overzichtelijke tabel met bovenaan alle nulpunten in stijgende volgorde. Per rij onderzoek je het teken van elke factor van $f(x)$. Het teken van $f(x)$ is dan het product van deze tekens.

x		-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1	
$(x-1)$	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$(x-\frac{1}{2})$	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$(x+\frac{1}{2})$	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$(x+1)$	−	0	+	+	+	+	+	+	+
$f(x)$	+	0	−	0	+	0	−	0	+

Voorbeeld 4 (ontbinden in factoren)

We bekijken de veelterm $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 6x + 8$

Nulwaarden

We bepalen de nulwaarden door de veelterm te ontbinden in factoren. Soms kunnen we gebruik maken van merkwaardige producten of, zoals in dit geval, door het groeperen van gemeenschappelijke termen:

$$\begin{aligned}3x^3-4x^2-6x+8 &= (3x^3-4x^2)-(6x-8)\\ &= x^2(3x-4)-2(3x-4)\\ &= (x^2-2)(3x-4)\\ &= (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(3x-4)\end{aligned}$$

De gegeven vergelijking $3x^3-4x^2-6x+8=0$ heeft dus 3 nulpunten:

$$x_1=\sqrt{2}, x_2=-\sqrt{2} \text{ en } x_3=\frac{4}{3}$$

Tekenverloop

in stijgende volgorde. Per rij onderzoek je het teken van elke factor van $f(x)$. Het teken van $f(x)$ is dan het product van deze tekens.

x		$-\sqrt{2}$		$\frac{4}{3}$		$\sqrt{2}$	
$(x-\sqrt{2})$	-	-	-	-	-	0	+
$(x+\sqrt{2})$	$-$	0	+	+	+	+	+
$(3x-4)$	-	-	-	0	+	+	+
$f(x)$	$-$	0	+	0	$-$	0	+

Voorbeeld 5 (regel van Horner)

We bekijken de veelterm $f(x)=x^4-4x^3+5x^2-4x+4$

Nulpunten

We bepalen de nulpunten door de veelterm te ontbinden in factoren gebruik makend van de regel van Horner.

Ga na welke mogelijke delers van a_0 kunnen afgesplitst worden zonder rest. Hier zijn de delers van $a_0=4$: $\pm 1,\ \pm 2$ en ± 4

We proberen $x=+2$: $f(2)=(2)^4-4(2)^3+5(2)^2-4(2)+4=0$

Dus de factor $(x-2)$ kan afgesplitst worden. De coëfficiënten van de resterende veelterm vinden we via de regel van Horner:

$$\begin{array}{c|cccc||c} & 1 & -4 & 5 & -4 & 4\\ \mathbf{2} & \downarrow & 2 & -4 & 2 & -4\\ \hline & 1 & -2 & 1 & -2 & \mathbf{0}\end{array}$$

We vinden $f(x)=x^4-4x^3+5x^2-4x+4=(x-2)(x^3-2x^2+x-2)$

We kunnen proberen om nog een factor af te splitsten.

We proberen nog eens $x=+2$: $f(2)=(2)^3-2(2)^2+(2)-2=0$

Dus de factor $(x-2)$ kan nog eens afgesplitst worden. De coëfficiënten van de resterende veelterm vinden we terug via de regel van Horner:

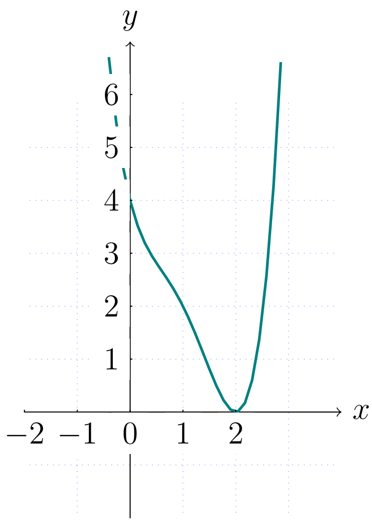
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 1 & -2 \\ \mathbf{2} & \downarrow & 2 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \mathbf{0} \end{array}$$

We vinden tenslotte: $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2(x^2+1)$

Merk op dat de discriminant D van (x^2+1) negatief is zodat deze factor geen nulpunten heeft.

We vinden voor $x = 2$ een dubbel nulpunt; deze veelterm heeft dus 2 samenvallende snijpunten met de x-as.

Aangezien zowel de factor $(x-2)^2$ als ook de factor (x^2+1) steeds positief zijn, is er voor geen enkele waarde van x een negatief beeld (de functie bevindt zich overal boven de x-as, en in het punt $x = 2$ raakt deze veelterm de x-as).



Tekenverloop

Maak één overzichtelijke tabel met bovenaan alle nulpunten in stijgende volgorde. Per rij onderzoek je het teken van elke factor van $f(x)$. Het teken van $f(x)$ is dan het product van deze tekens.

x		2	
$(x-2)^2$	+	0	+
(x^2+1)	+	+	+
$f(x)$	+	0	+

1.8 Rationale functies

Definitie Functievoorschrift

$f(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$ met $t(x)$ en $n(x)$ veeltermfuncties en waarbij de graad van $n(x)$ minstens 1 is.

Voorbeeld 1 Voorbeelden van rationale functies: $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, $f(x) = \dfrac{3x-9}{x-3}$

Voorbeelden van niet-rationale functies: $f(x) = \dfrac{\sin x}{4x}$, $f(x) = \dfrac{2^x}{3x+5}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-3}$

Grafische voorstelling

Het domein van een rationale functie is $\mathbb{R}\backslash\{\text{nulpunten van de noemer}\}$.

Definitie Voorbeeld: het domein van $f(x) = \dfrac{2x+2}{x-8}$ is $\mathbb{R} \setminus \{8\}$

Nulpunten

De nulpunten van een rationale functie $f(x)$, zijn de nulpunten van de teller, die niet de nulpunten van de noemer zijn.

De nulpunten van de noemer, noemen we de polen van de rationale functie $f(x)$. Bij elke pool hoort een verticale asymptoot.

Punten die zowel nulpunt zijn van teller als noemer, geven aanleiding tot de vorm $\frac{0}{0}$. Aangezien deze punten de noemer nul maken, horen ze niet tot het domein, maar geven ook geen aanleiding tot een asymptoot.

Asymptoten

1. De rechte $x = a$ is een **verticale asymptoot** (VA) van de rationale functie $f(x)$ als en slechts als a een nulpunt is van de noemer en geen nulpunt van de teller.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \pm\infty \quad \text{of} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \; x = a \text{ is een VA}$$

Voorbeeld 2

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

Het nulpunt van de noemer, of de pool is $x = 1$. Dit punt is geen nulpunt van de teller. Dus, $x = 1$ is een verticale asymptoot. De functie $f(x)$ is niet gedefinieerd in het punt $x = 1$.

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = -\infty \quad \text{en} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = +\infty \Rightarrow \; x = 1 \text{ is een VA}$$

2. Een rationale functie $f(x)$ heeft een **horizontale asymptoot** (HA) als en slechts als de graad van de teller $\leq$ graad van de noemer.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \Rightarrow \; y = b \text{ is een HA}$$

Voorbeeld 3

$$f(x) = \frac{2x+7}{4x^2+x+2}$$

De graad van de teller is 1, en de graad van de noemer is 2; dus deze functie heeft een horizontale asymptoot.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+7}{4x^2+x+2}\overset{HGT}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{4x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2x}=0\Rightarrow\ y=0\,\text{is een HA}$$

3. Een rationale functie $f(x)$ heeft een **schuine asymptoot** (SA) als en slechts als de graad van de teller = graad van de noemer +1.

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\quad\text{en}\quad q=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]\Rightarrow\ y=mx+q\,\text{is een SA}$$

Voorbeeld 4

$$f(x)=\frac{x^3-4}{2x^2}$$

De graad van de noemer is 2, en de graad van de teller is (2+1=) 3, dus deze functie heeft een schuine asymptoot.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-4}{2x^3}\overset{HGT}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}\\ q &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3-4}{2x^2}-\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3-4-x^3}{2x^2}\right]=0\\ &\Rightarrow\ y=\frac{1}{2}x\,\text{is een SA} \end{aligned}$$

Opmerking Als een functie $f(x)$ voor $x\to+\infty$ een horizontale asymptoot heeft, kan ze voor $x\to+\infty$ geen schuine asymptoot meer hebben. Hetzelfde geldt voor $x\to-\infty$.

Tekenverloop

Om het tekenverloop van een rationale functie te bepalen, moet het tekenonderzoek van de teller en de noemer worden uitgevoerd. Het tekenverloop van een constante, een lineaire en een kwadratische functie is gekend (zie Module 2 sectie 1.4 en 1.7). Het teken van de rationale functie is het product van het teken van de teller en het teken van de noemer.

Voorbeeld 5 Bespreek de rationale functie

$$f(x)=\frac{3x^2}{x^2-2}$$

Domein

$\operatorname{dom} f(x)=\mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$ want de noemer mag niet nul worden. Dit gebeurt als $x^2-2=0\iff x=\pm\sqrt{2}$.

Nulwaarden

Stap 1: Bepaal de nulpunten van de teller, deze zijn de nulpunten van de functie $f(x)$. Dus $3x^2=0\iff x=0$.

$x = 0$ is een nulpunt van de teller, maar niet van de noemer, dus dit punt is een nulpunt van de functie $f(x)$.

Stap 2: Bepaal de nulpunten van de noemer, deze zijn de polen van de functie $f(x)$. Bij elke pool hoort een verticale asymptoot.

$x = -\sqrt{2}$ en $x = +\sqrt{2}$ zijn de nulpunten van de noemer, de functie $f(x)$ heeft dus twee verticale asymptoten.

Asymptoten

Stap 3: Ga na of de functie een verticale asymptoot bezit.

De rechte $x = -\sqrt{2}$ is een verticale asymptoot (VA) van de functie $f(x)$ aangezien $-\sqrt{2}$ een nulpunt is van de noemer en geen nulpunt van de teller is.

Hoe verloopt de functie $f(x)$ in de buurt van deze asymptoot:

$$\text{LL}: \lim_{\substack{x \to -\sqrt{2} \\ <}} \left(\frac{3x^2}{x^2-2}\right) = +\infty \quad \text{en} \quad \text{RL}: \lim_{\substack{x \to -\sqrt{2} \\ >}} \left(\frac{3x^2}{x^2-2}\right) = -\infty \Rightarrow x = -\sqrt{2}\text{is een VA.}$$

De rechte $x = +\sqrt{2}$ is een verticale asymptoot (VA) van de functie $f(x)$ aangezien $+\sqrt{2}$ een nulpunt is van de noemer en geen nulpunt van de teller is.

Hoe verloopt de functie $f(x)$ in de buurt van deze asymptoot:

$$\text{LL}: \lim_{\substack{x \to \sqrt{2} \\ <}} \left(\frac{3x^2}{x^2-2}\right) = -\infty \quad \text{en} \quad \text{RL}: \lim_{\substack{x \to \sqrt{2} \\ >}} \left(\frac{3x^2}{x^2-2}\right) = +\infty \Rightarrow x = +\sqrt{2}\text{is een VA.}$$

Stap 4: Ga na of de functie een horizontale asymptoot bezit. De functie $f(x)$ heeft een horizontale asymptoot (HA) aangezien de graad van teller (2^{de} graad) = graad van de noemer (2^{de} graad).

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2-2} \overset{HGT}{=} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3 \Rightarrow y = 3 \text{ is een HA.}$$

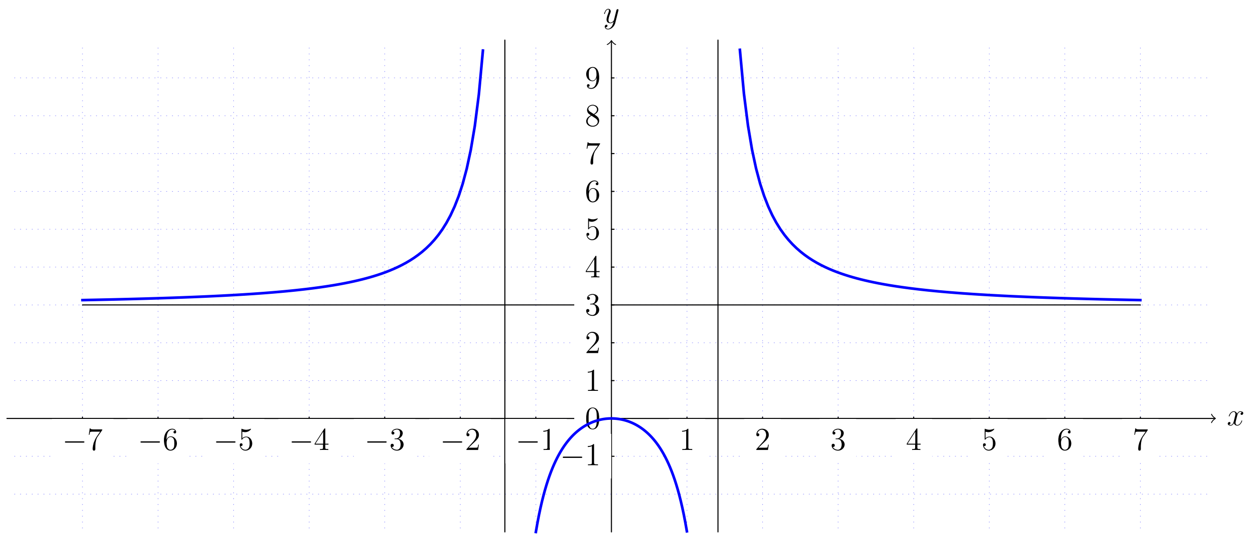
Stap 5: Ga na of de functie een schuine asymptoot heeft. De functie $f(x)$ heeft voor $x \to +\infty$ en $x \to -\infty$, al een horizontale asymptoot en kan bijgevolg geen schuine asymptoot meer hebben.

Tekenverloop

Stap 6: - Schrijf in één tabel bovenaan alle nulpunten en alle polen in stijgende volgorde.

- Onderzoek het teken voor elke factor van $f(x)$.
- Het teken van $f(x)$ is dan het product van deze tekens.

x		$-\sqrt{2}$		0		$-\sqrt{2}$		$\longrightarrow \mathbb{R}$
$3x^2$	+		+	0	+		+	
x^2-2	+	0	-	-	-	0	+	
$f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2-2}$	+	|	-	0	-	|	+	



Grafiek

Onthoud De grafiek en het tekenverloop van een rationale functie bepaal je als volgt: $f(x) = \frac{t(x)}{n(x)}$ met $t(x)$ en $n(x)$ veeltermfuncties en waarbij de graad van $n(x)$ minstens 1 is.

Het domein van een rationale functie is $\mathbb{R}\backslash\{\text{nulpunten van de noemer}\}$.

Stap 1: Bepaal de nulpunten van de teller, dit zijn de nulpunten van de functie $f(x)$.

Stap 2: Bepaal de nulpunten van de noemer, dit zijn de polen van de functie $f(x)$.

Stap 3: De rechte $x = a$ is een **verticale asymptoot** (VA) van de rationale functie $f(x)$ als en slechts als a een nulpunt is van de noemer en maar geen nulpunt van de teller.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \pm\infty \quad \text{of} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \pm\infty \quad \Rightarrow \; x = a \text{ is een VA}$$

Stap 4: Een rationale functie $f(x)$ heeft een **horizontale asymptoot** (HA) als en slechts als de graad van de teller $\leq$ graad van de noemer. Maar hou wel rekening met het domein.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \quad \Rightarrow \; y = b \text{ is een HA}$$

Stap 5: Een rationale functie $f(x)$ heeft een **schuine asymptoot** (SA) als en slechts als de graad van de teller = graad van de noemer +1. Maar hou wel rekening met het domein.

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{en} \quad q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$$
$$\Rightarrow \; y = mx + q \text{ is een SA}$$

Stap 6: Bepaal het tekenverloop

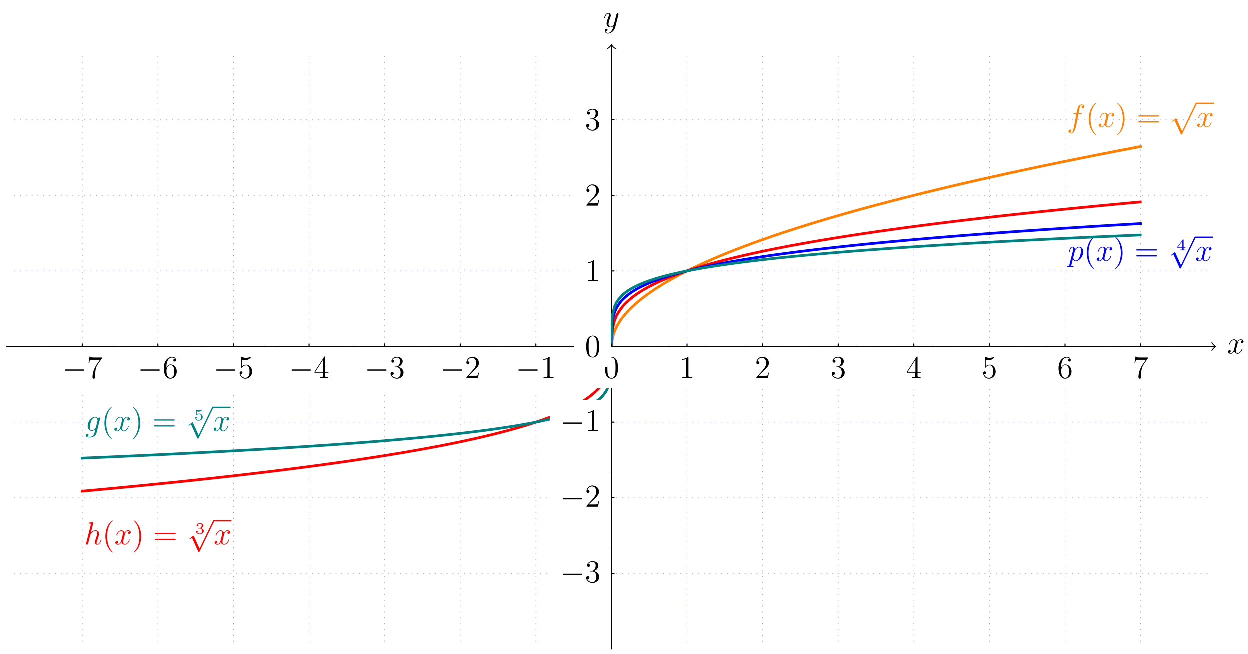
- Schrijf in één tabel bovenaan alle nulpunten en alle polen in stijgende volgorde.
- Onderzoek het teken voor elke factor van $f(x)$.
- Het teken van $f(x)$ is dan het product van deze tekens.

1.9 Irrationale functies

Voorbeeld 1 $f(x) = \sqrt{x^2+2x+4}$, $f(x) = 2 \cdot \sqrt[3]{x^5-3x^2+7} - x - 1$, $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{10-x^2}}$

Grafische voorstelling

De grafiek van de elementaire wortelfuncties $y = \sqrt[n]{x}$ is hieronder weergegeven. Denk eraan dat (machts)wortels ook als macht kunnen geschreven worden: $y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.



)

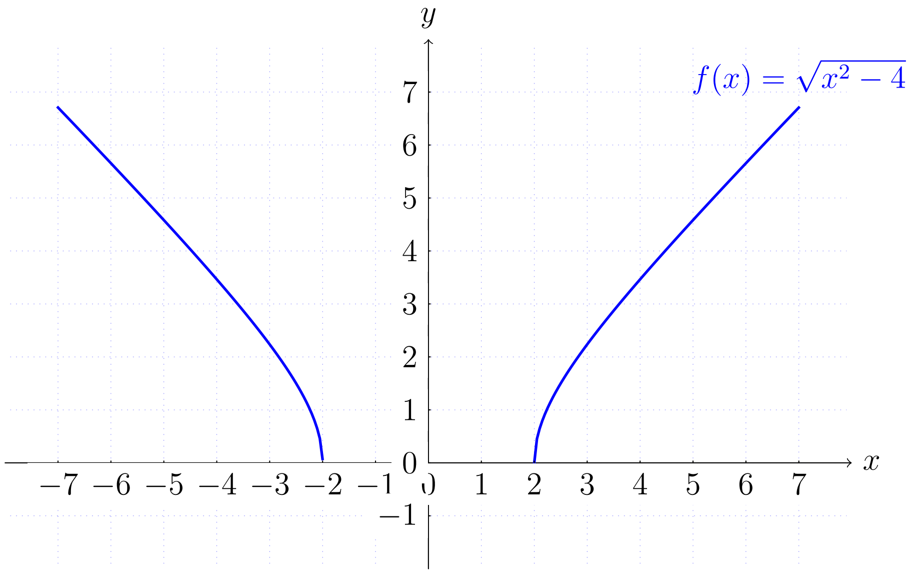
Om het domein (de toegelaten waarden voor x) te bepalen moeten we rekening houden met zowel de *bestaansvoorwaarden* als de *kwadrateringsvoorwaarde*.

- Bestaansvoorwaarde(n): de uitdrukking onder een even machtswortel moet steeds positief zijn!! En niet vergeten, de eventuele noemer mag niet nul worden.
- Kwadrateringsvoorwaarde: we spreken af dat een even machtswortel uit een uitdrukking steeds positief is.

Het domein van een irrationale functie valt samen met de intervallen, waar de vorm onder de vierkantswortel niet negatief is en waar de uitdrukking van een even machtsfunctie steeds een positief resultaat oplevert.

Voorbeeld 2

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$



)

Om het domein van de functie $f(x)$ te bepalen moet er aan de bestaansvoorwaarde(n) voldaan zijn. In dit geval mag de functie onder het wortelteken niet negatief worden. We werken dit verder uit:

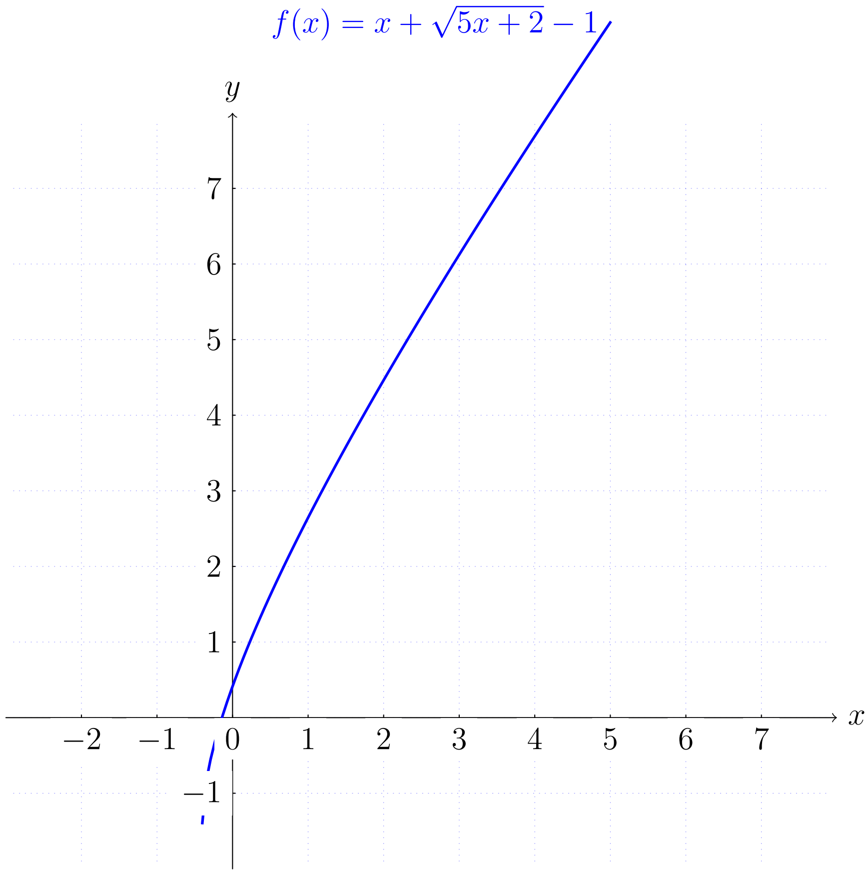
De bestaansvoorwaarde: $$\begin{aligned} x^2 - 4 \geq 0 &\iff x^2 \geq 4 \\ &\iff x \geq 2 \text{ en } x \leq -2 \end{aligned}$$

De kwadrateringsvoorwaarde is reeds voldaan (want er staat infeite $f(x) = +\sqrt{x^2 - 4}$).

Welke waarden van x voldoen hier nu aan? dom$f(x)$ is voor $x \in]-\infty, -2] \bigcup [2, +\infty[$.

Voorbeeld 3

$$f(x) = x + \sqrt{5x + 2} - 1$$



)

Om het domein van de functie $f(x)$ te bepalen moet er aan de bestaansvoorwaarde(n) voldaan zijn. In dit geval mag de functie onder het wortelteken niet negatief worden. We werken dit verder uit:

De bestaansvoorwaarde:
$$\begin{array}{rcccc} 5x+2 \geq 0 & \iff & x & \geq & -\frac{2}{5} \\ \text{dus} & \iff & x & \in & [-\frac{2}{5}, +\infty[\end{array}$$

Nu moeten we nog de kwadrateringsvoorwaarde controleren, m.a.w. volgens onze gemaakte afspraak is een even machtswortel uit een uitdrukking steeds positief is:

De bestaansvoorwaarde:
$$\begin{array}{rccccc} x + \sqrt{5x+2} = 1 & \iff & \sqrt{5x+2} & = & 1-x & \geq 0 \\ & \iff & 1-x & \geq & 0 & \\ \text{dus} & \iff & x & \leq & 1 & \\ \text{of} & \iff & x & \in &]-\infty, 1] & \end{array}$$

De mogelijke waarden voor x moeten aan beide voorwaarden voldoen. Dit betekent: dom$f(x)$ is voor $x \in [-\frac{2}{5}, 1]$

Nulpunten

De vergelijking wordt $f(x) = 0$.

De wortelvormen kan je wegwerken door beide leden van de vergelijking te verheffen tot een gepaste macht. Bepaal vervolgens de nulpunten van de functie. Wanneer een breuk voorkomt in het functievoorschrift, bepaal dan ook de nulpunten van de noemer, deze zijn de polen.

Asymptoten

1. De rechte $x = a$ is een **verticale asymptoot** (VA) van de irrationale functie $f(x)$ als en slechts als a een nulpunt is van de noemer en geen nulpunt van de teller.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \pm\infty \quad \text{of} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \ x = a \text{ is een VA}$$

2. Een irrationale functie $f(x)$ heeft een **horizontale asymptoot** (HA) als en slechts als de graad van de teller $\leq$ graad van de noemer.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \Rightarrow \ y = b \text{ is een HA}$$

3. Een irrationale functie $f(x)$ heeft een **schuine asymptoot** (SA) als en slechts als de graad van de teller = graad van de noemer $+1$.

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{en} \quad q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] \Rightarrow \ y = mx + q \text{ is een SA}$$

Tekenverloop

Wanneer je de wortels hebt weggewerkt door de vergelijking te verheffen tot een gepaste macht, zal je een veeltermfunctie, een kwadratische of een lineaire functie bekomen. Pas het desbetreffend tekenonderzoek toe.

Voorbeeld 4 Bespreek de irrationale functie $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$

Domein

$$\text{dom} f(x) = [-2, 1[\bigcup]1, 2] \tag{1}$$

want de bestaansvoorwaarden zijn:

$$\begin{array}{rcl} 4 - x^2 \geq 0 & \iff & x^2 \leq 4 \\ \text{dus} & \iff & x \leq 2 \text{ en } x \geq -2 \\ \text{of} & \iff & x \in [-2, 2] \end{array}$$

en:

$$x - 1 \neq 0 \text{ dus } x \neq 1$$

De kwadrateringsvoorwaarde is hier niet van toepassing (vanwege de noemer kan $f(x)$ ook negatief worden).

Nulpunten

Stap 1: Bepaal de nulpunten van de teller, deze zijn de nulpunten van de functie $f(x)$.

Dus

$$\begin{aligned} f(x)=0 &\iff \tfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}=0\\ &\iff \sqrt{4-x^2}=0\\ &\iff 4-x^2=0\\ &\iff x^2=4\\ &\iff x=\pm 2 \end{aligned}$$

Stap 2: Bepaal eventueel de nulpunten van de noemer, deze zijn de polen van de functie $f(x)$. Bij elke pool hoort een verticale asymptoot.

Het nulpunt van de noemer is $x = 1$ (dit is dan tevens de vergelijking van de verticale asymptoot).

Asymptoten

Stap 3: Ga na of de functie een verticale asymptoot bezit.

De rechte $x = 1$ is een verticale asymptoot (VA) van de functie $f(x)$ aangezien 1 een nulpunt is van de noemer en geen nulpunt van de teller is.

Hoe verloopt de functie $f(x)$ in de buurt van deze asymptoot:

$$\text{LL}: \lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}\right)=-\infty \quad \text{en} \quad \text{RL}: \lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}\right)=+\infty \Rightarrow x=1 \text{ is een VA}$$

Stap 4: Ga na of de functie een horizontale asymptoot bezit.

De functie heeft geen horizontale asymptoot, want x die nadert naar $+\infty$ of $-\infty$ behoort niet tot het domein.

Stap 5: Ga na of de functie een schuine asymptoot heeft.

De functie heeft geen schuine asymptoot, want x die nadert naar $+\infty$ of $-\infty$ behoort niet tot het domein.

Tekenverloop

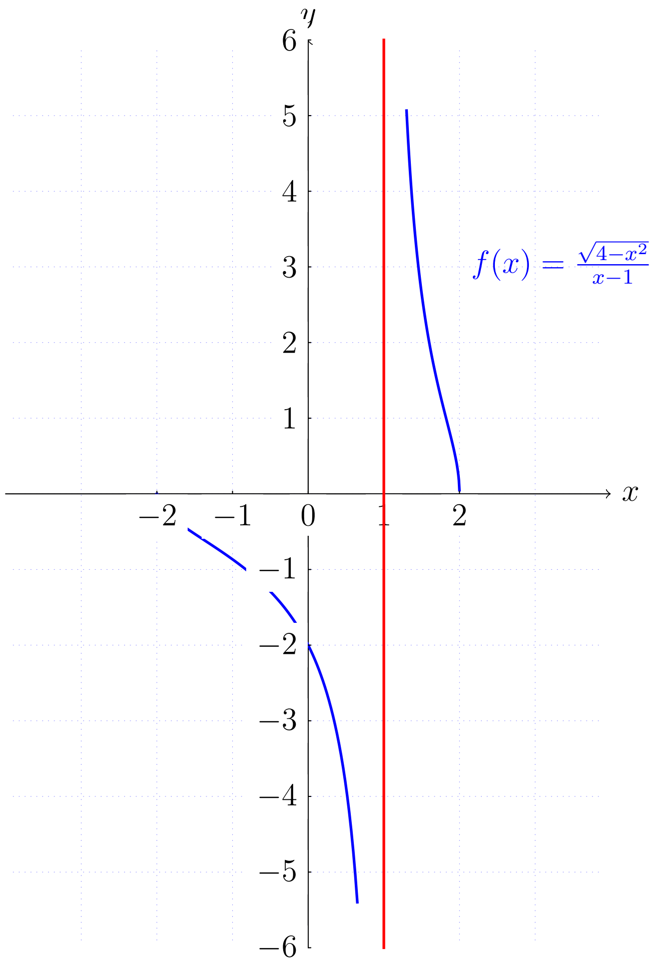
Stap 6:

- Schrijf in één tabel bovenaan alle nulpunten en alle polen in stijgende volgorde.
- Onderzoek het teken voor elke factor van $f(x)$.
- Het teken van $f(x)$ is dan het product van deze tekens.

x		-2		1		2		$\longrightarrow \mathbb{R}$
$\sqrt{4-x^2}$	/	0	+		+	0	/	
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+	
$f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$	/	0	-	|	+	0	/	

Tabel 6. Voorbeeld irrationale functies: tekenverloop.

Grafiek



)

Onthoud De grafiek en het tekenverloop van een irrationale functie bepaal je als volgt:

Het domein van een irrationale functie valt samen met de intervallen, waar de vorm onder de vierkantswortel niet negatief (BVW) is en waar de uitdrukking van een even machtsfunctie steeds een positief resultaat oplevert (KVW).

Stap 1: Bepaal de nulpunten van de teller, dit zijn de nulpunten van de functie $f(x)$.

Stap 2: Bepaal eventueel de nulpunten van de noemer, dit zijn de polen van de functie $f(x)$.

Stap 3: De rechte $x = a$ is een **verticale asymptoot** (VA) van de irrationale functie $f(x)$ als en slechts als a een nulpunt is van de noemer en maar geen nulpunt van de teller.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \pm\infty \quad \text{of} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \pm\infty \quad \Rightarrow \ x = a \text{ is een VA}$$

Stap 4: Een irrationale functie $f(x)$ heeft een **horizontale asymptoot** (HA) als en slechts als de graad van de teller $\leq$ graad van de noemer.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b \quad \Rightarrow\ y = b \text{ is een HA}$$

Stap 5: Een irrationale functie $f(x)$ heeft een **schuine asymptoot** (SA) als en slechts als de graad van de teller = graad van de noemer +1.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{en} \quad q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] \Rightarrow\ y = mx + q \text{ is een SA}$$

Stap 6: Bepaal het tekenverloop

- Schrijf in één tabel bovenaan alle nulpunten en alle polen in stijgende volgorde.
- Hou rekening met de bestaansvoorwaarde en de kwadrateringsvoorwaarde.
- Onderzoek het teken voor elke factor van $f(x)$.
- Het teken van $f(x)$ is dan het product van deze tekens.

1.10 Exponentiële functies

Definitie De exponentiële functie is van de vorm:

$$y = a^x \text{ met } a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} \text{ en } x \in \mathbb{R}$$

a noemen we het **grondtal**, en moet strikt positief en verschillend van 1 zijn.

x noemen we de **exponent**, en is een reëel getal.

Voorbeeld 1

$$\begin{aligned}
4^2 &= 16 \\
3^{-2} &= \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \\
5^{\frac{2}{3}} &= \sqrt[3]{5^2} \\
5^{-\frac{3}{2}} &= \frac{1}{5^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5^3}} = \frac{1}{\sqrt{5^2.5}} = \frac{1}{5\sqrt{5}} \\
\sqrt{25} &= 5 \\
\sqrt[4]{10000} &= 10 \\
\sqrt[5]{-32} &= -2 \\
\sqrt[3]{8} &= 2
\end{aligned}$$

Opmerking De positieve tweedemachts- of vierkantswortel van 25 is 5, want $5 > 0$ en $5^2 = 25$, dit wordt genoteerd als $\sqrt{25} = 5$.

En de negatieve tweedemachts- of vierkantswortel van 25 is -5, want $-5 < 0$ en $(-5)^2 = 25$, dit wordt genoteerd als $-\sqrt{25} = -5$.

Ook je rekenmachine zal bij $\sqrt{25}$ als resultaat 5 geven. Verwar dit niet met het oplossen van de vergelijking $x^2 = 25$. In dit geval zijn de twee oplossingen van de vergelijking: $x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$.

Bijzondere gevallen

- De exponentiële functie met grondtal e ($e = 2,718281828$) wordt genoteerd als $y = e^x$.
- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- Als n even is spreekt men van een *evenmachtswortel* ($\sqrt{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, ...), is n oneven dan spreekt men van een *onevenmachtswortel* ($\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[5]{\ }$, ...).
- Positieve reële getallen hebben twee tegengestelde evenmachtswortels en juist één positieve onevenmachtswortel.
- als n even is, dan heeft elk reëel getal a twee n^{de} machtswortels die tegengesteld zijn, genoteerd door $-\sqrt[n]{a}$ en $+\sqrt[n]{a}$, of kortweg $\pm\sqrt[n]{a}$.
- als n oneven is, dan heeft elk reëel getal a juist één n^{de} machtswortel, genoteerd door $\sqrt[n]{a}$.
- Als n even is, dan hebben de negatieve getallen geen n^{de} machtswortel; dus negatieve reële getallen hebben geen (reële) evenmachtswortel en juist één onevenmachtswortel welke negatief is.

Let op: worteltrekken is niet hetzelfde als het oplossen van een vergelijking:

worteltrekken	vergelijking oplossen
$\sqrt{4} = 2$	$x^2 = 4$ $x = \pm\sqrt{4}$ $x = \pm 2$
	$x_1 = -2$ en $x_2 = +2$

Tabel 7

Rekenregels

machten	wortels
$a^m a^n = a^{m+n}$	$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^{m+n}}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
$\left(\frac{1}{a}\right)^n = a^{-n}$	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Tabel 8

Opmerking

- aangezien $1 = \frac{a}{a} = a^{1-1} = a^0$ zie je waarom we zeggen dat $a^0 = 1$.
- formules met wortels kan je (gemakkelijk) terugvinden als je de wortelvorm herschrijft d.m.v. machten:
$$\sqrt[m]{a}.\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m}}.a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} = a^{\frac{m+n}{m.n}} = \sqrt[m.n]{a^{m+n}}$$
- laat je niet vangen: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- een veel gebruikte bewerking is het wortelvrij maken van de noemen, bv.: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Oplossen van exponentiële vergelijkingen

Algemeen

In sommige opgaves kom je exponentiële vergelijkingen tegen. Dit zijn vergelijkingen waar de onbekende voorkomt in de exponent. Om exponentiële vergelijkingen vlot te kunnen oplossen, maak je best gebruik van onderstaand stappenplan:

Stap 1: Noteer de vergelijking in haar standaardvorm: $a^{f(x)} = c$ of $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ of $a^{f(x)} = b^{g(x)}$

Stap 2: Laat op beide leden van de vergelijking een geschikte logaritmische functie inwerken.

Stap 3: Stop de uitkomst in de opgave en controleer.

Voorbeeld 2 Los op: $8^{x-1} - 4 = 0$

$$\begin{aligned} 8^{x-1} - 4 = 0 &\iff 8^{x-1} = 4 && \text{(stap 1)} \\ &\iff 2^{3x-3} = 2^2 && \text{(zoek een verband tss 8, 4 en 2)} \\ &\iff \log 2^{3x-3} = \log 2^2 && \text{(stap 2)} \\ &\iff 3x - 3 = 2 \\ &\iff x = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

In stap 3 controleer je dat $8^{\frac{5}{3}-1} - 4 = 0$? Dit is ok.

Opmerking: stap 2 kan je ook in gedachten doen, m.a.w. hoef je niet op te schrijven.

Voorbeeld 3

$$a^{f(x)} = b^{g(x)}$$

Los op: $50\sqrt{0,1^x} = 10^{x+1}\sqrt{2,5}$

$$\begin{aligned} 50\sqrt{0,1^x} = 10^{x+1}\sqrt{2,5} &\iff 50.\,(0,1)^{\frac{x}{2}} = 10^{x+1}\sqrt{2,5} && \text{(stap 1)} \\ &\iff 50.10^{-\frac{x}{2}} = 10^x.10.\sqrt{2,5} && \text{(zoek een verband tss 0,1 en 10)} \\ &\iff 10^{-\frac{x}{2}}.10^{-x} = \frac{10.\sqrt{2,5}}{50} && \text{(zet alle factoren met x bij elkaar)} \\ &\iff 10^{-\frac{3}{2}x} = \sqrt{\frac{100.2,5}{2500}} \\ &\iff \log 10^{-\frac{3}{2}x} = \log 10^{-\frac{1}{2}} && \text{(stap 2)} \\ &\iff -\frac{3}{2}x = -\frac{1}{2} \\ &\iff x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

In stap 3 controleer je dat $50\sqrt{0,1^{\frac{1}{3}}} = 10^{\frac{1}{3}+1}\sqrt{2,5}$? Dit is ok.

Opmerking: stap 2 kan je ook in gedachten doen, m.a.w. hoef je niet op te schrijven.

Voorbeeld 4 Los op:

$$2^{2x} - 3 \cdot 2^{(x+2)} + 36 = 0$$

$$\begin{array}{ll}
2^{2x} - 3 \cdot 2^{(x+2)} + 36 = 0 & \\
2^{2x} - 3 \cdot 2^{x} \cdot 2^2 + 36 = 0 & \\
2^{2x} - 12 \cdot 2^{x} + 36 = 0 & \text{(herken dat } 2^{2x} = (2^x)^2\text{)} \\
 & \text{stel } 2^x = t \\
t^2 - 12 \cdot t + 36 = 0 & \text{(los de vierkantsvgl op)}
\end{array}$$

$$t_{1 \text{ en } 2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm 0}{2} = 6$$

We zoeken niet $t_{1 \text{ en } 2}$ maar wel de waarde van x. Dus: $2^x = t = 6$ zodat $x = \log_2 6$.

Ook hier kan je terug controleren of de gevonden waarde van x voldoet aan de gegeven vergelijking.

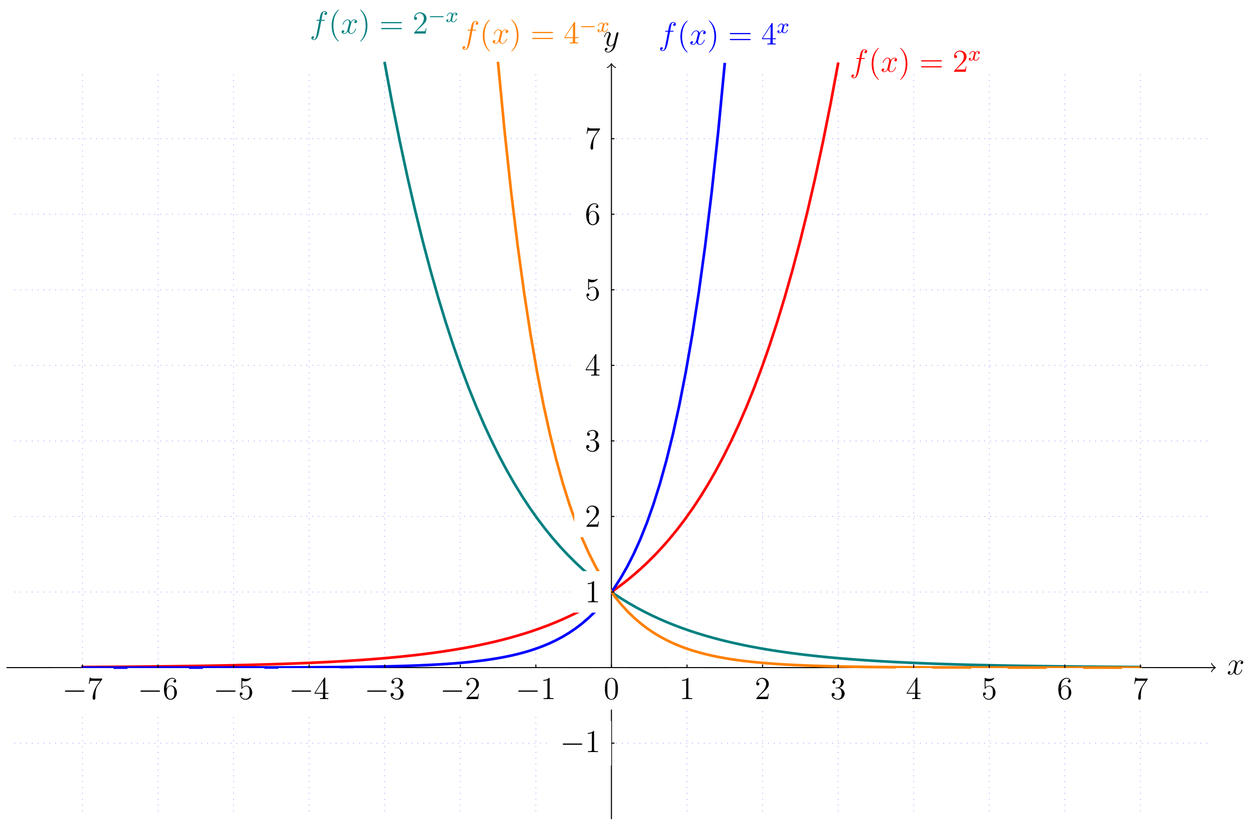
Merk op dat in dit geval hier t_1 en t_2 gelijk zijn, waardoor er slechts één x-waarde is. Indien $t_1 \neq t_2$ dan vind je ook een x_1 en x_2.

Tenslotte, als je een t-waarde vindt die negatief is, dan... bestaat de bijhorende x-waarde niet. Je kan immer geen logaritme nemen van een negatief getal.

De exponentiële functie

Grafische voorstelling

- Het domein van de exponentiële functie is $\mathbb{R}$.
- Het beeld van de exponentiële functie is $\mathbb{R}_0^+$, dus alle strikt positieve getallen; de grafiek ligt boven de x-as.
- De punten $(0, 1)$ en $(1, a)$ behoren steeds tot de exponentiële functie $f(x) = a^x$.
- Als het grondtal $a > 1$ is het een stijgende functie.
- Als het grondtal $0 < a < 1$ is het een dalende functie.
- De grafieken $y = a^x$ en $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ zijn elkaars spiegelbeeld t.o.v. de y-as.



Nulpunten

- Er zijn geen nulpunten. De exponentiële functie heeft geen snijpunten met de x-as. De x-as is de horizontale asymptoot.
- Het punt $(0, 1)$ is het enige snijpunt met de y-as.

Tekenverloop

- Alle functiewaarden $f(x)$ zijn strikt positief, de grafiek ligt overal boven de x-as.

Voorbeeld 5 $y = 2^x$

Grafische voorstelling (stap1): het grondtal is 2, en $2 > 0$, dus krijgen we een stijgende functie. Het punt $(1, a)$ is hier dus $(1, 2)$ en behoort tot de functie $y = 2^x$.

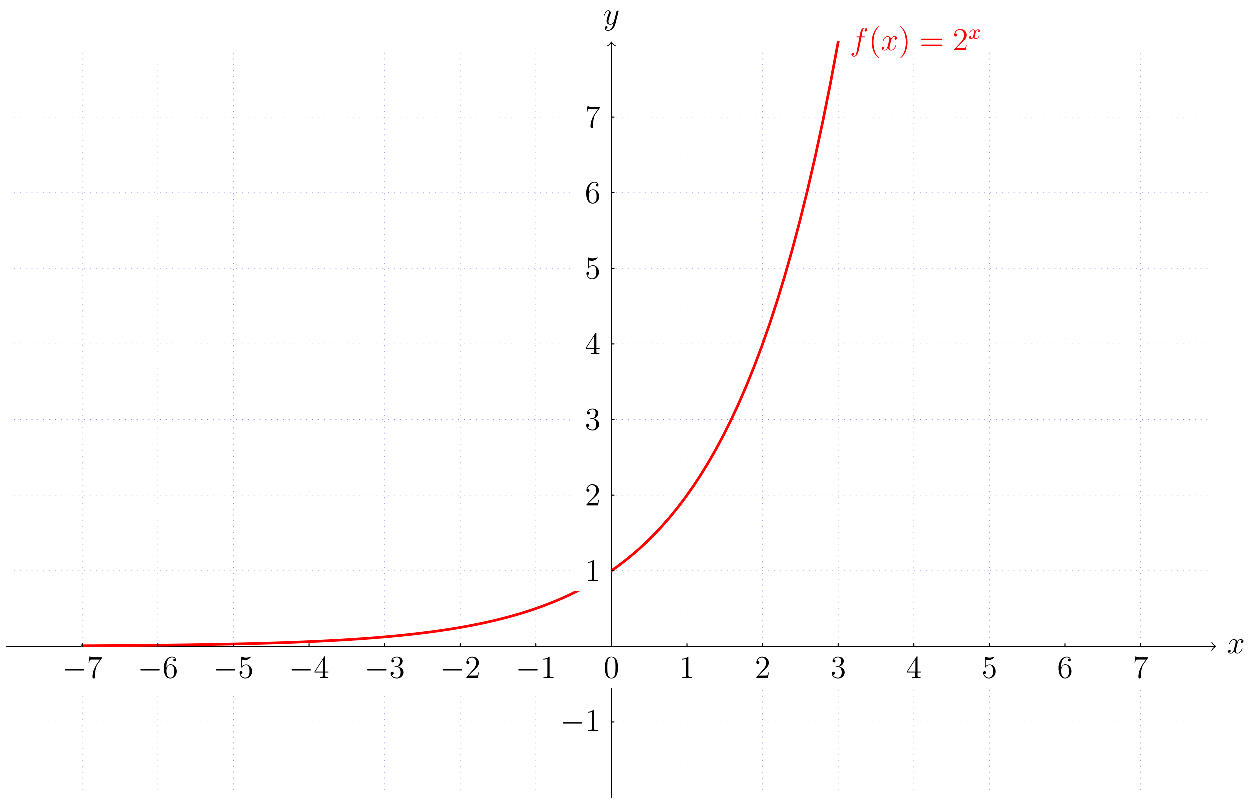
Nulpunten (stap2): er zijn geen nulpunten. De x-as wordt nooit gesneden. De x-as is de horizontale asymptoot. De y-as wordt gesneden in het punt $(0, 1)$.

Tekenverloop (stap3)

x	$\longrightarrow \mathbb{R}$
2^x	$+$

Tabel 9

Grafiek (stap4)



1.11 Logaritmische functies

Definitie De logaritmische functie wordt gedefinieerd als de inverse van de exponentiële functie.

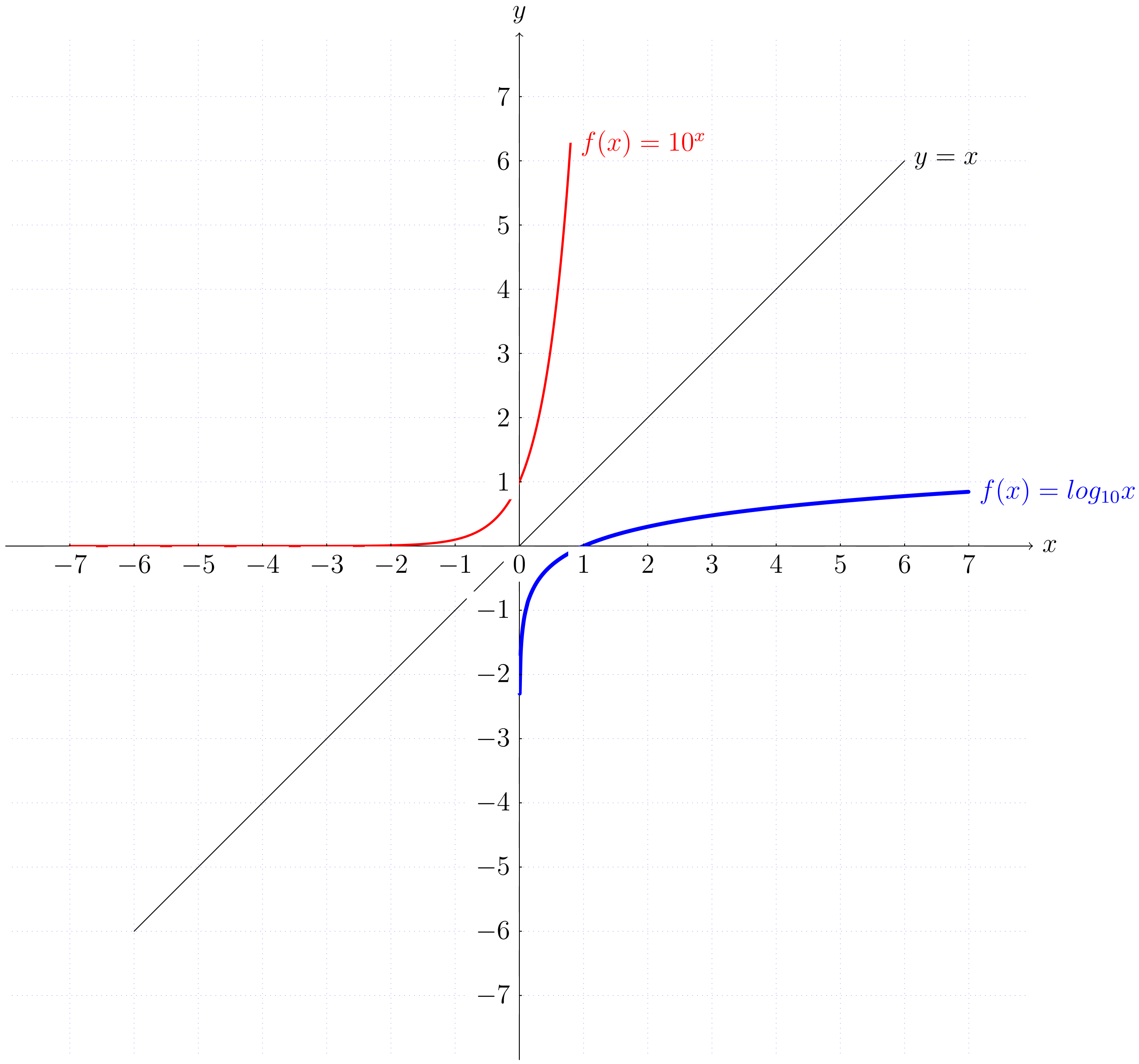
De logaritmische functie is van de vorm:

$$y = \log_a(x) = {}^a\!\log(x) \iff a^y = x \tag{2}$$

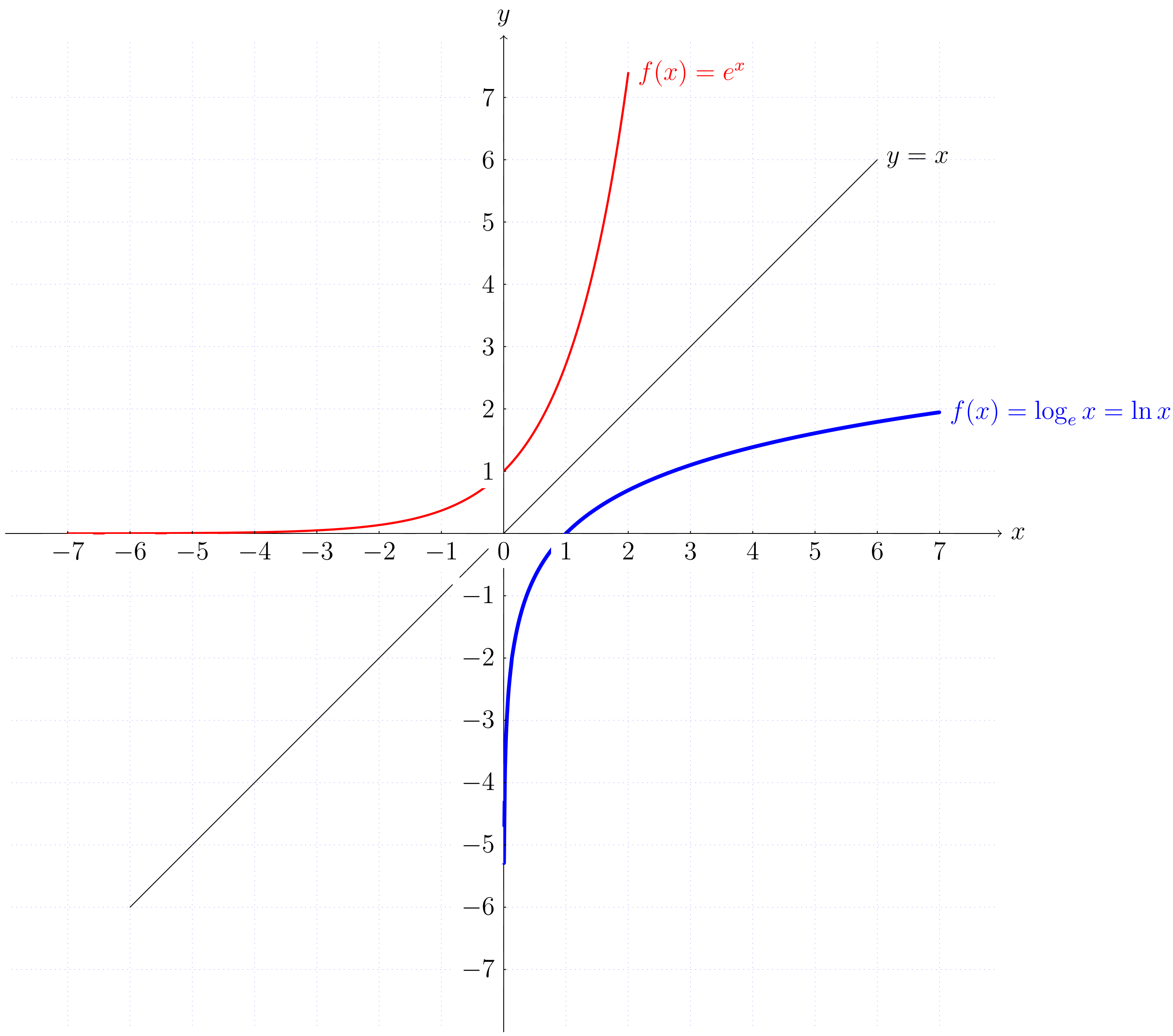
met $a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$ en $x \in \mathbb{R}_0^+$

a noemen we het **grondtal**, en moet strikt positief en verschillend van 1 zijn. x is een strikt positief reëel getal.

Om de waarde van y te vinden, stel je jezelf de vraag: "tot welke macht moet ik het grondtal a verheffen om x uit te komen?"



Figuur .14: Grafische voorstelling van $y = \log_{10}(x) = \log(x)$, de inverse functie van $y = 10^x$)



Figuur .15: Grafische voorstelling van $y = \log_e(x) = \ln(x)$, de inverse functie van $\exp x$

$\log_a(x)$ is de inverse functie van de functie a^x; beide functies zijn elkaar spiegelbeeld t.o.v. de eerste bissectrice ($y = x$).

$\ln(x)$ is de inverse functie van de functie e^x; beide functies zijn elkaar spiegelbeeld t.o.v. de eerste bissectrice ($y = x$).

Voorbeeld 1

$$\begin{aligned}
\log_{10}(100) &= 2 \text{ (want } 10^2 = 100) \\
\log_2 8 &= 3 \\
\log_4 16 &= 2 \\
\log_3 9 &= 2 \\
\log_3 \sqrt{3} &= \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \\
\log_5 \frac{1}{5} &= \log_5 5^{-1} = -1
\end{aligned}$$

Bijzondere gevallen

- De **tiendelige of Briggse logaritme** is de logaritme met grondtal 10. In de notatie wordt vaak het grondtal 10 weggelaten: $y = \log_{10}(x) = \log(x)$
- De **natuurlijke of Neperiaanse logaritme** is de logaritme met grondtal e (e=2,718281828) en wordt genoteerd als $y = \log_e(x)$. Ook hier wordt het grondtal e weggelaten, en gebruikt men de specifieke notatie: $y = \ln(x)$
- $\log_a(a) = 1$ (want $a^1 = a$)
- $\log_a(1) = 0$ (want $a^0 = 1$)
- $\log_a(0)$ en $\log_a(-...)$ bestaan niet!

Rekenregels

Rekenregel

$$\log(x.y) = \log x + \log y \tag{3}$$
$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y \tag{4}$$
$$\log(x^n) = n \log x \tag{5}$$
$$\log\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n} \log x \tag{6}$$
$$\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)} \tag{7}$$
$$\tag{8}$$

Opmerking

- voor de eenvoud hebben we enkele keren het grondtal weggelaten.
- laat je niet verleiden, er bestaat geen eenvoudige formule voor $\log(x+y) = \ldots$

- $\log(x^n) = \log(x \cdot x \cdot x \cdot \ \ldots \ x) = \log x + \log x + \ldots + \log x = n \log x$. Toch niet zo moeilijk hé!?

- om een logaritme met grondtal a om te zetten naar een logaritme met grondtal c maken we gebruiken van de volgende eigenschap: $\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$ Hiermee vind je trouwens ook gemakkelijk het laatste rekenregeltje. Stel, je moet uitrekenen hoeveel $\log_2 8$ is door over te gaan op een ander grondtal (bijvoorbeeld 10, wat immers op je rekentoestel staat). Dan is $\log_2 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 2} = \frac{\log 8}{\log 2} = \frac{0{,}9031}{0{,}3010} = 3,000$ (en dat hadden we natuurlijk ook al lang uit het hoofd uitgerekend via een andere eigenschap).

- soms is het nodig om de variabele x of een getal, op een andere manier te schrijven. Zowel de notatie $x = 10^{log_{10}(x)}$ als $x = \log_{10^x}$ worden regelmatig gebruikt. Hetzelfde geldt voor $x = e^{log_e(x)} = e^{\ln x}$ en $x = \log_e e^x = \ln e^x$. Het idee hierachter is dat de logaritmische en exponentiële functies elkaars inverse zijn, waardoor ze elkaar opheffen als ze na elkaar worden toegepast op x. Maar let wel op met bijvoorbeeld $\sqrt{x^2} \neq x$ maar wel $\sqrt{x^2} = |x|$(zie ook Module 1 - Absolute waarde).

Oplossen van logaritmische vergelijkingen

In sommige opgaves kom je logaritmische vergelijkingen tegen. Dit zijn vergelijkingen waar de onbekende voorkomt in een logaritmische functie. Om logaritmische vergelijkingen vlot te kunnen oplossen, maak je best gebruik van onderstaand stappenplan:

Stap 1: Noteer de vergelijking in haar standaardvorm: $\log_a(f(x)) = c$ of $\log_a(f(x)) = \log_a(g(x))$.

Stap 2: Laat op beide leden van de vergelijking een geschikte exponentiële functie inwerken.

Stap 3: Controleer of de bekomen oplossingen voldoen aan de voorwaarden:

- het grondtal moet strikt positief zijn, en verschillend van 1 zijn, en
- de $\log_a(f(x))$ bestaat enkel als $f(x) > 0$.

Stap 4: Stop de uitkomst in de opgave en controleer.

Voorbeeld 2 $\log_a(f(x)) = \log_a(g(x))$

Los op: $\log_3(x+4) + \log_3(x-2) = 2\log_3 x$

$$\begin{array}{rlll}
\log_3(x+4) + \log_3(x-2) = 2\log_3 x & \iff & \log_3\left[(x+4)(x-2)\right] = \log_3 x^2 & \text{(stap 1)} \\
& \iff & 3^{\log_3[(x+4)(x-2)]} = 3^{\log_3 x^2} & \text{(stap 2)} \\
& \iff & (x+4)(x-2) = x^2 & \\
& \iff & x^2 - 2x + 4x - 8 = x^2 & \\
& \iff & 2x - 8 = 0 & \\
& \iff & x = 4 &
\end{array}$$

In stap 3 controleren we de voorwaarden voor $x = 4$:

1. Voor $\log_3(x+4)$ moet gelden: $x+4>0 \iff x>-4$? ok.
2. 2) Voor $\log_3(x-2)$ moet gelden: $x-2>0 \iff x>2$? ok.
3. Voor $2\log_3 x$ moet gelden: $x>0$? ok.

Besluit: de oplossing $x=4$ voldoet aan de voorwaarden, en is dus een oplossing van de vergelijking.

Stap 4: controleer je oplossing: $\log_3(4+4)+\log_3(4-2)=2\log_3 4$? ok.

Opmerking: stap 2 kan je ook in gedachten doen, m.a.w. hoef je niet op te schrijven.

Voorbeeld 3 $\log_a(f(x))=c$

Los op: $\log_{(x+3)}(x+5)=2$

$$\begin{aligned} \log_{(x+3)}(x+5)=2 &\iff (x+3)^2=x+5 && \text{(stap 1)}\\ & && \text{definitie: } y=\log_a x \Leftrightarrow a^y=x\\ &\iff x^2+6x+9=x+5\\ &\iff x^2+5x+4=0 \end{aligned}$$

$$x_{1 \text{ en } 2}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1}=\frac{-5\pm 3}{2} \iff x_1=-1 \text{ en } x_2=-4$$

In stap 3 controleren we de voorwaarden voor x_1 en x_2:

1. Is $x+3>0 \iff x>-3$?
2. Is $x+5>0 \iff x>-5$?

Besluit: $x_1=-1$ voldoet aan de voorwaarden, maar $x_2=-4$ niet. Dus enkel $x_1=-1$ is een oplossing van de vergelijking.

Stap 4: controleer je oplossing: $\log_{(-1+3)}(-1+5)=2$? ok. Maar $\log_{(-4+3)}(-4+5)=2$ gaat niet.

Voorbeeld 4 het grondtal is onbekend

Los op: $\log_a 250=3+\log_a 2$

$$\begin{aligned} \log_a 250=3+\log_a 2 &\iff \log_a 250-\log_a 2=3\\ &\iff \log_a\left(\tfrac{250}{2}\right)=3\\ &\iff \log_a 125=3\\ &\iff a^3=125\\ &\iff a=\sqrt[3]{125}=5 \end{aligned}$$

Alternatieve aanpak:

$$\begin{aligned} \log_a 250=3+\log_a 2 &\iff \log_a 250=3\log_a a+\log_a 2 \quad \text{(infeite is } \log_a a=1)\\ &\iff \log_a 250=\log_a a^3+\log_a 2\\ &\iff \log_a 250=\log_a(a^3\cdot 2)\\ &\iff 250=2a^3\\ &\iff a=\sqrt[3]{\tfrac{250}{2}}=5 \end{aligned}$$

Voorbeeld 5 rekenen met zeer grote en kleine getallen

Uit hoeveel cijfers bestaat het getal 1995^{1995}?

Stel $x = 1995^{1995}$

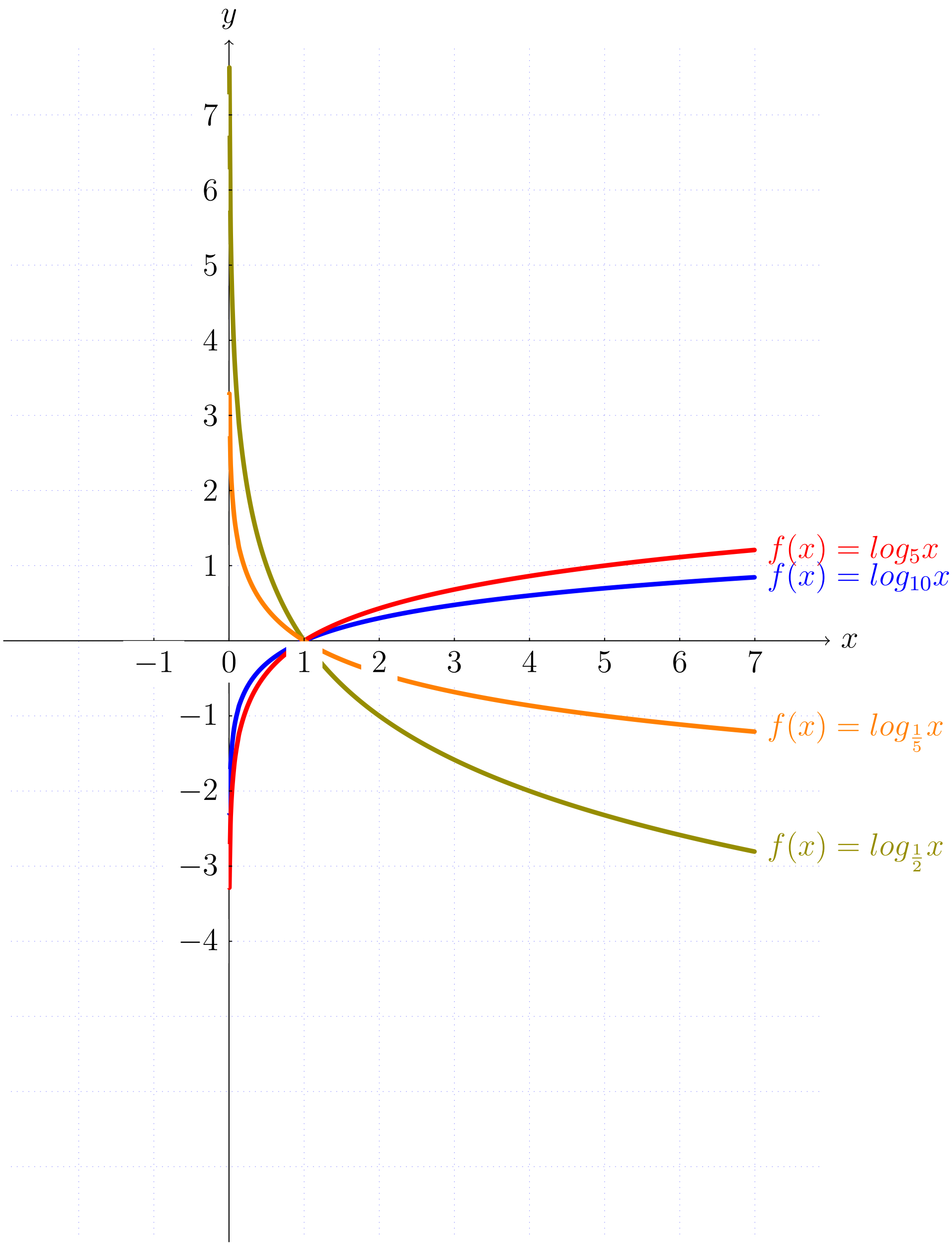
Dan is:

$$\begin{array}{rcl}
\log_{10} x & = & \log_{10}\left(1995^{1995}\right) \\
 & = & 1995.\log_{10}(1995) \\
 & = & 6583,386\ldots \\
\text{of} & & \\
6583 & < & \log_{10} x < 6584 \\
\log_{10} 10^{6583} & < & \log_{10} x < \log_{10} 10^{6584} \\
10^{6583} & < & x < 10^{6584}
\end{array}$$

Besluit: x is een geheel getal dat bestaat uit 6584 cijfers

De logaritmische functie

Grafische voorstelling



- Het domein van de logaritmische functie is $\mathbb{R}_0^+$, dus alle strikt positieve getallen, de grafiek ligt rechts van de y-as.
- Het beeld van de logaritmische functie is $\mathbb{R}$.
- De punten $(1, 0)$ en $(a, 1)$ behoren steeds tot de logaritmische functie $f(x) = \log_a x$.
- Als het grondtal $a > 1$ is het een stijgende functie.
- Als het grondtal $0 < a < 1$ is het een dalende functie.
- De grafieken $y = \log_a x$ en $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ zijn elkaars spiegelbeeld t.o.v. de x-as.

Nulpunten

- De logaritmische functie heeft 1 nulpunt: het punt (1,0) is het enige snijpunt met de x-as.
- Er zijn geen snijpunten met de y-as. De y-as is de verticale asymptoot.

Tekenverloop

x	0		1		$\longrightarrow \mathbb{R}$
$\log_a x$ met $0 < a < 1$	/	+	0	-	
$\log_a x$ met $a > 1$	/	-	0	+	

Tabel 10

Voorbeeld 6 $y = \log_2 x$

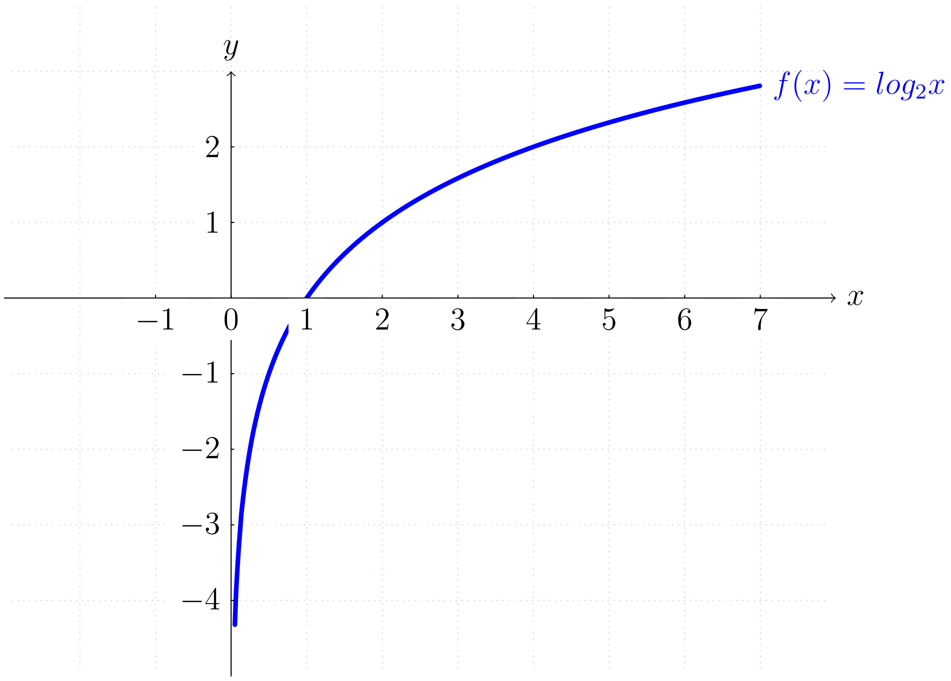
Grafische voorstelling: (stap1) het grondtal is 2, en $2 > 0$, dus krijgen we een stijgende functie. Het punt $(a, 1)$ is hier dus $(2, 1)$ en behoort tot de functie $y = \log_2 x$.

Nulpunten: (stap2) er is altijd één nulpunt; de x-as wordt altijd gesneden in het punt $(1, 0)$. De y-as wordt nooit gesneden. De y-as is de verticale asymptoot.

Tekenverloop: (stap3)

x	0		1		$\longrightarrow \mathbb{R}$
$\log_2 x$ met $a = 2 > 1$	/	-	0	+	

Grafiek: (stap4)



1.12 Goniometrische functies

De periode

Veel fenomenen in ons dagelijks leven herhalen zich, bijvoorbeeld je hartslag, de slingerbeweging van een staande klok, ... Ook in technische wetenschappen komen zichzelf herhalende patronen vaak voor, denk maar aan de trillingen in een gebouw, of het principe van wisselstroom. Deze zichzelf herhalende fenomenen worden voorgesteld door periodieke functies.

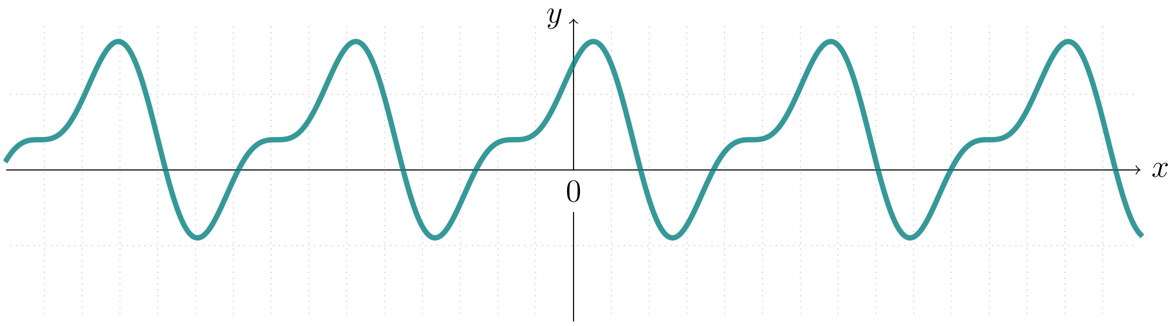
We noemen een functie periodiek als er een getal $\mathrm{T} > 0$ bestaat zodat

$$f(x) = f(x+\mathrm{T}) = f(x+2\mathrm{T}) = \dots \text{ en ook } f(x) = f(x-\mathrm{T}) = f(x-2\mathrm{T}) = \dots$$

en dat voor alle x. Het kleinste getal T met deze eigenschap noemen we **de periode**.

We kunnen dit ook iets korter noteren: $f(x) = f(x+k\mathrm{T})$ met $k \in \mathbb{Z}$ en dit $\forall x \in \mathbb{R}$.

Een periodieke functie met periode T herhaalt zich dus telkens na een 'afstand' T. Je kan de periode ook zien als de 'breedte' van het zich herhalende stuk. Een voorbeeld:



Deze functie herhaalt zichzelf met periode 2π.

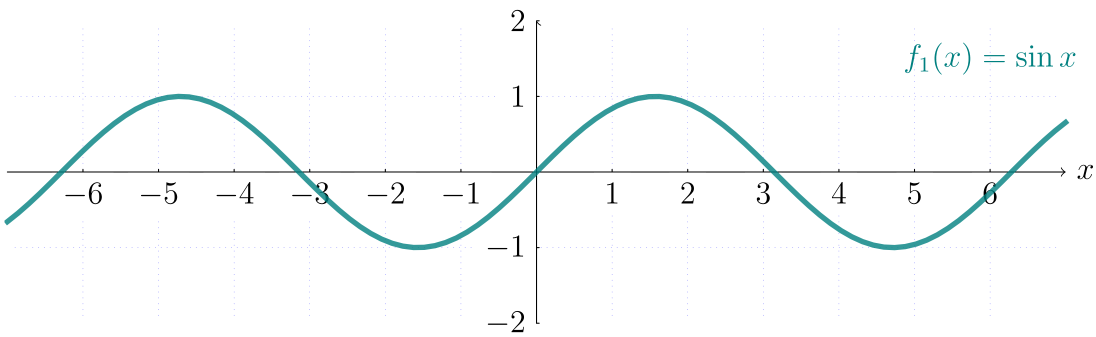
Goniometrische functies

Goniometrische functies zijn functies opgebouwd uit de basisfuncties sin, cos en tan.

Goniometrische functies gebruiken *radialen* als argument, en geen graden. Omdat deze basisfuncties zo belangrijk zijn, zetten we ze even op een rijtje met bijhorende grafieken.

- Sinusfunctie

  $f(x) = \sin x$

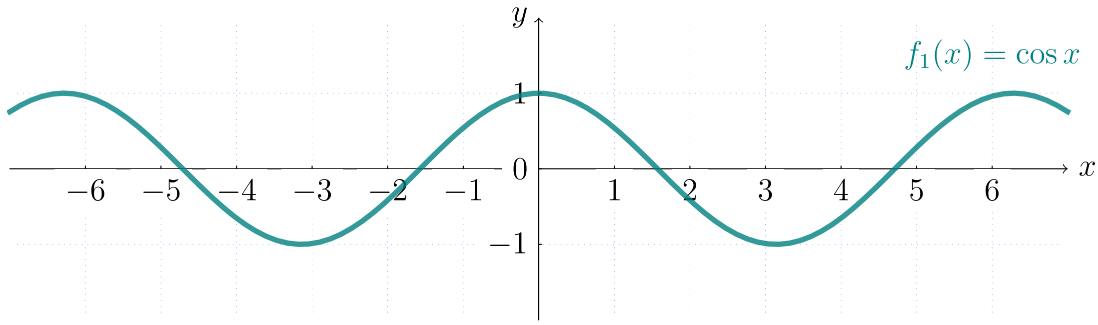


  - De sinusfunctie kan je voor elke x berekenen.
  - De sinusfunctie ligt altijd tussen -1 en 1.

– De periode is 2π.
– De sinusfunctie is een oneven functie want $\sin(-x) = -\sin(x)$

- Cosinusfunctie

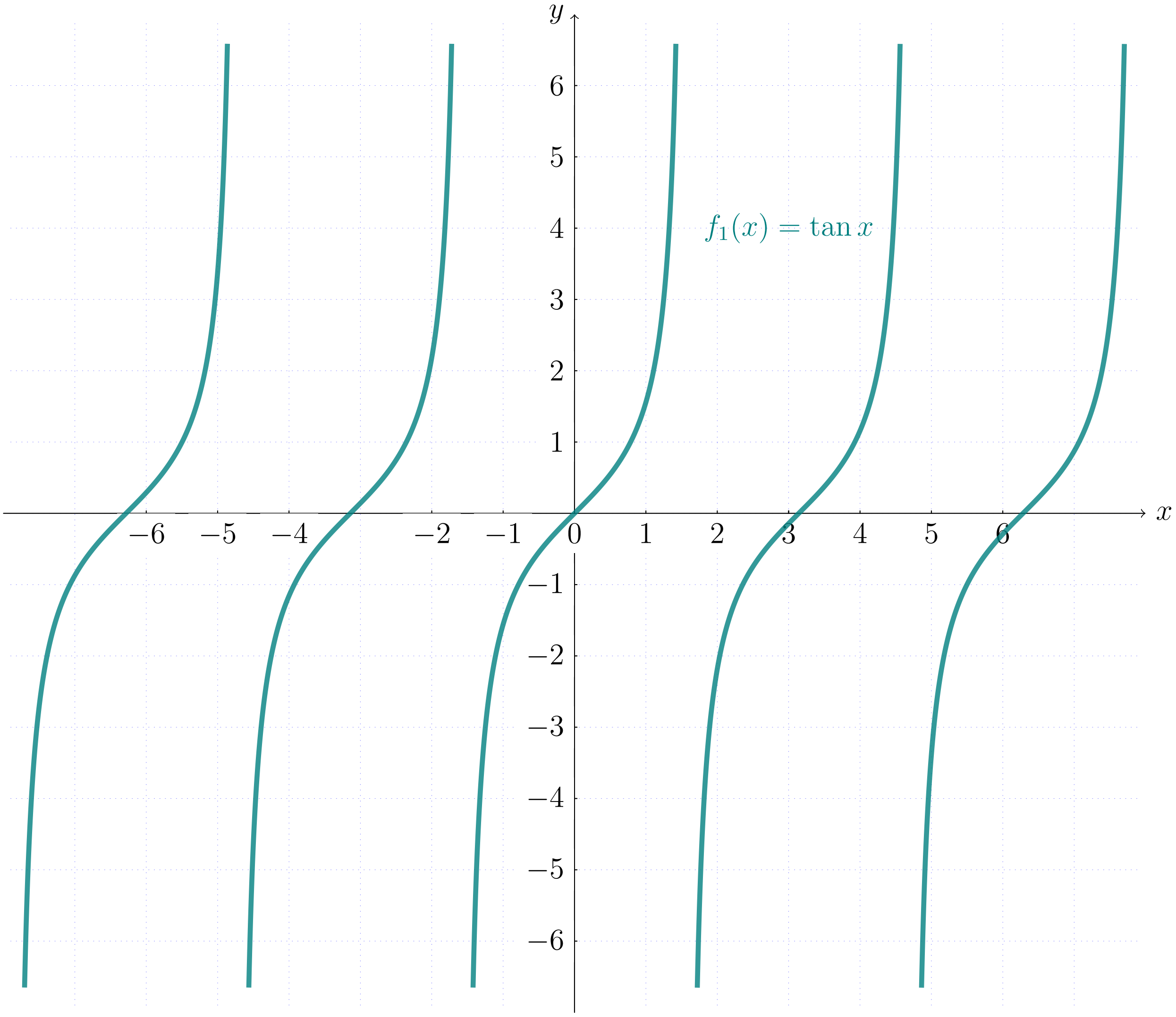
  $f(x) = \cos x$



– De cosinusfunctie kan je voor elke x berekenen.
– De cosinusfunctie ligt altijd tussen -1 en 1.
– De periode is 2π.
– De cosinusfunctie is een even functie want $\cos(-x) = \cos(x)$

- Tangensfunctie

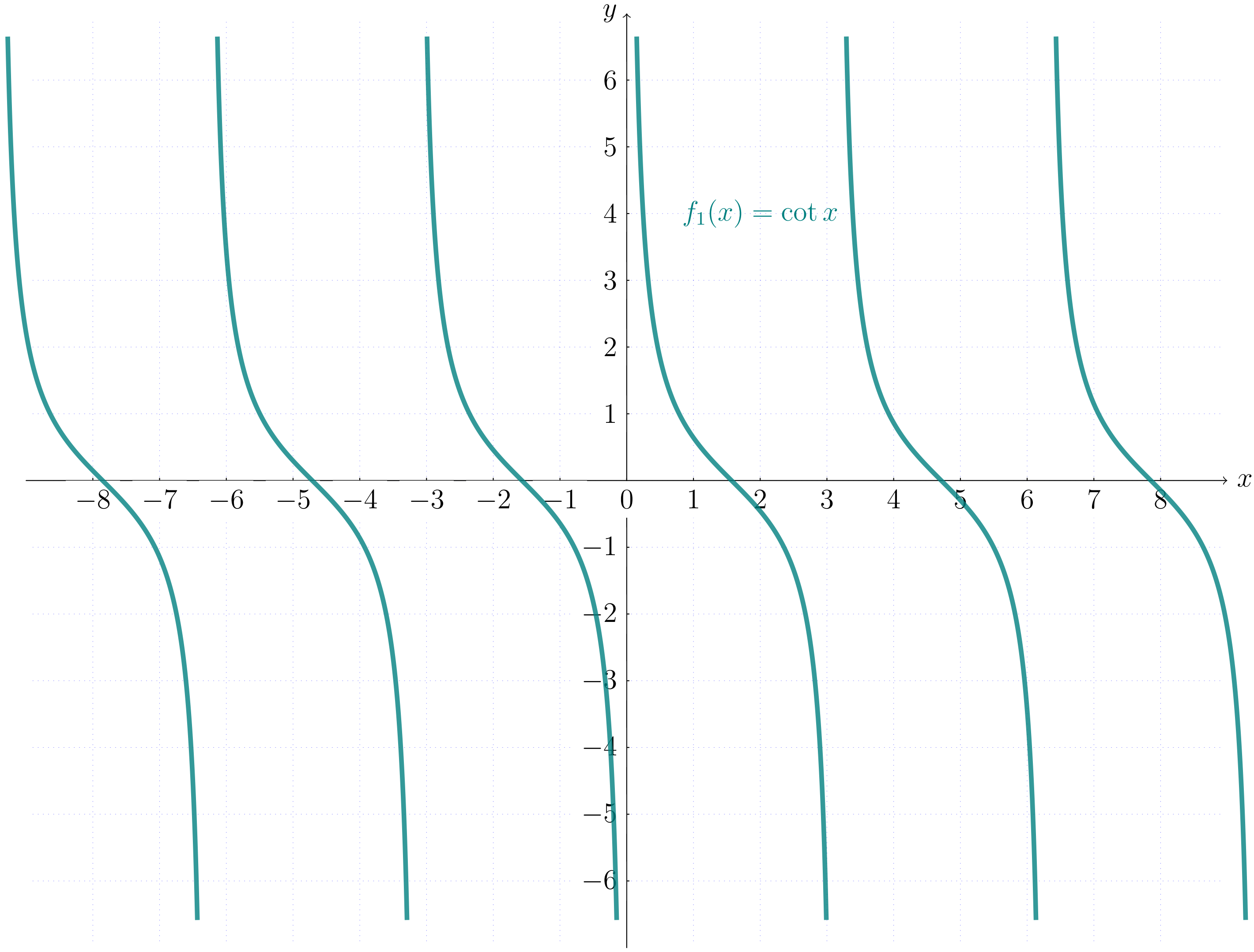
$$f(x) = \tan x = \text{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$$



- De tangensfunctie kan je niet berekenen voor $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}+\pi$, ... Dus kortweg als $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$. In deze punten zou de noemer immers nul worden; hier heeft de tangens verticale asymptoten.
- De tangensfunctie kan oneindig groot $(+\infty)$ en oneindig klein $(-\infty)$ worden.
- De periode is π.
- De tangensfunctie is een oneven functie want $\tan(-x) = -\tan(x)$

- Cotangensfunctie

$$f(x) = \cot x = \text{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$



- De cotangensfunctie kan je niet berekenen voor 0, π, $-\pi$, 2π … Dus kortweg als $x = k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$. In deze punten zou de noemer immers nul worden; hier heeft de cotangens verticale asymptoten.
- De cotangensfunctie kan oneindig groot $(+\infty)$ en oneindig klein $(-\infty)$ worden.
- De periode is π.
- De cotangensfunctie is een oneven functie want $\cot(-x) = -\cot(x)$

1.13 Cyclometrische functies

Relatie versus functie

Wanneer we van een (in radialen gemeten) hoek x weten dat $\sin x = \frac{1}{2}$, dan zijn er voor x oneindig veel mogelijkheden. De sinus is namelijk een periodieke functie, en bovendien wordt elke waarde (behalve 1 en -1) gedurende één periode twee maal aangenomen. Zo geldt $\sin x = \frac{1}{2}$ voor $x = \frac{\pi}{6}$ en voor $x = \frac{5\pi}{6}$, en bij elk van die hoeken kunnen we nog willekeurige gehele veelvouden van 2π optellen. Als je je nu zou afvragen welke x-waarde levert voor de sinusfunctie $\frac{1}{2}$ op, dan zou je moeten antwoorden met $x = \ldots, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + 2\pi, \ldots$ En dat is nu niet bepaald duidelijk.

We definiëren de cyclometrische functies (ook wel arcfuncties of boogfuncties) als de inverse functies van de goniometrische functies. Maar, zoals we net gezien hebben, is de inverse van de goniometrische functie in feite geen functie maar gewoon een *relatie*. In een relatie horen bij één waarde uit het domein (x-waarde) meerdere (tot zelfs oneindig) veel beelden (y-waarden). Om tot een functie te komen moeten we het domein van de oorspronkelijk functie beperken (hier was dit de sinus functie). Dit beperkt domein noemen we een hoofdwaarde-interval.

De cyclometrische functie wordt met een hoofdletter geschreven (bijv: Arcsin).

De cyclometrische relatie wordt met een kleine letter geschreven (bijv: arcsin).

De vergelijking $y = \arcsin(x)$ is geen functie, want met elke x-waarde komen oneindig veel y-waarden overeen.

Zo voldoet $y = ..., \frac{\pi}{6}\ (30°), \frac{5\pi}{6}\ (150°), \frac{13\pi}{6}\ (390°), ...$ aan $y = \arcsin(\frac{1}{2})$

Om tot een functie te komen zullen we het domein van $y = \sin(x)$ beperken. We kiezen als hoofdwaarde-interval voor $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. En we noteren nu de inverse functie van de sinusfunctie als $y = \mathrm{Arcsin}(x)$

Nu geldt: $\mathrm{Arcsin}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}\ (30°)$

Voor de cosinus, tangens en cotangens, waarbij soortgelijke problemen spelen, heeft men eveneens zulke voorkeursintervallen afgesproken: $[0, \pi]$ voor de cosinus en $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ voor de tangens. Aangezien $\tan(\frac{\pi}{2})$ oneindig is, is de tangens niet gedefiniëerd voor hoeken gelijk aan $\frac{\pi}{2}$ en $-\frac{\pi}{2}$, vandaar de notatie met open i.p.v. gesloten haakjes.

Opmerking Op je rekenmachine vind je de cyclometrische functies meestal terug onder de namen (toetsen) $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ en $\tan^{-1}$. Verwar dit niet met $\frac{1}{\sin x} = (\sin x)^{-1}$!!

In tekstboeken vind je ook de notatie $\mathrm{bgsin}(x)$ of $\mathrm{argsin}(x)$ voor $\arcsin(x)$ en $\mathrm{Bgsin}(x)$ of $\mathrm{Argsin}(x)$ voor $\mathrm{Arcsin}(x)$. Hierbij staan de letter “bg” voor boog en “arg” voor argument.

De cyclometrische functies

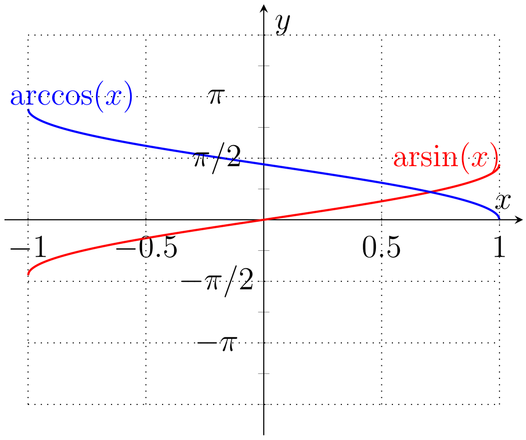
De grafieken van deze functies worden bekomen door spiegeling ten opzichte van de rechte $y = x$ van een gepaste beperking van de grafiek van de overeenkomstige goniometrische functies.

- De inverse van de sinusfunctie

  $y = \mathrm{Arcsin}(x)$ met $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

  De inverse van de sinusfunctie $y = \mathrm{Arcsin}(x)$ kan je enkel voor $x \in [-1, 1]$ berekenen.

  De inverse van de sinusfunctie ligt altijd tussen $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



- De inverse van de cosinusfunctie

  $y = \text{Arccos}(x)$ met $y \in [0, \pi]$

  De inverse van de cosinusfunctie $y = \text{Arccos}(x)$ kan je enkel voor $x \in [-1, 1]$ berekenen.

  De inverse van de cosinusfunctie ligt altijd tussen $y \in [0, \pi]$.

- De inverse van de tangensfunctie

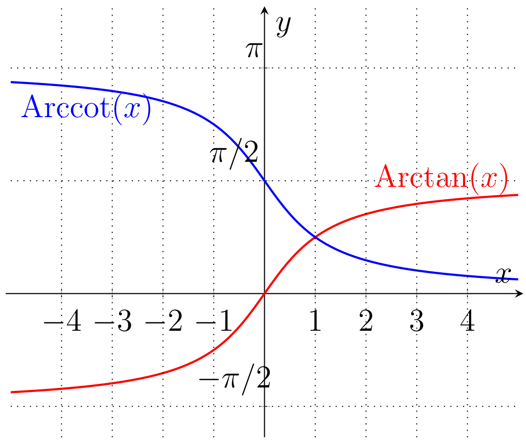
  $y = \text{Arctan}(x)$ met $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

  De inverse van de tangensfunctie $y = \text{Arctan}(x)$ kan je voor alle x berekenen.

  De inverse van de tangensfunctie ligt altijd tussen $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

  De grafiek toont twee horizontale asymptoten: de lijnen $y = -\frac{\pi}{2}$ en $y = \frac{\pi}{2}$.

  We noteren ook: $\lim_{x\to-\infty} \text{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}$ en $\lim_{x\to+\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$.



- De inverse van de cotangensfunctie

  $y = \text{Arccot}(x)$ met $y \in]0, \pi[$

  De inverse van de cotangensfunctie $y = \text{Arccot}(x)$ kan je voor alle x berekenen.

  De inverse van de cotangensfunctie ligt altijd tussen $y \in]0, \pi[$.

  De grafiek toont twee horizontale asymptoten: de lijnen $y = 0$ en $y = \pi$.

  We noteren ook: $\lim_{x\to-\infty} \text{Arccot}(x) = 0$ en $\lim_{x\to+\infty} \text{Arccot}(x) = \pi$.

Rekenregels

Past men op een cyclometrische functie de overeenkomstige goniometrische functie toe, dan bekomt men als resultaat het argument waarvan men is uitgegaan.

$$\begin{aligned}\sin(\mathrm{Arcsin}(x)) &= x\\ \cos(\mathrm{Arccos}(x)) &= x\\ \tan(\mathrm{Arctan}(x)) &= x\\ \cot(\mathrm{Arccot}(x)) &= x\end{aligned}$$

Past men in een goniometrische functie de overeenkomstige cyclometrische functie toe, dan bekomt men als resultaat *niet noodzakelijk* het argument waarvan men is uitgegaan, maar wel een waarde van het overeenkomstig hoofdwaarde-interval.

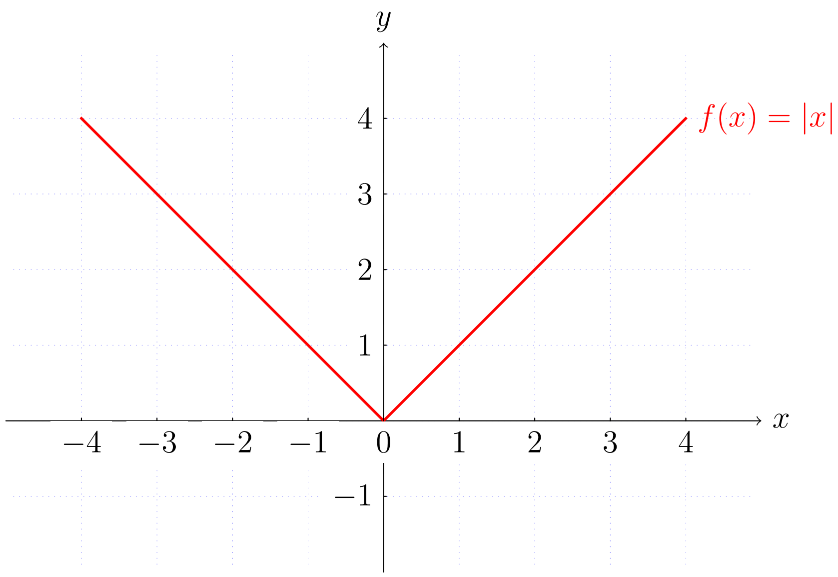
1.14 Bijzondere functies

De absolute waarde

In Module 1: Elementaire vaardigheden A heb je reeds de definitie gezien van de absolute waarde:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{als } x < 0 \\ x & \text{als } x \geq 0 \end{cases}$$

en de bijhorende grafiek:



We hebben er toen ook op gewezen dat je voorzichtig moet zijn met formules van het type $\sqrt{x^2}$.

Passen we dit toe op een functie die horizontaal verschoven is: $y = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$.

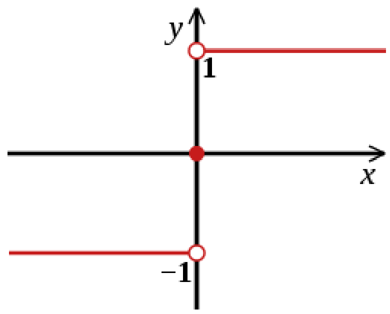
Als deze functie zou gegeven zijn als de veelterm $x^2 - 2x + 1$, dan loont het dus de moeite om dit te herschrijven als een volledig kwadraat: $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.

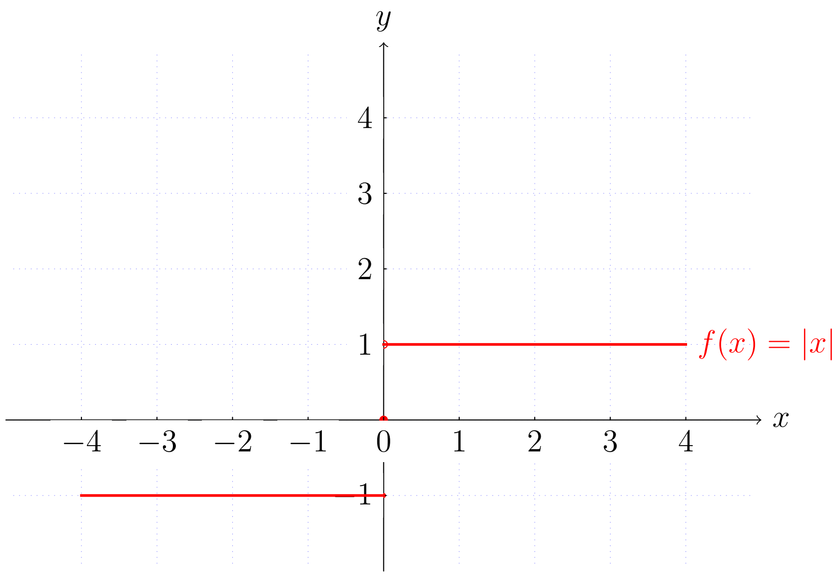
De signum functie

De sign of signum functie $\operatorname{sgn}(x)$ is een eenvoudige wiskundige functie, die eigenlijk het teken van het argument aangeeft:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{als } x < 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \\ +1 & \text{als } x > 0 \end{cases}$$

De grafiek van de signum functie:





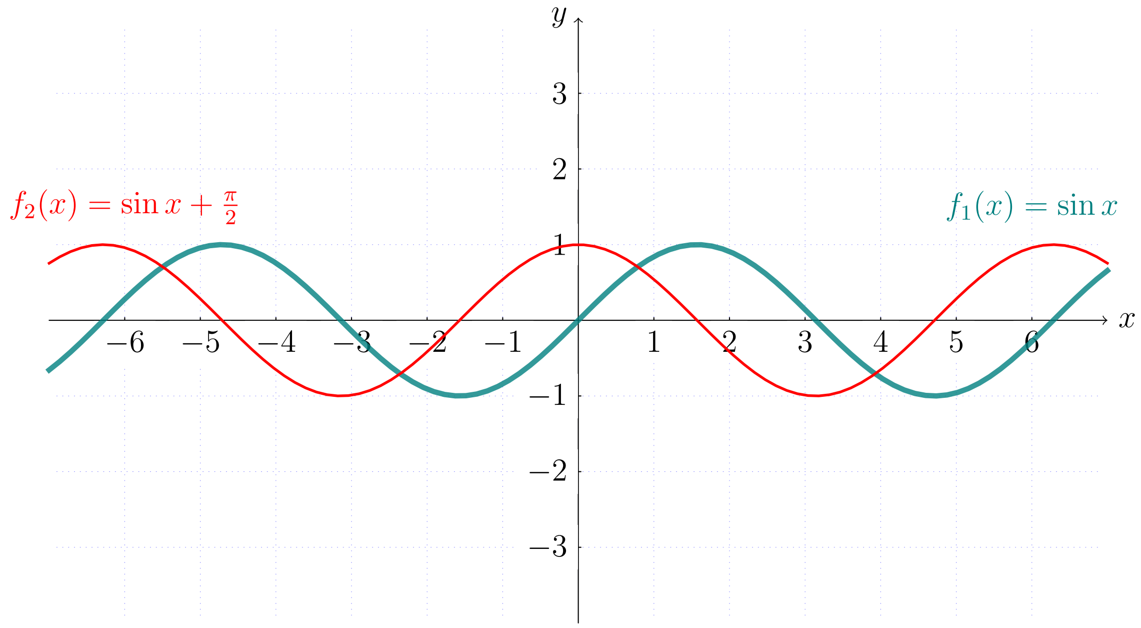
1.15 Verschuiven en herschalen

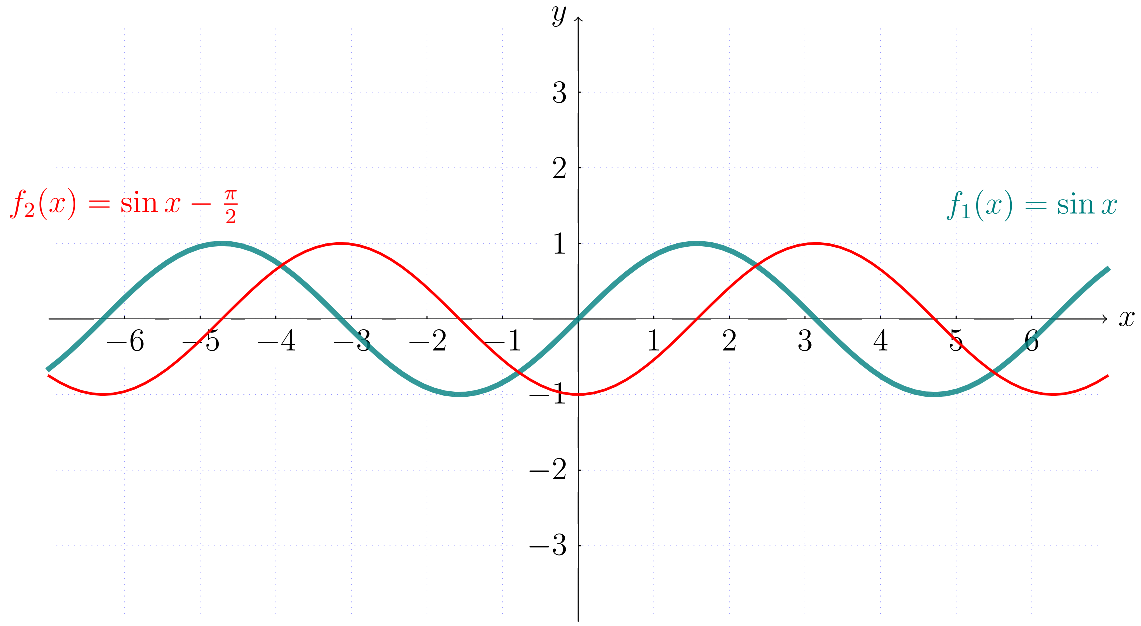
Verschuiven

Wanneer we de grafiek van $y = f(x)$ kennen, kunnen we met verschuivingen (of translaties) de grafiek van $y = f(x + a)$ en $y = f(x) + a$ daaruit afleiden (met $a \in \mathbb{R}$).

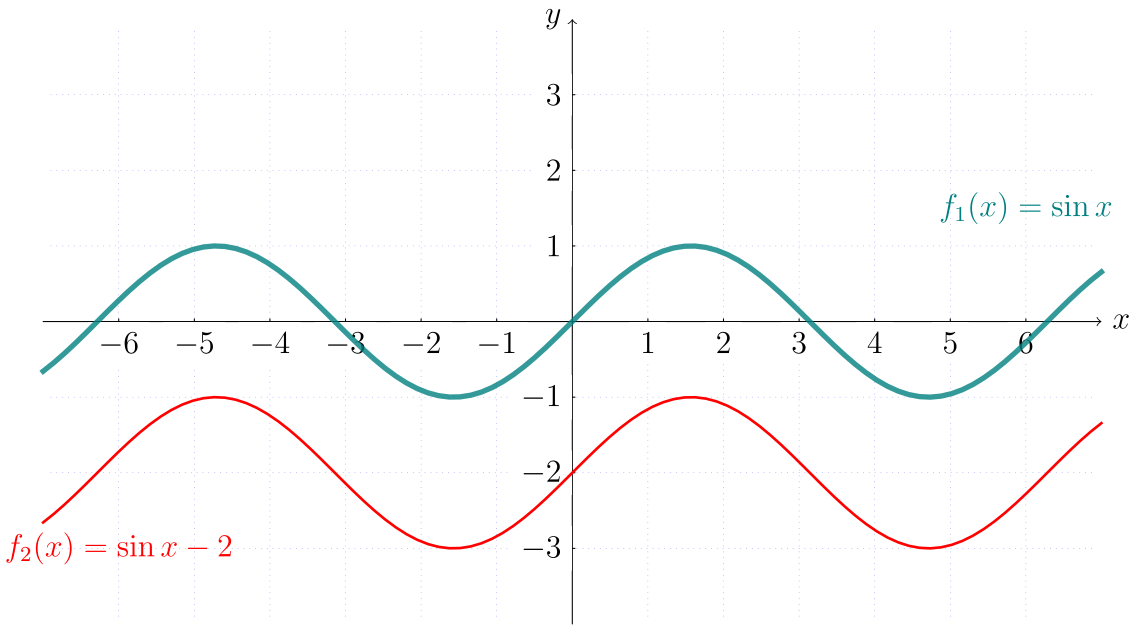
De grafiek van $y = f(x + a)$ wordt verkregen uit de grafiek van $y = f(x)$ door alle punten op de grafiek met een afstand van a eenheden horizontaal te verschuiven (naar links als $a > 0$, en naar rechts als $a < 0$).

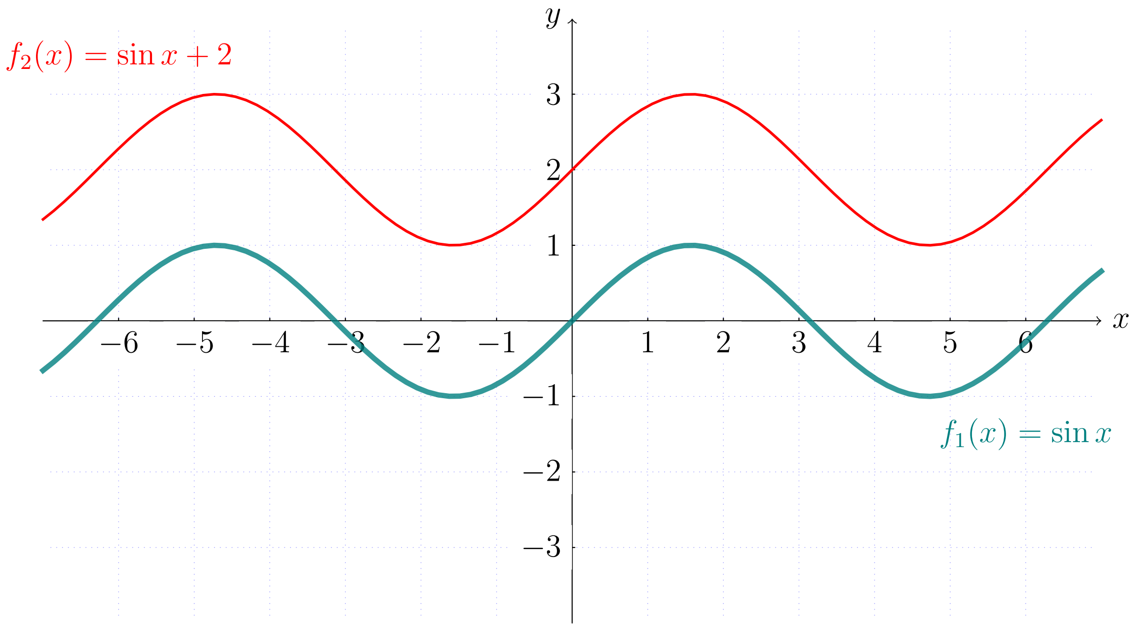
Het lijkt misschien een beetje tegenstrijdig dat de grafiek van een functie naar rechts verschuift als je bij het argument x een negatief getal optelt. Maar kijk eens naar de sinus functie $f_1(x) = \sin(x)$ in onderstaand voorbeeld. We weten dat de sinus functie onder andere een nulpunt heeft als het argument nul is, dus voor $x = 0$. Als we van x de waarde $\frac{\pi}{2}$ aftrekken, dan bekomen we terug datzelfde nulpunt als het argument nul is. Uit $x - \frac{\pi}{2} = 0$ volgt dat dit het geval zal zijn als $x = +\frac{\pi}{2}$. Met andere woorden, de functie $f_2(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ heeft dezelfde grafiek als de functie $f_1(x) = \sin(x)$ maar is $\frac{\pi}{2}$ eenheden naar rechts verschoven.





De grafiek van $y = f(x) + a$ wordt verkregen uit de grafiek van $y = f(x)$ door alle punten op de grafiek met een afstand van a eenheden verticaal te verschuiven (naar beneden als $a < 0$, en naar boven als $a > 0$).





Voorbeeld 1 hoe ziet de grafiek eruit van de functie $y = x^2 + 2x + 3$?

We herschrijven de functie als: $y = (x^2 + 2x + 1) + 2 = (x + 1)^2 + 2$

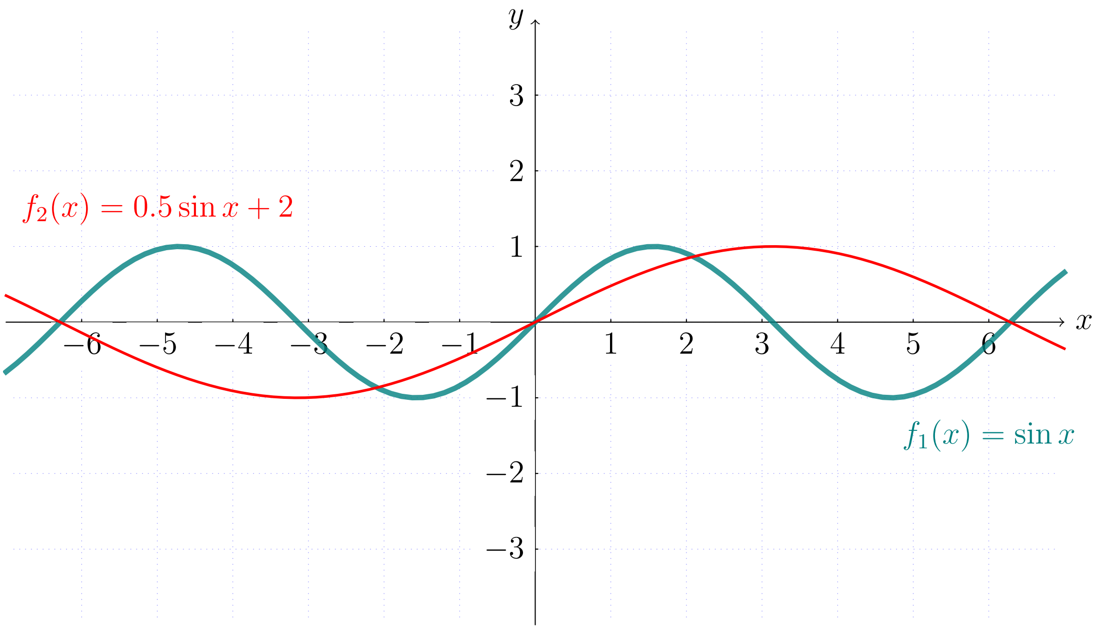
We herkennen hierin de basisfunctie $y = x^2$. De gegeven functie stelt dus een parabool voor die over 1 eenheid naar links en 2 eenheden naar boven is verschoven.

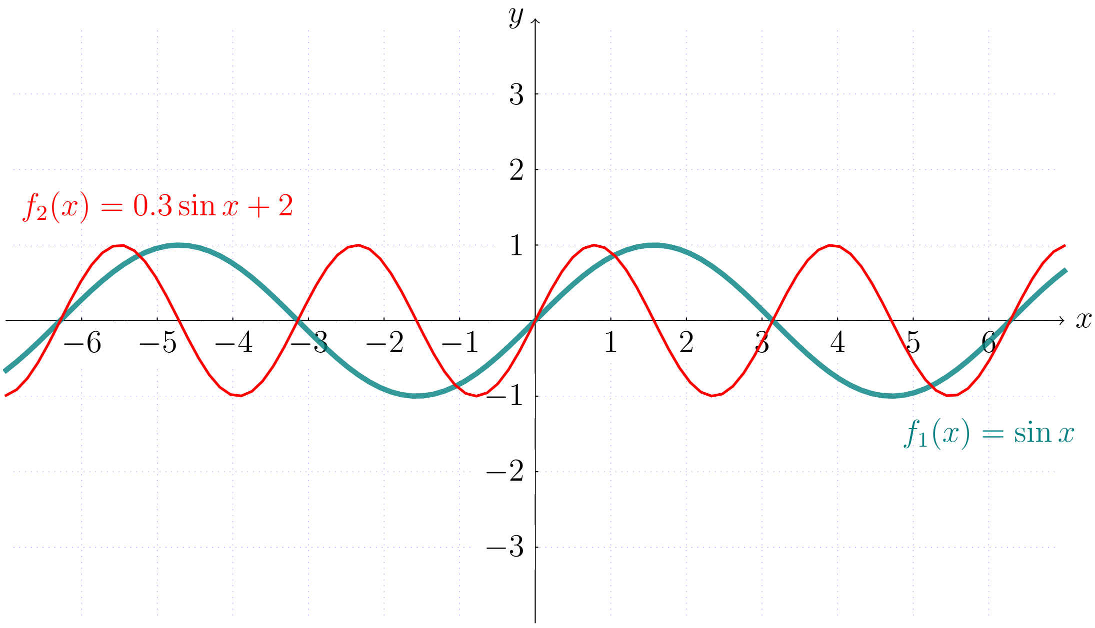
Herschalen

Wanneer we de grafiek van $y = f(x)$ kennen, kunnen we met herschalen (of vermenigvuldigen) de grafiek van $y = f(ax)$ en $y = af(x)$ daaruit afleiden (met $a \in \mathbb{R}$).

De grafiek van $y = f(ax)$ wordt verkregen uit de grafiek van $y = f(x)$ door, bij gelijkblijvende y-coördinaten, alle x-coördinaten van de punten op de grafiek met een factor $\frac{1}{a}$ te vermenigvuldigen (openrekken als $0 < a < 1$, en inkrimpen als $a > 1$).

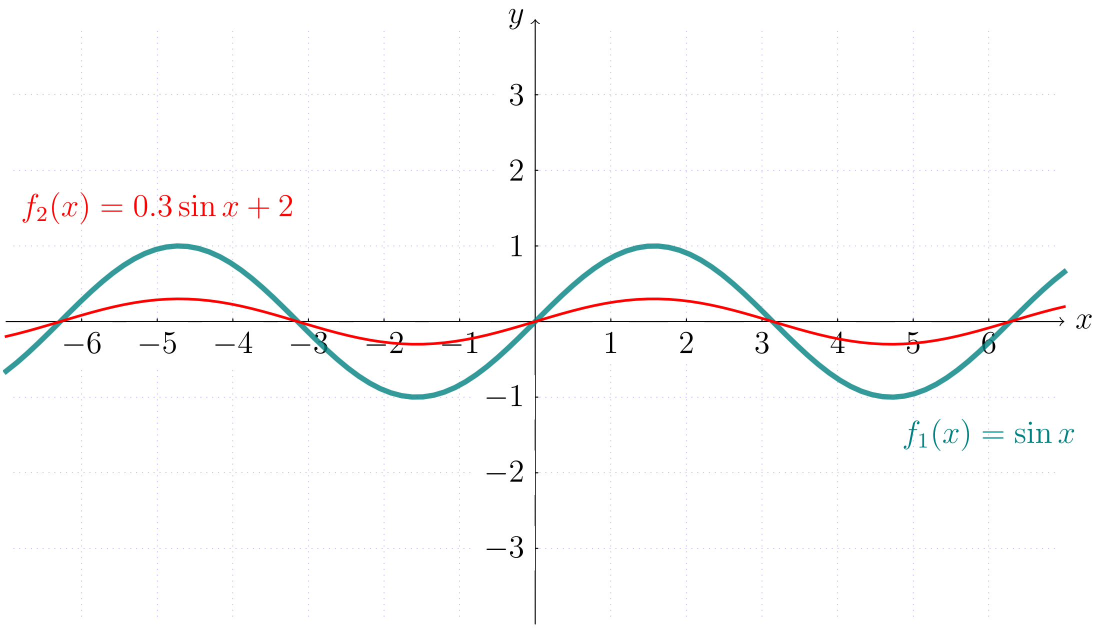
Voor $a = 2$ bijvoorbeeld krimpt de grafiek in elkaar. Het is alsof de functie dubbel zo snel verloopt.

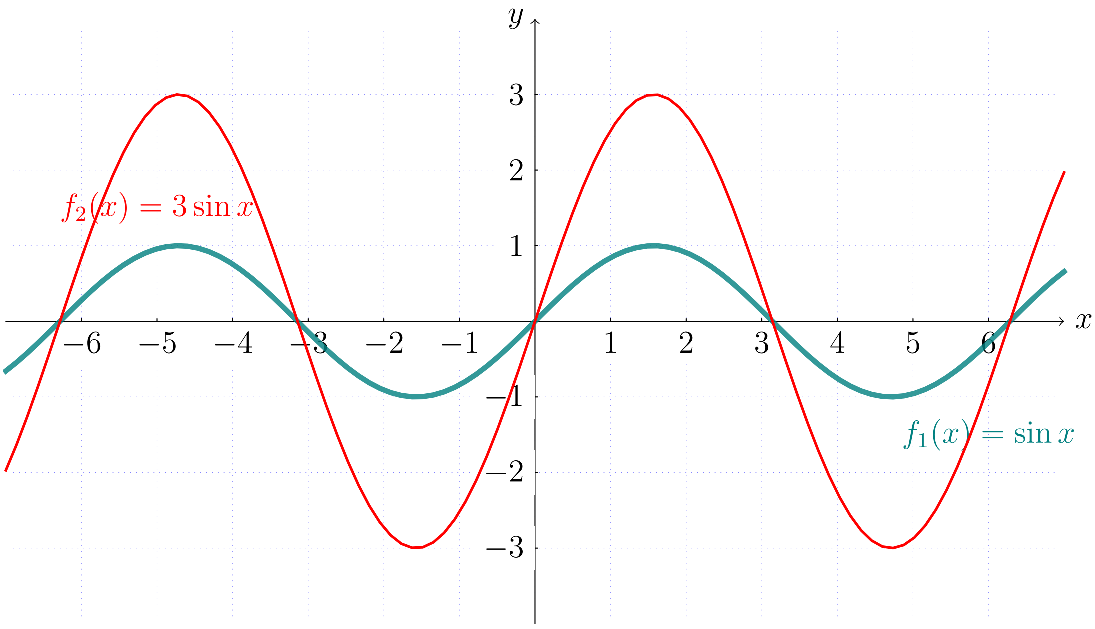




Een bijzonder geval treedt op als $a = -1$: de grafiek van $g(x) = f(-x)$ kan uit de grafiek van $f(x)$ worden verkregen door van alle punten op de grafiek de x-coördinaten met -1 te vermenigvuldigen, dus door de grafiek van $f(x)$ te spiegelen ten opzichte van de y-as. Op die manier kan je bijvoorbeeld heel eenvoudig afleiden dat de grafiek van de functie $g(x) = \sqrt{-x}$ bestaat en het spiegelbeeld is van $f(x) = \sqrt{x}$. Terwijl de functie $f(x)$ enkel gedefinieerd is voor alle positieve reële getallen, is de functie $g(x)$ dit enkel voor alle negatieve reële getallen.

De grafiek van $y = af(x)$ wordt verkregen uit de grafiek van $y = f(x)$ door, bij gelijkblijvende x-coördinaten, alle y-coördinaten van de punten op de grafiek met een factor a te vermenigvuldigen (inkrimpen als $0 < a < 1$, en openrekken als $a > 1$).



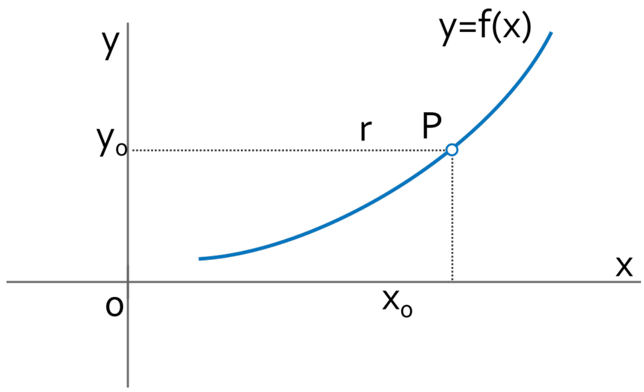


1.16 Coördinatenstelsels

Cartesisch of rechthoekig coördinatenstelsel

De vergelijking $y = f(x)$ voegt aan iedere x-waarde éénduidig een y-waarde toe. Met x_0 komt bijvoorbeeld y_0 overeen volgens $y_0 = f(x_0)$. Het getallenpaar $(x_0\,,\,y_0)$ kunnen we als punt P in een rechthoekig of cartesisch coördinatenstelsel tekenen. De twee coördinaat-assen staan loodrecht op elkaar, de horizontale as noemen we de x-as en de verticale as de y-as. Het snijpunt is de oorsprong O.

Voor ieder getallenpaar krijgen we precies één punt. De verzameling van alle punten $(x\,,\,y = f(x))$ vormt de grafiek of kromme van de functie. De grafiek laat het verloop van de functie in een figuur zien.



We zeggen dat:	x_0, y_0	zijn de rechthoekige of cartesische coördinaten
	x_0	is de abscis van het punt P
	y_0	is de ordinaat van het punt P

Het cartesisch coördinatenstelsel is de gebruikelijke manier om een punt in een vlak aan te duiden. Omdat in dit platte vlak twee coördinaten nodig zijn om een punt vast te leggen, zeggen we dat een vlak tweedimensionaal is. In feite is 'de dimensie van een ruimte' het aantal coördinaten dat nodig is om de plaats van alle punten in die ruimte precies te kunnen bepalen. Zo bestaat de klassieke 3D-ruimte uit 3 dimensies en zijn er dus 3 coördinaten (x, y, z) nodig om de plaats van elk punt éénduidig te beschrijven.

Parametervoorstelling van een functie

Het is bij de wiskundige beschrijving van een bewegend lichaam vaak handig om de positie van het lichaam weer te geven door cartesische coördinaten die zelf een functie van de tijd zijn. We noteren dan:

$$x = x(t)\ ,\ y = y(t) \quad \text{met } t_1 \leq t \leq t_2$$

We noemen een dergelijke voorstelling met een hulpvariabele t de parametervoorstelling van een functie. In de natuurwetenschappen en de techniek betekent de parameter t meestal de tijd of een hoek.

We krijgen voor iedere waarde van t uit het interval $t_1 \leq t \leq t_2$ precies één punt van de kromme.

Voorbeeld 1 de horizontale worp

een lichaam wordt van een bepaalde hoogte horizontaal met een constante beginsnelheid v_0 weggeworpen. T.g.v. de zwaartekracht verloopt de beweging vervolgens als een parabool (parabolische baan). De parametervergelijkingen van deze beweging zijn:

$$x = v_0 t\ ,\ y = \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{met } t \geq 0$$

Door het elimineren van de parameter vinden we de expliciete vergelijking van de grafiek (parabool). Dit doen we door t uit de vergelijking van x te halen en te substitueren in de vergelijking van y: uit $x = v_0 t$ volgt dat $t = \frac{x}{v_0}$ zodat

$$y = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = \frac{g}{2v_0^2}x$$

Voorbeeld 2 de cirkel

Een veel gebruikte parametrisatie voor de cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = R^2$ is de volgende:

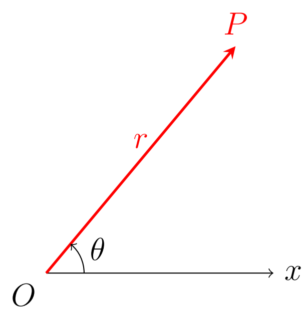
$$x = R\cos(t)\ ,\ y = R\sin(t) \quad \text{met } 0 \leq t < 2\pi$$

Opmerking

- de parameter t stelt nu een hoek voor (uitgedrukt in radialen). Omdat $t = 0$ en $t = 2\pi$ hetzelfde punt voorstellen, zal men meestal 2π niet opnemen in het interval. Vandaar het $<$ en niet nog eens het $\leq$-symbool.
- om uit de parametervergelijkingen de cartesische vergelijking voor de cirkel te bekomen moeten we de parameter t elimineren. Daarvoor gebruiken we een trucje. We weten dat voor elke hoek α de goniometrische grondformule geldt: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Substitueren we nu $\cos(t) = \frac{x}{R}$ en $\sin(t) = \frac{y}{R}$ in de grondformule dan bekomen we inderdaad $x^2 + y^2 = R^2$.

Poolcoördinaten

De poolcoördinaten (r, θ) van een punt P in een vlak zijn de afstandscoördinaat r en de hoekcoördinaat θ. We noemen de afstand r de radius of de voerstraal en de hoek θ het argument.



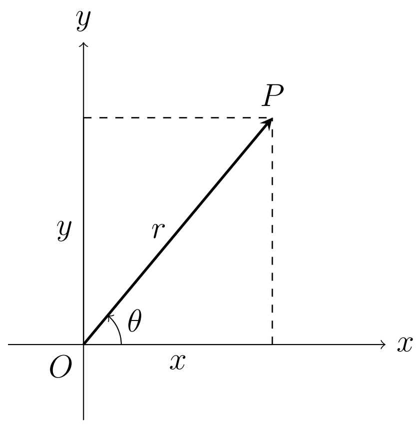
Enkele opmerkingen:

- we definiëren de voerstraal r steeds positief, dus $r \geq 0$.

- we definiëren de hoek θ positief als de pijl van de positieve x-as naar de plaatsvector van P tegen de klok in draait (andersom is de hoek negatief). Een hoek θ is éénduidig bepaald op veelvouden van 360° (of veelvouden van 2π in radialen) na. Meestal wordt de hoek θ gegeven in het interval $0° \leq \theta \leq 360°$ of $0 \leq \theta \leq 2\pi$. I.p.v. de Griekse letter theta (θ) wordt ook vaak de letter phi (φ) als hoekaanduiding gebruikt.
- de x- en y-as maken geen deel uit van dit coördinatenstelsel. We tekenen echter wel vaak een horizontale en verticale hulplijn om het uitzetten van de hoeken te vergemakkelijken.
- het poolcoördinatenstelsel is een kromlijnig coördinatenstelsel: de coördinaatlijnen zijn concentrische cirkels met de oorsprong O als middelpunt en langs stralen die radiaal vanuit O lopen. We noemen de oorsprong ook vaak 'de pool' en de x-as de 'poolas'.
- de pool (dus de oorsprong O) heeft als voerstraal $r = 0$ terwijl de hoek θ onbepaald is.
- poolcoördinaten worden ook gebruikt bij het voorstellen van en het werken met complexe getallen.

Soms is het handig of noodzakelijk om over te stappen van cartesische coördinaten naar poolcoördinaten of omgekeerd. Daarvoor gebruiken we het volgende stel transformatievergelijkingen:

cartesische coördinaten		poolcoördinaten
gegeven P met (x, y)	$\rightarrow$	dan is $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \end{cases}$
dan is $\begin{cases} x = r \cdot \cos\theta \\ y = r \cdot \sin\theta \end{cases}$	$\leftarrow$	gegeven P met (r, θ)



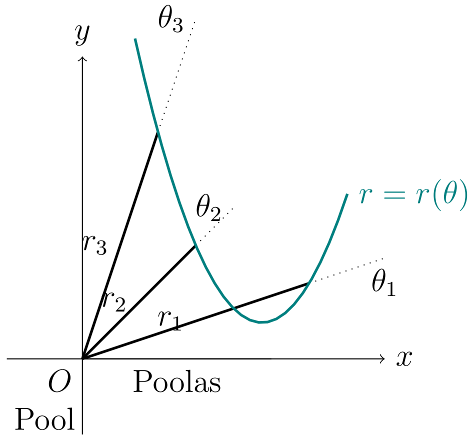
Opmerking let op bij het berekenen van de hoek θ. Je rekenmachine zal als resultaat van de Arctan $\left(\frac{y}{x}\right)$ een hoek geven in het 1ste of 4de kwadrant. Je moet dus zelf, bij het resultaat van je rekenmachine nog 180° of π optellen als het punt P in het 2de of 3de kwadrant ligt.

De voorstelling van een functie in poolcoördinaten

Een functie (kromme) in poolcoördinaten wordt beschreven door een vergelijking van de vorm: $r = r(\theta)$

We stellen een functiewaardentabel op voordat we de grafiek van de functie tekenen. Voor verschillende waarden θ_1 , θ_2 , θ_3 , ... berekenen we de bijhorende voerstralen $r_1 = r(\theta_1)$, ... Daarna tekenen we de punten met coördinaten (r_1, θ_1) , ... en verbinden deze d.m.v. een vloeiende lijn.

θ	$r = r(\theta)$
θ_1	$r_1 = r(\theta_1)$
θ_2	$r_2 = r(\theta_2)$
$\vdots$	$\vdots$

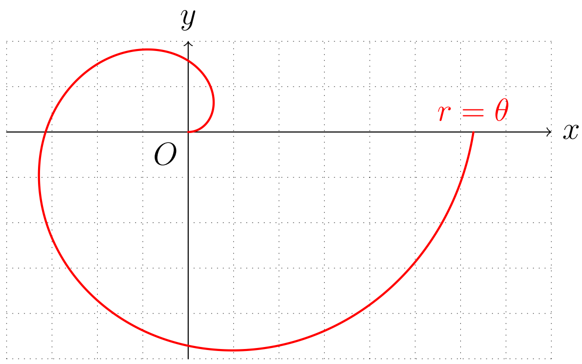


Voorbeeld 3 de spiraal van Archimedes

Schets de kromme met vergelijking $r = \theta$ waarbij $0 \leq \theta \leq 2\pi$

We stellen een functiewaardentabel op (tip: kies niet te veel, maar ook niet te weinig hoeken; de intervallen tussen de hoeken hoeft niet noodzakelijk overal even groot te zijn).

θ	$r = r(\theta) = \theta$
0	0
$\frac{\pi}{4}$	0,785
$\frac{\pi}{2}$	1,571
$3\frac{\pi}{4}$	2,356
π	3,142
$3\frac{\pi}{2}$	4,712
2π	6,283

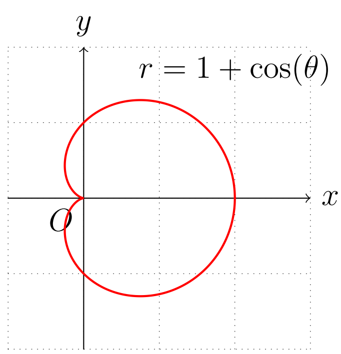


Voorbeeld 4 de cardioïde

Schets de kromme met vergelijking $r = 1 + \cos\theta$ waarbij $0° \leq \theta \leq 360°$

We stellen een functiewaardentabel op. Wegens de symmetrie t.o.v. de x-as berekenen we slechts de radius-waarden tussen 0° en 180°.

θ	$r = r(\theta)$
0°	2
30°	1,866
60°	1,5
90°	1
120°	0,5
150°	0,134
180°	0



Voorbeeld 5 de cirkel

Schets de kromme met vergelijking $r = 2$ waarbij $0° \leq \theta < 360°$

Bij elke hoek θ hoort dezelfde voerstraal, namelijk $r = 2$. Het heeft dus weinig zin om een functiewaardentabel op te stellen.

Opmerking: de cartesische vergelijking van een cirkel heeft een duidelijk ingewikkeldere notatie: $x^2 + y^2 = 2^2$. Schrijven we y expliciet dan zien we meteen ook dat dit eigenlijk geen functie is (met elke x-waarde komen immers 2 y-waarden overeen): $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

2 Limieten

2.1 Het begrip limiet

Bij het bestuderen van het gedrag van een functie stuiten we soms op het probleem dat de functie in een bepaald punt niet gedefiniëerd is. Dit kan bijvoorbeeld optreden als het voorschrift van de functie een breuk is waarvan de noemer nul wordt in dat punt. Toch willen we vaak weten hoe de grafiek van die functie in de buurt van zo'n punt er uitziet. Ook zijn we geïnteresseerd in het gedrag van een functie als het argument zeer groot of zeer sterk negatieve waarden aanneemt.

Het begrip limiet is dus een belangrijke bouwsteen van de analyse. De begrippen continuïteit, onbepaalde integraal en bepaalde integraal steunen allen op het limietbegrip. Ook meetkundig is het limietbegrip van belang: men heeft het nodig bij de definitie van afgeleiden en asymptoten.

De verzameling $\bar{\mathbb{R}}$

Gegeven is de verzameling van de reële getallen $\mathbb{R}$. Stel, we nemen als deelverzameling het halfopen interval $[5, 10[$ van $\mathbb{R}$. Er bestaat dan bijvoorbeeld een getal uit die verzameling dat kleiner of gelijk is aan alle elementen uit die deelverzameling. We noteren dit als $\forall x \in [5, 10[$ waarvoor geldt dat $x \geq 5$. In dit geval is het gezochte getal 5. Maar dit is niet altijd zo eenvoudig.

Nemen we de deelverzameling $\{...3, 5, 7, 9\}$ van $\mathbb{R}$. Welk getal kunnen we vinden dat kleiner is dan alle elementen uit deze deelverzameling? Het getal 1? Of -1? Of -100? Het antwoord wordt gevonden door de verzameling uit te breiden met de elementen plus oneindig ($+\infty$) en min oneindig ($-\infty$).

We zeggen nu dat "streep R streep" gelijk is aan: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ waarbij $\forall x \in \mathbb{R}$ geldt dat $-\infty < x < +\infty$.

Merk op dat de elementen $-\infty$ en $+\infty$ zelf geen reële getallen zijn. Let ook op met het symbool ∞: afhankelijk van de context kan dit "$+\infty$"betekenen, maar ook "$+\infty$ of $-\infty$". In dit laatste geval schrijven we soms $\pm\infty$.

Rekenen met ∞

Alhoewel $-\infty$ en $+\infty$ geen reële getallen zijn (maar wel symbolen), kunnen we er toch (mits enige voorzichtigheid) mee rekenen.

vermenigvuldiging			optelling	
$a \cdot (+\infty) = +\infty$	als	$a > 0$	$\pm\infty + a = \pm\infty$	met $a \in \mathbb{R}$
$a \cdot (+\infty) = -\infty$	als	$a < 0$		
$a \cdot (-\infty) = -\infty$	als	$a > 0$		
$a \cdot (-\infty) = +\infty$	als	$a < 0$		
$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$			$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	
$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$			$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$	
$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$				

$\frac{1}{\infty} = 0$ maar let op: $\frac{1}{0} = \infty$ en dus onbepaald (want ∞ is geen reëel getal).

Soms maken we nog onderscheid tussen een heel klein positief of heel klein negatief getal: $\frac{1}{0^+} = +\infty$ en $\frac{1}{0^-} = -\infty$

De volgende vormen zijn ook onbepaald: $\frac{0}{0}$ en $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $+\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞.

Hoezo, 1^∞ is onbepaald? Dit is toch gewoon $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots$ en dus gelijk aan 1!? Het antwoord hierop vind je op het einde van dit hoofdstukje.

Merk op dat de vormen $\frac{0}{0}$ en $\frac{\infty}{\infty}$ infeite hetzelfde betekenen, immers $\frac{a}{b}$ kan je ook schrijven als $\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}}$.

2.2 Intuïtieve uitleg limieten

Zie filmpje MOOC.

2.3 Limieten en continuïteit

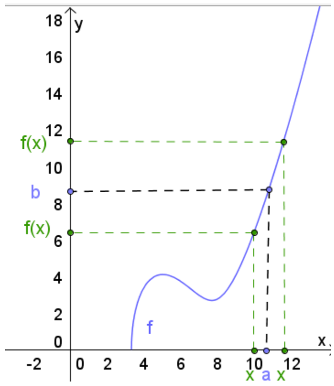
Het limietbegrip

Als x nadert tot a, dan nadert $f(x)$ tot b.

We zeggen wiskundig: de limiet van $f(x)$ voor x gaande naar a is b.

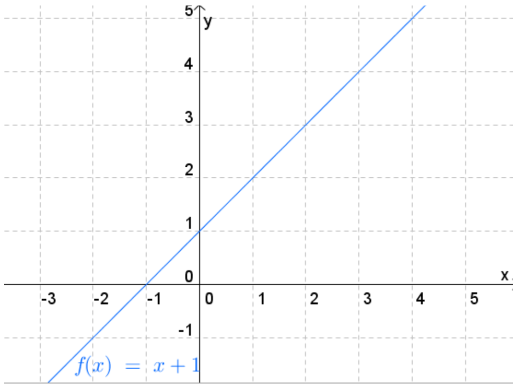
We noteren dit als: $\lim_{x\to a} f(x) = b$

Grafisch:



Voorbeeld 1 de functie is continu in a

$f(x) = x + 1$



We merken meteen op dat $dom\, f = \mathbb{R}$ (m.a.w. we mogen voor x elk reëel getal kiezen).

Als we x voldoende dicht laten naderen tot bijvoorbeeld 1, dan nadert $f(x)$ tot 2 (zie grafiek).

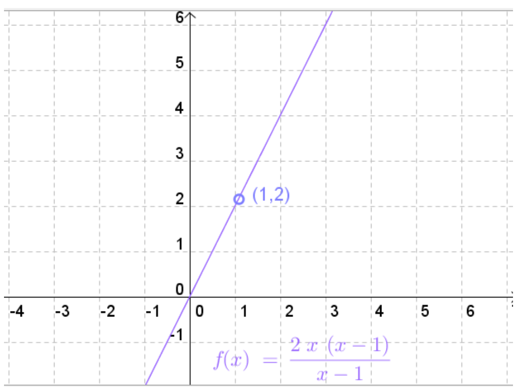
We noteren dit als: $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$ en dit is hier ook $= f(1)$.

Omdat $\lim_{x\to 1}(x+1) = f(1)$ zeggen we dat deze functie **continu** is in het punt $x = 1$.

Voorbeeld 2 de functie is discontinu in a

$f(x) = \frac{2x^2-2x}{x-1} = \frac{2x(x-1)}{x-1}$

De noemer mag niet nul worden. Dus het domein van de functie is: $domf = \mathbb{R} \setminus \{1\}$



Als we nu terug x voldoende dicht laten naderen tot 1, dan nadert $f(x)$ terug tot 2 (zie grafiek). We noteren dit als: $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{2x(x-1)}{x-1} = 2$ maar dit is $\neq f(1)$ want 1 behoort niet tot het domein van deze functie. En toch bestaat de limiet voor $x \to 1$.

Hier is $\lim_{x\to 1} \frac{2x(x-1)}{x-1} \neq f(1)$. De limiet is dus niet gelijk aan de functiewaarde; we zeggen dat de functie **niet-continu** of **discontinu** is in het punt $x = 1$.

Continu versus discontinu

Een functie f is continu in een **punt** $x = a$ als: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Het is belangrijk dat je inziet dat voor de limietberekenaar de functiewaarde niet belangrijk is, immers je gaat naar het punt a zonder het punt a zelf ooit te bereiken. Dit is het principe van het limietbegrip. Pas als je gaat kijken naar continuïteit moet je ook rekening houden met (het al dan niet bestaan van) de functiewaarde.

Het is je waarschijnlijk al opgevallen dat we nog niks gezegd hebben over "hoe je naar het punt a kan gaan". Dit kan immers langs de linkerkant van a, of langs de rechterkant van a gebeuren (we spreken van respectievelijk de linker- en de rechterlimiet).

Notatie We noteren:

linkerlimiet	$\lim_{\substack{x\to a \\ <}} f(x)$
rechterlimiet	$\lim_{\substack{x\to a \\ >}} f(x)$

Onthoud Twee belangrijke besluiten:

- als de linkerlimiet en de rechterlimiet beiden bestaan en gelijk zijn aan elkaar, dan bestaat **de** limiet $\lim_{x\to a} f(x)$. De grafiek loopt van beide kanten naar dat punt $(a, f(a))$ toe.
- als bovendien de limiet ook nog gelijk is aan $f(a)$ dan zit daar geen discontinuïteit (geen gaatje), dus de grafiek bestaat in dat punt. Dit betekent dat de limiet gelijk is aan de functiewaarde en dat de functie continu is in het punt a.

Vereenvoudigd zegt men soms ook dat een functie continu is als je de grafiek ervan kunt tekenen zonder je potlood van het papier te halen.

Tenslotte zeggen we dat een functie f continu is over het gesloten interval $[a, b]$ indien:

- f rechts continu is in a (m.a.w. $\lim_{\substack{x\to a \\ >}} f(x) = f(a)$)
- f links continu is in b (m.a.w. $\lim_{\substack{x\to b \\ <}} f(x) = f(b)$)
- $\forall x \in]a, b[$ geldt dat f continu is in x (m.a.w. $f(x)$ is continu in elk punt binnen het interval).

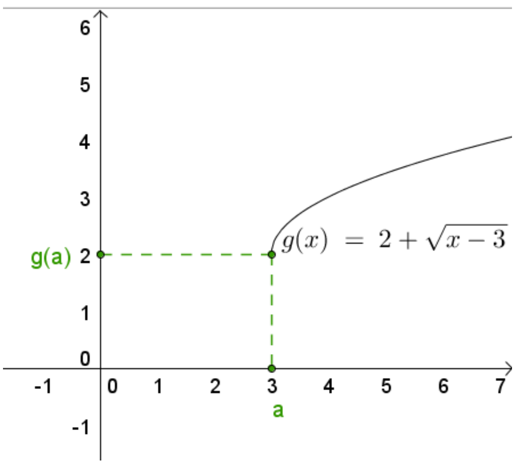
Je ziet dat een functie f discontinu kan zijn in een punt a omdat:

- ze in dat punt niet gedefinieerd is: $f(a)$ bestaat niet

- ze in dat punt een sprong maakt: $\lim_{\substack{x\to a\\<}} f(x) \neq \lim_{\substack{x\to a\\>}} f(x)$
- haar definitie in dat punt niet overeenkomt met de limiet: $\lim_{x\to a} f(x) = b \neq f(a)$
- haar waarde onbeperkt toeneemt naarmate men het punt nadert: $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$

2.4 Voorbeelden

Voorbeeld 1



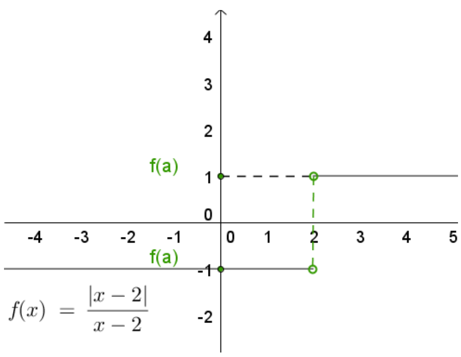
Bestaan de limieten als $x = 3$?

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{\substack{x\to 3\\<}} g(x) \text{ bestaat niet want dom } g = [3, +\infty[\\ \lim_{\substack{x\to 3\\>}} g(x) = 2\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 3} g(x) \text{bestaat niet want } \lim_{\substack{x\to 3\\<}} g(x) \neq \lim_{\substack{x\to 3\\>}} g(x).$$

Is de functie continu in $x = 3$?

$$\left.\begin{array}{l} g \text{ is niet linkscontinu in } 3\\ g \text{ is rechtscontinu in } 3\end{array}\right\} \Rightarrow g \text{ is discontinu in } 3.$$

Voorbeeld 2



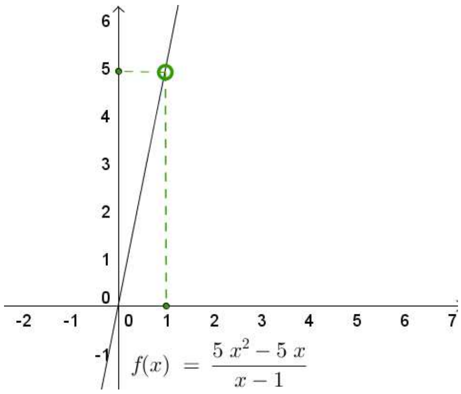
Bestaan de limieten in $x = 2$?

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = -1 \\ \lim_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = +1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) \text{bestaat niet want } \lim_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x).$$

Is de functie continu in $x = 2$?

$$\left.\begin{array}{l} g \text{ is niet linkscontinu in } 2 \\ g \text{ is niet rechtscontinu in } 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ is discontinu in } 2.$$

Voorbeeld 3



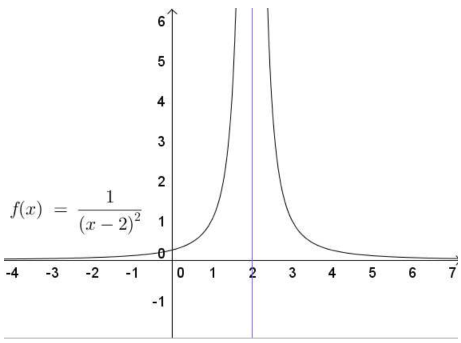
Bestaan de limieten in $x = 1$?

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = 5 \\ \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) \text{ bestaat en is } 5$$

Is de functie continu in $x = 1$?

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ is niet linkscontinu in } 1 \\ f \text{ is niet rechtscontinu in } 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ is discontinu in } 1.$$

Voorbeeld 4



Bestaan de limieten in $x = 2$?

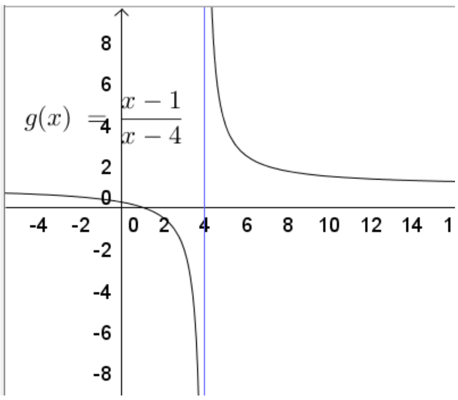
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = +\infty \\ \lim_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = +\infty.$$

Is de functie continu in $x = 2$?

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ is niet linkscontinu in } 2 \\ f \text{ is niet rechtscontinu in } 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ is discontinu in } 2.$$

We merken nog op dat $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ en $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Hier spreken we over een horizontale asymptoot met vergelijking $y = 0$.

Voorbeeld 5



Bestaan de limieten in $x = 4$?

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{\substack{x\to 4 \\ <}} g(x) = -\infty \\ \lim_{\substack{x\to 4 \\ >}} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 4} g(x) \text{ bestaat niet.}$$

Is de functie continu in $x = 4$?

$$\left.\begin{array}{l} g \text{ is niet linkscontinu in } 4 \\ g \text{ is niet rechtscontinu in } 4 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ is discontinu in } 4.$$

Er is een verticale asymptoot met vergelijking $x = 4$. Merk verder op dat $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$ en $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$. Er is dus ook een horizontale asymptoot met vergelijking $y = 1$.

2.5 Limieten - voorbeeld

Zie filmpje MOOC.

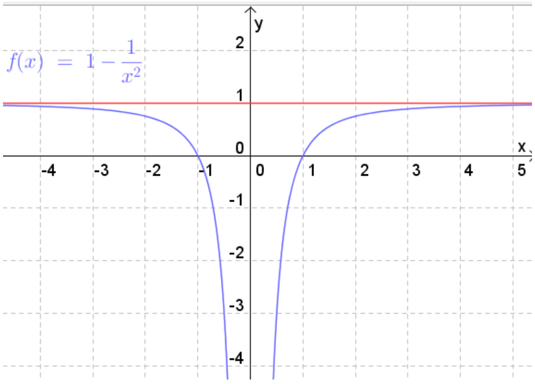
2.6 Limieten van functies (en asymptoten)

Limiet bij onbeperkte toename van het argument

We stellen ons de vraag wat $f(x)$ wordt als we x naar (plus of min) oneindig laten gaan.

Laten we eerst naar een voorbeeld kijken.

Voorbeeld 1 Stel $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$



We stellen vast dat naarmate x toeneemt, $f(x)$ waarden aanneemt die onbeperkt dicht bij 1 komen te liggen. Hetzelfde gebeurt wanneer x negatief is, maar in absolute waarde onbeperkt toeneemt. We kunnen dit noteren (en berekenen) a.d.h.v. de limietnotatie: $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$ en $\lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$

Algemeen:

De afstand tussen de waarden van $f(x)$ en b wordt willekeurig klein, als het argument x maar voldoende groot wordt (argument neemt onbeperkt toe of af).

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists m > 0 : \ x > m \ \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists m > 0 : \ x < -m \ \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

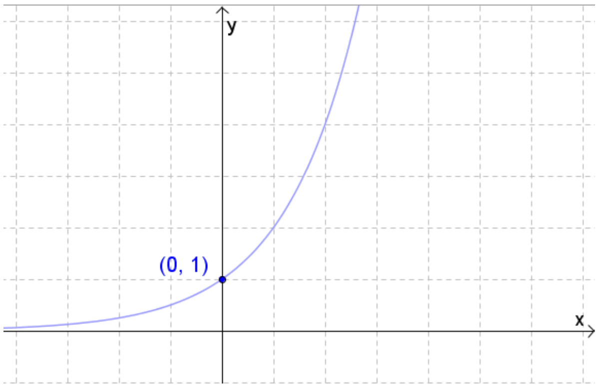
Dit houdt in dat men eerst een willekeurig positief getal ε kiest en in functie van deze gekozen ε, vastlegt hoe groot dan m moet zijn. Dit is uitvoerbaar, hoe klein men ε ook kiest. We kunnen ook zeggen: je kan $f(x)$ oneindig dicht bij b laten komen, mits je maar een heel grote waarde voor x kiest.

De horizontale rechte met vergelijking $y = b$ noemen we de **horizontale asymptoot** van de functie $f(x)$. In ons voorbeeld met de functie $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ is er één horizontale asymptoot met als vergelijking $y = 1$. Merk op dat de functie $f(x)$ deze horizontale rechte (de asymptoot) zowel voor $x \to -\infty$ als voor $x \to +\infty$ langs de onderkant benadert.

Het is ook mogelijk dat de waarden van $f(x)$ onbeperkt toenemen, naarmate x toeneemt, denk maar aan de veeltermfunctie $f(x) = x^2 + 1$ of de exponentiële functie $f(x) = 3^x$.

We stellen vast dat naarmate x toeneemt, ook $f(x)$ onbeperkt toeneemt: $\lim_{x \to +\infty} 3^x = +\infty$.

Merk op dat de limiet van de functie 3^x voor x gaande naar $-\infty$ gewoon naar 0 gaat. Dus de rechte met vergelijking $y = 0$ is hier dan een horizontale asymptoot.



Algemeen:

De waarden van $f(x)$ worden groter dan om het even welk (groot) reëel getal, als men x maar voldoende groot neemt (argument neemt onbeperkt toe of af).

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall n > 0, \exists m > 0 : \; x > m \; \Rightarrow f(x) > n$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall n > 0, \exists m > 0 : \; x > m \; \Rightarrow f(x) < -n$$

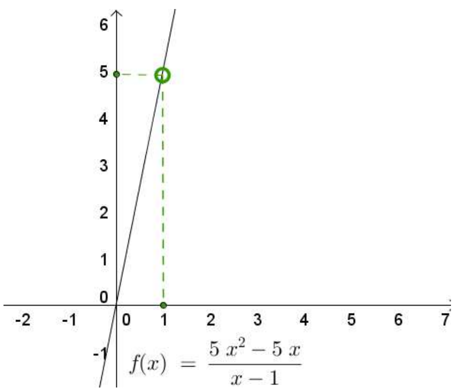
Hierbij legt men eerst vast hoe groot men wil dat $f(x)$ wordt; dit is het getal n. In functie van die gekozen n bepaalt men de benodigde m .

(gelijkaardige redenering en formuleringen voor $x \to -\infty$).

Limiet van een functie wanneer het argument onbeperkt nadert tot een vaste waarde a

Laten we nu even kijken naar het geval waarbij we x naar een welbepaalde vaste waarde a laten gaan: $\lim_{x\to a} f(x) = b$. We kunnen alvast zeggen dat $b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Voorbeeld 2 Als voorbeeld beschouwen we de functie $f(x) = \dfrac{5x^2 - 5x}{x-1} = \dfrac{5x(x-1)}{x-1}$



Wanneer we het argument x laten naderen tot 1, dan stellen we vast dat $f(x)$ nadert naar 5, en dit zowel langs de linker als langs de rechterkant van 1.

We schrijven: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{5x^2-5x}{x-1} = 5$ en $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \dfrac{5x^2-5x}{x-1} = 5$

Algemeen:

De afstand tussen de waarden $f(x)$ en b wordt willekeurig klein, als het argument x maar dicht genoeg nabij a komt.

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to a\\ <}} f(x) = b \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 :\ x \in]a-\delta, a[\Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon \\
\lim_{\substack{x\to a\\ >}} f(x) = b \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 :\ x \in]a, a+\delta[\Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon
\end{aligned}$$

Hierbij gaat men ervan uit dat men eerst ε vrij (willekeurig klein) gekozen heeft en dat men dan δ bepaalt in functie van de gekozen ε .

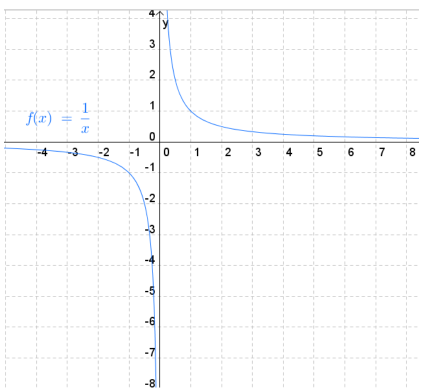
Het gebruik van deze definitie veronderstelt dat $f(x)$ gedefinieerd is in een omgeving van a , maar niet noodzakelijk in a zelf (herinner je dat de limietberekenaar niet geïnteresseerd is in $f(a)$)!

Even terzijde: aangezien in bovenstaand voorbeeld zowel de linker- als rechterlimiet bestaan en gelijk zijn, bestaat de limiet: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5x^2-5x}{x-1} = 5$. Maar aangezien deze niet gelijk is aan de functiewaarde $f(1)$, want $1 \notin dom\, f$, kunnen we besluiten dat de functie discontinu is in het punt $x = 1$. Er zit bijgevolg een perforatie (gaatje) in de grafiek van f. Maar we zouden dit 'gat' in het domein kunnen opheffen door de functiewaarde in $x = 1$ 'erbij te definiëren': we stellen de functiewaarde gelijk aan de limiet (zodat de nieuwe, uitgebreide functie nu wel overal gedefinieerd is, en bovendien overal continu is). We spreken dan van een ophefbare discontinuïteit.

De "nieuwe" functie $f(x)$ wordt nu gedefinieerd als: $f(x) : \begin{cases} x \to \frac{5x^2-5x}{x-1} & \text{als } x \neq 1 \\ x \to 5 & \text{als } x = 1 \end{cases}$

Uiteraard is het ook mogelijk dat $f(x)$ onbeperkt toeneemt als x onbeperkt nadert tot a.

Voorbeeld 3 Als voorbeeld bekijken we de functie $f(x) = \frac{1}{x}$.



Nadert x langs rechts naar 0, dit wil zeggen langs waarden die groter zijn dan nul, dan worden de functiewaarden onbegrensd groot in positieve zin. $f(x)$ nadert naar plus oneindig als x langs rechts naar 0 nadert.

Nadert x langs links naar 0, dit wil zeggen langs waarden die kleiner zijn dan nul, dan worden de functiewaarden onbegrensd groot in negatieve zin. $f(x)$ nadert naar min oneindig als x langs links naar 0 nadert.

We schrijven: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ en $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

Algemeen:

Indien de waarden van $f(x)$ onbeperkt toenemen als x maar dicht genoeg bij a komt, zegt men:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall n > 0,\ \exists \delta > 0 :\ 0 < |x-a| < \delta\ \Rightarrow f(x) > n$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall n > 0,\ \exists \delta > 0 :\ 0 < |x-a| < \delta\ \Rightarrow f(x) < -n$$

Hierbij gaat men ervan uit dat men eerst n vrij gekozen heeft en dat men dan δ bepaalt in functie van de gekozen n .

De verticale rechte met vergelijking $x = a$ noemen we de **verticale asymptoot** van de functie $f(x)$. In ons voorbeeld met de functie $f(x) = \dfrac{1}{x}$ is er één verticale asymptoot met als vergelijking $x = 0$. Merk op dat de functie $f(x)$ deze verticale rechte (de asymptoot) voor $x \to 0^-$ naar $-\infty$ nadert, en voor $x \to 0^+$ naar $+\infty$ benadert.

2.7 Epsilon delta definitie voor limieten

Zie filmpje MOOC.

2.8 Linkerlimiet en rechterlimiet

Soms is de waarde van $\lim_{x\to a} f(x)$ afhankelijk van de manier waarop we naar a naderen. We maken in dat geval een onderscheid tussen

de linkerlimiet	$\lim_{\substack{x\to a\\ <}} f(x)$	we naderen a langs de te kleine kant van a (“ $<$ ”)
	$\lim_{x\uparrow a} f(x)$	x stijgt tot aan de waarde van a
de rechterlimiet	$\lim_{\substack{x\to a\\ >}} f(x)$	we naderen a langs de te grote kant van a (“ $>$ ”)
	$\lim_{x\downarrow a} f(x)$	x daalt tot aan de waarde van a

Wanneer de linker- en rechterlimiet van elkaar verschillen, zeggen we dat de limiet niet bestaat.

Enkel als $\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = b\ (\in \mathbb{R})$ zeggen we dat **de** limiet bestaat.

Zie ook het paragraafje over *continu versus discontinu*.

Redenen om een onderscheid te maken tussen een linker- en een rechterlimiet kunnen zijn:

- dat $f(x)$ slechts aan één van beide kanten van a bestaat
- dat naarmate x nadert tot a, de waarden die $f(x)$ doorloopt naar een ander waarde toe leiden naargelang x kleiner of groter blijft dan a (sprongdiscontinuïteit).

Voorbeeld 1 Stel de functie $g(x) = \sqrt{x-4}$

Deze functie bestaat enkel voor $x \geq 4$ (we schrijven $dom\, g = [4, +\infty[$)

We berekenen de linkerlimiet: $\lim_{\substack{x \to 4 \\ <}} \sqrt{x-4}$ maar deze bestaat niet.

We berekenen de rechterlimiet: $\lim_{\substack{x \to 4 \\ >}} \sqrt{x-4} = 0$

We kunnen besluiten dat de limiet $\lim_{x \to 4} \sqrt{x-4}$ niet bestaat (enkel de rechterlimiet bestaat wel).

2.9 Rekenregels

In de onderstelling dat de limieten bestaan en eindig zijn gelden de onderstaande rekenregels.

De limieten van $f(x)$ en $g(x)$ bestaan en zijn eindig, dus: $\lim_{x \to a} f(x) = F$ en $\lim_{x \to a} g(x) = G$.

Rekenregel

1 $\lim_{x \to a} c = c$ met c een constante $(c \in \mathbb{R})$
2 $\lim_{x \to a} x = a$
3 $\lim_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x) = c \cdot F$ met $c \in \mathbb{R}$
4 $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = F \pm G$
5 $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = F \cdot G$
6 $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{F}{G}$ mits $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$
7 $\lim_{x \to a} [f(g(x))] = f(\lim_{x \to a} g(x))$ mits f continu is in het punt $\lim_{x \to a} g(x) = b$

Eigenschap 7 in woorden: het omwisselen van het nemen van de limiet en het nemen van de functiewaarde door de functie f is enkel toegestaan als f een continue functie is in het betreffende punt. We zeggen ook wel eens 'de limiet passeert de functie f'.

Tip1: de rekenregels voor ∞ zijn vrij eenvoudig te onthouden en te gebruiken als $(+)\infty$ gelezen wordt als 'een heel groot (positief) getal', $-\infty$ als 'een heel groot negatief getal', 0^+ als 'een heel klein positief getal'en tenslotte 0^- als 'een heel klein negatief getal'.

Tip2: lees bijvoorbeeld de rekenregels 4, 5 en 6 ook eens op een andere manier: "de limiet van een som, is de som van de limieten" ...

Voorbeeld 1

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{4} &= \frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty} x = \frac{1}{4}\cdot(+\infty) = +\infty \\
\lim_{x\to 3}[(x-2)(x+1)] &= \lim_{x\to 3}(x-2)\cdot\lim_{x\to 3}(x+1) = 1\cdot 4 = 4 \\
\lim_{x\to 3}(x^{\mathbf{2}}-x-2) &= \lim_{x\to 3} x^{\mathbf{2}} - \lim_{x\to 3} x - 2\cdot\lim_{x\to 3} 1 = 9-3-2 = 4 \\
\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(2x-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} 2x - \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{x} = 2\cdot 0-(+\infty) = -\infty \\
\lim_{x\to a}[\cos(g(x))] &= \cos\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) \\
\lim_{x\to a}\left[e^{f(x)}\right] &= e^{\lim_{x\to a} f(x)}
\end{aligned}$$

2.10 Berekenen van limieten

Veeltermfuncties

Een veeltermfunctie van n^de graad:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \text{ met } a_n \in \mathbb{R}_0 \text{ en } a_{n-1},\ldots,a_0 \in \mathbb{R}$$

Elke veeltermfunctie is continu over $\mathbb{R}$ (want het domein is immers $\mathbb{R}$).

De limiet voor x gaande naar $a \in \overline{\mathbb{R}}$ van een veeltermfunctie is gelijk aan de functiewaarde (m.a.w. vervang overal x door a):

$$\lim_{x\to a}\left(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0\right) = f(a)$$

Een speciaal geval is de limiet voor x gaande naar oneindig. In dit geval is het infeite enkel de hoogste graad term die van belang is. Kijk maar:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0\right) &= \lim_{x\to+\infty} a_nx^n\left(1 + \frac{a_{n-1}x^{n-1}}{a_nx^n} + \ldots + \frac{a_1x}{a_nx^n} + \frac{a_0}{a_nx^n}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} a_nx^n(1+0+\ldots+0) \\
&= \lim_{x\to+\infty} a_nx^n
\end{aligned}$$

Voorbeeld 1

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(-x^3+6x+14) &= \lim_{x\to+\infty} x^3\left(-1+\frac{6x}{x^3}+\frac{14}{x^3}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty} x^3(-1)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}(3x^2-4x+2) &= \lim_{x\to-\infty} 3x^2\left(1-\frac{4x}{3x^2}+\frac{2}{3x^2}\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty} 3x^2\\ &= +\infty\end{aligned}$$

Goniometrische en cyclometrische functies

Laat ons meteen opmerken dat bij de berekeningen van deze limieten het argument van de goniometrische of cyclometrische functie moet uitgedrukt zijn in radialen.

Enkele van deze limieten geven in eerste instantie aanleiding tot de onbepaalde vorm $\frac{0}{0}$, maar toch kan men de limiet vinden. We bekijken als voorbeeld de limiet van $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. Maken we een tabel met x-waarden die steeds dichter naar 0 naderen, dan zien we dat de verhouding $\frac{\sin x}{x}$ naar 1 gaat.

x	$\frac{\sin x}{x}$
1	0,84147098480
0,1	0,99833416646
0,01	0,99998333341
0,001	0,99999983333
0,0001	0,99999999999

Aangezien $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{\sin x}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\sin x}{x} = 1$ kunnen we concluderen dat $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (hetzelfde geldt trouwens ook voor $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$).

De limiet $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$ kunnen we dan weer wiskundig bewijzen a.d.h.v. de zogenaamde insluitstelling. Het komt er hierbij op neer dat je probeert een functie in te sluiten tussen twee andere functies die beide een gelijke limiet L hebben. De limiet van de ingesloten functie is dan ook gelijk aan L.

We weten dat de sinus-functie altijd een waarde oplevert tussen -1 en +1: $-1 \leq \sin x \leq +1$.

Dit blijft gelden als we de vergelijking delen door een positieve x waarde: $\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{+1}{x}$.

We weten ook dat: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-1}{x}\right) = 0$ en $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Passen we nu de insluitstelling toe dan concluderen we dat $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$.

De limiet $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ noemen we een ‘standaardlimiet’, en we kunnen hiermee een andere standaardlimiet afleiden:

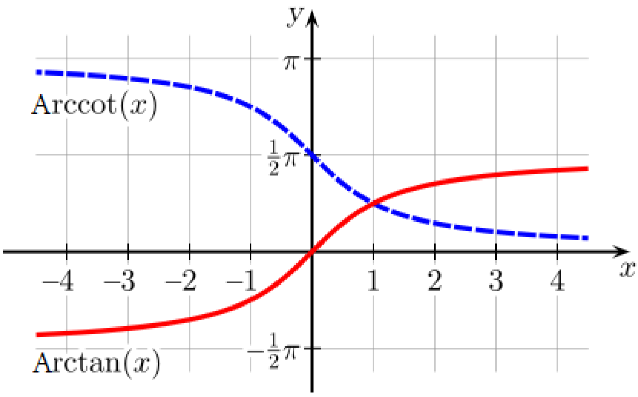
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\\
&= 1\cdot\frac{1}{1}=1
\end{aligned}$$

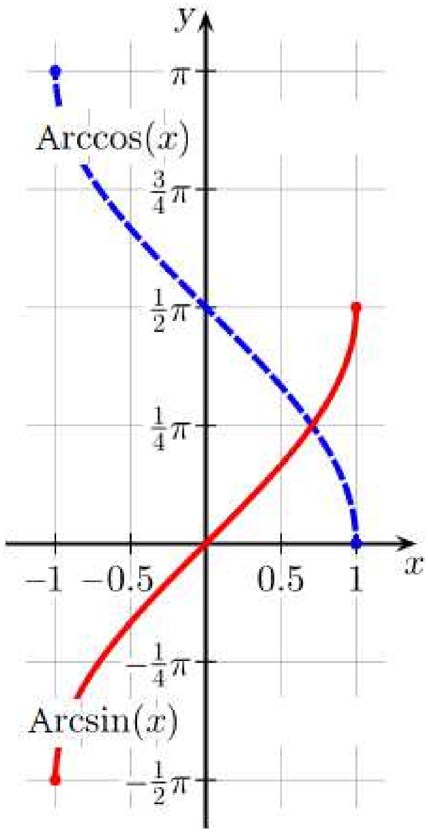
Voorbeeld 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}\cdot\frac{2x}{2x}\cdot\frac{3x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{2x}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}=\frac{2}{3}$$

Nog enkele veel voorkomende limieten van goniometrische en cyclometrische functies (tip: kijk ook eens naar hun grafiek of de goniometrische cirkel)

$\lim_{\underset{<}{x\to\frac{\pi}{2}}}\tan x=+\infty$	$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$	$\lim_{\underset{<}{x\to 1}}\arcsin x=\frac{\pi}{2}$
$\lim_{\underset{>}{x\to-\frac{\pi}{2}}}\tan x=-\infty$	$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$	$\lim_{\underset{>}{x\to -1}}\arcsin x=-\frac{\pi}{2}$
$\lim_{\underset{<}{x\to 0}}\cot x=-\infty$	$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arccot} x=0$	$\lim_{\underset{<}{x\to 1}}\arccos x=0$
s $\lim_{\underset{>}{x\to 0}}\cot x=+\infty$	$\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arccot} x=\pi$	$\lim_{\underset{>}{x\to -1}}\arccos x=\pi$



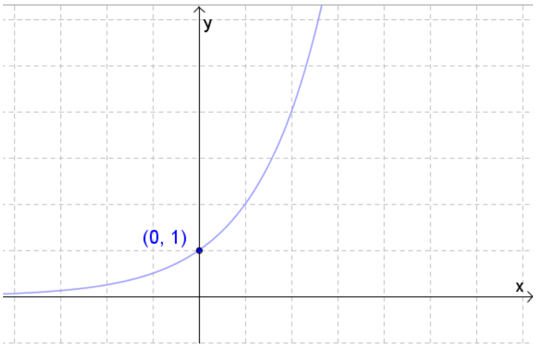


Exponentiële en logaritmische functies

Deze limieten laten zich gemakkelijk afleiden uit de grafieken:

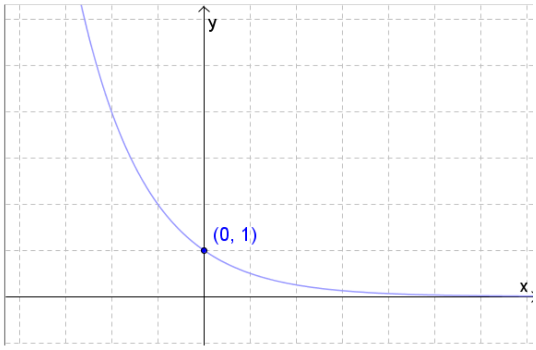
Exponentiële functies

$a > 1$



$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0} a^x = 1$$
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

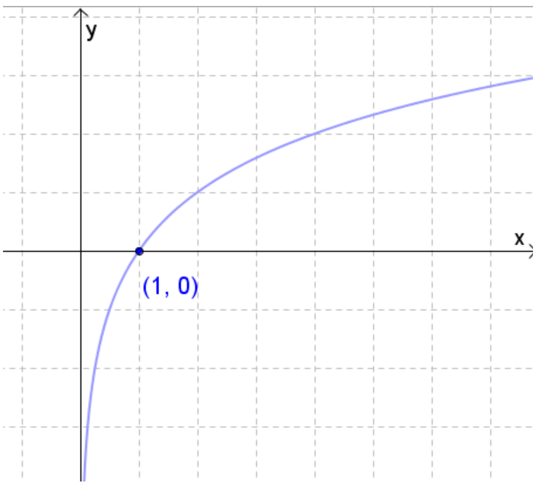
$0 < a < 1$



$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$$
$$\lim_{x\to 0} a^x = 1$$
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$$

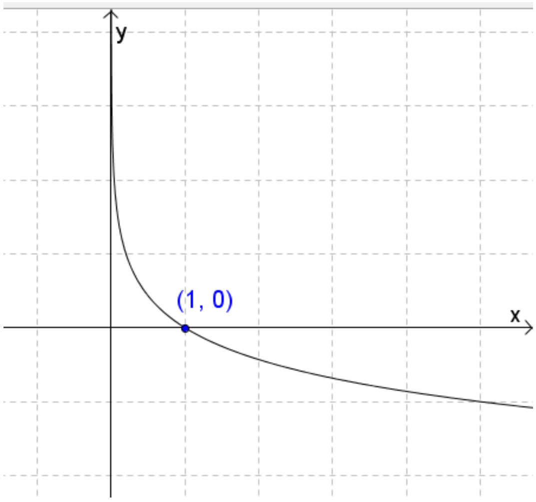
Logaritmische functies

$a > 1$



$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$$
$$\lim_{x\to 1} \log_a x = 0$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \log_a x = -\infty$$

$0 < a < 1$



$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1} \log_a x = 0$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \log_a x = +\infty$$

Enkele bijzondere limieten

Een bijzondere limiet is:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e = 2,718281828\ldots \text{ en ook } \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Hier zie je ook al waarom we gezegd hebben dat 1^∞ niet zomaar gelijk is aan 1.

Deze bijzondere limiet kan worden uitgebreid naar:

$$\lim_{x\to 0}(1+px)^{\frac{q}{x}} = e^{pq} \text{ met } p,q\in\mathbb{R}_0 \text{ en ook } \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{p}{x}\right)^{qx} = e^{pq}$$

2.11 Schijnbare onbepaaldheden

Onbepaalde vormen

Om de limiet $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ te berekenen moeten we dikwijls onbepaaldheden wegwerken. Daartoe gaan we opzoek naar functies die gelijkwaardig zijn met de oorspronkelijke functie, maar bij berekening van de limiet geen aanleiding meer geven tot een onbepaaldheid.

Soms kan een onbepaalde vorm omgezet worden naar een andere (eveneens onbepaalde) vorm: $0.\infty = \dfrac{1}{\frac{1}{0}}.\infty = \dfrac{1}{\infty}.\infty = \dfrac{\infty}{\infty}$.

Hetzelfde geldt voor de factor oneindig: $0.\infty = 0.\dfrac{1}{\frac{1}{\infty}} = 0.\dfrac{1}{0} = \dfrac{0}{0}$.

We merken hier meteen op dat een andere aanpak om de onbepaaldheden $\frac{0}{0}$ en $\frac{\infty}{\infty}$ te evalueren de regel van de l'Hôpital is.

Limieten van functies van het type $f(x)^{g(x)}$ kunnen aanleiding geven tot de onbepaalde vormen 0^0 , ∞^0 en 1^∞. In deze gevallen kan het herschrijven van de functie een oplossing bieden: $f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x).\ln f(x)}$. De functie $g(x).\ln f(x)$ leidt dan vaak tot iets van het type $0.\infty$.

De onbepaalde vorm $\frac{\infty}{\infty}$

- Rationale functies

  We spreken van rationale functies, als $f(x)$ een quotiënt van is van twee veeltermen. Rationale functies zijn niet gedefinieerd in de eventuele nulpunten van de noemer; ze hebben daar geen functiewaarde. Het domein van een rationale functie is $\mathbb{R}$, met uitzondering van de verzameling nulpunten van de noemer. Elke rationale functie is continu over zijn domein.

  Bij een rationale breuk die een onbepaalde vorm oplevert van het type $\frac{\infty}{\infty}$ omdat het argument naar ∞ streeft, hanteert men volgende regel:

  beschouw in teller en noemer enkel de hoogstegraadstermen en bepaal de limiet van hun verhouding.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_px^p+b_{p-1}x^{p-1}+\ldots+b_1x+b_0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_px^p}=\begin{cases}\pm\infty & \text{als } n>p\\ \frac{a_n}{b_p} & \text{als } n=p\\ 0 & \text{als } n<p\end{cases}$$

Merk op dat het teken van $\pm\infty$ moet nog nader bepaald worden.

Voorbeeld 1

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-11}{x^2+x-10}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}2x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6-x^2}{2x^2+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

- Irrationale functies

  Een irrationale functie is een functie waarin wortelvormen van rationale functies voorkomen. Elke irrationale functie is continu over haar domein. De uitdrukking onder het wortelteken van een even machtswortel moet wel positief zijn!

  Bij een irrationale breuk die een onbepaalde vorm oplevert van het type $\frac{\infty}{\infty}$ omdat het argument naar ∞ streeft, hanteert men volgende regel:

  zet in teller en noemer de hoogst mogelijke macht van x voorop en werk verder uit.

  Hierbij maken we gebruik van het feit dat:

$$\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x & \text{als } x>0\\ -x & \text{als } x<0\end{cases}$$

Voorbeeld 2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-2x}{\sqrt[3]{x^3+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2x}{\sqrt[3]{x^3}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}\right)}$$

Nu moeten we een onderscheid maken tussen de limiet gaande naar $+\infty$ en $-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2x}{x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}}=\frac{1-2}{1}=-1$$

en

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(-x)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2x}{x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}}=\frac{-1-2}{1}=-3$$

Voorbeeld 3

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{4x-\sqrt{x^2+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(3+\frac{2}{x}\right)}{4x-|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}$$

We maken terug onderscheid tussen de limiet gaande naar $+\infty$ en $-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3+\frac{2}{x}\right)}{4x - x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{2}{x}}{4-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = \frac{3}{4-1} = 1$$

en

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(3+\frac{2}{x}\right)}{4x - (-x)\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3+\frac{2}{x}}{4+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}} = \frac{3}{4+1} = \frac{3}{5}$$

De onbepaalde vorm $\frac{0}{0}$

- Rationale functies

  Bij de limiet van een rationale functie in het punt a, waarbij a het nulpunt is van zowel de teller als noemer, zal zowel teller als noemer als limiet nul hebben. We zullen in teller en noemer de factoren $(x-a)$ af zonderen en daarna deze factor $(x-a)$ wegdelen. Daarom gaan we eerst op zoek naar gemeenschappelijke factoren in teller en noemer; eventueel kan de regel van Horner helpen bij het ontbinden van de veelterm in factoren.

Voorbeeld 4

$$\lim_{x\to2} \frac{x^2-4}{x^2-7x+10} = \frac{0}{0}$$

Teller en noemer ontbinden in factoren:

teller: $x^2-4 = (x-2)(x+2)$

noemer (via Horner):
$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -7 & 10 \\ 2 & \downarrow & 2 & -10 \\ \hline & 1 & -5 & \| \; 0 \end{array}$$

dus

$$x^2-7x+10 = (x-2)(x-5)$$

zodat

$$\lim_{x\to2} \frac{x^2-4}{x^2-7x+10} = \lim_{x\to2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-5)} = \lim_{x\to2} \frac{(x+2)}{(x-5)} = \frac{2+2}{2-5} = -\frac{4}{3}$$

Voorbeeld 5

$$\lim_{x\to3} \frac{x^2-9}{x^2+x-12} = \frac{0}{0}$$

Teller en noemer ontbinden in factoren:

teller: $x^2-9 = (x-3)(x+3)$

noemer (via Horner):
$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & -12 \\ 3 & \downarrow & 3 & 12 \\ \hline & 1 & 4 & \| \; 0 \end{array}$$

dus

$$x^2+x-12 = (x-3)(x+4)$$

zodat

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4}{x^2-7x+10}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+4)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)}{(x+4)}=\frac{3+3}{3+4}=\frac{6}{7} \tag{9}$$

- Irrationale functies

  Wanneer het nul worden van teller of noemer veroorzaakt wordt door het aftrekken of het optellen van wortelvormen, zal men teller en noemer met eenzelfde factor vermenigvuldigen. Deze factor wordt zo gekozen dat zijn product met de irrationale uitdrukking die nul werd, nu rationaal zal worden. Men noemt deze factor *een toegevoegde*.

Voorbeeld 6

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\frac{0}{0}$$

De teller gaan we rationaal maken door de teller (en de noemer) te vermenigvuldigen met $\left(\sqrt{x+1}+2\right)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} &= \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}.\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{(x+1-4)}{(x-3).\left(\sqrt{x+1}+2\right)}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3).\left(\sqrt{x+1}+2\right)}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}\\ &= \tfrac{1}{4}\end{aligned}$$

Voorbeeld 7

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}=\frac{0}{0}$$

De noemer gaan we rationaal maken door de noemer (en de teller) te vermenigvuldigen met $\left(\sqrt{x+7}+3\right)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} &= \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}.\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2).\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{(x+7-9)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2).\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{x-2}\\ &= \lim_{x\to 2}\left(\sqrt{x+7}+3\right)\\ &= 6\end{aligned}$$

De onbepaalde vorm $\infty - \infty$

Bij irrationale functies vermenigvuldig je met en deel je door de toegevoegde irrationale vorm (en hoop je op die manier de onbepaaldheid weg te werken).

Voorbeeld 8

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x+3}\right)=\infty-\infty$$

(zowel voor $x\to+\infty$ als voor $x\to-\infty$)

We vermenigvuldigen met het toegevoegde:

$$\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+3}\right)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x+3}\right).\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+3}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+3}\right)} &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1-(x^2-x+3)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+3}\right)}\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+3}\right)}\end{aligned}$$

Nu moeten we een onderscheid maken tussen de limiet gaande naar $+\infty$ en $-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}\right)}=\frac{1}{2}$$

en

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+3}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{(-x)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}\right)}=-\frac{1}{2}$$

Voorbeeld 9

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{2x^2+5}-x\right)$$

Hier maken we meteen onderscheid tussen de limiet gaande naar $+\infty$ en $-\infty$ (omdat de limiet voor $x\to-\infty$ eigenlijk geen probleem oplevert) :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+5}-x\right)=+\infty-(-\infty)=+\infty$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+5}-x\right) &= +\infty-(+\infty) \text{ dus...}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+5}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{2x^2+5}+x}{\sqrt{2x^2+5}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+5-x^2}{\sqrt{2x^2+5}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5}{\sqrt{2x^2+5}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(1+\frac{5}{x^2})}{(+x)\sqrt{2+\frac{5}{x^2}}+x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x(1+\frac{5}{x^2})}{\sqrt{2+\frac{5}{x^2}}+1}\\
&= +\infty
\end{aligned}$$

De onbepaalde vorm 1^∞

We hebben ons reeds eerder verbaasd over het feit dat 1^∞ niet zomaar hetzelfde is als $1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot\ldots$ en dus niet zomaar gelijk hoeft te zijn aan 1!?

De reden is eigenlijk heel eenvoudig: we zitten hier in het hoofdstukje "Limieten", met andere woorden zowel 1 als ∞ kunnen het resultaat zijn van het nemen van een limiet:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \ldots = 1^\infty.$$

Laten we, om deze module af te sluiten, kijken naar een numeriek voorbeeldje. In paragraaf 2.10 hebben we gezien dat:

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e = 2,718281828\ldots \text{ en ook } \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

x	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$			x	$(1+\frac{1}{x})^x$		
1	2^1	=	2,0	1	2^1	=	2,0
0,1	$1,1^{10}$	=	2,59374246	10	$1,1^{10}$	=	2,59374246
0,01	$1,01^{100}$	=	2,70481382	100	$1,01^{100}$	=	2,70481382
0,0001	$1,0001^{10000}$	=	2,71814592	10000	$1,0001^{10000}$	=	2,71814592

We zien dat, afhankelijk van de vorm die we bekijken, als x heel dicht bij 0 of bij oneindig nadert, de vorm schijnbaar naar 1^∞ gaat, maar de echte waarde gaat echter naar het "magische getal e".

Module 3

Goniometrie & complexe getallen

0 Intro

Zie filmpje MOOC.

1 Goniometrie

Inleiding

Wie technische wetenschappen studeert wordt voortdurend en soms onverwacht geconfronteerd met goniometrie en driehoeksmeetkunde. Van optica tot machinebouw, van elektrotechniek tot staalbouw, er is bijna geen vak of vakgebied te vinden waarbij goniometrie geen rol speelt. Hieronder staan enkele voorbeelden: een instrument uit de topografie en een toepassing uit de bouwkunde.

Een theodoliet is een instrument om hoeken te meten dat veel gebruikt wordt door landmeters. Het toestel wordt op een staander horizontaal (waterpas) geplaatst en door een kijker op verschillende referentiepunten te richten kan men de hoeken tussen deze punten meten.

(Bron figuur: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Askania_Sekunden-Theodolit_TU_e_400.jpg)

De staalconstructie van een hoogspanningsmast is gebaseerd op driehoeken.

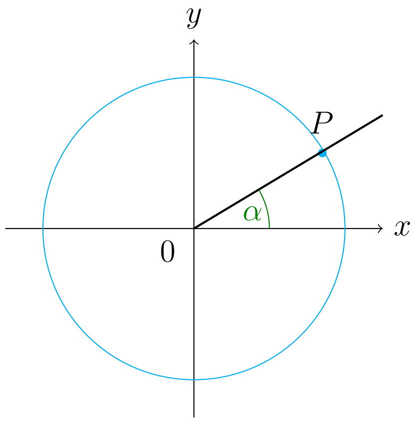
(Bron figuur: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pylon_ds.jpg).

In de volgende paragrafen bespreken we praktisch de basis van goniometrie en driehoeksmeetkunde.

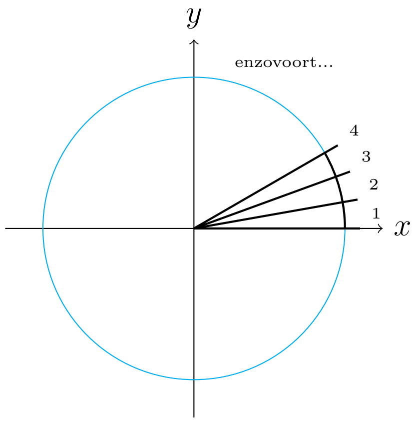
1.1 Meten van hoeken

Graden, minuten, seconden

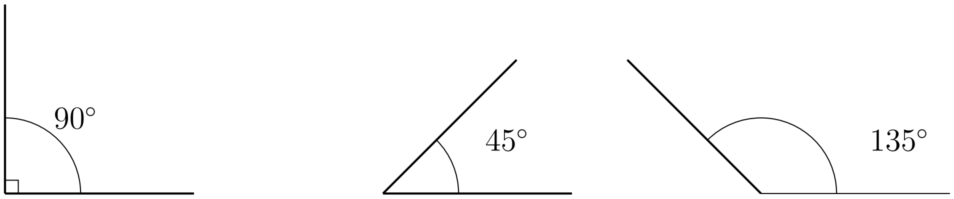
Een hoekmaat wordt bepaald door een hoek voor te stellen op een cirkel met willekeurige straal r waarbij men de top van de hoek laat samenvallen met het middelpunt van de cirkel. Elke hoek α komt dan overeen met een zekere afstand gemeten langs de omtrek van de cirkel. Men zegt dat met elke hoek α een zekere booglengte op de cirkel met straal r overeenkomt.



Door nu de cirkelomtrek onder te verdelen in allemaal stukjes met gelijke booglengte bekomt men een maat voor een hoek. Op de figuur hieronder zijn enkele onderverdelingen getekend.



Deze onderverdelingen noemt men graden. Meestal (maar niet altijd!) wordt een cirkel onderverdeeld in 360°: een rechte hoek komt dan overeen met 90° en een gestrekte hoek met 180°. Hieronder staan enkele tekeningen:



Graden zijn zelf ingedeeld in minuten (zoals meters kunnen ingedeeld worden in centimeters) en minuten kunnen op hun beurt worden ingedeeld in seconden (zoals centimeters kunnen worden ingedeeld in millimeters). Graden, minuten en seconden worden echter ingedeeld in een 60-tallig talstelsel, waardoor je volgende regels krijgt:

$$\begin{aligned} 1 \text{ graad} &= 60 \text{ minuten} \\ 1 \text{ minuut} &= 60 \text{ seconden} \end{aligned}$$

Deze hoekmaat noemt men de zestigdelige graad. De zestigdelige graad wordt soms afgekort als 'deg' van het Engelse woord 'degree'.
Graden, minuten en seconden hebben hun eigen eenheid/symbool, zoals het symbool voor centimeter 'cm' is:

$$\begin{aligned} 1 \text{ graad} &= 1^\circ \\ 1 \text{ minuut} &= 1' \\ 1 \text{ seconde} &= 1'' \end{aligned}$$

Enkele voorbeelden:

- Een hoek van 1° lees je als een hoek van '1 graad'. Ze bestaat zelf uit $1 \cdot 60 = 60$ minuten (want elke graad is 60 minuten), of uit $60 \cdot 60 = 3600$ seconden (want elke minuut is 60 seconden).
- Een hoek van 42° lees je dus als '42 graden' en bestaat zelf uit $42 \cdot 60 = 2520$ minuten (want elke graad is 60 minuten), of uit $2520 \cdot 60 = 151200$ seconden (want elke minuut is 60 seconden).
- Een hoek van $5^\circ 12' 13$" lees je als 5 graden, 12 minuten en 13 seconden.

Soms wordt het gebruik van minuten en seconden vermeden in de notatie van een hoek, en gebruikt men een decimale notatie. Zo kan het zijn dat je een hoek tegenkomt die genoteerd is als:

$$22,5^\circ \quad \text{of ook} \quad 22^\circ,5$$

Dat betekent dan ook letterlijk 22 en een halve graad. Ofwel 22 graden en de helft van 60 minuten. Met andere woorden:

$$22,5^\circ = 22^\circ 30'$$

Een tweede, iets moeilijker voorbeeld:

$$\begin{aligned} 42,21^\circ &= 42^\circ + 0,21 \cdot 1^\circ && \text{herschrijven van een kommagetal} \\ &= 42^\circ + 0,21 \cdot 60' && \text{1 graad is 60 minuten} \\ &= 42^\circ + 12,6' && \text{uitrekenen} \\ &= 42^\circ + 12' + 0,6 \cdot 1' && \text{herschrijven van een kommagetal} \\ &= 42^\circ + 12' + 0,6 \cdot 60'' && \text{1 minuut is 60 seconden} \\ &= 42^\circ + 12' + 36'' && \text{uitrekenen} \\ &= 42^\circ 12' 36'' \end{aligned}$$

Gelukkig hebben veel rekentoestellen de mogelijkheid om graden in decimale notatie om te zetten in graden in notatie van graden, minuten, seconden. Raadpleeg daarvoor de handleiding van je rekentoestel.

Rekenen met graden, minuten, seconden is anders dan rekenen met tiendelige getallen. Een voorbeeld:

$$12°45' + 36°50' = 48°95' = 49°35'$$

Telkens als je meer dan 60 minuten hebt, moet je het aantal graden verhogen met 1. Net zo bij meer dan 60 seconden, dan verhoog je het aantal minuten!

Decimale graad of honderddelige graad

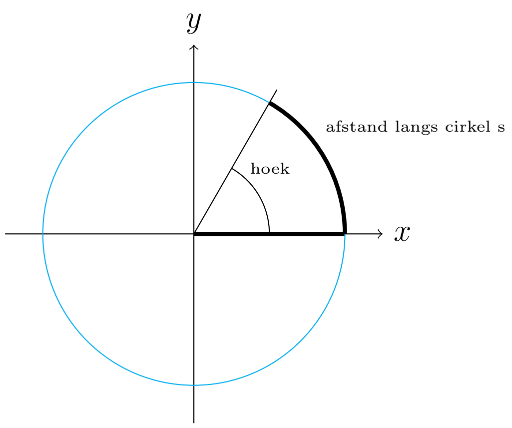
Zoals eerder gezegd is de onderverdeling van een cirkel in 360° alleen maar een afspraak. Volgens een andere conventie wordt een cirkel onderverdeeld in 400 stukjes zodat een rechte hoek overeenkomt met 100 onderverdelingen: men spreekt dan van decimale graden of honderddelige graden. Honderddelige graden komen vooral voor in de topografie en de weg- en waterbouw. Vooral studenten bouwkunde zullen deze hoekmaat tegen komen. De eenheid van de 100-delige hoek is 'gon' (maar ook 'gr' of 'grad' komen voor). In principe is deze hoekmaat erg eenvoudig. Men start met de afspraak:

Een rechte hoek meet 100 gon.

Bijgevolg zal een getrekte hoek 200 gon meten, en een hoek van 45° de helft van 100 gon en dus 50 gon. Honderddelige graden rekenen gemakkelijker dan 60-delige graden.

Radialen

Een andere veel gebruikte hoekmaat is de radiaal. Men neemt een cirkel met straal r en zet daarop een bepaalde hoek uit. Met deze hoek komt dan een welbepaalde booglengte s op de cirkelomtrek overeen. Men zegt nu dat die hoek waarvoor de booglengte s gelijk is aan de straal r een hoek is van 1 radiaal.



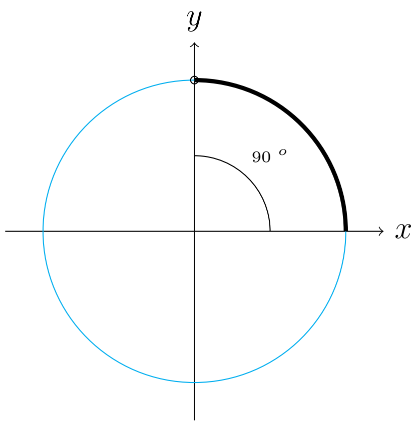
Voor een hoek van 2 radialen geldt dus dat $s = 2r$, voor een hoek van 5 radialen geldt dan $s = 5r$, enz... M.a.w. voor een hoek θ kan men schrijven dat het verband tussen de cirkelboog s en de straal r gegeven wordt door:

$$s = r \cdot \theta$$

Let op! Deze formule is alléén geldig als de hoek θ wordt uitgedrukt in radialen...

In theoretische berekeningen (fysica, mechanica,...) wordt bijna altijd ondersteld dat een hoek wordt uitgedrukt in radialen zodat men van deze formule kan gebruik maken.

De omtrek van een cirkel met straal r is de gekende formule $2 \cdot \pi \cdot r$. Uit $s = r \cdot \theta$ volgt dan dat de hoek die overeenkomt met de volledige cirkelomtrek gelijk is aan $\theta = 2\pi$. Om gemakkelijk te rekenen kiest men dikwijls een cirkel met $r = 1$, de omtrek van zo een éénheidscirkel is 2π. Met dit in het achterhoofd berekenen we de grootte van een rechte hoek (90°), maar nu in radialen:



Je ziet dat de rechte hoek een kwart van de cirkel beslaat. De gehele cirkel heeft een omtrek van 2π en bijgevolg bepaalt de rechte hoek een cirkelboog met lengte $\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$.
We zeggen:

De rechte hoek meet $\frac{\pi}{2}$ radialen.

Op je rekentoestel worden radialen vaak aangegeven met 'rad'. Ook radialen hebben een eenheid, namelijk 'rad'. Vaak laten we deze eenheid weg:

$$90^\circ = \frac{\pi}{2}\text{rad} = \frac{\pi}{2}$$

Het voordeel van radialen is dat deze al kommagetallen zijn, en je ermee kan rekenen zoals je met gewone getallen doet. Het moeilijke is dat radialen vaak 'ongewoon' zijn, omdat het getal π er zo vaak in opduikt. Nog enkele veel voorkomende hoeken:

- De nulhoek meet 0° en beschrijft geen omtrek op de cirkel (het beginpunt van de cirkelboog is hetzelfde als het eindpunt ervan). Bijgevolg is de nulhoek ook een hoek van 0 radialen.

- De gestrekte hoek meet $180°$ en beschrijft de helft van een cirkel (tekenen!). De omtrek van een halve cirkel is π en dus meet de gestrekte hoek π radialen.
- De volle hoek meet $360°$ en beschrijft de volledige cirkel. De omtrek van de volledige cirkel is 2π en dus meet de volle hoek 2π radialen.

Volgende regel is zeer belangrijk:

$$180° = \pi$$

Hieruit kan je vaak snel de grootte van een eenvoudige hoek in radialen afleiden. Bijvoorbeeld:

- $60°$ is gelijk aan $180° : 3$, en dus is de hoek van $60°$ gelijk aan $\frac{\pi}{3}$ radialen.
- $30°$ is gelijk aan $180° : 6$, en dus is de hoek van $30°$ gelijk aan $\frac{\pi}{6}$ radialen.
- $45°$ is gelijk aan $180° : 4$, en dus is de hoek van $45°$ gelijk aan $\frac{\pi}{4}$ radialen.

Nog even een lijstje formules, waarvan de bovenste de belangrijkste is:

$$\begin{aligned} 180° &= \pi \\ 360° &= 2\pi \\ 90° &= \frac{\pi}{2} \\ 60° &= \frac{\pi}{3} \\ 45° &= \frac{\pi}{4} \\ 30° &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Overgangen tussen de verschillende hoekeenheden

Algemeen verband

De overgang tussen de verschillende hoekeenheden kan je gemakkelijk maken als je weet dat een gestrekte hoek gelijk is aan:

Onthoud $180°=\pi$ rad$=200$ gon.

Van graden naar radialen en terug

Omdat $180° = \pi$ rad, zal $1° = \frac{180°}{180} = \frac{\pi \text{ rad}}{180}$. Je kan dit gebruiken om een willekeurige hoek in graden om te zetten in radialen:

$$32° = 32 \cdot 1° = 32 \cdot \frac{\pi}{180}\text{rad} \approx \frac{32 \cdot 3,14}{180}\text{rad} = 0,56\text{rad}$$

Het is wel erg belangrijk dat je een hoek in graden eerst omzet in een decimale notatie, en niet met minuten en seconden erbij. De regel wordt nu:

$$x^\circ \text{ is gelijk aan } x \cdot \frac{\pi}{180}\text{rad}$$

of met andere woorden, omzetten van **graden naar radialen** is vermenigvuldigen met

$$\frac{\pi}{180}\text{rad} \approx 0,0175\text{rad}$$

Nog een voorbeeldje:

$$42^\circ 12' 36'' = 42,21^\circ \approx 42,21 \cdot 0,0175\text{rad} \approx 0,74\text{rad}$$

Omdat $\pi\text{rad} = 180^\circ$, vind je dat $1\text{rad} = \frac{\pi}{\pi}$ rad $= \frac{180^\circ}{\pi}$. Je kan dit gebruiken om een willekeurige hoek in radialen om te zetten in graden:

$$1,35 \text{ rad} = 1,35 \cdot 1\text{rad} = 1,35 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx \frac{1,35 \cdot 180^\circ}{3,14} \approx 77,35^\circ$$

Het resultaat is dus altijd een hoek in graden, in decimale notatie. De algemene regel is dus

$$x\text{rad is gelijk aan } x \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

of met andere woorden, omzetten van **radialen naar graden** is vermenigvuldigen met

$$\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$$

Nog een voorbeeldje:

$$0,456\text{rad} \approx 0,456 \cdot 57,3^\circ = 26,13^\circ$$

Merk op dat we bij deze omzettingen vaak afronden. Dat mag enkel als het voor de opgave mag, soms moet je nauwkeurig en symbolisch werken, en dan gebruik je de formules zonder afronden!

Van graden naar gon en terug

We gebruiken de regel dat $90^\circ = 100$ gon, dus vind je:

$$1^\circ = \frac{100 \text{ gon}}{90} = 1,111 \text{ gon}$$
$$1 \text{ gon} = \frac{90^\circ}{100} = 0,9^\circ$$

Dit gebruik je om de volgende omzettingsregels te vinden:

$$x^\circ = x \cdot 1,111 \text{ gon}$$
$$x \text{ gon} = x \cdot 0,9^\circ$$

Voorbeeld 1

- $12,13^\circ = 12,13 \cdot 1,111$ gon $\approx 13,48$ gon.
- $78,85$ gon $= 78,85 \cdot 0,9^\circ \approx 70,97^\circ$

Ook hier is het belangrijk dat je de decimale notatie van de graden gebruikt, en niet de notatie in minuten en seconden!

Onthoud

Onthoud

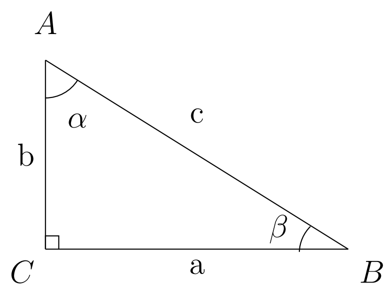
- Hoeken kan je meten in
  - graden (°), minuten ('), seconden (")
  - radialen (rad), de lengte van een cirkelboog van een cirkel met straal 1
  - 100-delige graden(gon)
- $180° = \pi$ rad
- $90° = 100$ gon

Volgende formules zijn zeer nuttig:

$$\begin{aligned} x^\circ &= x \cdot \frac{\pi}{180}\text{rad} \approx x \cdot 0,0175\text{rad} \\ x\text{rad} &= x \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx x \cdot 57,3^\circ \\ x^\circ &= x \cdot \frac{10}{9} \text{ gon} \approx x \cdot 1,111 \text{ gon} \\ x \text{ gon} &= x \cdot 0,9^\circ \end{aligned}$$

1.2 Rechthoekige driehoeken

Tekening en definities



Een algemene rechthoekige driehoek wordt vaak weergegeven zoals in bovenstaande figuur. Een rechthoekige driehoek bestaat uit zijden en hoeken:

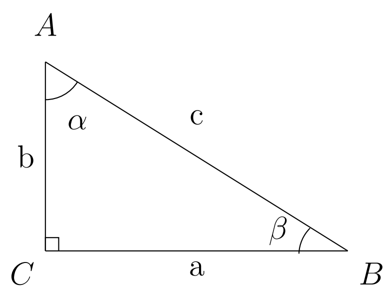
- De zijden, aangeduid met de kleine letters a, b en c.
- De hoekpunten A, B en C.
- De hoeken α (alfa) en β (beta).

De plaats van deze letters wordt meestal op dezelfde manier gedaan:

- De rechte hoek krijgt als hoekpunt C. De rechte hoek krijgt vaak geen aparte naam, omdat je reeds weet dat deze $90°$ is. Als ze dan toch een naam krijgt, wordt dat γ (gamma).
- α is de hoek horende bij hoekpunt A, β is de hoek horende bij hoekpunt B.
- De zijde tegenover de hoek α is de zijde a, en de zijde tegenover de hoek β is de zijde b. Deze zijden noemt men de **rechthoekszijden**.
- De zijde c ligt tegenover de rechte hoek en het hoekpunt C en wordt de **hypothenusa** of **schuine zijde** genoemd.

De stelling van Pythagoras

In een rechthoekige driehoek is de som van de kwadraten van de rechthoekszijden gelijk aan het kwadraat van de schuine zijde



Voor deze tekening is dit dan:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

De stelling van Pythagoras is erg nuttig om de zijden van een driehoek te berekenen. Telkens je twee zijden hebt, kan je de derde berekenen.

Goniometrische getallen in een rechthoekige driehoek

Aan een hoek α van een rechthoekige driehoek kunnen we een aantal getallen koppelen:

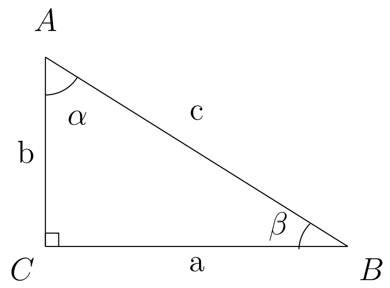
$$\text{de sinus van } \alpha = \sin\alpha = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$

$$\text{de cosinus van } \alpha = \cos\alpha = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$

$$\text{de tangens van } \alpha = \tan\alpha = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$$

$$\text{de cotangens van } \alpha = \cot\alpha = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{overstaande rechthoekszijde}}$$

Voor de driehoek



Is dat dan:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a}$$

Uiteindelijk zijn sinus, cosinus, ... van een hoek niet afhankelijk van de driehoek waar je ze in tekent. Daarom kan je ook met je rekentoestel een sinus, cosinus, ... berekenen. Zorg wel dat je hoekmaat juist staat ingesteld!

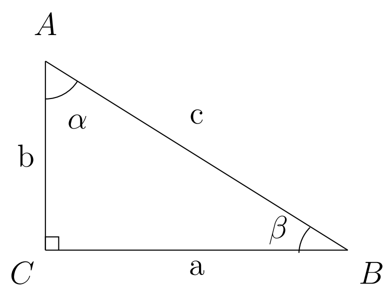
Nuttige formules

Volgende formules zijn vaak nuttig om hoeken terug te vinden (met $\sin^2\alpha$ bedoelen we het kwadraat van de sinus van α, of met andere woorden, $(\sin\alpha)^2$):

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$$

Oplossen van rechthoekige driehoeken

We hebben enkele formules nodig, studeer deze goed! Voor een **rechthoekige** driehoek geldt:



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \sin\beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \tan\beta = \frac{b}{a}$$

Wat kan je hier nu mee? Als je enkele onderdelen van een rechthoekige driehoek gegeven hebt, kan je met deze formules en gegevens de andere onderdelen berekenen. Vaak heb je met 2 gegeven waarden genoeg. Dit noemen we het oplossen van een rechthoekige driehoek. De bedoeling is a, b, c, α en β te bepalen.

Voorbeeld 1 Van de driehoek is gegeven $a = 3$ en $b = 4$. Bereken de overige getallen.
Met de stelling van Pythagoras vind je:

$$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow 3^2 + 4^2 = c^2 \Leftrightarrow 9 + 16 = c^2 \Leftrightarrow 25 = c^2 \Leftrightarrow c = 5$$

We hebben de 3 zijden, dus nu moeten we nog de twee hoeken berekenen. Dat doen we met sinus, cosinus, . . . :

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{3}{5} = 0,6$$

Nu kan je met je rekentoestel uitrekenen wat α is, vaak met de toets $\sin^{-1}$. Je vindt:

$$\alpha \approx 36,87°$$

Ook β kan je vinden op deze manier:

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{4}{5} = 0,8$$

En dus

$$\beta \approx 53,13°$$

Zie je dat $\alpha + \beta = 90°$! Dit is geen toeval. De som van de hoeken van een driehoek is $180°$. Omdat je 1 hoek al kent, namelijk de rechte hoek van $90°$, is de som van de andere 2 $90°$. Onthoud dus:

- **De som van de hoeken van een driehoek is** $180°$, of met andere woorden

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

- **De som van de scherpe hoeken in een rechthoekige driehoek is** $90°$, of m.a.w.

$$\alpha + \beta = 90°$$

Voorbeeld 2 Er is gegeven dat $\alpha = 30°$ en c (de schuine zijde) is 7. Bereken de overige getallen. Je kan meteen β vinden:

$$\alpha + \beta = 90° \Leftrightarrow 30° + \beta = 90° \Leftrightarrow \beta = 60°$$

De zijden bereken je via een sinus:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \Leftrightarrow \sin 30° = \frac{a}{7} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{a}{7}$$

Je zondert nu a af door links en rechts met 7 te vermenigvuldigen en je krijgt:

$$a = \frac{7}{2}$$

De laatste zijde b vind je nu met de stelling van Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{2}\right)^2 + b^2 = 7^2 \Leftrightarrow 12,25 + b^2 = 49$$

Je zondert b^2 af

$$b^2 = 49 - 12,25 = 36,75$$

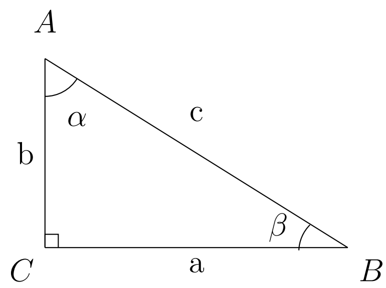
En dan neem je links en rechts de vierkantswortel

$$b = \sqrt{36,75} \approx 6,06$$

De algemene truc is dus telkens een formule te kiezen waar 2 van de symbolen bekend zijn, om zo het derde te vinden.

Onthoud

Onthoud



- **De stelling van Pythagoras**

$$a^2 + b^2 = c^2$$

- **sin, cos, tan, cot**

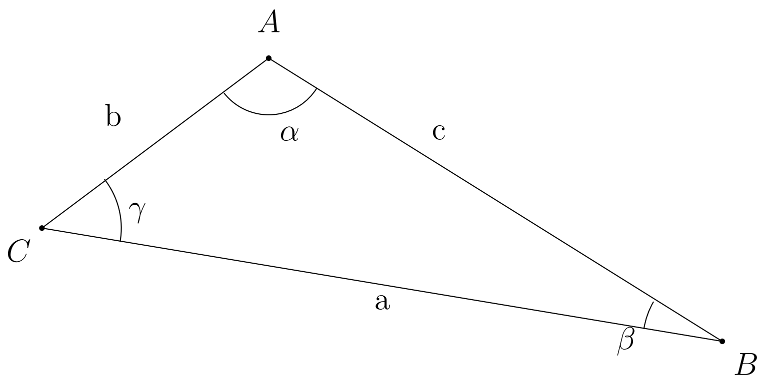
$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a}$$

- $\alpha + \beta = 90°$
- Een rechthoekige driehoek los je op door formules te kiezen uit Pythagoras, $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, \sin\beta, \ldots$ waarin twee waarden bekend zijn om zo de derde te vinden.

1.3 Willekeurige driehoeken

Tekening en afspraken

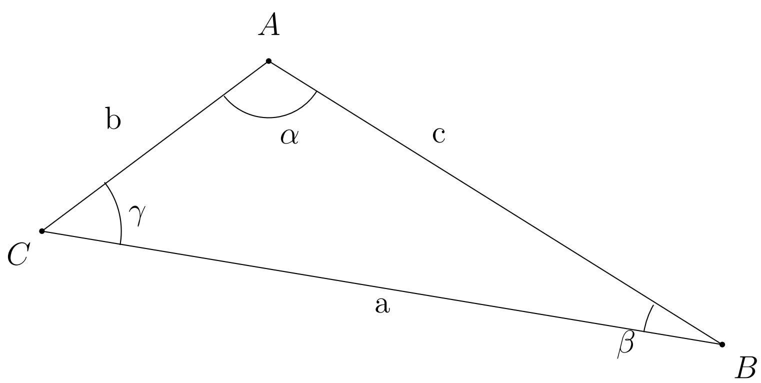


- De hoekpunten duiden we aan met A, B, C.
- De bijhorende hoeken duiden we aan met α (alfa) bij A, β (beta) bij B en γ (gamma) bij C.
- De zijde tegenover duiden we aan met a (tegenover A), b (tegenover B) en c (tegenover C).

Sinus- en cosinusregel

We herinneren er nog eens aan dat de stelling van Pythagoras en de formules voor sinus, cosinus, tangens en cotangens die we tot nu toe besproken hebben alléén geldig zijn voor rechthoekige driehoeken.
Voor een willekeurige driehoek gelden iets ingewikkelder formules die de sinusregel en de cosinusregel genoemd worden.

De **cosinusregel:**



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Je ziet dat in het linkerlid altijd 1 bepaalde zijde voorkomt, dat er in het rechterlid de twee andere voorkomen, samen met de cosinus van de hoek die hoort bij het linkerlid. Vergeet zeker de -2 niet bij de cosinus!

Opmerking: als één van de hoeken een rechte hoek is, bijvoorbeeld de hoek $\alpha = 90°$, dan is $\cos\alpha = 1$ en vereenvoudigt de cosinusregel tot de stelling van Pythagoras: $a^2 = b^2 + c^2$.

De **sinusregel:**

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

De sinusregel splits je meestal op in

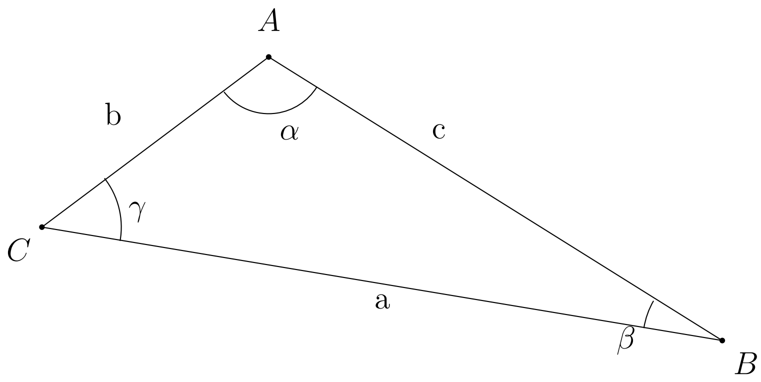
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$
$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Een andere vorm van de sinusregel is:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$$
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$$
$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

Oplossen van willekeurige driehoeken

Het oplossen van een willekeurige driehoek doe je op dezelfde manier als het oplossen van een rechthoekige driehoek, al zijn de formules anders. Vergeet ook niet dat de som van de hoeken van een driehoek 180° is! We gebruiken in dit onderdeel volgende tekening voor de aanduidingen:



$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Bij een willekeurige driehoek heb je ook meestal meer gegevens nodig dan bij een rechthoekige driehoek om hem op te lossen. De techniek blijft hetzelfde:

Kies een formule waar 3 onderdelen gegeven zijn, en bepaal de vierde.

Voorbeeld 1 In een willekeurige driehoek zijn gegeven $\alpha = 20°$, $\gamma = 50°$ en $a = 10$. Geef de andere waarden.
We moeten dus nog β, b en c berekenen. Omdat je al twee hoeken hebt, is de derde gemakkelijk te vinden uit:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Leftrightarrow 20° + \beta + 50° = 180° \Leftrightarrow \beta = 110°$$

Om b te berekenen, kunnen we de cosinusregel niet gebruiken, want we kennen 2 zijden niet, en bij de cosinusregel treden altijd alle zijden op. Dus moeten we de sinusregel gebruiken:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

We kennen zowel a als α, dus gebruiken we van de sinusregel:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Leftrightarrow \frac{10}{\sin 20°} = \frac{c}{\sin 50°}$$

Je ziet dat er nog maar 1 onbekende is, namelijk c. Dus we vinden, door alles uit te rekenen:

$$\frac{10}{0,34} = \frac{b}{0,77} \Leftrightarrow c = \frac{10}{0,34} \cdot 0,77 \approx 22,65$$

Blijft er nog b over, die we ook doen met de sinusregel:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Leftrightarrow \frac{10}{0,34} = \frac{c}{0,94} \Leftrightarrow b = 27,65$$

Voorbeeld 2 In een willekeurige driehoek zijn gegeven $\beta = 45°$, $a = 5$, $c = 6$. Bepaal de andere waarden.
Hier hebben we slechts 1 hoek, dus de som van de hoeken van een driehoek zal ons niet helpen.

Ook met de sinusregel zijn we niet veel, omdat we teveel gegevens missen. Dus blijft er over: de cosinusregel. Welke neem je dan? Die waar β, a en c in staan:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \Leftrightarrow b^2 = 25 + 36 - 2 \cdot 5 \cdot 6\cos 45° \Leftrightarrow b^2 = 61 - 60 \cdot 0,71 \approx 18,4$$

Dus neem je aan beide kanten een vierkantswortel en vind je:

$$b \approx 4,29$$

Nu je b kent, en β ook, kan je met de sinusregel α vinden:

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a} \Leftrightarrow \frac{\sin 45°}{4,29} = \frac{\sin\alpha}{5}$$

Afzonderen en uitrekenen, levert je dan op

$$\sin\alpha = \frac{45°}{4,29} \cdot 5 = 0,82$$

Je kan nu met $\sin^{-1}$ het juiste antwoord vinden:

$$\alpha = 55,08°$$

γ vind je nu met

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Leftrightarrow 55,08° + 45° + \gamma = 180° \Leftrightarrow \gamma = 79,92°$$

Opmerking

- De som van de hoeken van een driehoek is 180°, elke hoek apart heeft een grootte tussen 0° en 180°.
- Bij het berekenen van de hoeken in een driehoek zal je gebruik maken van de commando's $\sin^{-1}$ en $\cos^{-1}$ op je rekentoestel. Bij gebruik van $\cos^{-1}$ zal dit de juiste hoek geven maar bij gebruik van $\sin^{-1}$ kan dit een verkeerde uitkomst geven. Dit komt omdat $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ en het commando $\sin^{-1}$ steeds die hoek oplevert die kleiner is dan 90°.
  Bijvoorbeeld: $\alpha = 45°$ en $180° - 45° = 135°$ hebben dezelfde sinus. Als de onbekende hoek in de driehoek 135° is zal $\sin^{-1}$ echter 45° geven...
  Praktisch ga je bij gebruik van $\sin^{-1}$ bij het oplossen van driehoeken als volgt te werk:
  - Indien je een meetkundig correcte tekening van de driehoek hebt kan je zien of de hoek die je berekent groter of kleiner dan 90° is. Als de hoek die je berekent met $\sin^{-1}$ groter is dan 90° vervang dan je uitkomst α door $180° - \alpha$.
  - Indien je niet zeker bent van de tekening dan controleer je of de som van de hoeken van de driehoek 180° is. Als dat niet het geval is vervang dan je uitkomst α door $180° - \alpha$.

Onthoud

- **De sinusregel**

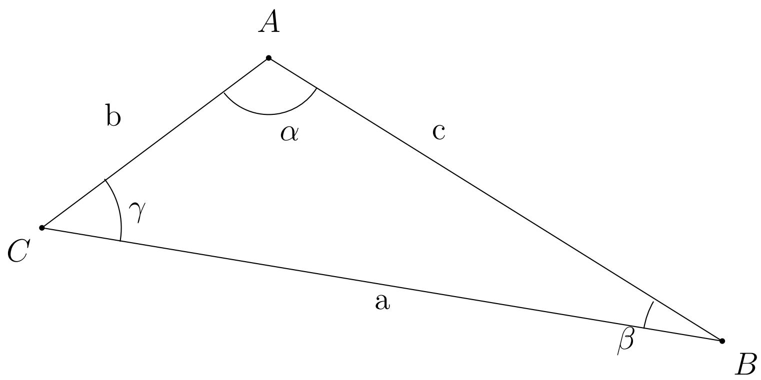
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

- **De cosinusregel**

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$

- Bij het oplossen van een willekeurige driehoek, neem je best formules waar alle gegevens behalve 1 kan ingevuld worden.

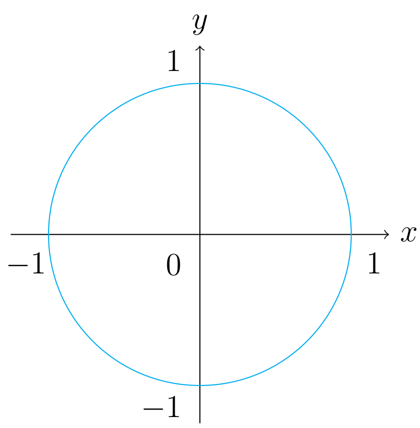
- Pas op met de sinus en $\sin^{-1}$



1.4 De goniometrische cirkel

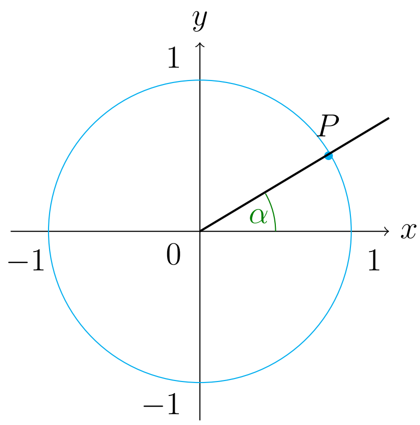
Tekening

In een vorig hoofdstukk hebben we de goniometrische getallen van hoeken ingevoerd met behulp van een rechthoekige driehoek. We kunnen ze echter ook voorstellen op een cirkel. We tekenen een cirkel met straal 1 die met zijn middelpunt in de oorsprong van een orthonormaal* assenstelsel ligt. Deze cirkel noemen we de goniometrische cirkel.



*: een orthonormaal assenstelsel is een rechthoekig (orthogonaal) assenstelsel waarbij de eenheid op beide assen gelijk is.

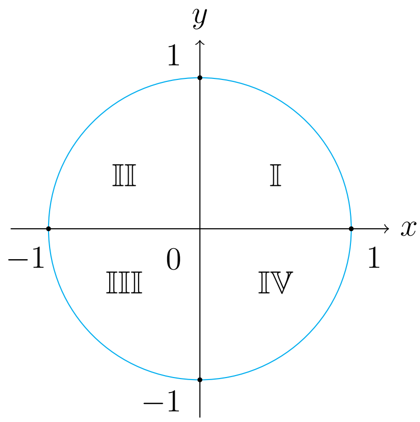
In de goniometrische cirkel kan je nu een hoek α tekenen, die zijn beginbeen heeft op de x-as, en zijn hoekpunt in de oorsprong. Zijn eindbeen snijdt de goniometrische cirkel in een punt P dat we het beeldpunt van de hoek α op de goniometrische cirkel noemen.



Elk punt van de goniometrische cirkel wordt zo het beeldpunt van een hoek door als beginbeen de x-as te nemen, als hoekpunt de oorsprong, en als eindbeen de halve rechte door de oorsprong en het punt. De hoek die bij het beeldpunt hoort is niet uniek, integendeel, tel je bij de hoek een aantal volledige omwentelingen op (of trek je die ervan af), dan kom je op hetzelfde beeldpunt terecht. Op die manier hoort bij elk punt van de goniometrische cirkel een oneindig aantal hoeken die onderling een geheel aantal omwentelingen van elkaar verschillen. In het algemeen spreken we van omwentelingshoeken. Omwentelingshoeken hebben een oriëntatie, in tegenuurwijzerzin is een hoek positief, in uurwijzerzin negatief.

Kwadranten

De goniometrische cirkel wordt ingedeeld in kwadranten. Ze zijn genummerd, meestal in Romeinse cijfers, tegenkloksgewijs, beginnend rechtsboven in de cirkel.



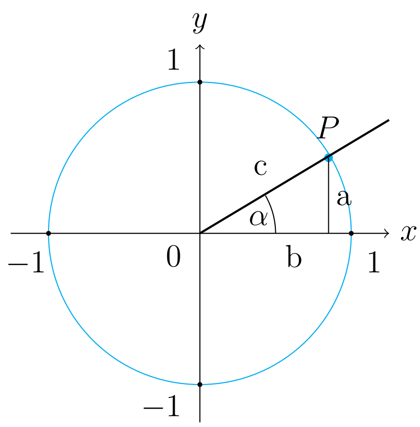
Goniometrische getallen

We kennen de goniometrische getallen als verhoudingen van zijden in een rechthoekige driehoek:

$$\sin\alpha = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}} \qquad \cot\alpha = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{overstaande rechthoekszijde}}$$

Scherpe hoeken hebben een beeldpunt in het eerste kwadrant, daarmee kunnen we kunnen een rechthoekige driehoek tekenen in de goniometrische cirkel laten overeenkomen, met zijden a, b en c:



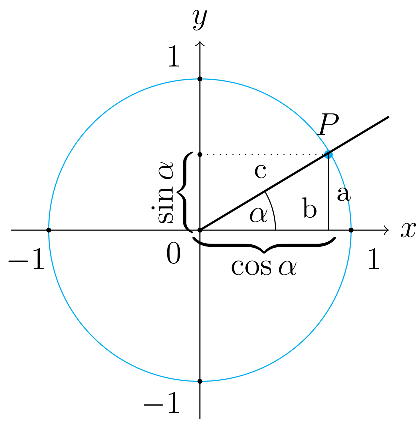
In deze rechthoekige driehoek kan je nu de sinus en de cosinus berekenen:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

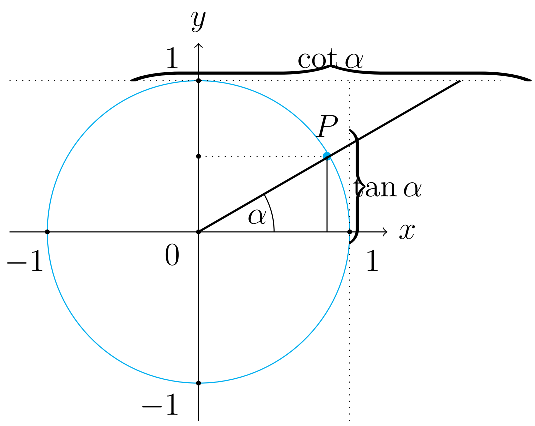
Je weet dat de lengte van zijde c gelijk is aan 1, omdat c net de straal is van de goniometrische cirkel! Dus:

$$\sin\alpha = a \qquad \cos\alpha = b$$

De waarde van de sinus kan je dus aflezen op de y-as, en de waarde van de cosinus lees je af op de x-as, als je het punt P ernaar projecteert.



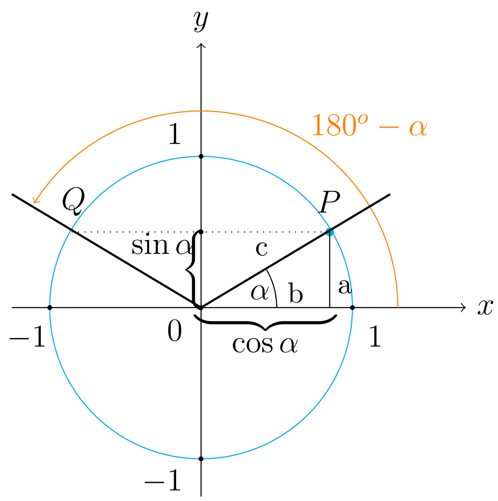
Ook de tangens en cotangens kan je aflezen van de goniometrische cirkel.



Uit deze twee figuren blijkt duidelijk dat de sinus en de cosinus niet kleiner kunnen zijn dan -1, en niet groter dan 1. De tangens en de cotangens hebben deze beperkingen niet.

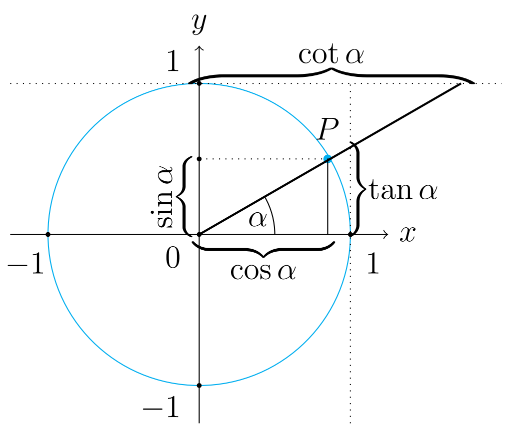
Wat we tot nu toe gevonden hebben voor hoeken uit het eerste kwadrant veralgemenen we voor alle omwentelingshoeken . De sinus van een hoek is de loodrechte projectie op de y-as van het beeldpunt van de hoek, de cosinus van de hoek is de loodrechte projectie op de x-as van het beeldpunt van de hoek. Ook de tangens en de cotangens van om het even welke hoek wordt afgelezen via de goniometrische cirkel zoals dat voor hoeken uit het eerste kwadrant gebeurt.

Opmerking Bij het bespreken van willekeurige driehoeken hebben we vermeld dat het gebruik van het commando $\sin^{-1}$ op een rekentoestel om een hoek α te bepalen soms een verkeerd resultaat kan opleveren. Hieronder is op een figuur gedemonstreerd dat een hoek α uit het eerste kwadrant en een hoek $180° - \alpha$ uit het tweede kwadrant dezelfde sinus hebben. De punten P en Q hebben immers dezelfde projectie op de y-as.

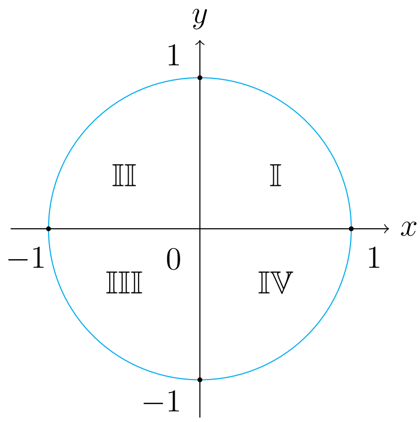


Onthoud

- De goniometrische cirkel is een cirkel met straal 1 met als middelpunt de oorsprong van een orthornormaal assenkruis.
- Elk punt van de goniometrische cirkel is het beeldpunt van oneindig veel hoeken die elk een geheel aantal volledige omwentelingen van elkaar verschillen.
- De goniometrische getallen van elke hoek kan je aflezen van de goniometrische cirkel:



- De kwadranten verdelen de goniometrische cirkels in 4 sectoren:



$$\alpha \in \mathrm{I} \Leftrightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ$$
$$\alpha \in \mathrm{II} \Leftrightarrow 90^\circ < \alpha < 180^\circ$$
$$\alpha \in \mathrm{III} \Leftrightarrow 180^\circ < \alpha < 270^\circ$$
$$\alpha \in \mathrm{IV} \Leftrightarrow 270^\circ < \alpha < 360^\circ$$

1.5 Bijzondere hoeken en aanverwante hoeken

In volgende tabel vind je een overzicht van de belangrijkste goniometrische getallen van bijzondere hoeken. Het bewijs voor de waarden van de goniometrische getallen van deze bijzondere hoeken laten we hier achterwege. Leer deze tabel uit het hoofd.

x	0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad
x	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\mid$

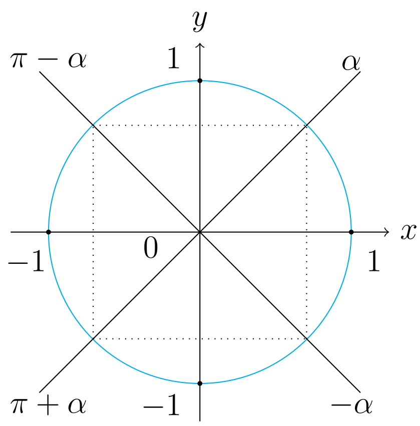
Uit deze tabel lees je eenvoudig af dat de sinus en de cosinus van hoeken die samen een rechte hoek vormen eenzelfde waarde hebben. Zo'n hoeken noemen we complementaire hoeken.

We onderscheiden nog andere hoeken waarvan de cosinus en/of de sinus verwant zijn aan elkaar, we noemen ze verwante hoeken. We zetten ze hier allemaal op een rijtje:

- complementaire omwentelingshoeken: $\alpha + \beta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ rad
- omwentelingshoeken met hetzelfde beeldpunt: $\beta = \alpha + 360^\circ; \beta = \alpha + 2\pi$ rad
- tegengestelde omwentelingshoeken: $\beta = -\alpha$
- supplementaire omwentelingshoeken:$\alpha + \beta = 180^\circ; \alpha + \beta = 2\pi$ rad
- anticomplementaire omwentelingshoeken: $\beta = \alpha + 90^\circ; \beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ rad
- antisupplementaire omwentelingshoeken: $\beta = \alpha + 180^\circ; \beta = \alpha + \pi$ rad

Het is niet belangrijk om de namen van deze verwante hoeken te kennen, maar wel dat je vanuit een schets van de goniometrische cirkel het verband kan zien tussen de goniometrische getallen van deze hoeken.

Een voorstelling van verwante hoeken van de hoek α vind je in volgende figuur:



1.6 Overgang van goniometrische getallen van hoeken naar goniometrische functies

Tot nu toe hebben we steeds goniometrische getallen van hoeken bestudeerd. Nu definiëren we eveneens de goniometrische getallen van reële getallen. Definities:

- de goniometrische getallen van een reëel getal x, zijn de goniometrische getallen van de hoek x rad
- het beeldpunt van een reëel getal x op de goniometrische cirkel is het beeldpunt van de hoek x rad op de goniometrische cirkel.
- de tabel van de goniometrische getallen van bijzondere hoeken geeft een tabel van goniometrische getallen van bijzondere getallen.
- aanverwante hoeken geven aanleiding tot aanverwante getallen en bijbehorende formules voor hun goniometrische getallen.

Door een getal x in $\mathbb{R}$ te laten variëren bekomen we de goniometrische functies (zie mooc wiskunde 2.1.12).

1.7 Goniometrische formules

Dit hoofdstuk bestaat uit een opsomming van de belangrijkste formules in goniometrie.

Bijzondere goniometrische getallen

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \sec\,\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \csc\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Grondformules

$$\begin{aligned}
&\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1\\
&1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha\\
&1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha
\end{aligned}$$

Verwante hoeken

Gelijke hoeken

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + k\cdot 360°) &= \sin(\alpha)\\
\cos(\alpha + k\cdot 360°) &= \cos(\alpha)\\
\tan(\alpha + k\cdot 360°) &= \tan(\alpha)\\
\cot(\alpha + k\cdot 360°) &= \cot(\alpha)
\end{aligned}$$

Tegengestelde hoeken

$$\begin{aligned}
\sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha)\\
\cos(-\alpha) &= \cos(\alpha)\\
\tan(-\alpha) &= -\tan(\alpha)\\
\cot(-\alpha) &= -\cot(\alpha)
\end{aligned}$$

Supplementaire hoeken

$$\begin{aligned}
\sin(180° - \alpha) &= \sin(\alpha)\\
\cos(180° - \alpha) &= -\cos(\alpha)\\
\tan(180° - \alpha) &= -\tan(\alpha)\\
\cot(180° - \alpha) &= -\cot(\alpha)
\end{aligned}$$

Antisupplementaire hoeken

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + 180°) &= -\sin(\alpha)\\
\cos(\alpha + 180°) &= -\cos(\alpha)\\
\tan(\alpha + 180°) &= \tan(\alpha)\\
\cot(\alpha + 180°) &= \cot(\alpha)
\end{aligned}$$

Complementaire hoeken

$$\begin{aligned}
\sin\,(90° - \alpha) &= \cos(\alpha)\\
\cos\,(90° - \alpha) &= \sin(\alpha)\\
\tan\,(90° - \alpha) &= \cot(\alpha)\\
\cot\,(90° - \alpha) &= \tan(\alpha)
\end{aligned}$$

Anticomplementaire hoeken

$$\begin{aligned}
\sin\,(90° + \alpha) &= \cos(\alpha)\\
\cos\,(90° + \alpha) &= -\sin(\alpha)\\
\tan\,(90° + \alpha) &= -\cot(\alpha)\\
\cot\,(90° + \alpha) &= -\tan(\alpha)
\end{aligned}$$

Som- en verschilformules

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \\
\cot(\alpha \pm \beta) &= \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\alpha \pm \cot\beta}
\end{aligned}
$$

Verdubbelingsformules

$$
\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \\
\tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos 2\alpha &= \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \\
&= 1 - 2\sin^2\alpha \\
&= 2\cos^2\alpha - 1
\end{aligned}
$$

Simpson-formules

$$
\begin{aligned}
\sin(x) + \sin(y) &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\
\sin(x) - \sin(y) &= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \\
\cos(x) + \cos(y) &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\
\cos(x) - \cos(y) &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}
\end{aligned}
$$

Omgekeerde Simpson-formules

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right] \\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right] \\
\sin\alpha\sin\beta &= -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right]
\end{aligned}
$$

1.8 Oplossen van goniometrische vergelijkingen in $\mathbb{R}$

Bij het oplossen van goniometrische vergelijkingen zoek je alle reële getallen die aan de vergelijking voldoen. Het spreekt vanzelf dat je dan ook gebruik zal moeten maken van verwante getallen die je terugvindt via de goniometrische cirkel. Het is de bedoeling om elke goniometrische vergelijking te herleiden tot één of meerdere basisvergelijkingen.

Basisvergelijkingen:

- $\cos(x) = \cos(a) \iff x = \pm a + 2k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$
- $\sin(x) = \sin(a) \iff x = a + 2k\pi$ of $x = \pi - a + 2k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$
- $\tan(x) = \tan(a) \iff x = a + k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$

Voorbeeld 1 $\sin(x) = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ of $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$

Voorbeeld 2 $\cos(x) = 0,7 \iff x = \pm 0,795 + 2k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$

Voorbeeld 3 $\tan(x) = -1,5 \iff x = -0,983 + k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$

Voorbeeld 4 $\sin(x) = 1,5$: heeft geen oplossingen

1.9 Oefeningen

1 Druk uit in radialen:

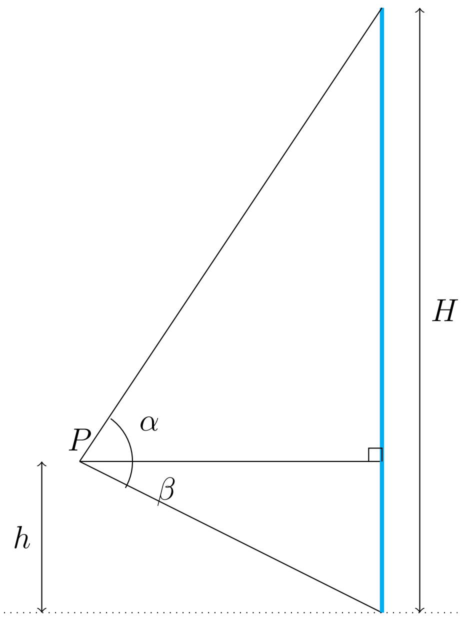
1. $108,17°$
2. $12°40'33''$
3. 190 gon

2 Reken uit:

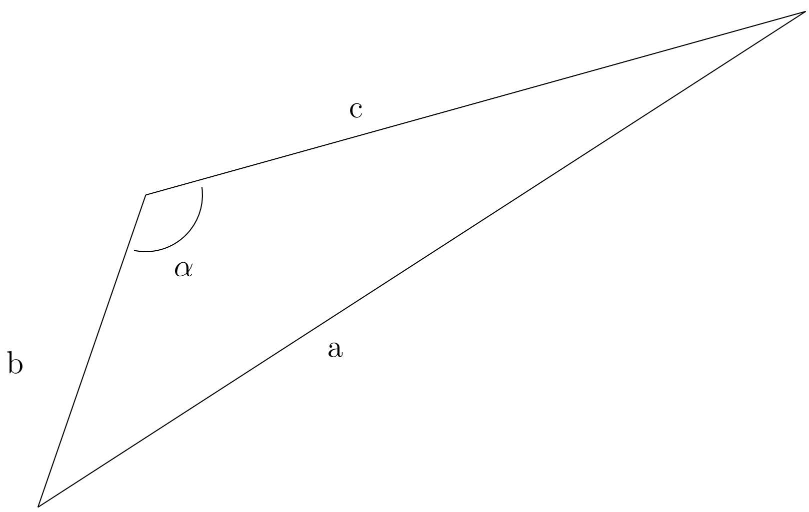
1. $267,83° - 117,85°$
2. $12°02'58'' + 4°13'07''$
3. $\frac{5}{3}\pi$ rad - $5°12'57''$ (in radialen)
4. $15,15$ gon + $15,15°$ (in decimale graad)

Rekenen met driehoeken

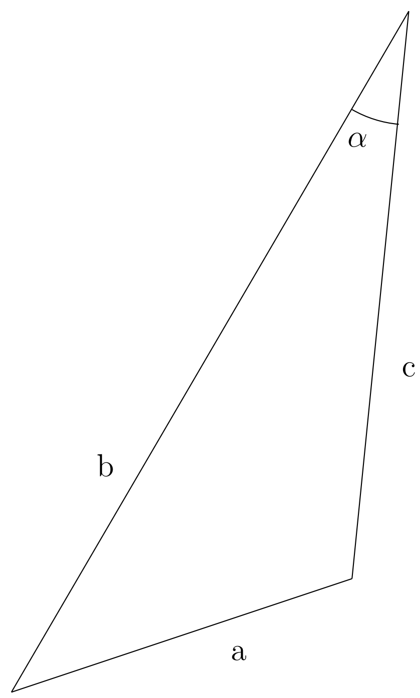
3 Om de hoogte van een mast te bepalen plaatst een landmeter een theodoliet in het punt P op een hoogte $h = 1,65$ m. Ze meet dan de hoeken α en β met de horizontale: $\alpha = 78,12°$ en $\beta = 4,71°$.
Bereken de hoogte H van de mast.



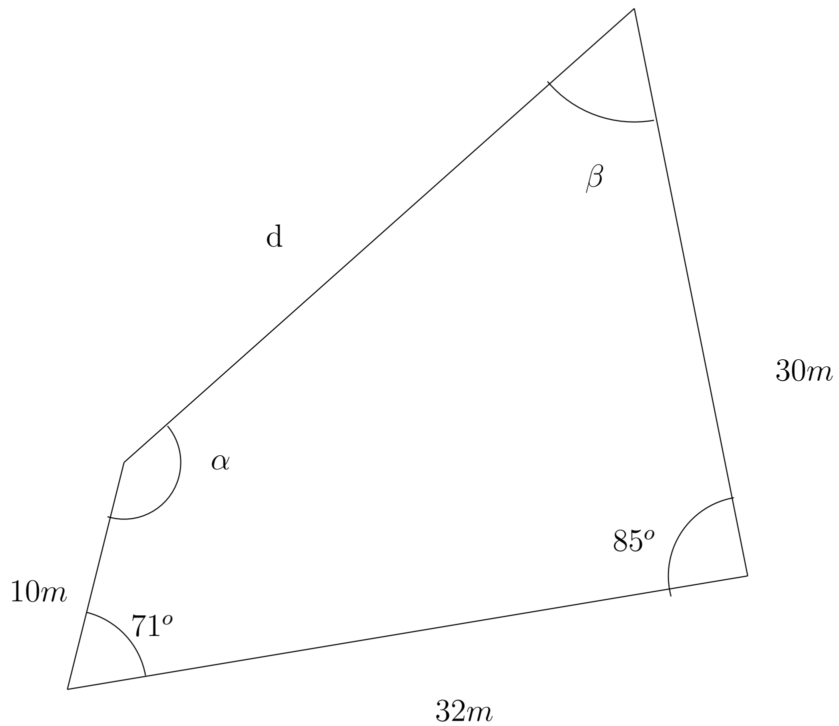
4 e lengte van elke zijde van de gegeven driehoek zijn gekend: $a = 53$ cm, $b = 18$ cm en $c = 41$ cm.
Bereken de hoek α.



5 Bereken de lengte van zijde c van de gegeven driehoek.
Gegevens: $a = 13$ mm, $b = 20$ mm, $\alpha = 21°$.



6 Op de figuur is een schets van een stuk weiland met de gekende gegevens weergegeven. Bereken de lengte van zijde d en de hoeken α en β.



2 Complexe getallen

Inleiding

De verzameling van de complexe getallen $\mathbb{C}$ is een uitbreiding van de verzameling van de reële getallen $\mathbb{R}$ waarbij elk complex getal bestaat uit twee reële getallen. Het ene reëel getal wordt het reëel deel van het complex getal genoemd, het andere reëel getal het imaginaire deel.
Alhoewel een eerste kennismaking met complexe getallen heel wat mensen hun wenkbrauwen doet fronsen blijkt dit soort getallen heel wat rekenwerk in de fysica en de techniek eenvoudiger te maken. Dit is bijvoorbeeld zeker het geval in vakgebieden als mechanica (trillingen), akoestiek (golven) en elektrotechniek (wisselstroom).

2.1 De imaginaire eenheid

Definitie Als eerste stap bij het bespreken van complexe getallen definiëren we de imaginaire eenheid i als het getal waarvoor geldt:

$$i^2 = -1$$

Opmerking Hierbij moeten we enkele bedenkingen maken:

- Het gebeurt wel eens dat deze definitie wordt herschreven als $i = \sqrt{-1}$. Dit is echter totaal **fout**. We zullen verderop zien dat -1 meer dan één vierkantswortel heeft.
- In sommige vakgebieden zoals elektrotechniek geeft men de voorkeur aan de letter j als symbool voor de imaginaire eenheid.
- Een eigenschap van i die heel wat rekenwerk kan vereenvoudigen is het volgende:

  Eigenschap 1

$$i^2 = -1 \iff i = -\frac{1}{i} \iff -i = \frac{1}{i}$$

2.2 Het complex getal

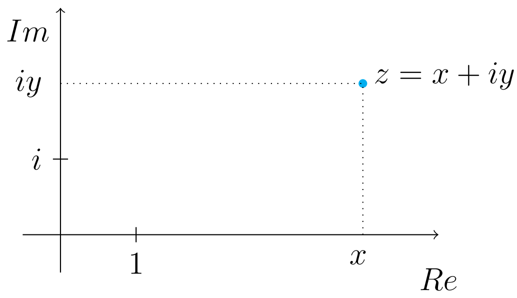
Definitie Twee reële getallen x en y worden gecombineerd tot een complex getal z:

$$z = x + iy$$

Het reële getal x wordt het reële deel van z genoemd: $x = Re(z) = \Re(z)$.
Het reële getal y wordt het imaginaire deel van z genoemd: $y = Im(z) = \Im(z)$.
Merk op dat als $y = 0$ dan $z = x$ met $x \in \mathbb{R}$. Met andere woorden de verzameling van de reële getallen is een deelverzameling van de verzameling van de complexe getallen: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Analoog

geldt dat als $x = 0$ dan $z = iy$. Het getal iy wordt een **imaginair getal** genoemd.

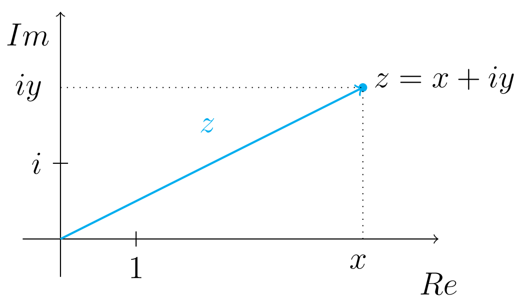
Aangezien een complex getal bestaat uit twee reële getallen kan een complex getal meetkundig worden voorgesteld door een punt in een vlak. Dit vlak, **het complex vlak**, wordt bepaald door de getallenas van de reële getallen, de reële as, met loodrecht daarop de imaginaire as. Deze laatste is de reële as waarop de eenheid (het getal 1) vervangen is door i.



Met behulp van schuifknoppen kan je in de volgende interactieve voorstelling het reële en imaginaire deel van het getal veranderen en nagaan waar in het complex vlak het complex getal zich bevindt.

Scan QR code voor animatie.

De plaats van een punt in een vlak is ook bepaald door de plaatsvector van het punt. Een complex getal z kan dus ook worden voorgesteld als een vector in het complex vlak. Een dergelijke vector wordt meestal aangeduid met het symbool $\underline{z}$.



Een interactieve voorstelling van een vector in het complex vlak.

Scan QR code voor animatie.

2.3 Rekenen met complexe getallen

Som van complexe getallen

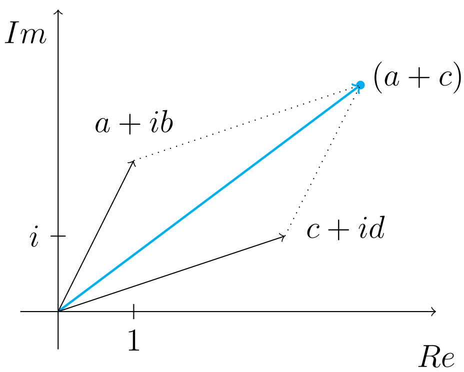
Definitie De som van twee complexe getallen $z_1 = a + ib$ en $z_2 = c + id$ is gedefinieerd als

$$\boxed{z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)}$$

ofwel

$$\boxed{\Re(z_1 + z_2) = \Re(z_1) + \Re(z_2) \qquad \Im(z_1 + z_2) = \Im(z_1) + \Im(z_2)}$$

Het afzonderlijk optellen van de reële en imaginaire delen van de complexe getallen kan beschouwd worden als het optellen van componenten van vectoren in het complex vlak. Met andere woorden: optellen van complexe getallen komt neer op optellen van vectoren in het complex vlak.



Product van complexe getallen

Als we twee complexe getallen $z_1 = a + ib$ en $z_2 = c + id$ met elkaar willen vermenigvuldigen kunnen we dit in eerste instantie neerschrijven als $z_1 z_2 = (a + ib)(c + id)$.
Om het product te berekenen worden de haakjes uitgewerkt op de klassieke manier maar wordt er expliciet rekening gehouden met $i^2 = -1$.

Eigenschap 2

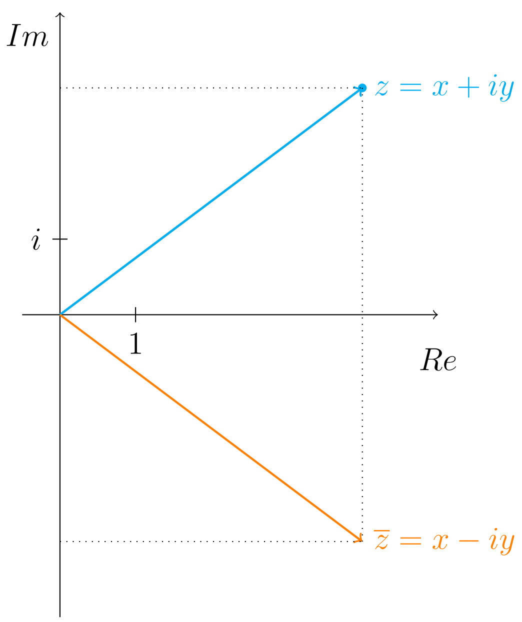
$$z_1 z_2 = (a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2 bd = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Complex toegevoegde van een complex getal

Definitie De complex toegevoegde van een complex getal vindt men door het imaginair deel van een complex getal van teken te veranderen. Men noteert de complex toegevoegde van z als $\overline{z}$.
Dus, als $z = x + iy$ dan is de complex toegevoegde van z het getal $\overline{z} = x - iy$.

Eigenschap 3 *Een getal vermenigvuldigen met zijn complex toegevoegde geeft het volgende interessante resultaat:*

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + iyx - i^2 y^2 = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$$



Een meer interactieve voorstelling vind je hier.

Scan QR code voor animatie.

Modulus van een complex getal

Definitie De grootte van de plaatsvector van een complex getal wordt de modulus van dat getal genoemd.

Met behulp van de stelling van Pythagoras wordt de grootte berekend als $|\underline{z}| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Eigenschap 4 *De modulus van het complex getal $z = x + iy$ kan dus ook geschreven worden als*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$$

Quotiënt van complexe getallen

Het berekenen van het quotiënt van twee complexe getallen komt er op neer dat men er voor zorgt dat de noemer van de uitdrukking een reëel getal wordt. De gehele uitdrukking wordt dan een duidelijk leesbaar complex getal.
De eenvoudigste manier om dit te doen is teller en noemer vermenigvuldigen met de complex toegevoegde van de noemer.
Laten we de getallen $z_1 = a + ib$ en $z_2 = c + id$ delen door elkaar:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

Voorbeeld 1

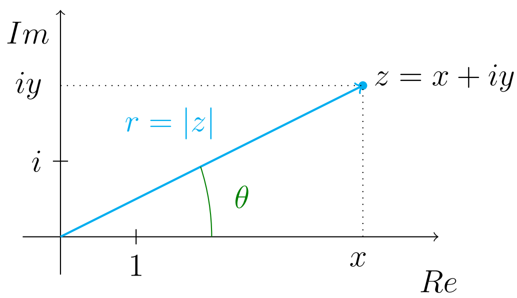
$$\frac{4 - i}{1 + i} = \frac{(4 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{4 - 4i - i - 1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$$

2.4 Rekenen met complexe getallen - voorbeeld

Zie filmpje MOOC.

2.5 Goniometrische vorm van een complex getal

De plaats van een punt P in een vlak wordt traditioneel vastgelegd met behulp van de cartesische coördinaten (x, y). Het is echter evengoed mogelijk hiervoor andere coördinaten te kiezen. Een mogelijk alternatieve keuze zijn de afstand r van het punt P tot de oorsprong en de hoek θ die de rechte OP maakt met de $x-$as. (r, θ) worden poolcoördinaten genoemd.
Passen we dit toe op een complex getal z in het complex vlak dat wordt de afstand r de modulus $|z|$ en de hoek θ de hoek die de vector $\underline{z}$ maakt met de $x-$as.



Figuur .1: *Goniometrische vorm van een complex getal. De plaats van het getal in het complex vlak wordt vastgelegd door de poolcoördinaten $r = |z|$ en θ*

Door de bij het getal $z = x + iy$ horende vector te projecteren op de reële as en op de imaginaire as vindt men

$$\begin{cases} x = \Re(z) = |z| \cos \theta \\ y = \Im(z) = |z| \sin \theta \end{cases}$$

Eigenschap 5 *In goniometrische vorm wordt dat*

$$\boxed{z = x + iy = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)}$$

Met

modulus van $z = x + iy$	$\lvert z\rvert = \sqrt{x^2+y^2}$
argument van $z = x + iy$	$\theta = \arctan \frac{y}{x}$

Opmerking

- Een punt in het complex vlak met $r = |z|$ en poolhoek θ kan ook beschreven worden met dezelfde r maar een poolhoek $\theta + 2\pi$, een poolhoek $\theta + 4\pi$, enz... Men zegt dat de hoek θ bepaald is op een geheel aantal keer 2π na.

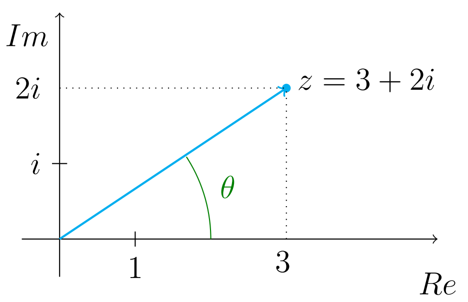
$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|(\cos(\theta + k2\pi) + i\sin(\theta + k2\pi))$$

  met k een geheel getal.
  De hoek waarvoor geldt $\theta \in [0, 2\pi[$ is de **hoofdwaarde van het argument**.

- Bij het berekenen van het argument wordt gebruik gemaakt van de Arctan-functie. Het bereik van deze functie is $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ waardoor het berekende argument het complex getal altijd in het eerste of vierde kwadrant plaatst.
  Het is dus zeer belangrijk om te controleren of het complex getal in werkelijkheid niet in het tweede of derde kwadrant ligt. Als dat het geval is moet een correctie op het berekende argument worden toegepast!
  We illustreren hoe dit in zijn werk gaat met enkele voorbeelden.

We zetten de volgende complexe getallen in goniometrische vorm:

Voorbeeld 1 $z = 3 + 2i$
We maken een figuur om duidelijk te maken in welk kwadrant het getal ligt.

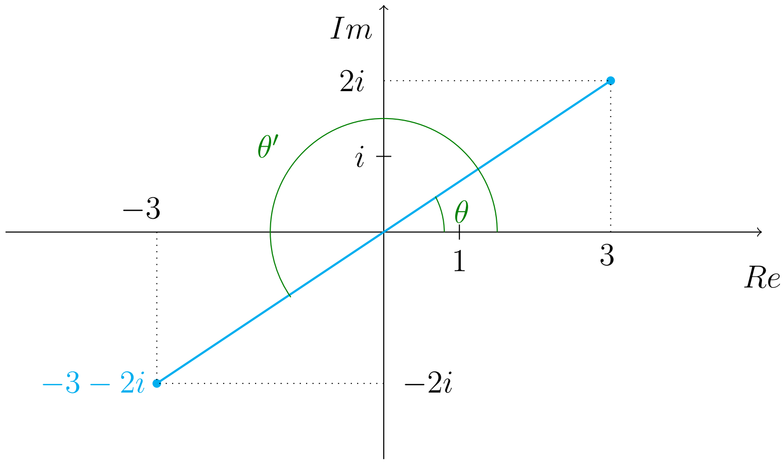


Het getal ligt in het eerste kwadrant. We kunnen dus gewoon de formule voor het argument gebruiken zonder correctie.

$\lvert z\rvert = \sqrt{3^2+2^2}$	$\lvert z\rvert = \sqrt{13}$
$\tan\theta = \frac{2}{3}$	$\theta = 33,69^o$

$$z = \sqrt{13}(\cos(33,69^o) + i\sin(33,69^o))$$

Voorbeeld 2 $z = -3 - 2i$
We maken een figuur om duidelijk te maken in welk kwadrant het getal ligt.

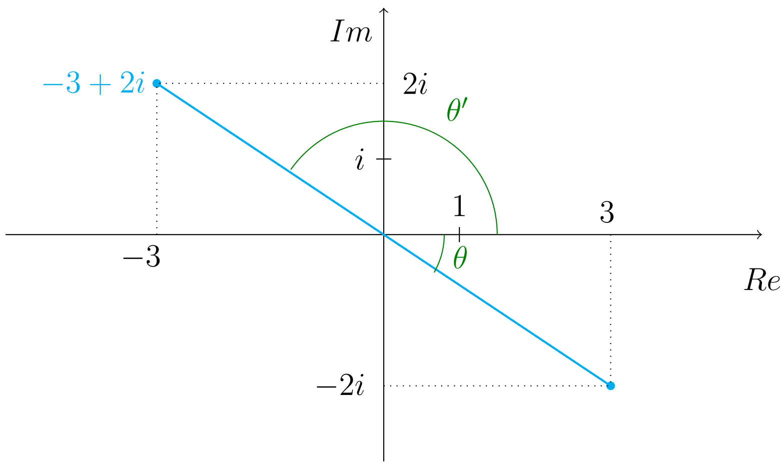


Het getal ligt in het derde kwadrant. We moeten dus een correctie toepassen op het berekende argument θ om het werkelijke argument θ' te vinden. We tellen π of 180^o bij het berekende argument.

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} \qquad |z| = \sqrt{13}$$
$$\tan\theta = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \qquad \theta = 33,69^o$$
$$\theta' = \theta + 180^o \qquad \theta' = 213,69^o$$

$$z = \sqrt{13}(\cos(213,69^o) + i\sin(213,69^o))$$

Voorbeeld 3 $z = -3 + 2i$
We maken een figuur om duidelijk te maken in welk kwadrant het getal ligt.



Het getal ligt in het tweede kwadrant. We moeten dus een correctie toepassen op het berekende argument θ om het werkelijke argument θ' te vinden. We tellen π of 180^o bij het berekende argument.

$$
\begin{array}{ll}
|z| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} & |z| = \sqrt{13} \\
\tan\theta = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3} & \theta = -33,69^o \\
\theta' = \theta + 180^o & \theta' = 146,31^o
\end{array}
$$

$$z = \sqrt{13}(\cos(146,31^o) + i\sin(146,31^o))$$

2.6 De exponentiële vorm van een complex getal

De formule van Euler

De formule van Euler drukt uit hoe de functies cos en sin in verband staan met de natuurlijke exponentiële functie.

Eigenschap 6 *Voor elk getal $x \in \mathbb{R}$ geldt:*

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Deze formule wordt bewezen in de analyse door aan te tonen dat de Taylorreeksontwikkeling van de functie e^{ix} en van de functie $\cos(x) + i\sin(x)$ hetzelfde zijn.

Eigenschap 7 *Voor praktisch rekenwerk met complexe getallen wordt de formule van Euler neergeschreven als:*

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\
e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\sin\theta
\end{aligned}
$$

Waarbij θ het argument voorstelt van de goniometrische vorm van een complex getal.

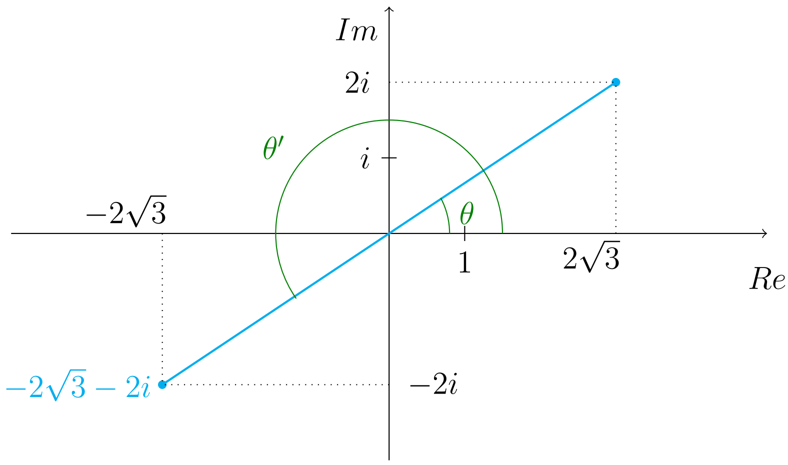
Eigenschap 8 *De formule van Euler leidt dus tot een derde, voor de praktijk zeer belangrijke, schrijfwijze voor complexe getallen.*

de algebraïsche vorm	$z = x + iy$
de goniometrische vorm	$z = \lvert z\rvert(\cos\theta + i\sin\theta)$
de exponentiële vorm	$z = \lvert z\rvert e^{i\theta}$

In principe moet in de formule van Euler, en dus ook in de exponentiële vorm van een complex getal, het argument θ uitgedrukt worden in radialen. Het gebeurt echter dikwijls dat het argument wordt uitgedrukt in graden. Dit is geen probleem zolang men beseft dat om de **numerieke waarde** van bijvoorbeeld e^{i45^o} rechtstreeks te berekenen men $e^{i\frac{\pi}{4}}$ moet uitrekenen.

Voorbeeld 1 We schrijven het getal $z = -2\sqrt{3} - 2i$ in exponentiële vorm.

Als eerste stap maken we een figuur die het getal voorstelt in het complex vlak.



Het getal ligt in het derde kwadrant. Er zal dus een correctie op de berekende waarde voor het argument moeten worden toegepast.

$$\begin{array}{ll} |z| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} & |z| = 4 \\ \tan\theta = \frac{-2}{-2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} & \theta = 30^o \\ \theta' = \theta + 180^o & \theta' = 210^o \end{array}$$

$$z = 4e^{i210^o} \text{ of ook } z = 4e^{i\frac{7}{6}\pi}$$

2.7 Bewerkingen in exponentiële vorm: som, product en quotiënt

De som

Er bestaat geen snelle manier om twee complexe getallen in exponentiële vorm op te tellen. Als je met dit probleem geconfronteerd wordt kan je op twee manieren te werk gaan.

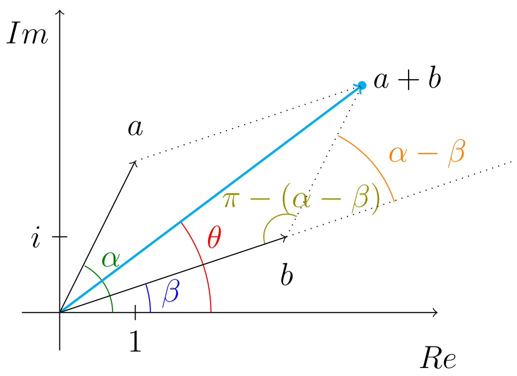
Eerste werkwijze:

1. Reken de complexe getallen om naar hun algebraïsche vorm met behulp van de formule van Euler
2. Tel de getallen in algebraïsche vorm op
3. Zet de som terug om naar exponentiële vorm.

Tweede werkwijze:

Beschouw het optellen van de twee complexe getallen als het optellen van twee vectoren in het complex vlak en gebruik driehoeksmeetkunde om de grootte (modulus) en de oriëntatie (argument) van de somvector te bepalen.

Beschouw twee complexe getallen $a = |a|e^{i\alpha}$ en $b = |b|e^{i\beta}$ waarvan je de som wil berekenen. Je wil dus modulus en argument van het complex getal $z = a + b = |z|e^{i\theta}$ vinden.
Maak nu een figuur waarin je de optelling grafisch voorstelt als de optelling van vectoren in het complex vlak:



Figuur .2: Grafische voorstelling van de optelling van twee complexe getallen als optelling van vectoren in het complex vlak. De modulus van de som $z = a + b$ wordt berekend met behulp van de cosinusregel.

In de driehoek gevormd door de vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ en de somvector $\underline{z} = \underline{a+b}$ kan je de cosinusregel toepassen om de grootte van $\underline{z}$ te berekenen:

$$|z|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos(\pi - (\alpha - \beta))$$

Aangezien $\cos(\pi - (\alpha - \beta)) = -\cos(\alpha - \beta)$ kan de modulus van de som $z = a + b$ geschreven worden als:

Eigenschap 9

$$|z| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos(\alpha - \beta)}$$

Het argument θ van de som kan je vinden door op de driehoek de sinusregel toe te passen om de hoek tussen de vectoren $\underline{b}$ en $\underline{a+b}$ te berekenen en deze hoek op te tellen bij β.

Je kan ook een algemene maar vrij ingewikkelde formule opstellen voor het argument door met de formule van Euler het reëele deel en imaginaire deel van de getallen apart op te tellen.

$$\Re(z) = \Re(a) + \Re(b) = |a|\cos\alpha + |b|\cos\beta$$
$$\Im(z) = \Im(a) + \Im(b) = |a|\sin\alpha + |b|\sin\beta$$

Het argument vind je via de algemene formule:

Eigenschap 10

$$\tan\theta = \frac{\Im(z)}{\Re(z)} = \frac{|a|\sin\alpha + |b|\sin\beta}{|a|\cos\alpha + |b|\cos\beta}$$

Het product

In tegenstelling tot het optellen van complexe getallen in exponentiële vorm is het vermenigvuldigen zeer eenvoudig. Men kan gewoon de rekenregels voor het vermenigvuldigen van exponentiële functies toepassen.

Eigenschap 11 *Neem twee getallen $a = |a|e^{i\alpha}$ en $b = |b|e^{i\beta}$. Het product geeft dan:*

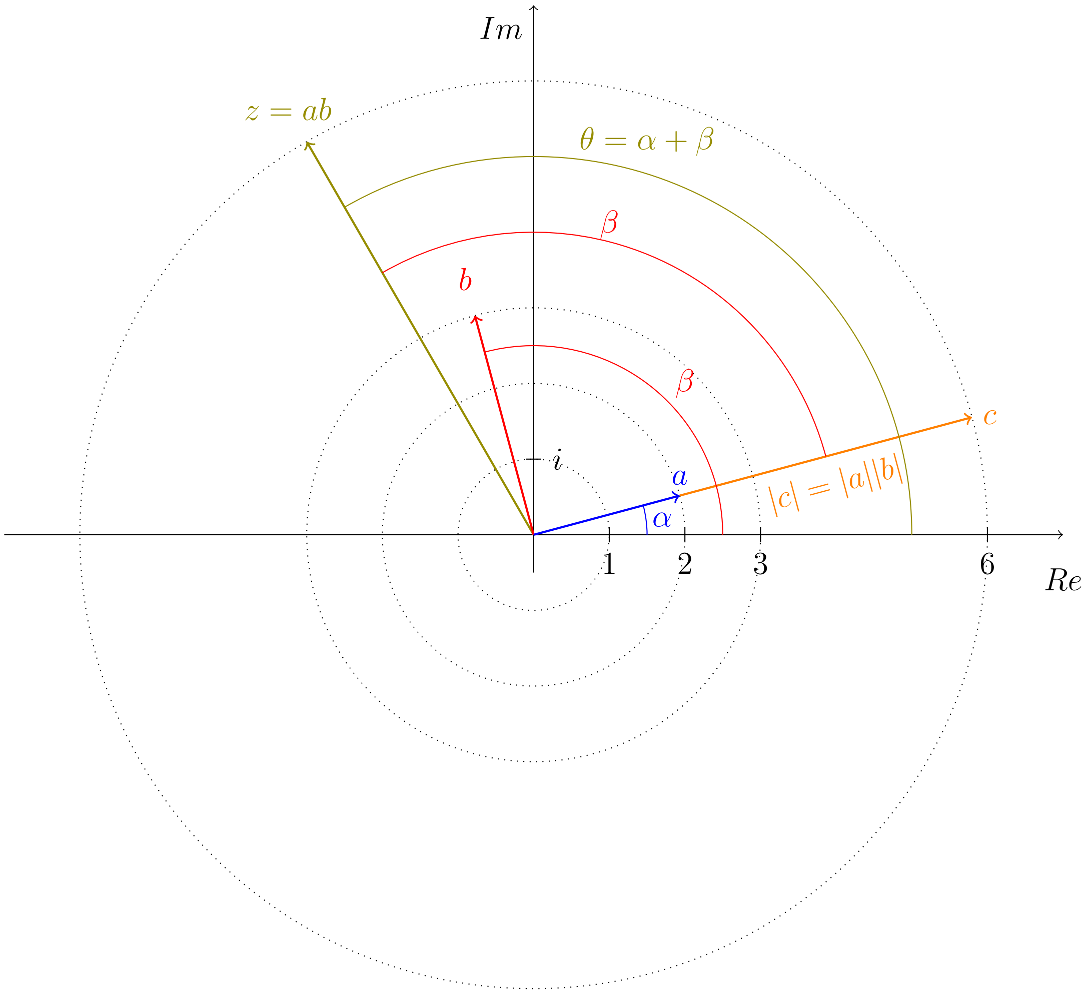
$$z = |z|e^{i\theta} = ab = (|a|e^{i\alpha})(|b|e^{i\beta})$$

Dus:

$$z = |z|e^{i\theta} = |a||b|e^{i(\alpha+\beta)}$$

Met andere woorden: de nieuwe modulus wordt gevonden door de twee oorspronkelijke moduli te vermenigvuldigen, en het nieuwe argument wordt gevonden door de oorspronkelijke argumenten op te tellen.

Het vermenigvuldigen van twee complexe getallen kan ook grafisch geïnterpreteerd worden. De vermenigvuldiging van $a = |a|e^{i\alpha}$ met $b = |b|e^{i\beta}$ komt neer op het veranderen van de lengte van de met a geassocieerde vector gevolgd door het roteren van de nieuwe vector over een rotatiehoek β.



- De met $a = |a|e^{i\alpha}$ en $b = |b|e^{i\beta}$ geassocieerde vectoren in het complex vlak worden voorgesteld in de figuur.
- Als eerste stap wordt een nieuw getal c geconstrueerd met hetzelfde argument als a maar met modulus $|c| = |a||b|$. De met c geassocieerde vector ligt dus evenwijdig met de met a geassocieerde vector maar heeft een andere lengte.
- Vervolgens wordt de nieuwe vector $\underline{c}$ geroteerd over een hoek β wat de vector $\underline{z}$ oplevert. Het met deze vector geassocieerde complex getal $z = |a||b|e^{i(\alpha+\beta)}$ is het product van a en b.

Deze stappen worden geïllustreerd in deze demo:

Scan QR code voor animatie.

Het quotiënt

Het complex getal $a = |a|e^{i\alpha}$ delen door het complex getal $b = |b|e^{i\beta}$ gebeurt op analoge manier als bij de vermenigvuldiging:

Eigenschap 12

$$z = \frac{|a|e^{i\alpha}}{|b|e^{i\beta}} = \frac{|a|}{|b|}e^{i(\alpha-\beta)}$$

Grafisch wordt dit geïnterpreteerd als het opeenvolgens construeren van een vector $\underline{c}$, evenwijdig met de met a geassocieerde vector en met grootte $|c| = \frac{|a|}{|b|}$, gevolgd door rotatie van de nieuwe vector $\underline{c}$ over een hoek $-\beta$.

2.8 Bewerkingen in exponentiële vorm: machtsverheffing en worteltrekking

Machtsverheffing

Een complex getal verheffen tot de macht $n \in \mathbb{N}$ kan je beschouwen als een speciaal geval van het vermenigvuldigen van complexe getallen. Het getal z wordt n keer met zichzelf vermenigvuldigd. Dus:

Definitie

Voor $z \in \mathbb{C}$ met $z = |z|e^{i\theta}$ en $n \in \mathbb{Z}$ geldt $z^n = (|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{in\theta}$.

Opmerking

- Door de uitdrukking $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ om te zetten naar goniometrische vorm met de formule van Euler vindt men

Eigenschap 13

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Deze uitdrukking staat bekend als de **formule van de Moivre** .

- Zelfs als een complex getal gegeven is in algebraïsche vorm is het voor de machtsverheffing meestal aan te raden om het getal om te zetten in exponentiële vorm.

$$(1+i)^5 = (1+i)(1+i)(1+i)(1+i)(1+i) = ...$$

In exponentiële vorm (het getal ligt in het eerste kwadrant):

$$(1+i) = \sqrt{(1^2+1^2)}e^{i\arctan 1}$$

dus

$$(1+i) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Machtsverheffing:

$$\begin{aligned}(1+i)^5 &= (\sqrt{2})^5 e^{i\frac{5}{4}\pi} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi}\\(1+i)^5 &= 4\sqrt{2}(\cos(\tfrac{5}{4}\pi) + i\sin(\tfrac{5}{4}\pi))\\(1+i)^5 &= 4(-1-i)\\(1+i)^5 &= -4-4i\end{aligned}$$

Worteltrekking

Definitie Een $n-$de machtswortel z_n van een complex getal (met $n \in \mathbb{N}$) wordt als volgt gedefinieerd:

$$z_n \text{ is } \textbf{een } n - \text{de machtswortel van } z \in \mathbb{C} \iff (z_n)^n = z$$

Om de wortels te vinden schrijven we de complexe getallen in exponentiële notatie en drukken we expliciet uit dat het argument op een geheel aantal keer 2π na bepaald is.

het complex getal in exponentiële vorm	$z = \|z\|e^{i(\theta+k2\pi)}, k \in \mathbb{Z}$
een n-de machtswortel van z	$z_n = \|z_n\|e^{i\theta_n}$

Toepassen van de definitie geeft:

$$\begin{aligned}&(|z_n|e^{i\theta_n})^n = |z|e^{i(\theta+k2\pi)}\\\iff\ &|z_n|^n e^{in\theta_n} = |z|e^{i(\theta+k2\pi)}\\\iff\ &|z_n| = \sqrt[n]{|z|} \text{ en } \theta_{n,k} = \tfrac{\theta+k2\pi}{n}, k = 0,1,2,...,n-1\end{aligned}$$

Er zijn maar n verschillende waarden voor k want zodra $k = n$ bekomt men hetzelfde argument als voor $k = 0$:

$$k = 0 \iff \theta_{n,0} = \frac{\theta}{n}$$

$$k = n \iff \theta_{n,n} = \frac{\theta + n2\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$$

Onthoud Elk complex getal $z = |z|e^{i\theta}$ heeft n verschillende $n-$de machtswortels:

$$z_{n,k} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\theta+k2\pi}{n}}$$

met $k = 0, 1, ..., n-1$

Voorbeeld 1 Bereken de tweedemachtswortels van $z = -1$ (m.a.w. $\sqrt{-1}$).

We schrijven -1 eerst in exponentiële vorm:

$$z = -1 \iff z = 1e^{i\pi} \iff z = e^{i(\pi+k2\pi)}, k \in \mathbb{Z}$$

We passen de definitie van $2-$de machtswortel toe:

$$\begin{aligned}
&(|z_2|e^{i\theta_2})^2 = e^{i(\pi+k2\pi)} \\
\iff & |z_2|^2 e^{i2\theta_2} = 1e^{i(\pi+k2\pi)} \\
\iff & \begin{cases} |z_2|^2 = 1 \\ 2\theta_2 = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} |z_2| = 1 \\ \theta_2 = \frac{\pi+k2\pi}{2}, k = 0, 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

De twee tweedemachtswortels van $z = -1$ zijn dus

$$\begin{cases} z_{2,0} = 1e^{i\frac{\pi}{2}} = i \\ z_{2,1} = 1e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i \end{cases}$$

Het complex getal $z = -1$ heeft dus **twee** vierkantswortels: i en $-i$. De in technische teksten veel gebruikte uitdrukking $i = \sqrt{-1}$ is dus **niet correct**...

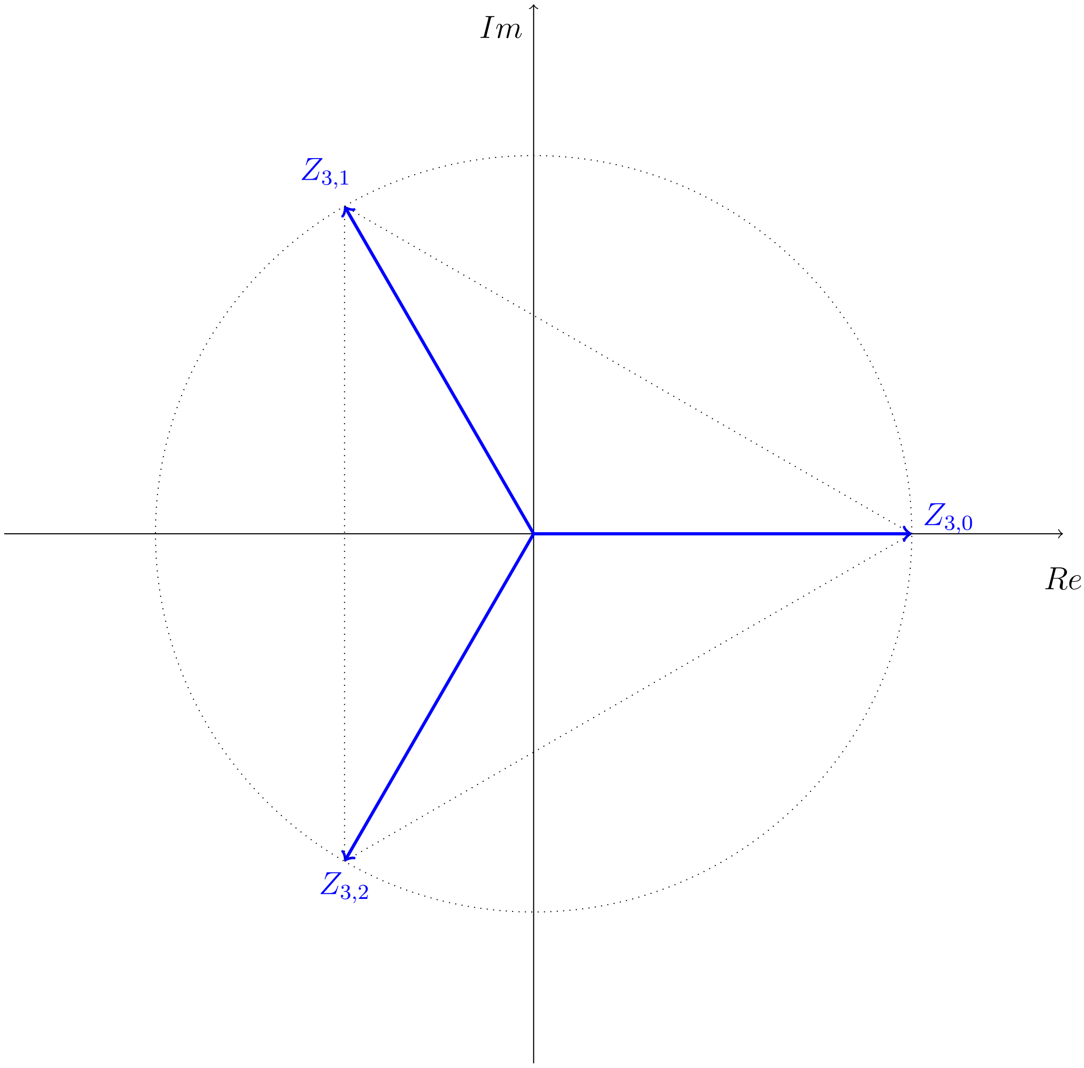
Voorbeeld 2 Bereken de derdemachtswortels van 125: $\sqrt[3]{125} =?$.

We beschouwen $z = 125$ als een complex getal en schrijven het in exponentiële vorm: $z = 125e^{i(0+k2\pi)}, k \in \mathbb{Z}$
Dan gebruiken we de definitie van de derde machtswortels: $(z_3)^3 = 125$

$$|z_3|^3 e^{i3\theta_3} = 125e^{ik2\pi} \iff |z_3| = \sqrt[3]{125} = 5 \text{ and } \theta_3 = k\frac{2\pi}{3}, k = 0, 1, 2$$

De derdemachtswortels van 125 zijn dus:

$$\begin{cases} z_{3,0} = 5 \\ z_{3,1} = 5e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ z_{3,2} = 5e^{i\frac{4\pi}{3}} \end{cases}$$



In het complex vlak liggen de wortels op een cirkel met de oorsprong als middelpunt en met straal $|z_3|$. De argumenten van de verschillende wortels zijn zodanig dat de drie wortels op de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek liggen.

Dit laatste kan veralgemeend worden. De n verschillende n-de machtswortels van een complex getal liggen allemaal op een cirkel met middelpunt de oorsprong van het complex vlak. De wortels vormen de hoekpunten van een gelijkzijdige n-hoek.

2.9 Toepassing: fasoren

Een complex getal $z = |z|e^{i\theta}$ komt meetkundig overeen met een punt in het complex vlak. De plaats van dat punt wordt aangeduid met een vector in het complex vlak.
Door nu het argument van het complex getal te veranderen als functie van de tijd, bijvoorbeeld $\theta = \omega t + \alpha$, kan met de vector laten roteren met hoeksnelheid ω in het complex vlak, α komt dan overeen met het argument op tijdstip $t = 0$.

Een roterende vector in het complex vlak noemt men een **fasor**.

Hier is een fasor met beginfase $\alpha = \frac{\pi}{4}$ voorgesteld:

Scan QR code voor animatie.

Fasoren kennen veel toepassingen, zo worden ze gebruikt in de elektrotechniek bij rekenwerk met wisselspanning, en in de mechanica bij de beschrijving van trillingen.
Met de formule van Euler kan bijvoorbeeld een wisselspanning $V = V_0 \cos(\omega t + \alpha)$ even goed geschreven worden als $V = \Re(V_0 e^{i(\omega t+\alpha)})$. Bovendien is rekenen met de exponentiële functie $e^{i\theta}$ dikwijls eenvoudiger dan rekenen met de cos of sin functies. Daarom wordt in elektrotechniek dikwijls gebruik gemaakt van de complexe spanning $V = V_0 e^{i(\omega t+\alpha)}$, de werkelijke, fysische spanning vindt men dan door het reële deel van de complexe spanning te nemen.
Een complexe wisselspanning of wisselstroom kan dus voorgesteld worden door een fasor waarvan het reële deel, dus de projectie op de reële as, de fysische spanning voorstelt. Op dezelfde manier kan men in de mechanica van trillingen werken met complexe plaatscoördinaten en complexe snelheden.

Hier zie je een fasor met de projecties op de reële en imaginaire as en de voorstelling van het reële en imaginaire deel als functie van de tijd.

Scan QR code voor animatie.

Een gedempte trilling met startamplitude u_0 wordt beschreven door een fasor $u(t) = u_0 e^{-\alpha t} e^{i\omega t}$. Het reële deel van $u(t)$ beschrijft dan de fysische trilling. Hierbij kan $u(t)$, afhankelijk van de toepassing, zowel een spanning, een plaatscoördinaat, een snelheid of nog een andere grootheid voorstellen.

Scan QR code voor animatie.

2.10 Test complexe getallen