Test Integraalrekening Partiële integratie

Opgave 1. *Partiële integratie is het toepassen van de regel* $\int udv = uv - \int vdu$. *In de integraal* $\int e^{2x}\cos(5x)dx$ *opgevat als* $\int udv$ *neem je* $u = e^{2x}$ *en* $dv = \cos(5x)dx$. *Wat wordt* $\int vdu$*?*

a $10\int e^{2x}\sin(5x)dx$

b $\frac{2}{5}\int e^{2x}\sin(5x)dx$

c $\frac{5}{2}\int e^{2x}\sin(5x)dx$

Oplossing. *b*

Verantwoording : Je bekomt $du = 2e^{2x}dx$ en uit $\int cos(5x)dx = \frac{1}{5}\sin(5x)+C$ bekom je dat je kan nemen $v = \frac{1}{5}\sin(5x)$.

Opgave 2. *Partiële integratie is het toepassen van de regel* $\int udv = uv - \int vdu$. *In de integraal* $\int x^2\arcsin(3x)dx$ *opgevat als* $\int udv$ *neem je* $u = \arcsin(3x)$ *en* $dv = x^2dx$. *Wat wordt* $\int vdu$*?*

a $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-9x^2}}dx$

b $\int x^3\arccos(3x)dx$

c $\int \frac{6x}{\sqrt{1-9x^2}}dx$

Oplossing. *a*

Verantwoording : Je bekomt $du = \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}3dx$ en uit $\int x^2dx = \frac{x^3}{3} + C$ vind je dat je kan nemen $v = \frac{x^3}{3}$.

Opgave 3. *Partiële integratie is het toepassen van de regel* $\int udv = uv - \int vdu$. *In de integraal* $\int \sqrt[3]{x}\ln x dx$ *opgevat als* $\int udv$ *neem je* $u = \ln x$ *en* $dv = \sqrt[3]{x}dx$. *Wat wordt* $\int vdu$*?*

a $\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}}dx$

b $\frac{4}{3}\int \sqrt[3]{x^7}dx$

c $\frac{3}{4}\int \sqrt[3]{x}dx$

Oplossing. c

Verantwoording : Je bekomt $du = \frac{1}{x}dx$ en uit $\int \sqrt[3]{x}dx = \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + C$ vind je dat je kan nemen $v = \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4}$.

Opgave 4. *Partiële integratie is het toepassen van de regel $\int udv = uv - \int vdu$. In de integraal $\int x^3e^{4x}dx$ opgevat als $\int udv$ neem je $u = x^3$ en $dv = e^{4x}dx$. Wat wordt $\int vdu$?*

a $\frac{1}{4}\int x^4e^{4x}dx$

b $3\int x^2e^{4x}dx$

c $\frac{3}{4}\int x^2e^{4x}dx$

Oplossing. c

Verantwoording : Je bekomt $du = 3x^2dx$ en uit $\int e^{4x}dx = \frac{e^{4x}}{4} + C$ vind je dat je kan nemen $v = \frac{e^{4x}}{4}$.

Opgave 5. *Partiële integratie is het toepassen van de regel $\int udv = uv - \int vdu$. In de integraal $\int \sin\left(\frac{x}{3}\right)e^{-2x/5}dx$ opgevat als $\int udv$ neem je $u = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$ en $dv = e^{-2x/5}dx$.*
Je bekomt $\int \sin\left(\frac{x}{3}\right)e^{-2x/5}dx = a.f\left(\frac{x}{3}\right)e^{-2x/5} + b\int g\left(\frac{x}{3}\right)e^{-2x/5}dx$. Hierin staat f en g voor de functie $\sin$ of $\cos$. Wat zijn f en g en de waarden van a en b?

f is $\cdots$; g is $\cdots$; $a = \cdots$; $b = \cdots$
Een aantal van deze getallen kunnen 0 en/of 1 zijn. Je mag enkel gehele getallen of breuken van gehele getallen ingeven en je moet zoveel mogelijk vereenvoudigen. Bij een breuk die negatief is plaats je het minteken in de teller.

Oplossing. *f is $\sin$; g is $\cos$; $a = \frac{-5}{2}$; $b = \frac{-5}{6}$*

Verantwoording : Je bekomt $du = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right)dx$ en uit $\int e^{-2x/5}dx = -\frac{5}{2}e^{-2x/5} + C$ vind je dat je kan nemen $v = -\frac{5}{2}e^{-2x/5}$.

Opgave 6. *Partiële integratie is het toepassen van de regel $\int udv = uv - \int vdu$. In de integraal $\int x^3\cos\left(\frac{2x}{5}\right)dx$ opgevat als $\int udv$ neem je $u = x^3$ en $dv = \cos\left(\frac{2x}{5}\right)dx$.*
Je bekomt $\int x^3\cos\left(\frac{2x}{5}\right)dx = a.x^b.f\left(\frac{2x}{5}\right) + c\int x^d.g\left(\frac{2x}{5}\right)dx$. Hierin staat f en g voor de functie $\sin$ of $\cos$. Wat zijn f en g en de waarden van a; b; c en d?

f is $\cdots$; g is $\cdots$; $a = \cdots$; $b = \cdots$; $c = \cdots$; $d = \cdots$

Oplossing. *f en g zijn $\sin$; $a = \frac{5}{2}$; $b = 3$; $c = \frac{-15}{2}$; $d = 2$*

Verantwoording : Je bekomt $du = 3x^2dx$ en uit $\int \cos\left(\frac{2x}{5}\right) = \frac{5}{2}\sin\left(\frac{2x}{5}\right) + C$ vind je dat je kan nemen $v = \frac{5}{2}\sin\left(\frac{2x}{5}\right)$

Opgave 7. *Bij het toepassen van partiële integratie* $\int udv = uv - \int vdu$ *bekom je*

$$\int x^3 \ln^2 x dx = \frac{x^4 \ln^2 x}{4} - \frac{1}{2}\int x^3 \ln x dx \ .$$

Wat neem je voor u?

a $u = x^3$

b $u = \ln^2 x$

c $u = \ln x$

Oplossing. *b*

Verantwoording : Neem je $u = \ln^2 x$ dan is $du = \frac{2\ln x}{x}dx$ en dan moet je ook nemen $dv = x^3dx$. Uit $\int x^3dx = \frac{x^4}{4} + C$ vind je dan dat je $v = \frac{x^4}{4}$ kan nemen.

Opgave 8. *Bij het toepassen van partiële integratie* $\int udv = uv - \int vdu$ *bekom je*

$$\int e^{-x}\cos\left(\frac{3x}{7}\right)dx = -e^{-x}\cos\left(\frac{3x}{7}\right) - \frac{3}{7}\int e^{-x}\sin\left(\frac{3x}{7}\right)dx \ .$$

Wat neem je voor u?

a $u = sin\left(\frac{3x}{7}\right)$

b $u = e^{-x}$

c $u = \cos\left(\frac{3x}{7}\right)$

Oplossing. *c*

Verantwoording : Neem je $u = \cos\left(\frac{3x}{7}\right)$ dan bekom je $du = -\frac{3}{7}\sin\left(\frac{3x}{7}\right)dx$ en dan moet je $dv = e^{-x}dx$ nemen. Uit $\int e^{-x}dx = -e^{-x} + C$ bekom je dat je $v = -e^{-x}$ kan nemen.

Opgave 9. *Bij het toepassen van partiële integratie* $\int udv = uv - \int vdu$ *bekom je*

$$\int x\arctan(5x)dx = \frac{x^2\arctan(5x)}{2} - \frac{5}{2}\int\frac{x^2dx}{1+25x^2}dx \ .$$

Wat neem je voor u?

a $u = x\arctan(5x)$

b $u = \arctan(5x)$

c $u = x$

Oplossing. *b*

Verantwoording : Neem je $u = \arctan(5x)$ dan bekom je $du = \frac{5dx}{1+25x^2}$ en dan moet je $dv = xdx$ nemen. Uit $\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$ vind je dat je $v = \frac{x^2}{2}$ kan nemen.

Opgave 10.

$$\int x^2 \cos\left(\frac{x}{5}\right) dx = ax^3 \sin\left(\frac{x}{5}\right) + bx^3 \cos\left(\frac{x}{5}\right) + cx^2 \sin\left(\frac{x}{5}\right) + dx^2 \cos\left(\frac{x}{5}\right) +$$

$$+ex \sin\left(\frac{x}{5}\right) + fx \cos\left(\frac{x}{5}\right) + g \sin\left(\frac{x}{5}\right) + h \cos\left(\frac{x}{5}\right) + C$$

$a = \cdots$; $b = \cdots$; $c = \cdots$; $d = \cdots$; $e = \cdots$; $f = \cdots$; $g = \cdots$; $h = \cdots$

Een aantal van deze getallen kunnen 0 en/of 1 zijn. Je mag enkel gehele getallen of breuken van gehele getallen ingeven en je moet zoveel mogelijk vereenvoudigen. Bij een breuk die negatief is plaats je het minteken in de teller.

Oplossing. $a = b = d = e = h = 0$; $c = 5$; $f = 50$; $g = -250$

Verantwoording : Stel $u = x^2$, dan is $du = 2xdx$ en stel $dv = \cos\left(\frac{x}{5}\right) dx$ en dus $v = 5 \sin\left(\frac{x}{5}\right)$. Dit geeft

$$\int x^2 \cos\left(\frac{x}{5}\right) dx = 5x^2 \sin\left(\frac{x}{5}\right) - 10 \int x \sin\left(\frac{x}{5}\right) dx$$

Je stelt daarna $u = x$ en dus $du = dx$ en $dv = \sin\left(\frac{x}{5}\right) dx$ en dus $v = -5\cos\left(\frac{x}{5}\right)$. Dit geeft

$$\int x \sin\left(\frac{x}{5}\right) dx = -5x \cos\left(\frac{x}{5}\right) + 5 \int \cos\left(\frac{x}{5}\right) dx =$$

$$= -5x \cos\left(\frac{x}{5}\right) + 25 \sin\left(\frac{x}{5}\right) + C \ .$$

Je bekomt

$$\int x^2 \cos\left(\frac{x}{5}\right) dx = 5x^2 \sin\left(\frac{x}{5}\right) + 50x \cos\left(\frac{x}{5}\right) - 250 \sin\left(\frac{x}{5}\right) + C \ .$$

Opgave 11.

$$\int x \arctan(6x) dx = ax^2 \arctan(6x) + bx \arctan(6x) + c \arctan(6x) + dx^2 + ex + C$$

$a = \cdots$; $b = \cdots$; $c = \cdots$; $d = \cdots$; $e = \cdots$

Een aantal van deze getallen kunnen 0 en/of 1 zijn. Je mag enkel gehele getallen of breuken van gehele getallen ingeven en je moet zoveel mogelijk vereenvoudigen. Bij een breuk die negatief is plaats je het minteken in de teller.

Oplossing. $b = d = 0$; $a = \frac{1}{2}$; $c = \frac{1}{72}$; $e = -\frac{1}{12}$

Verantwoording : Stel $u = \arctan(6x)$ en dus $du = \frac{6dx}{1+36x^2}$ en stel $dv = xdx$ en dus $v = \frac{x^2}{2}$. Je bekomt

$$\int x\arctan(6x)dx = \frac{x^2\arctan(6x)}{2} - 3\int \frac{x^2dx}{1+36x^2} \ .$$

De resterende integraal herschrijf je als

$$\int \frac{x^2dx}{1+36x^2} = \frac{1}{36}\int \frac{36x^2dx}{1+36x^2} = \frac{1}{36}\left(\int \frac{1+36x^2dx}{1+36x^2} - \int \frac{dx}{1+36x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{36}\left(\int dx - \int \frac{dx}{1+36x^2}\right) = \frac{1}{36}\left(x - \int \frac{dx}{1+36x^2}\right) \ .$$

Deze laatste integraal los je als volgt op door gebruik te maken van substitutie $t = 6x$ en $dt = 6dx$:

$$\int \frac{dx}{1+36x^2} = \int \frac{dx}{1+(6x)^2} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{6}\arctan(t)+C = \frac{1}{6}\arctan(6x)+C \ .$$

Je bekomt

$$\int x\arctan(6x)dx = \frac{x^2\arctan(6x)}{2} - \frac{x}{12} + \frac{\arctan(6x)}{72} + C \ .$$

Opgave 12.

$$\int e^{-3x}\sin\left(\frac{9x}{5}\right)dx = e^{-3x}\left(a\cos\left(\frac{9x}{5}\right) + b\sin\left(\frac{9x}{5}\right)\right) + C$$

Wat zijn a en b?

$a = \cdots ; b = \cdots$

Een aantal van deze getallen kunnen 0 en/of 1 zijn. Je mag enkel gehele getallen of breuken van gehele getallen ingeven en je moet zoveel mogelijk vereenvoudigen. Bij een breuk die negatief is plaats je het minteken in de teller.

Oplossing. $a = \frac{-15}{52}; b = \frac{-25}{52}$

Verantwoording : Je neemt $u = e^{-3x}$ en dus $du = -3e^{-3x}dx$ en $dv = \sin\left(\frac{9x}{5}\right)dx$ en dus $v = -\frac{5}{9}\cos\left(\frac{9x}{5}\right)$. Je bekomt

$$\int e^{-3x}\sin\left(\frac{9x}{5}\right)dx = -\frac{5}{9}e^{-3x}\cos\left(\frac{9x}{5}\right) - \frac{5}{3}\int e^{-3x}\cos\left(\frac{9x}{5}\right)dx \ .$$

Voor de nieuwe integraal neem je opnieuw $u = e^{-3x}$ en dus $du = -3e^{-3x}dx$ en $dv = \cos\left(\frac{9x}{5}\right)dx$ en dus $v = \frac{5}{9}\sin\left(\frac{9x}{5}\right)$ Je bekomt

$$\int e^{-3x}\cos\left(\frac{9x}{5}\right)dx = \frac{5}{9}e^{-3x}\sin\left(\frac{9x}{5}\right) + \frac{5}{3}\int e^{-3x}\sin\left(\frac{9x}{5}\right)dx$$

en dus

$$\int e^{-3x}\sin\left(\frac{9x}{5}\right)dx = -\frac{5}{9}e^{-3x}\cos\left(\frac{9x}{5}\right)-\frac{25}{27}e^{-3x}\sin\left(\frac{9x}{5}\right)-\frac{25}{27}\int e^{-3x}\sin\left(\frac{9x}{5}\right)dx\ .$$

Hieruit bekom je

$$\left(1+\frac{25}{27}\right)\int e^{-3x}\sin\left(\frac{9x}{5}\right)dx = -\frac{5}{9}e^{-3x}\cos\left(\frac{9x}{5}\right)-\frac{25}{27}e^{-3x}\sin\left(\frac{9x}{5}\right)+C$$

en daaruit

$$\int e^{-3x}\sin\left(\frac{9x}{5}\right)dx = -\frac{15}{52}e^{-3x}\cos\left(\frac{9x}{5}\right)-\frac{25}{52}e^{-3x}\sin\left(\frac{9x}{5}\right)+C\ .$$