Module 3

Goniometrie & complexe getallen

0 Intro

Zie filmpje MOOC.

1 Goniometrie

Inleiding

Wie technische wetenschappen studeert wordt voortdurend en soms onverwacht geconfronteerd met goniometrie en driehoeksmeetkunde. Van optica tot machinebouw, van elektrotechniek tot staalbouw, er is bijna geen vak of vakgebied te vinden waarbij goniometrie geen rol speelt. Hieronder staan enkele voorbeelden: een instrument uit de topografie en een toepassing uit de bouwkunde.

Een theodoliet is een instrument om hoeken te meten dat veel gebruikt wordt door landmeters. Het toestel wordt op een staander horizontaal (waterpas) geplaatst en door een kijker op verschillende referentiepunten te richten kan men de hoeken tussen deze punten meten.

(Bron figuur: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Askania_Sekunden-Theodolit_TU_e_400.jpg)

De staalconstructie van een hoogspanningsmast is gebaseerd op driehoeken.

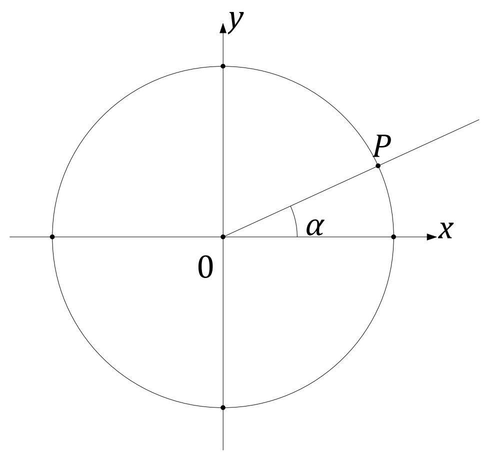
(Bron figuur: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pylon_ds.jpg).

In de volgende paragrafen bespreken we praktisch de basis van goniometrie en driehoeksmeetkunde.

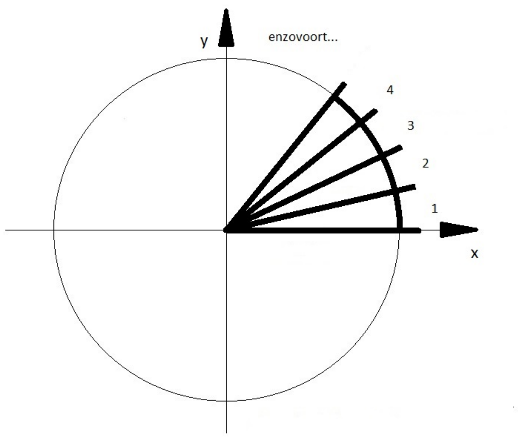
1.1 Meten van hoeken

Graden, minuten, seconden

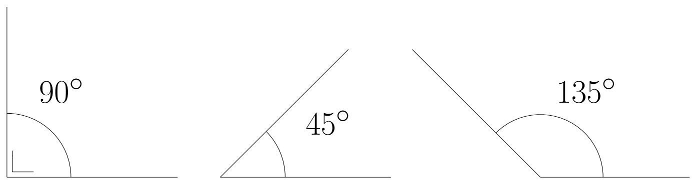
Een hoekmaat wordt bepaald door een hoek voor te stellen op een cirkel met willekeurige straal r waarbij men de top van de hoek laat samenvallen met het middelpunt van de cirkel. Elke hoek α komt dan overeen met een zekere afstand gemeten langs de omtrek van de cirkel. Men zegt dat met elke hoek α een zekere booglengte op de cirkel met straal r overeenkomt.



Door nu de cirkelomtrek onder te verdelen in allemaal stukjes met gelijke booglengte bekomt men een maat voor een hoek. Op de figuur hieronder zijn enkele onderverdelingen getekend.



Deze onderverdelingen noemt men graden. Meestal (maar niet altijd!) wordt een cirkel onderverdeeld in 360°: een rechte hoek komt dan overeen met 90° en een gestrekte hoek met 180°. Hieronder staan enkele tekeningen:



Graden zijn zelf ingedeeld in minuten (zoals meters kunnen ingedeeld worden in centimeters) en minuten kunnen op hun beurt worden ingedeeld in seconden (zoals centimeters kunnen worden ingedeeld in millimeters). Graden, minuten en seconden worden echter ingedeeld in een 60-tallig talstelsel, waardoor je volgende regels krijgt:

$$\begin{aligned} 1 \text{ graad} &= 60 \text{ minuten} \\ 1 \text{ minuut} &= 60 \text{ seconden} \end{aligned}$$

Deze hoekmaat noemt men de zestigdelige graad. De zestigdelige graad wordt soms afgekort als 'deg' van het Engelse woord 'degree'.
Graden, minuten en seconden hebben hun eigen eenheid/symbool, zoals het symbool voor centimeter 'cm' is:

$$\begin{aligned} 1 \text{ graad} &= 1^\circ \\ 1 \text{ minuut} &= 1' \\ 1 \text{ seconde} &= 1'' \end{aligned}$$

Enkele voorbeelden:

- Een hoek van 1° lees je als een hoek van '1 graad'. Ze bestaat zelf uit $1 \cdot 60 = 60$ minuten (want elke graad is 60 minuten), of uit $60 \cdot 60 = 3600$ seconden (want elke minuut is 60 seconden).
- Een hoek van 42° lees je dus als '42 graden' en bestaat zelf uit $42 \cdot 60 = 2520$ minuten (want elke graad is 60 minuten), of uit $2520 \cdot 60 = 151200$ seconden (want elke minuut is 60 seconden).
- Een hoek van $5^\circ 12' 13$" lees je als 5 graden, 12 minuten en 13 seconden.

Soms wordt het gebruik van minuten en seconden vermeden in de notatie van een hoek, en gebruikt men een decimale notatie. Zo kan het zijn dat je een hoek tegenkomt die genoteerd is als:

$$22,5^\circ \quad \text{of ook} \quad 22^\circ,5$$

Dat betekent dan ook letterlijk 22 en een halve graad. Ofwel 22 graden en de helft van 60 minuten. Met andere woorden:

$$22,5^\circ = 22^\circ 30'$$

Een tweede, iets moeilijker voorbeeld:

$$\begin{aligned} 42,21^\circ &= 42^\circ + 0,21 \cdot 1^\circ && \text{herschrijven van een kommagetal} \\ &= 42^\circ + 0,21 \cdot 60' && \text{1 graad is 60 minuten} \\ &= 42^\circ + 12,6' && \text{uitrekenen} \\ &= 42^\circ + 12' + 0,6 \cdot 1' && \text{herschrijven van een kommagetal} \\ &= 42^\circ + 12' + 0,6 \cdot 60'' && \text{1 minuut is 60 seconden} \\ &= 42^\circ + 12' + 36'' && \text{uitrekenen} \\ &= 42^\circ 12' 36'' \end{aligned}$$

Gelukkig hebben veel rekentoestellen de mogelijkheid om graden in decimale notatie om te zetten in graden in notatie van graden, minuten, seconden. Raadpleeg daarvoor de handleiding van je rekentoestel.

Rekenen met graden, minuten, seconden is anders dan rekenen met tiendelige getallen. Een voorbeeld:

$$12°45' + 36°50' = 48°95' = 49°35'$$

Telkens als je meer dan 60 minuten hebt, moet je het aantal graden verhogen met 1. Net zo bij meer dan 60 seconden, dan verhoog je het aantal minuten!

Decimale graad of honderddelige graad

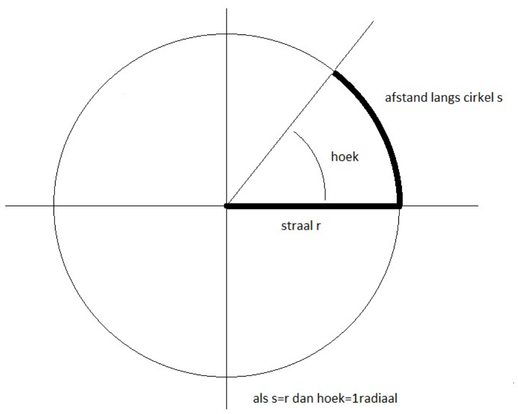
Zoals eerder gezegd is de onderverdeling van een cirkel in 360° alleen maar een afspraak. Volgens een andere conventie wordt een cirkel onderverdeeld in 400 stukjes zodat een rechte hoek overeenkomt met 100 onderverdelingen: men spreekt dan van decimale graden of honderddelige graden. Honderddelige graden komen vooral voor in de topografie en de weg- en waterbouw. Vooral studenten bouwkunde zullen deze hoekmaat tegen komen. De eenheid van de 100-delige hoek is 'gon' (maar ook 'gr' of 'grad' komen voor). In principe is deze hoekmaat erg eenvoudig. Men start met de afspraak:

Een rechte hoek meet 100 gon.

Bijgevolg zal een getrekte hoek 200 gon meten, en een hoek van 45° de helft van 100 gon en dus 50 gon. Honderddelige graden rekenen gemakkelijker dan 60-delige graden.

Radialen

Een andere veel gebruikte hoekmaat is de radiaal. Men neemt een cirkel met straal r en zet daarop een bepaalde hoek uit. Met deze hoek komt dan een welbepaalde booglengte s op de cirkelomtrek overeen. Men zegt nu dat die hoek waarvoor de booglengte s gelijk is aan de straal r een hoek is van 1 radiaal.



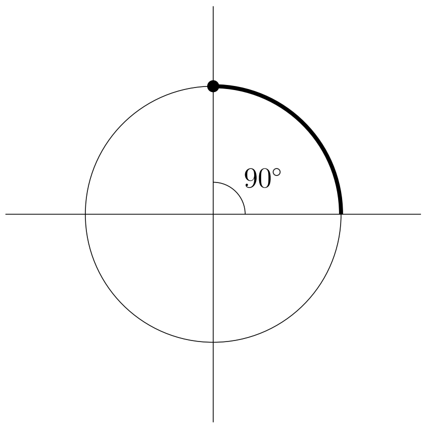
Voor een hoek van 2 radialen geldt dus dat $s = 2r$, voor een hoek van 5 radialen geldt dan $s = 5r$, enz... M.a.w. voor een hoek θ kan men schrijven dat het verband tussen de cirkelboog s en de straal r gegeven wordt door:

$$s = r \cdot \theta$$

Let op! Deze formule is alléén geldig als de hoek θ wordt uitgedrukt in radialen...

In theoretische berekeningen (fysica, mechanica,...) wordt bijna altijd ondersteld dat een hoek wordt uitgedrukt in radialen zodat men van deze formule kan gebruik maken.

De omtrek van een cirkel met straal r is de gekende formule $2 \cdot \pi \cdot r$. Uit $s = r \cdot \theta$ volgt dan dat de hoek die overeenkomt met de volledige cirkelomtrek gelijk is aan $\theta = 2\pi$. Om gemakkelijk te rekenen kiest men dikwijls een cirkel met $r = 1$, de omtrek van zo een éénheidscirkel is 2π. Met dit in het achterhoofd berekenen we de grootte van een rechte hoek ($90°$), maar nu in radialen:



Je ziet dat de rechte hoek een kwart van de cirkel beslaat. De gehele cirkel heeft een omtrek van 2π en bijgevolg bepaalt de rechte hoek een cirkelboog met lengte $\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$.
We zeggen:

De rechte hoek meet $\frac{\pi}{2}$ radialen.

Op je rekentoestel worden radialen vaak aangegeven met 'rad'. Ook radialen hebben een eenheid, namelijk 'rad'. Vaak laten we deze eenheid weg:

$$90° = \frac{\pi}{2}\text{rad} = \frac{\pi}{2}$$

Het voordeel van radialen is dat deze al kommagetallen zijn, en je ermee kan rekenen zoals je met gewone getallen doet. Het moeilijke is dat radialen vaak 'ongewoon' zijn, omdat het getal π er zo vaak in opduikt. Nog enkele veel voorkomende hoeken:

- De nulhoek meet $0°$ en beschrijft geen omtrek op de cirkel (het beginpunt van de cirkelboog is hetzelfde als het eindpunt ervan). Bijgevolg is de nulhoek ook een hoek van 0 radialen.
- De gestrekte hoek meet $180°$ en beschrijft de helft van een cirkel (tekenen!). De omtrek van een halve cirkel is π en dus meet de gestrekte hoek π radialen.

- De volle hoek meet 360° en beschrijft de volledige cirkel. De omtrek van de volledige cirkel is 2π en dus meet de volle hoek 2π radialen.

Volgende regel is zeer belangrijk:

$$180^\circ = \pi$$

Hieruit kan je vaak snel de grootte van een eenvoudige hoek in radialen afleiden. Bijvoorbeeld:

- 60° is gelijk aan $180^\circ : 3$, en dus is de hoek van 60° gelijk aan $\frac{\pi}{3}$ radialen.
- 30° is gelijk aan $180^\circ : 6$, en dus is de hoek van 30° gelijk aan $\frac{\pi}{6}$ radialen.
- 45° is gelijk aan $180^\circ : 4$, en dus is de hoek van 45° gelijk aan $\frac{\pi}{4}$ radialen.

Nog even een lijstje formules, waarvan de bovenste de belangrijkste is:

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \pi \\ 360^\circ &= 2\pi \\ 90^\circ &= \frac{\pi}{2} \\ 60^\circ &= \frac{\pi}{3} \\ 45^\circ &= \frac{\pi}{4} \\ 30^\circ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Overgangen tussen hoeken

Van graden naar radialen en terug

Omdat $180^\circ = \pi$, zal 1° gelijk zijn aan $\frac{180^\circ}{180} = \frac{\pi}{180}$. Je kan dit gebruiken om een willekeurige hoek in graden om te zetten in radialen:

$$32^\circ = 32 \cdot 1^\circ = 32 \cdot \frac{\pi}{180}\text{rad} \approx \frac{32 \cdot 3,14}{180}\text{rad} = 0,56\text{rad}$$

Het is wel erg belangrijk dat je een hoek in graden eerst omzet in een decimale notatie, en niet met minuten en seconden erbij. De regel wordt nu:

$$x^\circ \text{ is gelijk aan } x \cdot \frac{\pi}{180}\text{rad}$$

of met andere woorden, omzetten van **graden naar radialen** is vermenigvuldigen met

$$\frac{\pi}{180}\text{rad} \approx 0,0175\text{rad}$$

Nog een voorbeeldje:

$$42°12'36'' = 42,21° \approx 42,21 \cdot 0,0175\text{rad} \approx 0,74\text{rad}$$

Omdat πrad $= 180°$, vind je dat 1rad $= \frac{\pi}{\pi} = \frac{180°}{\pi}$. Je kan dit gebruiken om een willekeurige hoek in radialen om te zetten in graden:

$$1,35\text{ rad} = 1,35 \cdot 1\text{rad} = 1,35 \cdot \frac{180°}{\pi} \approx \frac{1,35 \cdot 180°}{3,14} \approx 77,35°$$

Het resultaat is dus altijd een hoek in graden, in decimale notatie. De algemene regel is dus

$$x\text{rad is gelijk aan } x \cdot \frac{180°}{\pi}$$

of met andere woorden, omzetten van **radialen naar graden** is vermenigvuldigen met

$$\frac{180°}{\pi} \approx 57,3°$$

Nog een voorbeeldje:

$$0,456\text{rad} \approx 0,456 \cdot 57,3° = 26,13°$$

Merk op dat we bij deze omzettingen vaak afronden. Dat mag enkel als het voor de opgave mag, soms moet je nauwkeurig en symbolisch werken, en dan gebruik je de formules zonder afronden!

Van graden naar gon en terug

We gebruiken de regel dat $90° = 100$ gon, dus vind je:

$$1° = \frac{100\text{ gon}}{90} = 1,111\text{ gon}$$
$$1\text{ gon} = \frac{90°}{100} = 0,9°$$

Dit gebruik je om de volgende omzettingsregels te vinden:

$$x° = x \cdot 1,111\text{ gon}$$
$$x\text{ gon} = x \cdot 0,9°$$

Voorbeeld 1

- $12,13° = 12,13 \cdot 1,111$ gon $\approx 13,48$ gon.
- $78,85$ gon $= 78,85 \cdot 0,9° \approx 70,97°$

Ook hier is het belangrijk dat je de decimale notatie van de graden gebruikt, en niet de notatie in minuten en seconden!

Onthoud

Onthoud

- Hoeken kan je meten in
  - graden (°), minuten ('), seconden (")
  - radialen (rad), de lengte van een cirkelboog van een cirkel met straal 1
  - 100-delige graden(gon)
- $180° = \pi$
- $90° = 100$ gon

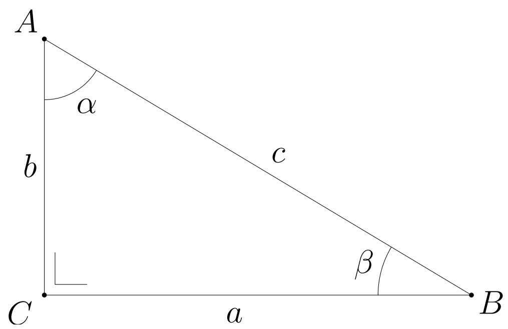
Volgende formules zijn zeer nuttig:

$$\begin{aligned}
x^\circ &= x \cdot \frac{\pi}{180}\text{rad} \approx x \cdot 0,0175\text{rad} \\
x\text{rad} &= x \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx x \cdot 57,3^\circ \\
x^\circ &= x \cdot \frac{10}{9}\text{ gon} \approx x \cdot 1,111\text{ gon} \\
x\text{ gon} &= x \cdot 0,9^\circ
\end{aligned}$$

1.2 Rechthoekige driehoeken

- Wat is de stelling van Pythagoras?
- Wat zijn de sinus, cosinus, tangens en cotangens in een rechthoekige driehoek?
- Hoe bereken je hoeken en zijden van een rechthoekige driehoek?

Tekening en definities



Een rechthoekige driehoek wordt vaak op deze manier gegeven. Een rechthoekige driehoek bestaat uit zijden en hoeken:

- De zijden, aangeduid met de kleine letters a, b en c.

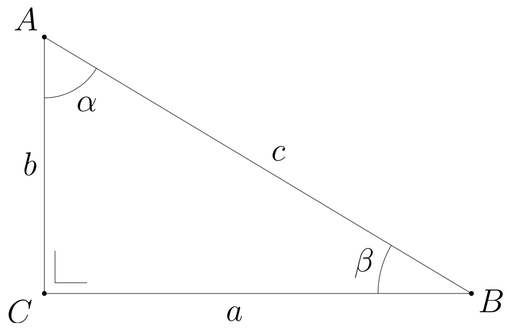
- De hoekpunten A, B en C.
- De hoeken α (alfa) en β (beta).

De plaats van deze letters wordt meestal op dezelfde manier gedaan:

- De rechte hoek krijgt als hoekpunt C. De rechte hoek krijgt vaak geen aparte naam, omdat je reeds weet dat deze $90°$ is. Als ze dan toch een naam krijgt, wordt dat γ (gamma).
- α is de hoek horende bij hoekpunt A, β is de hoek horende bij hoekpunt B.
- De zijde tegenover de hoek α is de zijde a, en de zijde tegenover de hoek β is de zijde b. Deze zijden noemt men de **rechthoekszijden**.
- De zijde c ligt tegenover de rechte hoek en wordt de **hypothenusa** of **schuine zijde** genoemd.

De stelling van Pythagoras

In een rechthoekige driehoek is de som van de kwadraten van de rechthoekszijden gelijk aan het kwadraat van de schuine zijde



Voor deze tekening is dit dan:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

De stelling van Pythagoras is erg nuttig om de zijden van een driehoek te berekenen. Telkens je twee zijden hebt, kan je de derde berekenen.

Goniometrische getallen

Aan een hoek α van een rechthoekige driehoek kunnen we een aantal getallen koppelen:

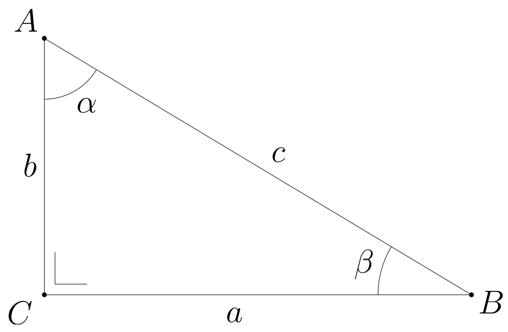
$$\text{de sinus van } \alpha = \sin\alpha = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$

$$\text{de cosinus van } \alpha = \cos\alpha = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$

$$\text{de tangens van } \alpha = \tan\alpha = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$$

$$\text{de cotangens van } \alpha = \cot\alpha = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{overstaande rechthoekszijde}}$$

Voor de driehoek



Is dat dan:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a}$$

Uiteindelijk zijn sinus, cosinus, ... van een hoek niet afhankelijk van de driehoek waar je ze in tekent. Daarom kan je ook met je rekentoestel een sinus, cosinus, ... berekenen. Zorg wel dat je hoekmaat juist staat ingesteld!

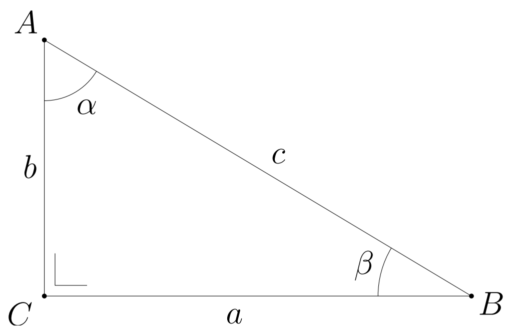
Nuttige formules

Volgende formules zijn vaak nuttig om hoeken terug te vinden (met $\sin^2\alpha$ bedoelen we het kwadraat van de sinus van α, of met andere woorden, $(\sin\alpha)^2$):

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$$

Oplossen van rechthoekige driehoeken

We hebben enkele formules nodig, studeer deze goed! Voor een **rechthoekige** driehoek geldt:



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \sin\beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \tan\beta = \frac{b}{a}$$

Wat kan je hier nu mee? Als je enkele onderdelen van een rechthoekige driehoek gegeven hebt, kan je met deze formules en gegevens de andere onderdelen berekenen. Vaak heb je met 2 gegeven waarden genoeg. Dit noemen we het oplossen van een rechthoekige driehoek. De bedoeling is a, b, c, α en β te bepalen.

Voorbeeld 1 Van de driehoek is gegeven $a = 3$ en $b = 4$. Bereken de overige getallen.
Met de stelling van Pythagoras vind je:

$$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow 3^2 + 4^2 = c^2 \Leftrightarrow 9 + 16 = c^2 \Leftrightarrow 25 = c^2 \Leftrightarrow c = 5$$

We hebben de 3 zijden, dus nu moeten we nog de twee hoeken berekenen. Dat doen we met sinus, cosinus, . . . :

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{3}{5} = 0,6$$

Nu kan je met je rekentoestel uitrekenen wat α is, vaak met de toets $\sin^{-1}$. Je vindt:

$$\alpha \approx 36,87°$$

Ook β kan je vinden op deze manier:

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{4}{5} = 0,8$$

En dus

$$\beta \approx 53,13°$$

Zie je dat $\alpha + \beta = 90°$! Dit is geen toeval. De som van de hoeken van een driehoek is 180°. Omdat je 1 hoek al kent, namelijk de rechte hoek van 90°, is de som van de andere 2 90°. Onthoud dus:

- **De som van de hoeken van een driehoek is** 180°, of met andere woorden

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

- **De som van de scherpe hoeken in een rechthoekige driehoek is** 90°, of m.a.w.

$$\alpha + \beta = 90°$$

Voorbeeld 2 Er is gegeven dat $\alpha = 30°$ en c (de schuine zijde) is 7. Bereken de overige getallen.
Je kan meteen β vinden:

$$\alpha + \beta = 90° \Leftrightarrow 30° + \beta = 90° \Leftrightarrow \beta = 60°$$

De zijden bereken je via een sinus:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \Leftrightarrow \sin 30° = \frac{a}{7} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{a}{7}$$

Je zondert nu a af door links en rechts met 7 te vermenigvuldigen en je krijgt:

$$a = \frac{7}{2}$$

De laatste zijde b vind je nu met de stelling van Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{2}\right)^2 + b^2 = 7^2 \Leftrightarrow 12,25 + b^2 = 49$$

Je zondert b^2 af

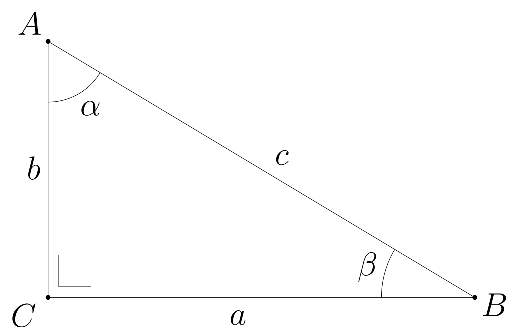
$$b^2 = 49 - 12,25 = 36,75$$

En dan neem je links en rechts de vierkantswortel

$$b = \sqrt{36,75} \approx 6,06$$

De algemene truc is dus telkens een formule te kiezen waar 2 van de symbolen bekend zijn, om zo het derde te vinden.

Onthoud



Onthoud

- **De stelling van Pythagoras**

$$a^2 + b^2 = c^2$$

- **sin, cos, tan, cot**

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

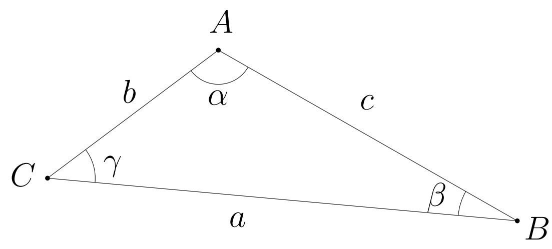
$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a}$$

- $\alpha + \beta = 90°$

- Een rechthoekige driehoek los je op door formules te kiezen uit Pythagoras, $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, \sin\beta, \ldots$ waarin twee waarden bekend zijn om zo de derde te vinden.

1.3 Willekeurige driehoeken

Tekening en afspraken

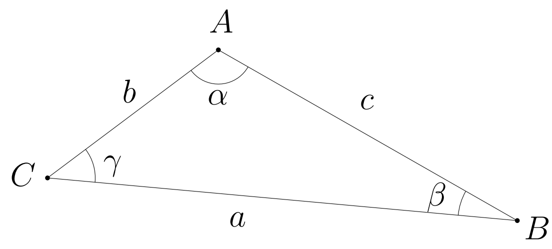


- De hoekpunten duiden we aan met A, B, C.
- De bijhorende hoeken duiden we aan met α (alfa) bij A, β (beta) bij B en γ (gamma) bij C.
- De zijde tegenover duiden we aan met a (tegenover A), b (tegenover B) en c (tegenover C).

Sinus- en cosinusregel

We herinneren er nog eens aan dat de stelling van Pythagoras en de formules voor sinus, cosinus, tangens en cotangens die we tot nu toe besproken hebben alléén geldig zijn voor rechthoekige driehoeken.
Voor een willekeurige driehoek gelden iets ingewikkelder formules die de sinusregel en de cosinusregel genoemd worden.

De **cosinusregel:**



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Je ziet dat in het linkerlid altijd 1 bepaalde zijde voorkomt, dat er in het rechterlid de twee andere voorkomen, samen met de cosinus van de hoek die hoort bij het linkerlid. Vergeet zeker de -2 niet bij de cosinus!

Opmerking: als één van de hoeken een rechte hoek is, bijvoorbeeld de hoek $\alpha = 90°$, dan is $\cos\alpha = 1$ en vereenvoudigt de cosinusregel tot de stelling van Pythagoras: $a^2 = b^2 + c^2$.

De **sinusregel:**

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

De sinusregel splits je meestal op in

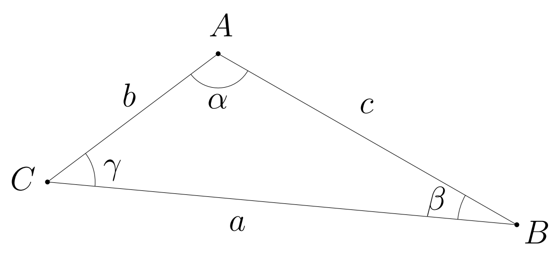
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$
$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Een andere vorm van de sinusregel is:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$$
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$$
$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

Oplossen van willekeurige driehoeken

Het oplossen van een willekeurige driehoek doe je op dezelfde manier als het oplossen van een rechthoekige driehoek, al zijn de formules anders. Vergeet ook niet dat de som van de hoeken van een driehoek 180° is! We gebruiken in dit onderdeel volgende tekening voor de aanduidingen:



$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Bij een willekeurige driehoek heb je ook meestal meer gegevens nodig dan bij een rechthoekige driehoek om hem op te lossen. De techniek blijft hetzelfde:

Kies een formule waar 3 onderdelen gegeven zijn, en bepaal de vierde.

Voorbeeld 1 In een willekeurige driehoek zijn gegeven $\alpha = 20°$, $\gamma = 50°$ en $a = 10$. Geef de andere waarden.
We moeten dus nog β, b en c berekenen. Omdat je al twee hoeken hebt, is de derde gemakkelijk te vinden uit:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Leftrightarrow 20° + \beta + 50° = 180° \Leftrightarrow \beta = 110°$$

Om b te berekenen, kunnen we de cosinusregel niet gebruiken, want we kennen 2 zijden niet, en bij de cosinusregel treden altijd alle zijden op. Dus moeten we de sinusregel gebruiken:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

We kennen zowel a als α, dus gebruiken we van de sinusregel:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Leftrightarrow \frac{10}{\sin 20°} = \frac{c}{\sin 50°}$$

Je ziet dat er nog maar 1 onbekende is, namelijk c. Dus we vinden, door alles uit te rekenen:

$$\frac{10}{0,34} = \frac{b}{0,77} \Leftrightarrow c = \frac{10}{0,34} \cdot 0,77 \approx 22,65$$

Blijft er nog b over, die we ook doen met de sinusregel:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Leftrightarrow \frac{10}{0,34} = \frac{c}{0,94} \Leftrightarrow b = 27,65$$

Voorbeeld 2 In een willekeurige driehoek zijn gegeven $\beta = 45°$, $a = 5$, $c = 6$. Bepaal de andere waarden.
Hier hebben we slechts 1 hoek, dus de som van de hoeken van een driehoek zal ons niet helpen. Ook met de sinusregel zijn we niet veel, omdat we teveel gegevens missen. Dus blijft er over: de cosinusregel. Welke neem je dan? Die waar β, a en c in staan:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \Leftrightarrow b^2 = 25 + 36 - 2 \cdot 5 \cdot 6\cos 45° \Leftrightarrow b^2 = 61 - 60 \cdot 0,71 \approx 18,4$$

Dus neem je aan beide kanten een vierkantswortel en vind je:

$$b \approx 4,29$$

Nu je b kent, en β ook, kan je met de sinusregel α vinden:

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a} \Leftrightarrow \frac{\sin 45°}{4,29} = \frac{\sin\alpha}{5}$$

Afzonderen en uitrekenen, levert je dan op

$$\sin\alpha = \frac{45°}{4,29} \cdot 5 = 0,82$$

Je kan nu met $\sin^{-1}$ het juiste antwoord vinden:

$$\alpha = 55,08°$$

γ vind je nu met

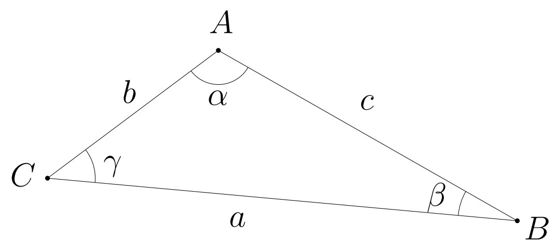
$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Leftrightarrow 55,08° + 45° + \gamma = 180° \Leftrightarrow \gamma = 79,92°$$

Opmerking

- De som van de hoeken van een driehoek is $180°$, elke hoek apart heeft een grootte tussen $0°$ en $180°$.
- Bij het berekenen van de hoeken in een driehoek zal je gebruik maken van de commando's $\sin^{-1}$ en $\cos^{-1}$ op je rekentoestel. Bij gebruik van $\cos^{-1}$ zal dit de juiste hoek geven maar bij gebruik van $\sin^{-1}$ kan dit een verkeerde uitkomst geven. Dit komt omdat $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ en het commando $\sin^{-1}$ steeds die hoek oplevert die kleiner is dan $90°$.
  Bijvoorbeeld: $\alpha = 45°$ en $180° - 45° = 135°$ hebben dezelfde sinus. Als de onbekende hoek in de driehoek $135°$ is zal $\sin^{-1}$ echter $45°$ geven...
  Praktisch ga je bij gebruik van $\sin^{-1}$ bij het oplossen van driehoeken als volgt te werk:
  - Indien je een meetkundig correcte tekening van de driehoek hebt kan je zien of de hoek die je berekent groter of kleiner dan $90°$ is. Als de hoek die je berekent met $\sin^{-1}$ groter is dan $90°$ vervang dan je uitkomst α door $180° - \alpha$.
  - Indien je niet zeker bent van de tekening dan controleer je of de som van de hoeken van de driehoek $180°$ is. Als dat niet het geval is vervang dan je uitkomst α door $180° - \alpha$.

Onthoud

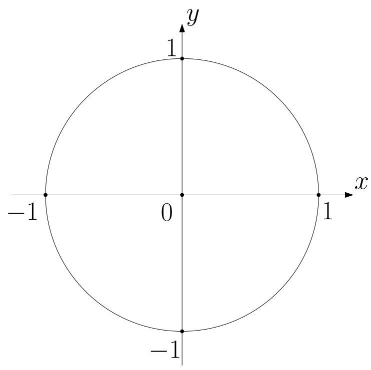
- **De sinusregel**
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$
- **De cosinusregel**
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$
- Bij het oplossen van een willekeurige driehoek, neem je best formules waar alle gegevens behalve 1 kan ingevuld worden.
- Pas op met de sinus en $\sin^{-1}$



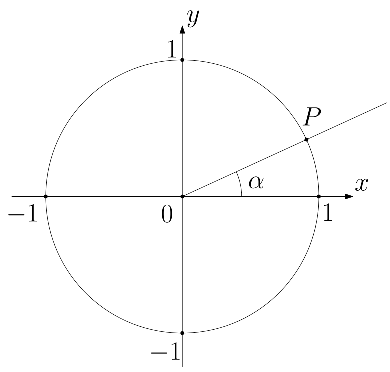
1.4 De goniometrische cirkel

Tekening

In de vorige hoofdstukken hebben we de goniometrische getallen ingevoerd met een rechthoekige driehoek. We kunnen ze echter ook voorstellen op een cirkel. We tekenen een cirkel met straal 1 door de oorsprong in een assenstelsel:



In deze cirkel kan je nu een hoek α tekenen, die zijn beginbeen heeft op de x-as, en zijn hoekpunt in de oorsprong. Zijn eindbeen snijdt de goniometrische cirkel in een punt, dat we P noemen.



Je ziet dus dat elk punt dat je zou tekenen op de goniometrische cirkel, eigenlijk de voorstelling is van een hoek, door als beginbeen de x-as te nemen, als hoekpunt de oorsprong, en als eindbeen de halve rechte door de oorsprong en het punt.

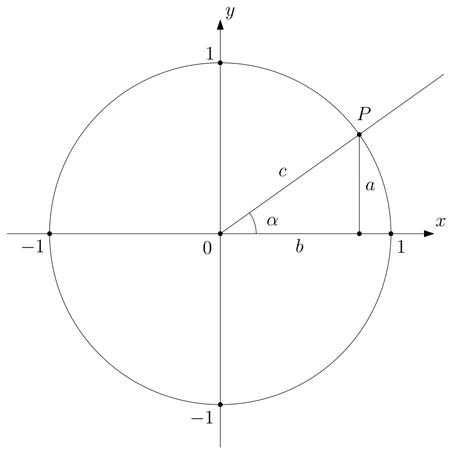
Goniometrische getallen

We kennen de goniometrische getallen als verhoudingen van zijden in een rechthoekige driehoek:

$$\sin\alpha = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}} \qquad \cot\alpha = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{overstaande rechthoekszijde}}$$

We kunnen een rechthoekige driehoek tekenen in de goniometrische cirkel, met zijden a, b en c:



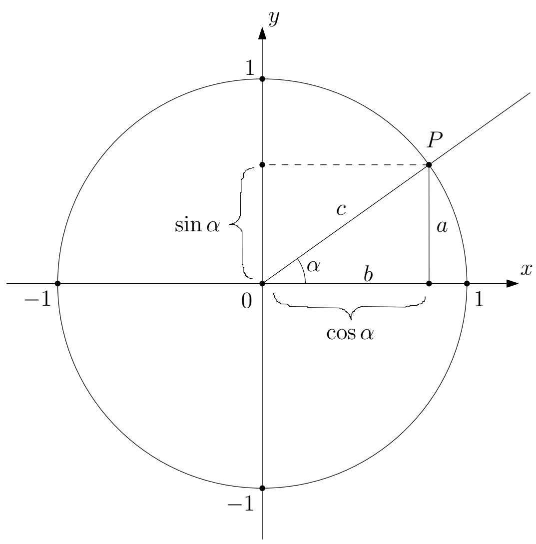
In deze rechthoekige driehoek kan je nu de sinus en de cosinus berekenen:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

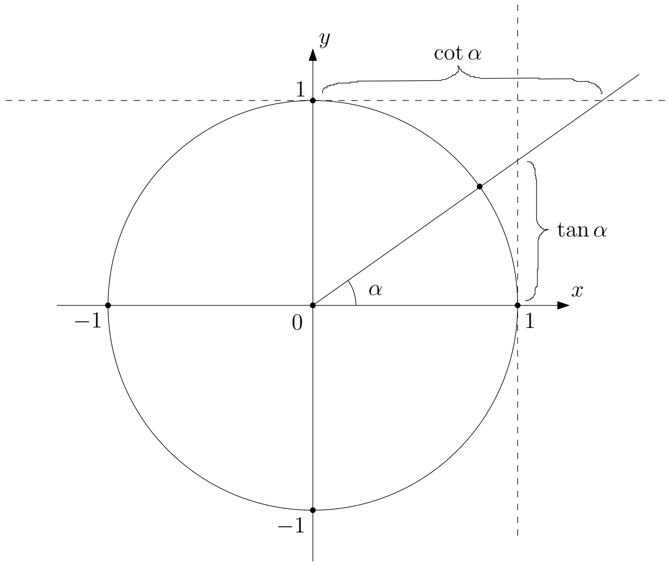
Je weet dat de lengte van zijde c gelijk is aan 1, omdat c net de straal is van de goniometrische cirkel! Dus:

$$\sin\alpha = a \qquad \cos\alpha = b$$

De waarde van de sinus kan je dus aflezen op de y-as, en de waarde van de cosinus lees je af op de x-as, als je het punt P ernaar projecteert.



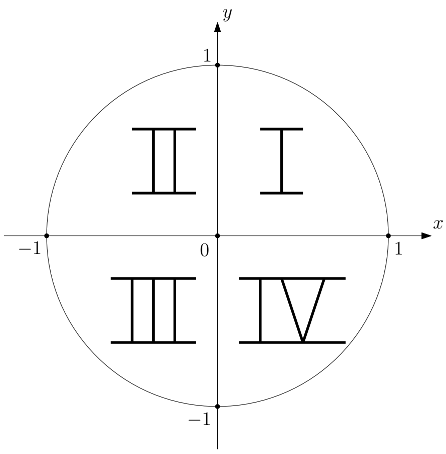
Ook de tangens en cotangens kan je aflezen van de goniometrische cirkel.



Uit deze twee figuren blijkt duidelijk dat de sinus en de cosinus niet kleiner kunnen zijn dan -1, en niet groter dan 1. De tangens en de cotangens hebben deze beperkingen niet.

Kwadranten

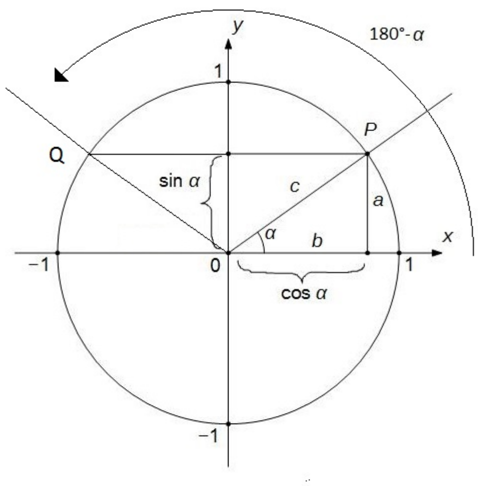
De goniometrische cirkel wordt ingedeeld in kwadranten.



Ze zijn genummerd, meestal in Romeinse cijfers, tegenkloksgewijs, beginnend rechtsboven in de cirkel.

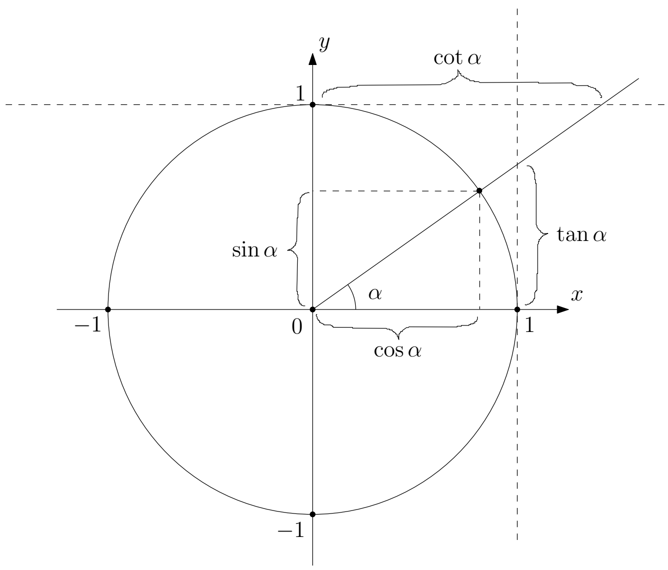
$$\alpha \in \text{I} \Leftrightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ$$
$$\alpha \in \text{II} \Leftrightarrow 90^\circ < \alpha < 180^\circ$$
$$\alpha \in \text{III} \Leftrightarrow 180^\circ < \alpha < 270^\circ$$
$$\alpha \in \text{IV} \Leftrightarrow 270^\circ < \alpha < 360^\circ$$

Opmerking Bij het bespreken van willekeurige driehoeken hebben we vermeld dat het gebruik van het commando $\sin^{-1}$ op een rekentoestel om een hoek α te bepalen soms een verkeerd resultaat kan opleveren. Hieronder is op een figuur gedemonstreerd dat een hoek α uit het eerste kwadrant en een hoek $180° - \alpha$ uit het tweede kwadrant dezelfde sinus hebben. De punten P en Q hebben immers dezelfde projectie op de Y-as.

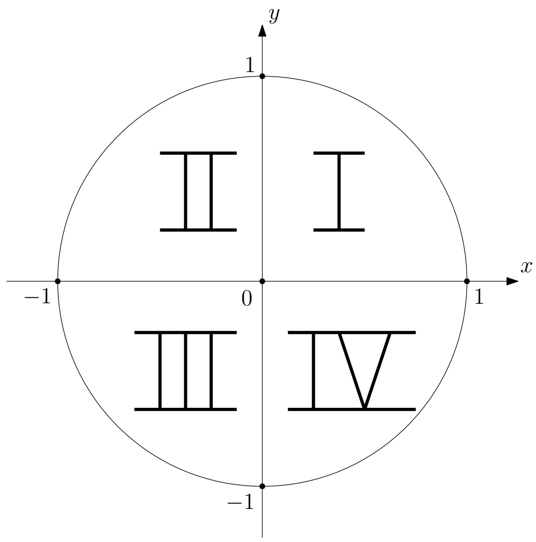


Onthoud

- De goniometrische cirkel is een cirkel met straal 1 door de oorsprong.
- Een hoek wordt weergegeven door een punt op de goniometrische cirkel. Het beginbeen is de positieve x-as, en het eindbeen door de rechte doro de oorsprong en dat punt op de goniometrische cirkel.
- De goniometrische getallen kan je aflezen van de goniometrische cirkel:



- De kwadranten verdelen de goniometrische cirkels in 4 sectoren:



$$\begin{aligned}
\alpha \in \mathrm{I} &\Leftrightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ \\
\alpha \in \mathrm{II} &\Leftrightarrow 90^\circ < \alpha < 180^\circ \\
\alpha \in \mathrm{III} &\Leftrightarrow 180^\circ < \alpha < 270^\circ \\
\alpha \in \mathrm{IV} &\Leftrightarrow 270^\circ < \alpha < 360^\circ
\end{aligned}$$

1.5 Goniometrische formules

Dit hoofdstuk bestaat uit een opsomming van de belangrijkste formules in goniometrie.

Bijzondere goniometrische getallen

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \sec\,\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \csc\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Grondformules

$$\begin{aligned}
&\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \\
&1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha \\
&1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha
\end{aligned}$$

Verwante hoeken

Gelijke hoeken

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) &= \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) &= \cos(\alpha) \\ \tan(\alpha + k \cdot 360^\circ) &= \tan(\alpha) \\ \cot(\alpha + k \cdot 360^\circ) &= \cot(\alpha) \end{aligned}$$

Tegengestelde hoeken

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha) \\ \cos(-\alpha) &= \cos(\alpha) \\ \tan(-\alpha) &= -\tan(\alpha) \\ \cot(-\alpha) &= -\cot(\alpha) \end{aligned}$$

Supplementaire hoeken

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin(\alpha) \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos(\alpha) \\ \tan(180^\circ - \alpha) &= -\tan(\alpha) \\ \cot(180^\circ - \alpha) &= -\cot(\alpha) \end{aligned}$$

Antisupplementaire hoeken

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + 180^\circ) &= -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha + 180^\circ) &= -\cos(\alpha) \\ \tan(\alpha + 180^\circ) &= \tan(\alpha) \\ \cot(\alpha + 180^\circ) &= \cot(\alpha) \end{aligned}$$

Complementaire hoeken

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - \alpha) &= \cos(\alpha) \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin(\alpha) \\ \tan(90^\circ - \alpha) &= \cot(\alpha) \\ \cot(90^\circ - \alpha) &= \tan(\alpha) \end{aligned}$$

Anticomplementaire hoeken

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ + \alpha) &= \cos(\alpha) \\ \cos(90^\circ + \alpha) &= -\sin(\alpha) \\ \tan(90^\circ + \alpha) &= -\cot(\alpha) \\ \cot(90^\circ + \alpha) &= -\tan(\alpha) \end{aligned}$$

Som- en verschilformules

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\alpha \pm \cot\beta}$$

Verdubbelingsformules

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha} \\ \tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha} \\ &= 1 - 2\sin^2\alpha \\ &= 2\cos^2\alpha - 1 \end{aligned}$$

Simpson-formules

$$\begin{aligned}
\sin(x) + \sin(y) &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\
\sin(x) - \sin(y) &= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\\
\cos(x) + \cos(y) &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\
\cos(x) - \cos(y) &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}
\end{aligned}$$

Omgekeerde Simpson-formules

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]\\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]\\
\sin\alpha\sin\beta &= -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right]
\end{aligned}$$

1.6 Oefeningen

1 Druk uit in radialen:

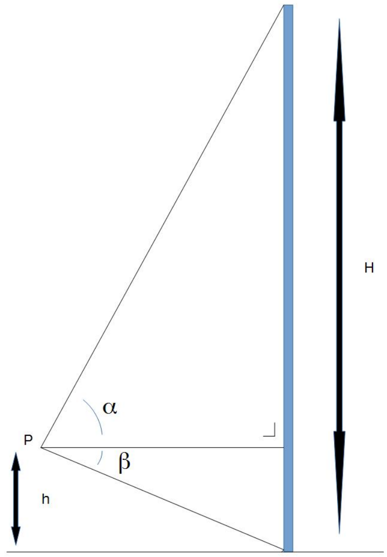
1. $108,17°$
2. $12°40'33''$
3. 190 gon

2 Reken uit:

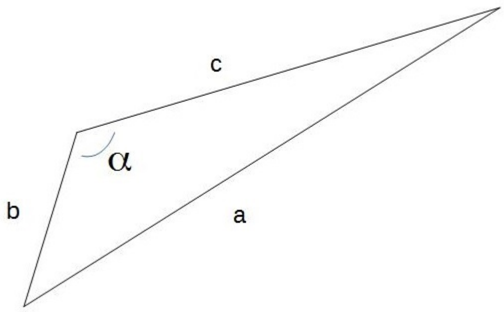
1. $267,83° - 117,85°$
2. $12°02'58'' + 4°13'07''$
3. $\frac{5}{3}\pi$ rad - $5°12'57''$ (in radialen)
4. $15,15$ gon + $15,15°$ (in decimale graad)

Rekenen met driehoeken

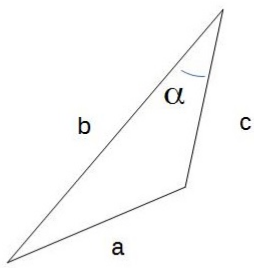
3 Om de hoogte van een mast te bepalen plaatst een landmeter een theodoliet in het punt P op een hoogte $h = 1,65$ m. Ze meet dan de hoeken α en β met de horizontale: $\alpha = 78,12°$ en $\beta = 4,71°$.
Bereken de hoogte H van de mast.



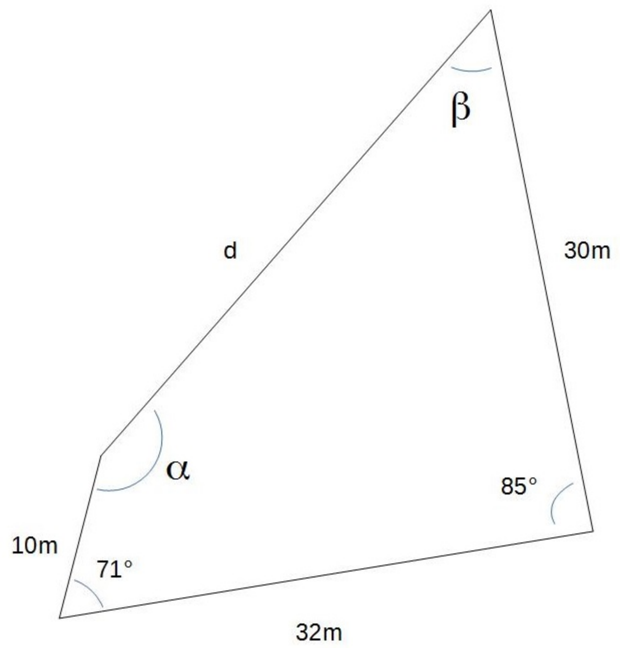
4 e lengte van elke zijde van de gegeven driehoek zijn gekend: $a = 53$ cm, $b = 18$ cm en $c = 41$ cm.
Bereken de hoek α.



5 Bereken de lengte van zijde c van de gegeven driehoek.
Gegevens: $a = 13$ mm, $b = 20$ mm, $\alpha = 21°$.



6 Op de figuur is een schets van een stuk weiland met de gekende gegevens weergegeven. Bereken de lengte van zijde d en de hoeken α en β.



2 Complexe getallen

Inleiding

De verzameling van de complexe getallen $\mathbb{C}$ is een uitbreiding van de verzameling van de reële getallen $\mathbb{R}$ waarbij elk complex getal bestaat uit twee reële getallen. Het ene reëel getal wordt het reëel deel van het complex getal genoemd, het andere reëel getal het imaginaire deel.
Alhoewel een eerste kennismaking met complexe getallen heel wat mensen hun wenkbrauwen doet fronsen blijkt dit soort getallen heel wat rekenwerk in de fysica en de techniek eenvoudiger te maken. Dit is bijvoorbeeld zeker het geval in vakgebieden als mechanica (trillingen), akoestiek (golven) en elektrotechniek (wisselstroom).

2.1 De imaginaire eenheid

Definitie Als eerste stap bij het bespreken van complexe getallen definiëren we de imaginaire eenheid i als het getal waarvoor geldt:

$$i^2 = -1$$

Opmerking Hierbij moeten we enkele bedenkingen maken:

- Het gebeurt wel eens dat deze definitie wordt herschreven als $i = \sqrt{-1}$. Dit is echter totaal **fout**. We zullen verderop zien dat -1 meer dan één vierkantswortel heeft.
- In sommige vakgebieden zoals elektrotechniek geeft men de voorkeur aan de letter j als symbool voor de imaginaire eenheid.
- Een eigenschap van i die heel wat rekenwerk kan vereenvoudigen is het volgende:

  Eigenschap 1

$$i^2 = -1 \iff i = -\frac{1}{i} \iff -i = \frac{1}{i}$$

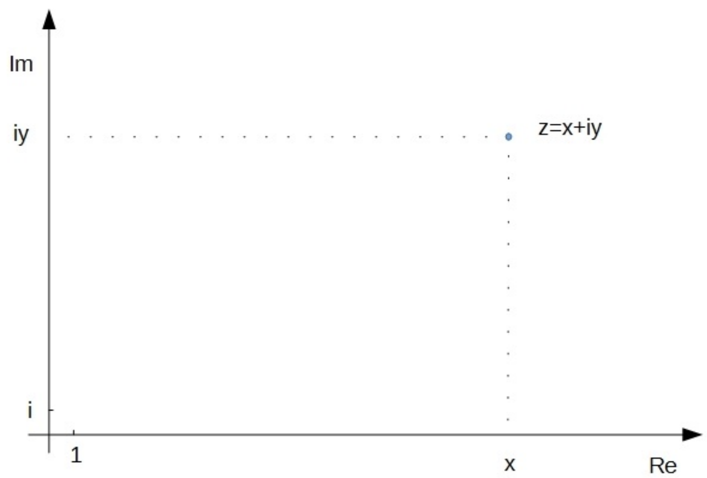
2.2 Het complex getal

Definitie Twee reële getallen x en y worden gecombineerd tot een complex getal z:

$$z = x + iy$$

Het reële getal x wordt het reële deel van z genoemd: $x = Re(z) = \Re(z)$.
Het reële getal y wordt het imaginaire deel van z genoemd: $y = Im(z) = \Im(z)$.
Merk op dat als $y = 0$ dan $z = x$ met $x \in \mathbb{R}$. Met andere woorden de verzameling van de reële getallen is een deelverzameling van de verzameling van de complexe getallen: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Analoog geldt dat als $x = 0$ dan $z = iy$. Het getal iy wordt een **imaginair getal** genoemd.

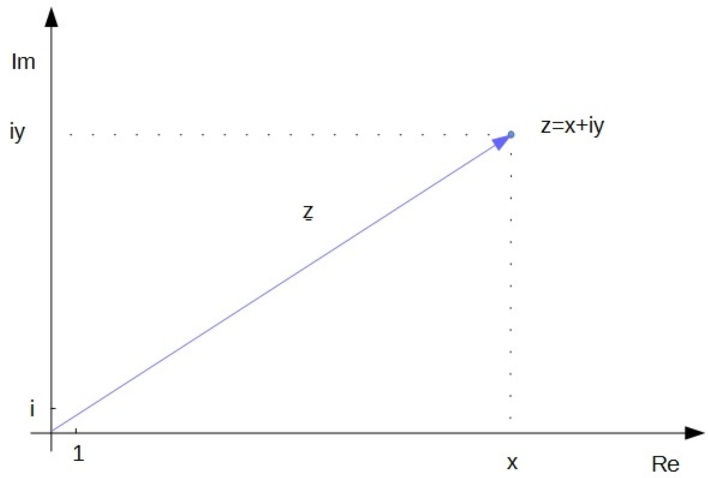
Aangezien een complex getal bestaat uit twee reële getallen kan een complex getal meetkundig worden voorgesteld door een punt in een vlak. Dit vlak, **het complex vlak**, wordt bepaald door de getallenas van de reële getallen, de reële as, met loodrecht daarop de imaginaire as. Deze laatste is de reële as waarop de eenheid (het getal 1) vervangen is door i.



Met behulp van schuifknoppen kan je in de volgende interactieve voorstelling het reële en imaginaire deel van het getal veranderen en nagaan waar in het complex vlak het complex getal zich bevindt.

Scan QR code voor animatie.

De plaats van een punt in een vlak is ook bepaald door de plaatsvector van het punt. Een complex getal z kan dus ook worden voorgesteld als een vector in het complex vlak. Een dergelijke vector wordt meestal aangeduid met het symbool $\underline{z}$.



Een interactieve voorstelling van een vector in het complex vlak.

Scan QR code voor animatie.

2.3 Rekenen met complexe getallen

Som van complexe getallen

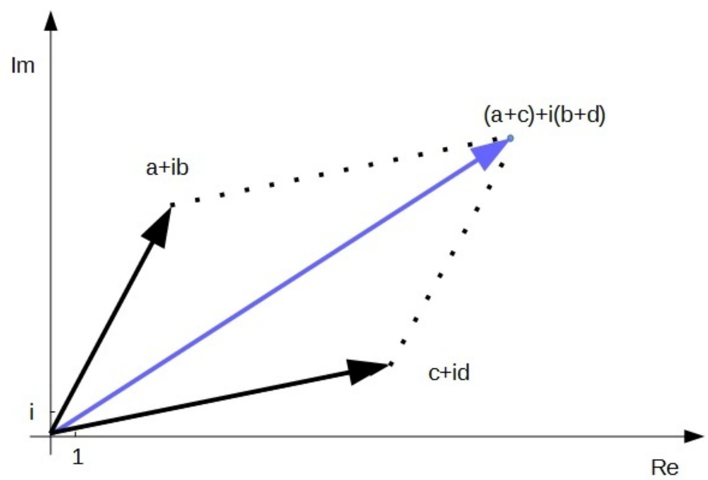
Definitie De som van twee complexe getallen $z_1 = a + ib$ en $z_2 = c + id$ is gedefinieerd als

$$z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$$

ofwel

$$\Re(z_1 + z_2) = \Re(z_1) + \Re(z_2) \qquad \Im(z_1 + z_2) = \Im(z_1) + \Im(z_2)$$

Het afzonderlijk optellen van de reële en imaginaire delen van de complexe getallen kan beschouwd worden als het optellen van componenten van vectoren in het complex vlak. Met andere woorden: optellen van complexe getallen komt neer op optellen van vectoren in het complex vlak.



Product van complexe getallen

Als we twee complexe getallen $z_1 = a + ib$ en $z_2 = c + id$ met elkaar willen vermenigvuldigen kunnen we dit in eerste instantie neerschrijven als $z_1 z_2 = (a + ib)(c + id)$.
Om het product te berekenen worden de haakjes uitgewerkt op de klassieke manier maar wordt er expliciet rekening gehouden met $i^2 = -1$.

Eigenschap 2

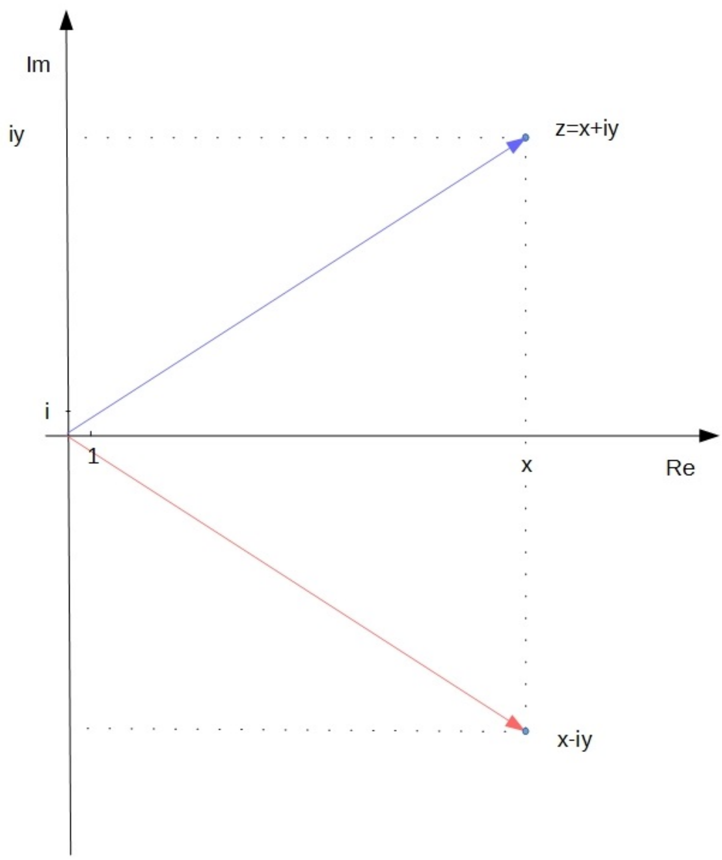
$$z_1 z_2 = (a+ib)(c+id) = ac + iad + ibc + i^2 bd = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Complex toegevoegde van een complex getal

Definitie De complex toegevoegde van een complex getal vindt men door het imaginair deel van een complex getal van teken te veranderen. Men noteert de complex toegevoegde van z als $\overline{z}$.
Dus, als $z = x + iy$ dan is de complex toegevoegde van z het getal $\overline{z} = x - iy$.

Eigenschap 3 *Een getal vermenigvuldigen met zijn complex toegevoegde geeft het volgende interessante resultaat:*

$$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - ixy + iyx - i^2y^2 = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$$



Een meer interactieve voorstelling vind je hier.

Scan QR code voor animatie.

Modulus van een complex getal

Definitie De grootte van de plaatsvector van een complex getal wordt de modulus van dat getal genoemd.

Met behulp van de stelling van Pythagoras wordt de grootte berekend als $|\underline{z}| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Eigenschap 4 *De modulus van het complex getal $z = x + iy$ kan dus ook geschreven worden als*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

Quotiënt van complexe getallen

Het berekenen van het quotiënt van twee complexe getallen komt er op neer dat men er voor zorgt dat de noemer van de uitdrukking een reëel getal wordt. De gehele uitdrukking wordt dan een duidelijk leesbaar complex getal.
De eenvoudigste manier om dit te doen is teller en noemer vermenigvuldigen met de complex toegevoegde van de noemer.
Laten we de getallen $z_1 = a + ib$ en $z_2 = c + id$ delen door elkaar:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

Voorbeeld 1

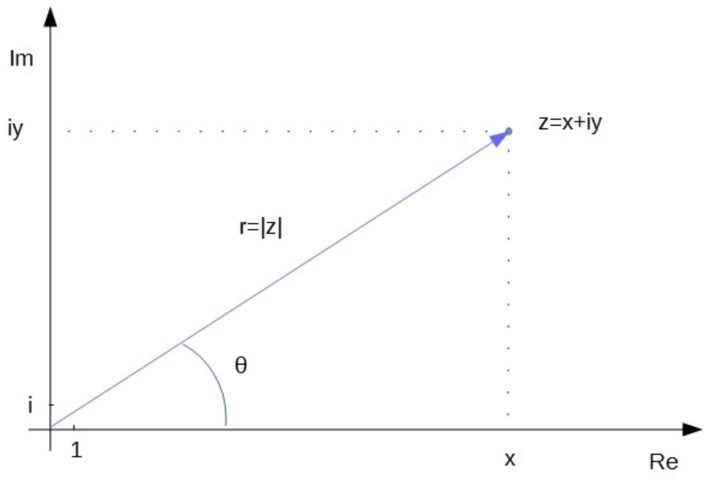
$$\frac{4 - i}{1 + i} = \frac{(4 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{4 - 4i - i - 1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$$

2.4 Rekenen met complexe getallen - voorbeeld

Zie filmpje MOOC.

2.5 Goniometrische vorm van een complex getal

De plaats van een punt P in een vlak wordt traditioneel vastgelegd met behulp van de cartesische coördinaten (x, y). Het is echter evengoed mogelijk hiervoor andere coördinaten te kiezen. Een mogelijk alternatieve keuze zijn de afstand r van het punt P tot de oorsprong en de hoek θ die de rechte OP maakt met de $x-$as. (r, θ) worden poolcoördinaten genoemd.
Passen we dit toe op een complex getal z in het complex vlak dat wordt de afstand r de modulus $|z|$ en de hoek θ de hoek die de vector $\underline{z}$ maakt met de $x-$as.



Figuur .1: *Goniometrische vorm van een complex getal. De plaats van het getal in het complex vlak wordt vastgelegd door de poolcoördinaten* $r = |z|$ *en* θ

Door de bij het getal $z = x+iy$ horende vector te projecteren op de reële as en op de imaginaire as vindt men

$$\begin{cases} x = \Re(z) = |z|\cos\theta \\ y = \Im(z) = |z|\sin\theta \end{cases}$$

Eigenschap 5 *In goniometrische vorm wordt dat*

$$z = x + iy = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Met

modulus van $z = x + iy$	$\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
argument van $z = x + iy$	$\theta = \arctan\frac{y}{x}$

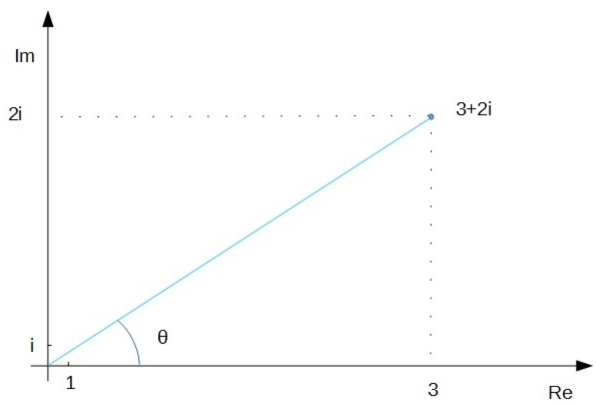
Opmerking

- Een punt in het complex vlak met $r = |z|$ en poolhoek θ kan ook beschreven worden met dezelfde r maar een poolhoek $\theta + 2\pi$, een poolhoek $\theta + 4\pi$, enz... Men zegt dat de hoek θ bepaald is op een geheel aantal keer 2π na.
$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|(\cos(\theta + k2\pi) + i\sin(\theta + k2\pi))$$
met k een geheel getal.
De hoek waarvoor geldt $\theta \in [0, 2\pi[$ is de **hoofdwaarde van het argument**.

- Bij het berekenen van het argument wordt gebruik gemaakt van de Arctan-functie. Het bereik van deze functie is $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ waardoor het berekende argument het complex getal altijd in het eerste of vierde kwadrant plaatst.
Het is dus zeer belangrijk om te controleren of het complex getal in werkelijkheid niet in het tweede of derde kwadrant ligt. Als dat het geval is moet een correctie op het berekende argument worden toegepast!
We illustreren hoe dit in zijn werk gaat met enkele voorbeelden.

We zetten de volgende complexe getalen in goniometrische vorm:

Voorbeeld 1 $z = 3 + 2i$
We maken een figuur om duidelijk te maken in welk kwadrant het getal ligt.



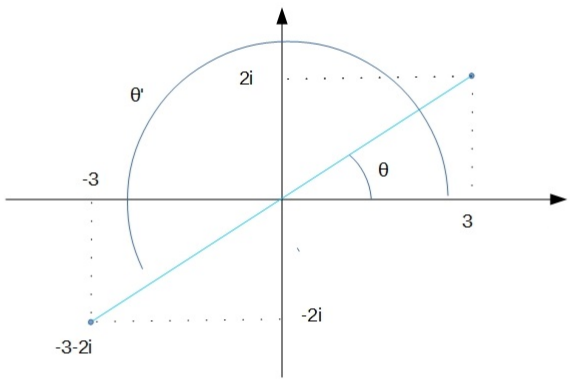
Het getal ligt in het eerste kwadrant. We kunnen dus gewoon de formule voor het argument gebruiken zonder correctie.

$$|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} \qquad |z| = \sqrt{13}$$
$$\tan\theta = \frac{2}{3} \qquad \theta = 33,69^o$$

$$z = \sqrt{13}(\cos(33,69^o) + i\sin(33,69^o)$$

Voorbeeld 2 $\quad z = -3 - 2i$

We maken een figuur om duidelijk te maken in welk kwadrant het getal ligt.



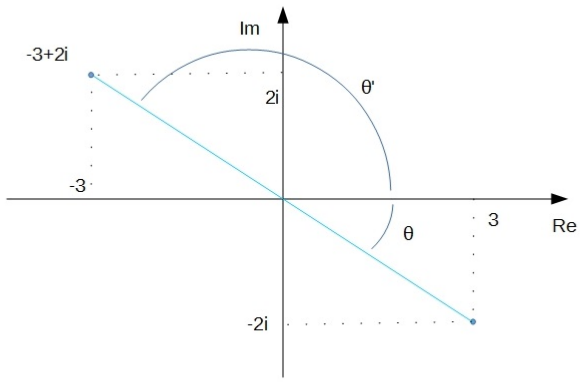
Het getal ligt in het derde kwadrant. We moeten dus een correctie toepassen op het berekende argument θ om het werkelijke argument θ' te vinden. We tellen π of 180^o bij het berekende argument.

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} \qquad |z| = \sqrt{13}$$
$$\tan\theta = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \qquad \theta = 33,69^o$$
$$\theta' = \theta + 180^o \qquad \theta' = 213,69^o$$

$$z = \sqrt{13}(\cos(213,69^o) + i\sin(213,69^o))$$

Voorbeeld 3 $\quad z = -3 + 2i$

We maken een figuur om duidelijk te maken in welk kwadrant het getal ligt.



Het getal ligt in het tweede kwadrant. We moeten dus een correctie toepassen op het berekende argument θ om het werkelijke argument θ' te vinden. We tellen π of 180^o bij het berekende argument.

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} \qquad |z| = \sqrt{13}$$
$$\tan\theta = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3} \qquad \theta = -33,69^o$$
$$\theta' = \theta + 180^o \qquad \theta' = 146,31^o$$

$$z = \sqrt{13}(\cos(146,31^o) + i\sin(146,31^o))$$

2.6 De exponentiële vorm van een complex getal

De formule van Euler

De formule van Euler drukt uit hoe de functies cos en sin in verband staan met de natuurlijke exponentiële functie.

Eigenschap 6 *Voor elk getal $x \in \mathbb{R}$ geldt:*

$$\boxed{e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)}$$

Deze formule wordt bewezen in de analyse door aan te tonen dat de Taylorreeksontwikkeling van de functie e^{ix} en van de functie $\cos(x) + i\sin(x)$ hetzelfde zijn.

Eigenschap 7 *Voor praktisch rekenwerk met complexe getallen wordt de formule van Euler neergeschreven als:*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

Waarbij θ het argument voorstelt van de goniometrische vorm van een complex getal.

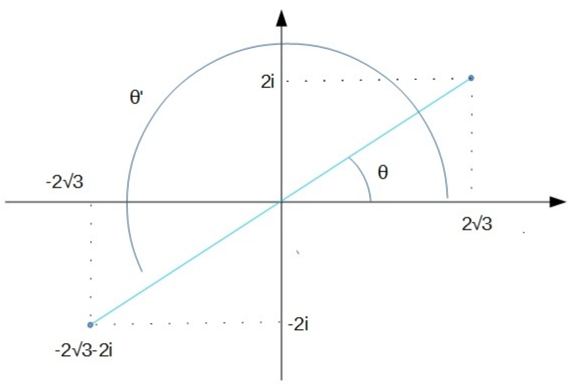
Eigenschap 8 *De formule van Euler leidt dus tot een derde, voor de praktijk zeer belangrijke, schrijfwijze voor complexe getallen.*

de algebraïsche vorm	$z = x + iy$
de goniometrische vorm	$z = \|z\|(\cos\theta + i\sin\theta)$
de exponentiële vorm	$z = \|z\|e^{i\theta}$

In principe moet in de formule van Euler, en dus ook in de exponentiële vorm van een complex getal, het argument θ uitgedrukt worden in radialen. Het gebeurt echter dikwijls dat het argument wordt uitgedrukt in graden. Dit is geen probleem zolang men beseft dat om de **numerieke waarde** van bijvoorbeeld e^{i45^o} rechtstreeks te berekenen men $e^{i\frac{\pi}{4}}$ moet uitrekenen.

Voorbeeld 1 We schrijven het getal $z = -2\sqrt{3} - 2i$ in exponentiële vorm.

Als eerste stap maken we een figuur die het getal voorstelt in het complex vlak.



Het getal ligt in het derde kwadrant. Er zal dus een correctie op de berekende waarde voor het argument moeten worden toegepast.

$$\begin{array}{ll} |z| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} & |z| = 4 \\ \tan\theta = \frac{-2}{-2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} & \theta = 30^o \\ \theta' = \theta + 180^o & \theta' = 210^o \end{array}$$

$$z = 4e^{i210^o} \text{ of ook } z = 4e^{i\frac{7}{6}\pi}$$

2.7 Bewerkingen in exponentiële vorm: som, product en quotiënt

De som

Er bestaat geen snelle manier om twee complexe getallen in exponentiële vorm op te tellen. Als je met dit probleem geconfronteerd wordt kan je op twee manieren te werk gaan.

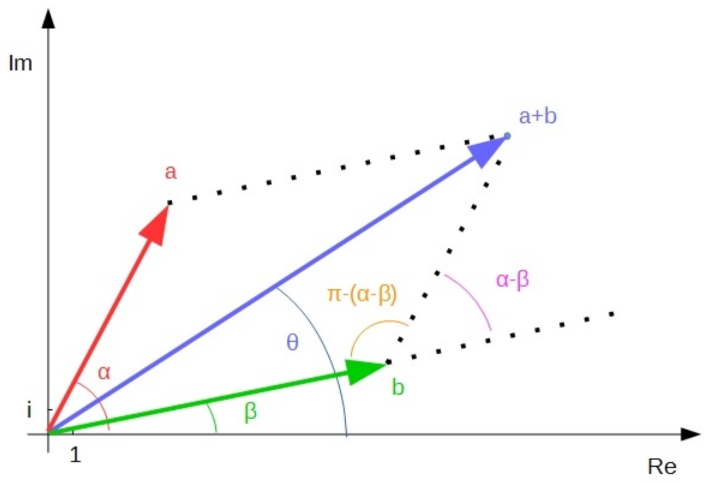
Eerste werkwijze:

1. Reken de complexe getallen om naar hun algebraïsche vorm met behulp van de formule van Euler
2. Tel de getallen in algebraïsche vorm op
3. Zet de som terug om naar exponentiële vorm.

Tweede werkwijze:

Beschouw het optellen van de twee complexe getallen als het optellen van twee vectoren in het complex vlak en gebruik driehoeksmeetkunde om de grootte (modulus) en de oriëntatie (argument) van de somvector te bepalen.

Beschouw twee complexe getallen $a = |a|e^{i\alpha}$ en $b = |b|e^{i\beta}$ waarvan je de som wil berekenen. Je wil dus modulus en argument van het complex getal $z = a + b = |z|e^{i\theta}$ vinden.
Maak nu een figuur waarin je de optelling grafisch voorstelt als de optelling van vectoren in het complex vlak:



Figuur 1. Grafische voorstelling van de optelling van twee complexe getallen als optelling van vectoren in het complex vlak. De modulus van de som $z = a + b$ wordt berekend met behulp van de cosinusregel.

In de driehoek gevormd door de vectoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ en de somvector $\underline{z} = \underline{a+b}$ kan je de cosinusregel toepassen om de grootte van $\underline{z}$ te berekenen:

$$|z|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos(\pi - (\alpha - \beta))$$

Aangezien $\cos(\pi - (\alpha - \beta)) = -\cos(\alpha - \beta)$ kan de modulus van de som $z = a + b$ geschreven worden als:

Eigenschap 9

$$|z| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos(\alpha - \beta)}$$

Het argument θ van de som kan je vinden door op de driehoek de sinusregel toe te passen om de hoek tussen de vectoren $\underline{b}$ en $\underline{a+b}$ te berekenen en deze hoek op te tellen bij β.

Je kan ook een algemene maar vrij ingewikkelde formule opstellen voor het argument door met de formule van Euler het reëele deel en imaginaire deel van de getallen apart op te tellen.

$$\Re(z) = \Re(a) + \Re(b) = |a|\cos\alpha + |b|\cos\beta$$
$$\Im(z) = \Im(a) + \Im(b) = |a|\sin\alpha + |b|\sin\beta$$

Het argument vind je via de algemene formule:

Eigenschap 10

$$\tan\theta = \frac{\Im(z)}{\Re(z)} = \frac{|a|\sin\alpha + |b|\sin\beta}{|a|\cos\alpha + |b|\cos\beta}$$

Het product

In tegenstelling tot het optellen van complexe getallen in exponentiële vorm is het vermenigvuldigen zeer eenvoudig. Men kan gewoon de rekenregels voor het vermenigvuldigen van exponentiële functies toepassen.

Eigenschap 11 *Neem twee getallen $a = |a|e^{i\alpha}$ en $b = |b|e^{i\beta}$. Het product geeft dan:*

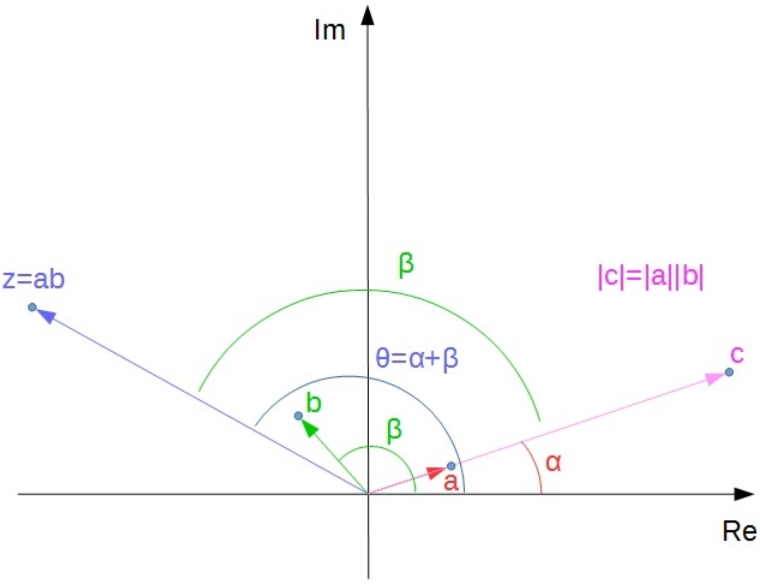
$$z = |z|e^{i\theta} = ab = (|a|e^{i\alpha})(|b|e^{i\beta})$$

Dus:

$$z = |z|e^{i\theta} = |a||b|e^{i(\alpha+\beta)}$$

Met andere woorden: de nieuwe modulus wordt gevonden door de twee oorspronkelijke moduli te vermenigvuldigen, en het nieuwe argument wordt gevonden door de oorspronkelijke argumenten op te tellen.

Het vermenigvuldigen van twee complexe getallen kan ook grafisch geïnterpreteerd worden. De vermenigvuldiging van $a = |a|e^{i\alpha}$ met $b = |b|e^{i\beta}$ komt neer op het veranderen van de lengte van de met a geassocieerde vector gevolgd door het roteren van de nieuwe vector over een rotatiehoek β.



- De met $a = |a|e^{i\alpha}$ en $b = |b|e^{i\beta}$ geassocieerde vectoren in het complex vlak worden voorgesteld in de figuur.
- Als eerste stap wordt een nieuw getal c geconstrueerd met hetzelfde argument als a maar met modulus $|c| = |a||b|$. De met c geassocieerde vector ligt dus evenwijdig met de met a geassocieerde vector maar heeft een andere lengte.
- Vervolgens wordt de nieuwe vector $\underline{c}$ geroteerd over een hoek β wat de vector $\underline{z}$ oplevert. Het met deze vector geassocieerde complex getal $z = |a||b|e^{i(\alpha+\beta)}$ is het product van a en b.

Deze stappen worden geïllustreerd in deze demo:

Scan QR code voor animatie.

Het quotiënt

Het complex getal $a = |a|e^{i\alpha}$ delen door het complex getal $b = |b|e^{i\beta}$ gebeurt op analoge manier als bij de vermenigvuldiging:

Eigenschap 12

$$z = \frac{|a|e^{i\alpha}}{|b|e^{i\beta}} = \frac{|a|}{|b|}e^{i(\alpha-\beta)}$$

Grafisch wordt dit geïnterpreteerd als het opeenvolgens construeren van een vector $\underline{c}$, evenwijdig met de met a geassocieerde vector en met grootte $|c| = \frac{|a|}{|b|}$, gevolgd door rotatie van de nieuwe vector $\underline{c}$ over een hoek $-\beta$.

2.8 Bewerkingen in exponentiële vorm: machtsverheffing en worteltrekking

Machtsverheffing

Een complex getal verheffen tot de macht $n \in \mathbb{N}$ kan je beschouwen als een speciaal geval van het vermenigvuldigen van complexe getallen. Het getal z wordt n keer met zichzelf vermenigvuldigd. Dus:

Definitie

Voor $z \in \mathbb{C}$ met $z = |z|e^{i\theta}$ en $n \in \mathbb{Z}$ geldt $z^n = (|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{in\theta}$.

Opmerking

- Door de uitdrukking $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ om te zetten naar goniometrische vorm met de formule van Euler vindt men

  Eigenschap 13

  $$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

  Deze uitdrukking staat bekend als de **formule van de Moivre** .

- Zelfs als een complex getal gegeven is in algebraïsche vorm is het voor de machtsverheffing meestal aan te raden om het getal om te zetten in exponentiële vorm.

  $$(1+i)^5 = (1+i)(1+i)(1+i)(1+i)(1+i) = ...$$

  In exponentiële vorm (het getal ligt in het eerste kwadrant):

  $$(1+i) = \sqrt{(1^2+1^2)}e^{i\arctan 1}$$

  dus

  $$(1+i) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Machtsverheffing:

$$
\begin{aligned}
(1+i)^5 &= (\sqrt{2})^5 e^{i\frac{5}{4}\pi} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi} \\
(1+i)^5 &= 4\sqrt{2}(\cos(\tfrac{5}{4}\pi) + i\sin(\tfrac{5}{4}\pi)) \\
(1+i)^5 &= 4(-1-i) \\
(1+i)^5 &= -4-4i
\end{aligned}
$$

Worteltrekking

Definitie Een $n-$de machtswortel z_n van een complex getal (met $n \in \mathbb{N}$) wordt als volgt gedefinieerd:

$$\boxed{z_n \text{ is } \textbf{een } n-\text{de machtswortel van } z \in \mathbb{C} \iff (z_n)^n = z}$$

Om de wortels te vinden schrijven we de complexe getallen in exponentiële notatie en drukken we expliciet uit dat het argument op een geheel aantal keer 2π na bepaald is.

het complex getal in exponentiële vorm	$z = \lvert z\rvert e^{i(\theta+k2\pi)}, k \in \mathbb{Z}$
een n-de machtswortel van z	$z_n = \lvert z_n\rvert e^{i\theta_n}$

Toepassen van de definitie geeft:

$$
\begin{aligned}
&(|z_n|e^{i\theta_n})^n = |z|e^{i(\theta+k2\pi)} \\
\iff\ & |z_n|^n e^{in\theta_n} = |z|e^{i(\theta+k2\pi)} \\
\iff\ & |z_n| = \sqrt[n]{|z|} \text{ en } \theta_{n,k} = \tfrac{\theta+k2\pi}{n}, k = 0, 1, 2, ..., n-1
\end{aligned}
$$

Er zijn maar n verschillende waarden voor k want zodra $k = n$ bekomt men hetzelfde argument als voor $k = 0$:

$$k = 0 \iff \theta_{n,0} = \frac{\theta}{n}$$

$$k = n \iff \theta_{n,n} = \frac{\theta+n2\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$$

Onthoud Elk complex getal $z = |z|e^{i\theta}$ heeft n verschillende $n-$de machtswortels:

$$z_{n,k} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\theta+k2\pi}{n}}$$

met $k = 0, 1, ..., n-1$

Voorbeeld 1 Bereken de tweedemachtswortels van $z = -1$ (m.a.w. $\sqrt{-1}$).

We schrijven -1 eerst in exponentiële vorm:

$$z = -1 \iff z = 1e^{i\pi} \iff z = e^{i(\pi+k2\pi)}, k \in \mathbb{Z}$$

We passen de definitie van 2−de machtswortel toe:

$$\begin{aligned}
&(|z_2|e^{i\theta_2})^2 = e^{i(\pi+k2\pi)} \\
\iff & |z_2|^2 e^{i2\theta_2} = 1e^{i(\pi+k2\pi)} \\
\iff & \begin{cases} |z_2|^2 = 1 \\ 2\theta_2 = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} |z_2| = 1 \\ \theta_2 = \frac{\pi+k2\pi}{2}, k = 0,1 \end{cases}
\end{aligned}$$

De twee tweedemachtswortels van $z = -1$ zijn dus

$$\begin{cases} z_{2,0} = 1e^{i\frac{\pi}{2}} = i \\ z_{2,1} = 1e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i \end{cases}$$

Het complex getal $z = -1$ heeft dus **twee** vierkantswortels: i en $-i$. De in technische teksten veel gebruikte uitdrukking $i = \sqrt{-1}$ is dus **niet correct**...

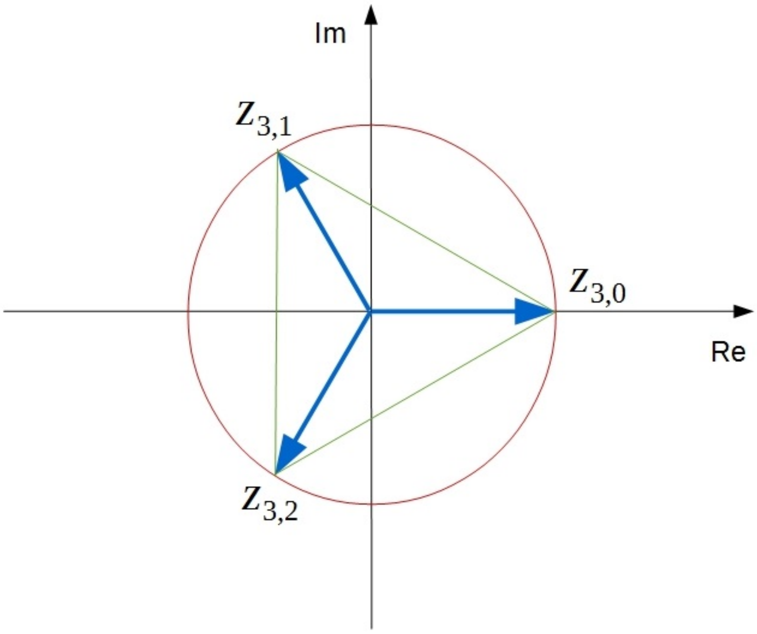
Voorbeeld 2 Bereken de derdemachtswortels van 125: $\sqrt[3]{125} = ?$.

We beschouwen $z = 125$ als een complex getal en schrijven het in exponentiële vorm: $z = 125e^{i(0+k2\pi)}, k \in \mathbb{Z}$
Dan gebruiken we de definitie van de derde machtswortels: $(z_3)^3 = 125$

$$|z_3|^3 e^{i3\theta_3} = 125e^{ik2\pi} \iff |z_3| = \sqrt[3]{125} = 5 \text{ and } \theta_3 = k\frac{2\pi}{3}, k = 0,1,2$$

De derdemachtswortels van 125 zijn dus:

$$\begin{cases} z_{3,0} = 5 \\ z_{3,1} = 5e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ z_{3,2} = 5e^{i\frac{4\pi}{3}} \end{cases}$$



In het complex vlak liggen de wortels op een cirkel met de oorsprong als middelpunt en met straal $|z_3|$. De argumenten van de verschillende wortels zijn zodanig dat de drie wortels op de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek liggen.

Dit laatste kan veralgemeend worden. De n verschillende n-de machtswortels van een complex getal liggen allemaal op een cirkel met middelpunt de oorsprong van het complex vlak. De wortels vormen de hoekpunten van een gelijkzijdige n-hoek.

2.9 Toepassing: fasoren

Een complex getal $z = |z|e^{i\theta}$ komt meetkundig overeen met een punt in het complex vlak. De plaats van dat punt wordt aangeduid met een vector in het complex vlak.
Door nu het argument van het complex getal te veranderen als functie van de tijd, bijvoorbeeld $\theta = \omega t + \alpha$, kan met de vector laten roteren met hoeksnelheid ω in het complex vlak, α komt dan overeen met het argument op tijdstip $t = 0$.
Een roterende vector in het complex vlak noemt men een **fasor**.

Hier is een fasor met beginfase $\alpha = \frac{\pi}{4}$ voorgesteld:

Scan QR code voor animatie.

Fasoren kennen veel toepassingen, zo worden ze gebruikt in de elektrotechniek bij rekenwerk met wisselspanning, en in de mechanica bij de beschrijving van trillingen.
Met de formule van Euler kan bijvoorbeeld een wisselspanning $V = V_0 \cos(\omega t + \alpha)$ even goed geschreven worden als $V = \Re(V_0 e^{i(\omega t+\alpha)})$. Bovendien is rekenen met de exponentiële functie $e^{i\theta}$ dikwijls eenvoudiger dan rekenen met de cos of sin functies. Daarom wordt in elektrotechniek dikwijls gebruik gemaakt van de complexe spanning $V = V_0 e^{i(\omega t+\alpha)}$, de werkelijke, fysische spanning vindt men dan door het reële deel van de complexe spanning te nemen.
Een complexe wisselspanning of wisselstroom kan dus voorgesteld worden door een fasor waarvan het reële deel, dus de projectie op de reële as, de fysische spanning voorstelt. Op dezelfde manier kan men in de mechanica van trillingen werken met complexe plaatscoördinaten en complexe snelheden.

Hier zie je een fasor met de projecties op de reële en imaginaire as en de voorstelling van het reële en imaginaire deel als functie van de tijd.

Scan QR code voor animatie.

Een gedempte trilling met startamplitude u_0 wordt beschreven door een fasor $u(t) = u_0 e^{-\alpha t} e^{i\omega t}$. Het reële deel van $u(t)$ beschrijft dan de fysische trilling. Hierbij kan $u(t)$, afhankelijk van de toepassing, zowel een spanning, een plaatscoördinaat, een snelheid of nog een andere grootheid voorstellen.

Scan QR code voor animatie.

2.10 Test complexe getallen

TODO