Afgeleiden van veeltermfuncties

1 Afgeleide van een constante functie

Voor $c \in \mathbb{R}$ is $y = c$ het voorschrift van een constante functie. Intuïtief (afgeleide geeft snelheid aan waarmee een functiewaarde verandert) is $D(c) = 0$.

Via de definitie:
$y(a) = c$; $y(a + \Delta x) = c$
dus $\frac{y(a+\Delta x)-y(a)}{\Delta x} = \frac{c-c}{\Delta x} = 0$.

In de limiet als Δx nul wordt blijft dit 0. Je bekomt $D(c) = 0$.

2 Afgeleide van de identieke functie

Het voorschrift $y = x$ is het voorschrift van de identieke functie. Waaraan is D(x) gelijk?

Via de definitie:
$y(a) = a$; $y(a + \Delta x) = a + \Delta x$
dus $\frac{y(a+\Delta x)-y(a)}{\Delta x} = \frac{a+\Delta x-a}{\Delta x} = 1$.

In de limiet als als Δx nul wordt blijft dit 1. Je bekomt $D(x) = 1$.

3 Afgeleide van $y = x^2$

Voor $y = x^2$ is
$y(a) = a^2$, $y(a + \Delta x) = (a + \Delta x)^2 = a^2 + 2a\Delta x + \Delta x^2$
dus $\frac{y(a+\Delta x)-y(a)}{\Delta x} = \frac{2a\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x} = 2a + \Delta x$.
In de limiet als Δx nul wordt dan bekom je 2a. Je bekomt $Dy(a) = 2a$ en daarom $D(x^2) = 2x$.

4 Afgeleide van $y = x^n$

Algemeen geldt voor $n \in \mathbb{N}$ dat $D(x^n) = nx^{n-1}$.

Merk op, als $n = 0$ dan geeft dit $D(x^0) = 0x^{-1} = 0$. Omdat $x^0 = 1$ geeft dit $D(1) = 0$. Dat komt overeen met de afgeleide van een constante functie.

5 afgeleiden van veeltermfuncties

Uit de afgeleide van $y = x^n$ met $n \in \mathbb{N}$ volgt dat je door middel van de volgende twee rekenregels van alle veeltermfuncties de afgeleide kunt berekenen.

Eigenschap. *Afgeleide van een som :*
$\boxed{D(f+g) = Df + Dg}$

Eigenschap. *Afgeleide van een functie vermenigvuldigd met een constante :*
$\boxed{D(cf) = cD(f)}$

Voorbeeld.

$$\begin{aligned} &D(5x^3 - 7x^2 + 18x - 9) \\ &\quad = D(5x^3) + D(-7x^2) + D(18x) + D(9) \text{ (rekenregel som)} \\ &\quad = 5D(x^3) - 7D(x^2) + 18D(x) + D(9) \text{ (rekenregel product met c)} \\ &\quad = 5.3x^2 - 7.2x + 18.1 + 0 \ (D(x^n) = nx^{n-1}) \\ &\quad = 15x^2 - 14x + 18 \end{aligned}$$

Voorbeeld. *Bekijk terug de functie uit het beginvoorbeeld*

$$f(x) = 1,5 + 50t - 4,9t^2$$

Met de rekenregels en afleiden van x^n bekom je

$$Df(x) = 50 - 9,8t$$

Merk op dat je door invullen vindt $Df(2) = 50 - 9,8.2 = 30,4$. Dit is het resultaat dat we eerder gevonden hadden.

Uit de twee rekenregels volgt ook

Eigenschap. *Algeleide van een verschil*
$\boxed{D(f-g) = Df - Dg}$

Eigenschap. *De afgeleide $D(x^n) = nx^{n-1}$ geldt algemener voor alle $n \in \mathbb{R}$.*

Voorbeeld. $D(\sqrt[5]{x}) = D(x^{1/5}) = \frac{1}{5}x^{-4/5} = \frac{1}{5x^{4/5}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

Voorbeeld. $D(\frac{1}{x^3}) = D(x^{-3}) = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$

Voorbeeld. $D(\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt{x^3}) = D(\sqrt[3]{x^2}) - 5D(\sqrt{x^3})$
$= D(x^{2/3}) - 5D(x^{3/2})$
$= \frac{2}{3}x^{-1/3} - 5\frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{15}{2}\sqrt{x}$