Nachklausur

Mathematik I - Theoretische Grundlagen der Informatik

HWR Berlin, Wintersemester 2022/2023

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Schlesinger

Aufgabe 1 (Mengenoperationen) (4 Punkte)

Gegeben seien die Mengen $A = \{(1,1),(2,2),(3,2)\}$ und $B = \{(1,1),2,a,b\}$.

(i) Bestimmen Sie $A \cap B$.

(ii) Bestimmen Sie $A \cup B$.

(iii) Bestimmen Sie $A \backslash B$.

(iv) Bestimmen Sie $\mathscr{P}(A \cap B)$

Aufgabe 2 (Intervall als Mengendeklaration) (2 Punkte)

Ein Intervall auf einer Grundmenge, z.B. $\mathbb{R}$ ist eine Menge von Zahlen, die zwischen zwei Grenzen liegen. Man schreibt dann z.B. $[a,b]$ für die Mengen der Zahlen, die zwischen a und b liegen, wobei a und b mit dazugehören.

Definieren Sie das Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ als Mengendeklaration.

Aufgabe 3 (Relationen und Funktionen) (10 Punkte)

Sei $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $Y = \{a,b,c\}$ und $f \subseteq X \times Y$ mit

$f = \{(1,a),(2,a),(3,c),(4,b),(5,a),(6,b),(7,c),(8,a)\}$.

(i) Ist f eine Funktion? Begründen Sie Ihre Antwort.

(ii) Wir definieren eine neue Relation $R \subseteq X \times X$ mit $R = \{(x,y) \in X \times X \mid f(x) = f(y)\}$. Beweisen Sie, dass es eine Äquivalenzrelation ist.

(iii) Die Menge der Äquivalenzklassen von R ist definiert als die Menge $X/R = \{[x] \mid x \in X\}$, wobei $[x] = \{y \in X \mid (x,y) \in R\}$ als *Äquivalenzklasse* von x bezeichnet wird (das sind wie definiert alle Elemente, die mit einem gegebenen $x \in M$ in Relation stehen). Bestimmen Sie X/R.

Aufgabe 4 (Relationen) (8 Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Fragen.

(i) Was ist eine Relation?

(ii) Was ist eine reflexive Relation?

(iii) Was ist eine symmetrische Relation?

(iv) Was ist eine antisymmetrische Relation?

(v) Was ist eine transitive Relation?

(vi) Was ist eine Äquivalenzrelation?

(vii) Was ist eine Ordnungsrelation?

(viii) Was ist eine Funktion?

Aufgabe 5 (Relationen) (9 Punkte)

Sei $M = \{1, 2, 3\}$ und $R \subseteq M \times M$ mit $1R1, 1R2, 2R2, 2R3, 3R1$.

(i) Ist R symmetrisch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(ii) Ist R antisymmetrisch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(iii) Ist R transitiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

(iv) Zeichnen Sie R als Graphen.

(v) Geben Sie R als Adjazaenzmatrix an.

(vi) Berechnen Sie $R \circ R$ und geben Sie das Ergebnis als Adjazenzmatrix und Graphen an.

(vii) Sei $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$ die Relation, die faktisch R umkehrt. Geben Sie R^{-1} als Adjazenzmatrix und Graphen an.