Probeklausur

Hochschule für
Wirtschaft und Recht Berlin
Berlin School of Economics and Law

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Schlesinger
Fachbereich 2 - Duales Studium Wirtschaft & Technik

Probeklausur

Mathematik I - Theoretische Grundlagen der Informatik

HWR Berlin, Wintersemester 2022/2023

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Schlesinger

Aufgabe 1 (Mengenoperationen) (4 Punkte)

Gegeben seien die Mengen $A = \{a, b, 3, 4\}$ und $B = \{1, 2, a, b\}$.

(i) Bestimmen Sie $A \cap B$.

(ii) Bestimmen Sie $A \cup B$.

(iii) Bestimmen Sie $A \backslash B$.

(iv) Bestimmen Sie $\mathscr{P}(A \cap B)$

Aufgabe 2 (Überlegungen mit Mengen) (2 Punkte)

Die beiden folgenden Aussagen gelten nicht allgemein für alle Mengen A, B, C. Finden Sie Gegenbeispiele für Mengen A, B, C zu folgenden Aussagen:

(i) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$

(ii) $A \cap B \neq \emptyset \wedge B \cap C \neq \emptyset \Rightarrow A \cap C \neq \emptyset$

Aufgabe 3 (Mengenbeweis) (2 Punkte)

Seien M, N Mengen. Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

$$\mathscr{P}(M) \cap \mathscr{P}(N) \subseteq \mathscr{P}(M \cap N)$$

Aufgabe 4 (Relationen) (14 Punkte)

Gegeben seien die Relation $R \subseteq M \times M$ und $S \subseteq M \times M$ mit $M = \{1, 2, 3, 4\}$,

$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 3)\}$ und $S = \{(1, 2), (2, 2), (1, 4)\}$.

(i) Stellen Sie R und S als Adjazenzmatrix und Graph dar.

(ii) Sind R oder S Ordnungen? Begründen Sie Ihre Entscheidung.
(Hinweis zur Erinnerung: Eine Ordnung ist eine Relation, die reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Sie muss nicht unbedingt total sein (Total würde bedeuten, dass jeweils zwei Elemente immer in Relation stehen - in der einen oder anderen Richtung, also $\forall x, y \in M : (x, y) \in M \vee (y.x) \in M$, was wir in der Vorlesung und auch hier nicht fordern.)).

(iii) Berechnen Sie $R \circ S$ und stellen Sie das Ergebnis als Adjazenzmatrix und Graph dar.
(Hinweis zur Erinnerung: Es ist $R \circ S = \{(x, y) \in M \times M | \exists z \in M : (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S\}$)

(iv) Wir bezeichnen im Folgenden $T = R \circ S$ (T als Abkürzung von $R \circ S$). Berechnen Sie $T \circ T$ und stellen Sie diese Relation als Adjazenzmatrix und Graph dar.

Aufgabe 1 (Mengenoperationen)

Gegeben seien die Mengen A={a,b,3,4} und B={1,2,a,b}.

1. Bestimmen sie $A \cap B$
2. Bestimmen sie $A \cup B$
3. Bestimmen sie $A \backslash B$
4. Bestimmen sie $\mathcal{P}(A \cap B)$

Lösung:

1. $\{a, b, 3, 4\} \cap \{1, 2, a, b\} = \{a, b\}$
2. $\{a, b, 3, 4\} \cup \{1, 2, a, b\} = \{a, b, 3, 4, 1, 2\}$
3. $\{a, b, 3, 4\} \backslash \{1, 2, a, b\} = \{3, 4\}$
4. $\mathcal{P}(\{a, b, 3, 4\} \cap \{1, 2, a, b\}) = \mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Aufgabe 2 (Überlegungen mit Mengen)

Die beiden folgenden Aussagen gelten nicht allgemein für alle Mengen A, B, C. Finden Sie Gegenbeispiele für Mengen A, B, C zu folgenden Aussagen:

1. $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$
2. $A \cap B \neq \emptyset \wedge B \cap C \neq \emptyset \Rightarrow A \cap C \neq \emptyset$

Lösung:

1. sei $A = \emptyset$ und $B = \{1, 2\}$
   dann ist

   $$\begin{aligned} A \subseteq B &\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset \\ \emptyset \subseteq \{1, 2\} &\Rightarrow \emptyset \cap \{1, 2\} \neq \emptyset \\ \top &\Rightarrow \emptyset \neq \emptyset \\ \top &\Rightarrow \bot \end{aligned}$$

   was die def. vom $\Rightarrow$ widerlegt
   somit ist die Aussage $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$ widerlegt.

2. sei $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$ und $C = \{2\}$

$$\begin{aligned}
A \cap B \neq \emptyset \wedge B \cap C \neq \emptyset &\Rightarrow A \cap C \neq \emptyset \\
\{1\} \cap \{1,2\} \neq \emptyset \wedge \{1,2\} \cap \{2\} \neq \emptyset &\Rightarrow \{1\} \cap \{2\} \neq \emptyset \\
\{1\} \neq \emptyset \wedge \{2\} \neq \emptyset &\Rightarrow \emptyset \neq \emptyset \\
\top \wedge \top &\Rightarrow \bot \\
\top &\Rightarrow \bot
\end{aligned}$$

$$\top \Rightarrow \bot$$

was die def. vom $\Rightarrow$ widerlegt
somit ist die Aussage $A \cap B \neq \emptyset \wedge B \cap C \neq \emptyset \Rightarrow A \cap C \neq \emptyset$ widerlegt.

Aufgabe 3 (Mengenbeweis)

Seien M, N Mengen. Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

1. $\mathcal{P}(M) \cap \mathcal{P}(N) \subseteq \mathcal{P}(M \cap N)$