Probeklausur

# Mathematik I - Theoretische Grundlagen der Informatik

HWR Berlin, Wintersemester 2022/2023

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Schlesinger

**Aufgabe 1 (Mengenoperationen)** (4 Punkte)

Gegeben seien die Mengen $A = \{a, b, 3, 4\}$ und $B = \{1, 2, a, b\}$.

**(i)** Bestimmen Sie $A \cap B$.

**(ii)** Bestimmen Sie $A \cup B$.

**(iii)** Bestimmen Sie $A \backslash B$.

**(iv)** Bestimmen Sie $\mathscr{P}(A \cap B)$

**Aufgabe 2 (Überlegungen mit Mengen)** (2 Punkte)

Die beiden folgenden Aussagen gelten nicht allgemein für alle Mengen $A, B, C$. Finden Sie Gegenbeispiele für Mengen $A, B, C$ zu folgenden Aussagen:

**(i)** $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$

**(ii)** $A \cap B \neq \emptyset \wedge B \cap C \neq \emptyset \Rightarrow A \cap C \neq \emptyset$

**Aufgabe 3 (Mengenbeweis)** (2 Punkte)

Seien $M, N$ Mengen. Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

$$\mathscr{P}(M) \cap \mathscr{P}(N) \subseteq \mathscr{P}(M \cap N)$$

**Aufgabe 4 (Relationen)** (14 Punkte)

Gegeben seien die Relation $R \subseteq M \times M$ und $S \subseteq M \times M$ mit $M = \{1, 2, 3, 4\}$,

$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 3)\}$ und $S = \{(1, 2), (2, 2), (1, 4)\}$.

**(i)** Stellen Sie $R$ und $S$ als Adjazenzmatrix und Graph dar.

**(ii)** Sind $R$ oder $S$ Ordnungen? Begründen Sie Ihre Entscheidung.
*(Hinweis zur Erinnerung: Eine Ordnung ist eine Relation, die reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Sie muss nicht unbedingt total sein (Total würde bedeuten, dass jeweils zwei Elemente immer in Relation stehen - in der einen oder anderen Richtung, also $\forall x, y \in M : (x, y) \in M \vee (y.x) \in M$, was wir in der Vorlesung und auch hier nicht fordern.)).*

**(iii)** Berechnen Sie $R \circ S$ und stellen Sie das Ergebnis als Adjazenzmatrix und Graph dar.
*(Hinweis zur Erinnerung: Es ist $R \circ S = \{(x, y) \in M \times M | \exists z \in M : (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S\}$)*

**(iv)** Wir bezeichnen im Folgenden $T = R \circ S$ ($T$ als Abkürzung von $R \circ S$). Berechnen Sie $T \circ T$ und stellen Sie diese Relation als Adjazenzmatrix und Graph dar.

**(v)** Sei $Id = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$ die Relation, die jedes Element von $M$ mit sich selbst in Beziehung setzt. Geben Sie die Adjazenzmatrix und den Graph der Relation $O = Id \cup T \cup T \circ T$ an.

**(vi)** Begründen Sie, dass $O$ eine Ordnung ist.

**(vii)** Stellen Sie $O$ als Hasse-Diagramm dar.

**Aufgabe 5 (Relationen und Eigenschaften)** (5 Punkte)
Entscheiden Sie für jede Aussage, ob sie zutrifft, begründen Sie Ihre Entscheidung und geben Sie ggf. ein Beispiel an.

Es gibt eine Relation $R \subseteq M \times M$ über einer Menge $M$, die

**(i)** reflexiv und irreflexiv ist
*(Hinweis zur Erinnerung: R ist reflexiv, wenn* $\forall x \in M : (x,x) \in R$*, irreflexiv, wenn* $\forall x \in M : (x,x) \notin R$*)*

**(ii)** weder reflexiv noch irreflexiv ist

**(iii)** symmetrisch und antisymmetrisch ist
*(Hinweis zur Erinnerung: R ist symmetrisch, wenn* $\forall x,y \in M : (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$*, antisymmetrisch, wenn* $\forall x,y \in M : (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x = y$*)*

**(iv)** antisymmetrisch und irreflexiv ist

**(v)** symmetrisch und antisymmetrisch ist.

**Aufgabe 6 (Beweis mit Relationen)** (4 Punkte)
Seien $R_1, S_1, R_2, S_2 \subseteq M \times M$ Relationen auf einer Menge $M$. Zeigen Sie

$$R_1 \subseteq R_2 \wedge S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow R_1 \circ S_1 \subseteq R_2 \circ S_2$$

**Aufgabe 7 (Funktionen)** (2 Punkte)
Geben Sie für die folgenden Funktionen an, ob sie injektiv oder surjektiv sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.
*(Hinweis zur Erinnerung:*
$f : M \to N$ *ist injektiv, wenn* $\forall x,y \in M : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ *und surjektiv, wenn* $\forall y \in N \exists x \in M : y = f(x)$*)*

**(i)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$

**(ii)** $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, x \mapsto 1$