Inhaltsverzeichnis

1 Die Integralrechnung

1.1 Das Integral

Berechnung der Untersumme:

$$U_n = A_1 + ... + A_n < \text{ tatsächliche Fläche}$$

Berechnung der Obersumme:

$$O_n = A_1 + ... + A_n > \text{ tatsächliche Fläche}$$

Definition 1.1.1. Sei $f(x)$ eine Funktion mit $f(x) \geq 0$ im Intervall $[a; b]$. Dann nennt man den gemeinsamen Grenzwert von Unter- und Obersumme

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n$$

das Integral der Funktion f zwischen den Grenzen a und b. Man schreibt hierfür

$$\int_a^b f(x)dx.$$

(Lies: „Das Integral von $f(x)dx$ von a bis b.“) Weitere Begriffe

- b obere Grenze
- a untere Grenze
- $f(x)$ Integrand
- $f(x)dx$ Integrationsvariable

Vereinbarung: Sei $a < b$.

$$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$$

1.2 Die Flächenbilanz

bisher: $f(x) \geq 0 \; \forall x \in [a;b]$
zunächst: $f(x) \leq 0 \; \forall x \in [a;b]$
Ist die Integrandenfunktion im Integrationsintervall negativ, gibt das Integral nicht die Fläche an, sondern ihr negatives.

$$\int_a^b f(x)dx < 0 \Rightarrow A = \left| \int_a^b f(x)dx \right| = -\int_a^b f(x)dx$$

Allgemein: Sei f eine Funktion, die im Intervall $[a;b]$ definiert ist. Das Integral $\int_a^b f(x)dx$ gibt die **Flächenbilanz**[1] an.

Beispiel 1.2.1.

$$\int_{-1}^{1} xdx = 0 \tag{1.1}$$

$$\int_{0}^{10} (-\frac{1}{2}x + 2)dx = -5 \tag{1.2}$$

1.3 Die Integralfunktion

bisher: Integrale mit fester unterer und oberer Grenze

$$\int_b^a f(x)dx \; (\textbf{bestimmtes Integral})$$

jetzt: Untere Grenze a bleibt fest; obere wird zur Variablen x. Man erhält eine Funktion:

$$I_a(x) = \int_a^x f(t)dt \; (\textbf{Integralfunktion})$$

$\boxed{\text{Jede Integralfunktion hat mindestens eine Nullstelle!}}$

[1]Summe der über der x-Achse Flächeninhalte + Summe der unter der x-Achse gelegenen Flächeninhalte

1.4 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Vermutung: Die Integralfunktion ist eine Stammfunktion der Integrandenfunktion.

Theorem 1.4.1 (*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*)**.** Sei $f : t \mapsto f(t)$ im Intervall $[a;b]$ definiert. Dann gilt für die Integralfunktion $I_a(x) = \int_a^x f(t)dt$:

$$I'_a(x) = f(x)\ \forall x \in [a;b]$$

Die Integralfunktion I_a ist eine Stammfunktion der Integrandenfunktion f.

Beweis.

$$A = I_a(x+h) - I_a(x)$$

m_h: kleinster Funktionswert in $[x; x+h]$
M_h: größter Funktionswert in $[x; x+h]$
Dann gilt:

$$h \cdot m_h < I_a(x+h) - I_a(x) < h \cdot M_h$$
$$m_h < \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h} < M_h$$

Für $h \to 0 \Rightarrow m_h \to f(x); M_h \to f(x)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h} = f(x) \Rightarrow I'_a(x) = f(x)$$

□

$\Rightarrow I_a(x)$ ist EINE (bestimmte) Stammfunktion von $f(x)$. Sei nun $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion von $f(x)$.

$$\Rightarrow I_a(x) = F(x) + c \tag{1.3}$$

Wegen $I_a(a) = 0$ In 1.3 und x für a einsetzen:

$$I_a(a) = F(a) + c$$
$$0 = F(a) + c$$
$$c = -F(a) \Rightarrow I_a(x) = F(x) - F(a)$$

D.h., dass die Stammfunktion solange in y-Richtung verschoben werden muss, sodass die Nullstelle stimmt. Insbesondere:

$$\boxed{I_a(b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)}$$

Neue Schreibweise: $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b$

Beispiel 1.4.2.
- $\int_{-1}^{3}(x^2-1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-1}^{3} = \left(\frac{1}{3}\cdot 3^3 - 3\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - (-1)\right) = \frac{16}{3}$
- $\int_{-1}^{3}(x^2-1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x + c\right]_{-1}^{3} = \left(\frac{1}{3}\cdot 3^3 - 3 + c\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - (-1) + c\right) = \frac{16}{3}$
- $\int_{-1}^{x}(x^2-1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-1}^{x} = \left(\frac{1}{3}\cdot x^3 - x\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - (-1)\right) = \frac{1}{3}\cdot x^3 - x - \frac{2}{3}$

Corollar 1.4.3. (i) $\int_a^a f(t)dt = 0$

(ii) $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$

(iii) $\int_b^a f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$

Beweis. (i) $F(a) - F(a) = 0$

(ii) $F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a))$

(iii) $F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a)$

□

1.5 Die Stammfunktion

neue Schreibweise: Das UNBESTIMMTE INTEGRAL $\int f(x)dx$ wir als Symbol für die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion $f(x)$ verwendet.

Beispiel 1.5.1.

$$\int 2x^3 dx = \left\{\frac{1}{2}x^4 + c \mid c \in \mathbb{R}\right\}$$

Stammfunktionen zu einfachen Funktionen:

$f(x)$	$F(x)$	Merkhilfe
$x^r (r \neq -1)$	$\frac{1}{r+1}x^r + 1$	$\int x^r dx = \frac{1}{r+1}x^r + 1 + c (r \neq -1)$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c$
$\sin x$	$-\cos x$	$\int \sin x dx = -\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x$	$\int \cos x dx = \sin x + c$
e^x	e^x	$\int e^x dx = e^x + c$
$\ln x$	$x \ln x - x$	$\int \ln x dx = x - \ln x + c$

Satz 1.5.2 (*Rechenregeln mit Stammfunktionen und Integralen*)**.** Seien G und H jeweils Stammfunktionen zu g und h, $k \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) Sei $f(x) = g(x) + h(x)$, so ist $F(x) = G(x) + H(x)$ Stammfunktion von $f(x)$, denn $F'(x) = G'(x) + H'(x)$ (Summenregel).

$$\Rightarrow \int_a^b (g(x) + h(x))dx = \int_a^b g(x)dx + \int_a^b h(x)dx$$

(ii) Sei $f(x) = k \cdot g(x)$, so ist $F(x) = k \cdot G(x)$, denn $F'(x) = k \cdot G'(x)$ (multiplikativer Faktor).

1.6 Die Flächenberechnung mit dem Integral

(i) (*Fläche zwischen Graph und x-Achse*). Beachte, die Flächen zwischen den ggf. vorhandenen Nullstellen zu berechen, da man sonst die Flächenbilanz errechnet.

(ii) (*Fläche zwischen zwei Graphen*). Seien alle s_n Schnittstellen von $f(x)$ mit $g(x)$. Wenn bekannt ist, dass $f(x) \geq g(x)$, $f(x)$ als Minuend, analog für $g(x)$. Sicherheitshalber Betragsstriche um alle Summanden setzen.

$$A = \Big|\int_a^{s_1}(f(x)-g(x))dx\Big| + \Big|\int_{s_1}^{s_2}(f(x)-g(x))dx\Big| + ... + \Big|\int_{s_{n-1}}^{s_n}(f(x)-g(x))dx\Big|$$

1.7 Die speziellen Integrale

Erinnerung: Sind $F(x)$ und $G(x)$ Stammfunktionen von $f(x)$ und $g(x)$, so ist $F(x) \cdot G(x)$ keine Stammfunktion von $f(x) \cdot g(x)$. Aber in einigen Sonderfällen lassen sich dennoch Stammfunktionen angeben.

(i) (*Die e-Funktion als ein Faktor*).

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + c$$

Beispiel 1.7.1.

$$\int e^{3x^2} \cdot 6xdx = e^{3x^2} + c$$

(ii) (*Im Zähler steht die Ableitung des Nenners*).

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} = ln|f(x)| + c$$

Beispiel 1.7.2.

$$\int \frac{2x}{x^2+3} = ln|x^2+3| + c$$

(iii) (*Verkettungen*). Eine Stammfunktion von $f(x) = (u \circ v) = (x) = u(v(x))$ lässt genau dann angeben, wenn die innere Funktion $v(x) = ax + b$ linear ist:

$$\int f(ax+b) = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + c$$

Beispiel 1.7.3.

$$\int \cos(2x+3) = \frac{1}{2}\sin(2x+3) + c$$

1.8 Die uneigentlichen Integrale

Ins Unendliche reichende Flächen <u>können</u> einen endlichen Flächeninhalt haben. Man schreibt hierfür:

Definition 1.8.1 (*Uneigentliche Integrale*)**.**

$$\int_a^z f(x)dx := \lim_{h\to z}\int_a^h f(x)dx = \lim_{h\to z}[F(x)]_a^h = \lim_{h\to z} F(h) - F(a) = F(a) \in \mathbb{R}$$

2 Weitere Eigenschaften von Funktionen und deren Graphen

2.1 Die Wendepunkte und Art der Extrema

Definition 2.1.1 (*Die Höhere Ableitung*)**.** Ist die Ableitung einer Funktion f differenzierbar, so erhält man durch Ableiten von f' die zweite Ableitung f''. Analog können höhere Ableitungen definiert werden.

Definition 2.1.2 (*Die Krümmung von Graphen*)**.**

G_f ist linksgekrümmt $\Leftrightarrow f''(x) > 0$

G_f ist rechtsgekrümmt $\Leftrightarrow f''(x) < 0$

Definition 2.1.3 (*Wendestellen/-punkte*)**.** Eine Stelle x_0, an der eine differenzierbare Funktion f ihre Krümmung (von links nach rechts oder umgekehrt) ändert, heißt WENDESTELLE. Der zugehörige Punkt $(x_0|f(x_0))$ heißt WENDEPUNKT.

Definition 2.1.4 (*Terrassenpunkt*)**.** Ein Wendepunkt mit waagrechter tangente ist ein TERRASSENPUNKT.

Satz 2.1.5 (*Kriterium für Wendestellen*)**.**

notwendig: $f''(x) = 0$

hinreichend: $f''(x)$ hat einen Vorzeichenwechsel (oder $f'''(x) \neq 0$)

Satz 2.1.6 (*Kriterium für Extrema*)**.**

notwendig: $f'(x) = 0$

hinreichend: Vorzeichenwechsel von f' von $-$ nach $+ \Rightarrow$ Minumum; Vorzeichenwechsel von f' von $+$ nach $- \Rightarrow$ Maximum
oder: $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ Maxmimum; $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ Minumum