Ein super toller Titel für eure Abschlussarbeit

Fakultät für Muster und Beispiele
der Hochschule Musterhausen

Abschlussarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Engineering

vorgelegt von

Max Mustermann
geboren am 01.01.1900 in Musterhausen

im Dezember 2014

Erstprüfer:	Prof. Dr. med. Dr.-Ing. M. Mustermann
Zweitprüfer:	Prof. Dr.-Ing. F. Musterfrau

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1 Einleitung

2 Visulaisierung höherer Dimensionen

2.1 platonische Körper

2.1.1 Teserract

3 Algebraische Strukturen

Wir werden uns mit der fundamentalsten aller algebraischen Strukturen, den Gruppen, befassen, um mit einem Zwischenstopp bei den Körpern die sogenannten Vektorräume über einen Körper K zu definieren.

3.1 Gruppen

Gruppen ermöglichen eine Abstrahierung von Rechenoperationen. Ebenso muss diese algebraische Struktur bestimmte Eigenschaften erfüllen, die im Folgenden nach einigen grundlegenden Definitionen neuer Begriffe aufgeführt werden.

Definition 3.1.1. Kartesisches Produkt
„Das kartesische Produkt $A \times B$ zweier Mengen A und B ist die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$:

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.\text{“ [1, S. 28]}$$

Bemerkung 3.1.2. Es kommt auf die Reihenfolge innerhalb des Paares an. Somit gilt $(a, b) \neq (b, a)$.

In Abschnitt 4.1.3 werden weitere Beispiele für das kartesische Produkt aufgeführt.

Definition 3.1.3. innere Verknüpfung
„Eine (innere) Verknüpfung auf einer Menge G ist eine Abbildung[[1]]

$$\mu : G \times G \to G \text{ .“ [2, S. 19, 4.1]}$$

Bemerkung 3.1.4. Aus der Abbildungsvorschrift geht hervor, dass einem Paar (g_1, g_2) ein Element $\mu((g_1, g_1))$, – stattdessen schreiben wir auch $g_1 \cdot g_2$, $g_1 + g_2$ oder $g_1 \circ g_2$ –, aus der Zielmenge zugeordnet wird (vgl. [2, S. 19, 4.1]).

[1] Das Wort Abbildung ist ein Synonym zu Funktion.

Definition 3.1.5. Gruppe
„Eine Gruppe ist eine Menge G mit einer Verknüpfung

$$\circ[^2]\colon G \times G \to G$$

für die die folgenden Eigenschaften gelten

(i) (Assoziativität) Für alle $x, y, z \in G$ gilt

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z).$$

(ii) (Existenz eines neutralen Elements) Es gibt ein $e \in G$ mit

$$e \circ x = x = x \circ e \,\text{für alle}\, x \in G.$$

(iii) (Existenz von Inversen) Sei $x \in G$. Dann gibt es ein $y \in G$ mit

$$y \circ x = e = x \circ y.\text{“ [2, S. 19, 4.2]}$$

Definition 3.1.6. abelsche oder kommutative Gruppe
Man bezeichnet eine Gruppe auch als kommutativ oder abelsch, wenn für alle $a, b \in G$ gilt

$$a \circ b = b \circ a. \text{ [2, S. 19, 4.3]}$$

Im weiteren Verlauf werden einige Beispiele für Gruppen aufgeführt.

Beispiel 3.1.7. Die Verknüpfung $+$ auf der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ erfüllt die Eigenschaften (i), (ii) – das neutrale Element ist hierbei die Zahl 0 – , aber nicht (iii), weil das Inverse einer natürlichen Zahl n die Lösung der Gleichung $n + x = 0 = x + n$ für $x \in \mathbb{N}$ ist, wobei $x = -n$ ergibt, aber $-n \notin \mathbb{N}$, sondern $-n \in \mathbb{Z}$. Somit ist die Verknüpfung $+$ auf der Menge der ganzen Zahlen, man schreibt auch $(\mathbb{Z}, +)$, eine Gruppe. Insbesondere ist sie *kommutativ* oder *abelsch.*

Beispiel 3.1.8. Ebenso bildet die Verknüpfung $\cdot$ (die Multiplikation) auf der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ eine *kommutative* Gruppe. Das neutrale Element bezüglich der Addition ist die 1, das auch als „Einselement“ [2, S. 20, 4.1] bezeichnet wird. Die Null ist

[2] Die innere Verknüpfung wird als „$\circ$“ bezeichnet. Anstatt des Zeichens kann eine Rechenoperation wie $+$ oder $\cdot$ verwendet werden.

ausgeschlossen, weil sie kein Inverses hat, also eine Zahl aus $\mathbb{Q}$, die multipliziert mit Null das 1 ergibt, existiert nicht. Der Kehrbruch einer beliebigen rationalen Zahl ist sein inverses Element.

Beispiel 3.1.9. Da $\mathbb{Z}, \mathbb{Q} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}$ sind, folgt insbesondere, dass $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ abelsche Gruppen sind.

Aus dem letzten Beispiel geht hervor, dass es einfacher wäre zwei verschiedene Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf einer Menge K für die Addition bzw. auf der Menge $K \setminus \{0\}$ für die Multiplikation in eine neue algebraische Struktur zusammenzufasssen. Diese nennen wir wie folgt:

3.2 Körper

Definition 3.2.1. Körper Ein Körper besteht aus zwei Mengen K und $K \setminus \{0\}$ mit zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + : K \times K \to K \\ \cdot : K \times K \to K \end{aligned}$$

für die gelten:

(i) $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit $e = 0$ als das neutrale Element.

(ii) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe mit dem Einselement $e = 1$ als das neutrale Element.

(iii) (Distrivbutivgesetze) Für alle $a, b, c \in K$ gilt

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \ \ . \text{ (vgl. [?])} \end{aligned}$$

Beispiel 3.2.2. Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden mit der uns geläufigen Addition und Multiplikation offensichtlich[3] einen Körper. (vgl. [3, S. 26])

[3] Der Beweis ist nicht Gegenstand dieser Seminararbeit.

4 Vektorräume

4.1 Vektorräume

Definition 4.1.1. Vektorraum
„Sei K ein Körper. Ein Vektorraum[1] über K (oder K-Vektorraum) ist eine kommutative Gruppe $(V, +)$[2] zusammen mit einer äußeren Verknüpfung

$$\begin{aligned} \cdot : K \times V &\to V \\ (\lambda, v) &\mapsto \lambda \cdot v \end{aligned}$$

(genannt Skalarmultiplikation) mit folgenden Eigenschaften: Für alle $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in K$ und $v, v_1, v_2 \in V$ gilt

(i) $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$

(ii) $\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$

(iii) $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v$

(iv) $1 \cdot v = v$." [2, S. 28, 6.1]

Bemerkung 4.1.2. Vektorräume beinhalten zwei verschiedene Additionen und Multiplikationen, die allerdings aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht extra gekennzeichnet werden. Zum einen gibt es die Addition in K und in V, ebenso die Multiplikation in K, zum anderen die sogenannte Skalarmultiplikation[3] $\lambda \cdot v$ für $\lambda \in K$ und $v \in V$. (vgl. [2, S. 28, 6.1])

Definition 4.1.3. Mehrfaches kartesisches Produkt

[1] Über den Vektoren befinden sich in der höheren Mathematik keine Pfeile mehr und man notiert sie, um Platz zu sparen, meist waagrecht.
[2] Vektoraddition
[3] Wir kennen sie unter der Streckung oder Stauchung eines Vektors mit einem Skalar.

Das mehrfache kartesische Produkt einer Menge K wird wie folgt definiert:

$$\underbrace{K \times K \times ... \times K}_{n\text{-mal}} := K^n. \text{ (vgl. [1, S. 28])}$$

Beispiel 4.1.4. n-faches kartesisches Produkt als K-Vektorraum Sei K ein Körper. Für $n \in \mathbb{N}$ machen wir

$$\text{„}K^n = \{(x_1, ..., x_n) \mid x_1, ..., x_n \in K\}\text{“ [2, S. 28, 6.2]}$$

zu einem K-Vektorraum mit folgender Definition von komponentenweisen Addition

$$\text{„}(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)\text{“ [2, S. 28, 6.2]}$$

und Skalarmultiplikation

$$\text{„}\lambda \cdot (x_1, ..., x_n) := (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)\text{“ [2, S. 28, 6.2].}$$

Beispiel 4.1.5. Ebene und Raum Das uns bekannte zweidimensionale Koordinatensystem

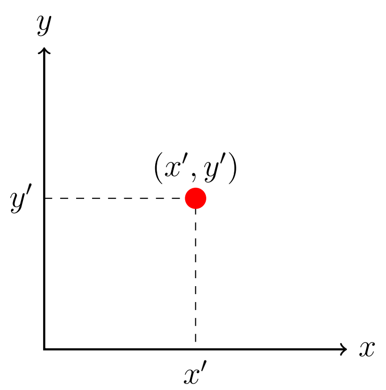


Abbildung 4.1: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

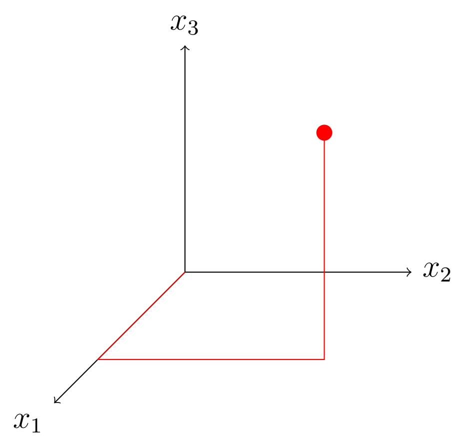


Abbildung 4.2: $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2$ ist das kartesische Produkt aus $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Jeder Punkt der x-y-Ebene lässt sich durch ein „Paar von Koordinaten[4], (x, y),“ [1, S. 28] für alle $x, y \in \mathbb{R}$ beschreiben. Das dreidimensionale Koordinatensystem $\mathbb{R}^3$ ist das dreifache kartesische Produkt der Menge der reellen Zahlen. Die Koordinaten werden als „Tripel“ [1, S. 28] (x_1, x_2, x_3) für alle $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ bezeichnet.

[4] Alternativ nennen wir es auch Tupel.

Definition 4.1.6. Untervektorraum
„Wir nennen eine nichtleere Teilmenge $U \subset V$ Untervektorraum, falls gilt

(i) 0_V [5] $\in U$.

(ii) $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$ (Abgeschlossenheit bzgl. $+$)

(iii) $u \in U, \lambda \in K \Rightarrow \lambda u \in U$ (Abgeschlossenheit bzgl. Skalarmultiplikation $\cdot$).“

Zitat aus S.298 Tut. In Abb. 4.1.6 sehen wir einen eindimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$. Ein abstrakteres Beispiel für einen Untervektorraum sehen wir in Abschnitt 5.2
Der $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ (vgl. 4.1.5) kann mit Hilfe eines kartesischen Koordinatensystems sehr gut visualisiert werden. Funktioniert das beispielsweise auch für den $\mathbb{R}^4$, den $\mathbb{R}^5$ oder sogar den $\mathbb{R}^n$? Es fehlt uns lediglich die Vorstellungskraft über die übrigen Richtungen im größer-drei-dimensionalen Raum. In diesem Kapitel werden wir den Begriff der Dimension definieren. Auch lernen wir eine Möglichkeit, uns höherdimensionale Vektorräume „formal“ vorzustellen.

4.2 Erzeugendensysteme

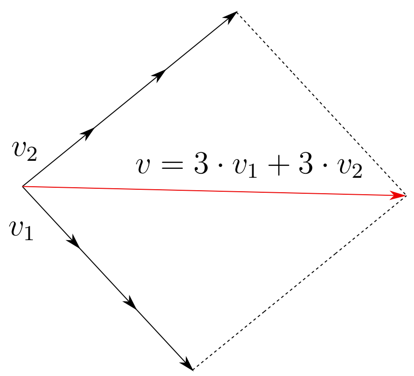


Abbildung 4.3: $\sum_{i=1}^{2} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, wobei hier $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ ist

Aus dem Schulunterricht kennen wir bereits den Begriff der Linearkombination, eine Summe aus mehreren gestreckt und gestauchten Vektoren, woraus wiederum ein neuer Vektor entsteht. Im Folgenden wird dieser Sachverhalt auf eine allgemeinere mathematische Ebene gebracht, sodass es für beliebig viele Vektoren aus jedem Vektorraum und für beliebig viele Skalare aus jedem Körper gilt.

[5] Den Nullvektor kennzeichnen in diesem Fall wir mit 0_V. Sonst schreiben wir eine 0.

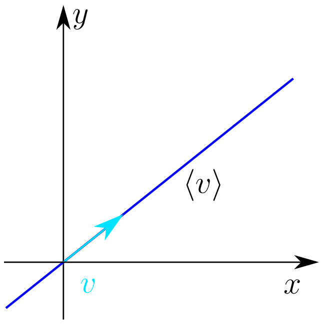


Abbildung 4.4: $\langle v\rangle_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}^2$ ist eine Gerade.

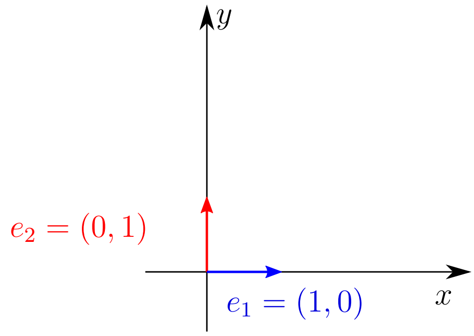


Abbildung 4.5: $E = \{e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow \langle E\rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$.

Definition 4.2.1. Linearkombination

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $v_1, ..., v_k \in V$. Ein Vektor $v \in V$ lässt sich mit $v_1, ..., v_k$ und den Koeffizienten $\lambda_i \in K$ für $i = 1, ..., k$ und $k \in \mathbb{N}$ wir folgt *linear kombinieren*:

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + ... + \lambda_k v_k. \text{ (vgl. [4, S. 298, 16.3])}$$

Definition 4.2.2. lineare Hülle

Sei V ein Vektorraum über den Körper K und $A \subset V$. Die Menge aller Linearkombinationen

$$„\langle A\rangle_K := \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in K, a_i \in X \text{ für } i = 1, ..., n\}\text{“[5, S. 30]}$$

bezeichnen wir als den, die „*lineare Hülle*“ [4, S. 298, 16.4], das „*Erzeugnis*“ [4, S. 298, 16.4] oder den „*Span*“ [4, S. 298, 16.4] von X.

Definition 4.2.3. Erzeugendensystem

„Eine Teilmenge M eines K-Vektorraums V heißt Erzeugendensystem von V, wenn $V = \langle M\rangle_K$. V heißt *endlich erzeugt* [von M][6], wenn es ein endliches Erzeugendensystem gibt.“ [2, S. 39, 9.4]

Definition 4.2.4. Lineare Unabhängigkeit

„Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum, $v_1, ..., v_k \in V$. Wie nennen das System $(v_1, ..., v_k)$ *linear unabhängig*, wenn gilt

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0 \Longrightarrow \lambda_i = 0\,[...]\,\text{[für alle] } i.$$

[6] Sei $M = \{m_1, m_2, ..., m_n\}$ eine n-elementige Teilmenge von V aus den Vektoren $m_1, m_2, ..., m_n$.

Andernfalls heißt $(v_1, ..., v_k)$ *linear abhängig.*" [4, S. 298, 16.5]

Sei eine Menge linear unabhängig und sei dies zu überprüfen. So folgt ist die Gleichung in 4.2.4 nur durch die „trivial[e]" [4, S. 307, 16.5] Lösung, also alle Koeffizienten $\lambda_i = 0$, lösbar. Sei dagegeben eine Menge linear abhängig und sei dies zu überprüfen, dann ist mindestens ein $\lambda_i \neq 0$. An dieser Stelle sei für Beispiele auf diesen und diesen Abschnitt hingewiesen.

4.3 Basis

Theorem 4.3.1. Basis
„Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $B \subseteq V$ heißt Basis von V, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen gelten:

(i) B ist ein *Erzeugendensystem* und *linear unabhängig.*

(ii) B ist [ein] *minimales*[7] *Erzeugendensystem.*

(iii) B ist [eine] *maximale*[8] *linear unabhängige Teilmenge.*" [2, S. 41, 9.16]

Um das Theorem bestehend aus der Äquivalenzaussage (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) zu zeigen, reicht es den Beweis des sogenannten Ringschlusses für die Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii), (ii) $\Rightarrow$ (iii) und (iii) $\Rightarrow$ (i) zu führen.
Im folgenden erfolgen die Beweise alle durch Widerspruch. Um oftmals die Inkonsistenzen zu finden, bedarf es einer gründlichen Arbeit mit den Voraussetzungen, welche zur Vereinfachung gekennzeichnet werden.

Beweis. Vor.: Sei $B = \{v_1, ..., v_k\}$. B ist Erzeugendensystem und **linear unabhängig**.
Beh.: (i) $\Rightarrow$ (ii)
Bew.: Angenommen B ist nicht minimal. Dann ist B ohne v_k für $k = 1, ..., n$ immer noch ein Erzeugendensystem:
Sei $\lambda_i \in K$ für $i = 1, ..., n$.

$$\Rightarrow v_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i v_i \Leftrightarrow 0 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i v_i - v_k$$

[7] Diese Eigenschaft gilt nicht mehr, wenn ein Element aus B entfernt wird.
[8] Wird ein $v \in V$ zu B hinzugefügt, so ist B nicht mehr linear unabhängig.

$\Rightarrow \lambda_k \neq 0 \Rightarrow$ **linear abhängig** $\lightning$ $\Rightarrow$ Beh.
In Wortform: Der Nullvektor erhält somit eine nichttriviale Darstellung, da $\lambda_k = 1 \neq 0$. Insbesondere ist das System B mit v_k für $k = 1, ..., n$ **linear abhängig**, was ein Widerspruch zu der Voraussetzung der linearen Unabhängigkeit ist, woraus folgt, dass die Behauptung wahr ist. (vgl. [2, S. 41, 9.16 (a) $\Rightarrow$ (b)])

Vor.: B ist ein **minimales Erzeugendensystem**.
Beh.: (ii) $\Rightarrow$ (iii)
Bew.: Zuerst zeigen wir, dass B linear unabhängig ist.
Angenommen B ist linear abhängig. Sei λ_i für $i = 1, ..., n$. Dann hat die Gleichung $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0$ mindestens ein $\lambda_i \neq 0$ mit $i = 1, ..., n$ als Lösung.
Wir nehmen o.B.d.A[9] an: Sei $\lambda_j \neq 0$ für $j \in 1, ..., n$. B ist linear abhängig aufgrund v_j.

$$\Rightarrow \lambda_j v_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \lambda_i v_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_j v_j = -\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \lambda_i v_i$$

$$\Leftrightarrow v_j = -\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i \in \langle B \setminus \{v_j\} \rangle_K$$

Der Vektor v_j liegt in $B \setminus \{v_j\}$. Wir benötigen, um den Widerspruch zu erhalten, einen Zwischenbeweis, der aussagt, dass die Menge $B \setminus \{v_j\}$ entgegen der Minimalität ein Erzeugendensystem ist.

> Zw.vor.: $v_j \in B \setminus \{v_j\}$, also $v_j \cup B \setminus \{v_j\}$ linear abhängig.
> Zw.beh.:$B \setminus \{v_j\}$ ist ein Erzeugendensystem
> Zw.bew.: Angenommen, $B \setminus \{v_j\}$ sei kein Erzeugendensystem. Dann gibt es ein $v_j \notin B \setminus \{v_j\}$ für $k \in \{1, ..., n\}$. Daraus folgt allerdings: Die Menge $B \setminus \{v_j\} \cup v_j = B \cup v_j$ ist linear unabhängig, was der Voraussetzung, dass $B \cup v_j$ linear abhängig ist, widerspricht.[10]

Daher ist $B \setminus \{v_j\}$ ein Erzeugendensystem, was im Gegensatz zu der **Minimalität des Er-**

[9] Ohne Beschränkung der Algmeinheit. Wir schauen uns einfachheitshalber einen Spezialfall an, um die Aussage im Allgemeinen zu beweisen. Die anderen Fälle würden analog zu zeigen sein.
[10] Zw.bew. ist eigens vom Verfasser geführt worden.

zeugendensystems von B steht. Also ist B linear unabhängig.
Es ist noch zu zeigen , dass B *maximal* linear unabhängig ist.
Angenommen, B ist keine maximal linear unabhängige Teilmenge. Dann gibt es ein $v \in V$, sodass $B \cup \{v\}$ linear unabhängig ist – v wäre nicht im Span von B –, aber B **erzeugt** laut Voraussetzung alle Vektoren in V, somit gilt $v \in \langle B \rangle$, was der Widerspruch ist. Daraus folgt, dass B *maximal* linear unabhängig ist. (vgl. [2, S. 41, 9.16 (b) $\Rightarrow$ (c)])

Vor.: B ist ein maximale linear unabhängige Teilmenge.
Beh.: (iii) $\Rightarrow$ (i)
Bew.: Es sind zwei Tatsachen zu zeigen, zum einen dass aus (iii) die Lineare Unabhängigkeit von B folgt, was offensichtlich aus der Voraussetzung folgt, und zum anderen dass B ein Erzeugendensystem ist.
Angenommen, B ist kein Erzeugendensystem. Dann gibt es ein $v \in V$, sodass $v \notin \langle B \rangle$ gilt, also nicht im Erzeugnis von B liegt. Daraus folgt, dass $\{v\} \cup B$ linear unabhängig ist, was der **Maximalität** von B widerspricht. (vgl. [3, S. 59]) □

Definition 4.3.2. Dimension eines Vektorraums
„Ist B eine Basis eines endlich erzeugten Vektorraums V, so nennt man $n := |B| \in \mathbb{N}_0$ die Dimension von V. Wir schreiben dafür $\dim(V) = n$. Ist V nicht endlich erzeugt, so setzen wir $\dim(V) := \infty$." [1, S. 504]

Definition 4.3.3. Einheitsvektoren
„Dabei sei $e_i \in K^n$ für $i = 1, ..., n$ der i-te Einheitsvektor, also

$$e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0),$$

wobei die 1 genau an der i-ten Stelle steht. Auf präzisere Weise können wir

$$[...]\ [e_i = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, ..., \delta_{ii}, ..., \delta_{ni})]$$

schreiben mit

$$\delta_{hi} = \begin{cases} 1 \text{ für } h = i \\ 0\ [...]\ [\text{für } h \neq i] \end{cases}$$

δ_{hi} ist das so genannte *Kronecker-Symbol.*[[11]]" [5, S. 31]

[11]Nur wenn beide Indizes gleich sind ,dann $\delta_{ii} = 1$

Beispiel 4.3.4. Einheitsvektoren
In der Abbildung 4.1.6 siehen wir die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^2$, die zudem auch eine Basis bilden. Nun werden wir die Standardbasisvektoren für den K^n-Vektorraum für jedes $n \in \mathbb{N}$ kennenlernen. Es ist noch zu zeigen, dass die Einheitsvektoren eine Basis bilden. Hierzu nutzen wir die Eigenschaften aus (i) des Theorems 4.3: „Es ist $\{e_1, ..., e_n\}$ ein Erzeugendensystem von K^n (denn für $v = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in K^n$ ist $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$)."" [2, S. 40, 9.9]
„In K^n sind die Einheitsvektoren $e_1, ..., e_n$ linear unabhängig:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = (\lambda_1, ..., \lambda_n).$$

Aus der Definition 4.3 folgt: $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$." [**?**, S. 41, 9.14]
Somit ist $e_1, ..., e_n$ eine Basis von K^n. Wir bezeichnen sie auch als „kanonische Basis" [2, S. 42, 9.17] . Daraus folgt, dass „$dim(K^n) = n$" [2, S. 44, 9.24 (a)] ist.

4.4 Dimensionen

4.5 Dimensionsformeln

5 unendliche Dimension

5.1 Funktionenvektorraum

Satz 5.1.1. Der reelle Funktionenraum
Die Menge aller reellen Funktion

$$F := \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

bilden einen Vektorraum über den Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit folgender Definition von Addition und Skalarmultiplikation:

(i) Die Addition $f + g \in F$ für $f, g \in F$ definieren wie als

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x). \tag{5.1}$$

(ii) Die Skalarmultiplikation $\lambda \cdot f \in F$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in F$ definieren wir als

$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x). \tag{5.2}$$

Beweis. Vor.: Funktionenaddition von 5.1 und Funktionenskalarmultiplikation von 5.2 werden für alle Beweise benötigt.
Beh.: F ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Bew.: Wir müssen F auf alle Vektorraumaxiome (siehe 4.1.1) hin überprüfen. Aus der Definition von F folgt: $f(x) \in \mathbb{R}$ für alle f. Die Ergebnisse aller Funktionen aus F sind reelle Zahlen, somit haben sie alle Körpereigenschaften (siehe 3.2.1). Wir können mit ihnen wie gewohnt rechnen.
Zuerst zeigen wir, dass $(F, +)$ eine abelsche Gruppe (vgl. 3.1.5, 3.1) ist.

Für alle $f, g, h \in F$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) (Assoziativität) $((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) = (f + (g+h))(x)$

(ii) (Existenz des neutralen Elements) Sei $0_{\text{Abb}}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.[1]
$(0_{\text{Abb}} + f)(x) = 0_{\text{Abb}}(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x) = f(x) + 0 = f(x) + 0_{\text{Abb}}(x) = (f + 0_{\text{Abb}})(x)$

(iii) (Existenz des Inversen) Sei $-f \in F$ das Inverse für alle $f \in F$.
$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f(x)) = f(x) - f(x) = 0_{\text{Abb}}(x) = (-f(x)) + f(x) = ((-f) + f)(x)$

(iv) (Kommutativität) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$

Es müssen noch die Eigenschaften eines Vektorraumes gezeigt werden.

(i) $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot f(x) = \lambda_1 \cdot f(x) + \lambda_2 \cdot f(x)$

(ii) $\lambda_1 \cdot (f+g)(x) = (\lambda_1 \cdot f + \lambda_1 \cdot g)(x) = \lambda_1 \cdot f(x) + \lambda_1 \cdot g(x)$

(iii) $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot f(x)) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot f(x)$

(iv) $1 \cdot f(x) = f(x)$

□

[1] Wir bezeichnen diese Funktion als die sogenannte „Nullabbildung“, die alle Elemente auf 0 abbildet. Ihr Graph ist die x-Achse.

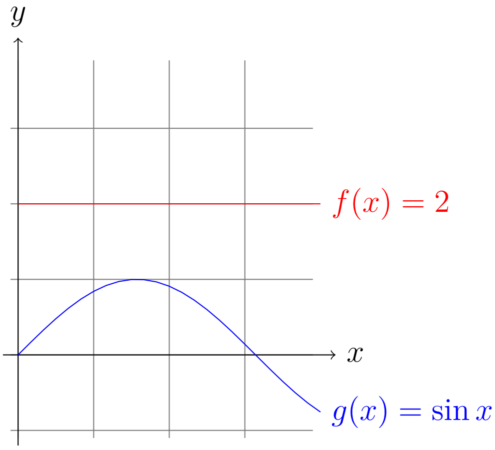


Abbildung 5.1

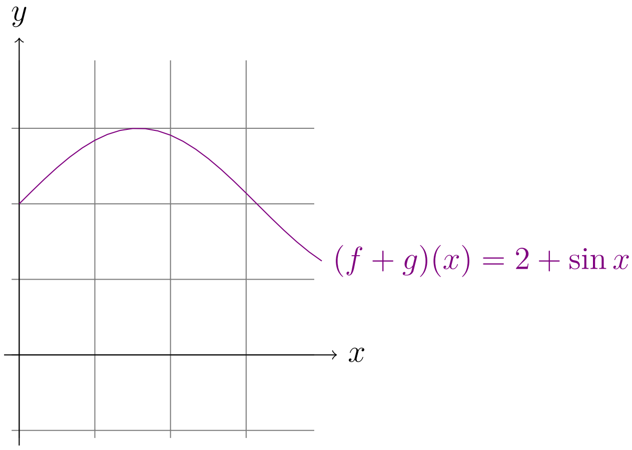
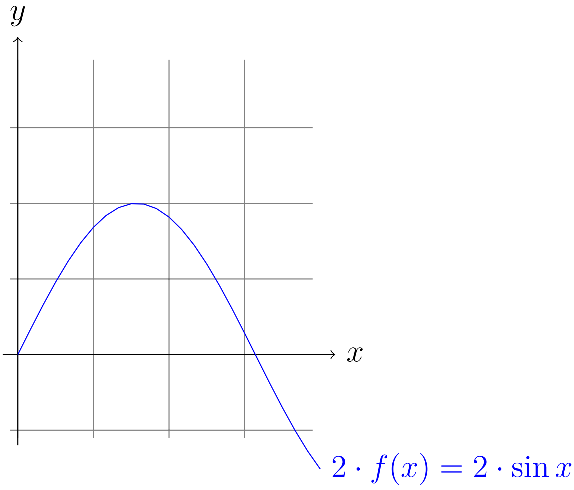


Abbildung 5.2



5.2 Polynomvektorraum

Wir wollen uns mit einer spezifischeren „Gattung“ von reellen Funktionen beschäftigen, nämlich den *Polynomen*.

Definition 5.2.1. Polynome
Ein Polynom vom Grad $\leq n$ hat die Form

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i = \lambda_0 + \lambda_2 x^1 + ... + \lambda_n x^n$$

für $\lambda_i \in \mathbb{R}$ (vgl. [6, S. 44, 1.28]) .[2]

[2] Zur Erinnerung: Beachte, dass $x^0 = 1$ und $x^1 = x$ ist.

Satz 5.2.2. *Polynomvektorraum* $\mathbb{R}[x]$
Die Menge aller Polynome aus 5.2.1 bezeichnen wir als $\mathbb{R}[x]$. Sie bildet einen $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Definition von Addition und Multiplikation aus 5.1.1:

(i) (Polynomaddition) Für alle $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \mu_i x^i$, $g(x) = \sum_{i=0}^{n} \nu_i x^i$ gilt:

$$(f+g)(x) = \sum_{i=0}^{n} \mu_i x^i + \sum_{i=0}^{n} \nu_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (\mu_i + \nu_i) x^i. \tag{5.3}$$

(ii) (Polynomskalarmultiplikation) Seien $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ beliebig und $c \in \mathbb{R}$.

$$(c \cdot f)(x) = c \cdot \sum_{i=0}^{n} \mu_i x^i = \sum_{i=0}^{n} c \cdot \mu_i x^i. \tag{5.4}$$

(vgl. [6, S. 44f., 1.28])

Corollar 5.2.3. Der Polynomvektorraum ist ein Untervektorraum (siehe 4.1.6) von F.

Beweis. Vor.: Plynomaddition und -skalarmultiplikation aus 5.2.2.
Beh.: siehe 5.2.3
Bew.: Wir rechnen die Axiome aus 4.1.6 für $\mathbb{R}[x]$ durch.
Seien $u(x) = \sum_{i=0}^{n} \zeta_i x^i$, $v(x) = \sum_{i=0}^{n} \eta_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ beliebig.

(i) Zu zeigen gilt, dass der Nullvektor ein Element von $\mathbb{R}[x]$ ist. Sei $\rho = 0$.

$$\rho \cdot u(x) = 0 \cdot \sum_{i=0}^{n} \zeta_i x^i = 0 \Rightarrow 0 \in \mathbb{R}[x]$$

(ii) Es gilt die Ageschlossenheit[3] der Polynomaddition zu beweisen.

$$(u+v)(x) = u(x) + v(x) = \sum_{i=0}^{n} \zeta_i x^i + \sum_{i=0}^{n} \eta_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (\zeta_i + \eta_i) x^i \in \mathbb{R}[x]$$

(iii) Die Skalarmultiplikation soll auf ihre Abgeschlossenheit getestet werden. Sei $\varrho \in \mathbb{R}[x]$ frei wählbar.

$$(\varrho \cdot u)(x) = \varrho \cdot u(x) = \varrho \cdot \sum_{i=0}^{n} \zeta_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \varrho \cdot \zeta_i x^i \in \mathbb{R}[x]$$

□

[3] Abgelossenheit bezeichnet die Eigenschaft nach einer Verknüpfung beliebiger Elemente einer Menge wie Skalarmultiplikation und Vektoraddition wieder ein Element derselben Menge zu sein.

Basis $\mathbb{R}[x]$

Lemma 5.2.4. *Basis von* $\mathbb{R}[x]$
Die Menge der Monome $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ vom Grad $\leq n$ bildet eine Basis $B_{\mathbb{R}[x]}$ des Polynomvektorraum.

Beweis. Vor.: Theo. 4.3 (i), Def. 5.2.1, Def. 4.2.4
Beh.: $B_{\mathbb{R}[x]} := \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ sei eine Basis des Polynomvektorraums.
Bew.: Wir müssen überprüfen, ob die Menge linear unabhängig und ein Erzeugendensystem ist.
Lineare Unabhängigkeit:
Es ist zu zeigen, dass die Gleichung

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i = \lambda_i x^i = \lambda_0 + \lambda_1 x^1 + ... + \lambda_n x^n = 0 \tag{5.5}$$

nur für alle $\lambda_i = 0$ mit $i \in \mathbb{N}_0$ lösbar ist.[4]

(i) Setze zunächst $x = 0$ in (5.5).

$$\Rightarrow \lambda_0 + \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0^2 + ... + \lambda_n \cdot 0^n \ \Rightarrow \lambda_0 = 0 \tag{5.6}$$

(ii) Setze λ_0 in (5.5) ein.

$$\lambda_1 \cdot x + \lambda_2 \cdot x^2 + ... + \lambda_n \cdot x^{n-1} = 0 \tag{5.7}$$

Wir dürfen (5.7) nun durch x teilen, wenn $x \neq 0$ ist:

$$\lambda_1 \cdot x + \lambda_2 \cdot x^2 + ... + \lambda_n \cdot x^n = 0 \qquad | : x \tag{5.8}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \cdot x^2 + ... + \lambda_n \cdot x^{n-1} = 0 \tag{5.9}$$

Wiederhole (i), (5.7), bis wir nacheinander erhalten, dass alle $\lambda_i = 0$ mit $i \in \mathbb{N}_0$ sind. Somit ist die Lineare Unabhängigkeit von $B_{\mathbb{R}[x]}$ gezeigt. (vgl. [4, S. 308]) □

Erzeugendensystem: Aus Def. 5.2.1 ist ersichtlich, dass jede Polynomfunktion $f(x)$ eine Linearkombination der Monome $1, x, x^2 \ldots, x^n$ vom Grad $\leq n$ ist. Folglich bildet $B_{\mathbb{R}[x]}$ ein

[4] Wir müssen ein Gleichungssystestem mit n Variablen schrittweise lösen. Dies erfolgt durch „geschickt gewählte x“ (vgl. [4, S. 308]).

Erzeugendensystem. □

5.3 unendlichdimensionale Vektorräume

unendliches Erzeugendensystem

Proposition 5.3.1. $\mathbb{R}[x]$ hat ein „unendliches Erzeugendensystem" [1, S.498 f.] $B_{\mathbb{R}[x]} = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Nun wollen wir mit einem Widerspruchsbeweis zeigen, dass das System $B_{\mathbb{R}[x]}$ unendlich erzeugt ist.
Vor.: Im vorigen Beweis wurde bereits überprüft, dass $B_{\mathbb{R}[x]}$ ein **Erzeugendensystem** ist.
Beh.: Siehe Prop. 5.3.1.
Bew.: Angenommen, $B_{\mathbb{R}[x]}$ sei ein endliches Erzeugendensystem. Somit gibt es ein Polynom vom maximalen Grad n. Das „nächsthöhergradige" Polynom vom Grad $n + 1$ lässt sich allerdings nicht mehr durch eine Linearkombination von $B_{\mathbb{R}[x]}$ darstellen. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass $B_{\mathbb{R}[x]}$ ein **Erzeugendensystem** ist (vgl. [1, S.498 f.]).[5] So folgt die Behauptung. □

Corollar 5.3.2. Aus der Definition des Dimensionenbegriffs in 4.3.2 schließen wir aufgrund des unendlichen Erzeugendensystems von $B_{\mathbb{R}}[x]$, dass $\dim(F) = \infty$ ist.

abzählbar unendliche Dimension

Wir wollen die Kardinalität der Unendlichkeit in diesem Falle untersuchen.

Proposition 5.3.3. Die Dimension des reellen Polynomvektorraumes $\mathbb{R}[x]$ lautet:

$$\dim(\mathbb{R}[x]) = \aleph_0.$$

Beweis. Vor.: Aus dem W-Seminarunterricht wissen wir, dass eine Menge M genau dann abzählbar ist, wenn $|M| = |\mathbb{N}_0| = \aleph_0$ gilt.
Beh.: $B_{\mathbb{R}}[x]$ ist abzählbar.

[5] $B_{\mathbb{R}}[x]$ müsste alle Polynome „linear kombinieren" können.

Bew.: Wir konstruieren eine eineindeutige[6] Funktion: Sei $n \in \mathbb{N}_0$.

$$\alpha : B_{\mathbb{R}}[x] \to \mathbb{N}_0 \tag{5.10}$$

$$x^n \mapsto n \tag{5.11}$$

$\Rightarrow |B_{\mathbb{R}}[x]| = \aleph_0 \Rightarrow \dim(\mathbb{R}[x]) = \aleph_0$ $\square$

überabzählbar unendliche Dimension

Wir wollen im Folgenden berechnen, welche Dimension F hat. Da wir wissen, dass $\mathbb{R}[x]$ ein Untervektorraum von F ist, muss $\dim(F) \geq \mathbb{R}[x]$ sein.

[6] Zur Erinnerung: Jedem Element wir genau ein Element aus der Wertemenge zugeordnet. Wir sagen stattdessen uauch „bijektiv".

6 Schluss

Literaturverzeichnis

[1] T. Arens, Ch. Karpfinger U. Kockelkorn K. Lichtenegger H. S. F. Hettlich H. F. Hettlich: *Mathematik*. 1. Heidelberg : Spektrum Akademischer Verlag, 2008

[2] Jannsen, Prof. Dr. U.: Lineare Algebra I. (Sommersemester 2011). `http://www.mathematik.uni-regensburg.de/Jannsen/home/UebungSS11/LinAlg1.pdf`

[3] Beutelspacher, Albrecht: *Lineare Algebra - Eine Einführung in die Wissenschaft der Vektoren, Abbildungen und MAtrizen*. 6. Wiesbaden : Vieweg Verlag, 2003

[4] Florian Modler, Martin K.: *Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1 - Mathematik von Studenten für Studenten erklärt und kommentiert*. 3. Berlin Heidelberg : Springer Spektrum, 2014

[5] Bosch, Siegfried: *Lineare Algebra*. 3. Berlin Heidelberg : Springer, 2006

[6] Peter Knabner, Wolf B.: *Lineare Algebra - Grundlagen und Anwendungen*. 1. Berlin Heidelberg : Springer Spektrum, 2013