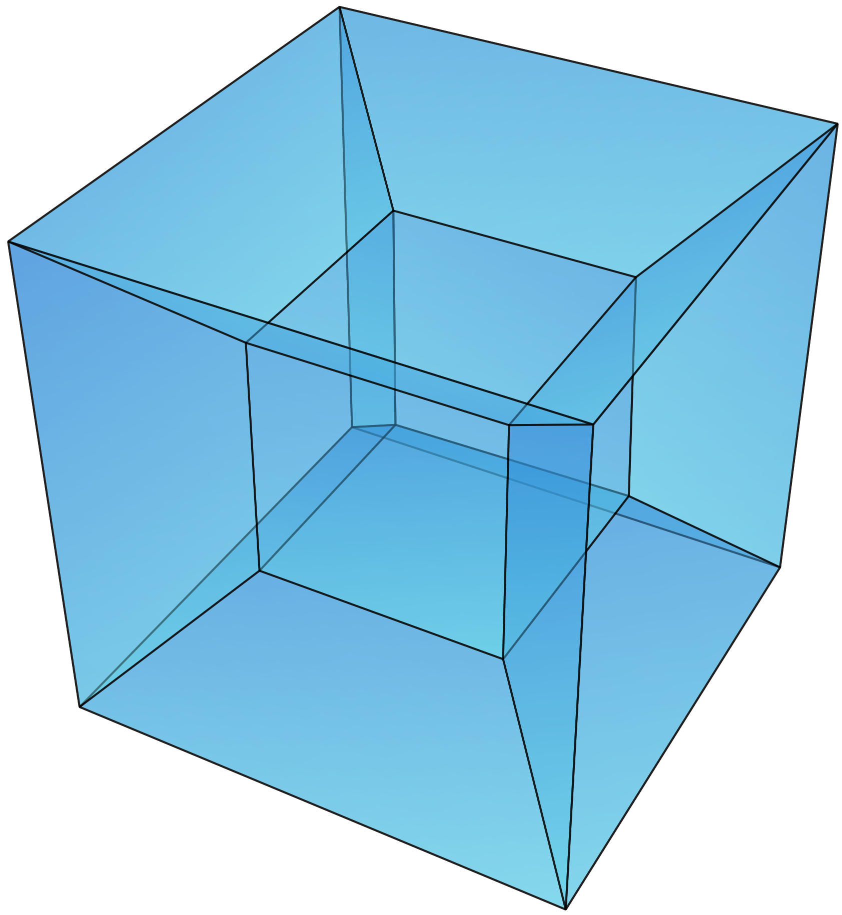

Einblick in höhere Dimensionen

Hanifah Muhammad

6.11.2018

Inhaltsverzeichnis

1 Abstraktion und Formalismus

Diese Arbeit beschäftigt sich mit Räumen und geometrischen Figuren n-ter Dimension.[1] Die Variable n steht immer für $n \in \mathbb{N}_0$.

1.1 Der Kerngedanke der Mathematik

> „Die Kunst, Mathematik zu machen, besteht darin, diesen speziellen Fall zu finden, der alle Elemente der Verallgemeinerung enthält.“
>
> David Hilbert

Die Mathematik will nicht für jeden Fall eigens eine Erklärung liefern, sie will alle Besonderheiten verallgemeinern. In dieser Arbeit zum Beispiel gilt es eine Aussage nicht nur für den Spezialfall von einer oder zweier Dimensionen zu beweisen, sondern sie bezieht sich gleich auf alle Dimensionen. Jedoch werden verallgemeinernde Behauptungen sehr abstrakt, was oftmals große Schwierigkeiten bereiten wird. Um dies vorzubeugen, werden viele Beispiele, Modelle und Kommentare zu sehr schwierig vorstellbaren Inhalten wie denen, die höhere Dimensionen betreffen, geliefert.

[1]Es existieren auch Räume von irrationaler Dimensionenzahl (vgl. Kajas Seminararbeit).

1.2 Inhalt

Wir wollen die höheren Dimensionen zunächst visuell, dann mathematisch in der Reihenfolge ihrer aufsteigenden Schwierigkeit betrachten.

Kapitel 2

Hier werden wir Koordinatensysteme und Würfel in n Dimension anhand von Gedankenexperimenten behandeln, was man sich einfach vorstellen kann.

Kapitel 3

Die erforderlichen mathematischen Kenntnisse aus der Linearen Algebra für die Definition des endlichen Dimensionenbegriffs werden erklärt. Wir werden lernen sich höhere Dimension *formal*, d.h. auf Papier mittels Formeln, vorzustellen.

Kapitel 4

Im abstraktesten Teil behandeln wir unendliche Dimensionen, wobei zwischen den verschiedenen Unendlichkeiten unterschieden wird.

1.3 mathematische Sprache

Eine gängige Strukturierung eines mathematischen Textes ist durch die Unterteilung in verschiedene Abschnitte wie folgt gegeben:

Definition 1.3.1. Neue mathematische Begriffe und Sachverhalte werden *definiert*, was bedeutet, dass sie axiomatisch eingeführt werden, also nicht bewiesen werden.

Corollar 1.3.2. Ein *Corollar* ist ein direkt aus einem der hier aufgeführten Begriffe abgeleitetes Ergebnis, das nicht zwangsweise einen Beweis erfordert.

Beweis. Beweise sind im folgenden Stil aufgebaut:
Vor.: In den *Voraussetzungen* stehen alle für den Beweis notwendigen mathematischen Tatsachen.
Beh.: Die *Behauptung* verdeutlicht die zu beweisende/zeigende Tatsache.
Bew.: Hier erfolgt der tatsächliche *Beweis*. Dieser liefert ein Ergebnis. □

Satz 1.3.3. Ein *Satz* ist ein Ergebnis.

Lemma 1.3.4. Ein *Lemma* oder Hilfssatz ist als ein Ergebnis zu verstehen, das nur für weitere Beweisführungen wichtig sind.

Theorem 1.3.5. Die Definition dieser Begrifflichkeit ähnelt der des Satzes, jedoch ist ein *Theorem* von äußerst großer Wichtigkeit.

Proposition 1.3.6. Eine *Proposition* oder Vorschlag wird in dieser Arbeit als eine aus einem Satz vermuteten Aussage benutzt, was dennoch einen Beweis benötigt.

Beispiel 1.3.7. *Beispiele* dienen der Vermittlung von einem intuitiven Verständnis abstrakter mathematischer Sachverhalte.

Hier sind einige wichtige Vokabeln und Symbole erklärt:

- Mit „$x := y$“ wird symbolisiert, dass x als y definiert wird, wobei die Variablen für einen beliebigen Ausdruck stehen.
- „Abbildung“ ist ein Synonym zu Funktion.

2 Visualisierung höherer Dimensionen

> „Ein Mensch, der seine Existenz dem widmet, schafft es vielleicht, sich die vierte Dimension auszumalen."
>
> HENRI POINCARÉ

2.1 Koordinatensysteme

Um ein „Bild" von der n-ten Dimension zu bekommen, machen wir ein kleines Gedankenexperiment[1] Wir beginnen mit einem nulldimensionalen Punkt. Dieser wird im nächsten Schritt unendlich oft in die erste Dimension, also nach rechts und links, verschoben, sodass eine eindimensionale Gerade entsteht. Diese soll den Zahlenstrahl $\mathbb{R}$ darstellen. Anschließend stellen wir uns eine Gerade vor, die senkrecht zu der reellen Zahlengeraden steht. Wir erhalten das zweidimensionale kartesische Koordinatensystem $\mathbb{R}^2$ (vgl. **??**). Fügen wir eine dritte Gerade hinzu, die zu den letzteren orthogonal steht, erhalten wir das dreidimensionale Koordinatensystem $\mathbb{R}^3$ (vgl. **??**). Um dennoch ein intuitives Verständnis für die räumliche vierte Dimension zu bekommen, definieren wir das vierdimensionale Analogon zu oben, unten, rechts, links, vorne und hinten (die Richtungen unserer dreidimensionalen Welt) als „ana" und „kata" ([1, S. 127]). In Kapitel 3 und 4 werden wir lernen, wie wir die visuelle Vorstellung durch eine elegantere mathematisch *formale* Darstellung ersetzen.

[1] Entnommen und weiter ausgeführt aus [1, S. 71 f.]

2.2 Konstruktion eines Hyperwürfels

Definition 2.2.1. Hyperwürfel
Es sei ein $(n-1)$-dimensionaler Würfel. Dieser wird in die n-te Dimension um eine Längeneinheit verschoben. Die gleichen Ecken werden miteinander verbunden. So erhalten wir einen n-dimensionalen Würfel.

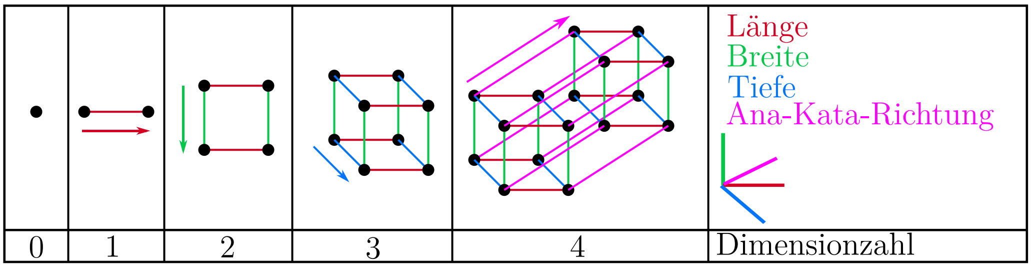

Abbildung 2.1: Quelle: Wikipedia Tesserakt

Wir beginnen mit einem nulldimensionalen Würfel, einem Punkt oder einem Eck. Anschließend verschieben wir ihn um eine Längeneinheit in die Länge, die erste Dimension, und verbinden die beiden Endpunkte. Nun erhalten wir eine Linie mit zwei Ecken. Danach wird sie in die Breite, die zweite Dimension, verschoben, sodass wir ein Quadrat nach der Verbindung der Eckpunkte bekommen. Verschiebt man im nächsten Schritt das Quadrat in die Tiefe, die dritte Dimension, und fügen die gleichen Ecken zusammen, wird es zu einem Würfel. Machen wir analog weiter, indem wir den Würfel nach „ana“, also in die vierte Richtung, verschieben und die Ecken verknüpfen, entsteht ein *Tesserakt* (siehe Modell 1 und Abbildung 2.1). Natürlich lässt sich diese Konstruktion „nach den Gesetzen der Analogie“ beliebig oft weiterführen, bis man schließlich einen n-dimensionalen Hyperwürfel erhält.[2] Wir wollen nun die Anzahl der Ecken ermitteln: Der nulldimensionale Würfel besteht aus einem Eck, der eindimensionale aus zwei, der dreidimensionale aus 8. „1, 2, 4, [8] stellen offensichtlich eine geometrische Reihe dar“ ([3, S. 88]). Somit hat der Tesserakt 16 und der n-dimensionale Würfel 2^n Ecken. Ein n-dimensionaler Würfel wird von $2n$ $(n-1)$-Würfeln begrenzt. Der nulldimensionale Würfel hat keine Grenzwürfel. Die Linie hat zwei Punkte als Enden. Die Grenzflächen des Quadrats sind die vier Seiten. Der Würfel wird er von sechs Quadraten begrenzt. „0, 2, 4, [6]“ ([3, S. 89]) bilden eine „arithmetische“ Reihe. Analog lässt sich berechnen, dass der vierdimensionale Würfel aus acht normalen Würfel besteht. Deshalb wird der Tesserakt auch als Octachoron (*griech.* Achtzeller) bezeichnet.

[2]Diese Idee ist von dem Video [2] inspiriert.

2.3 Der Tesserakt[3]

Faltung

Die Faltung eines Tesserakts erfolgt analog wie die eines Würfels. Um sich das zu visualisieren, werden die Modelle 2 (zweidimensionales Würfelnetz eines Würfels), 3 bzw. Abbildung 2.2 (dreidimenionales Würfelnetz eines Octachoron) und die Animation mit der Faltung eines Tesserkats auf dem beigelegten USB-Stick zur Verfügung gestellt. Sowie man einen Würfel erhält, indem man alle roten Quadrate des Modells 2 nach oben faltet, sodass sich das blaue direkt gegenüber dem gelben befindet, wäre es möglich die roten Würfel von Modell 3 nach „ana“ zu falten, sodass der blaue gegenüber dem gelben[4] läge.

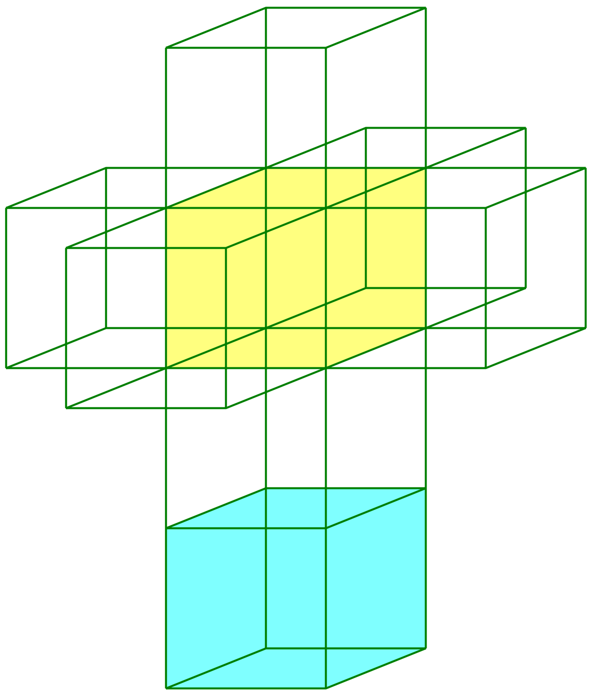

Abbildung 2.2: 3d-Würfelnetz eines Tesserakts

4d-Perspektive

Es gibt auch eine andere dreidimensionale Darstellungsweise als bei Modell 1, nämlich mit 4d-Perspektive. Sie funktioniert genauso wie die 3d-Perspektive. Weiter vom Betrachter entfernte Objekte werden kleiner gezeichnet. In Modell 4 und auf dem Titelbild ist der kleine Würfel im Inneren weiter in „ana“-Richtung entfernt.

[3] Die in diesem Abschnitt erläuterrten Visualisierungmöglichkeiten sind aus dem Vortrah [4]

[4] Ein roter Würfel lässt sich auf die Seite klappen, damit man den innenliegenden gelben sehen kann.

3 Grundlagen der Linearen Algebra

Die Lineare Algebra ist eine mathematische Teildisziplin, welche unter Anderem Mengen mit bestimmten Eigenschaften bestehend aus Vektoren[1], den sogenannten Vektorräumen, behandelt. Diese Räume bestehen aus einer Gruppe und einem Körper.[2]

3.1 Gruppen

Definition 3.1.1. [5, S. 28] (*Kartesisches Produkt*) „Das kartesische Produkt $A \times B$ zweier Mengen A und B ist die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$:

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.“$$

Beispiel 3.1.2. In 2.1 haben wir von n-dimensionalen Koordinatensystemen gesprochen, die mehrfache kartesische Produkte von $\mathbb{R}$ sind:

$$\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}} := \mathbb{R}^n. \text{ (vgl. [5, S. 28])}$$

Die Koordinaten eine Punktes oder eines Vektors im $\mathbb{R}^n$ können nicht vertauscht werden, da sie sonst ganz andere Punkte oder Vektoren repräsentieren würden.

Definition 3.1.3. vgl. [6, S. 19, 4.1] (*innere Verknüpfung*) Eine (innere) Verknüpfung auf einer Menge G ist eine Abbildung

$$\circ : G \times G \to G$$

.

Seien $g_1, g_2 \in G$ beliebig. Das Paar (g_1, g_2) aus der Definitionsmenge $\mathbb{D} = G \times G$ wird einem Element $\circ(g_1, g_2)$ aus der Wertemenge $\mathbb{W} = G$ zugeordnet.[3] Der Kringel $\circ$ dient als eine Variable. Wir können sie durch $+$ oder $\cdot$ ersetzen. Somit erhalten wir $g_1 + g_2$ oder $g_1 \cdot g_2$.

[1] Sie werden nicht mit Pfeilen gekennzeichnet und ihre Koordinaten werden nicht untereinander geschrieben.

[2] Gruppen und Körper bezeichnen Mengen mit besonderen Attributen und Rechenoprationen wie Addition und Multiplikation.

[3] Wir einigen uns auf die Schreibweise $g_1 \circ g_2$.

Beispiel 3.1.4. (*innere Verknüpfungen mit* $\mathbb{R}$)

- Addition

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{3.1}$$
$$(a, b) \to a + b \tag{3.2}$$

- Multiplikation. Sei $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

$$\cdot : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* \tag{3.3}$$
$$(a, b) \to a \cdot b \tag{3.4}$$

Definition 3.1.5. [6, S. 19, 4.2] (*Gruppe*) „Eine Gruppe ist eine Menge G mit einer Verknüpfung

$$\circ : G \times G \to G$$

für die die folgenden Eigenschaften gelten

(i) (Assoziativität) Für alle $x, y, z \in G$ gilt

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z).$$

(ii) (Existenz eines neutralen Elements) Es gibt ein $e \in G$ mit

$$e \circ x = x = x \circ e \text{ für alle } x \in G.$$

(iii) (Existenz von Inversen) Sei $x \in G$. Dann gibt es ein $y \in G$ mit

$$y \circ x = e = x \circ y.\text{“}$$

Definition 3.1.6. vgl. [6, S. 19, 4.3] (*abelsche oder kommutative Gruppe*) Man bezeichnet eine Gruppe auch als kommutativ oder abelsch, wenn für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt

$$g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1.$$

Die reellen Zahlen bilden *abelsche* Gruppen bezüglich der Addition und Multiplikation mit den inneren Verknüpfungen aus Beispiel 3.1.4.

Beispiel 3.1.7. reelle additive Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ Bei der Addition in $\mathbb{R}$ gelten das Assoziativ- und das Kommutativgesetz. Das neutrale Element ist die Null. Das additive Inverse einr reellen Zahl r ist sein Negatives $-r$.

Beispiel 3.1.8. reelle multiplikative Gruppe $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ Bei der Multiplikation in $\mathbb{R}^*$ ist genauso assoziativ- und kommutativ. Die Eins ist das neutrale Element. Sei $s \in \mathbb{R}^*$, so ist sein Inverses der Kehrbruch $\frac{1}{s}$. Die Null ist bei $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ ausgeschlossen, weil sie kein multiplikative Inverses besitzt, insbesondere stünde Null im Nenner.

3.2 Körper

Die Addition und Multiplikation in einer Menge können in einer gemeinsamen Struktur zusammengefasst werden.

Definition 3.2.1. vgl. [7] (*Körper*) Ein Körper[4] besteht aus zwei Mengen K und $K^* = K\backslash\{0\}$ mit zwei Verknüpfungen

$$+ : K \times K \to K$$
$$\cdot : K^* \times K^* \to K^*$$

für die gelten:

(i) $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit $e = 0$ als das neutrale Element.

(ii) $(K^*, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe mit dem $e = 1$ als das neutrale Element.

(iii) (Distrivbutivgesetze) Für alle $\alpha, \beta, \gamma \in K$ gilt

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$
$$(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma.$$

Beispiel 3.2.2. Die Menge $\mathbb{R}$ bildet einen Körper mit der additiven Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ und der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ und den Distributivgesetzen.[5]

[4] Körperelemente werden in dieser Arbeit mit griechischen Buchstaben gekennzeichnet.

[5] Es sei angemerkt, dass $\mathbb{Q}$ und die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ebenso eine Körperstruktur besitzen.

3.3 Vektorräume

Wollen wir Punkte aus dem $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ verschieben, brauchen wir einen Vektor[6], der mit einem Anderen addiert und mit einem Skalar multipliziert, also gestreckt oder gestaucht, werden kann.

Definition 3.3.1. vgl. [6, S. 28, 6.1] (*Vektorraum*) Ein Vektorraum über den Körper K (K-Vektorraum) beinhaltet die abelsche additive Gruppe $(V, +)$ und die Skalarmultiplikation mit der äußeren Verknüpfung

$$\cdot : K \times V \to V \tag{3.5}$$

$$(\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v. \tag{3.6}$$

Es müssen folgende Eigenschaften für alle $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in K$ und $v, v_1, v_2 \in V$ gelten:

(i) $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$

(ii) $\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$

(iii) $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v$

(iv) $1 \cdot v = v$.“

Vektorräume haben zwei verschiedene Additionen und Multiplikationen. Zum einen gibt es die Körperaddition und -multiplikation, zum Anderen die Vektorraumaddition und die Skalarmultiplikation $\lambda \cdot v$ für $\lambda \in K$ und $v \in V$ (vgl. [6, S. 28, 6.1]).

[6]Über ihnen steht in der höheren Mathematik kein Pfeil und platzsparenden Gründen schreiben wir sie nicht senkrecht.

Wir wollen im folgenden die Vektoraddition und Skalarmultiplikation auf den n-dimensionalen Vektoren des $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$ übertragen.

Definition 3.3.2. vgl. [6, S. 28, 6.2] (*n-faches kartesisches Produkt als $\mathbb{R}$-Vektorraum*) Wir machen

$$„\mathbb{R}^n = \{(\chi_1, ..., \chi_n) \mid \chi_1, ..., \chi_n \in \mathbb{R}\}$$

zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum mit folgender Definition von Addition

$$(\chi_1, ..., \chi_n) + (\psi_1, ..., \psi_n) := (\chi_1 + \psi_1, \chi_2 + \psi_2, ..., \chi_n + \psi_n)$$

und Skalarmultiplikation

$$\lambda \cdot (\chi_1, ..., \chi_n) := (\lambda \cdot \chi_1, ..., \lambda \cdot \chi_n).$$

Mit diesen Definitionen kann man mit n-dimensionalen Vektoren ähnlich wie mit zwei- und dreidimensionalen rechnen.

Definition 3.3.3. vgl. [8, S. 298] (*Untervektorraum*) Wir nennen eine nichtleere Teilmenge $U \subset V$ Untervektorraum, falls gilt

(i) $\mathbf{0} \in U$ (Nullvektor in U).

(ii) $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$ (Abgeschlossenheit[7] bzgl. Vektoraddition)

(iii) $u \in U, \lambda \in K \Rightarrow \lambda \cdot u \in U$ (Abgeschlossenheit bzgl. Skalarmultiplikation).

Beispiel 3.3.4. Jede Ebene oder Gerade des $\mathbb{R}^3$, die durch den Ursprung geht, ist einen Untervektorraum, zum Beispiel sie x_1x_2-, x_1x_3 und x_2x_3-Ebene. Wird jedoch diese Eigenschaft nicht erfüllt, spricht man von einem affinen Untervektorraum.

[7] Werden beliebige Elemente einer Menge M verknüpft und ist das Resultat ebenso ein Element aus M, so ist die Verknüpfung abgeschlossen.

3.4 Erzeugendensysteme

Die Menge der Summen von mehreren gestauchten und gestreckten n-dimensionalen Vektoren werden im Folgenden näher betrachtet.

Definition 3.4.1. vgl. [8, S. 298, 16.3] (*Linearkombination*) Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $v_1, ..., v_n \in V$. Ein Vektor $v \in V$ lässt sich mit $v_1, ..., v_n$ und den Koeffizienten $\lambda_i \in K$ für $i = 1, ..., n$ und wie folgt linear kombinieren:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + ... + \lambda_n v_n.$$

Beispiel 3.4.2. In der Abbildung 3.1 wird die Linearkombination der Vektoren v_1 und v_2 ersichtlich.

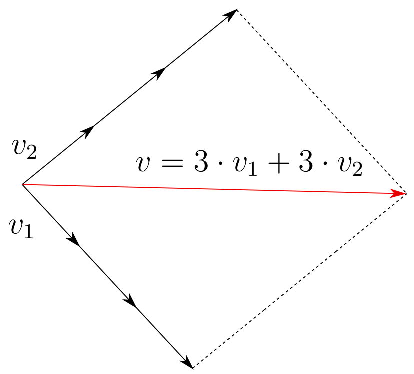

Abbildung 3.1: $\sum_{i=1}^{2} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3$

Definition 3.4.3. [9, S. 30, 1.5] (*lineare Hülle*) Sei V ein Vektorraum über den Körper K und $H \subset V$. Die Menge aller Linearkombinationen

$$\langle H \rangle_K := \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i \mid \lambda_i \in K, h_i \in H \text{ für } i = 1, ..., n\}$$

bezeichnen wir als den, die „*lineare Hülle*“ [8, S. 298, 16.4], das „*Erzeugnis*“ [8, S. 298, 16.4] oder den „*Span*“ [8, S. 298, 16.4] von H.

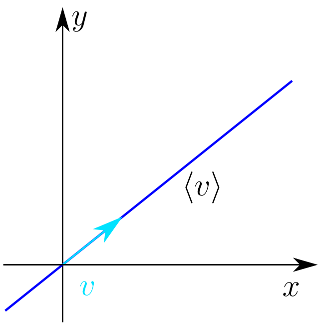

Abbildung 3.2: $\langle v \rangle_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}^2$

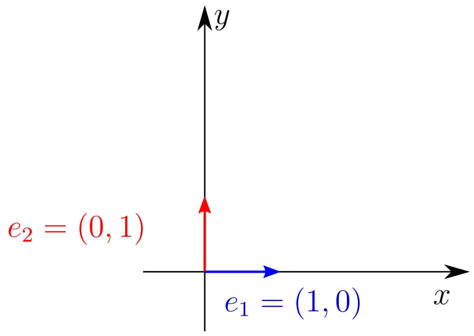

Abbildung 3.3: $\langle e_1, e_2 \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$.

Im Falle der Abbildung 3.2 ist das Erzeugnis von v eine Gerade, die durch den Urspruch geht, also ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$. Die Vektoren e_1 und e_2 aus der Abbildung 3.3 spannen den gesamten $\mathbb{R}^2$ auf, da jeder beliebige Vektor aus ihnen kombiniert werden kann.

Definition 3.4.4. [6, S. 39, 9.4] (*Erzeugendensystem*) „Eine Teilmenge M eines K-Vektorraums V heißt Erzeugendensystem von V, wenn $V = \langle M \rangle_K$. V heißt endlich erzeugt von M, wenn es ein endliches[8] Erzeugendensystem gibt.“

Beispiel 3.4.5. Die Abbildung 3.3 beschreibt ein endliches Erzeugendensystem, da die Teilmenge $E = \{e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2$ endlich ist und den $\mathbb{R}^2$ erzeugt. Würden wir noch weitere Vektoren zu E hinzufügen, wäre es dennoch ein Erzeugendensystem, weil sein Erzeugnis immer noch $\mathbb{R}^2$ bleibt. Entnehmen wir dagegen einen Vektor aus E, spannt der übrige gebliebene die x_1- bzw. x_2-Achse auf.

[8] Die minimale Anzahl an Vektoren, die V erzeugt, ist endlich.

Definition 3.4.6. vgl. [8, S. 298, 16.5] (*Lineare Unabhängigkeit*) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum, $v_1, ..., v_n \in V$. Wie nennen das System $(v_1, ..., v_n)$ linear unabhängig, wenn gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \Longrightarrow \lambda_i = 0 \text{ für alle } i = 1, ..., n. \tag{3.7}$$

Andernfalls heißt $v_1, ..., v_n)$ linear abhängig.

Sei eine Menge linear unabhängig und sei dies zu überprüfen. So folgt ist die Gleichung (3.7) nur durch die „trivial[e]“ [8, S. 307, 16.5] Lösung, also alle Koeffizienten $\lambda_i = 0$, lösbar. Sei dagegeben eine Menge linear abhängig und sei dies zu überprüfen, dann ist mindestens ein $\lambda_i \neq 0$.

Beispiel 3.4.7. Ein zu v aus der Abbildung 3.2 linear abhängiger Vektor w_a ist $w_a \in \langle v \rangle$. Für einen linear unabhängigen w_u dagegen gilt $w_u \notin \langle v \rangle$. Diese Aussage gilt nicht nur für zwei- oder dreidimensionale Vektoren, sondern auch n-dimensionale.

Beispiel 3.4.8. Wir wollen berechnen, ob die Vektoren aus Abbildung 3.3 linear unabhängig sind.

$$\sum_{i=1}^{2} \lambda_i e_1 = 0$$

$$\lambda_1 \cdot (1, 0) + \lambda_2 \cdot (0, 1) = 0$$

Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 = 0 \\ &\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

Die Gleichung ist nur mit der trivialen Lösung lösbar. Damit sind e_1 und e_2 linear unabhängig.

3.5 Basis und Dimension

Die aus dem Kapitel 3.4 erläuterten Begrifflichkeiten werden sehr wichtig sein, um die Basis, eine grundlegende Voraussetzung zur Definition des Dimensionenbegriffs, zu erklären.

Theorem 3.5.1. [6, S. 41, 9.16] (*Basis*) „Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $B \subseteq V$ heißt Basis von V, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen gelten:

(i) B ist ein Erzeugendensystem und linear unabhängig.

(ii) B ist [ein] minimales[9] Erzeugendensystem.

(iii) B ist [eine] maximale[10] linear unabhängige Teilmenge.“

Um das Theorem bestehend aus der Äquivalenzaussage (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) zu zeigen, reicht es den Beweis des sogenannten Ringschlusses für die Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii), (ii) $\Rightarrow$ (iii) und (iii) $\Rightarrow$ (i) zu führen. Wir verwenden im Folgenden ausschließlich Widerspruchsbeweise. Die Widersprüche zu den fettgedruckten Voraussetzungen werden zur Vereinfachung unterstrichen.

Beweis. Vor.: Sei $B = \{v_1, ..., v_k\}$. B ist Erzeugendensystem und **linear unabhängig**.
Beh.: (i) $\Rightarrow$ (ii)
Bew.: Angenommen B ist nicht minimal. Dann ist B ohne v_k für $k = 1, ..., n$ immer noch ein Erzeugendensystem:
Sei $\lambda_i \in K$ für $i = 1, ..., n$.

$$\Rightarrow v_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i v_i \Leftrightarrow 0 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_i v_i - v_k$$

$\Rightarrow \lambda_k \neq 0 \Rightarrow$ <u>linear abhängig</u> $\lightning$ $\Rightarrow$ Beh.
In Wortform: Der Nullvektor erhält somit eine nichttriviale Darstellung, da $\lambda_k = 1 \neq 0$. Insbesondere ist das System B mit v_k für $k = 1, ..., n$ <u>linear abhängig</u>, was ein Widerspruch zu der Voraussetzung der linearen Unabhängigkeit ist, woraus folgt, dass die Behauptung wahr ist. (vgl. [6, S. 41, 9.16 (a) $\Rightarrow$ (b)])

[9] Diese Eigenschaft gilt nicht mehr, wenn ein Element aus B entfernt wird.
[10] Wird ein $v \in V$ zu B hinzugefügt, so ist B nicht mehr linear unabhängig.

Vor.: B ist ein **minimales Erzeugendensystem**.
Beh.: (ii) $\Rightarrow$ (iii)
Bew.: Zuerst zeigen wir, dass B linear unabhängig ist.
Angenommen B ist linear abhängig. Sei λ_i für $i = 1, ..., n$. Dann hat die Gleichung $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$ mindestens ein $\lambda_i \neq 0$ mit $i = 1, ..., n$ als Lösung.
Wir nehmen o.B.d.A[11] an: Sei $\lambda_j \neq 0$ für $j \in 1, ..., n$. B ist linear abhängig aufgrund v_j.

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \lambda_j v_j + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \lambda_i v_i = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda_j v_j = -\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \lambda_i v_i \\
&\Leftrightarrow v_j = -\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i \in \langle B \setminus \{v_j\} \rangle_K
\end{aligned}
$$

Der Vektor v_j liegt in $B \setminus \{v_j\}$. Wir benötigen, um den Widerspruch zu erhalten, einen Zwischenbeweis, der aussagt, dass die Menge $B \setminus \{v_j\}$ entgegen der Minimalität ein Erzeugendensystem ist.

> Zw.vor.: $v_j \in B \setminus \{v_j\}$, also $v_j \cup B \setminus \{v_j\}$ **linear abhängig**.
> Zw.beh.: $B \setminus \{v_j\}$ ist ein Erzeugendensystem
> Zw.bew.: Angenommen, $B \setminus \{v_j\}$ sei kein Erzeugendensystem. Dann gibt es ein $v_j \notin B \setminus \{v_j\}$ für $k \in \{1, ..., n\}$. Daraus folgt allerdings: Die Menge $B \setminus \{v_j\} \cup v_j = B \cup v_j$ ist linear unabhängig, was der Voraussetzung, dass $B \cup v_j$ linear abhängig ist, widerspricht.

Daher ist $B \setminus \{v_j\}$ ein Erzeugendensystem, was im Gegensatz zu der Minimalität des Erzeugendensystems von B steht. Also ist B linear unabhängig.
Es ist noch zu zeigen , dass B *maximal* linear unabhängig ist.
Angenommen, B ist keine maximal linear unabhängige Teilmenge. Dann gibt es ein $v \in V$, sodass $B \cup \{v\}$ linear unabhängig ist – v wäre nicht im Span von B –, aber B erzeugt laut Voraussetzung alle Vektoren in V, somit gilt $v \in \langle B \rangle$, was der Widerspruch ist. Daraus folgt, dass B *maximal* linear unabhängig ist. (vgl. [6, S. 41, 9.16 (b) $\Rightarrow$ (c)])

[11] Ohne Beschränkung der Allgmeinheit. Wir schauen uns einfachheitshalber einen Spezialfall an, um die Aussage im Allgemeinen zu beweisen. Die anderen Fälle würden analog zu zeigen sein.

Vor.: B ist ein **maximale linear unabhängige Teilmenge**.
Beh.: (iii) $\Rightarrow$ (i)
Bew.: Es sind zwei Tatsachen zu zeigen, zum einen dass aus (iii) die Lineare Unabhängigkeit von B folgt, was offensichtlich aus der Voraussetzung folgt, und zum anderen dass B ein Erzeugendensystem ist.
Angenommen, B ist kein Erzeugendensystem. Dann gibt es ein $v \in V$, sodass $v \notin \langle B \rangle$ gilt, also nicht im Erzeugnis von B liegt. Daraus folgt, dass $\{v\} \cup B$ linear unabhängig ist, was der Maximalität von B widerspricht. (vgl. [10, S. 59]) $\square$

Beispiel 3.5.2. Im Beispiel 3.4.8 haben wir bereits gezeigt, dass E ein linear unabhängiges System ist. Um zu beweisen, dass es eine Basis ist, müssen wir noch überprüfen, ob e_1 und e_2 ein Erzeugendensystem bildet.
Sei $v \in \mathbb{R}^2$ beliebig.

$$v = \lambda_1 \cdot (1, 0) + \lambda_2 \cdot (0, 1) \Rightarrow v = (\lambda_1, \lambda_2)$$

Die Teilmenge E erzeugt $\mathbb{R}^2$, d.h. jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ kann durch E linear kombiniert werden. Somit ist sie eine Basis.

Definition 3.5.3. [5, S. 504] (*Dimension eines Vektorraums*) „Ist B eine Basis eines endlich erzeugten Vektorraums V, so nennt man $n := |B| \in \mathbb{N}_0$ die Dimension von V. Wir schreiben dafür $\dim(V) = n$. Ist V nicht endlich erzeugt, so setzen wir $\dim(V) := \infty$.“

Beispiel 3.5.4. Aus dem Matheunterricht wissen wir, dass $\mathbb{R}^2$ zwei Dimensionen besitzt. Lediglich haben wir diese Tatsache nie bewiesen. Im Beispiel 3.5.2 haben wir gezeigt, dass E eine Basis ist:

$$|E| = 2 \Rightarrow \dim(E) = 2$$

Um die Dimension eines Vektorraum zu bestimmen, braucht man nur eine Basis zu finden und dessen Mächtigkeit zu bestimmen. Anhand dieser Vorgehensweise haben wir eine Möglichkeit entwickelt sich abstrakte, unvorstellbare Tatsachen auf Papier zu bringen, sich $formal$ vorzustellen. Mit dem erlernten Wissen dieses Kapitel kann eine präzisiere Beschreibung der Linearen Algebra verliehen werden: Sie ist eine eine mathematische Teildisziplin, welche n-dimensionale Vektorräume untersucht.

4 unendlichdimensionale Vektorräume

Dieses Kapitel stellt die Schnittstelle zwischen der linearen Algebra und der Funktionalanalysis, welche sich mit unendlichdimensionalen Vektorräume beschäftigt.

4.1 Funktionenvektorraum

Satz 4.1.1. vgl. [6, S. 28 f., 6.2] (*Der reelle Funktionenraum*) Die Menge aller reellen Funktion[1]

$$F := \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

bilden einen Vektorraum über den Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit folgender Definition von Addition und Skalarmultiplikation:

(i) Die Addition $f + g \in F$ für $f, g \in F$ definieren wie als

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x).$$

(ii) Die Skalarmultiplikation $\lambda \cdot f \in F$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in F$ definieren wir als

$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x).$$

Anstatt Vektoren als Verschiebungvorschriften von Punkten wie in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^2$ hat der Funktionenraum einzelne Funktionen als „Vektoren“, die sich genauso addieren und skalamultiplizieren lassen.

[1] In der Schule behandeln wir ausschließlich reelle Funktionen mit der Defintions- und Wertemenge $\mathbb{R}$.

Beispiel 4.1.2. Wird eine Funktion mit einer konstanten addiert, wird sie in y-Richtung nach oben (wie in Abbildung 4.1) oder nach unten verschoben.

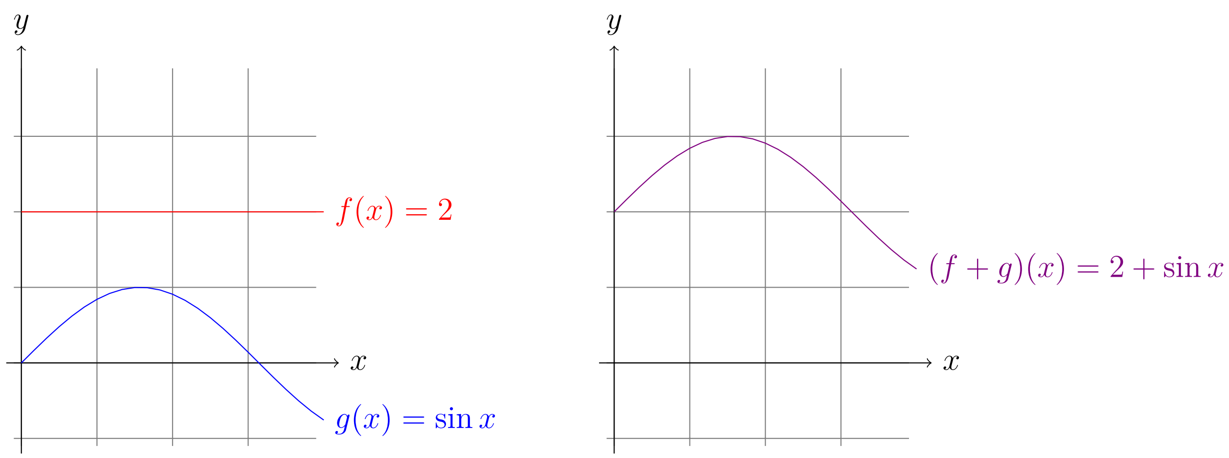

Abbildung 4.1: Funktionenaddition

Beispiel 4.1.3. Im Falle von Abbildung 4.2 wird die Sinus-Funktion in y-Richtung gestreckt, indem ihre Amplitude durch die Skalarmultiplikation verdoppelt wird.

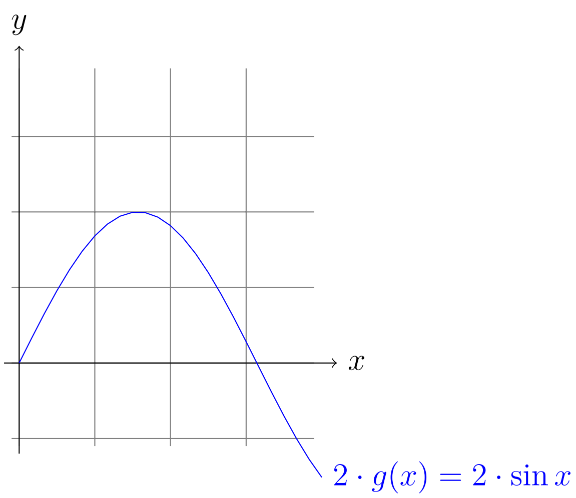

Abbildung 4.2: Funktionenskalarmultiplikation

Beweis. Vor.: Funktionenaddition und Funktionenskalarmultiplikation von 4.1.1 werden für alle Beweise benötigt.
Beh.: F ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Bew.: Wir müssen F auf alle Vektorraumaxiome (siehe 3.3.1) hin überprüfen. Aus der Definition von F folgt: $f(x) \in \mathbb{R}$ für alle f. Die Ergebnisse aller Funktionen aus F sind reelle Zahlen, somit haben sie alle Körpereigenschaften (siehe 3.2.1). Wir können mit ihnen wie gewohnt rechnen. Zuerst zeigen wir, dass $(F, +)$ eine abelsche Gruppe (vgl. 3.1.5, 3.1) ist.
Für alle $f, g, h \in F$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) (Assoziativität) $(f + g) + h)(x) = (f + g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) = (f + (g + h))(x)$

(ii) (Existenz des neutralen Elements) Sei $0_{\text{Abb}}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.[2]
$(0_{\text{Abb}} + f)(x) = 0_{\text{Abb}}(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x) = f(x) + 0 = f(x) + 0_{\text{Abb}}(x) = (f + 0_{\text{Abb}})(x)$

(iii) (Existenz des Inversen) Sei $-f \in F$ das Inverse für alle $f \in F$.
$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f(x)) = f(x) - f(x) = 0_{\text{Abb}}(x) = (-f(x)) + f(x) = ((-f) + f)(x)$

(iv) (Kommutativität) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$

Es müssen noch die Eigenschaften eines Vektorraumes gezeigt werden.

(i) $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot f(x) = \lambda_1 \cdot f(x) + \lambda_2 \cdot f(x)$

(ii) $\lambda_1 \cdot (f + g)(x) = (\lambda_1 \cdot f + \lambda_1 \cdot g)(x) = \lambda_1 \cdot f(x) + \lambda_1 \cdot g(x)$

(iii) $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot f(x)) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot f(x)$

(iv) $1 \cdot f(x) = f(x)$

□

[2] Wir bezeichnen diese Funktion als die sogenannte „Nullabbildung“, die alle Elemente auf 0 abbildet. Ihr Graph ist die x-Achse.

4.2 Polynomvektorraum

Um eine Intuition von dem Funktionenraum aller reellen Funktionen zu erlangen, beschäftigen wir uns zunächst mit einer Teilmenge von F, den Polynomen $\mathbb{R}[x]$, die ebenso Abbildungen von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind.

Definition 4.2.1. vgl. [11, S. 44, 1.28] (*Polynome*) Ein Polynom vom Grad $\leq n$ hat die Form

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + ... + \lambda_n x^n$$

für $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Satz 4.2.2. vgl. [11, S. 44f., 1.28] (*Polynomvektorraum* $\mathbb{R}[x]$) Die Menge aller Polynome aus 4.2.1 bezeichnen wir als $\mathbb{R}[x]$. Sie bildet einen $\mathbb{R}$-Untervektorraum (siehe 3.3.3) mit der Definition von Addition und Multiplikation aus 4.1.1:

(i) (Polynomaddition) Für alle $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \mu_i x^i$, $g(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \nu_i x^i$ gilt:

$$(f+g)(x) = \sum_{i=0}^{n} \mu_i x^i + \sum_{i=0}^{n} \nu_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (\mu_i + \nu_i) x^i.$$

(ii) (Polynomskalarmultiplikation) Seien $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ beliebig und $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot \sum_{i=0}^{n} \mu_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \lambda \cdot \mu_i x^i.$$

Beweis. Vor.: Plynomaddition und -skalarmultiplikation aus 4.2.2.
Beh.: siehe Satz 4.2.2
Bew.: Wir rechnen die Axiome aus 3.3.3 für $\mathbb{R}[x]$ durch.
Seien $u(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \zeta_i x^i$, $v(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \eta_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ beliebig.

(i) Zu zeigen gilt, dass der Nullvektor ein Element von $\mathbb{R}[x]$ ist. Sei $\rho = 0$.

$$\rho \cdot u(x) = 0 \cdot \sum_{i=0}^{n} \zeta_i x^i = 0_{\text{Abb}}(x) \Rightarrow 0_{\text{Abb}}(x) \in \mathbb{R}[x]$$

(ii) Es gilt die Ageschlossenheit der Polynomaddition zu beweisen.

$$(u+v)(x) = u(x) + v(x) = \sum_{i=0}^{n} \zeta_i x^i + \sum_{i=0}^{n} \eta_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (\zeta_i + \eta_i) x^i \in \mathbb{R}[x]$$

(iii) Die Skalarmultiplikation soll auf ihre Abgeschlossenheit getestet werden. Sei $\varrho \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$(\varrho \cdot u)(x) = \varrho \cdot u(x) = \varrho \cdot \sum_{i=0}^{n} \zeta_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \varrho \cdot \zeta_i x^i \in \mathbb{R}[x]$$

□

Wir benötigen eine Basis, um die Dimension des Polynomvektorraumes zu bestimmen.

Lemma 4.2.3. (*Basis von* $\mathbb{R}[x]$) Die Menge aller Monome $1, x, x^2, \ldots, x^n$ vom Grad $\leq n$ bildet eine Basis $B_{\mathbb{R}[x]}$ des Polynomvektorraumes.

Beweis. Vor.: Theo. 3.5.1 (i), Def. 4.2.1, Def. 3.4.6
Beh.: Die Menge $B_{\mathbb{R}[x]} := \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ sei eine Basis des Polynomvektorraums.
Bew.: Wir müssen überprüfen, ob die Menge linear unabhängig und ein Erzeugendensystem ist.
Lineare Unabhängigkeit:
Es ist zu zeigen, dass die Gleichung

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i = \lambda_i x^i = \lambda_0 + \lambda_1 x^1 + ... + \lambda_n x^n = 0 \tag{4.1}$$

nur für alle $\lambda_i = 0$ mit $i \in \mathbb{N}_0$ lösbar ist.[3]

(i) Setze zunächst $x = 0$ in (4.1).

$$\Rightarrow \lambda_0 + \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0^2 + ... + \lambda_n \cdot 0^n \ \Rightarrow \lambda_0 = 0 \tag{4.2}$$

(ii) Setze λ_0 in (4.1) ein.

$$\lambda_1 \cdot x + \lambda_2 \cdot x^2 + ... + \lambda_n \cdot x^{n-1} = 0 \tag{4.3}$$

Wir dürfen (4.3) nun durch x teilen, wenn $x \neq 0$ ist:

$$\lambda_1 \cdot x + \lambda_2 \cdot x^2 + ... + \lambda_n \cdot x^n = 0 \qquad | : x \tag{4.4}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \cdot x^2 + ... + \lambda_n \cdot x^{n-1} = 0 \tag{4.5}$$

Wiederhole (i), (4.3), bis wir nacheinander erhalten, dass alle $\lambda_i = 0$ mit $i \in \mathbb{N}_0$ sind. Somit ist die Lineare Unabhängigkeit von $B_{\mathbb{R}[x]}$ gezeigt. □
Erzeugendensystem: Aus Def. 4.2.1 ist ersichtlich, dass jede Polynomfunktion $f(x)$ eine Linearkombination der Monome $1, x, x^2 \ldots, x^n$ vom Grad $\leq n$ ist. Folglich bildet $B_{\mathbb{R}[x]}$ ein Erzeugendensystem. □

[3] Wir müssen ein Gleichungssystestem mit n Variablen schrittweise lösen. Dies erfolgt durch „geschickt gewählte x“ (vgl. [8, S. 308]).

4.3 unendliches Erzeugendensystem

Proposition 4.3.1. $\mathbb{R}[x]$ hat ein unendliches Erzeugendensystem $B_{\mathbb{R}[x]} = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$ mit.

Beweis. (vgl. [8, S. 308]) Wir wollen mit einem Widerspruchsbeweis zeigen, dass das System $B_{\mathbb{R}[x]}$ unendlich erzeugt ist.
Vor.: Im vorigen Beweis wurde bereits überprüft, dass $B_{\mathbb{R}[x]}$ ein **Erzeugendensystem** ist.
Beh.: siehe Prop. 4.3.1
Bew.: Angenommen, $B_{\mathbb{R}[x]}$ sei ein endliches Erzeugendensystem. Somit gibt es ein Polynom vom maximalen Grad n. Das „nächsthöhergradige" Polynom vom Grad $n+1$ lässt sich allerdings nicht mehr durch eine Linearkombination von $B_{\mathbb{R}[x]}$ darstellen. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass $B_{\mathbb{R}[x]}$ ein **Erzeugendensystem** ist (vgl. [5, S.498 f.]).[4]
So folgt die Behauptung. □

Corollar 4.3.2. Aus der Definition des Dimensionenbegriffs in 3.5.3 schließen wir aufgrund des unendlichen Erzeugendensystems von $B_{\mathbb{R}[x]}$, dass $\dim(\mathbb{R}[x]) = \infty$ ist.

4.4 abzählbar unendliche Dimension

Proposition 4.4.1. Die Dimension des reellen Polynomvektorraumes $\mathbb{R}[x]$ lautet:

$$\dim(\mathbb{R}[x]) = \aleph_0.$$

Beweis. Vor.: Aus dem W-Seminarunterricht wissen wir, dass eine Menge M genau dann abzählbar ist, wenn $|M| = |\mathbb{N}_0| = \aleph_0$ gilt.
Beh.: Die Basis $B_{\mathbb{R}[x]}$ ist abzählbar.
Bew.: Wir konstruieren eine eineindeutige[5] Funktion: Sei $n \in \mathbb{N}_0$.

$$\alpha : B_{\mathbb{R}[x]} \to \mathbb{N}_0 \tag{4.6}$$
$$x^n \mapsto n \tag{4.7}$$

$\Rightarrow |B_{\mathbb{R}[x]}| = \aleph_0 \Rightarrow \dim(\mathbb{R}[x]) = \aleph_0$ □

[4]Die Basis $B_{\mathbb{R}[x]}$ müsste alle Polynome „linear kombinieren" können.
[5]Zur Erinnerung: Jedem Element wir genau ein Element aus der Wertemenge zugeordnet. Wir sagen stattdessen auch „bijektiv".

4.5 überabzählbar unendliche Dimension

Wir wollen im Folgenden berechnen, welche Dimension F hat. Da wir wissen, dass $\mathbb{R}[x]$ ein Untervektorraum von F ist, muss $\dim(F) \geq \dim(\mathbb{R}[x])$ sein. Hierfür bezeichnen wir die Mächtigkeit der reellen Zahlen als $|\mathbb{R}| := \mathfrak{c}$.

Lemma 4.5.1. Seien A und B beliebige Mengen. Die Gesamtanzahl G_F der Funktionen von $A \to B$ ist

$$G_F = |A|^{|B|}.$$

Beweis. Aus den Axiomen der Kombinatorik kann die Behauptung ableiten. Seien $M = \{a, b, c\}$ und $N = \{d, e, f, g\}$ Mengen. Wir wollen die Anzahl der Abbildungen von $M \to N$ ausrechnen.[6] Das Element a hat vier Möglichkeiten abgebildet zu werden, nämlich auf d, e, f oder g. Analog gilt es für b und c. So gibt es insgesamt $3^4 = 81$ Möglichkeiten, wie a, b, c abgebildet werden können. □

Satz 4.5.2. vgl. [12, S. 3, 3.2 (a)] Sei V ein K-Vektorraum. Ist $|V| > |K|$, dann ist $|V| = \dim(V)$.

Corollar 4.5.3. Die Mächtigkeit des Vektorraums $|F|$ ist die Anzahl aller reellen Funktionen von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (siehe Satz 4.5.1). Dies entspricht:

$$|\mathbb{R}|^{|\mathbb{R}|} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}.$$

Der Körper von F ist $\mathbb{R}$. Somit gilt:

$$|F| > |\mathbb{R}| \Rightarrow \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c} \Rightarrow |F| = \dim(F) = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}.$$

[6] Man kann sich die Abbildung der einzelnen Elemente aus der Definitons- zur Wertemenge beliebig definieren. Dabei muss man beachten, dass jedes Element einem anderen zugeordnet wird und nicht gleichzeitig auf mehr als zwei abgebildet wird.

5 Schluss

5.1 Zusammenfassung

Im Laufe der Arbeit haben wir sowohl die visuelle als auch die mathematische Darstellung endlicher und unendlicher Dimension kennen gelernt. Begonnen haben wir mit Gedankenexperimenten zur Visualisierung von n-dimensionalen Koordinatensystemen und Würfeln (Kapitel 2). Anschließend haben wir durch die grundlegenden Kenntnisse der linearen Algebra (Kapitel 3) über Gruppen und Körper, Vektorräume, lineare (Un-)Abhängigkeit sowie Erzeugendensystemen die Basis definiert, deren Mächtigkeit die Dimension eines Vektorraums ist. Zum Schluss haben wir uns mit Räumen unendlicher Dimension wie dem $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$-dimensionalen Funktionenraum F aus der Menge aller reellen Abbildungen von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und seinem Untervektorraum, dem $\aleph_1$-dimensionalen Polynomvektorraum $\mathbb{R}[x]$, befasst.

5.2 Ausblick

Dass jeder Vektorraum, sei es von endlicher oder unendlicher Dimension, eine Basis hat (Zornsches Lemma), und Satz 4.5.2, wurde in dieser Arbeit nicht bewiesen, da dazu Kenntnisse aus der Mengenlehre benötigt werden. In der Einleitung haben wir Würfel in n Dimensionen betrachtet. Man könnte weitere platonische Körper wie Tetraeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder in höheren Dimensionen behandeln. Es gibt einen anderen Basenbegriff, der im Gegensatz zur Hamel-Basis (Theorem 3.5.1) unendliche Summen zulässt. So kann man eine überabazählbare Menge zu eine einer „handhabbaren, abzählbaren“ [11, S.762] machen.

Definition 5.2.1. [11, S.762,7.67] *Schauderbasis* „Eine Folge $v_1, v_2, ...$ in V heißt Schauder-Basis von V, wenn gilt: Zu jedem $v \in V$ gibt es eindeutige $\alpha_i \in K$, $i \in \mathbb{N}$[,] so dass

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n \text{“gilt.}$$

Wir haben uns bisher nur mit der mathematischen Theorie beschäftigt, ohne auf ihre Anwendung einzugehen. Man findet sie heutzutage überall wie zum Beispiel in der Informatik, Physik, Stochastik und Datenanalyse. Keine dieser Wissenschaften kann das in dieser Arbeit erläuterte Fundament entbehren.

Literaturverzeichnis

[1] Kaku, Michio: *Die Physik der unsichtbaren Dimensionen*. 2. Reinbeck bei Hamburg : Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH, 2017

[2] Alex Rosenthal, Georg Z.: *Exploring other dimensions - Alex Rosenthal, Georg Zaidan*. `https://www.youtube.com/watch?v=C6kn6nXMWF0`. Version: Jul 17, 2013

[3] Abbott, Edwin A.: *Flächenland*. 1. Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH & Co. KG, 1989

[4] Parker, Matt: *Four Dimensional Maths: Things to See and Hear in the Fourth Dimension with Matt Parker*. `https://www.youtube.com/watch?v=1wAaI_6b9JE`. Version: Feb 25, 2015

[5] T. Arens, Ch. Karpfinger U. Kockelkorn K. Lichtenegger H. S. F. Hettlich H. F. Hettlich: *Mathematik*. 1. Heidelberg : Spektrum Akademischer Verlag, 2008

[6] Jannsen, Prof. Dr. U.: Lineare Algebra I. (Sommersemester 2011). `http://www.mathematik.uni-regensburg.de/Jannsen/home/UebungSS11/LinAlg1.pdf`

[7] Jung, Daniel: *Körper (Algebra), Definition, mit Vergleich: Menge, Gruppe, Ring / Mathe by Daniel Jung*. `https://www.youtube.com/watch?v=qpFyN7XkFEA&index=14&list=PLLTAHuUj-zHgrxnm5NRR_vXH-pJ9ZrrvD`. Version: 2014

[8] Florian Modler, Martin K.: *Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1 - Mathematik von Studenten für Studenten erklärt und kommentiert*. 3. Berlin Heidelberg : Springer Spektrum, 2014

[9] Bosch, Siegfried: *Lineare Algebra*. 3. Berlin Heidelberg : Springer, 2006

[10] Beutelspacher, Albrecht: *Lineare Algebra - Eine Einführung in die Wissenschaft der Vektoren, Abbildungen und Matrizen*. 6. Wiesbaden : Vieweg Verlag, 2003

[11] Peter Knabner, Wolf B.: *Lineare Algebra - Grundlagen und Anwendungen*. 1. Berlin Heidelberg : Springer Spektrum, 2013

[12] Lorenz Halbeisen, Norbert H.: The cardinality of Hamel bases of Banach space. http://user.math.uzh.ch/halbeisen/publications/pdf/hamel.pdf