Znanstveno računanje 2

2. dio vježbi
Modeli s primjenama numeričke linearne algebre

Nela Bosner

Znanstveno računanje 2

Nela Bosner

Modeli s primjenama numeričke linearne algebre
Rizik i očekivani povrat portfelja
Disipacija topline elektroničke komponente
Orbita asteroida
Numeričko rješavanje Poissonove jednadžbe
Kreditni razred
Sistem masa s elastičnim oprugama
Problem totalnih najmanjih kvadrata
Problem dekonvolucije
Računanje gustoće podzemnih stijena
Krnja dekompozicija singularnih vrijednosti

Zadatak

U MATLAB-u napišite M-file funkciju `sor()` *koja implementira SOR metodu za rješavanje linearnih sustava jednadžbi. Funkcija neka ima ulazne parametre*

- *matricu sustava A i desnu stranu sustava b*
- *početnu iteraciju* x_0
- *toleranciju na relativnu normu reziduala*
- *parametar* ω

Kriterij zaustavljanja je $\|b - Ax_k\|_2/\|b\|_2 \leq tol$*, a za računanje norme koristite MATLAB-ovu funkciju* `norm()`.

Znanstveno računanje 2

Nela Bosner

Modeli s primjenama numeričke linearne algebre

Rizik i očekivani povrat portfelja

Disipacija topline elektroničke komponente

Orbita asteroida

Numeričko rješavanje Poissonove jednadžbe

Kreditni razred

Sistem masa s elastičnim oprugama

Problem totalnih najmanjih kvadrata

Problem dekonvolucije

Računanje gustoće podzemnih stijena

Krnja dekompozicija singularnih vrijednosti

Zadatak (nastavak)

Funkcija neka vraća

- *aproksimaciju rješenja* x_k
- *broj iteracija* k *potrebnih za dostizanje aproksimativnog rješenja tražene točnosti*
- *vektor duljine* $k+1$ *sa relativnim normama reziduala za svaku iteraciju* $i = 0, \ldots, k$

Modeli s primjenama numeričke linearne algebre
Rizik i očekivani povrat portfelja
Disipacija topline elektroničke komponente
Orbita asteroida
Numeričko rješavanje Poissonove jednadžbe
Kreditni razred
Sistem masa s elastičnim oprugama
Problem totalnih najmanjih kvadrata
Problem dekonvolucije
Računanje gustoće podzemnih stijena
Krnja dekompozicija singularnih vrijednosti

Zadatak

Napišite M-file funkciju `sor_konvergencija()` *koja za zadanu matricu A crta graf spektralnih radijusa matrice iteracija za SOR metodu* $T_{SOR,\omega}$.

- *Matrica A je jedini ulazni parametar.*
- *Funkcija neka generira* ω *iz ekvidistantne mreže na segmentu* $[0, 2]$ *s korakom* 0.01*, i za svaki* ω *računa* $\rho(T_{SOR,\omega})$.
- *Sve vrijednosti* ω *i odgovarajuće* $\rho(T_{SOR,\omega})$ *spremite u vektore* `omega` *i* `ro`*, koji će se koristiti za crtanje grafa s* ω *na x osi i* $\rho(T_{SOR,\omega})$ *na y osi.*

Graf će služiti za određivanje optimalnog ω.

Modeli s primjenama numeričke linearne algebre

Rizik i očekivani povrat portfelja

Disipacija topline elektroničke komponente

Orbita asteroida

Numeričko rješavanje Poissonove jednadžbe

Kreditni razred

Sistem masa s elastičnim oprugama

Problem totalnih najmanjih kvadrata

Problem dekonvolucije

Računanje gustoće podzemnih stijena

Krnja dekompozicija singularnih vrijednosti

Zadatak (nastavak)

Koristite MATLAB-ove funkcije funkcije

- `diag()`, `triu()` *i* `tril()` *za generiranje matrice iteracija* $T_{SOR,\omega}$
- `max(abs(eig(T)))` *za računanje spektralnog radijusa*
- `plot()` *za crtanje grafa*
- `axis()` *za određivanje granica na x i y osima grafa*
- `xlabel()` *i* `ylabel()` *za označavanje x i y osi*

Rizik i očekivani povrat portfelja

Modeli s primjenama numeričke linearne algebre

Rizik i očekivani povrat portfelja

Disipacija topline elektroničke komponente

Orbita asteroida

Numeričko rješavanje Poissonove jednadžbe

Kreditni razred

Sistem masa s elastičnim oprugama

Problem totalnih najmanjih kvadrata

Problem dekonvolucije

Računanje gustoće podzemnih stijena

Krnja dekompozicija singularnih vrijednosti

- Portfelj koji se sastoji od n različitih vrijednosnica može se opisati pomoću njihovih težina

$$\omega_i = \frac{x_i S_i(0)}{V(0)}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

gdje je x_i broj dionica tipa i u portfelju, $S_i(0)$ je početna cijena vrijednosnice i, a $V(0)$ je količina koja je početno investirana u portfelj.

- Definirajmo

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

- Iz definicije je vidljivo da je $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$, odnosno

$$\mathbf{e}^T \boldsymbol{\omega} = 1.$$

- Pretpostavimo da povrat i-te vrijednosnice R_i ima očekivanje $\mu_i = E(R_i)$, i definirajmo

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}.$$

- Nadalje, kovarijancu između dva povrata označimo sa $c_{ij} = Cov(R_i, R_j)$ i definirajmo matricu kovarijance

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}.$$

- Dobro je poznato da je matrica kovarijance simetrična pozitivno definitna matrica, pa je prema tome regularna i inverz $\mathbf{C}^{-1}$ postoji.
- Očekivani povrat $\mu_P = E(R_P)$ i varijanca $\sigma_P^2 = Var(R_P)$ portfelja sa težinama $\boldsymbol{\omega}$ dani su sa

$$\begin{aligned} \mu_P &= \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\omega} \\ \sigma_P^2 &= \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

Modeli s primjenama numeričke linearne algebre
Rizik i očekivani povrat portfelja
Disipacija topline elektroničke komponente
Orbita asteroida
Numeričko rješavanje Poissonove jednadžbe
Kreditni razred
Sistem masa s elastičnim oprugama
Problem totalnih najmanjih kvadrata
Problem dekonvolucije
Računanje gustoće podzemnih stijena
Krnja dekompozicija singularnih vrijednosti

- Portfelj sa najmanjom varijancom ima težine

$$\boldsymbol{\omega}_{min} = \frac{\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}}{\mathbf{e}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}}.$$

- Portfelj sa najmanjom varijancom i sa očekivanim povratom μ_P ima težine

$$\boldsymbol{\omega}_{\mu_p} = \frac{(\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu} - \mu_P \cdot \mathbf{e}^T\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu})\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e} + (\mu_p \cdot \mathbf{e}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e} - \mathbf{e}^T\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu})\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{e}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\mu}^T\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu} - (\mathbf{e}^T\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu})^2}.$$

Modeli s primjenama numeričke linearne algebre

Rizik i očekivani povrat portfelja

Disipacija topline elektroničke komponente

Orbita asteroida

Numeričko rješavanje Poissonove jednadžbe

Kreditni razred

Sistem masa s elastičnim oprugama

Problem totalnih najmanjih kvadrata

Problem dekonvolucije

Računanje gustoće podzemnih stijena

Krnja dekompozicija singularnih vrijednosti

Zadatak

- *Nađite efikasni način za računanje* ω_{min} *i* ω_{μ_p}.
- *Izračunajte* ω_{min} *i* ω_{μ_p} *za konkretan primjer, čiji su očekivani povrati i matrica kovarijance spremljeni u datoteci*

  `model_portfelj_Cm.mat`

  na adresi

  http://www.math.hr/~nela/zr2.html

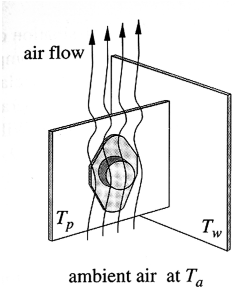
  a $\mu_p = 0.05$.
- *Koristite SOR metodu s optimalnim parametrom* ω *i MATLAB-ovu funkciju* `pcg()` *sa svim mogućim izlaznim varijablama.*

Modeli s primjenama numeričke linearne algebre
Rizik i očekivani povrat portfelja
Disipacija topline elektroničke komponente
Orbita asteroida
Numeričko rješavanje Poissonove jednadžbe
Kreditni razred
Sistem masa s elastičnim oprugama
Problem totalnih najmanjih kvadrata
Problem dekonvolucije
Računanje gustoće podzemnih stijena
Krnja dekompozicija singularnih vrijednosti

Zadatak (nastavak)

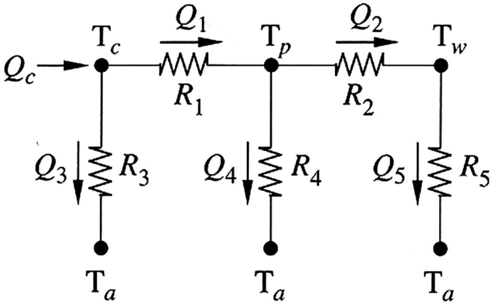
- *Kriterij zaustavljanja za obje metode neka je* $\|Ax_k - b\|_2 / \|b\|_2 < 10^{-8}$.
- *Nacrtajte graf spektralnih radijusa matrice iteracija za SOR metodu.*
- *Nacrtajte grafove relativnih normi reziduala za iteracije obiju metoda, i to tako da za svaki sustav na istom grafu budu prikazani reziduali za obje metode.*
- *Relativne norme reziduala nacrtajte u logaritamskoj skali pomoću MATLAB-ove funkcije* `semilogy()`.

Disipacija topline elektroničke komponente



- Promatramo elektroničku komponentu, koja može biti tranzistor ili bilo koji drugi uređaj koji gubi značajnu količinu energije u obliku topline.
- U primjeru na slici komponenta je pričvršćena na ploču koja služi za širenje topline.
- Ta ploče je dalje pričvršćena na drugu plohu, koja može biti kućište cijelog sklopa.

- Temperature su definirane na sljedeći način:
  - T_c — temperatura elektroničke komponente
  - T_p — temperatura ploče
  - T_w — temperatura zida
  - T_a — temperatura okolnog zraka
- Elektronička komponenta troši Q_c (W) električne snage na zagrijavanje.
- Budući da je $T_c > T_a$, zrak u blizini komponente struji prema gore. To strujanje zraka pomaže kod hlađenja komponente, ploče i zida.
- Toplina komponente
  1. ili se prenosi na zrak,
  2. ili se provodi u ploču.
- Toplina dovedena do ploče
  1. ili se prenosi na zrak,
  2. ili se provodi u zid.
- Zid prenosi preostalu toplinu na zrak.



Slika: Model termalne mreže za toplinski tok od elektroničke komponente prema okolini.

- Čvorovi mreže su mjesta na kojima je definirana temperatura.
- Strelice označavaju pretpostavljeni smjer toka topline između čvorova.
- Otpornici u mreži predstavljaju termalni otpor toku topline.
    - Tok topline s visokim termalnim otporom zahtijeva veću temperaturnu razliku za prijenos određene količine topline nego tok sa manjim termalnim otporom.
- Primjenom zakona o sačuvanju energije na elektroničku komponentu i njenu potpornu konstrukciju, dobivamo sljedeće jednadžbe.

Modeli s primjenama numeričke linearne algebre
Rizik i očekivani povrat portfelja
Disipacija topline elektroničke komponente
Orbita asteroida
Numeričko rješavanje Poissonove jednadžbe
Kreditni razred
Sistem masa s elastičnim oprugama
Problem totalnih najmanjih kvadrata
Problem dekonvolucije
Računanje gustoće podzemnih stijena
Krnja dekompozicija singularnih vrijednosti

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{1}{R_1}(T_c - T_p) & Q_2 &= \frac{1}{R_2}(T_p - T_w) \\
Q_3 &= \frac{1}{R_3}(T_c - T_a) & Q_4 &= \frac{1}{R_4}(T_p - T_a) \\
Q_5 &= \frac{1}{R_5}(T_w - T_a) & Q_c &= Q_1 + Q_3 \\
Q_1 &= Q_2 + Q_4 & Q_2 &= Q_5
\end{aligned}
$$

- Snaga disipacije elektroničke komponente Q_c i temperatura okolnog zraka T_a su poznati.
- Termalni otpori mogu se izračunati iz poznatih svojstava materijala, fizičkih dimenzija i empiričkih korelacija toka topline u različitim fizičkim konfiguracijama.

- Dakle, Q_c, T_a i R_i su poznati.
- Nepoznanice su

$$x = [\ Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad T_c \quad T_p \quad T_w\ ]^T.$$

Zadatak

1. *Definirajte matricu A i vektor b tako da sustav $Ax = b$ predstavlja matrični oblik prethodnih jednadžbi za disipaciju topline.*
2. *Napišite M-file funkciju*

```
function y=mdAx(x)
```

koja implementira množenje matrice A s vektorom x. Budući da matrica A ima puno nula, množite samo s netrivijalnim elementima matrice.

Zadatak (nastavak)

Poznate vrijednosti zadane su u tablici

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	T_a	Q_c
2	0.5	35	0.7	1	20	10

3. *Sustav $Ax = b$ riješite MATLAB-ovom funkcijom `gmres()` sa svim mogućim izlaznim varijablama. Umjesto ulaznog parametra za matricu A stavite pokazivač na funkciju (function handle) `@mdAx`, neka je $x_0 = [\ 1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1\ ]^T$, a kriterij zaustavljanja neka je $\|Ax_k - b\|_2/\|b\|_2 < 10^{-8}$.*
4. *Nacrtajte graf relativnih normi reziduala za iteracije GMRES metode.*

Modeli s primjenama numeričke linearne algebre
Rizik i očekivani povrat portfelja
Disipacija topline elektroničke komponente
Orbita asteroida
Numeričko rješavanje Poissonove jednadžbe
Kreditni razred
Sistem masa s elastičnim oprugama
Problem totalnih najmanjih kvadrata
Problem dekonvolucije
Računanje gustoće podzemnih stijena
Krnja dekompozicija singularnih vrijednosti

Orbita asteroida

- Za ovaj problem moramo se sjetiti jednog matematičkog teorema i jednog fizikalnog zakona:
  1. Opća jednadžba ravninske konike (elipsa, parabola, hiperbola) je dana sa
     $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$
     gdje su A, B, C, D, E i F konstante.
  2. **Keplerov prvi zakon**: orbita asteroida oko sunca mora biti elipsa.
- Astronom koji želi odrediti orbitu asteroida oko sunca postavlja koordinatni sustav u ravnini orbite sa ishodištem u suncu (fokus).
- Tada mjeri 5 različitih položaja asteroida u tom sustavu, čime dobivamo 5 različitih točaka na orbiti.
- 5 točaka je dovoljno da odredimo jednadžbu elipse.

- Obzirom da imamo 6 nepoznanica A, B, C, D, E i F, i da se jednadžba krivulje ne mijenja ako je pomnožimo skalarom, možemo jedan od parametara svesti na 1.
- U našem slučaju uzmimo da je $A = 1$ (jer se radi o elipsi) i da jednadžba ima oblik

$$x^2 + a_1 xy + a_2 y^2 + a_3 x + a_4 y + a_5 = 0.$$

Zadatak

- *Postavite sustav linearnih jednadžbi za nepoznanice a_i $i = 1, \ldots, 5$.*
- *Izmjereni položaji nalaze se u datoteci*

  `model_orbita_polozaji.mat`

  na adresi

  http://www.math.hr/~nela/zr2.html

Zadatak (nastavak)

- *Izaberite najpogodniju metodu za rješavanje dobivenog sustava.*
- *Definirajte anonimnu funkciju*

```
f=@(x,y) x.^2+a1*x.*y+a2*y.^2+a3*x+a4*y+a5;
```

nakon što izračunate parametre `ai`.

- *Napišite sljedeće:*

```
x=-5:0.1:5;
y=x;
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=f(X,Y);
contour(x,y,Z,[0 0]);
grid on
```

- *Isprobajte i funkciju* `surf()`.

Numeričko rješavanje Poissonove jednadžbe

Modeli s primjenama numeričke linearne algebre

Rizik i očekivani povrat portfelja

Disipacija topline elektroničke komponente

Orbita asteroida

Numeričko rješavanje Poissonove jednadžbe

Kreditni razred

Sistem masa s elastičnim oprugama

Problem totalnih najmanjih kvadrata

Problem dekonvolucije

Računanje gustoće podzemnih stijena

Krnja dekompozicija singularnih vrijednosti

Numerički ćemo riješiti Poissonovu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu (rubni problem), koja je specijalni oblik difuzijske jednadžbe (npr. distribucija temperature u objektu).

- Imamo sljedeći problem:

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= f(x,y) && \text{na } \Omega \\ u(x,y) &= 0 && \text{na } \partial\Omega \end{aligned}$$

  gdje je Ω jedinični kvadrat $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$.
- Δ je Laplaceov operator

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

- Mi ćemo rješavati stacionarnu difuzijsku jednadžbu s uniformnim toplinskim konduktivitetom materijala, s točkastim vanjskim izvorom topline u središtu kvadrata jačine 10000, i konstantnom temperaturom na rubu.
- Ovaj problem je ekvivalentan rješavanju Poissonove jednadžbe s funkcijom

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{za } (x,y) \in \Omega \setminus \{(0.5, 0.5)\} \\ 10000 & \text{za } (x,y) = (0.5, 0.5) \end{cases}$$

- Za diskretizaciju, sada ćemo uzeti ekvidistantnu dvodimenzionalnu mrežu

$$h = 0.05, \quad x_i = ih, \quad y_j = jh, \quad i,j = 0,1,\ldots,20,$$

$$u_{i,j} = u(x_i, y_j), \quad f_{i,j} = f(x_i, y_j).$$

Zadatak

- *Matricu sustava izračunajte pomoću MATLAB-ove funkcije* `gallery('poisson',19);`*, a vektor desne strane nađite sami.*
- *Sustav riješite metodom konjugiranih gradijenata bez i sa prekondicioniranjem koristeći MATLAB-ovu funkciju* `pcg()`*.*
- *Za prekondicioniranje koristite nekompletnu faktorizaciju Choleskog, koju ćete izračunati pomoću MATLAB-ove funkcije* `cholinc(A,'0');`*.*
- *Neka je* $u^{(0)} = [0\ 0\ 0\ \cdots\ 0]^T$.
- *Kriterij zaustavljanja za oba slučaja neka je* $\|b - Au^{(k)}\|_2 / \|b\|_2 \leq 10^{-8}$.

Zadatak (nastavak)

- *Usporedite broj uvjetovanosti matrice A sa matricom prekondicioniranog sustava, broj iteracija potrebnih za dostizanje iste točnosti i grafove relativnih normi reziduala u logaritamskoj skali za oba slučaja.*
- *Za crtanje grafa u logaritamskoj skali koristite MATLAB-ovu funkciju* `semilogy()`.
- *Jednu od izračunatih aproksimacija rješenja* $u^{(k)}$ *prebacite u kvadratnu matricu* $U = [u_{i,j}^{(k)}]$, *sa* $u_{i,j}^{(k)} \approx u(x_i, y_j)$, $i, j = 1, \ldots, 19$, *i nacrtajte plohu rješenja pomoću MATLAB-ove funkcije* `surf()`.

Kreditni razred

Modeli s primjenama numeričke linearne algebre
Rizik i očekivani povrat portfelja
Disipacija topline elektroničke komponente
Orbita asteroida
Numeričko rješavanje Poissonove jednadžbe
Kreditni razred
Sistem masa s elastičnim oprugama
Problem totalnih najmanjih kvadrata
Problem dekonvolucije
Računanje gustoće podzemnih stijena
Krnja dekompozicija singularnih vrijednosti

- Pretpostavimo da korporacije mogu biti u jednom od n mogućih kreditnih razreda ("credit rating"), i da one mogu preći iz jednog razreda u bilo koji drugi u diskretnim jedinicam vremena, recimo svake godine.
- Neka je a_{ij} vjerojatnost da korporacija prijeđe u razred i sljedeće godine, ako se trenutno nalazi u razredu j.
- Pretpostavimo da je ovaj sustav zapravo **Markovljev lanac**, tj. da vjerojatnosti prelaska ovise samo o trenutnom razredu, a ne o prošlim razredima. (To je samo aproksimacija realnih sustava.)

Svojstva matrice $A = [a_{ij}]$:

- $0 \leq a_{ij} \leq 1$, jer se radi o vjerojatnostima.
- $\sum_i a_{ij} = 1$, za svako j, budući da sustav uvijek mora preći u neki novi razred.
- Kvadratna matrica $A = [a_{ij}]$ ima nenegativne elemente, i suma elemenata svakog stupca je 1.

Modeli s primjenama numeričke linearne algebre
Rizik i očekivani povrat portfelja
Disipacija topline elektroničke komponente
Orbita asteroida
Numeričko rješavanje Poissonove jednadžbe
Kreditni razred
Sistem masa s elastičnim oprugama
Problem totalnih najmanjih kvadrata
Problem dekonvolucije
Računanje gustoće podzemnih stijena
Krnja dekompozicija singularnih vrijednosti

- Pretpostavimo da imamo velik skup korporacija, i neka u_j predstavlja udio u tom skupu onih korporacija, koje su u razredu j u početnom trenutku, uz svojstva $0 \leq u_j \leq 1$ i $\sum_j u_j = 1$.
- Ako je skup dovoljno velik, i ako se prelazak iz razreda u razred svake korporacije odvija neovisno o drugima, tada se udio korporacija u skupu svih korporacija koje će se nakon jedne godine nalaziti u razredu i, označen sa v_i, dobiva kao

$$v_i = \sum_j a_{ij} u_j, \qquad \text{ili} \qquad v = Au.$$

- Primijetimo da

$$\sum_i v_i = \sum_i \sum_j a_{ij} u_j = \sum_j \left(\sum_i a_{ij} \right) u_j = \sum_j u_j = 1.$$

Modeli s primjenama numeričke linearne algebre
Rizik i očekivani povrat portfelja
Disipacija topline elektroničke komponente
Orbita asteroida
Numeričko rješavanje Poissonove jednadžbe
Kreditni razred
Sistem masa s elastičnim oprugama
Problem totalnih najmanjih kvadrata
Problem dekonvolucije
Računanje gustoće podzemnih stijena
Krnja dekompozicija singularnih vrijednosti

- Općenito, ako sa $u^{(k)}$ označimo vektor gustoće nakon k koraka, tada

$$u^{(k)} = Au^{(k-1)} = A^k u^{(0)}.$$

- Prema tome dugoročno ponašanje gustoće ovisi o svojstvima visokih potencija matrice A.
- Prema gornjim pretpostavkama, moguće je procijeniti vjerojatnosti prelaska na osnovu povijesnih podataka.
- U sljedećoj tablici nalaze se vjerojatnosti prelaska izraženi u postocima, za jednu godinu, objavljeni u *Credit Metrics* za 2001. godinu.

Konačni razred	Početni razred							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	90.81	0.70	0.09	0.02	0.03	0	0.22	0
AA	8.33	90.65	2.27	0.33	0.14	0.11	0	0
A	0.68	7.79	91.05	5.95	0.67	0.24	0.22	0
BBB	0.06	0.64	5.52	86.93	7.73	0.43	1.30	0
BB	0.12	0.06	0.74	5.30	80.53	6.48	2.38	0
B	0	0.14	0.26	1.17	8.84	83.46	11.24	0
CCC	0	0.02	0.01	0.12	1.00	4.07	64.86	0
D	0	0	0.06	0.18	1.06	5.20	19.79	100

Modeli s primjenama numeričke linearne algebre
Rizik i očekivani povrat portfelja
Disipacija topline elektroničke komponente
Orbita asteroida
Numeričko rješavanje Poissonove jednadžbe
Kreditni razred
Sistem masa s elastičnim oprugama
Problem totalnih najmanjih kvadrata
Problem dekonvolucije
Računanje gustoće podzemnih stijena
Krnja dekompozicija singularnih vrijednosti

- Sada se postavlja pitanje što se događa kad $k \to \infty$?
- Da li se sustav smiruje u ravnotežnom stanju?
- Ako postoji ravnotežno stanje $u^{(\infty)} = \bar{u}$, tada mora vrijediti

$$A\bar{u} = \bar{u},$$

  tako da se ono ne mijenja u nadolazećim godinama.
- Dakle, $\bar{u}$ mora biti svojstveni vektor matrice A koji pripada svojstvenoj vrijednosti jednakoj 1.
- Ako pogledamo tablicu, također je jasno da je jedan takav svojstveni vektor jednak $[0, \ldots, 0, 1]^T$, tj. ako su svi u razredu D tada svi i ostaju u tom razredu.
- To nužno ne mora značiti, da svi teže ka razredu D.

Modeli s primjenama numeričke linearne algebre
Rizik i očekivani povrat portfelja
Disipacija topline elektroničke komponente
Orbita asteroida
Numeričko rješavanje Poissonove jednadžbe
Kreditni razred
Sistem masa s elastičnim oprugama
Problem totalnih najmanjih kvadrata
Problem dekonvolucije
Računanje gustoće podzemnih stijena
Krnja dekompozicija singularnih vrijednosti

- Pretpostavimo da A ima n linearno nezavisnih svojstvenih vektora $v_1, \ldots, v_n$ i n svojstvenih vrijednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, i pretpostavimo da je v_1 svojstveni vektor koji pripada svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 1$.
- Tada $u^{(k)}$ možemo raspisati po komponentama u smjerovima $v_1, \ldots, v_n$ kao

$$u^{(k)} = \nu_1^{(k)} v_1 + \cdots + \nu_n^{(k)} v_n.$$

- Imamo

$$u^{(k+1)} = Au^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} \nu_j^{(k)} A v_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \nu_j^{(k)} v_j.$$

- Prema tome dobiva se da je $\nu_j^{(k+1)} = \lambda_j \nu_j^{(k)}$, odnosno

$$\nu_j^{(k)} = \lambda_j^k \nu_j^{(0)}.$$

- Komponenta vektora u smjeru j-tog svojstvenog vektora ili raste ili trne eksponencijalno kad $k \to \infty$, ovisno o tome da li je odgovarajuća svojstvena vrijednost veća ili manja od 1 po apsolutnoj vrijednosti.
- Jasno je da niti jedna svojstvena vrijednost od A ne može biti veća od 1 po apsolutnoj vrijednosti,
    - jer da to nije tako, apsolutna vrijednost od u bi rasla eksponencijalno,
    - što je u suprotnosti sa činjenicom da je suma svih komponenti od u jednaka 1.
- Mi znamo da postoji najmanje jedna svojstvena vrijednost jednaka 1.
- Prema tome, ako su sve ostale svojstvene vrijednosti po apsolutnoj vrijednosti manje od 1, tada će njihove komponente utrnuti, i dugoročno gledano razred kojem će svi težiti je razred D.

Modeli s primjenama numeričke linearne algebre
Rizik i očekivani povrat portfelja
Disipacija topline elektroničke komponente
Orbita asteroida
Numeričko rješavanje Poissonove jednadžbe
Kreditni razred
Sistem masa s elastičnim oprugama
Problem totalnih najmanjih kvadrata
Problem dekonvolucije
Računanje gustoće podzemnih stijena
Krnja dekompozicija singularnih vrijednosti

Zadatak

Nacrtajte animirani graf za iteracije metode potencije primijenjene na matricu prelaska A.

- *Matrica A spremljena je u datoteci*

  `model_kredit_A.mat`

  na adresi

  http://www.math.hr/~nela/zr2.html

- *Vaša funkcija* `kredit_raz()` *treba imati ulazni parametar n koji označava broj iteracija koje će se izvršiti.*
- *Kao početni vektor uzmite* $u^{(0)} = [\ 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\ ]^T$.
- *Za svaku iteraciju nacrtajte vektor* $u^{(k)}$*, tako da se na x osi nalaze indeksi 8 komponenti, a na y osi su same komponente* $u_i^{(k)}$.

Modeli s primjenama numeričke linearne algebre
Rizik i očekivani povrat portfelja
Disipacija topline elektroničke komponente
Orbita asteroida
Numeričko rješavanje Poissonove jednadžbe
Kreditni razred
Sistem masa s elastičnim oprugama
Problem totalnih najmanjih kvadrata
Problem dekonvolucije
Računanje gustoće podzemnih stijena
Krnja dekompozicija singularnih vrijednosti

Zadatak (nastavak)

- *x os neka bude ograničena na raspon $[0.5, 8.5]$, a y os na $[0, 1]$.*
- *x os označite sa 'Stanje', a y os sa 'Gustoća'.*
- *Stavite naslov 'Iteracija br. k' na vaš graf pomoću MATLAB-ove funkcije `title()`, pri čemu je k točan broj iteracije (za to koristite `sprintf()` kao u C-u).*
- *Stavite svoje oznake na x os, i to*
  - *postavite crtice na vrijednosti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, pomoću MATLAB-ove funkcije*

    ```
    set(gca,'XTick',1:8);
    ```
  - *postavite natpise ispod crtica pomoću MATLAB-ove funkcije*

    ```
    set(gca,'XTickLabel', { 'AAA', 'AA', 'A',
        'BBB', 'BB', 'B', 'CCC', 'D' } );
    ```

Zadatak (nastavak)

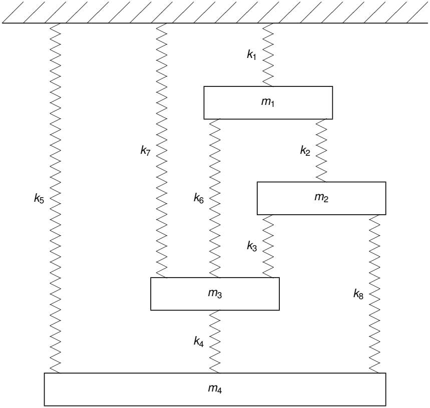
- *Nacrtajte mrežu na grafu.*
- *Svaku iteraciju zadržite 0.2 sekunde da bi animacija bila glatka pomoću MATLAB-ove funkcije* `pause(0.2)`.
- *Izračunajte svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice A i provjerite dobivene rezultate.*

Napomena

- *Vidimo da je, prema očekivanom 1 najveća svojstvena vrijednost.*
- *Prva sljedeća svojstvena vrijednost je oko 0.988, što je vrlo blizu 1, i koja ukazuje da će konvergencija prema ravnotežnom stanju biti vrlo spora.*
- *Njen svojstveni vektor, osim zadnje komponente, ima najveće komponente u 3. i 4. koordinati.*
- *Zbog toga 3. i 4. koordinate od u najsporije padaju.*

Sistem masa s elastičnim oprugama

Promatramo fizikalni sistem koji se sastoji od tijela različitih masa, povezanih elastičnim oprugama.



Problem je pronaći slobodne oscilacije ovog sistema.

- U ovom konkretnom primjeru imamo četiri tijela masa m_i $i = 1, 2, 3, 4$, i osam opruga krutosti k_l $l = 1, \ldots, 8$.
- Definirat ćemo sljedeće matrice:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_6 & -k_2 & -k_6 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 + k_8 & -k_3 & -k_8 \\ -k_6 & -k_3 & k_3 + k_4 + k_6 + k_7 & -k_4 \\ 0 & -k_8 & -k_4 & k_4 + k_5 + k_8 \end{bmatrix},$$

pri čemu je u matrici K prikazana interakcija među masama.

Modeli s primjenama numeričke linearne algebre
Rizik i očekivani povrat portfelja
Disipacija topline elektroničke komponente
Orbita asteroida
Numeričko rješavanje Poissonove jednadžbe
Kreditni razred
Sistem masa s elastičnim oprugama
Problem totalnih najmanjih kvadrata
Problem dekonvolucije
Računanje gustoće podzemnih stijena
Krnja dekompozicija singularnih vrijednosti

- Znamo da se ovaj problem svodi na traženje svojstvenih vrijednosti λ_i i svojstvenih vektora u_i matrice $A = M^{-\frac{1}{2}} K M^{-\frac{1}{2}}$, i da su rješenja tada oblika

$$x_i = M^{-\frac{1}{2}} u_i e^{i\sqrt{\lambda_i} t}, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

- Frekvencije traženih oscilacija tada su dane sa $\phi_i = \sqrt{\lambda_i}$.
- Neka su vrijednosti masa i krutosti opruga dane u sljedećim tablicama.

i	1	2	3	4
$\mathbf{m_i}$	2	5	3	6

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbf{k_i}$	10	9	8	7	6	5	5	5

Zadatak

- *Pretpostavimo da tražimo rješenje čija je frekvencija slobodne oscilacije $\phi \approx 2$.*
- *Za to ćemo koristiti inverzne iteracije.*
- *Neka je $u^{(k)}$ aproksimacija traženog svojstvenog vektora u k-toj iteraciji, tada kriterij zaustavljanja glasi*

$$\|Au^{(k)} - \varrho(u^{(k)})u^{(k)}\|_2 < 10^{-8}, \quad \varrho(u^{(k)}) = (u^{(k)})^T Au^{(k)}.$$

- *Za računanje rješenja sustava $(A - 4I)x = b$ koristite MATLAB-ovu funkciju `minres()`, sa parametrima `tol=1e-8` i `maxit=4`.*
- *MINRES metoda je iterarativna metoda iz Krylovljevih potprostora za rješavanje sustava linearnih jednadžbi sa simetričnom matricom koja u svakoj iteraciji minimizira normu reziduala.*

Algoritam (MINRES)

x_0 *zadan;*

$d_0 = r_0 = b - Ax_0;$

while (!*kriterij_zaustavljanja*){

$$\alpha_k = \frac{r_k^T A d_k}{d_k^T A^2 d_k};$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k;$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k A d_k;$$

$$\beta_{k+1} = \frac{r_{k+1}^T A^2 d_k}{d_k^T A^2 d_k};$$

$$d_{k+1} = r_{k+1} - \beta_{k+1} d_k;$$

$$k = k + 1;$$

}

Zadatak (nastavak)

- *Za svaku iteraciju nacrtajte vektor $u^{(k)}$, tako da se na x osi nalaze indeksi 4 komponenti, a na y osi su same komponente $u_i^{(k)}$.*
- *x os neka bude ograničena na raspon $[0.5, 4.5]$, a y os na $[-1, 1]$.*
- *x os označite sa 'Indeks komponente', a y os sa 'Komponenta'.*
- *Stavite naslov 'Aproksimacija svojstvenog vektora: iteracija k' na vaš graf, pri čemu je k točan broj iteracije.*
- *Nacrtajte mrežu na grafu.*
- *Svaku iteraciju zadržite 0.5 sekundi.*
- *Na kraju nacrtajte graf normi reziduala $\|Au^{(k)} - \varrho(u^{(k)})u^{(k)}\|_2$ za sve iteracije u logaritamskoj skali, i pravilno označite osi.*

Problem totalnih najmanjih kvadrata

Modeli s primjenama numeričke linearne algebre
Rizik i očekivani povrat portfelja
Disipacija topline elektroničke komponente
Orbita asteroida
Numeričko rješavanje Poissonove jednadžbe
Kreditni razred
Sistem masa s elastičnim oprugama
Problem totalnih najmanjih kvadrata
Problem dekonvolucije
Računanje gustoće podzemnih stijena
Krnja dekompozicija singularnih vrijednosti

- Za matricu $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ i vektor $b \in \mathbb{R}^m$ problem najmanjih kvadrata

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$$

možemo napisati i na sljedeći način

$$\min_{\mathrm{Im}(b+r)\subseteq \mathrm{Im}(A)} \|r\|_2, \quad \text{gdje je } r \in \mathbb{R}^m.$$

- Budući da r mora biti takav da je $\mathrm{Im}(b + r) \subseteq \mathrm{Im}(A)$, tada mora postojati $x \in \mathbb{R}^n$ takav da je $b + r = Ax$.
- Dakle, za rješenje problema je $r = Ax - b$ s minimalnom normom što smo i tvrdili.
- Na sličan način definirat ćemo problem totalnih najmanjih kvadrata.

Modeli s primjenama numeričke linearne algebre
Rizik i očekivani povrat portfelja
Disipacija topline elektroničke komponente
Orbita asteroida
Numeričko rješavanje Poissonove jednadžbe
Kreditni razred
Sistem masa s elastičnim oprugama
Problem totalnih najmanjih kvadrata
Problem dekonvolucije
Računanje gustoće podzemnih stijena
Krnja dekompozicija singularnih vrijednosti

- Neka su dani $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$, i pretpostavimo da želimo riješiti sljedeći **problem totalnih najmanjih kvadrata (TLS)**

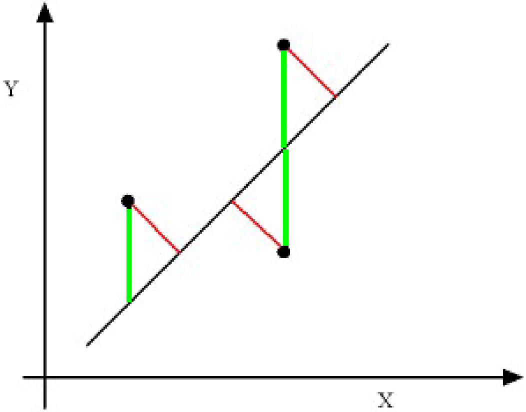
$$\min_{\mathrm{Im}(B+R) \subseteq \mathrm{Im}(A+E)} \|D \cdot [\begin{array}{cc} E & R \end{array}] \cdot T\|_F,$$

gdje su $E \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $R \in \mathbb{R}^{m \times k}$, a matrice $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_m)$ i $T = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_{n+k})$ su regularne težinske matrice.

- Ako $[E_0 \ R_0]$ rješava gornji problem, tada se bilo koji $X \in \mathbb{R}^{n \times k}$ za koji vrijedi

$$(A + E_0)X = B + R_0$$

naziva **TLS rješenje**.



Slika: Pravac kao rješenje najmanjih kvadrata i totalnih najmanjih kvadrtata.

Teorem

Neka su A, B, D i T kao u prethodnoj definiciji problema, za $m \geq n + k$. Neka

$$C = D\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} n & \;\; k \end{matrix} \end{array}$$

ima SVD dan sa $U^T C V = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+k}) = \Sigma$ gdje su U, V i Σ particionirani na sljedeći način:

$$U = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} n & \;\; k \end{matrix} \end{array}, \qquad V = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} & \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \\ \begin{matrix} n & \;\; k \end{matrix} & \end{array},$$

$$\Sigma = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \\ \begin{matrix} n & \;\; k \end{matrix} & \end{array}.$$

Teorem (nastavak)

- *Ako je $\sigma_n(C_1) > \sigma_{n+1}$, tada matrica $[E_0\ R_0]$ definirana sa*
$$D[\ E_0 \quad R_0\ ]T = -U_2\Sigma_2[\ V_{12}^T \quad V_{22}^T\ ]$$
rješava TLS problem.
- *Ako su $T_1 = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n)$ i $T_2 = \mathrm{diag}(t_{n+1}, \ldots, t_{n+k})$, tada matrica*
$$X = -T_1 V_{12} V_{22}^{-1} T_2^{-1}$$
postoji, i ona je jedinstveno rješenje jednadžbe $(A + E_0)X = B + R_0$.
- *Ako je $\sigma_n(C_1) = \sigma_{n+1}$, tada TLS problem još uvijek može imati rješenje, ali ono ne mora biti jedinstveno. U tom slučaju traži se rješenje s minimalnom normom.*

Problem dekonvolucije

Znanstveno računanje 2

Nela Bosner

Modeli s primjenama numeričke linearne algebre

Rizik i očekivani povrat portfelja

Disipacija topline elektroničke komponente

Orbita asteroida

Numeričko rješavanje Poissonove jednadžbe

Kreditni razred

Sistem masa s elastičnim oprugama

Problem totalnih najmanjih kvadrata

Problem dekonvolucije

Računanje gustoće podzemnih stijena

Krnja dekompozicija singularnih vrijednosti

- TLS se koristi kod identifikacije sustava koji ovise o vremenu i kod procjene njihovih parametara.
- Postoje mnogi različiti modeli koji se koriste za opisivanje ponašanja takvih sustava.
- Ako se proces može izmodelirati kao linearan, vremenski invarijantan, uzročan, konačnodimenzionalan sustav sa početnim stanjem nula, tada se može koristiti sljedeći model:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n} h(k)u(t-k).$$

- $h(k)$ je reakcija sustava na impuls u vremenu k.
- U nekim slučajevima $h(k)$ može se procijeniti iz promatranja ulaznih vrijednosti $u(t)$ i izlaznih vrijednosti $y(t)$ u sustav u nekom vremenskom intervalu za $t = -n, \dots, m$.

- To je takozvani *problem dekonvolucije*, i svodi se na rješavanje sustava linearnih jednadžbi $Y = UH$ za $t = 0, \ldots, m$:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0) & u(-1) & \cdots & u(-n) \\ u(1) & u(0) & \cdots & u(1-n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u(m) & u(m-1) & \cdots & u(m-n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(n) \end{bmatrix}$$

- Ako uzmemo više uzoraka ulaznih i izlaznih vrijednosti, tako da je $m > n$, postiže se bolja točnost.
- Pretpostavimo sada da su sve promatrane ulazne i izlazne vrijednosti perturbirane nezavisnim, vremensko invarijantnim bijelim šumom sa očekivanjem 0 i varijancom 1, tada se $h(k)$ računaju pomoću TLS-a.
- Primjena rješavanja problema dekonvolucije pomoću TLS-a koristi se u medicini kod renografije.

Zadatak

- *Riješite problem za konkretne podatke spremljene u datoteci*

  `model_dekonvolucija_uy.mat`

  na adresi

  `http://www.math.hr/~nela/zr2.html`

- *Radi se o ulaznim vrijednostima* $up(i)$, $i = 1, \ldots, m + n + 1$ *i izlaznim vrijednostima* $yp(j)$, $j = 1, \ldots, m + 1$ *za* $n = 18$ *i* $m = 102$.
- *Pri tome vrijedi da je* $up(i) = u(i - n - 1)$, *i* $yp(j) = y(j - 1)$.
- *Generirajte matricu* U *i vektor* Y *iz ovih podataka, i riješite problem totalnih najmanjih kvadrata za* T *i* D *identitete. Koristite MATLAB-ovu funkciju* `svd()`.
- *Prije rješavanja provjerite uvjete prethodnog teorema.*

Zadatak (nastavak)

- *Ulazne i izlazne vrijednosti up i yp dobivene su perturbiranjem odgovarajućih vrijednosti, čije je egzaktno rješenje hh spremljeno u datoteci*

  `model_dekonvolucija_hh.mat`

  na adresi

  http://www.math.hr/~nela/zr2.html
- *Na istom grafu nacrtajte izračunato i egzaktno rješenje.*
- *Što možete zaključiti?*

Računanje gustoće podzemnih stijena

- Varijacija gustoće podzemnih stijena rezultira varijacijama polja gravitacije na zemljinoj površini.
- Zbog toga, na temelju mjerenja polja gravitacije na zemljinoj površini možemo izračunati gustoće podzemnih stijena.
- Varijacija vertikalne komponente polja gravitacije $g(s)$ duž pravca s na površini povezana je sa varijacijom gustoće mase $f(t)$ duž segmenta pravca t $(0 \leq t \leq 1)$ na dubini d ispod površine pomoću Fredholmove integralne jednadžbe prvog reda

$$g(s) = \int_0^1 k(s,t) f(t) dt$$

sa jezgrom

$$k(s,t) = \frac{d}{(d^2 + (s-t)^2)^{3/2}}.$$

- Nakon diskretizacije dobivamo konačnodimenzionalni problem
$$\bar{g} = \bar{K}\bar{f} + \xi,$$
gdje su
    - $\bar{g} = [\ g_1 \quad \cdots \quad g_m\ ]^T$ veličine gravitacijske varijacije izmjerene u m točaka duž pravca na površini,
    - $\bar{f} = [\ f_1 \quad \cdots \quad f_n\ ]^T$ varijacije gustoće u n točaka duž pravca ispod površine,
    - ξ vektor grešaka mjerenja,
    - $\bar{K} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ loše uvjetovana diskretna reprezentacija Fredholmovog integralnog operatora.
- Osim rješavanja problema najmanjih kvadrata i regularizacije, ovaj problem može se još riješiti i pomoću **krnje dekompozicije singularnih vrijednosti (TSVD)**.

Krnja dekompozicija singularnih vrijednosti

Modeli s primjenama numeričke linearne algebre

Rizik i očekivani povrat portfelja

Disipacija topline elektroničke komponente

Orbita asteroida

Numeričko rješavanje Poissonove jednadžbe

Kreditni razred

Sistem masa s elastičnim oprugama

Problem totalnih najmanjih kvadrata

Problem dekonvolucije

Računanje gustoće podzemnih stijena

Krnja dekompozicija singularnih vrijednosti

- Za rješavanje loše uvjetovanih problema često se koristi krnja dekompozicija singularnih vrijednosti (TSVD), koja koristi aproksimaciju ranga $p < \min\{m, n\}$.
- Ako je $A = U\Sigma V^T$ SVD matrice A, tada je prema jednom teoremu

$$A_p = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i u_i v_i^T,$$

najbolja aproksimacija ranga p matrice A.
- Za $m \geq n$, neka su matrice $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ particionirane na sljedeći način

$$U = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} U_1 & U_2 & U_3 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} p & n-p & m-n \end{array} \end{array} \qquad V = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} V_1 & V_2 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc} p & n-p \end{array} \end{array} \qquad \Sigma = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \\ 0 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{c} p \\ n-p \\ m-n \end{array} \\ \begin{array}{cc} p & n-p \end{array} & \end{array}$$

gdje je $\sigma_p > \zeta\sigma_1$ i $\sigma_{p+1} < \zeta\sigma_1$ za neku toleranciju ζ.

- Tada je
$$A_p = U_1 \Sigma_1 V_1^T = U(:, 1:p)\Sigma(1:p, 1:p)V(:, 1:p)^T.$$
- Rješavanje problema najmanjih kvadrata svodi se na minimizaciju $\|r_{svd}\|_2^2 = \|A\bar{x} - b\|_2^2$, gdje je
$$\|r_{svd}\|_2^2 = \|\Sigma_1 V_1^T \bar{x} - U_1^T b\|_2^2 + \|\Sigma_2 V_2^T \bar{x} - U_2^T b\|_2^2 + \|U_3^T b\|_2^2,$$
što je ekvivalentno minimizaciji prva dva izraza u gornjoj jednadžbi.
- TSVD postavlja $\sigma_i = 0$ za $i = p+1, \ldots, n$ i minimizira samo prvi izraz.
- To je ekvivalentno rješavanju problema najmanjih kvadrata za matricu A_p
$$\min \|r_{tsvd}\|_2^2 = \min(\|\Sigma_1 V_1^T \tilde{x} - U_1^T b\|_2^2 + \|U_2^T b\|_2^2 + \|U_3^T b\|_2^2).$$
- Važno je odabrati pogodnu toleranciju ζ ili rang p, tako da norma reziduala i norma rješenja budu male.

- Rješenje pomoću TSVD je tada oblika

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{p} \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i = V(:, 1:p)\Sigma(1:p, 1:p)^{-1} U(:, 1:p)^T b.$$

Zadatak

- *Veličine gravitacijske varijacije izmjerene u* $m = 15$ *ekvidistantnih točaka duž pravca* $s = [0, 1]$ *na površini dane su u datoteci*

  `model_gravitacija_g.mat`

  na adresi

  http://www.math.hr/~nela/zr2.html

- *Diskretizirajte Fredholmov integralni operator za* $m = 15$ *ekvidistantnih točaka na površini i za* $n = 15$ *ekvidistantnih točaka na dubini* $d = 0.25$ *ispod točaka mjerenja na površini.*

Zadatak (nastavak)

- *Standardna devijacija grešaka mjerenja ξ je oko 0.1.*
- *Kružićima nacrtajte singularne vrijednosti matrice $\bar{K}$, i uvjerite se u brzinu njihovog opadanja.*
- *Nacrtajte grafove aproksimativnih rješenja rangova $p = 1, \ldots, 15$ i usporedite ih sa egzaktnim rješenjem koje glasi*

$$f(t) = \sin(\pi t) + 0.5 \sin(2\pi t).$$