Dizajn šipke sa željenim termičkim svojstvima

projektni zadatak iz kolegija Znanstveno računanje 2

Ilijan Kotarac

15th July 2015

1 Problem

Potrebno je dizajnirati metalnu šipku koja je izlivena od legure dva materijala: **insulatinuma** i **conductivituma**. Relativna gustoća insulatinuma u šipci dana je kao funkcija položaja duž duljine šipke, $\rho(x)$. Na početnom kraju šipke, za $x = 0$, temperatura je zadana i iznosi $850K$. Drugi kraj šipke ne smije prijeći temperaturu $375K$.

Potrebno je odrediti nepoznatu relativnu gustoću $\rho(x)$ te duljinu šipke L tako da je trošak izrade minimalan. Jedan centimetar insulatinuma košta 80$, a jedan centimetar conductivituma 30$. Ukupna cijena šipke dana je izrazom:

$$c = \int_0^L \left[8\rho(x) + 3(1 - \rho(x))\right] dx. \tag{1}$$

Distribucija temperature u šipci dana je toplinskom jednadžbom:

$$\kappa(x)u''(x) + \kappa'(x)u'(x) = 0, \tag{2}$$

gdje je u temperatura šipke na položaju x, a $\kappa(x)$ termička vodljivost šipke u točki x koja ovisi o njenom sastavu i povezana je sa gustoćom sljedećom relacijom:

$$\kappa(x) = 4\rho(x)^2 - 5\rho(x) + 2. \tag{3}$$

Pripadni rubni uvjeti glase:

$$\begin{aligned} u(0) &= 850, \\ u'(L) + 0.01u(L) &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Prvi rubni uvjet označava da se početni kraj šipke drži na temperaturi $850K$, a drugi rubni uvjet označava da se na njemu događa apsorpcija topline.

Dakle, cilj je varirajući nepoznate parametre $\rho(x)$ i L minimizirati funkciju troška (1) uz ograničenja

$$\begin{aligned} 0 \le \rho(x) \le 1 \\ 0 \le L < \infty \\ u(L) \le 375K, \end{aligned} \tag{5}$$

pri čemu je zadnji uvjet nelinearan i dobiva se izvrijednjavanjem rješenja rubnog problema (3) + (4).

2 Diskretizacija

Nepoznata funkcija ρ aproksimirana je kubičnim splineom sa s čvorova. Za to je korištena Matlabova funkcija `spline(x, y)` gdje su x i y vektori koji definiraju čvorove interpolacije.

2.1 Diskretizacija rubnog problema

Rubni problem definiran diferencijalnom jednadžbom (2) i rubnim uvjetima 4 diskretiziran je koristeći jednostavnu diskretizaciju - korištena je ekvidistantna mreža čvorova, a prva i druga derivacija aproksimirane su centralnim diferencijama. Čvorovi su dani relacijom:

$$x_i = ih, \quad h = \frac{L}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \tag{6}$$

Uz oznake $u_i = u(x_i)$, $\kappa_i = \kappa(x_i)$, $\kappa'_i = \kappa'(x_i)$ aproksimacije derivacija možemo zapisati kao:

$$\begin{aligned} u''(x_i) &\approx \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}, \\ u'(x_i) &\approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}. \end{aligned} \tag{7}$$

Uvrštavanjem (7) u (2) imamo:

$$\underbrace{(2\kappa_i - h\kappa'_i)}_{\equiv\alpha_i} u_{i-1} \underbrace{-4\kappa_i}_{\equiv\beta_i} u_i + \underbrace{(2\kappa_i + h\kappa'_i)}_{\equiv\gamma_i} u_{i+1} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n-1,$$

gdje je u_0 vrijednost definirana rubnim uvjetom 4, $u_0 = 850$. Radi preglednosti uvedene su oznake

$$\begin{aligned} \alpha_i &= 2\kappa_i - h\kappa'_i, \\ \beta_i &= -4\kappa_i, \\ \gamma_i &= 2\kappa_i + h\kappa'_i. \end{aligned}$$

Rubni uvjet za $x = L$ ćemo uključiti na način da ćemo u jednadžbu direktno uvrstiti $u'(L) = -0.01u(L)$, a nepoznatu vrijednost u_{n+1} koja se pojavljuje u centralnoj diferenciji za drugu derivaciju dobijemo iz zahtjeva na prvu derivaciju, koju također aproksimiramo centralnom podijeljenom razlikom:

$$u'(L) = -0.01u(L) \approx \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h},$$

iz čega slijedi

$$u_{n+1} = -0.02hu_n + u_{n-1}.$$

Sada za $i = n$ imamo jednadžbu:

$$2\kappa_n u_{n-1} - \left(2\kappa_n + 0.01h^2\kappa_n' + 0.02h\kappa_n\right) u_n = 0.$$

Matrično, sustav glasi:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & & & \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ & & & 2\kappa_n & -\left(2\kappa_n + 0.01h^2\kappa_n' + 0.02h\kappa_n\right) \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix}}_{u} = \underbrace{\begin{bmatrix} -850\alpha_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{b},$$

pa je aproksimacija rješenja dobivena kao

$$u = A^{-1}b.$$

3 Minimizacija

Minimizacija je provedena koristeći Matlabovu funkciju `fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon)`, gdje je `fun` funkcija čiji se minimum traži u ovisnosti o varijabilnom vektoru `x`, `x0` početni vektor, `A`, `b`, `Aeq`, `beq` definiraju linearna ograničenja i ovdje se ne koriste, `lb` je vektor donjih granica za vektor `x`, `ub` je vektor gornjih granica za vektor `x`, a nonlcon funkcija koja vraća dvije vrijednosti $c(x)$ i $ceq(x)$. Ove vrijednosti predstavljaju nelinearne uvjete na x :

$$\begin{aligned} c(x) &\leq 0, \\ ceq(x) &= 0. \end{aligned}$$

Vektor x ima $s+1$ komponentu. Prvih s komponenti definira čvorove kroz koje se interpolira kubični splajn na ekvidistantnoj mreži te se tako dobije oblik funkcije ρ. $(s+1)$. komponenta predstavlja duljinu šipke, L.

Funkcija ρ dobije se korištenjem sljedeće anonimne funkcije `rho = @(x, t) spline(linspace(0, x(s), s-1), x(1:s-1), t);` gdje je `t` vektor čvorova u kojima se izvrjednjava ρ.

Pripadna ograničenja za $\mathtt{x}$ su

$$
\begin{aligned}
lb &= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \\
ub &= \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \infty \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Korišteno je nelinearno ograničenje

$$
c(x) = \begin{bmatrix} u_n(x) - 375 \\ -\rho(x) \\ \rho(x) - 1 \end{bmatrix} \leq 0.
$$

Funkcija c računata je koristeći numeričku integraciju:

```
c = @(x) integral(@(t) 5*rho(x, t) + 3, 0, x(s));
```

Početni vektor `x0` određen je na dva načina: tako da su sve njegove komponente nasumični brojevi iz uniformne distribucije na $[0,\, 1]$ te tako da su prvih s komponenti iz distribucije na $[0,\, 1]$, a $(s+1)$. komponenta iz uniformne distribucije na $[0,\, 10]$.

4 Rezultati

Rezultati dobiveni za nekoliko početnih vrijednosti za `x0` prikazani su u Tablici 1 i na pripadnim grafovima 1 i 2.

mjerenje	#1	#2
$x_0^{(1)}$	0.2305	0.1174
$x_0^{(2)}$	0.8443	0.2967
$x_0^{(3)}$	0.1948	0.3188
$x_0^{(4)}$	0.2259	0.4242
$x_0^{(5)}$	0.1707	0.5079
$x_0^{(6)}$	0.2277	0.0855
$x_0^{(7)}$	0.4357	0.2625
$x_0^{(8)}$	0.3111	0.8010
$x_0^{(9)}$	0.9234	0.0292
$x_0^{(10)}$	0.4302	0.9289
$L_0 \equiv x_0^{(10+1)}$	0.1848	7.3033
c_{min}	14.8412	14.8412
L_{min}	2.0360	2.0360
$u(L)_{min}$	375.0000	375.0000

Table 1: Izračunate minimizacijske vrijednosti za L, c i $u(L)$ za različite početne vrijednosti vektora parametara, x.

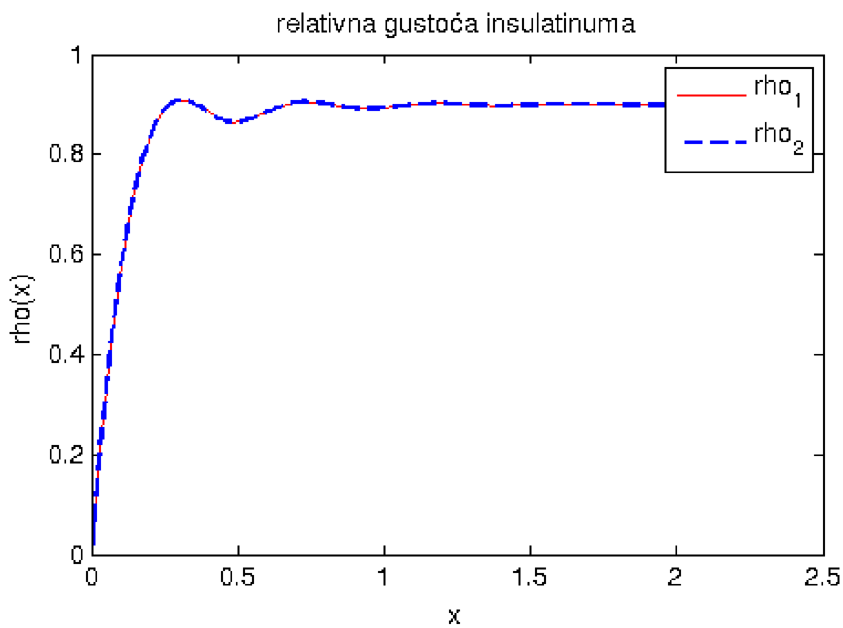

Figure 1: Relativna gustoća insulatinuma za parametre iz Tablice 1.

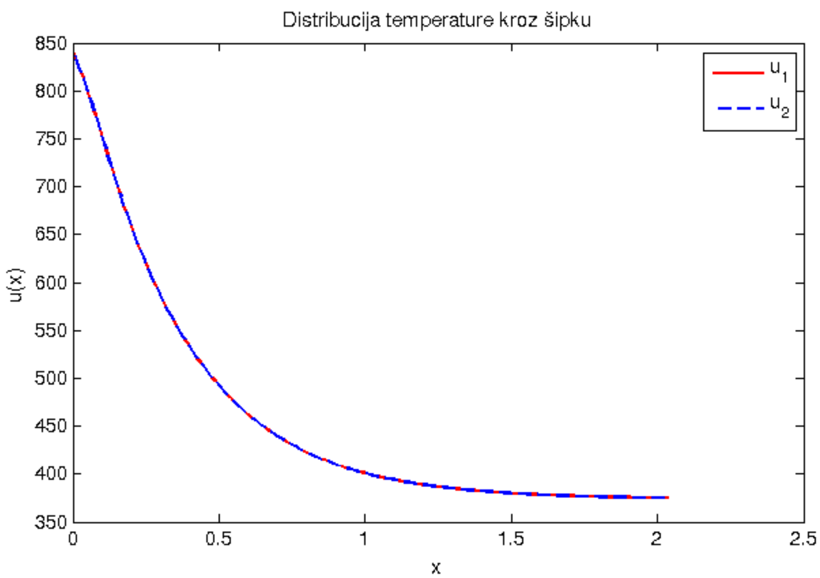

Figure 2: Distribucija temperature kroz šipku za parametre iz Tablice 1.