

Znanstveno računanje 2

5. dio vježbi

Nelinearni sustavi jednažbi

Nela Bosner

Nelinearni sustavi jednažbi:

Newtonova metoda

Znanstveno
računanje 2

Nela Bosner

Nelinearni
sustavi
jednažbi

Newtonova metoda

Zadaci

Primjeri iz primjene

Grijanje ploče sa
zaštitnim slojem

Računanje
minimuma funkcije:
gradientna metoda

Svojstva funkcije

Skica metode

Pretraživanje po
pravcu

Odabir smjera

Odabir koraka

Gradientna metoda

Zadaci

Primjeri iz primjene

Optimalni smještaj
tvornice

- Neka je dana nelinearna funkcija $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.
- Želimo naći rješenje nelinearnog sustava od n jednažbi sa n nepoznanica

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} = 0.$$

- Ako pretpostavimo da je $x = \xi$ nultočka od f , da je x_0 aproksimacija od ξ , i da je f diferencijabilna u nekoj okolini od x_0 , tada možemo primijeniti Newtonovu metodu na ovaj sustav, tako da rješenje dobijemo iterativno

$$x_{i+1} = x_i - (Df(x_i))^{-1} f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

- Newtonova metoda konvergira kvadratično, ali samo ako je početna aproksimacija x_0 dovoljno blizu traženom rješenju ξ .

- Kako bi se izbjegao problem uskog izbora početne aproksimacije koristi se **modificirana Newtonova metoda** koja je kombinacija

- Newtonove metode
- pretraživanje po pravcu — optimizacijska metoda
- metode raspolavljanja

i za koju se može dokazati globalna konvergencija za veliku klasu funkcija f .

- Definirajmo $h(x) = f(x)^T f(x) = \|f(x)\|_2^2$.
- Modifikacija algoritma se sastoji u uvođenju dodatnog parametra λ , i smjera traženja s kako bismo definirali niz

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k s_k,$$

gdje je u našem slučaju

- $s_k = d_k = (Df(x_k))^{-1} f(x_k)$, smjer iz Newtonove metode
 - a λ_k se odabire tako da minimizira funkciju $h_k(\lambda) = h(x_k - \lambda s_k)$,
 - da niz $\{h(x_k)\}$ bude strogo padajući, i da x_k konvergira minimumu funkcije h .
- Budući da je $h(x) \geq 0$ za svaki x , slijedi

$$h(\xi) = 0 \iff f(\xi) = 0.$$

Algoritam (Modificirana Newtonova metoda)

x_0 *zadan*;

$k = 0$;

while *~kriterij_zaustavljanja*

$$d_k = (Df(x_k))^{-1} f(x_k);$$

$$\gamma_k = \frac{1}{\kappa_2(Df(x_k))};$$

Definiramo $h(x) = f(x)^T f(x)$ *i* $h_k(\tau) = h(x_k - \tau d_k)$;

Nađi najmanji cijeli broj $j \geq 0$ *takav da je*

$$h_k(2^{-j}) \leq h_k(0) - 2^{-j} \frac{\gamma_k}{4} \|d_k\|_2 \|Dh(x_k)\|_2;$$

Nađi $i_{min} \in \{0, 1, \dots, j\}$ *takav da je*

$$h_k(2^{-i_{min}}) = \min_{i=0, \dots, j} h_k(2^{-i});$$

$$\lambda_k = 2^{-i_{min}};$$

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k d_k;$$

$$k = k + 1;$$

end

$$\xi \approx x_k;$$

- Iz definicije je jasno da vrijedi

$$Dh(x) = 2f(x)^T Df(x).$$

- Pri izvršavanju danog algoritma, može se dogoditi da λ_k bude jako mali, tako da korak koji se dodaje na x_k bude skoro zanemariv. U tom slučaju dobro je staviti ograničenje na λ_k odozdo, tako da se u slučaju $\lambda_k < 0.01$ postavi $\lambda_k = 0.01$.

Zadaci

Znanstveno
računanje 2

Nela Bosner

Nelinearni
sustavi
jednadžbi

Newtonova metoda

Zadaci

Primjeri iz primjene

Grijanje ploče sa
zaštitnim slojem

Računanje
minimuma funkcije:
gradijentna metoda

Svojstva funkcije

Skica metode

Pretraživanje po
pravcu

Odabir smjera

Odabir koraka

Gradijentna metoda

Zadaci

Primjeri iz primjene

Optimalni smještaj
tvornice

Zadatak

Napišite M-file funkciju `mod_newton()` koja implementira prethodno opisanu modificiranu Newtonovu metodu za sustav $f(x) = 0$. Funkcija neka ima ulazne parametre

- *pokazivač na funkciju f*
- *pokazivač na funkciju df koja implementira $Df(x)$*
- *početnu aproksimaciju x_0*

Funkcija neka ispiše broj iteracija potreban za zadovoljavanje kriterija zaustavljanja i neka vraća

- *rješenje x , takvo da je $f(x) = 0$.*

Zadatak

Svoju funkciju `mod_newton()` testirajte na sustavu

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 2 \\ e^{x_1-1} + x_2^3 - 2 \end{bmatrix} = 0,$$

za kojeg je točno rješenje jednako

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- *Usporedite rezultate sa običnom Newtonovom metodom.*
- *Za početne točke uzmite*
 - 1 $x_0 = [1.5, 2]^T,$
 - 2 $x_0 = [0.5, 0.4]^T.$

Primjeri iz primjene:

Grijanje ploče sa zaštitnim slojem

Znanstveno
računanje 2

Nela Bosner

Nelinearni
sustavi
jednadžbi

Newtonova metoda

Zadaci

Primjeri iz primjene

Grijanje ploče sa
zaštitnim slojem

Računanje
minimuma funkcije:
gradijentna metoda

Svojstva funkcije

Skica metode

Pretraživanje po
pravcu

Odabir smjera

Odabir koraka

Gradijentna metoda

Zadaci

Primjeri iz primjene

Optimalni smještaj
tvornice

Primjer

- *Zaštitni sloj ploče izložen je zračenju topline iz grijača.*
- *Temperaturu zaštitnog sloja možemo dobiti iz procesa prijenosa topline konvekcijom i zračenjem.*
- *Ako se zračenje tretira pod određenim uvjetima, tada, uz uvjet da je temperatura okoline jednaka 298°K , dobivamo sljedeći nelinearni sustav jednadžbi za nepoznanice J_g , T_g , J_{zs} i T_{zs}*

$$5.67 \cdot 10^{-8} T_{zs}^4 + 17.41 T_{zs} - J_{zs} = 5188.18$$

$$J_{zs} - 0.71 J_g + 7.46 T_{zs} = 2352.71$$

$$5.67 \cdot 10^{-8} T_g^4 + 1.865 T_g - J_g = 2250$$

$$J_g - 0.71 J_{zs} + 7.46 T_g = 11093$$

Primjer (nastavak)

gdje su

- J_g i J_{zs} *potpuno emitirano i reflektirano zračenje sa površine grijalice odnosno zaštitnog sloja,*
- T_g i T_{zs} *temperature grijalice i zaštitnog sloja izražene u °K.*

Zadatak

Riješite gornji primjer pomoću modificirane Newtonove metode, pri čemu su početne vrijednosti:

J_g	T_g	J_{zs}	T_{zs}
8000	298	5000	298

Računanje minimuma funkcije: gradijentna metoda

Znanstveno
računanje 2

Nela Bosner

Nelinearni
sustavi
jednadžbi

Newtonova metoda
Zadaci

Primjeri iz primjene

Grijanje ploče sa
zaštitnim slojem

Računanje
minimuma funkcije:
gradijentna metoda

Svojstva funkcije

Skica metode

Pretraživanje po
pravcu

Odabir smjera

Odabir koraka

Gradijentna metoda

Zadaci

Primjeri iz primjene

Optimalni smještaj
tvornice

$$f \searrow \min$$

- Imamo: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
- Tražimo: $x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$.
- Ono što ćemo naći: lokalni minimum.

Primjer

Tražimo minimum funkcije $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = x^2 + \frac{1}{4}y^2 - 2x + y + 5$$

Nelinearni
sustavi
jednadžbi

Newtonova metoda

Zadaci

Primjeri iz primjene

Grijanje ploče sa
zaštitnim slojem

**Računanje
minimuma funkcije:
gradijentna metoda**

Svojstva funkcije

Skica metode

Pretraživanje po
pravcu

Odabir smjera

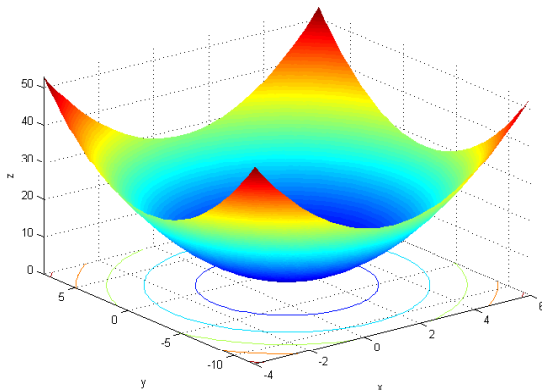
Odabir koraka

Gradijentna metoda

Zadaci

Primjeri iz primjene

Optimalni smještaj
tvornice



Slika: Graf funkcije $f(x, y) = x^2 + \frac{1}{4}y^2 - 2x + y + 5$.

Svojstva funkcije

Znanstveno
računanje 2

Nela Bosner

Nelinearni
sustavi
jednadžbi

Newtonova metoda

Zadaci

Primjeri iz primjene

Grijanje ploče sa
zaštitnim slojem

Računanje
minimuma funkcije:
gradijentna metoda

Svojstva funkcije

Skica metode

Pretraživanje po
pravcu

Odabir smjera

Odabir koraka

Gradijentna metoda

Zadaci

Primjeri iz primjene

Optimalni smještaj
tvornice

Teorem

Ako je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidno diferencijabilna funkcija (f je klase C^1) i ako ona poprima lokalni minimum u x^ , tada $\nabla f(x^*) = 0$.*

Teorem

Ako je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ klase C^2 i ako ona poprima lokalni minimum u x^ , tada $\nabla f(x^*) = 0$ i Hesseova matrica $\nabla^2 f(x^*)$ je pozitivno semidefinitna.*

Teorem

Ako je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ klase C^2 , te $\nabla f(x^) = 0$ i Hesseova matrica $\nabla^2 f(x^*)$ je pozitivno definitna, tada funkcija f poprima striktni minimum u x^* .*

Teorem

Ako je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna funkcija, tada je svaki lokalni minimum ujedno i globalni minimum.

Primjer

Funkcija $f(x, y) = x^2 + \frac{1}{4}y^2 - 2x + y + 5$ je klase C^2 :

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x - 2 \\ \frac{1}{2}y + 1 \end{bmatrix},$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Štoviše,

- *Hesseova matrica $\nabla^2 f(x, y)$ je pozitivno definitna za svaki x ,*
- *f je konveksna funkcija,*
- *iz uvjeta $\nabla f(x^*, y^*) = 0$ slijedi da se globalni minimum postiže u $(1, -2)$.*

Skica metode

Znanstveno
računanje 2

Nela Bosner

Nelinearni
sustavi
jednadžbi

Newtonova metoda

Zadaci

Primjeri iz primjene

Grijanje ploče sa
zaštitnim slojem

Računanje
minimuma funkcije:
gradijentna metoda

Svojstva funkcije

Skica metode

Pretraživanje po
pravcu

Odabir smjera

Odabir koraka

Gradijentna metoda

Zadaci

Primjeri iz primjene

Optimalni smještaj
tvornice

- Rješavamo problem $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$,
- imamo početnu aproksimaciju $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Odredit ćemo niz točaka x_0, x_1, x_2, \dots za koje je

$$f(x_0) > f(x_1) > f(x_2) > \dots$$

Algoritam (Skica iterativnog postupka)

- 1 *odaberi $x_0, i = 0$;*
- 2 *dok je $\nabla f(x_i) \neq \Theta$*
- 3 *nađi x_{i+1} takav da je $f(x_{i+1}) < f(x_i)$;*
- 4 *$i = i + 1$;*
- 5 *kraj petlje.*

- Ako je niz $\{f(x_i)\}_i$ odozdo ograničen, tada postoji

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i).$$

- Međutim, $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i$ ne mora postajati. Npr.

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^{-x} & x_i = i \\ \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = 0 & \lim_{i \rightarrow \infty} x_i \text{ ne postoji.} \end{array}$$

Da bi postojao $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i$ nužno nam je dodatno svojstvo:

Svojstvo

Ako postoji $x_0 \in \mathbb{R}^n$ takav da je skup

$$\{x \mid f(x) \leq f(x_0)\}$$

kompaktan, tada $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i$ postoji.

Pretraživanje po pravcu

Znanstveno
računanje 2

Nela Bosner

Nelinearni
sustavi
jednadžbi

Newtonova metoda

Zadaci

Primjeri iz primjene

Grijanje ploče sa
zaštitnim slojem

Računanje
minimuma funkcije:
gradijentna metoda

Svojstva funkcije

Skica metode

**Pretraživanje po
pravcu**

Odabir smjera

Odabir koraka

Gradijentna metoda

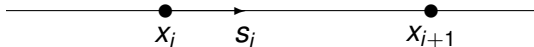
Zadaci

Primjeri iz primjene

Optimalni smještaj
tvornice

Kako odabrati x_{i+1} ?

- Svesti višedimenzionalan problem u jednodimenzionalan: **pretraživanje po pravcu**.
- Osnovna ideja pretraživanja po pravcu je:
 - 1 odaberi smjer s_i ,
 - 2 odaberi korak λ_i ,
 - 3 definiraj $x_{i+1} = x_i + \lambda_i s_i$, takav da je $f(x_{i+1}) < f(x_i)$.



Odabir smjera

Znanstveno
računanje 2

Nela Bosner

Nelinearni
sustavi
jednadžbi

Newtonova metoda

Zadaci

Primjeri iz primjene

Grijanje ploče sa
zaštitnim slojem

Računanje
minimuma funkcije:
gradijentna metoda

Svojstva funkcije

Skica metode

Pretraživanje po
pravcu

Odabir smjera

Odabir koraka

Gradijentna metoda

Zadaci

Primjeri iz primjene

Optimalni smještaj
tvornice

Za neki smjer s definirajmo funkciju $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$g(\lambda) = f(x + \lambda s).$$

Svojstva funkcije g :

- $g(0) = f(x)$,
- ako je f klase C^1 tada je i g klase C^1 ,
- ako je s smjer u kojem funkcija f lokalno pada u okolini točke x , tada i funkcija g pada u 0:

$$f(x + \lambda s) < f(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0, \text{ mali}$$
$$g'(\lambda) < 0.$$

Vrijedi:

$$g'(\lambda) = \langle \nabla f(x + \lambda s), s \rangle,$$

pa iz uvjeta $g'(0) < 0$ slijedi

$$g'(0) = \langle \nabla f(x), s \rangle < 0.$$

Definicija

Za funkciju f i točku x definiramo skup

$$D(x) = \{s \mid \langle \nabla f(x), s \rangle < 0\}.$$

*Ovaj skup nazivamo **skup smjerova silaska** a njegove elemente **smjerovi silaska**.*

Odabir koraka

Znanstveno
računanje 2

Nela Bosner

Nelinearni
sustavi
jednadžbi

Newtonova metoda
Zadaci

Primjeri iz primjene

Grijanje ploče sa
zaštitnim slojem

Računanje
minimuma funkcije:
gradijentna metoda

Svojstva funkcije

Skica metode

Pretraživanje po
pravcu

Odabir smjera

Odabir koraka

Gradijentna metoda

Zadaci

Primjeri iz primjene

Optimalni smještaj
tvornice

- veličina koraka je bitna za konvergenciju metode.
- Uvjet $f(x_{i+1}) < f(x_i)$ za odabir točke x_{i+1} nije dovoljan.
Npr.

$$f(x) = x^2 \quad x_0 = 2, x_1 = 1.5, \dots, x_i = 1 + \frac{1}{i+1},$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = 1 \quad \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 1,$$

ali niz $\{f(x_i)\}_i$ ne konvergira ka minimumu funkcije f .

Maksimalno spuštanje:

$$\lambda_i = \arg \min_{\lambda > 0} f(x_i + \lambda s_i).$$

- Maksimalno spuštanje po pravcu je problem minimizacije funkcije $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(\lambda) = f(x_i + \lambda s_i)$.
- Taj minimum računamo tako da tražimo nultočku funkcije

$$g'(\lambda) = \langle \nabla f(x_i + \lambda s_i), s_i \rangle = \nabla f(x_i + \lambda s_i)^T s_i.$$

- Izračunati ga možemo pomoću obične Newtonove metoda sa $\lambda_0 = 0$.
- Za Newtonovu metodu nam još treba i

$$g''(\lambda) = s_i^T \nabla^2 f(x_i + \lambda s_i) s_i.$$

Gradijentna metoda (metoda najbržeg silaska)

Znanstveno
računanje 2

Nela Bosner

Nelinearni
sustavi
jednadžbi

Newtonova metoda
Zadaci

Primjeri iz primjene

Grijanje ploče sa
zaštitnim slojem

Računanje
minimuma funkcije:
gradijentna metoda

Svojstva funkcije

Skica metode

Pretraživanje po
pravcu

Odabir smjera

Odabir koraka

Gradijentna metoda

Zadaci

Primjeri iz primjene

Optimalni smještaj
tvornice

Ideja

Odaberi smjer u kojem funkcija f najbrže pada.

Koji je to smjer?

Podsjetimo se: $g'(0) = \langle \nabla f(x), s \rangle$.

- Riješimo problem

$$\min_{\|s\|=1} \langle \nabla f(x_i), s \rangle.$$

- Neka je θ kut između $\nabla f(x_i)$ i s ,
- budući da je $\|s\| = 1$, tada vrijedi

$$\langle \nabla f(x_i), s \rangle = \|\nabla f(x_i)\| \cos \theta.$$

- Minimum se postiže za $\theta = \pi$, odakle je $\cos \theta = -1$, odnosno

$$s_i = -\nabla f(x_i).$$

Algoritam gradijentne metode

Znanstveno
računanje 2

Nela Bosner

Nelinearni
sustavi
jednadžbi

Newtonova metoda

Zadaci

Primjeri iz primjene

Grijanje ploče sa
zaštitnim slojem

Računanje
minimuma funkcije:
gradijentna metoda

Svojstva funkcije

Skica metode

Pretraživanje po
pravcu

Odabir smjera

Odabir koraka

Gradijentna metoda

Zadaci

Primjeri iz primjene

Optimalni smještaj
tvornice

Algoritam

- 1 *odaberi* x_0 , $i = 0$;
- 2 *dok je* $\nabla f(x_i) \neq \Theta$
- 3 $s_i = -\nabla f(x_i)$;
- 4 $\lambda_i = \arg \min_{\lambda > 0} f(x_i + \lambda s_i)$;
- 5 $x_{i+1} = x_i + \lambda_i s_i$;
- 6 $i = i + 1$;
- 7 *kraj petlje.*

Konvergencija gradijentne metode

Znanstveno
računanje 2

Nela Bosner

Nelinearni
sustavi
jednadžbi

Newtonova metoda

Zadaci

Primjeri iz primjene

Grijanje ploče sa
zaštitnim slojem

Računanje
minimuma funkcije:
gradijentna metoda

Svojstva funkcije

Skica metode

Pretraživanje po
pravcu

Odabir smjera

Odabir koraka

Gradijentna metoda

Zadaci

Primjeri iz primjene

Optimalni smještaj
tvornice

Teorem

Neka je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i neka je $x_0 \in \mathbb{R}^n$ izabran da vrijedi

- *$K := \{x \mid f(x) \leq f(x_0)\}$ je kompaktan,*
- *f je neprekidno diferencijabilna na nekom otvorenom skupu koji sadrži K .*

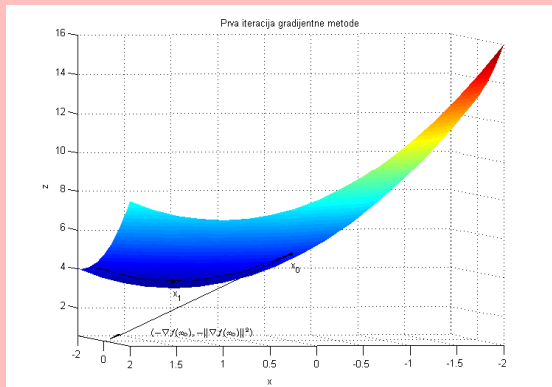
Tada za svaki niz $\{x_i\}_i$ definiran gradijentnom metodom vrijedi

- *$x_i \in K$ za sve $i = 0, 1, 2, \dots$ i $\{x_i\}_i$ ima barem jedno gomilište \bar{x} u K .*
- *Svako gomilište niza $\{x_i\}_i$ je stacionarna točka od f ; to jest $\nabla f(\bar{x}) = 0$.*

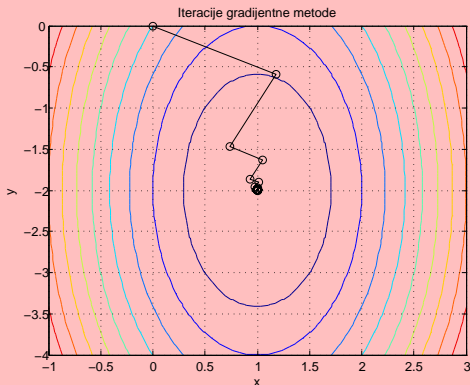
Primjer

Izvršavamo gradijentnu metodu za

$$f(x, y) = x^2 + \frac{1}{4}y^2 - 2x + y + 5, \quad i \quad x_0 = (0, 0).$$



Primjer



Slika: Iteracije gradijentne metode za funkciju $f(x, y) = x^2 + \frac{1}{4}y^2 - 2x + y + 5$ i $x_0 = (0, 0)$.

Zadaci

Zadatak

Napišite M-file funkciju `gradijentna_metoda()` koja implementira gradijentnu metodu za traženje minimuma funkcije f . Funkcija neka ima ulazne parametre

- *pokazivač na funkciju `gradf` koja predstavlja ∇f*
- *pokazivač na funkciju `hessf` koji predstavlja $\nabla^2 f$*
- *početnu aproksimaciju minimuma x_0 .*

Kriterij zaustavljanja iteracija gradijentne metode neka je

$$\|\nabla f(x_i)\|_2 \leq 10^{-10}.$$

Implementirajte i običnu Newtonovu metodu za funkciju $g'(\lambda)$, pri čemu neka je njen kriterij zaustavljanja dan sa

$$\frac{|\lambda_j - \lambda_{j-1}|}{\lambda_{j-1}} \leq 10^{-5}.$$

Zadatak (nastavak)

Funkcija neka vraća

- *x koji je minum funkcije f*
- *broj iteracija i potrebnih za dostizanje tražene točnosti.*

Primjeri iz primjene:

Optimalni smještaj tvornice

Znanstveno
računanje 2

Nela Bosner

Nelinearni
sustavi
jednadžbi

Newtonova metoda

Zadaci

Primjeri iz primjene

Grijanje ploče sa
zaštitnim slojem

Računanje
minimuma funkcije:
gradijentna metoda

Svojstva funkcije

Skica metode

Pretraživanje po
pravcu

Odabir smjera

Odabir koraka

Gradijentna metoda

Zadaci

Primjeri iz primjene

Optimalni smještaj
tvornice

Primjer

- *Pretpostavimo da se proizvođači sirovina potrebnih za neku tvornicu nalaze na koordinatama (x_1, y_1) , (x_2, y_2) i (x_3, y_3) , i da se trgovine koje prodaju proizvode te tvornice nalaze na koordinatama (x_4, y_4) i (x_5, y_5) .*
- *Pretpostavimo da su troškovi po kilometru transporta od ili do gornjih lokacije dani sa c_i , $i = 1, \dots, 5$ (ovisno o vrsti transporta).*
- *Problem optimalnog smještaj tvornice se tada svodi na pronalaženje lokacije tvornice za koju bi ukupni troškovi transporta od proizvođača do tvornice, i od tvornice do trgovina bili minimalni.*

Primjer (nastavak)

- *Dakle, minimiziramo funkciju ukupnih troškova transporta*

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^5 c_i \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}.$$

Zadatak

Primijenite svoju funkciju `gradijentna_metoda()` na ovaj primjer, pri čemu su zadani sljedeći parametri:

	1	2	3	4	5
x_i	43	13	115	119	33
y_i	167	29	119	4	17
c_i	12	10	14	9	19

Primjer (nastavak)

- *Sami izračunajte i napišite funkcije koje implementiraju ∇f i $\nabla^2 f$.*
- *Pomoću MATLAB-ove funkcije `contour()` nacrtajte nivo-skupove funkcije f na kvadratu $[-100, 100] \times [-100, 100]$, i iz dobivenog grafa odredite početnu aproksimaciju x_0 .*
- *Za konačno rješenje provjerite $\|\nabla f(x)\|_2$.*