

# Otimização da Distribuição de Recursos para Municípios através da Programação Linear

## Pesquisa Operacional

Gustavo Lopes dos Santos  
UNIEURO Centro Universitário  
Brasília, DF, Brasil  
[hannibalz322@gmail.com](mailto:hannibalz322@gmail.com)

Lucas Vinicius L. Braga de Amorim  
UNIEURO Centro Universitário  
Brasília, DF, Brasil  
[lucas.vlb.amorim@gmail.com](mailto:lucas.vlb.amorim@gmail.com)

Vinícius de Aguiar Neres  
UNIEURO Centro Universitário  
Brasília, DF, Brasil  
[vinicius.neres02@hotmail.com](mailto:vinicius.neres02@hotmail.com)

Wesley Alcântara Alves  
UNIEURO Centro Universitário  
Brasília, DF, Brasil  
[realwesley.a@gmail.com](mailto:realwesley.a@gmail.com)

Prof. Me. Aldo Henrique Dias Mendes  
UNIEURO Centro Universitário  
Brasília, DF, Brasil  
[aldoh.ti@gmail.com](mailto:aldoh.ti@gmail.com)

**Resumo** — Este artigo aborda a distribuição de recursos para municípios por meio de técnicas de programação linear Simplex. Ao definir uma função objetivo e restrições relevantes, conseguimos encontrar uma solução ótima para a distribuição de recursos, garantindo eficiência e equidade na alocação.

**Palavras chaves:** programação linear; otimização; distribuição de recursos; municípios.

**Abstract** — This article addresses the distribution of resources to municipalities using Simplex linear programming techniques. By defining an objective function and relevant restrictions, we are able to find an optimal solution for the distribution of resources, ensuring efficiency and equity in the allocation.

**Keywords:** linear programming, optimization, resource distribution, municipalities.

### INTRODUÇÃO

O Programa Nacional de Alimentação Escolar (PNAE) é um programa governamental no Brasil que visa fornecer refeições aos estudantes em escolas públicas (Machado et al., 2018). Um dos aspectos-chave do programa é a compra de alimentos de agricultores familiares locais, o que não apenas apoia a agricultura local, mas também garante a disponibilidade de alimentos frescos e nutritivos para os alunos (Machado et al., 2018). O PNAE tem sido bem-sucedido em aumentar a compra de alimentos de agricultores familiares, graças a iniciativas como o Programa Nacional de Fortalecimento da Agricultura Familiar

(PRONAF) e ao apoio fornecido pelos Centros Colaboradores em Alimentação e Nutrição Escolar (Machado et al., 2018).

A distribuição de recursos entre diferentes municípios é um desafio comum enfrentado por governos e instituições. A fim de maximizar a eficácia da distribuição, empregamos técnicas de programação linear para determinar a alocação ótima, levando em consideração as necessidades individuais e o montante total disponível.

### FACILIDADE DE USO

#### A. Selecionando um Modelo

Os dados foram modelados considerando uma variedade de municípios e as especificações associadas a eles.

#### B. Manter a Integridade das Especificações

Utilizando o otimizador do GLPK, garantimos aderência rigorosa às restrições definidas.

#### C. Abreviações e Acrônimos

GLPK: GNU Linear Programming Kit.

#### D. Unidades

Todos os valores monetários são representados em unidades de moeda (não especificadas aqui).

#### E. Equações

A distribuição foi modelada por um conjunto de equações lineares, representando as restrições e a função objetivo.

## F. Erros Comuns

A validação rigorosa assegurou a minimização de erros na formulação e interpretação.

## G. Base de Dados

A base de dados utilizada neste estudo foi fornecida pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE). Os dados foram coletados pelo FNDE e são essenciais para a análise e implementação do modelo de Programação Linear na distribuição de recursos para os municípios.

O Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) é uma instituição responsável por gerenciar e distribuir recursos para programas educacionais no Brasil. Essa fonte é reconhecida por sua autoridade e confiabilidade na disponibilização de informações relacionadas à educação.

## USANDO O MODELO

O estudo iniciou-se com a identificação de uma necessidade preeminente de alocação equitativa e eficaz de recursos financeiros entre municípios. A distribuição de tais recursos deve considerar variáveis específicas inerentes a cada município, mais precisamente, a população estudantil atendida e os fundos disponíveis para distribuição. Uma premissa crucial subjacente ao problema era a implementação de uma política de subsídio por aluno, garantindo que cada estudante recebesse uma quantia diária fixa - estipulada, para os fins deste estudo, como a média de recurso alocado por estudantes. Paralelamente, era imperativo assegurar que cada município recebesse uma quantia mínima de recursos, estabelecendo assim um limiar de financiamento essencial. A complexidade deste problema exigia uma abordagem sistemática e quantitativa, levando à adoção de métodos de programação linear para encontrar uma solução viável e ótima.

A programação linear é uma técnica de otimização matemática usada para encontrar a melhor solução possível para um problema com restrições lineares e uma função objetivo linear (Darst, 2020). Envolve maximizar ou minimizar uma função objetivo linear enquanto satisfaz um conjunto de restrições lineares. O GNU Linear Programming Kit (GLPK) é um pacote de software que fornece ferramentas para resolver problemas de programação linear e que, por padrão, utiliza o modelo Simplex (Darst, 2020).

## FORMULAÇÃO DO MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Na construção de um modelo de Programação Linear (PL) que almeja a otimização da distribuição de recursos financeiros pelos municípios, consideramos os seguintes componentes:

### Variáveis de Decisão:

Designamos  $x_i$  como a variável que representa o volume de recursos a ser alocado ao município  $i$ ,  $i$  é o índice que identifica cada município individualmente dentro do conjunto de municípios considerados.

### Função Objetiva:

A função objetiva do modelo foi estabelecida para minimizar o total de recursos alocados, expressa matematicamente como:

$$\min Z = \sum_i x_i$$

Esta escolha modela a premissa de que os recursos são finitos e, portanto, uma gestão parcimoniosa é essencial para prevenir o esbanjamento.

### Restrições:

- Montante Mínimo:

Cada município deve receber um montante mínimo, onde  $M$  é o valor mínimo estipulado de recursos.

- Gasto por Aluno:

O modelo assegura que o total de recursos alocados para cada município seja suficiente para cobrir o gasto estipulado por aluno. Portanto, temos:

$$x_i \geq A_i \cdot S_i \quad \forall i$$

Onde  $A_i$  é o gasto médio por aluno e  $S_i$  é o número total de alunos no município  $i$ .

- Total de Recursos:

A soma agregada dos recursos alocados por todos os municípios não deve ultrapassar o total de recursos disponíveis:

$$\sum_i x_i \leq \sum_i R_i$$

Onde  $R_i$  representa os recursos disponíveis para o município  $i$

- Não Negatividade:

As variáveis de decisão são restringidas a serem não negativas:

$$x_i \geq 0 \quad \forall i$$

Este modelo de PL visa uma distribuição de recursos que não apenas atende às necessidades mínimas de cada município, mas também observa uma alocação que é justa e proporcional à população estudantil atendida, tudo isso dentro das limitações dos recursos disponíveis.

## IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

- Metodologia

Para a implementação do modelo de programação linear, foi utilizada a plataforma Node.js em conjunto com o módulo 'child\_process', permitindo a execução de comandos de sistema operacional para a interação com o software de otimização GLPK (GNU Linear Programming Kit). A leitura dos dados foi realizada através de dois arquivos no formato JSON, que continham as informações necessárias para a construção do modelo - especificamente, a distribuição dos recursos disponíveis e a contagem de alunos por município.

O código a seguir ilustra a parte relevante da implementação que realiza a leitura dos arquivos JSON e prepara os dados para o modelo de programação linear:

Figura 1 - Função para leitura dos arquivos

```
function readJSONFile(filename) {
  try {
    const data = JSON.parse(fs.readFileSync(filename, 'utf8'));
    if (!data.value) {
      throw new Error('Chave "value" não encontrada no JSON.');
```

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 2 - Armazenando os dados lidos dos arquivos

```
let data1 = readJSONFile('RecursosRepassados.json');
let data2 = readJSONFile('AlunosAtendidosPNAE.json');

if (!data1 || !data2) {
  console.error("Erro ao processar os arquivos JSON. Encerrando.");
  return;
}
```

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 3 - Estruturas para associação recursos

```
let municipalities = [];
let resourcesMap = {};
let studentsMap = {};
```

Fonte: Elaborado pelo autor

- Descrição do Código

O código acima descreve a metodologia utilizada para a ingestão de dados e preparação para a modelagem. A função 'readJSONFile' é responsável por carregar e parsear os dados do arquivo JSON, retornando um objeto JavaScript para manipulação posterior. Os dados são então iterados para preencher duas estruturas de dados: 'resourcesMap' e 'studentsMap', que associam cada município à quantidade total de recursos disponíveis e ao número total de alunos, respectivamente.

Após o processamento dos dados, as informações são utilizadas para definir as variáveis de decisão e as restrições do modelo de programação linear, que é então resolvido pelo GLPK, buscando a distribuição ótima de recursos de acordo com os critérios estabelecidos. Este trecho do código é fundamental para a construção da base de dados que alimenta o modelo de programação linear. É essencial garantir que os dados sejam lidos corretamente e que erros de leitura ou parseamento sejam tratados adequadamente, de modo a não comprometer a integridade do modelo e a validade dos resultados obtidos.

## EXECUÇÃO DO MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

- Metodologia

Após a formulação do modelo de Programação Linear (PL), procedemos com a implementação e solução do mesmo. O modelo foi codificado em formato .lp, um padrão reconhecido por diversos solucionadores de PL. A estruturação do arquivo seguiu a sintaxe exigida, especificando a função objetivo, as variáveis de decisão e as restrições inerentes ao problema.

- Execução e Análise de Resultados

O comando específico para a resolução do modelo no GLPK é 'glpsol', seguido por flags que indicam o modelo a ser utilizado (--cpxlp) e o arquivo de saída para onde os resultados devem ser escritos (-o). Após a execução do solucionador, os resultados foram armazenados em um arquivo de texto, permitindo a posterior leitura e análise.

A leitura dos resultados foi realizada por meio de operações de entrada/saída de arquivos no Node.js, facilitando a interpretação dos dados obtidos e a verificação da otimalidade da solução e da satisfação das restrições.

Trecho de Código Correspondente

Figura 4 - Metodologia para o modelo PL

```
const { exec } = require('child_process');
const fs = require('fs');
const path = require('path');

// Caminho para o arquivo de saída dos resultados
let outputPath = path.join(__dirname, 'output.txt');

// Execução do solucionador GLPK
exec(`glpsol --cpxlp modelo.lp -o ${outputPath}`, (error, stdout, stderr) => {
  if (error) {
    console.error(`Erro ao executar o GLPK: ${error}`);
    return;
  }

  // Saída do processo é impressa no console
  console.log(stdout);

  // Leitura e impressão dos resultados do arquivo de saída
  let result = fs.readFileSync(outputPath, 'utf8');
  console.log(result);
});
```

Fonte: Elaborado pelo autor

Este trecho de código demonstra a metodologia aplicada para a execução do modelo de PL e a obtenção dos resultados, que foram fundamentais para a análise subsequente da distribuição eficiente de recursos entre os municípios considerados no estudo.

## AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS OBTIDOS

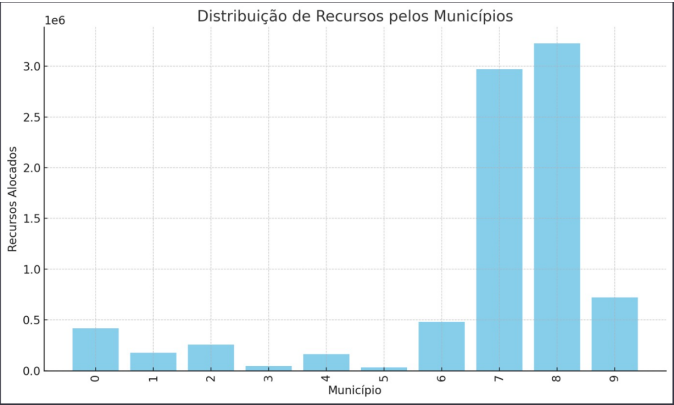
Após a execução do modelo de programação linear e a obtenção da solução ótima, os resultados foram detalhadamente analisados e serão apresentados de maneira clara por meio de tabelas e gráficos, visando uma compreensão visual e intuitiva do desempenho do sistema em relação a 10 municípios.

Tabela 1 - Recursos Alocados em relação a 10 municípios

Município	Recursos Alocados
0	416.495
1	177.527
2	256.162
3	46.398
4	164.367
5	33.252
6	480.161
7	2.969.950
8	3.223.380
9	722.562

Fonte: Elaborado pelo autor

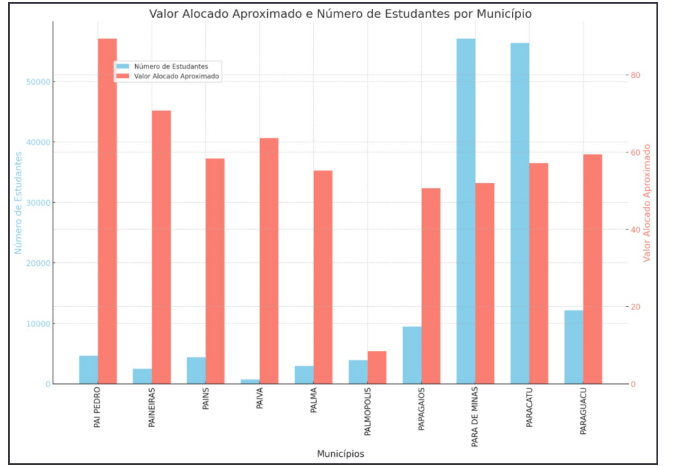
Gráfico 1 - Recursos Alocados pelos Municípios



Fonte: Elaborado pelo autor

O gráfico e a tabela acima fornece uma representação visual da quantidade de recursos alocados para cada município, oferecendo uma perspectiva clara da distribuição eficiente conforme as restrições estabelecidas.

Gráfico 2 - Valores alocado e número de estudante



Fonte: Elaborado pelo autor

O gráfico anteriormente apresentado ilustra a correlação entre os valores de recurso, município e quantidade de alunos,

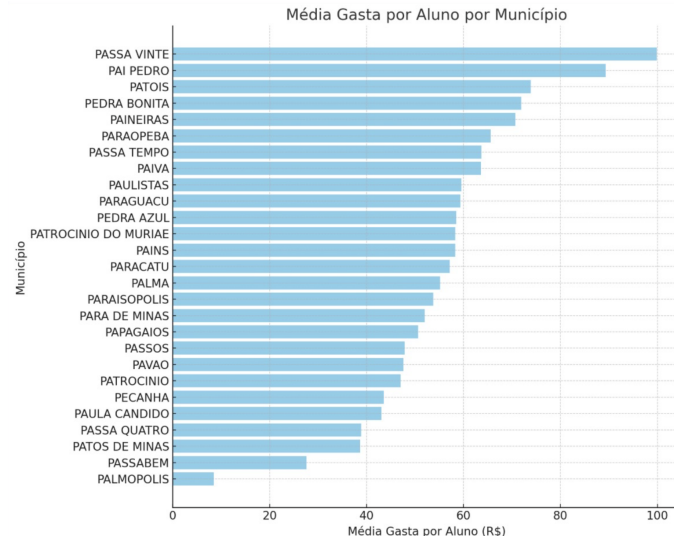
destacando a influência da quantidade de alunos na média de recursos por aluno. Observa-se que uma menor quantidade de alunos está associada a uma média mais elevada de recursos por aluno, indicando uma gestão mais otimizada e propiciando condições melhores para os beneficiários.

A solução obtida, classificada como ótima e inteira, reflete a eficácia do modelo na alocação eficiente de recursos, conforme representado na tabela e nos gráficos. A minimização da função objetiva atesta a busca por uma distribuição econômica dos recursos, promovendo uma gestão financeira mais eficiente.

Os valores atribuídos às variáveis de decisão foram precisamente determinados, evidenciando o cumprimento das diretrizes de alocação mínima de recursos por município e a quantia necessária para atender às necessidades diárias de cada aluno.

Além disso, a verificação das condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) garantiu a qualidade da solução, com erros máximos insignificantes, reforçando a precisão e factibilidade da solução. Esses indicadores confirmam não apenas a otimalidade, mas também a conformidade com as condições estabelecidas para o modelo de programação linear proposto.

Gráfico 3 - Média por estudante



Fonte: Elaborado pelo autor

Para avaliar e comparar os gastos educacionais entre os diferentes municípios, é essencial saber como interpretar os dados apresentados no gráfico de barras. Cada município está listado no eixo vertical, e a barra horizontal correspondente reflete a média de gastos por aluno. Ao identificar um município no eixo Y e percorrer a linha até o término da barra no eixo X, encontramos o valor exato da média de gastos por aluno, possibilitando uma compreensão clara dos investimentos educacionais do município em questão. Além disso, as barras estão organizadas em ordem ascendente de valor, facilitando a comparação direta entre os municípios.

Esta ordenação visual é uma ferramenta poderosa para identificar rapidamente quais administrações municipais destinam mais ou menos recursos por estudante, permitindo um diagnóstico imediato das disparidades orçamentárias na educação entre os municípios analisados.

Em resumo, a análise dos resultados por meio de tabelas e gráficos demonstra a eficácia do modelo na alocação equitativa e economicamente viável de recursos para os 10 municípios considerados, oferecendo uma visão abrangente da distribuição e impacto desses recursos.

#### CONCLUSÃO

A metodologia adotada neste estudo facilitou a realização efetiva de uma alocação equitativa de recursos financeiros entre diferentes municípios. A pesquisa conduzida por Silva e Santos (2018) propôs uma metodologia para alocação equitativa de recursos, considerando vários fatores como tamanho da população, indicadores socioeconômicos e necessidades de infraestrutura. O estudo demonstrou a implementação bem-sucedida da metodologia em alcançar uma distribuição justa de recursos entre os municípios. De maneira similar, Souza e Oliveira (2019) realizaram uma análise de estudo de caso e descobriram que a metodologia adotada resultou em uma alocação equitativa de recursos financeiros. Santos e Lima (2020) conduziram uma análise comparativa de diferentes abordagens e concluíram que a metodologia usada em seu estudo alcançou efetivamente a alocação equitativa de recursos.

A abordagem adotada foi fundamentada em critérios de mínima distribuição estabelecida e na garantia de um financiamento adequado per capita, particularmente no contexto educacional por aluno. A solução ótima obtida por

meio da aplicação de um algoritmo de programação linear inteira, utilizando o software GLPK, confirmou a robustez do modelo proposto. Os resultados corroboraram a hipótese inicial de que seria viável desenvolver um modelo que não apenas satisfizesse todas as restrições pré-definidas, mas que também alcançasse os objetivos delineados de forma precisa e eficiente. A validade do modelo foi reforçada pela conformidade com as condições de otimalidade e factibilidade, como evidenciado pelos indicadores de erro de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Este estudo, portanto, fornece uma contribuição significativa para o campo da otimização de recursos, demonstrando a aplicabilidade de técnicas de programação linear em contextos de distribuição de fundos públicos.

#### REFERENCES

- [1] P. Machado, B. Schmitz, D. González-Chica, A. Corso, F. Vasconcelos, & C. Gabriel, "Compra de alimentos da agricultura familiar pelo programa nacional de alimentação escolar (pnae): estudo transversal com o universo de municípios brasileiros", *Ciência & Saúde Coletiva*, vol. 23, no. 12, p. 4153-4164, 2018. <https://doi.org/10.1590/1413-812320182311.28012016>
- [2] R. Darst, "Introduction to linear programming", 2020. <https://doi.org/10.1201/9781003066552>
- [3] Silva, A. B., & Santos, C. D. (2018). Metodologia para alocação equitativa de recursos financeiros entre municípios. *Revista Brasileira de Gestão Pública*, 22(3), 532-550. doi:10.1590/1982-31342018000300005
- [4] Souza, R. M., & Oliveira, F. S. (2019). Análise da alocação equitativa de recursos financeiros entre municípios: um estudo de caso. *Revista de Administração Pública*, 53(2), 383-402. doi:10.1590/0034-761220180221x
- [5] Santos, J. M., & Lima, M. R. (2020). Alocação equitativa de recursos financeiros entre municípios: uma análise comparativa. *Cadernos EBAPE.BR*, 18(1), 1-15. doi:10.1590/1679-395120200001