Teorema

Hanns Silva

April 2025

1. Regla del Producto

Theorem 1.1. Sean f y g funciones derivables en x_0. La derivada del producto de dichas funciones es igual al producto de la derivada de la primera función en x_0 por la segunda función en x_0 más el producto de la derivada de la segunda función en x_0 por la primera función en x_0; es decir,

$$(fg)'(x_0) = g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Demostración. Sea f y g funciones derivables en x_0.

$$\frac{(fg)(x_0+h) - (fg)(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

Súmele y réstese en el numerador $g(x_0)f(x_0+h)$; así tenemos,

$$= \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - g(x_0)f(x_0+h) + g(x_0)f(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \frac{f(x_0+h)[g(x_0+h) - g(x_0)]}{h} + \frac{g(x_0)[f(x_0+h) - f(x_0)]}{h}$$

Por tanto,

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{(fg)(x_0+h) - (fg)(x_0)}{h}\right) =$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)[g(x_0+h) - g(x_0)]}{h} + \frac{g(x_0)[f(x_0+h) - f(x_0)]}{h}\right) =$$

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$$

Recuerde que f es derivable; por tanto, es continua, entonces;

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

Pero g es derivable por hipótesis; entonces,

$$(fg)'(x_0) = g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

□