习题

6.1 设随机变量 X 的期望 $E[X] = \mu > 0$, 方差为 σ^2, 证明对任意 $\epsilon > 0$ 有

$$P(X - \mu \leqslant -\epsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \epsilon^2}.$$

6.2 设随机变量X和Y满足$E(X) = -2$, $E(Y) = 2$, $\mathrm{Var}(X) = 1$, $Var(Y) = 4$, $\rho_{XY} = -1/2$. 利用Chebyshev不等式估计$\Pr(|X + Y| \geqslant 6)$的上界.

6.3 独立同分布随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 满足 $E[X_i] = \mu$ 和 $\mathrm{Var}(X_i) \leqslant v$. 证明对任意 $\epsilon > 0$ 有

$$\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| \geqslant \epsilon\right] \leqslant \frac{v}{n\epsilon^2} \ .$$

6.4 阐述什么是chernoff方法。

6.5 随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且满足 $X_i \sim \mathrm{Ber}(p_i)$ $(p_i > 0)$. 利用chernoff方法给出下列概率的上界

$$P\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - E[X_i]) \geqslant \epsilon\right] \quad \text{和} \quad P\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - E[X_i]) \leqslant -\epsilon\right] \ .$$

6.6 若独立同分布随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 满足 $X_i \in \{a, b\}$ $(b > a)$ 且 $P(X_i = a) = P(X_i = b) = 1/2$. 求下列概率的上界

$$P\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \frac{a+b}{2}\right) \geqslant \epsilon\right] \quad \text{和} \quad \Pr\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \frac{a+b}{2}\right) \leqslant -\epsilon\right] \ .$$

6.7 随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且满足 $X_i \sim \mathrm{Ber}(p_i)$ $(p_i > 0)$. 证明对任意 $0 < \epsilon < 1$ 有不等式

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant (1+\epsilon)\sum_{i=1}^{n} p_i\right] \leqslant e^{-\mu\epsilon^2/3} \ .$$

6.8 随机变量 $X \in [a, b]$ 且期望 $\mu = \mathbb{E}[x]$, 证明对任意 $t > 0$ 有

$$\mathbb{E}\left[e^{tx}\right] \leqslant \exp\left(\mu t + t^2(b-a)^2/8\right)$$