若事件 $A_1$ 发生, 则从第一个箱子中取走的 $m+n-1$ 个球均不是第 1 号白球, 用事件 $B_j$ 表示第 $j$ 次从第一个箱子里取走的球不是第 1 号白球, 即 $A_1 = B_1B_2\cdots B_{m+n-1}$. 根据乘法公式有

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(B_1)P(B_2|B_1)\cdots P(B_m|B_1B_2\cdots B_{m-1}) \times P(B_{m+1}B_{m+2}\cdots B_{m+n-1}|B_1B_2\cdots B_m) \\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)^m P(B_{m+1}B_{m+2}\cdots B_{m+n-1}|B_1B_2\cdots B_m) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^m \times \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

由此可知第一个箱子最后一次取走的球是白球的概率为 $(1-1/n)^m$.

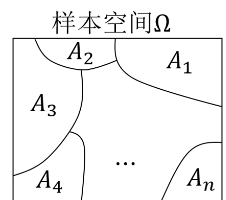
### 2.1.2 全概率公式

利用条件概率可以将一个复杂事件的概率计算问题进行简化, 这就是本节所讲的 **全概率公式**, 是概率论中最基本的公式之一. 其本质是对加法和乘法事件的综合运用: 对任意互不相容的事件 $A, B$ 有 $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$; 对任意事件 $A, B$ 满足 $P(A) > 0$ 有 $P(AB) = P(A)P(B|A)$.

首先定义样本空间的一个划分.

**定义 2.2** 若随机事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足: i) 任意两两事件是互不相容性的 (或互斥的), 即 $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$; ii) 完备性 $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i$, 则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为空间 $\Omega$ 的一个 **划分**.

特别地, 当 $n = 2$ 时有 $A_1 = \bar{A}_2$, 即 $A_1$ 与 $A_2$ 互为对立事件. 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为样本空间的一个划分, 则每次试验时事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 有且仅有一个事件发生.



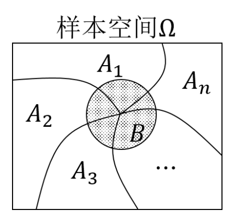

基于样本空间的划分, 下面介绍全概率公式:

**定理 2.1** 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为样本空间 $\Omega$ 的一个划分, 对任意事件 $B$ 有

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(BA_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i),$$

称之为 **全概率公式** (Law of total probability).

可以将事件 $B$ 看作某一过程的结果, 将 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 看作产生该结果的若干原因. 若 i) 每一种原因已知, 即 $P(A)$ 已知; ii) 每一种原因对结果 $B$ 的影响已知, 即 $P(B|A_k)$ 已知, 则 $P(B)$ 可计算.




**证明** 根据分配律有

$$B = B\cap\Omega = B\bigcap\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \bigcup_{i=1}^n BA_i$$

由 $A_i \cap A_j = \emptyset$ 可得 $BA_i \cap BA_j = \emptyset$, 由概率的有限可列可加性有

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^n BA_i\right) = \sum_{i=1}^n P(BA_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i).$$

**例 2.8** 同一种型号产品由三家工厂生产, 其生产的市场份额分别为 30%, 50%, 20%, 三家工厂的次品率分别为 2%, 1%, 1%. 求这批产品中任取一件是次品的概率.

**解** 用事件 $B$ 表示任取一件是次品, 事件 $A_i$ 表示取自第 $i$ 家工厂的产品 ($i \in [3]$). 于是有

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) = 1.3\%.$$

**例 2.9** 随意抛 $n$ 次硬币, 证明正面朝上的次数是偶数 (或奇数) 的概率为 $1/2$.

**证明** 用事件 $A$ 表示前 $n-1$ 次抛硬币正面朝上的次数为偶数, 其对立事件 $\bar{A}$ 表示前 $n-1$ 次抛硬币朝上的次数为奇数, 事件 $B$ 表示前 $n$ 次硬币朝上的次数为偶数. 于是有

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \frac{P(A)}{2} + \frac{P(\bar{A})}{2} = \frac{1}{2}.$$

还可以采用 **直接计算概率** 求解该问题. 若正面朝上的次数是偶数, 则随意抛 $n$ 次硬币中正面朝上的次数为偶数分别有 $\{0, 2, 4, \ldots, 2k\}$ $(2k \leqslant n)$, 根据概率公式直接计算有

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n/2} \binom{n}{2k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k} = \frac{1}{2^n} \sum_{0 \leqslant k \leqslant n/2} \binom{n}{2k} = \frac{1}{2},$$

这里使用公式 $\sum_{0 \leqslant k \leqslant n/2} \binom{n}{2k} = 2^{n-1}$.

还可以采用 **推迟决定原则** (Principle of deferred decision) 来求解该问题. 无论前 $n-1$ 次中正面朝上的次数为奇数或偶数, 前 $n$ 次正面朝上次数的奇偶性取决于最后一次, 机会各半.

**例 2.10** 假设有 $n$ 个箱子, 每个箱子里有 30 只白球和 20 只红球, 现从第一个箱子取出一个球放入第二个箱子, 第二个箱子取出一个球放入第三个箱子, 依次类推, 求从最后一个箱子取出一球是红球的概率.

**解** 用 $A_i$ 表示从第 $i$ 个箱子取出红球的事件 ($i \in [n]$), 则 $\overline{A_i}$ 表示从第 $i$ 个箱子取出白球的事件. 则有

$$P(A_1) = 2/5 \qquad \text{和} \qquad P(\overline{A_1}) = 3/5$$

根据全概率公式有

$$P(A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1}) = \frac{2}{5} \times \frac{21}{51} + \frac{3}{5} \times \frac{20}{51} = \frac{2}{5}.$$

由此可知 $P(\overline{A_2}) = 3/5$. 依次类推重复上述过程 $n-1$ 次, 最后一个箱子取出一球是红球的概率为 $2/5$.

### 2.1.3 贝叶斯公式

基于全概率公式, 我们可以介绍概率论中另一个重要的公式: **贝叶斯公式** (Bayes' law). 其研究在一种结果已发生的情况下是何种原因导致该结果, 确切的说: 观察到事件 $B$ 已经发生的条件下,

寻找导致 $B$ 发生原因的概率. 贝叶斯公式给出了相应的答案.

**定理 2.2** 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为样本空间 $\Omega$ 的一个划分, 且事件 $B$ 满足 $P(B) > 0$. 对任意 $1 \leqslant i \leqslant n$ 有

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_iB)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j)P(B|A_j)}.$$

贝叶斯公式的一种直觉解释: 将事件 $B$ 看作结果, 将 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 看作产生结果的若干种原因, 如果 i) 每一种原因发生的概率 $P(A_i)$ 已知; ii) 每一种原因 $A_i$ 对结果 $B$ 的影响已知, 即概率 $P(B|A_i)$ 已知, 则可求事件 $B$ 由第 $i$ 种原因引起的概率 $P(A_i|B)$.

贝叶斯公式中每项都有特定的名称: $\Pr(A_i)$ 被称为事件 $A_i$ 的 **先验 (prior) 概率**, 之所有称为 '先验' 是因为不考虑事件 $B$ 的任何因素; $P(B) = \sum_{j=1}^n P(A_j)P(B|A_j)$ 被称为 **证据 (evidence) 概率**; $\Pr(A_i|B)$ 被称为事件 $A_i$ 在事件 $B$ (证据) 发生的情况下的 **后验 (posterior) 概率**; $P(B|A_i)$ 被称为 **似然度 (likelihood)**. 因此贝叶斯公式可以进一步写为

$$\text{后验概率} = \frac{\text{先验概率} \times \text{似然度}}{\text{证据概率}} = \text{常量} \times \text{似然度},$$

由此可知后验概率与似然度成正比.

对贝叶斯公式, 当 $n = 2$ 时有

**推论 2.1** 对事件 $A$ 和 $B$ 且满足 $P(B) > 0$, 有

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})}.$$

**例 2.11** 设一个班级中智商高、中、低的同学各占三分之一, 若智商高、中、低的同学分别考得好成绩的概率是 90%, 70%, 50%, 求任意选一个同学考得好成绩的概率, 以及任意选择一个考得好的同学是低智商的概率.

**解** 任意选择一个同学, 用 $A_1, A_2, A_3$ 分别表示该同学具有高、中、低智商的事件, 用 $B$ 表示该同学考得好成绩的事件. 根据题意可知

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3, \quad P(B|A_1) = 0.9, \quad P(B|A_2) = 0.7, \quad P(B|A_3) = 0.5.$$

根据全概率公式可知

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) = 0.7.$$

根据贝叶斯公式可知

$$P(A_3|B) = \frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)} = \frac{0.5}{0.7} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{27}.$$

**例 2.12** 已知事件$A$为病人被诊断为肝癌, 事件$C$为病人患有肝癌, $P(A|C) = 0.95$, $P(\overline{A}|\overline{C}) = 0.9$, $P(C) = 0.0004$. 求$P(C|A)$.

上面的例子仅作为课堂练习题, 这里不再讲解.

**例 2.13 (三门问题)** 在一电视节目中, 参赛者看到三扇关闭的门, 已知一门后面是汽车, 其它两门后面是山羊, 选中什么则获得什么, 主持人知道三门后有什么. 当参赛者选定一扇门但未开启, 此时节目主持人则开启剩下有山羊的一扇门. 问题: 若参赛者允许重新选择, 是否换一扇门?

**解** 主持人知道三门后有什么, 当参赛者选择的门后是山羊时, 则主持人则选择了另一头山羊所在的门, 因此此时未打开的门则为汽车, 此时的概率为 2/3; 当参赛者选择的门后是汽车时, 主持人可随机选择一门并打开, 换门则选择山羊, 此时的概率为 1/3. 因此若不换门, 获得车的概率为 1/3; 若换门, 获得车的概率为 2/3.

与三门问题类似的是三囚徒问题, 如下

**例 2.14** 三犯人 $a$, $b$, $c$ 均被判为死刑, 法官随机赦免其中一人, 看守知道谁被赦免但不会说. 犯人 $a$ 问看守: $b$ 和 $c$ 谁会被执行死刑? 看守的策略: i) 若赦免 $b$, 则说 $c$; ii) 若赦免 $c$, 则说 $b$; iii) 若赦免 $a$, 则以 1/2 的概率说 $b$ 或 $c$. 看守回答 $a$: 犯人 $b$ 会被执行死刑. 犯人 $a$ 兴奋不已, 因为自己生存的概率为 1/2. 犯人 $a$ 将此事告诉犯人 $c$, $c$ 同样高兴, 因为他觉得自己的生存几率为 2/3. 那么谁错了?

**解** 用事件 $A$, $B$, $C$ 分别表示犯人 $a$, $b$, $c$ 被赦免, 由题意可知

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3.$$

用事件 $D$ 表示看守人说犯人 $b$ 被执行死刑, 则有

$$P(D|A) = 1/2 \quad P(D|B) = 0 \quad P(D|C) = 1.$$

由全概率公式有

$$P(D) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C) = 1/2.$$

由贝叶斯公式有

$$P(A|D) = \frac{P(A)P(D|A)}{P(D)} = \frac{1}{3} \quad P(C|D) = \frac{P(C)P(D|C)}{P(D)} = \frac{2}{3}$$

所以犯人 $a$ 的推断不正确, 犯人 $c$ 的推断正确.