第 1 章　随机事件与概率

在实际生活中往往会面对大量带有不确定性的现象或问题. 例如, 随意投掷一枚硬币, 可能正面朝上、也可能反面朝上; 当你穿过马路时, 遇见的信号灯可能是绿色、也可能是红色; 当你乘坐公交车时, 需在站台等待公交车多长的时间; 今晚的夜空能否观察到流星; 等等. 这些现象, 在一定条件下可能出现这种结果, 也可能出现那种结果, 出现的结果并不唯一, 而事先不确定哪种结果会出现, 称之为 **随机现象**, 随机现象发生的条件与结果之间具有不确定性关系.

与随机现象相对应的另一类现象, 在一定条件下相应的结果是必然发生的, 称之为 **必然现象**, 又被称为 **确定性现象**. 例如, 成熟的苹果会掉落到地上; 在标准大气压下, 水在 0°C 以下会结冰, 加热到 100°C 以上会沸腾; 平面上三角形两边之和大于第三边; 等等. 必然现象发生的条件与结果之间具有确定性关系.

随机现象发生的条件和结果之间具有不确定性联系, 无法通过确切的数学函数来刻画. 尽管在一次观察中随机现象无法确定哪种结果发生, 具有一定的偶然性; 然而在大量重复实验和观察下, 随机现象的结果却具有一定的规律性. 例如, 多次重复随机投掷一枚硬币得到的正面/反面朝上数几乎相同; 公交车的等待时间按照一定的规律; 等等. 因而随机现象具有二重属性:

- **偶然性**: 对随机现象进行一次观察, 其结果具有不确定性;
- **必然性**: 对随机现象进行大量重复观察, 其结果呈现一定的统计规律性.

概率论与数理统计是一门研究和揭示随机现象统计规律性的学科, 其应用几乎遍及所有科学技术领域、各行业生产、国民经济与生活等. 正如法国著名数学家拉普拉斯 (Laplace, 1794-1827) 所言：“对生活的大部分, 最重要的问题实际上只是概率问题”, 图灵奖得主 Y. LeCun 近期在其自传《科学之路》中指出：“历史上多数研究成果的出现是偶然事件... 所有努力都是为了提升概率”. 而对现实生活中的每个人而言: 所有的努力都是为了提高成功的概率.

1.1 随机事件及其运算

概率论与数理统计研究和揭示随机现象统计规律性的一门学科, 为研究和揭示随机现象的规律, 通常需要在相同的条件下重复进行一系列实验和观察, 称之为 **随机试验**, 简称为 **试验**. 一般用 E 或 $E_1, E_2, E_3, \ldots$ 表示随机试验, 本书所提及的试验均是随机试验.

下面给出一些例子:

E_1: 随意抛一枚硬币, 观察正面/反面朝上的情况.

E_2: 随意抛一枚骰子, 观察出现的点数.

E_3: 统计某地区一年内出生的婴儿数量.

E_4: 随机选取一盏电灯, 测试其寿命.

上述试验具有一些共同的特点：每次试验的所有可能结果已知, 如抛硬币有正面/反面朝上两种结果, 实验可以在相同的条件下重复地进行, 在实验之前不确定出现那种结果. 概况起来, 随机试验具有以下三个特点:

- **可重复**: 可在相同的条件下随机试验可重复进行;
- **多结果**: 试验的结果不唯一, 所有可能发生的结果事先明确可知;
- **不确定**: 试验前无法预测/确定哪一种结果会发生.

1.1.1 随机事件

尽管随机试验在试验前不能确定试验的结果, 但其所有可能发生的结果事先是可知的. 将随机试验 E 所有可能的结果构成的集合称为 E 的 **样本空间**, 记为 Ω. 样本空间 Ω 的每个元素, 即试验 E 的每一种结果, 称为 **样本点**, 记为 ω.

例如在前面所述的试验中,

试验 E_1 的样本空间为 $\Omega_1 = \{$正面, 反面$\}$, 样本点分别为 ω_1=正面, ω_2=反面.

试验 E_2 的样本空间为 $\Omega_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$, 样本点分别为 $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, …, $\omega_6 = 6$.

试验 E_3 的样本空间为 $\Omega_3 = \{0,1,2,\ldots\}$, 样本点为任意非负整数.

试验 E_4 的样本空间为 $\Omega_4 = \{t\colon t \geqslant 0\}$, 样本点为任意非负数.

包含有限个样本点的样本空间称为 **有限样本空间**, 如样本空间 Ω_1 和 Ω_2. 包含无限但可列多个样本点的样本空间称为 **可列样本空间**, 如样本空间 Ω_3. 有限样本空间和无限可列样本空间统称为 **离散样本空间**. 包含无限不可列个样本点的样本空间称为 **不可列样本空间**, 如样本空间 Ω_4.

在随机试验中, 通常关心具有某些特性的样本点构成的集合, 称之为 **随机事件**, 简称为 **事件**, 一般用大写字母 $A, B, C, \ldots$ 表示. 随机事件的本质是集合, 由单个或某些样本点所构成的集合, 是样本空间 Ω 的子集. 如果随机试验的结果是事件 A 中包含的元素, 则称 **事件** A **发生**.

只包含一样本点的事件称为 **基本事件**. 样本空间 Ω 包含所有样本点, 是其自身的子集, 每次试验必然发生, 因而称事件 Ω 为 **必然事件**. 空集 $\emptyset$ 不包含任意样本点, 也是样本空间的子集, 在每次试验中均不发生, 称空集 $\emptyset$ 为 **不可能事件**.

例 1.1 随机试验 E: 抛一枚骰子观察其出现的点数, 其样本空间

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}.$$

事件 A 表示抛骰子的点数为 2, 则 $A = \{2\}$ 为基本事件;
事件 B 表示抛骰子的点数为偶数, 则 $B = \{2,4,6\}$;
事件 C 表示抛骰子的点数大于 7, 则 $C = \emptyset$ 为不可能事件;
事件 D 表示抛骰子的点数小于 7, 则 $D = \Omega$ 为必然事件.

1.1.2 随机事件的关系与运算

随机事件的本质是样本空间的子集, 因此随机事件的关系与其运算可类似于集合论的关系和运算来处理. 下面的讨论默认随机试验的样本空间为 Ω, 而 A, B, A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ 表示样本空间 Ω 中的随机事件.

1) **包含事件** 若事件 A 发生必将导致事件 B 发生, 则称 **B 包含 A**, 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.
   若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称事件 A 与 B **相等**, 记为 $A = B$.

2) **事件的并** 若事件 A 和 B 中至少有一个发生所构成的事件称为 **事件 A 与 B 的并** (或 **和**) **事件**, 记为 $A \cup B$, 即
$$A \cup B = \{\omega \colon \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}.$$
   类似地, 事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 中至少有一个发生所构成的事件称为事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的并事件, 记为
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{\omega \colon \exists\, i \in [n] \text{ s.t. } \omega \in A_i\}.$$
   称 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的并事件.

3) **事件的交** 若事件 A 和 B 同时发生所构成的事件称为 **事件 A 与 B 的交** (或 **积**) **事件**, 记为 $A \cap B$ 或 AB, 即
$$A \cap B = \{\omega \colon \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}.$$
   类似地, 事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 同时发生所构成的事件称为事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的交事件, 记为
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{\omega \colon \forall i \in [n] \text{ s.t. } \omega \in A_i\}.$$
   称 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的交事件.

4) **事件的差** 若事件 A 发生而同时事件 B 不发生所构成的事件称为 **事件 A 与 B 的差**, 记为 $A - B$, 即
$$A - B = A - AB = A\bar{B} = \{\omega \colon \omega \in A \text{ 且 } \omega \notin B\}.$$

5) **对立事件** 对事件 A 而言, 所有不属于事件 A 的基本事件所构成的事件称为 **事件 A 的对立** (或 **逆**) **事件**, 记为 $\bar{A}$, 即 $\bar{A} = \Omega - A$. 容易得到 $\bar{A} \cap A = \emptyset$ 和 $\Omega = A \cup \bar{A}$.

6) **互不相容** 若事件 A 和事件 B 不能同时发生, 称事件 A 和 B 是 **互不相容** (或 **互斥**) **的**, 即
$$A \cap B = \emptyset.$$
   注意: 对立的事件是互不相容的, 但互不相容的事件并不一定是对立事件, 基本事件是两两互不相容的.

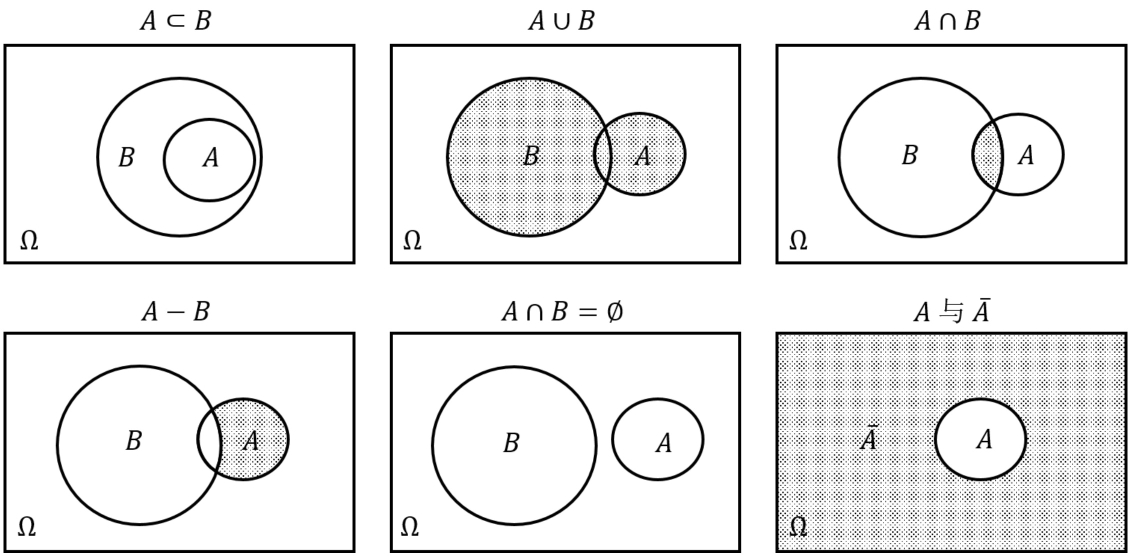

图 1.1 事件关系或运算通过 Venn 图表示, $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $\bar{A}$ 分别为阴影部分

借助集合论的 Venn 图, 事件之间的关系或运算可用图 1.1 表示. 例如, 在 $A \subset B$ 的图示中, 矩形表示样本空间 Ω, 椭圆 A 和 B 分别表示事件 A 和 B, 椭圆 B 包含椭圆 A 则表示事件 $A \subset B$; 在 $A \cup B$ 的图示中阴影部分表示并事件 $A \cup B$.

根据前面的定义, 可以发现事件还满足下面的规律, 相关证明读者可参考集合的运算.

- 交换律: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;
- 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
- 对偶律: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, 对偶律又称德 · 摩根 (De Morgen) 律.

若事件 $A \subset B$, 有 $AB = A$ 和 $A \cup B = B$. 上述四条规律对有限个或可列个事件均成立, 例如, 对偶律满足

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

例 1.2 设 A, B, C 为任意三个随机事件, 则有:

- 事件 A 与 B 同时发生, 而事件 C 不发生的事件可表示为 $AB\bar{C}$ 或 $AB - C$;
- 这三个事件中至少有一个发生的事件可表示为 $A \cup B \cup C$;
- 这三个事件中恰好有一个发生的事件可表示为 $(A\bar{B}\bar{C}) \cup (\bar{A}B\bar{C}) \cup (\bar{A}\bar{B}C)$;
- 这三个事件中至多有一个发生的事件可表示为 $(A\bar{B}\bar{C}) \cup (\bar{A}B\bar{C}) \cup (\bar{A}\bar{B}C) \cup (\bar{A}\bar{B}\bar{C})$ 或 $\overline{AB \cup AC \cup BC}$;

- 这三个事件中至少有两个发生的事件可表示为 $AB \cup AC \cup BC$;
- 这三个事件中至多有两个发生的事件可表示为 $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$;
- 这三个事件中恰好有两个发生的事件可表示为 $AB\bar{C} \cup AC\bar{B} \cup BC\bar{A}$.

例 1.3 设 A, B, C 为任意三个随机事件, 证明

$$(\bar{A} \cup B)(A \cup B)(\bar{A} \cup \bar{B})(A \cup \bar{B}) = \emptyset,$$
$$(A - B) \cup (B - C) = (A \cup B) - BC.$$

证明 根据事件的分配律有 $(\bar{A} \cup B)(A \cup B) = (A \cap \bar{A}) \cup B = B$ 以及 $(\bar{A} \cup \bar{B})(A \cup \bar{B}) = \bar{B}$, 由此可得 $(\bar{A} \cup B)(A \cup B)(\bar{A} \cup \bar{B})(A \cup \bar{B}) = B \cap \bar{B} = \emptyset$.

根据事件的差 $A - B = A\bar{B}$ 可得

$$(A - B) \cup (B - C) = (A\bar{B}) \cup (B\bar{C}).$$

根据事件的分配律和德摩根律有

$$\begin{aligned} (A \cup B) - BC &= (A \cup B)\overline{BC} = (A \cup B) \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) \\ &= (A\bar{B}) \cup (A\bar{C}) \cup (B\bar{B}) \cup (B\bar{C}) = (A\bar{B}) \cup (A\bar{C}) \cup (B\bar{C}). \end{aligned}$$

由此可知 $((A - B) \cup (B - C)) \subset ((A \cup B) - BC)$, 另一方面只需证明 $(A\bar{C}) \subset ((A\bar{B}) \cup (B\bar{C}))$, 对任意 $x \in A\bar{C}$, 有 $x \in A$ 且 $x \in \bar{C}$, 再根据 $x \in B$ 或 $x \in \bar{B}$ 有 $x \in A\bar{B}$ 或 $x \in B\bar{C}$ 成立.

事件间的关系与运算和集合间的关系与运算类似, 概率统计中事件的关系与运算可通过集合的方式进行描述, 表 1.1 简要地给出了概率论和集合论相关概率的对应关系.

表 1.1 概率论与集合论之间相关概念的对应关系

符 号	概 率 论	集 合 论
Ω	必然事件, 样本空间	全集
$\emptyset$	不可能事件	空集
ω	基本事件	元素
A	随机事件	子集
$\bar{A}$	事件 A 的对立事件	集合 A 的补集
$\omega \in A$	事件 A 发生	元素 ω 属于集合 A
$A \subset B$	事件 A 发生导致 B 发生	集合 B 包含集合 A
$A = B$	事件 A 与 B 相等	集合 A 与 B 相等
$A \cup B$	事件 A 与 B 的并	集合 A 与 B 的并集
$A \cap B$	事件 A 与 B 的交	集合 A 与 B 的交集
$A - B$	事件 A 与 B 的差	集合 A 与 B 的差集
$AB = \emptyset$	事件 A 与 B 互不相容	集合 A 与 B 无相同元素