下面介绍三种分布:

定义 8.6 (Beta 分布) 给定 $\alpha_1>0$ 和 $\alpha_2>0$, 若随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^{\alpha_1-1}(1-x)^{\alpha_2-1}}{B(\alpha_1,\alpha_2)} & x\in(0,1)\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

称 X 服从参数为 α_1 和 α_2 的 Beta 分布，记 $X\sim B(\alpha_1,\alpha_2)$.

定理 8.3 若随机变量 $X\sim B(\alpha_1,\alpha_2)$, 则有

$$E[X]=\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\quad \text{和}\quad \mathrm{Var}(X)=\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2(\alpha_1+\alpha_2+1)}.$$

证明 根据期望的定义有

$$\begin{aligned}E[X]&=\frac{1}{B(\alpha_1,\alpha_2)}\int_0^1 x\cdot x^{\alpha_1-1}(1-x)^{\alpha_2-1}dx=\frac{B(\alpha_1+1,\alpha_2)}{B(\alpha_1,\alpha_2)}=\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2},\\ E[X^2]&=\frac{1}{B(\alpha_1,\alpha_2)}\int_0^1 x^{\alpha_1+1}(1-x)^{\alpha_2-1}dx=\frac{B(\alpha_1+2,\alpha_2)}{B(\alpha_1,\alpha_2)}=\frac{\alpha_1+1}{\alpha_1+\alpha_2+1}\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2},\end{aligned}$$

由此可得

$$\mathrm{Var}(X)=E[X^2]-E[X]^2=\frac{\alpha_1(1+\alpha_1)}{(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_2+1)}-(\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2})^2=\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2(\alpha_1+\alpha_2+1)}.$$

例 8.2 设独立同分布随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 服从均匀分布 $\mathcal{U}(0,1)$, 记 $X_{(k)}$ 为其顺序统计量, 则

$$X_{(k)}\sim B(k,n-k+1).$$

证明 若随机变量 $X_i\sim U(0,1)$ $(i\in[n])$, 则当 $x\in(0,1)$ 时其分布函数 $F(x)=x$. 由此可得到第 k 个统计量 $X_{(k)}$ 的概率密度函数

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}(F(x))^{k-1}(1-F(x))^{n-k}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k}\\ &=\frac{1}{B(k,n-k+1)}x^{k-1}(1-x)^{n-k}.\end{aligned}$$

下面定义 Γ 分布:

定义 8.7 如果随机变量 X 的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$$

其中 $\alpha > 0$ 和 $\lambda > 0$, 则称随机变量 X 服从参数为 α 和 λ 的 Γ 分布, 记为$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$.

定理 8.4 若随机变量 $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, 则有 $E(X) = \alpha/\lambda$ 和 $\mathrm{Var}(X) = \alpha/\lambda^2$.

证明 根据期望的定义有

$$E[X] = \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^\alpha e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-\lambda x} dx = \alpha/\lambda.$$

以及

$$E[X^2] = \int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha+1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^2\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{\lambda^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)} x^{\alpha+1} e^{-\lambda x} dx = \alpha(\alpha+1)/\lambda^2,$$

由此可得

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \alpha(\alpha+1)/\lambda^2 - \alpha^2/\lambda^2 = \alpha/\lambda^2.$$

我们有 Γ 分布的可加性:

定理 8.5 若随机变量 $X \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda)$ 和 $Y \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$, 且 X 与 Y 相互独立, 则 $X + Y \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$.

证明 设随机变量 $Z = X + Y$, 根据独立同分布随机变量和函数的分布有随机变量 Z 的概率密度为

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^\infty f_X(x) f_Y(z-x) dx = \int_0^z \frac{\lambda^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} x^{\alpha_1-1} e^{-\lambda x} \frac{\lambda^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} (z-x)^{\alpha_2-1} e^{-\lambda(z-x)} dx \\ &= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\lambda z} \int_0^z x^{\alpha_1-1}(z-x)^{\alpha_2-1} dx \end{aligned}$$

令变量替换 $x = zt$ 有

$$\int_0^z x^{\alpha_1-1}(z-x)^{\alpha_2-1} dx = z^{\alpha_1+\alpha_2-1} \int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1} dt = z^{\alpha_1+\alpha_2-1} \mathcal{B}(\alpha_1, \alpha_2)$$

在利用 Beta 函数的性质

$$\mathcal{B}(\alpha_1, \alpha_2) = \int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$$

代入完成证明.

特别地, 若随机变量 $X \sim \Gamma(1/2, 1/2)$, 则其密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

例 8.3 若随机变量 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, 则有 $X^2 \sim \Gamma(1/2,1/2)$.

解 首先求解随机变量函数 $Y = X^2$ 的分布函数. 当 $y \leqslant 0$ 时有 $F_Y(y) = 0$; 当 $y > 0$ 时有

$$F_Y(y) = \Pr(X^2 \leqslant y) = \Pr(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

由此得到概率密度为 $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\frac{y}{2}}$. 从而得到 $X^2 \sim \Gamma(1/2,1/2)$.

下面介绍 Dirichlet 分布:

定义 8.8 给定 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in (0, +\infty)$, 若多元随机向量 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_k)$ 的密度函数为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_k) = \begin{cases} \frac{x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2-1}\cdots x_k^{\alpha_k-1}}{\mathrm{Beta}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)} & \sum_{i=1}^k x_i = 1,\ x_i > 0\ (i \in [k]), \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

则称 X 服从参数为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 的 Dirichlet 分布, 记 $X \sim \mathrm{Dir}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$.

Dirichlet 分布是 Beta 分布的一种推广, 当 $k = 2$ 时 Dirichlet 分布退化为 Beta 分布.

定理 8.6 若随机向量 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_k) \sim \mathrm{Dir}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k)$, 设 $\tilde{\alpha} = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$ 和 $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i/\tilde{\alpha}$, 则

$$E[X_i] = \tilde{\alpha}_i \qquad \text{和} \qquad Cov(X_i, X_j) = \begin{cases} \frac{\tilde{\alpha}_i(1-\tilde{\alpha}_i)}{\tilde{\alpha}+1} & i = j, \\ -\frac{\tilde{\alpha}_i\tilde{\alpha}_j}{\tilde{\alpha}+1} & i \neq j. \end{cases}$$

证明 根据期望的定义有

$$\begin{aligned} E[X_i] &= \frac{\int\int_{\sum_i x_i=1, x_i\geqslant 0} x_1^{\alpha_1-1}x_2^{\alpha_2-1}\cdots x_k^{\alpha_k-1}\cdot x_i dx_1\cdots dx_k}{\mathrm{Beta}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)} \\ &= \frac{\mathrm{Beta}(\alpha_1,\cdots,\alpha_i+1,\cdots,\alpha_k)}{\mathrm{Beta}(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_k)} = \frac{\alpha_i}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k} = \tilde{\alpha}_i. \end{aligned}$$

若 $i = j$, 则有

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_i) = E[X_i^2] - (E[X_i])^2 = \frac{Beta(\alpha_1,\cdots,\alpha_i+2,\cdots,\alpha_k)}{Beta(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_k)} - (\tilde{\alpha}_i)^2 = \frac{\tilde{\alpha}_i(1-\tilde{\alpha}_i)}{\tilde{\alpha}+1}.$$

若 $i \neq j$, 则有

$$\begin{aligned} Cov(X_i, X_j) &= E[X_iX_j] - E[X_i]E[X_j] = \frac{\mathrm{Beta}(\alpha_1,\cdots,\alpha_i+1,\cdots,\alpha_j+1,\cdots,\alpha_k)}{\mathrm{Beta}(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_j,\cdots,\alpha_k)} - \tilde{\alpha}_i\tilde{\alpha}_j \\ &= \frac{\alpha_i\alpha_j}{\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha}+1)} - \tilde{\alpha}_i\tilde{\alpha}_j = -\frac{\tilde{\alpha}_i\tilde{\alpha}_j}{\tilde{\alpha}+1}. \end{aligned}$$

8.4 正态总体抽样分布定理

8.4.1 χ^2 分布

定义 8.9 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ 的一个样本, 称 $Y = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ 为服从自由度为 n 的 χ^2 分布, 记 $Y \sim \chi^2(n)$.

根据 $X_1^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2)$ 和 Γ函数的可加性可得 $Y \sim \Gamma(n/2, 1/2)$. 于是有随机变量 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} & y > 0 \\ 0 & y \leqslant 0 \end{cases}$$

下面研究 χ^2 分布的性质:

定理 8.7 若随机变量 $X \sim \chi^2(n)$, 则 $E(X) = n$ 和 $\mathrm{Var}(X) = 2n$; 若随机变量 $X \sim \chi^2(m)$ 和 $Y \sim \chi^2(n)$ 相互独立, 则 $X + Y \sim \chi^2(m+n)$;

证明 若随机变量 $X \sim \chi^2(n)$, 则有 $X = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$, 其中 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体为 $X' \sim \mathcal{N}(0,1)$ 的一个样本. 我们有

$$\begin{aligned} E[X] &= E[X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2] = nE[X_1^2] = n, \\ \mathrm{Var}(X) &= n\mathrm{Var}(X_1^2) = n[E(X_1^4) - (E(X_1^2))^2] = n(E(X_1^4) - 1). \end{aligned}$$

计算

$$E(X_1^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{\sqrt{2\pi}} de^{-\frac{x^2}{2}} = 3\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 3$$

可得 $\mathrm{Var}(X) = 2n$.

若随机变量 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, 则

$$E(X^k) = \begin{cases} (k-1)!! & k \text{ 为偶数} \\ 0 & k \text{ 为奇数} \end{cases}$$

其中 $(2k)!! = 2k \cdot (2k-2) \cdot \cdots \cdot 2$ 和 $(2k+1)!! = (2k+1) \cdot (2k-1) \cdot \cdots \cdot 1$.

例 8.4 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自于总体 $\mathcal{N}(0,4)$ 的样本, 以及 $Y = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2$. 求 a, b 取何值时, Y 服从 χ^2 分布, 并求其自由度.

解 根据正态分布的性质有 $X_1 - 2X_2 \sim \mathcal{N}(0,20)$ 和 $3X_3 - 4X_4 \sim \mathcal{N}(0,100)$, 因此

$$\frac{X_1 - 2X_2}{2\sqrt{5}} \sim \mathcal{N}(0,1), \qquad \frac{3X_3 - 4X_4}{10} \sim \mathcal{N}(0,1),$$

所以当 $a = 1/20, b = 1/100$ 时有 $Y \sim \chi^2(2)$ 成立.

分布可加性:

- 如果 $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, a_1^2)$ 和 $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, a_2^2)$, 且 X 与 Y 独立, 那么 $X \pm Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 \pm \mu_2, a_1^2 + a_2^2)$;
- 如果 $X \sim B(n_1, p)$ 和 $Y \sim B(n_2, p)$, 且 X 与 Y 独立, 那么 $X + Y \sim B(n_1 + n_2, p)$;
- 如果 $X \sim P(\lambda_1)$ 和 $Y \sim P(\lambda_2)$, 且 X 与 Y 独立, 那么 $X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_1)$;
- 如果 $X \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda)$ 和 $Y \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$, 且 X 与 Y 独立, 那么 $X + Y \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$.
- 如果 $X \sim \chi(m)$ 和 $Y \sim \chi(n)$, 且 X 与 Y 独立, 那么 $X + Y \sim \chi(m + n)$.

8.4.2 t 分布 (student distribution)

定义 8.10 随机变量 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ 和 $Y \sim \chi^2(n)$ 相互独立, 则随机变量

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

服从自由度为 n 的 t-分布, 记 $T \sim t(n)$.

随机变量 $T \sim t(n)$ 的概率密度为

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad x \in (-\infty, +\infty).$$

由此可知 t-分布的密度函数 $f(x)$ 是偶函数. 当 $n > 1$ 为偶数时有

$$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}} = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 5 \cdot 3}{2\sqrt{n}(n-2)(n-4)\cdots 4 \cdot 2};$$

当 $n > 1$ 为奇数时有

$$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}} = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 4 \cdot 2}{\pi\sqrt{n}(n-2)(n-4)\cdots 5 \cdot 3}.$$

当 $n \to \infty$ 时, 随机变量 $T \sim t(n)$ 的概率密度

$$f(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

因此当 n 足够大时, $f(x)$ 可被近似为 $\mathcal{N}(0,1)$ 的密度函数.

8.4.3 F 分布

定义 8.11 设随机变量 $X \sim \chi^2(m)$ 和 $Y \sim \chi^2(n)$ 相互独立, 称随机变量

$$F = \frac{X/m}{Y/n}$$