第 2 章　条件概率与独立性

在很多实际问题中, 我们往往关心随机事件在一定附加信息 (条件) 下发生的概率, 即条件概率, 它是概率论中非常重要的概念之一. 条件概率可以帮助我们更好地理解复杂的随机事件, 也有助于复杂事件概率的计算.

2.1 条件概率

第一章所讨论的概率均是在整个样本空间上进行, 无任何额外的因素或条件. 很多情况下我们往往需要考虑在一定条件下某一随机事件发生的概率. 首先来看一个直观的例子.

例 2.1　随意掷一枚骰子观察点数, 用事件 B 表示观察到 3 点, 根据古典概型可知 $P(B) = 1/6$. 用事件 A 表示观察到奇数点, 则事件 $A = \{1, 3, 5\}$, 根据古典概型可知 $P(A) = 1/2$.

我们现在考虑在事件 A 发生的情况下事件 B 发生的概率, 记为 $P(B|A)$. 根据题意可知 $A = \{1, 3, 5\}$ 且每种情况等可能发生, 由此可得

$$P(B|A) = 1/3 > P(B).$$

用事件 C 表示观察到 2 点, 同理可知 $P(C) = 1/6$, 以及在事件 A 发生的情况下事件 C 发生的概率

$$P(C|A) = 0 < P(C).$$

由此可知一个随机事件发生的概率可能随着条件的改变而改变. 此外, 可以通过观察发现:

$$P(B|A) = 1/3 = P(AB)/P(A) \quad \text{和} \quad P(C|A) = 0 = P(AC)/P(A).$$

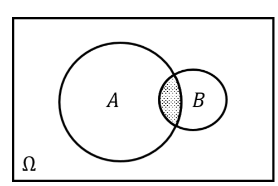
针对一般情形, 下面给出条件概率的形式化定义:

定义 2.1　设 A 和 B 为同一样本空间下的随机事件, 且 $P(A) > 0$, 称

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率, 简称 **条件概率**.

考虑事件 A 发生的条件下考虑事件 B 发生的概率, 可将 A 看作新的样本空间, 即缩减的样本空间, 由此可知条件概率的本质是缩小了有效的样本空间, 由此给出了计算条件概率的一种方法, 空间缩减法, 在



后面的例子中会具体介绍. 此外, 根据上述定义可知任何随机事件的概率可以看作必然事件下的条件概率, 即 $P(A) = P(A)/P(\Omega)$.

对任何给定的事件 A 满足 $P(A) > 0$, 其条件概率 $P(\cdot|A)$ 满足概率定义的三条公理:

1° **非负性**: 对任意事件 B 有 $P(B|A) \geqslant 0$;

2° **规范性**: 对样本空间 Ω 有 $P(\Omega|A) = 1$;

3° **可列可加性**: 若 $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ 是可列无穷个互不相容的事件, 即 $B_iB_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, 有

$$P(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n \cup \cdots) = P(B_1|A) + P(B_2|A) + \cdots + P(B_n|A) + \cdots.$$

根据概率和条件的定义可知 $P(B|A) = P(AB)/P(B) \geqslant 0$ 以及 $P(\Omega|A) = P(A\Omega)/P(A) = 1$, 由此验证公理 1° 和公理 2°. 若可列个事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$ 是两两互不相容的, 则可列个事件 $AB_1, AB_2, \cdots, AB_n, \cdots$ 也是两两互不相容的, 根据分配律有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \middle| A\right) = \frac{P\left(A(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)\right)}{P(A)} = \frac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty} AB_i)}{P(A)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(AB_i)}{P(A)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A)$$

由此可知公理 3° 成立. 由于条件概率满足概率的三条公理, 因此条件概率 $P(\cdot|A)$ 仍然是一种概率. 下面继续研究条件概率的其它性质:

性质 2.1 (容斥原理) 对随机事件 A, B_1 和 B_2 且满足 $P(A) > 0$, 有

$$P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1B_2|A).$$

证明 由条件概率的定义有

$$P(B_1 \cup B_2|A) = P((B_1 \cup B_2) \cap A)/P(A).$$

再根据随机事件的分配律和容斥原理有

$$P((B_1 \cup B_2) \cap A) = P(AB_1 \cup AB_2) = P(AB_1) + P(AB_2) - P(AB_1B_2),$$

上式两边同时除以 $P(A)$ 即可完成证明.

性质 2.2 对随机事件 A 和 B 且满足 $P(A) > 0$, 有 $P(B|A) = 1 - P(\bar{B}|A)$.

证明 根据容斥原理有

$$1 = P(\Omega|A) = P(B \cup \bar{B}|A) = P(B|A) + P(\bar{B}|A) - P(B\bar{B}|A)$$

再根据事件 B 和 $\bar{B}$ 互不相容有 $P(B\bar{B}|A) = 0$, 从而完成证明.

例 2.2 盒子中有 4 只不同的产品, 其中 3 只一等品, 1 只二等品. 从盒子中不放回随机取两次产品. 用 A 表示第一次拿到一等品的事件, B 表示第二次取到一等品的事件, 求条件概率 $P(B|A)$.

解 将盒子中 3 只一等产品分别编号为 $1, 2, 3$, 二等品编号4. 用 i 和 j 分别表示第一、二次抽取的产品的编号, 由此可得

$$\Omega = \{(i,j)\colon i \neq j, i,j \in [4]\}, \qquad A = \{(i,j)\colon i \neq j, i \neq 4\},$$
$$B = \{(i,j)\colon i \neq j, j \neq 4\}, \qquad AB = \{(i,j), i \neq j, i,j \in [3]\}.$$

计算可得 $|\Omega| = 12$, $|A| = 9$, $|B| = 9$ 以及 $AB = 6$. 根据古典概型有

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{4}, \quad P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}.$$

也可以采用 **样本空间缩减法** 来求解此问题: 当事件 A 发生后, 剩下 2 只一等品, 1 只二等品, 因此直接得到 $P(B|A) = 2/3$.

例 2.3 随机掷两次骰子, 已知第一次掷 6 点, 求两次点数之和不小于 10 的概率.

解 用 i 和 j 分别表示第一、二次掷骰子的点数, 由此可得样本空间 $\Omega = \{(i,j)\colon i,j \in [6]\}$, 用 $A = \{(6,j)\colon j \in [6]\}$ 表示第一次掷 6 点的事件, 用 B 表示两次点数之和小于 10 的事件, 则有

$$A = \{(6,j)\colon j \in [6]\} \quad \text{和} \quad B = \{(i,j)\colon i + j \geqslant 10\}$$

于是有事件 $AB = \{(6,j)\colon j \in \{4,5,6\}\}$, 从而得到 $P(B|A) = P(AB)/P(A) = 1/2$.

也可以采用 **样本空间缩减法** 来求解此问题: 在第一次掷 6 点的条件下, 第二次掷骰子的样本空间 $\Omega' = \{1, 2, \cdots, 6\}$, 事件 $B = \{\text{两次点数之和} \geqslant 10\} = \{4, 5, 6\}$, 于是有 $P(B|A) = 1/2$.

2.1.1 乘法公式

对随机事件 A 和 B 且满足 $P(A) > 0$, 根据条件概率的定义可知

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

将上式进一步推广, 根据条件概率的定义有下面的乘法公式:

性质 2.3 对随机事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 且满足 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0$, 有

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

例 2.4 假设一批灯泡有 100 只, 其中有次品 10 只, 其余为正品. 不放回抽取地每次抽取一只, 求第三次才是正品的概率.

解 用 A_i 表示第 i 次抽到正品的事件 ($i \in [3]$), 事件 B 表示第 3 次才抽到的正品, 则有 $B=\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$. 根据乘法公式有

$$P(B)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\ A_3)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)=\frac{10}{100}\times\frac{9}{99}\times\frac{90}{98}=\frac{9}{1078}.$$

例 2.5 设 n 把钥匙中只有一把能打开门. 不放回随机取出一把开门, 求第 k 次打开门的概率.

解 用 A_i 表示第 i 次没有打开门的事件, 则第 k 次打开门的事件可表示为 $A_1A_2\cdots A_{k-1}\bar{A}_k$, 根据乘法公式有

$$\begin{aligned}
&P(A_1A_2\cdots A_{k-1}\bar{A}_k)\\
&= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_{k-1}|A_1\cdots A_{k-2})P(\bar{A}_k|A_1A_2\cdots A_k)\\
&= \frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\cdots\times\frac{n-(k-1)}{n-(k-2)}\times\frac{1}{n-(k-1)}=\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

我们也可以根据 **抽签原理** 来求解该问题: 第 k 次打开门的概率与 k 无关, 每次打开门的概率相同, 共 n 把钥匙, 因此第 k 次打开门的概率为 $1/n$.

例 2.6 (匹配问题) 假设有 n 对夫妻参加活动, 被随机分成 n 组, 每组一男一女, 求 n 对夫妻恰好两两被分到一组的概率.

解 用 A_i 表示第 i 对夫妻被分到同一组的事件, 则 n 对夫妻恰好两两被分到一组的事件可表示为 $A_1A_2\cdots A_n$. 根据乘法公式有

$$\begin{aligned}
&P(A_1A_2\cdots A_n)\\
&= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})\\
&= \frac{1}{n}\times\frac{1}{n-1}\times\cdots\times\frac{1}{1}=\frac{1}{n!}.
\end{aligned}$$

例 2.7 第一个箱子里有 n 个不同的白球, 第二个箱子里有有 m 个不同的红球, 从第一个箱子任意取走一球, 再从第二个箱子里任意取走一球放入第一个箱子, 依次进行, 直至第一、第二个箱子都为空, 求第一个箱子最后一次取走的球是白球的概率.

解 假设第一个箱子里的白球分别标号为 $1,2,\cdots,n$, 用 A_i 表示第一个箱子最后取走的是第 i 号白球的事件. 由此可知事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的, 且第一个箱子最后一次取走的球是白球的事件可表示为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$, 根据事件的对称性可得其概率为

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=nP(A_1).$$