- 当 $z \leqslant 0$ 时有 $f_Z(z) = 0$;
- 当 $0 \leqslant z \leqslant 1$ 时有 $f_Z(z) = \int_0^z e^{-(z-x)}dx = e^{-z}(e^z - 1) = 1 - e^z$;
- 当 $z \geqslant 1$时有 $f_Z(z) = \int_0^1 e^{-(z-x)}dx = e^{-z}(e^1 - 1) = (e-1)e^{-z}$.

5.4.3 随机变量的乘/除法分布

定理 5.14 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, 则随机变量 $Z = XY$ 的概率密度为

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f(x, \frac{z}{x})dx,$$

随机变量 $Z = Y/X$ 的概率密度为

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, xz)dx.$$

证明 这里给出随机变量 $Z = Y/X$ 的概率密度详细证明, 同理给出 $Z = XY$ 的概率密度. 首先考虑分布函数

$$\begin{aligned}
F_{Y/X}(z) &= P(Y/X \leqslant z) = \int\int_{y/x \leqslant z} f(x, y)dxdy \\
&= \int\int_{x<0, y \geqslant zx} f(x, y)dxdy + \int\int_{x>0, y \leqslant zx} f(x, y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{0} dx \int_{zx}^{+\infty} f(x, y)dy + \int_{0}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{xz} f(x, y)dy.
\end{aligned}$$

变量替换 $t = y/x$ 有

$$\begin{aligned}
F_{Y/X}(z) &= \int_{-\infty}^{0} dx \int_{z}^{-\infty} xf(x, tx)dt + \int_{0}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z} xf(x, tx)dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{z} (-x)f(x, tx)dtdx + \int_{0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z} xf(x, tx)dtdx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z} |x|f(x, tx)dtdx = \int_{-\infty}^{z} dt \int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x, tx)dx
\end{aligned}$$

求导可得概率密度函数.

5.4.4 随机变量的联合分布函数

已知随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$, 设 (X, Y) 的函数

$$U = u(X, Y) \quad V = v(X, Y)$$

如何求 (U, V) 的联合分布, 有如下结论:

定理 5.15 若 $U=u(X,Y)$ 和 $V=v(X,Y)$ 有连续偏导, 且存在反函数

$$x=x(u,v) \quad y=y(u,v),$$

则 (U,V) 的联合密度为

$$f_{UV}(u,v)=f_{XY}(x(u,v),y(u,v))|J|$$

其中 J 为变换的雅可比行列式, 即

$$|J|=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1}=\left|\begin{array}{cc}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{array}\right|^{-1}.$$

上述结论可推广到一般的 n 维随机变量.

5.5 多维随机变量的数学特征

5.5.1 多维随机变量的期望

定理 5.16 设二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布列为 $p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)$, 则随机变量 $Z=g(X,Y)$ 的期望为

$$E[Z]=E[g(X,Y)]=\sum_{i,j}g(x_i,y_j)p_{ij};$$

设二维连续随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$, 则随机变量 $Z=g(X,Y)$ 的期望为

$$E[Z]=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy.$$

例 5.15 设随机变量 $X\sim\mathcal{N}(0,1)$ 和 $Y\sim\mathcal{N}(0,1)$ 相互独立, 求 $E[\max(X,Y)]$.

解 根据独立性定义可得随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

于是得到

$$\begin{aligned}E[\max(X,Y)] &= \int\int_{D_1}xf(x,y)dxdy+\int\int_{D_2}yf(x,y)dxdy\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{y}^{+\infty}xf(x,y)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{x}^{+\infty}yf(x,y)dy\\ &= 2\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{y}^{+\infty}xf(x,y)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{y}^{+\infty}xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dx\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\end{aligned}$$

最后一个等式成立是因为$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi}$.

例 5.16 在长度为 1 米的线段上任取两点 X, Y, 求 $E[\min(X,Y)], E[|X-Y|]$.

定理 5.17 对任意随机变量 X, Y 和常数 a, b, 有

$$E[aX+bY] = aE[X] + bE[Y];$$

对独立随机变量 X 和 Y, 以及任意函数 h, g, 有

$$E[XY] = E[X]E[Y] \quad \text{和} \quad E[h(X)g(Y)] = E[h(X)]E[g(Y)];$$

对任意随机变量 X 和 Y, 有 Cauchy-Schwartz 不等式

$$E[XY] \leqslant \sqrt{E[X^2]E[Y^2]}.$$

证明 设随机变量 X, Y 的联合概率密度为 $f(x,y)$, 则

$$\begin{aligned} E[aX+bY] &= \int\int (ax+by)f(x,y)dxdy \\ &= a\int\int xf(x,y)dxdy + b\int\int yf(x,y)dxdy = aE(X) + bE(Y). \end{aligned}$$

若随机变量 X 与 Y 独立, 则有

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int\int xyf(x,y)dxdy = \int\int xf_X(x)yf_Y(y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy = E(X)E(Y). \end{aligned}$$

对任意随机变量 X 与Y, 以及对任意 $t \in \mathbb{R}$ 有 $E[(X+tY)^2] \geqslant 0$ 成立, 即任意 $t \in \mathbb{R}$,

$$t^2E[Y^2] + E[X^2] + 2tE[XY] \geqslant 0.$$

因此有 $\Delta = 4[E(XY)]^2 - 4E[X^2]E[Y^2] \leqslant 0$, 即 $E(XY) \leqslant \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$.

5.5.2 协方差

定理 5.18 对任意随机变量 X 与 Y 有

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2E[(X-E(X))(Y-E(Y))].$$

特别地, 当 X 与 Y 独立时有

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y).$$

证明 令 $Z=X+Y$, 有

$$\begin{aligned}Var(Z) &= E[(Z-EZ)^2]=E[(X-EX+Y-EY)^2]\\ &= E(X-EX)^2+E(Y-EY)^2+2E[(X-EX)(Y-EY)]\\ &= Var(X)+Var(Y)+2E[(X-EX)(Y-EY)].\end{aligned}$$

若 X 与 Y 独立, 则 $2E[(X-EX)(Y-EY)]=0$, 所以 $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$.

定义 5.12 定义随机变量 X 和 Y 的协方差为

$$Cov(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=E(XY)-E(X)E(Y).$$

根据协方差定义和定理 5.18 有

$$Cov(X,X)=Var(X) \quad \text{和} \quad Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y).$$

下面研究协方差的性质.

性质 5.1 对任意随机变量 X,Y 和常数 c, 有

$$Cov(X,Y)=Cov(Y,X) \quad \text{和} \quad Cov(X,c)=0.$$

性质 5.2 对任意常数 a 和 b, 随机变量 X 和 Y, 有

$$Cov(aX,bY)=abCov(X,Y) \quad \text{和} \quad Cov(X+a,Y+b)=Cov(X,Y).$$

证明 根据协方差的定义有

$$\begin{aligned}Cov(aX,bY) &= E[(aX-E(aX))(bY-E(bY))]=abE[(X-E(X))(Y-E(Y))];\\ Cov(X+a,Y+b) &= E[(X+a-E(X+a))(Y+b-E(Y+b))]=E[(X-E(X))(Y-E(Y))].\end{aligned}$$

性质 5.3 对任意随机变量 X_1,X_2,Y, 有

$$Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y).$$

证明 我们有

$$\begin{aligned}&Cov(X_1+X_2,Y)=E[(X_1+X_2-E(X_1)-E(X_2))(Y-E(Y))]\\ &= E[(X_1-E(X_1))(Y-E(Y))]+E[(X_2-E(X_2))(Y-EY)]=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y).\end{aligned}$$

由此性质可进一步得到: 对随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$和$Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$, 有

$$Cov\left(\sum_i^n X_i, \sum_j^m Y_j\right) = \sum_i^n \sum_j^m Cov(X_i, Y_j),$$

以及进一步有

$$Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = Cov\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) + 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j).$$

性质 5.4 若随机变量 X 与 Y 独立, 则有 $Cov(X, Y) = 0$; 但反之不成立.

证明 若 X 与 Y 独立, 则

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E[X - E(X)]E[Y - E(Y)] = 0.$$

反之不成立, 例如随机变量 X 的分布列为

X	-1	0	1
P_i	$1/3$	$1/3$	$1/3$

当 $X \neq 0$ 时随机变量 $Y = 0$, 否则$Y = 1$, 根据联合分布列可知则 X与Y 不独立, 但此时有

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E[XY] - E(X)E(Y) = 0.$$

性质 5.5 对任意随机变量 X 与 Y 有

$$(Cov(X, Y))^2 \leqslant Var(X)Var(Y)$$

等号成立的充要条件是 $Y = aX + b$ (即 X 与 Y 之间存在线性关系).

证明 由 Cauchy-Schwartz 不等式有

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\ &\leqslant \sqrt{E[(X - E(X))^2]E[(Y - E(Y))^2]} = \sqrt{Var(X)Var(Y)}. \end{aligned}$$

下面证明等号成立的充要条件. 若 $Y = aX + b$, 则

$$Cov(X, Y) = Cov(X, aX + b) = aVar(X), \quad Var(Y) = a^2 Var(X),$$

所以

$$Cov^2(X,Y) = a^2Var^2(X) = Var(X)a^2Var(X) = Var(X)Var(Y).$$

另一方面, 若 $(Cov(X,Y))^2 = Var(X)Var(Y)$ 则有

$$(E[(X-EX)(Y-EY)])^2 = E(X-EX)^2E(Y-EY)^2,$$

设

$$\begin{aligned} f(t) &= E[t(X-EX)-(Y-EY)]^2 \\ &= t^2E[X-E(X)]^2 - 2tE[(X-E(X))(Y-E(Y))] + E[Y-E(Y)]^2 \end{aligned}$$

根据一元二次方程的性质 $\Delta = 4(E[(X-EX)(Y-EY)])^2 - 4E(X-EX)^2E(Y-EY)^2 = 0$ 可得方程 $f(t) = 0$恰有一重根 t_0. 由此得到

$$f(t_0) = 0 \equiv E[(t_0(X-EX)-(Y-EY))^2]$$

根据 $(t_0(X-EX)-(Y-EY))^2 \geqslant 0$ 可得 $Y = t_0(X-E(X)) + E(Y) = aX + b$.

例 5.17 随机变量 X 与 Y 独立, 且 $Var(X) = 6$ 和 $Var(Y) = 3$, 求 $Var(2X \pm Y)$.

例 5.18 随机变量 $X \sim P(2)$ 和 $Y \sim \mathcal{N}(-2,4)$, 且 X 与 Y 独立, 则$E[(X-Y)^2]$.

根据性质 5.5可知

$$\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \leqslant 1.$$

等号成立的充要条件是 X 与 Y 存在线性相关. 上式一定程度上反应了随机变量 X 和 Y 的线性相关程度, 由此引入一个新概念: 相关系数.

定义 5.13 设 X 和 Y 为二维随机变量, 如果 $Var(X), Var(Y)$ 存在且不为 0, 则称

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

为 X 与 Y 的相关系数, 简记 ρ.

关于相关系数, 我们需要注意:

- 使用相关系数而不是 $Cov(X,Y)$, 主要是规范 $|\rho_{XY}| \leqslant 1$, 而 $Cov(X,Y)$ 受数值大小影响;
- 相关系数 $|\rho_{XY}| \leqslant 1$: 若 $\rho > 0$, X 与 Y 正相关; 若 $\rho < 0$, X 与 Y 负相关; $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件为 X 与 Y 有线性关系 $Y = aX + b$. 本质上 ρ_{XY} 刻画了 X, Y 的线性相关程度, 又称为“线性相关系数”;