概率论与数理统计

Problem Set 4

院系: 人工智能学院

姓名: 赵思衡

学号: 201300024

班级: 人工智能 20 级 2 班

邮箱: 201300024@smail.nju.edu.cn

时间: 2021 年 10 月 11 日

目录

一、 3.1

Proof : $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
$E[X]=\sum_{k=1}^{n}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}=np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}=np$
$E[X^2]=\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}+\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=n(n-1)p^2\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}p^{k-2}(1-p)^{n-k}+np=n^2p^2-np^2+np$
$Var[X]=E[X^2]-E^2[X]=n^2p^2-np^2+np-n^2p^2=np(1-p)$

二、 3.2

Proof : $P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$
$E[X]=\sum_{k=1}^{\infty}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}p$
$\because \frac{1}{1-x}=\sum_{k=1}^{\infty}x^k \therefore \frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}$
$\therefore \frac{1}{p^2}=\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1} \therefore E[X]=\frac{1}{p}$
$E[X^2]=\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^{k-1}$
$\because \frac{1}{1-x}=\sum_{k=1}^{\infty}x^k \therefore \frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}$
$\therefore \frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}kx^k \therefore \frac{x+1}{(1-x)^3}=\sum_{k=1}^{\infty}k^2x^{k-1}$
$\therefore \frac{2-p}{p^3}=\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^{k-1} \therefore E[X^2]=\frac{2-p}{p^2}$
$\therefore Var[X]=E[X^2]-E^2[X]=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}$

三、 3.3

Proof : $P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r} \qquad \sum_{k=r}^{\infty}\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}=1$
$E[X]=\sum_{k=r}^{\infty}kP(X=k)=\sum_{k=r}^{\infty}k\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}=r\sum_{k=r}^{\infty}\binom{k}{r}p^r(1-p)^{k-r}=\frac{r}{p}\sum_{k+1=r+1}^{\infty}\binom{k+1-1}{r+1-1}p^{r+1}(1-p)^{(k+1)-(r+1)}=\frac{r}{p}$
$E[X^2]=\sum_{k=r}^{\infty}k^2\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}=\sum_{k=r}^{\infty}(k^2+k)\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}-\sum_{k=r}^{\infty}k\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}=(r+1)r\sum_{k=r}^{\infty}\binom{k+1}{r+1}p^r(1-p)^{k-r}-\frac{r}{p}=\frac{(r+1)r}{p^2}\sum_{k=r}^{\infty}\binom{k+2-1}{r+2-1}p^{r+2}(1-p)^{(k+2)-(r+2)}-\frac{r}{p}=\frac{r^2+r}{p^2}-\frac{r}{p}$
$Var[X]=E[X^2]-E^2[X]=\frac{r^2+r}{p^2}-\frac{r}{p}-\frac{r^2}{p^2}=\frac{r(1-p)}{p^2}$

四、 3.4

Proof : $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $E[X]=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}=\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda$
$E[X^2]=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}(k^2-k)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}+\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-2)!}e^{-\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda$
$\therefore Var[X]=E[X^2]-E^2[X]=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$

五、 3.5

Solution : 每次随机扩展一个叶结点，设该叶结点的深度为 d_i，则其对总叶结点深度和的贡献为 $(d_i+1)\times 2-d_i=d_i+2$。
也就是:

$$f[i]=\frac{f[k-1]*(k-1)+f[k-1]+2}{k}$$

意思就是原来 $k-1$ 个节点的平均深度，乘上 $(k-1)$ 变成深度和，然后再加一次平均深度，然后加 2 ，除以 k 个叶子结点得到当前答案。化简后式子就变成了:

$$f[k]=f[k-1]+\frac{2}{k}$$

$\because f[0]=0$ $\therefore f[k]=2\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{k}\in O(\ln k)$

六、 3.6

Solution :
(1) 有放回时:
$P(X=1)=\frac{1}{10^5}$ $P(X=2)=\frac{2^5-1^5}{10^5}$ $P(X=3)=\frac{3^5-2^5}{10^5}$
$P(X=4)=\frac{4^5-3^5}{10^5}$ $P(X=5)=\frac{5^5-4^5}{10^5}$ $P(X=6)=\frac{6^5-5^5}{10^5}$
$P(X=7)=\frac{7^5-6^5}{10^5}$ $P(X=8)=\frac{8^5-7^5}{10^5}$ $P(X=9)=\frac{9^5-8^5}{10^5}$
$P(X=10)=\frac{10^5-9^5}{10^5}$
(2) 无放回时:
$P(X=5)=\frac{1}{\binom{10}{5}}=\frac{1}{252}$ $P(X=6)=\frac{\binom{5}{4}}{\binom{10}{5}}=\frac{5}{252}$
$P(X=7)=\frac{\binom{6}{4}}{\binom{10}{5}}=\frac{5}{84}$ $P(X=8)=\frac{\binom{7}{4}}{\binom{10}{5}}=\frac{5}{36}$
$P(X=9)=\frac{\binom{8}{4}}{\binom{10}{5}}=\frac{5}{18}$ $P(X=10)=\frac{\binom{9}{4}}{\binom{10}{5}}=\frac{1}{2}$

七、 3.7

Solution： 设随机变量 X 表示 $100+x$ 个元件中不合格元件的个数，则 $P(A)=P(X\le x)\ge 0.95$，即 $\sum_{k=0}^{x}\binom{100+x}{k}(0.01)^k(0.99)^{100+x-k}\ge 0.95$。因为这是一个二项分布，所以我们可以用泊松分布来近似计算。令 $\lambda=np_n=0.01\times(100+x)\simeq 1$，有 $P(A)=\sum_{k=0}^{x}\binom{100+x}{k}(0.01)^k(0.99)^{100+x-k}=\sum_{k=0}^{x}\frac{e^{-1}}{k!}$。当 $x=2$ 时，$P(A)=0.920\le 0.95$；当 $x=3$ 时，$P(A)=0.981\ge 0.95$。所以，x 的最小值为 3。

八、 3.8

2. Solution：

(1) $P(X=3)=\frac{1}{\binom{5}{3}}=\frac{1}{10}$ $P(X=4)=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{3}}=\frac{3}{10}$ $P(X=5)=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{5}{3}}=\frac{3}{5}$

(2) $P(X=6)=\frac{1^2}{6^2}=\frac{1}{36}$ $P(X=5)=\frac{2^2-1^2}{6^2}=\frac{1}{12}$

$P(X=4)=\frac{3^2-2^2}{6^2}=\frac{5}{36}$ $P(X=3)=\frac{4^2-3^2}{6^2}=\frac{7}{36}$

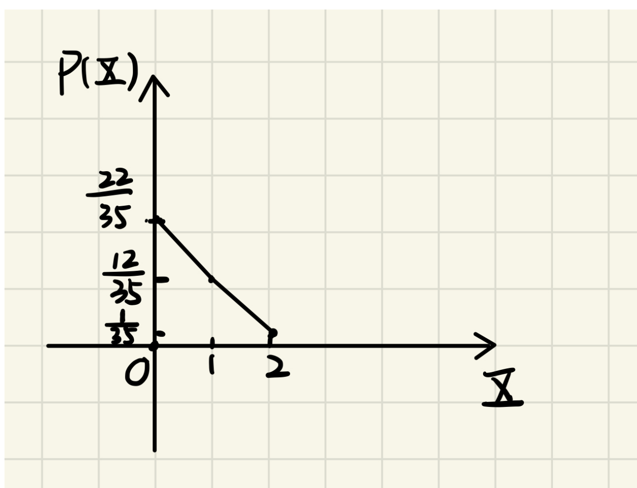
$P(X=2)=\frac{5^2-4^2}{6^2}=\frac{1}{4}$ $P(X=1)=\frac{6^2-5^2}{6^2}=\frac{11}{36}$

3. Solution：

(1) $P(X=0)=\frac{\binom{13}{3}}{\binom{15}{3}}=\frac{22}{35}$ $P(X=1)=\frac{\binom{13}{2}\binom{2}{1}}{\binom{15}{3}}=\frac{12}{35}$

$P(X=2)=\frac{\binom{13}{1}\binom{2}{2}}{\binom{15}{3}}=\frac{1}{35}$

(2)



九、 3.9

2. Solution : 设一次随机检查需要调整设备为事件 A, 则: $P = 1-(0.9)^{10} - \binom{10}{1}(0.1)(0.9)^9 = 1 - 1.9 \times (0.9)^9$。

$E[X] = \sum_{i=1}^{4} i\binom{4}{i}P^i(1-P)^{4-i} = 4P(A) = 4 - 7.6 \times (0.9)^9 \simeq 1.0556$

3. Solution : $P(X=4) = \frac{1^3}{4^3} = \frac{1}{64}$ $\quad P(X=3) = \frac{2^3-1^3}{4^3} = \frac{7}{64}$

$P(X=2) = \frac{3^3-2^3}{4^3} = \frac{19}{64}$ $\quad P(X=1) = \frac{4^3-3^3}{4^3} = \frac{37}{64}$

$E[X] = 4 \times \frac{1}{64} + 3 \times \frac{7}{64} + 2 \times \frac{19}{64} + \frac{37}{64} = \frac{25}{16}$

十、 3.10

4. Solution :

(1) $E[X] = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{3^j}{j} \times \frac{2}{3^j} = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{2}{j}$

级数 $\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{2}{j}$ 的绝对值级数为 $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2}{j}$，是一个调和级数。所以 $E[X]$ 不绝对收敛，则 $E[X]$ 不存在。

(2) $P(X=k) = \frac{1}{k} \times \frac{1}{k+1}$ $\quad E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}$，是一个调和级数。所以 $E[X]$ 不绝对收敛，则 $E[X]$ 不存在。

6. Solution :

(1) $E[X] = -2 \times 0.4 + 0 \times 0.3 + 2 \times 0.3 = -0.2$

$E[X^2] = 4 \times 0.4 + 0 \times 0.3 + 4 \times 0.3 = 2.8$

$E[3X^2+5] = 3E[X^2] + 5 = 3 \times 2.8 + 5 = 13.4$

(2) $E[\frac{1}{X+1}] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}e^{-\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \frac{1}{\lambda}(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} - e^{-\lambda}) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$