概率统计作业 Week2

201300018 卞煜齐

2021 年 9 月 18 日

Problem1.10

用A_i表示第i次抽到正品的事件。

(a)$P(\overline{A}_1\overline{A}_2) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1) = \frac{4}{16}\times\frac{3}{15} = \frac{1}{20}$.

(b)$P(A_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1A_2) = P(A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1A_2) = P(A_1)P(\overline{A}_2|A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)$
$= \frac{4}{16}\times\frac{12}{15}+\frac{12}{16}\times\frac{4}{15} = \frac{2}{5}$.

(c)$P(A_2) = P(A_1A_2)+P(\overline{A}_1A_2) = \frac{12}{16}\times\frac{11}{15}+\frac{4}{16}\times\frac{12}{15} = \frac{3}{4}$.

Problem1.11

用A表示两女生间恰有k个男生的事件。

$$P(A) = \frac{2(n)_k(n-k+1)_{n-k+1}}{(n+2)_{n+2}} = \frac{2(n-k+1)}{(n+1)(n+2)}$$

Problem1.12

(a)用A表示排成一列任意两女生不相邻的事件。

$$P(A) = \frac{\binom{n+1}{m}(n)_n(m)_m}{(m+n)_{m+n}} = \frac{n!(n+1)!}{(m+n)!(n-m+1)!}$$

(b)用B表示排成一圆环任意两女生不相邻的事件。

$$P(B) = \frac{\binom{n}{m}(n-1)_{n-1}(m)_m}{(m+n-1)_{m+n-1}} = \frac{n!(n-1)!}{(m+n-1)!(n-m)!}$$

Problem1.13

用A表示第k次取出的是红球。

(a)白球相同，红球相同

$$P(A) = \frac{\binom{n+m-1}{n-1}}{\binom{n+m}{n}} = \frac{n}{n+m}$$

(b)白球相同，红球不同

$$P(A)=\frac{(n+m-1)_m}{(n+m)_m}=\frac{n}{n+m}$$

(c)白球不同，红球相同

$$P(A)=\frac{\binom{n+m-1}{n-1}(n)_n}{(n+m)_n}=\frac{n}{n+m}$$

(d)白球不同，红球不同

$$P(A)=\frac{n(n+m-1)_{n+m-1}}{(n+m)_{n+m}}=\frac{n}{n+m}$$

Problem1.14

用A_i表示杯子中球的最大个数为i的事件。
$P(A_1)=\frac{(4)_3}{4^3}=\frac{3}{8}$.
$P(A_2)=\frac{3(4)_2}{4^3}=\frac{9}{16}$
$P(A_3)=\frac{4}{4^3}=\frac{1}{16}$.

Problem1.15

(a)用A表示依次无放回取球时第i个人取出红球的事件。

$$P(A)=\frac{b(a+b-1)_{k-1}}{(a+b)_k}=\frac{b}{a+b}$$

(b)用B表示有放回取球时第i个人取出红球的事件。

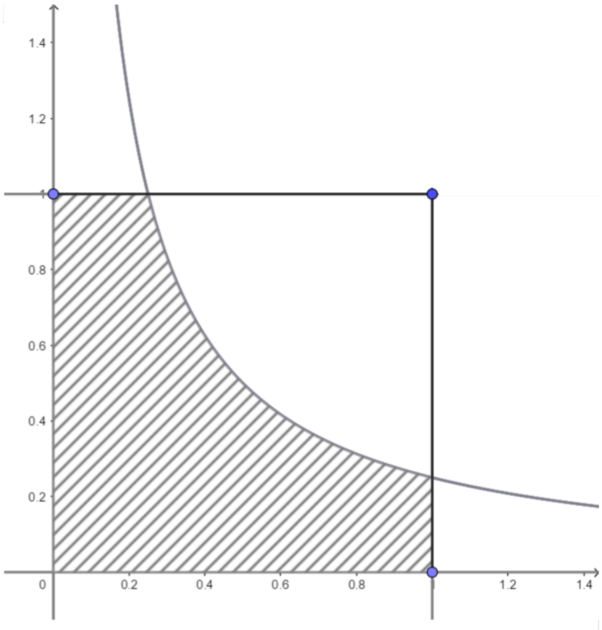
$$P(A)=\frac{b}{a+b}$$

Problem1.16

用A_i表示第i对夫妻相邻而坐的事件。由容斥原理：

$$\begin{aligned}P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n)=&\frac{(2n-1)!-2(2n-2)!\binom{n}{1}+2^2(2n-3)!\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n2^n(n-1)!\binom{n}{n}}{(2n-1)!}\\=&\frac{\Sigma_{k=0}^n(-1)^k2^k(2n-k-1)!\binom{n}{k}}{(2n-1)!}\end{aligned}$$

Problem1.17



用A表示两数之积小于1/4事件。
样本空间$\Omega = (x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, xy \leq 1/4.$
如上图所示，A发生的概率为：

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\frac{1}{4} + \int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{4x} dx}{1} = \frac{2 + \ln 2}{4}$$

Problem1.18

$s = 0$
$N = 100000000$
for do$i$ from 1 to N
  a = Random(0,1)
  b = Random(0,1)
  c = Random(0,1)
  d = Random(0,1)
  if $a^2 + sin(b) + ae^c \leq d$ **then**
    $s = s + 1$
  end if
end forreturn s/N

经计算，事件发生的概率为0.09436.

Problem1.19

排列总数为：$\binom{9}{3,4,2} = \frac{9!}{3!4!2!} = 1260$

Problem1.20

(a)

证明. 考虑从$n+1$个元素中选取r个元素，有$\binom{n+1}{r}$种选取方法，将这些不同的选法分成两种情况考虑：
1.若不选第$n+1$个元素，则需要在其他的元素中选取r个元素，选取方法有$\binom{n}{r}$种；
2.若若选第$n+1$个元素，则需要在其他的元素中选取$r-1$个元素，选取方法有$\binom{n-1}{r}$种；
故$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$, 由此完成证明。 □

(b)

证明. 考虑从$m+n$个元素中选取r个元素，有$\binom{m+n}{r}$种选取方法，将这些元素分为两组，一组有m个元素，另一组有n个元素，则这些不同的选法可分成$r+1$种情况考虑：
1.在m个元素中选取0个元素，在n个元素中选取r个元素，有$\binom{m}{0}\binom{n}{r}$种选法；
2.在m个元素中选取1个元素，在n个元素中选取$r-1$个元素，有$\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}$种选法；
$\cdots$
r+1.在m个元素中选取r个元素，在n个元素中选取0个元素，有$\binom{m}{r}\binom{n}{0}$种选法；
故$\binom{m+n}{r} = \Sigma_{i=0}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}$, 由此完成证明。 □

(c)

证明. 由(b)中结论，令$m=n=r$则$\binom{2n}{n} = \Sigma_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \Sigma_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$ □

Problem1.21

(a)无放回取出排列有$(m)_r$种排法；
(b)有放回取出排列有m^r种排法；
(c)无放回取出有$\binom{m}{r}$种取法；
(d)等价于求$x_1+x_2+\cdots+x_m=r$的非负整数解的个数，故有放回取出有$\binom{m+r-1}{r}$种取法。

Problem1.22

令$x_{k+1} = n - x_1 - x_2 - \cdots - x_n \geq 0$，则$x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}=n$
正整数解：$(x_1-1)+(x_2-1)+\cdots+(x_k-1)+x_{k+1}=n-k$，其中$x_1-1, x_2-1, \cdots, x_k-1, x_{k+1}$为非负整数，解的个数为$\binom{n}{k}$.
非负整数解：$x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}=n$，其中$x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}$为非负整数，解的个数为$\binom{n+k}{n}$.

Problem1.23

令$x_{k+1}=n-x_1-x_2-\cdots-x_n>0$，则$x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}=n$
正整数解：$(x_1-1)+(x_2-1)+\cdots+(x_k-1)+(x_{k+1}-1)=n-k-1$，其中$x_1-1,x_2-1,\cdots,x_k-1,x_{k+1}-1$为非负整数，解的个数为$\binom{n-1}{k}$.
非负整数解：$x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}-1=n-1$，其中$x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}-1$为非负整数，解的个数为$\binom{n+k-1}{n-1}$.

Problem1.24

证明. 对k进行归纳：
Basis:当$k=1$时，$S(n,1)=1=\frac{1}{1!}\Sigma_{i=0}^{1}(-1)^i\binom{1}{i}(1-i)^n$，成立。
I.H.:假设当$k=m$时成立，即：

$$S(n,m)=\frac{1}{m!}\Sigma_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^n$$

I.S.:当$k=m+1$时

$$\begin{aligned}
S(n,m+1)=&S(n-1,m)+(m+1)S(n-1,m+1)\\
=&\frac{1}{m!}\Sigma_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^{n-1}+(m+1)\frac{1}{(m+1)!}\Sigma_{i=0}^{m+1}(-1)^i\binom{m+1}{i}(m+1-i)^{n-1}\\
=&\frac{1}{m!}\Sigma_{i=1}^{m+1}(-1)^{i-1}\binom{m}{i-1}(m+1-i)^{n-1}+\frac{1}{m!}\Sigma_{i=1}^{m+1}(-1)^i\binom{m+1}{i}(m+1-i)^{n-1}\\
&+\frac{1}{m!}(m+1)^{n-1}\\
=&\frac{1}{m!}\Sigma_{i=1}^{m+1}(-1)^i(m+1-i)^{n-1}(\binom{m+1}{i}-\binom{m}{i-1})+\frac{1}{m!}(m+1)^{n-1}\\
=&\frac{1}{m!}\Sigma_{i=0}^{m+1}(-1)^i(m+1-i)^{n-1}\frac{m!}{i!(m-i)!}\\
=&\frac{1}{(m+1)!}\Sigma_{i=0}^{m+1}(-1)^i(m+1-i)^n\frac{(m+1)!}{i!(m+1-i)!}\\
=&\frac{1}{(m+1)!}\Sigma_{i=0}^{m+1}(-1)^i\binom{m+1}{i}(m+1-i)^n
\end{aligned}$$

故$k=m+1$时成立。综上，结论得证。 □