第五次作业 201300015 李丹悦

4.1

P57 18. $X\in[0,a]$. $F(x)=P(X\le x)=kx$

$F(a)=ka=1$. $k=\frac{1}{a}$

故 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{a}x, & 0\le x<a\\ 1, & x\ge a\end{cases}$

19. (1) $P(X\le 3)=F(3)=1-e^{-1.2}$

(2) $P(X\ge 4)=1-F(4-0)=1-(1-e^{-1.6})=e^{-1.6}$

(3) $P(3\le X\le 4)=F(4)-F(3-0)=1-e^{-1.6}-1+e^{-1.2}=e^{-1.2}-e^{-1.6}$

(4) $P(X\le 3\cup X\ge 4)=P(X\le 3)+P(X\ge 4)=1-e^{-1.2}+e^{-1.6}$

(5) $P(X=2.5)=0$

20. (1) $P(X<2)=F(2-0)=\ln 2$

$P(0<X\le 3)=F(3)-F(0)=1-0=1$

$P(2<X<\frac{5}{2})=F(\frac{5}{2}-0)-F(2)=\ln\frac{5}{2}-\ln 2=\ln\frac{5}{4}=\ln 5-2\ln 2$

(2) $1<x<e$时, $F_X(x)$连续 又因 $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(t)dt$

所以 $f_X(x)=F_X'(x)=\frac{1}{x}$

故 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 1<x<e\\ 0, & 其他.\end{cases}$

21. (1). $x<1$, $F(x)=0$

$1\le x\le 2$, $F(x)=\int_1^x 2(1-\frac{1}{x^2})dx=2(x+\frac{1}{x})\Big|_1^x=2x+\frac{2}{x}-4$

$x>2$ $F(x)=\int_1^2 2(1-\frac{1}{x^2})=1$

$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 2x+\frac{2}{x}-4, & 1\le x\le 2\\ 1, & x>2.\end{cases}$

(2). $x<0$. $F(x)=0$

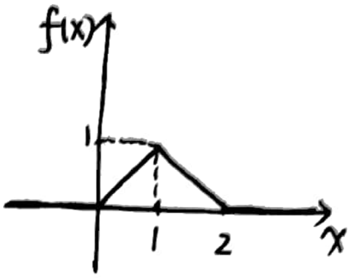
$0\le x<1$. $F(x)=\int_0^x x\,dx=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^x=\frac{1}{2}x^2$

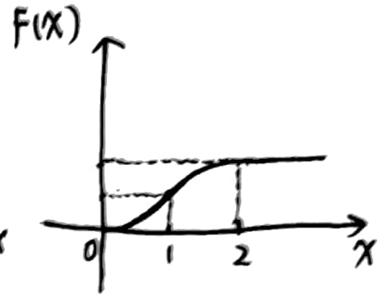
$1\le x<2$, $F(x)=\int_0^1 x\,dx+\int_1^x(2-x)dx=\frac{1}{2}+(2x-\frac{1}{2}x^2)\Big|_1^x=\frac{1}{2}+2x-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}$

$=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$

$x\ge 2$, $F(x)=1$

故 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}x^2, & 0\le x<1\\ -\frac{1}{2}x^2+2x-1, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$





P58 23. $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$ $(x\ge 1000)$

$=\int_{1000}^{x}\frac{1000}{t^2}dt=1000(-\frac{1}{t})\Big|_{1000}^{x}=1000(-\frac{1}{x}+\frac{1}{1000})=1-\frac{1000}{x}$

$P(X>1500)=1-P(X\le 1500)=1-F(1500)=1-(1-\frac{1000}{1500})=\frac{2}{3}$

令Y表示5只中寿命大于1500小时的只数, 则 $Y\sim B(5,\frac{2}{3})$

$P(X\ge 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-\binom{5}{0}(\frac{2}{3})^0(\frac{1}{3})^5-\binom{5}{1}(\frac{2}{3})^1(\frac{1}{3})^4$

$=\frac{232}{243}$

24. $P(X>10)=1-F(10)=1-\int_0^{10}\frac{1}{5}e^{-\frac{t}{5}}dt$

$=e^{-2}$

易知 $Y\sim B(5,e^{-2})$

Y	0	1	2	3	4	5
P	$(1-e^{-2})^5$	$5e^{-2}(1-e^{-2})^4$	$10e^{-4}(1-e^{-2})^3$	$10e^{-6}(1-e^{-2})^2$	$5e^{-8}(1-e^{-2})$	e^{-10}

$P(Y\ge 1)=1-P(Y=0)=1-(1-e^{-2})^5$

25. $\Delta=16K^2-16(K+2)=16(K^2-K-2)=16(K-2)(K+1)\ge 0$ $K\le -1$或$K\ge 2$

有实根概率 $P=\frac{3}{5}$

P115 18. $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)dt=\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{\sigma^2}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt=-\int_0^{+\infty}t\,d(e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}})$

$=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt-te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{+\infty}=\sqrt{2\pi}\sigma\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt=\frac{\sqrt{2\pi}\sigma}{2}$

同理 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^3}{\sigma^2}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt=-\int_0^{+\infty}t^2d(e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}})=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}2t\cdot dt-t^2e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{+\infty}$

$=-2\sigma^2e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\Big|_0^{+\infty}=2\sigma^2$

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=(2-\frac{\pi}{2})\sigma^2$

4.2. 设长方形的宽为 X 米　$X \sim U(0,2)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [0,2] \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$X \in [0,2]$ 时. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}x$.

长方型周长为 $2(X+\frac{10}{X})$ 米

$$E(2X+\frac{20}{X}) = 2E(X) + 20E(\frac{1}{X})$$

$$= 2 \cdot \frac{0+2}{2} + 20 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2} dt = 2 + 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln t \Big|_0^{+\infty}$$

$\cancel{E(2X+\frac{20}{X})^2 =}$ 故期望不存在，所以方差也不存在

$\cancel{Var(X) = E \quad Var(2X+\frac{20}{X}) = E(2X+\frac{20}{X})^2 - (E(2X+\frac{20}{X}))^2 =}$

4.3. $E(Y) = E(e^{-2X}) = \int_0^{+\infty} e^{-2t} \cdot Ae^{-t} dt$

由概率密度的规范性可得 $\int_0^{+\infty} Ae^{-t}dt = -Ae^{-t}\Big|_0^{+\infty} = A = 1$.

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} e^{-2t} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-3t} dt = -\frac{1}{3}e^{-3t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{3}$$

4.4. 证:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy$$

$$\overset{\substack{x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta}}{=} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} d\frac{r^2}{2}$$

$$= 2\pi$$

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$

令 $\cancel{y=}$ $x = \frac{t-\mu}{\sigma}$　$t \in (-\infty, +\infty)$

则有 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \sqrt{2\pi}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt = \sqrt{2\pi}\sigma.$$