第二周作业

201300006 林滋芊

1.10

i) P(两件都是次品)=$\binom{4}{2}/\binom{16}{2}=\frac{1}{20}$

ii) P(一件正品一件次品)=$(4\times12)/\binom{16}{2}=\frac{2}{5}$

iii) P(第二次是次品)=$\frac{3}{4}\times\frac{4}{15}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{15}=\frac{1}{4}$

1.11

记两女生间恰好有k个男生为事件A_k (2 < k < n)

若随机排列，总排列数为$(n+2)_{n+2}$

若两女生中间有k个男生，可以先确定男生的排列顺序，为$(n)_n$种，之后确定女生的位置，有

n-k+1种，且需要考虑先后顺序，故需要乘以2.

$P(A_k)=\frac{(n)_n\times2(n-k+1)}{(n+2)_{n+2}}=\frac{2(n-k+1)}{(n+1)(n+2)}$

1.12

首先全部可能的排列数是$(m+n)_{m+n}$

任意两女生不相邻，可以考虑先排列男生共有 $(n)_n$ 种，再从间隙中插入女生，共有$(n+1)_m$ 种。

故P=$\frac{n!(n+1)_m}{(m+n)!}$

若排列成一个圆环男生共有(n-1)!种方案，女生插入缝隙$(n)_{m-1}$

故P=$\frac{(n-1)!(n)_{m-1}}{(m+n-1)!}$

1.13

白球和红球均相同

样本空间元素个数等价于从m+n个位置中选出m个的方案数$\binom{m+n}{m}$

第k个位置为红球所含基本事件个数等价于从m+n-1个位置中选出m个位置放红球(第k个已经确定是白球)的方案数$\binom{m+n-1}{m}$

P=$\frac{\binom{m+n-1}{m}}{\binom{m+n}{m}}=\frac{n}{m+n}$

白球不同，红球相同

样本空间元素等价于从m+n个位置选出m个位置放置红球，再乘上白球的全排列，为$\binom{m+n}{m}\times(n)_n$

第k个位置为红球所含基本事件个数等价于从m+n-1个位置中选出m个位置放红球(第k个已经确定是白球，还需要乘上白球的全排列数)$\binom{m+n-1}{m}\times(n)_n$

P=$\frac{n}{m+n}$

白球相同，红球不同

样本空间元素等价于从m+n个位置选出m个位置放置红球，再乘上红球的全排列，为$\binom{m+n}{m}\times(m)_m$

第k个位置为红球所含基本事件个数等价于从m+n-1个位置中选出m个位置放红球(第k个已经确定是白球，还需要乘上红球的全排列数) $\binom{m+n-1}{m} \times (m)_m$

P= $\frac{n}{m+n}$

红球不同，白球不同

样本空间元素等价于从m+n个位置选出m个位置放置红球，再乘上红球和白球的全排列，为 $\binom{m+n}{m} \times (m)_m \times (n)_n$

第k个位置为红球所含基本事件个数等价于从m+n-1个位置中选出m个位置放红球(第k个已经确定是白球，还需要乘上红球和白球的全排列数) $\binom{m+n-1}{m} \times (m)_m \times (n)_n$

P= $\frac{n}{m+n}$

1.14

样本空间基本事件个数为$4^3 = 64$

记杯子中球最大个数为k的概率为P_k

最大个数为3，只能在一个杯子中放置

$P_3 = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$

最大个数为2，先确定在一起的两个球$\binom{3}{2}$,然后在两个杯子中放置

$P_2 = \frac{3\times 12}{64} = \frac{9}{16}$

最大数为1，选择三个杯子放入三个球

$P_1 = \frac{6\times 4}{64} = \frac{3}{8}$

1.15

无放回

可以看成将所有球排成一列，第i个球的为红球的概率，根据1.13可得

P(第i个球为红球)= $\frac{b}{a+b}$

有放回

则第i个取球和i无关，只相当于从袋中求出红球的概率

P(第i个球为红球)= $\frac{b}{a+b}$

1.16

记所求事件为A，第i对夫妻坐在一起的概率为A_i

由容斥原理可以得到

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) \end{aligned}$$

现在考虑k个夫妻坐在一起同时发生的概率

将k对夫妻看成一个元素，每个元素有两种排列方式，将2n-k个元素进行环排列

故概率为 $\frac{2^k\cdot(2n-k-1)!}{(2n-1)!}$

带入上式整理可以得到

$$
\begin{aligned}
P(A) &= 1-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k}P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) \\
&= 1-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\tbinom{n}{k}\frac{2^k\cdot(2n-k-1)!}{(2n-1)!}
\end{aligned}
$$

1.17

记任取两个数字分别为a,b

$\Omega: a\in[0,1], b\in[0,1]$

$P(A)=\frac{1}{4}+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{4x}=\frac{1+2\ln 2}{4}$

1.18

```
tot=0
time=0
while (tot < 1000000):
    tot=tot+1
    a,b,c,d=random(0,1)//random函数接受两个参数，返回两个参数之间随机的一个数字
    if(a*a+sin(b)+a*exp(c)<=d)
        time=time+1
return time/tot
```

python编程计算可得，概率为0.11523

1.19

总个数为

$\frac{(9)_9}{(4)_4\times(3)_3\times(2)_2}=1260$

1.20

1. 直接利用定义展开组合数，通分运算

$\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\frac{n!}{r!(n-r)!}+\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}=\frac{n!(n-r+1)}{r!(n-r+1)!}+\frac{n!r}{r!(n-r+1)!}=\frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}=\binom{n+1}{m}$

2. 构造问题：从n+m个不同的球中任取r个的方案数

可以直接取，也就是$\binom{m+n}{r}$

也可以分成两组，一组为m个，一组为n个，从m个里取0个，n个里取r个，从m个里取1个，n个里取r-1个……从m个里取r个，n个里取0个.总方案数为$\sum\limits_{i=0}^{r}\binom{m}{r}\binom{n}{r-i}$

而同一个问题的方案数是相等的，因而原式得到证明。

3.构造问题：从2n个不同的球中任取n个的方案数

可以直接取，也就是$\binom{2n}{n}$

也可以分成两组，一组为n个，另一组也为n个，从第一组个里取0个，第二组里取n个……从第一组里取n个，第二组里取0个.总方案数为$\binom{2n}{n}=\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$

而同一个问题的方案数肯定是相等的，因而原式得到证明。

1.21

不放回取出排列

$(m)_r$

放回取出排列

m^r

不放回取出

$\binom{m}{r}$

放回取出

相当于把正整数r划分成m个无序的非负整数之和

$P(r+m,m)$

1.22

正整数解问题转化为

$x_1 + \ldots + x_{k+1} = n+1$的正整数解个数

相当于在n+1个物品间隔中插入k个隔板，即从n个位置中选择k个

个数为$\binom{n}{k}$

非负整数解转化为

$x_1 + \ldots + x_{k+1} = n$的非负整数解个数，进一步转化为

$x_1 + \ldots + x_{k+1} = n+k+1$ 的正整数解个数

个数为$\binom{n+k}{k}$

1.23

正整数解可以相当于1.22中正整数解个数减去和恰好为n的解的个数

个数为$\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{k}$

非负整数解可以相当于1.22中非负整数解个数减去和恰好为n的解的个数

个数为$\binom{n+k}{k} - \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{k}$

1.24

奠基：

n=1,S(1,1)=1,符合题意

n=2,S(2,1)=1,S(2,2)=1,符合题意

归纳假设：

假设当n=k时，对任意$p \leq k$，有$S(k,p) = \frac{1}{p!}\sum_{i=0}^{p}(-1)^i \mathbb{C}_p^i (p-i)^k$

归纳步骤：

当n=k+1时

$$
\begin{aligned}
S(k+1,p+1) &= (p+1)S(k,p+1)+S(k,p) \\
&= (p+1)\frac{1}{p+1!}\sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i\binom{p+1}{i}(p+1-i)^k+\frac{1}{p!}\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\binom{p}{i}(p-i)^k \\
&= \frac{(p+1)^k}{p!}+\frac{1}{p!}\sum_{i=0}^{p}(-1)^{i+1}[\binom{p}{i+1}+\binom{p}{i}](p-i)^k+\frac{1}{p!}\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\binom{p}{i}(p-i)^k \\
&= \frac{(p+1)^k}{p!}+\frac{1}{p!}\sum_{i=0}^{p-1}(-1)^{i+1}\binom{p}{i+1}(p-i)^k \\
&= \frac{(p+1)^{k+1}}{p+1!}+\frac{1}{p+1!}\sum_{i=1}^{p}(-1)^i(p+1)\binom{p}{i}(p+1-i)^k \\
&= \frac{1}{p+1!}\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\binom{p+1}{i}(p+1-i)^{k+1} \\
&= \frac{1}{p+1!}\sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i\binom{p+1}{i}(p+1-i)^{k+1}
\end{aligned}
$$

符合结论，而当p取k+1时，S(k+1,p)=1仍然成立，所以也符合结论

根据数学归纳法原理原式得证。