然而这种结论不正确, 因为这三个事件发生的可能性不同. 正确的理解是事件 $C=\{C_1,C_2\}$, 其中 C_1 表示先正后反的事件, C_2 表示先反后正的事件, 从而有

$$P(A)=P(B)=P(C_1)=P(C_2)=1/4.$$

古典概率计算的本质是计数 (Counting), 下面介绍一些基本的计数原理, 更为详细的计数方法将在下一节介绍. 首先介绍计数的两条基本原理:

- **加法原理**: 若一项工作可以用两种不同的过程 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 完成, 且过程 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 分别有 n_1 和 n_2 种方法, 则完成该工作有 n_1+n_2 种方法.
- **乘法原理**: 若一项工作需要依次通过 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 两过程, 且过程 $\mathcal{A}_1$ 和 $\mathcal{A}_2$ 分别有 n_1 和 n_2 种方法, 则完成该工作有 $n_1\times n_2$ 种方法.

上述两条原理可进一步推广到多个过程的情况.

下面介绍无放回的排列组合, 更为复杂的排列组合将在下一节介绍:

排列: 从 n 个不同的元素中无放回地取出 r 个元素进行排列, 此时既要考虑取出的元素, 也要顾及其排列顺序, 则有 $(n)_r=n(n-1)\cdots(n-r+1)$ 种不同的排列. 若 $r=n$ 时称全排列, 有 $n!$ 种.

组合: 从 n 个不同的元素中无放回地取出 r 个元素, 取出的元素之间无顺序关系, 共有 $\binom{n}{r}$ 种不同的取法, 其中

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{(n)_r}{r!},\quad \text{且记}\quad \binom{n}{0}=1.$$

这里 $\binom{n}{r}$ 称为 **组合数** 或 **二项系数**, 它是二项展开式 $(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^rb^{n-r}$ 中项 a^rb^{n-r} 的系数.

例 1.7 将 n 个不同的球随机放入 N $(N\geqslant n)$ 个不同的盒子中, 事件 A 表示恰有 n 个盒子且每盒一球; 事件 B 表示指定的 n 个盒子中各有一球; 事件 C 表示指定一盒子恰有 m 个球. 求事件 A,B,C 发生的概率. (盒子的容量不限, 放入同一个盒子内的球无顺序排列区别)

解 将 n 只不同的球随机放入 N 个不同的盒子中, 共有 N^n 种不同的放法. 而对事件 A, 有 $(N)_n=N!/n!$ 种不同的放法, 因此

$$P(A)=\frac{(N)_n}{N^n}=\frac{N!}{N^n n!}.$$

对事件 B, 有 $n!$ 种不同的放法, 因此

$$P(B)=\frac{n!}{N^n}.$$

对事件 C, 可分为两步: 第一步在指定的盒子内放入 m 个球, 有 $\binom{n}{m}$ 种不同的放法; 第二步将剩下的 $n-m$ 个球放入 $N-1$ 个盒子, 有 $(N-1)^{n-m}$ 种不同的放法. 因此

$$P(C)=\frac{\binom{n}{m}(N-1)^{n-m}}{N^n}.$$

很多实际问题与上述例子具有相同的数学模型, 如经典的生日问题:

例 1.8 (生日问题) 有 k 个人 ($k<365$), 每个人的生日等可能地出现于 365 天中的任意一天, 求至少两人生日相同的概率.

解 用 A 表示至少有两人生日相同的事件, 其对立事件 $\bar{A}$ 表示任意两人生日均不相同的事件. k 个人的生日共有 365^k 种可能, 而 k 个人的生日两两互不相同的有 $(365)_k$ 种可能. 因此

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{(365)_k}{365^k}.$$

易知当 $k=30$ 时, $P(A)=70.6\%$; 当 $k=40$时, $P(A)=89.1\%$; 当 $k=50$时, $P(A)=97\%$; 当 $k=60$时, $P(A)=99.4\%$; 当 $k=100$时, $P(A)=99.99\%$.

例 1.9 设一批 N 件产品中有 M 件次品, 现从 N 件产品中不放回地任选 n 件, 求其中恰有 k 件次品的概率.

解 用 A 表示恰有 k 件次品的事件. 从 N 件产品中任选 n 件, 有 $\binom{N}{n}$ 种不同的选法; 在所选取的 n 件产品中, 有 k 件次品以及 $n-k$ 件正品, 即从 M 件次品中选出 k 件次品, 从 $N-M$ 件正品中选出 $n-k$ 件正品, 因此有 $\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}$ 种不同的取法. 由此可得

$$P(A)=\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}\Big/\binom{N}{n}. \tag{1.2}$$

上例是古典概型中一个典型问题, 其概率 (1.2) 称为 **超几何概率**, 在产品质量检测等方面广泛应用. 在例 1.9 中若为 有放回地 任选 n 件, 则每次抽到一件非次品的概率为 $(N-M)/N$, 抽到一件次品的概率为 M/N, 因此 n 件中恰有 k 件次品的概率为

$$\binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-k}.$$

下面分析抽签的先后顺序是否会对抽签的概率产生影响.

例 1.10 (抽签问题) 袋中有 a 个不同的白球, b 个不同的红球, 假设有 k 个人依次随机无放回地从袋中取一个球, 问第 i 个人 ($i\leqslant k$) 取出红球的概率是多少?

解 用 A 表示第 i 个人取到红球的事件. 若 k 个人依次随机无放回地从袋中取一个球, 则有 $(a+b)_k$ 种不同的取法. 若事件 A 发生, 第 i 个人取到红球, 它可能是 b 个红球中的任意一个, 有 b 种取法; 其它剩余的 $k-1$ 个球可以从 $a+b-1$ 个球中取出, 有 $(a+b-1)_{k-1}$ 种不同的取法. 因此事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{b(a+b-1)_{k-1}}{(a+b)_k}=\frac{b}{a+b}.$$

由此例可知第 i 个人取到红球的概率为 $b/(a+b)$, 与 i 的大小无关, 即抽签先后顺序对抽签的结果没有影响, 由此证明了抽签的公平性. 在上例中, 袋中有 a 个不同的白球和 b 个不同的红球, 或若

k 个人依次随机有放回地从袋中取一个球, 则第 i 个人 ($i \leqslant k$) 取出红球的概率又是多少? 这里留给读者进一步思考.

在计算概率的过程中, 有时可适当利用概率的性质, 例如,

例 1.11 从 $\{1,2,\ldots,9\}$ 数中有放回取 n 个, 试求取出 n 个数的乘积被 10 整除的概率.

解 令 $A=\{$取出 n 个整数的乘积能被 10 整除$\}$, $B=\{$取出的 n 个数中有偶数$\}$, $C=\{$取出的 n 个数中至少有一个 5$\}$, 于是有 $A=BC$. 直接计算事件 B 发生的概率较难, 我们因此考虑 B 的对立事件的概率

$$P(\bar{B})=P\left(\{\text{取出的 } n \text{ 个数中无偶数}\}\right)=P\left(\{\text{取出的 } n \text{ 个数只包括} 1,3,5,7,9\}\right)=5^n/9^n.$$

同理可得

$$P(\bar{C})=8^n/9^n \qquad \text{和} \qquad P(\bar{B}\bar{C})=4^n/9^n.$$

根据概率的性质有

$$P(A)=1-P(\overline{BC})=1-P(\bar{B}\cup\bar{C})=1-P(\bar{B})-P(\bar{C})+P(\bar{B}\bar{C})=1-\frac{5^n}{9^n}-\frac{8^n}{9^n}+\frac{4^n}{9^n}.$$

例 1.12 (Matching问题) 有 n 对夫妻参加一次聚会, 现将所有参会人员任意分成 n 组, 每组一男一女, 问至少有一对夫妻被分到同一组的概率是多少?

解 用 A 表示至少有一对夫妻被分到同一组的事件, 以及 A_i 表示第 i 对夫妻 ($i\in[n]$) 被分到同一组的事件, 于是有 $A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$. 根据容斥原理有

$$P(A)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\sum_{i_1<\cdots<i_r}P(A_{i_1}\cdots A_{i_r}).$$

对任意 $r\in[n]$, 考虑事件 $A_{i_1}\cdots A_{i_r}$ 概率, 若参会人员任意分成 n 组且每组一男一女, 共有 $n!$ 种不同的分法, 若将第 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 对夫妻分别分组, 则有 $(n-r)!$ 种不同的分法. 根据等可能性原则有

$$P(A_{i_1}\cdots A_{i_r})=\frac{(n-r)!}{n!}.$$

而和式 $\sum_{i_1<\cdots<i_r}P(A_{i_1}\cdots A_{i_r})$ 中共有 $\binom{n}{r}$ 项, 由此可得

$$\sum_{i_1<\cdots<i_r}P(A_{i_1}\cdots A_{i_r})=\binom{n}{r}\frac{(n-r)!}{n!}=\frac{1}{r!},$$

于是事件 A 发生的概率

$$P(A)=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}.$$

当 n 较大时, 利用泰勒展式 $e^x = 1 + x + x^2/2! + \cdots + x^n/n! + \cdots$ 以及令 $x = -1$ 有

$$e^{-1} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \cdots \approx \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!},$$

由此近似有 $P(A) = 1 - 1/e = 0.632$.

1.3.2 几何概型

古典概型考虑有限的样本空间, 即有限个等可能的基本事件, 在很多实际应用中受到了限制. 本节介绍另一种特殊的随机现象, 具有如下特征:

- **样本空间无限可测** 样本空间包含无限不可列个样本点, 但可以用几何图形 (如一维线段、二位平面区域、或三维空间区域等) 来表示, 其相应的几何测度 (如长度、面积、体积等) 是一个非零有限的实数,
- **基本事件等可能性** 每个基本事件发生的可能性大小相等, 从而使得每个事件发生的概率与该事件的几何测度相关, 与具体位置无关,

称为 **几何概型**. 其形式化定义如下:

定义 1.5 在一个测度有限的区域 Ω 内等可能性投点, 落入 Ω 内的任意子区域 A 的可能性与 A 的测度成正比, 与 A 的位置与形状无关, 这样的概率模型称之为**几何概型**. 事件 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{A\text{ 的测度}}{\Omega\text{ 的测度}} = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

根据上述定义可验证几何概型的概率满足三条公理. 下面给出几何概型的案例.

例 1.13 假设一乘客到达汽车站的时间是任意的, 客车间隔一段时间发班, 请规划最长的间隔发车时间, 才能确保乘客候车等待时间不超过 20 分钟的概率大于 80%.

解 设客车的间隔时间为 l ($l > 20$), 选择特定的连续的 l 分钟为样本空间, 则乘客到达时间的样本空间为

$$\Omega = \{x\colon 0 < x \leqslant l\}.$$

用 B 表示乘客的等待时间超过 20 分钟的事件, 而事件 B 发生则可知乘客到达车站的时间在 0 与 $l - 20$ 之间, 即

$$B = \{x\colon 0 < x < l - 20\}.$$

可知事件 B 发生的概率小于或等于 20%, 即

$$P(B) = \frac{l - 20}{l} \leqslant 0.2,$$

求解可得 $l \leqslant 25$.

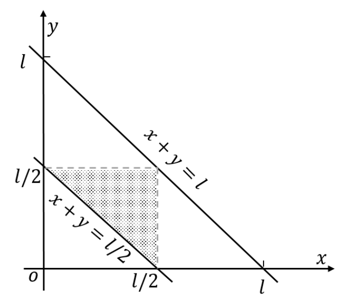
例 1.14 将一根长度为 l 的木棍随意折成三段, 这三段能构成平面三角形的概率是多少?

解 在此例中将一根木棍折成三段有无穷种可能, 根据其随意性任何一种折法的可能性大小相等, 且木棍的长度可度量, 由此采用几何概型. 用 x, y 分别表示第一段、第二段木棍的长度, 第三段的长度为 $l-x-y$, 由此可得样本空间

$$\Omega = \{(x,y) \colon x>0, y>0, l-x-y>0\}.$$

用 A 表示折成的三段能构成平面三角形的事件, 而构成平面三角形的条件是任意两边之和大于第三边, 由此可得

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \colon x+y > l-x-y, 1-y > y, l-x > x\} \\ &= \{(x,y) \colon x+y > l/2, y < l/2, x < l/2\}. \end{aligned}$$



如右图所示, 计算事件 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{(l/2)^2/2}{l^2/2} = \frac{1}{4}.$$

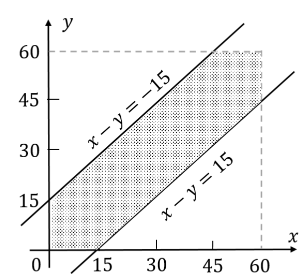
例 1.15 (会面问题) 两银行经理约定中午 12 : 00 − 13 : 00 到某地会面, 两人到达时间随机, 先到者等另一人 15 分钟后离开, 求两人见面的概率.

解 用 x, y 分别表示两人的到达时间 (分钟), 则样本空间

$$\Omega = \{(x,y) \big| 0 \leqslant x, y \leqslant 60\}.$$

用 A 表示两人见面的事件, 则

$$A = \{(x,y) \big| |x-y| \leqslant 15\} = \{(x,y) \big| x-y \leqslant 15 \text{ 且 } x-y \geqslant -15\}.$$



根据右图计算事件 A 发生的概率

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{60^2-45^2}{60^2} = \frac{7}{16}.$$

进一步思考: 若两银行经理非常聪明且都非常希望能促成此次见面, 但没有通讯方式进行联系, 能否找出一些策略来解决会面问题.

很多几何概型的概率可通过计算机模拟仿真来近似计算, 即 **统计模拟法** 或 **蒙特卡洛 (Monte Carlo) 法**. 先构造相应的概率模型, 再进行计算机模拟试验, 用统计的方法计算其估计值, 作为所求问题的近似值. 例如, 可利用蒙特卡洛法来近似计算例 1.15 的概率, 伪代码如下:

```
n_A ← 0
For i = 1 : N
    x ← Random(0, 60)
    y ← Random(0, 60)
    If |x − y| ⩽ 15 then
        n_A ← n_A + 1
    Endif
Endfor
Return n_A/N
```

1.4 概率计算：组合计数*

在古典概型中, 概率的计算往往都与组合计数密切相关, 同时组合计数在人工智能、计算机等领域具有广泛的应用, 因此本节将简要地介绍经典的组合计数: 十二重计数 (The twelvefold way). 该计数由著名组合学大师 G.-C. Rota (1932-1999) 首先提出, 最初的问题表述为在满足一定条件下的两个集合之间函数映射的个数.

为可读性起见, 这里采用美国科学院院士 R. P. Stanley 提出的简化表述: 将 n 只不同 (或相同) 的球放入 m 个不同 (或相同) 的箱子, 考虑在无任何限制 (或每个箱子至多放一球、或每个箱子至少放一球) 条件下有多少种不同的放法. 下表首先给出相应的计数结果, 后面将一一说明.

表 1.3 将 n 只球放入 m 个箱子, 在三种条件下各有多少种不同的放法.

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多放一球	每个箱子至少放一球
不同	不同	m^n	$(m)_n$	$m!S(n,m)$
相同	不同	$\binom{n+m-1}{n}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$
不同	相同	$\sum_{k=1}^{m} S(n,k)$	$\begin{cases} 1 & n \leqslant m \\ 0 & n > m \end{cases}$	$S(n,m)$
相同	相同	$\sum_{k=1}^{m} p(n,k)$	$\begin{cases} 1 & n \leqslant m \\ 0 & n > m \end{cases}$	$p(n,m)$

1.4.1 排列、环排列、组合与多重组合

在古典概型中, 我们简要地介绍了排列, 即从 n 个不同的元素中无放回地取出 r 个元素进行排列, 此时既要考虑取出的元素, 也要顾及其排列顺序, 则有 $(n)_r = n(n-1)\cdots(n-r+1)$ 种不同的排列. 若 $r=n$ 时称全排列, 有 $n!$ 种.

若从 n 个不同的元素中无放回地取出 r 个元素排成一个圆环, 称为 **环排列**. 按照顺时针看: 环排列 a-b-c-a, b-c-a-b 和 c-a-b-c 是同一个环排列, 而 a-c-b-a 则为不同的环排列. 因此对从 n 个不同的元素中无放回地取出 r 个元素进行环排列, 每一个环排列对应于 r 种不同的直线排列, 而且不同的环排列对应的直线排列互不相同. 因此有