第四次作业 **201300015** 李丹悦

3.1

i)证明$E(X)=np$：

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=(1-p)^n\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k(\frac{p}{1-p})^k$$

对$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$两边求导, 有$n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}$, 两边同时乘$x$

$nx(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^k$, 代入$x=\frac{p}{1-p}$可得

$$E(X)=(1-p)^n\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k(\frac{p}{1-p})^k=(1-p)^n\frac{np}{1-p}\frac{1}{(1-p)^{n-1}}=np$$

ii)证明$Var(X)=np(1-p)$：

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}+\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}+np$$

$$=(1-p)^n\sum_{k=1}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}+np$$

对$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$两边求两次导,

有$n(n-1)(1+x)^{n-2}=\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)x^{k-2}$, 同时乘$x^2$

$n(n-1)x^2(1+x)^{n-2}=\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)x^k$, 代入$x=\frac{p}{1-p}$可得

$$E(X^2)=n^2p^2+np(1-p)$$

所以$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=np(1-p)$

3.2

i)证明$E(X)=\frac{1}{p}$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}$$

我们已知级数展开式$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k$

对上式两边进行求导, 有$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}$

代入$x=1-p$, 得$E(X)=\frac{1}{p}$

ii)证明$E(X)=\frac{1}{p}$

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^{k-1}p$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(k^2-k)(1-p)^{k-1}p+\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}p$$

$$=p\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)(1-p)^{k-1}+\frac{1}{p}$$

对级数展开式$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k$两边进行连续求二次导, 有

$\frac{2}{(1-x)^3}=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}$, 两边同时乘$x$, 有$\frac{2x}{(1-x)^3}=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-1}$

代入$x=1-p$, 得$E(X^2)=\frac{2-p}{p^2}$, 所以有$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{1-p}{p^2}$

3.3

i)证明$E(X)=\frac{1}{p}$

$$E(X)=\sum_{k=r}^{\infty}kP(X=k)=\sum_{k=r}^{\infty}k\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}$$

$= \frac{r}{p}\sum\limits_{k=r}^{\infty}\binom{k}{r}p^{r+1}(1-p)^{k-r}$

$= \frac{r}{p}\sum\limits_{k=r}^{\infty}\binom{k+1-1}{r+1-1}p^{r+1}(1-p)^{k-r}$

$= \frac{r}{p}$

ii)证明$E(X) = \frac{1}{p}$

$E(X^2) = \sum\limits_{k=r}^{\infty}k^2P(X=k) = \sum\limits_{k=r}^{\infty}k^2\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}$

$= \frac{r}{p}\sum\limits_{k=r}^{\infty}((k+1)-1)\binom{k}{r}p^r(1-p)^{k-r}$

$= \frac{r(r+1)}{p^2}\sum\limits_{k=r}^{\infty}\binom{k+1}{r+1}p^{r+1}(1-p)^{k-r} - \frac{r}{p}\sum\limits_{k=r}^{\infty}\binom{k}{r}p^r(1-p)^{k-r}$

$= \frac{r(r+1)}{p^2} - \frac{r}{p}$

所以有$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{r(1-p)}{p^2}$

3.4

首先, 我们知道$e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$

i)证明$E(X) = \lambda$

$E(X) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}kP(X=k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda$

ii)证明$Var(X) = \lambda$

$E(X^2) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}k^2P(X=k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$

$= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$

$= \lambda^2 + \lambda$

所以有$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\lambda$

3.5

规定初始根节点的高度为0, 向下高度依次加1.

假设第i次在高度为h_i处的叶子结点进行分裂扩展, 那么经过这次扩展之后,

所有叶子结点的高度之和改变量$\Delta h=2(h_i+1)-h_i=h_i+2$

在第$i-1$次扩展后, 我们有i个叶子结点, 设此时叶子结点的平均高度为ave_h_{i-1},

在第i次扩展后, 我们有$i+1$个叶子结点, 又因扩展时选取任一个叶子结点是等概率

事件, 故所有叶子结点的高度之和改变量$\overline{\Delta h}=ave_h_{i-1}+2$.

故扩展后叶子结点的平均高度$ave_h_i=\frac{ave_h_{i-1}+2+i\cdot ave_h_{i-1}}{i+1}=ave_h_{i-1}+\frac{2}{i+1}$

所以在这样的操作重复k次后, 叶节点的平均高度为:

$$\overline{h}=1+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\ldots+\frac{2}{k+1}=2\cdot(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{k+1})$$

3.6

i)有放回

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	$\frac{1}{10^5}$	$\frac{2^5-1^5}{10^5}$	$\frac{3^5-2^5}{10^5}$	$\frac{4^5-3^5}{10^5}$	$\frac{5^5-4^5}{10^5}$	$\frac{6^5-5^5}{10^5}$	$\frac{7^5-6^5}{10^5}$	$\frac{8^5-7^5}{10^5}$	$\frac{9^5-8^5}{10^5}$	$\frac{10^5-9^5}{10^5}$

ii)无放回

X	5	6	7	8	9	10
P	$\frac{1}{252}$	$\frac{5}{252}$	$\frac{15}{252}$	$\frac{35}{252}$	$\frac{70}{252}$	$\frac{126}{252}$

3.7

用随机变量X表示$100+x$个元件中废品的个数, 可知其服从参数为$100+x$和

0.01的二项分布, 应用泊松定理, $\lambda = np_n \approx 1$.

令事件A表示"这些元件中至少有100个符合规格"

$$P(A) = \sum_{i=0}^{x} \binom{100+x}{i} 0.01^i \cdot 0.99^{100+x-i} = \sum_{i=0}^{x} \frac{1}{e \cdot i!}$$

经过计算得x的最小值为3, 当$x=3$时, $P(A) = 0.981 > 0.95$,

3.8

P55 T2

(1)

X	3	4	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

(2)

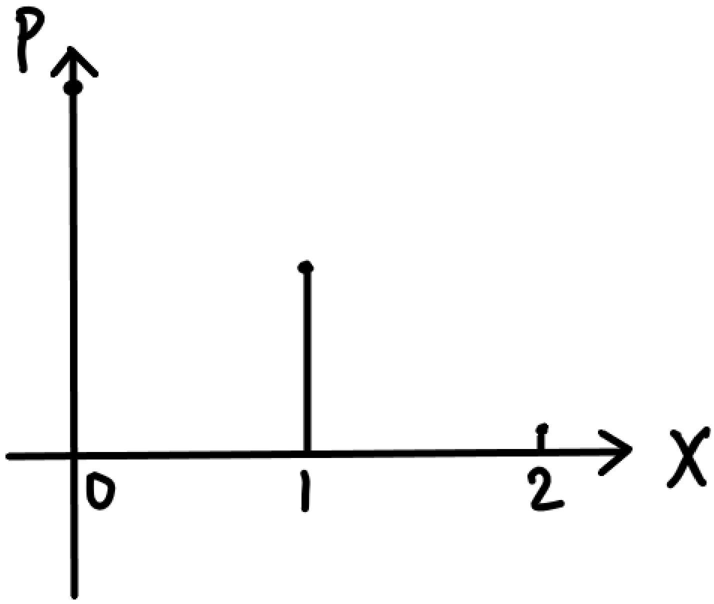
X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

P55 T3

(1)

X	0	1	2
P	$\frac{22}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

(2)



3.9

P113 T2

设事件A为"检验员检验完后调整设备"

$P(A) = 1 - 0.9^{10} - \binom{10}{1}0.1 \cdot 0.9^9 = 0.2639$

题设试验符合二项分布, 设随机变量X表示检验员一天调整设备次数, 则有

$X \sim B(4, 0.2639)$, 所以$E(X) = np = 1.0556$

P113 T3

分布列如下

X	1	2	3	4
P	$\frac{37}{64}$	$\frac{19}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{1}{64}$

由上有$E(X) = 1 \cdot \frac{37}{64} + 2 \cdot \frac{19}{64} + 3 \cdot \frac{7}{64} + 4 \cdot \frac{1}{64} = \frac{25}{16}$

3.10

P114 T4

(1)

因为$E(|X|)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{3^j}{j}\cdot\frac{2}{3^j}=2\cdot\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}$, 且调和级数是发散的, 所以此级数并非绝对收敛, X的数学期望不存在.

(2)

令随机变量X表示让游戏结束的摸球次数.

$P(X=1)=\frac{1}{2}$

$P(X=2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$

$P(X=3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}$

$\dots$

$P(X=k)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{k-1}{k}\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k+1}$

$\dots$

所以$E(X)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{k+1}+\cdots$

因为调和级数不收敛, 所以X的数学期望不存在.

P114 T6

(1)

$E(X)=-2\cdot 0.4+0+2\cdot 0.3=-0.2$

$E(X^2)=4\cdot 0.4+0+4\cdot 0.3=2.8$

$E(3X^2+5)=3E(X^2)+5=13.4$

(2)

由题意可得, $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

$$E(1/(X+1)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = e^{-\lambda} \frac{1}{\lambda} (e^{\lambda} - 1) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$$