HW1

201300016 雍语涵

Problem1

(a)

Prove:

利用Cauchy不等式，

$$||x+y|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^2+y_i^2+2x_iy_i)} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^2+y_i^2) + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}}$$

(b)

$\epsilon||x||^2 + \frac{1}{\epsilon}||y||^2$

$\geq 2 \cdot ||x|| \cdot ||y|| \geq 2xy$

$2xy \leq \epsilon||x||^2 + \frac{1}{\epsilon}||y||^2$

$||x+y||^2 = ||x||^2 + 2||x||\ ||y|| + ||y||^2 \leq (1+\epsilon)||x||^2 + (1+\frac{1}{\epsilon})||y||^2$

Problem 2

(a)

取任意的$x_1, x_2 \in P$

则x_1, x_2满足$Ax_1 < b, Ax_2 < b$

则$A[\theta x_1 + (1-\theta)x_2] = \theta Ax_1 + (1-\theta)Ax_2 < \theta b + (1-\theta)b = b$

故$\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in P$

所以P是一个凸集。

(b)

由S是一个凸集

可得$\forall x_1, x_2 \in S, \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in S$

故$A[\theta x_1 + (1-\theta)x_2] \in A(S)$

即$\theta Ax_1 + (1-\theta)Ax_2 \in A(S)$

又由x_1, x_2的任意性可知Ax_1, Ax_2也是任意的。

所以$A(S)$是一个凸集。

(c)

由S是一个凸集

可得$\forall Ax_1, Ax_2 \in S, \theta Ax_1 + (1-\theta)Ax_2 \in S$

故$\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in A^{-1}(S)$

又由Ax_1, Ax_2的任意性可知x_1, x_2也是任意的。

所以A^{-1}是一个凸集。

Problem 3

超平面的法向量为a，经过超平面$a^Tx = b$上点x_1的法线为$x = x_1 + ka(k \in R)$，则该法线与第二个超平面的交点满足：$a^T(x_1 + ka) = c$

所以$k = (c - a^Tx_1)/a^Ta$

所以$x_2 = x_1 + \frac{(c-a^Tx_1)a}{a^Ta} = x_1 + \frac{(c-b)a}{a^Ta}$

超平面的距离即为$||x_1 - x_2|| = ||\frac{(c-b)a}{a^Ta}|| = \frac{|c-b|}{||a||}$

Problem 4

(a)

$(\hat{x} + tv)^TA(\hat{x} + tv) + b^T(\hat{x} + tv) + c = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$

其中$\alpha = v^TAv, \beta = b^Tv + 2\hat{x}Av, \gamma = c + b^T\hat{x} + \hat{x}^TA\hat{x}$

C和直线的交点集是$\{\hat{x} + tv | \alpha t^2 + \beta t + \gamma \leq 0\}$

当$A \leq 0$时，$\forall v, \alpha \geq 0$，即C是一个凸集。

(b)

设超平面为$H = \{x | g^Tx + h = 0\}$，

$\delta = g^Tv, \epsilon = g^T\hat{x} + h$

令$\hat{x} \in H$，则$C \cap H$与直线的交点集是$\{\hat{x} + tv | \alpha t^2 + \beta t + \gamma \leq 0, \delta t = 0\}$

若$\delta \neq 0$，那么$t=0$，交点集就是$\{\hat{x}\}$，一定是一个凸集。

若$\delta = 0$，集合为$\{\alpha t^2 + \beta t + \gamma \leq 0\}$

当$\alpha > 0$时是一个凸集

若$\exists \lambda, A + \lambda g g^T \geq 0$

$\Rightarrow v^T A v = v^T (A + \lambda g g^T) v \geq 0$

所以$C \cap H$是一个凸集。

Problem 5

(a)

$\forall x \in K^*, \forall y_1, y_2 \in S, x^T y_2 \geq 0, x^T y_2 \geq 0$

故有$\theta x^T y_1 + (1-\theta) x^T y_2 = x^T (\theta y_1 + (1-\theta) y_2) \geq 0$

故$\theta y_1 + (1-\theta) y_2 \in K^*$

故K^*是一个凸锥

(b)

取$\forall y_2 \in K_2^*$

即$\forall x_2 \in K_2, x_2^T y_2 \geq 0$

因为$K_1 \subseteq K_2$

所以$\forall x_1 \in K_1, x_1^T y_2 \geq 0$

所以$\forall y_2 \in K_2^*, x_1^T y_2 \geq 0$

所以$K_2^* \subseteq K_1^*$