201300005 俞睿

2.1 阐述独立与互不相容的关系.

$P(A)P(B)>0$，若事件A和B互不相容，则不独立；若A和B独立，则不互不相容。

2.2 若事件 A, B, C 独立, 证明: A 与事件 $B\cup C$ 独立.

证明：因为A,B,C独立，所以

$P(AB)=P(A)P(B), P(AC)=P(A)P(C), P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

$P(A(B\cup C))=P(AB\cup AC)=P(AB)+P(AC)-P((AB)\cap(AC))$

$=P(A)P(B)+P(A)P(C)-P(ABC)=P(A)P(B)+P(A)P(C)-P(A)P(B)P(C)$

$=P(A)(P(B)+P(C)-P(B)P(C))=P(A)P(B\cup C)$

得证，A与事件$B\cup C$独立。

2.3 书上的习题: 书 26 页到 28 页: 22, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 37, 39.

22. 一学生接连参加同一课程的两次考试. 第一次及格的概率为 p，若第一次及格则第二次及格的概率也为 p；若第一次不及格则第二次及格的概率为 $p/2$.

(1) 若至少有一次及格则他能取得某种资格，求他取得该资格的概率.

(2) 若已知他第二次已经及格，求他第一次及格的概率.

记取得该资格为事件B，第 i 次及格为事件A_i

(1) $P(A_2|A_1)=p, P(A_2|\overline{A_1})=\frac{p}{2}$

由全概率公式，$P(A_2)=P(A_1A_2)+P(\overline{A_1}A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})$

$=p^2+(1-p)\frac{p}{2}=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}p$

$P(B)=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=p+\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}p-p^2=\frac{3}{2}p-\frac{1}{2}p^2$

答：取得该资格的概率为$\frac{3}{2}p-\frac{1}{2}p^2$

(2) 由贝叶斯公式，

$$P(A_1|A_2)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}=\frac{P(A_1)P(A_2|A_1)}{P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})}=\frac{p^2}{p^2+(1-p)\frac{1}{2}p}=\frac{2p}{p+1}$$

答：在第二次及格的情况下，第一次及格的概率为$\frac{2p}{p+1}$。

27. 设本题涉及的事件均有意义. 设 A, B 都是事件.

(1) 已知 $P(A)>0$，证明 $P(AB|A)\geqslant P(AB|A\cup B)$.

(2) 若 $P(A|B)=1$，证明 $P(\overline{B}|\overline{A})=1$.

(3) 若设 C 也是事件，且有 $P(A|C)\geqslant P(B|C)$，$P(A|\overline{C})\geqslant P(B|\overline{C})$，证明 $P(A)\geqslant P(B)$.

(1) $P(AB|A)=\dfrac{P(ABA)}{P(A)}=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$

$$P(AB|A\cup B)=\frac{P(AB(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(ABA\cup ABB)}{P(A\cup B)}=\frac{P(AB)}{P(A\cup B)}$$

因为$0<P(A)\le P(A\cup B)$

所以$P(AB|A)\ge P(AB|A\cup B)$

得证。

(2) $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=1$，所以$P(AB)=P(B)$

$$P(\overline{A}|\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cdot\overline{B})}{P(\overline{A})}=\frac{P(\overline{A\cup B})}{P(\overline{A})}=\frac{1-P(A\cup B)}{P(\overline{A})}=\frac{1-(P(A)+P(B)-P(AB))}{1-P(A)}=1$$

得证。

(3) 由全概率公式，
$$P(A)=P(A|C)P(C)+P(A|\overline{C})P(\overline{C})\ge P(B|C)P(C)+P(B|\overline{C})P(\overline{C})=P(B)$$

得证。

28. 有两种花籽，发芽率分别为 0.8，0.9，从中各取一颗，设各花籽是否发芽相互独立．求

（1）这两颗花籽都能发芽的概率．

（2）至少有一颗能发芽的概率．

（3）恰有一颗能发芽的概率．

记第一颗花籽能发芽为事件A，第二颗花籽能发芽为事件B

(1) 由于A，B相互独立，$P(AB)=P(A)P(B)=0.8\times0.9=0.72$

答：这两颗花籽都能发芽的概率为0.72

(2) 记至少有一颗能发芽为事件C

$$P(\overline{A}\cdot\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=(1-0.8)\times(1-0.9)=0.02$$

$$P(C)=P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\overline{A}\cdot\overline{B})=0.98$$

答：至少有一颗能发芽的概率为0.98

(3) 记恰好有一颗能发芽为事件D

$$P(D)=P(A\cdot\overline{B})+P(B\cdot\overline{A})=P(A)P(\overline{B})+P(B)P(\overline{A})=0.8\times0.1+0.9\times0.2=0.26$$

答：恰好有一颗能发芽的概率为0.26

30.（1）给出事件 A、B 的例子，使得

(i) $P(A|B)<P(A)$，　(ii) $P(A|B)=P(A)$，　(iii) $P(A|B)>P(A)$．

（2）设事件 A,B,C 相互独立，证明(i) C 与 AB 相互独立．(ii) C 与 $A\cup B$ 相互独立．

（3）设事件 A 的概率 $P(A)=0$，证明对于任意另一事件 B，有 A,B 相互独立．

（4）证明事件 A,B 相互独立的充要条件是 $P(A|B)=P(A|\overline{B})$．

(1) (i) 记事件B为$\overline{A}$

(ii) A，B事件相互独立

(iii) 事件B为A

(2) (i) 由A，B，C相互独立，$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，$P(AB)=P(A)P(B)$

所以$P(ABC)=P(AB)P(C)$

所以C与AB相互独立

(ii) $P(A\cup B|C)=P(A|C)+P(B|C)-P(AB|C)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A\cup B)$

故$P((A\cup B)C)=P(A\cup B|C)P(C)=P(A\cup B)P(C)$

得证：C与$A\cup B$相互独立

(3) $P(AB)=0=P(A)P(B)$，故A、B相互独立

(4) 充分性：$P(A|B)=P(A|\overline{B})$，由全概率公式，
$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=P(A|B)$

所以A，B独立

必要性：A，B独立，故A，$\overline{B}$也独立，

故$P(AB)=P(A|B)P(B)=P(A)P(B)$，$P(A\overline{B})=P(A|\overline{B})P(\overline{B})=P(A)P(\overline{B})$

$P(A|B)=P(A)=P(A|\overline{B})$

31. 设事件 A,B 的概率均大于零，说明以下的叙述(1) 必然对.(2) 必然错.(3) 可能对.并说明理由.

(1) 若 A 与 B 互不相容，则它们相互独立.

(2) 若 A 与 B 相互独立，则它们互不相容.

(3) $P(A)=P(B)=0.6$，且 A,B 互不相容.

(4) $P(A)=P(B)=0.6$，且 A,B 相互独立.

(1) 必然错。

若A与B互不相容，则在A的条件下，B的概率为0。$P(B|A)=0$，$P(B)>0$

故$P(B|A)\neq P(B)$，$P(AB)\neq P(A)P(B)$，所以它们并不相互独立

(2) 必然错。

若A与B相互独立，则$P(AB)=P(A)P(B)>0$，所以它们不是互不相容

(3) 必然错

$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geq 0.6+0.6-1=0.2\neq 0$，所以它们不是互不相容

(4) 可能对

如果A，B在空间中都是均匀分布，那么A、B相互独立

如果A=B，那么A、B并不相互独立

32. 有一种检验艾滋病毒的检验法，其结果有概率 0.005 报导为假阳性(即不带艾滋病毒者，经此检验法有 0.005 的概率被认为带艾滋病毒). 今有 140 名不带艾滋病毒的正常人全部接受此种检验，被报道至少有一人带艾滋病毒的概率为多少？

记被报道至少有一人带艾滋病毒为事件A

$P(A)=1-P(\overline{A})=1-(0.995)^{140}=0.504$

答：被报道至少有一人带艾滋病毒的概率为0.504

33. 盒中有编号为 1,2,3,4 的 4 只球，随机地自盒中取一只球，事件 A 为“取得的是 1 号或 2 号球”，事件 B 为“取得的是 1 号或 3 号球”，事件 C 为“取得的是 1 号或 4 号球”验证：

$$P(AB)=P(A)P(B),P(AC)=P(A)P(C),P(BC)=P(B)P(C),$$

但 $$P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C),$$

即事件 A,B,C 两两独立，但 A,B,C 不是相互独立的.

记取到编号为 i 的球为事件X_i

$P(A|B)=P(X_1\cup X_2|X_1\cup X_3)=P(X_1|X_1\cup X_3)+P(X_2|X_1\cup X_3)-P(X_1\cap X_2|X_1\cup X_3)$

$=P(X_1|X_1\cup X_3)=\frac{1}{2}$

$P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，所以$P(A|B)=P(A)$

由条件概率定义，$P(AB)=P(A|B)P(B)=P(A)P(B)$

同理，$P(AC)=P(A|C)P(C)=P(A)P(C)$

$P(BC)=P(B|C)P(C)=P(B)P(C)$

欲证$P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C)$

$P(ABC)=P(A|BC)P(BC)=P(A|BC)P(B)P(C)$，证明$P(A|BC)\neq P(A)$即可

$BC=(X_1\cup X_3)\cap(X_1\cup X_4)=(X_1\cap X_1)\cup(X_3\cap X_1)\cup(X_1\cap X_4)\cup(X_3\cap X_4)=X_1$

$P(A|BC)=P(X_1\cup X_2|X_1)=1$，$P(A)=\frac{1}{2}$，$P(A|BC)\neq P(A)$

得证。

37. 设第一只盒子中装有 3 只蓝球，2 只绿球，2 只白球；第二只盒子中装有 2 只蓝球，3 只绿球，4 只白球. 独立地分别在两只盒子中各取一只球.

(1) 求至少有一只蓝球的概率.

(2) 求有一只蓝球一只白球的概率.

(3) 已知至少有一只蓝球，求有一只蓝球一只白球的概率.

(1) 记至少有一只蓝球为事件A

$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{4}{7}\times\frac{7}{9}=\frac{5}{9}$

答：至少有一只蓝球的概率为$\frac{5}{9}$

(2) 记有一只蓝球一只白球为事件B

$P(B)=\frac{3}{7}\times\frac{4}{9}+\frac{2}{7}\times\frac{2}{9}=\frac{16}{63}$

答：有一只蓝球一只白球的概率为$\frac{16}{63}$

(3) 如果同时为事件A、B，可能的情况只有一种：一个蓝球，一个白球

$P(AB)=P(B)=\frac{16}{63}$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{16}{63}}{\frac{5}{9}}=\frac{16}{35}$$

答：在至少有一只蓝球的情况下，有一只蓝球一只白球的概率为$\frac{16}{35}$

39. 设根据以往记录的数据分析，某船只运输的某种物品损坏的情况共有三种：损坏 2%（这一事件记为 A_1），损坏 10%（事件 A_2），损坏 90%（事件 A_3），且知 $P(A_1)=0.8$，$P(A_2)=0.15$，$P(A_3)=0.05$. 现在从已被运输的物品中随机地取 3 件，发现这 3 件都是好的（这一事件记为 B）. 试求 $P(A_1|B)$，$P(A_2|B)$，$P(A_3|B)$（这里设物品件数很多，取出一件后不影响取后一件是否为好品的概率）.

$P(B|A_1)=(0.98)^3\approx 0.941$，$P(B|A_2)=(0.9)^3=0.729$，$P(B|A_3)=(0.1)^3=0.001$

$\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=0.8\times 0.941+0.15\times 0.729+0.05\times 0.001\approx 0.862$

由贝叶斯公式，$P(A_1|B)=\dfrac{P(A_1B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}=\dfrac{0.8\times 0.941}{0.862}\approx 0.873$

$P(A_2|B)=\dfrac{0.15\times 0.729}{0.862}\approx 0.127$

$P(A_3|B)=\dfrac{0.05\times 0.001}{0.862}\approx 0.00006$