

其中  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  和  $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ .

证明作为练习题, 仅仅要求证明  $m = n$  且  $|A| \neq 0$  的情况.

## 5.4 多维随机变量函数的分布

本节我们研究已知  $(X, Y)$  的分布, 求  $Z = g(X, Y)$  的分布. 若  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是  $n$  维离散型随机变量, 那么  $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为一维随机变量, 其分布列可以通过如下两步求得:

- i) 对  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的各种取值, 计算随机变量  $Z$  的取值;
- ii) 对相同的  $Z$  值, 合并其概率.

**例 5.10** 设  $(X, Y)$  的联合分布列为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/4	1/6	1/8
1	1/4	1/8	1/12

求  $Z_1 = X + Y$  和  $Z_2 = XY$  的分布列.

**解** 通过简单计算、合并可得  $Z_1$  和  $Z_2$  的分布列分别为:

$Z_1$	0	1	2	3
$P$	1/4	5/12	1/4	1/12

$Z_2$	0	1	2
$P$	19/24	1/8	1/12

对于连续随机变量  $(X, Y)$ , 其联合概率密度为  $f(x, y)$ , 如何求解随机变量  $Z = g(X, Y)$  的概率密度. 针对此类问题, 主要求解思路为分布函数法, 即:

- i) 求  $Z = g(X, Y)$  的分布函数

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(g(x, y) \leq z) = \int \int_{g(x, y) \leq z} f(x, y) dx dy.$$

- ii) 求  $Z$  的密度函数

$$f_Z(z) = F'_Z(z).$$

### 5.4.1 极大极小分布

设随机变量  $X$  和  $Y$  相互独立, 其分布函数分别为  $F_X(x)$  和  $F_Y(y)$ , 求随机变量

$$Z_1 = \max(X, Y) \quad \text{和} \quad Z_2 = \min(X, Y)$$

的分布函数和概率密度函数. 首先求  $Z_1$  的分布函数为

$$\begin{aligned} F_{Z_1}(z_1) &= P(Z_1 \leq z_1) \\ &= P(\max(X, Y) \leq z_1) = P(X \leq z_1, Y \leq z_1) \\ &= P(X \leq z_1)P(Y \leq z_1) = F_X(z_1)F_Y(z_1). \end{aligned}$$

进一步求解  $Z_2$  的分布函数为

$$\begin{aligned} F_{Z_2}(z_2) &= P(Z_2 \leq z_2) \\ &= P(\min(X, Y) \leq z_2) = 1 - P(\min(X, Y) > z_2) \\ &= 1 - P(X > z_2)P(Y > z_2) = 1 - (1 - F_X(z_2))(1 - F_Y(z_2)). \end{aligned}$$

上述结论可进一步推广到  $n$  个独立的随机变量有

**引理 5.1** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为  $n$  个相互独立的随机变量, 其分布函数分别为  $F_{X_i}(x_i)$ , 则随机变量  $Y = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的分布函数为

$$F_Y(y) = F_{X_1}(y)F_{X_2}(y) \cdots F_{X_n}(y),$$

随机变量  $Z = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的分布函数为

$$F_Z(z) = 1 - (1 - F_{X_1}(z))(1 - F_{X_2}(z)) \cdots (1 - F_{X_n}(z)).$$

特别地, 当  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立同分布时, 则有

$$F_Y(y) = (F_{X_1}(y))^n \quad \text{和} \quad F_Z(z) = 1 - (1 - F_{X_1}(z))^n.$$

根据分布函数可进一步求得概率密度.

**例 5.11** 假设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 且有  $X \sim e(\alpha)$  和  $Y \sim e(\beta)$ , 求随机变量  $Z_1 = \max(X, Y)$  和  $Z_2 = \min(X, Y)$  的概率密度.

**解** 根据指数随机变量的定义可知随机变量  $X$  和  $Y$  的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{和} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y} & y \geq 0 \\ 0 & y \leq 0. \end{cases}$$

于是得到随机变量  $Z_1$  的分布函数为

$$F_{Z_1}(z_1) = F_X(z_1)F_Y(z_1) = \int_{-\infty}^{z_1} f_X(t)dt \int_{-\infty}^{z_1} f_Y(t)dt.$$

当  $z_1 \leq 0$  时由  $F_{Z_1}(z_1) = 0$ ; 当  $z_1 > 0$  时

$$F_{Z_1}(z_1) = \int_0^{z_1} f_X(t)dt \int_0^{z_1} f_Y(t)dt = \int_0^{z_1} \alpha e^{-\alpha t} dt \int_0^{z_1} \beta e^{-\beta y} dy = (1 - e^{-\alpha z_1})(1 - e^{-\beta z_1}).$$

两边对  $z_1$  求导可得其概率密度为

$$f_{Z_1}(z_1) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z_1} + \beta e^{-\beta z_1} - (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)z_1} & z_1 \geq 0 \\ 0 & z_1 < 0. \end{cases}$$

同理可得随机变量  $Z_2$  的分布函数和概率密度分别为

$$F_{Z_2}(z_2) = \begin{cases} 1 - e^{-(\alpha+\beta)z_2} & z_2 \geq 0 \\ 0 & z_2 < 0 \end{cases} \quad f_{Z_2}(z_2) = \begin{cases} (\alpha + \beta)e^{-(\alpha+\beta)z_2} & z_2 \geq 0 \\ 0 & z_2 < 0. \end{cases}$$

#### 5.4.2 和的分布 $Z = X + Y$

**引理 5.2** 设随机变量  $(X, Y)$  的联合密度为  $f(x, y)$ , 则随机变量  $Z = X + Y$  的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx \quad \text{或} \quad f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)dy.$$

**解** 首先求解分布函数

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) \\ &= \int \int_{x+y \leq z} f(x, y)dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^z f(x, u-x)du \quad (\text{变量替换 } u = y+x) \\ &= \int_{-\infty}^z \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, u-x)dx \right) du \end{aligned}$$

两边同时对  $z$  求导数可得

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx.$$

下面给出著名的卷积公式:

**定理 5.10** 若连续随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 其概率密度函数分别为  $f_X(x)$  和  $f_Y(y)$ , 则随机变量  $Z = X + Y$  的密度函数为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy.$$

若离散随机变量  $X$  与  $Y$  独立, 其分布列为  $a_i = P(X = i)$  和  $b_j = P(Y = j)$  ( $i, j = 0, 1, \dots$ ), 则随机变量  $Z = X + Y$  的分布列为

$$P(Z = X + Y = k) = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}.$$

对于常见的分布, 我们有如下系列定理:

**定理 5.11** 若随机变量  $X \sim B(n_1, p)$  和  $Y \sim B(n_2, p)$  独立, 则

$$Z = X + Y \sim B(n_1 + n_2, p).$$

根据此定理可推出: 若  $X_i \sim \text{Ber}(p) = B(1, p)$ , 那么  $\sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, p)$ .

**证明** 由卷积公式可得

$$\begin{aligned} P[Z = k] &= \sum_{i=0}^k P[X = i]P[Y = k - i] \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{n_1}{i} p^i (1-p)^{n_1-i} \binom{n_2}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n_2-(k-i)} \\ &= p^k (1-p)^{n_1+n_2-k} \sum_{i=0}^k \binom{n_1}{i} \binom{n_2}{k-i} \\ &= \binom{n_1+n_2}{k} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k}. \end{aligned}$$

**定理 5.12** 若随机变量  $X \sim P(\lambda_1)$  和  $Y \sim P(\lambda_2)$  相互独立, 则

$$Z = X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2).$$

**证明** 由泊松分布的定义可知: 当  $i \geq 0$  和  $j \geq 0$  时有

$$P(X = i) = \frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_1} \quad \text{和} \quad P(Y = j) = \frac{\lambda_2^j}{j!} e^{-\lambda_2}.$$

根据卷积公式有

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{i=0}^k P(X = i, Y = k - i) = \sum_{i=0}^k P(X = i)P(Y = k - i) \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{\lambda_1^i}{i!} \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} (\lambda_1 + \lambda_2)^k. \end{aligned}$$

**定理 5.13** 若随机变量  $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$  和  $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$  相互独立, 则

$$X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

**证明** 首先证明随机变量  $Z = X' + Y' = X - \mu_1 + Y - \mu_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ , 其中  $X' \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$  和  $Y' \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$ . 根据卷积公式有

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(z-x)^2}{2\sigma_2^2}} dx \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} \left(x - \frac{\sigma_1^2 z}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)^2 - \frac{z^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} dx \\ &= \frac{e^{-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} \left(x - \frac{\sigma_1^2 z}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)^2} dx \\ &= \frac{e^{-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}. \end{aligned}$$

由此可得  $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ , 进一步证明  $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ .

**例 5.12** 若随机变量  $X \sim e(\lambda_1)$  和  $Y \sim e(\lambda_2)$  相互独立, 求  $Z = X + Y$  的分布函数和概率密度.

**例 5.13** 设随机变量  $X \sim U(0, 1)$  和  $Y \sim U(0, 1)$  相互独立, 求  $Z = X + Y$  的概率密度.

**解** 由卷积公式可得

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx.$$

由  $X \sim U(0, 1)$  和  $Y \sim U(0, 1)$  可知: 当  $x \in [0, 1]$  时有  $f_X(x) = 1$ ; 当  $z-x \in [0, 1]$  时有  $f_Y(z-x) = 1$ , 即积分区域为  $\{x \in [0, 1], z-x \in [0, 1]\}$ . 由此可得

- 当  $z \leq 0$  或  $z \geq 2$  时, 有  $f_Z(z) = 0$ ;
- 当  $z \in (0, 1)$  时, 有  $f_Z(z) = \int_0^z 1 dz = z$ ;
- 当  $z \in [1, 2)$  时, 有  $f_Z(z) = \int_{z-1}^1 1 dx = 2 - z$ .

**例 5.14** 设随机变量  $X \sim U(0, 1)$  和  $Y \sim e(1)$  相互独立, 求  $Z = X + Y$  的概率密度.

**解** 由卷积公式有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx.$$

由于  $X \sim U(0, 1)$  和  $Y \sim e(1)$  可知  $f_X(x) f_Y(z-x) \neq 0$  的区域为  $\{x \in [0, 1], z \geq x\}$ . 因此有

- 当  $z \leq 0$  时有  $f_Z(z) = 0$ ;
- 当  $0 \leq z \leq 1$  时有  $f_Z(z) = \int_0^z e^{-(z-x)} dx = e^{-z}(e^z - 1) = 1 - e^{-z}$ ;
- 当  $z \geq 1$  时有  $f_Z(z) = \int_0^1 e^{-(z-x)} dx = e^{-z}(e^1 - 1) = (e - 1)e^{-z}$ .

#### 5.4.3 随机变量的乘/除法分布

**定理 5.14** 设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为  $f(x, y)$ , 则随机变量  $Z = XY$  的概率密度为

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} f(x, \frac{z}{x}) dx,$$

随机变量  $Z = Y/X$  的概率密度为

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, xz) dx.$$

**证明** 这里给出随机变量  $Z = Y/X$  的概率密度详细证明, 同理给出  $Z = XY$  的概率密度. 首先考虑分布函数

$$\begin{aligned} F_{Y/X}(z) &= P(Y/X \leq z) = \iint_{y/x \leq z} f(x, y) dx dy \\ &= \iint_{x < 0, y \geq zx} f(x, y) dx dy + \iint_{x > 0, y \leq zx} f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^0 dx \int_{zx}^{+\infty} f(x, y) dy + \int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{xz} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

变量替换  $t = y/x$  有

$$\begin{aligned} F_{Y/X}(z) &= \int_{-\infty}^0 dx \int_z^{-\infty} x f(x, tx) dt + \int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^z x f(x, tx) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^z (-x) f(x, tx) dt dx + \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^z x f(x, tx) dt dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^z |x| f(x, tx) dt dx = \int_{-\infty}^z dt \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x, tx) dx \end{aligned}$$

求导可得概率密度函数.

#### 5.4.4 随机变量的联合分布函数

已知随机变量  $(X, Y)$  的联合概率密度为  $f(x, y)$ , 设  $(X, Y)$  的函数

$$U = g_1(X, Y) \quad V = g_2(X, Y)$$

如何求  $(U, V)$  的联合分布, 有如下结论: