- 相关系数 $\rho = 0$ 称 $X$ 与 $Y$ 不相关(线性不相关). 独立 $\Rightarrow$ 不相关, 不相关 $\not\Leftarrow$ 独立;
- 随机变量 $X$ 与 $Y$ 不相关, 仅表示 $X$ 与 $Y$ 之间无线性关系, 还可能存在其他关系. 例如: $X \sim U[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $Y = cos(X)$. 易有$E(X) = 0$,

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\ &= E[X \cdot \cos(X) - XE(\cos(X))] = E[X \cdot \cos(X)] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x \cdot \cos(x) dx = 0. \end{aligned}$$

**定理 5.19** 对方差不为零的随机变量 $X$ 和 $Y$, 下述条件相互等价:

- $\rho_{XY} = 0$
- $Cov(X,Y) = 0$
- $E(XY) = E(X)E(Y)$
- $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$

**定理 5.20** 对二维正态分布

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right),$$

有 $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, 以及 $Cov(X,Y) = \rho\sigma_1\sigma_2$, 即参数 $\rho$ 为 $X$ 与 $Y$ 的相关系数; $X$ 与 $Y$ 独立 $\Longleftrightarrow$ $X$ 与 $X$ 不相关 (此结论仅限于正太分布).

**例 5.19** 随机变量 $(X,Y)$ 联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)/8 & 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求 $Cov(X,Y), Var(X+Y)$.

**解** 根据协方差的定义有 $Cov(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$, 需要计算

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^2 \int_0^2 x(x+y)/8 dxdy = 7/6, \\ E[Y] &= \int_0^2 \int_0^2 y(x+y)/8 dxdy = 7/6, \\ E[XY] &= \int_0^2 \int_0^2 xy(x+y)/8 dxdy = 4/3, \end{aligned}$$

由此可得 $Cov(X,Y)=4/3-(7/6)^2=-1/36$. 进一步计算

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_0^2\int_0^2 x^2(x+y)/8dxdy = 5/3, \\ E[Y^2] &= \int_0^2\int_0^2 y^2(x+y)/8dxdy = 5/3, \end{aligned}$$

由此可得 $Var(X)=Var(Y)=5/3-(7/6)^2=11/36$, 由此可得

$$\begin{aligned} Var(X+Y) &= Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)=11/18-1/18=5/9, \\ \rho_{XY} &= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}=-1/11. \end{aligned}$$

**例 5.20** 设随机变量 $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ 和 $Y\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ 相互独立. 求 $Z_1=\alpha X+\beta Y$ 和 $Z_2=\alpha X-\beta Y$ 的相关系数 $(\alpha,\beta\neq 0)$.

**解** 根据正态分布的定义有

$$\begin{aligned} Cov(Z_1,Z_2) &= Cov(\alpha X+\beta Y,\alpha X-\beta Y)=(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2 \\ Var(Z_1) &= Cov(\alpha X+\beta Y,\alpha X+\beta Y)=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2 \\ Var(Z_2) &= Cov(\alpha X-\beta Y,\alpha X-\beta Y)=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2 \end{aligned}$$

由此可知 $\rho_{XY}=(\alpha^2-\beta^2)/(\alpha^2+\beta^2)$.

**例 5.21** 随机变量 $X\sim\mathcal{N}(-1,2)$ 和 $Y\sim\mathcal{N}(1,8)$, 且相关系数 $\rho_{XY}=-1/2$. 求 $Var(X+Y)$.

### 5.5.3 随机向量的数学期望与协方差阵

**定义 5.14** 设 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^\top$, 则随机向量的期望

$$E(X)=(E(X_1),E(X_2),\cdots,E(X_n))^\top,$$

称随机变量 $X$ 的协方差矩阵为

$$Cov(X)=\Sigma=\begin{pmatrix} Cov(X_1,X_1) & \cdots & Cov(X_1,X_n) \\ Cov(X_2,X_1) & \cdots & Cov(X_2,X_n) \\ \vdots & & \vdots \\ Cov(X_n,X_1) & \cdots & Cov(X_n,X_n) \end{pmatrix}.$$

**定理 5.21** 随机变量 $X$ 的协方差矩阵是对称半正定的矩阵.

**证明** 证明根据函数的

$$
\begin{aligned}
f(t_1,t_2,\ldots,t_n) &= (t_1,t_2,\ldots,t_n)\begin{pmatrix} Cov(X_1,X_1) & \cdots & Cov(X_1,X_n) \\ Cov(X_2,X_1) & \cdots & Cov(X_2,X_n) \\ \vdots & & \vdots \\ Cov(X_n,X_1) & \cdots & Cov(X_n,X_n) \end{pmatrix}(t_1,t_2,\ldots,t_n)^\top \\
&= E[(t_1(X_1-E[X_1])+t_2(X_2-E[X_2])+\cdots+t_n(X_n-E[X_n]))^2] \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

**定理 5.22** 设多维正态分布 $X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)^\top \sim N(\mu,\Sigma)$, 则有

$$\mu=(E[X_1],E[X_2],\ldots,E[X_n])^\top \quad 和 \quad \Sigma=[Cov(X_i,X_j)]_{n\times n}.$$

对多维随机变量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n) \sim \mathcal{N}(\mu,\Sigma)$, 有

- 每个变量$X_i$的边缘分布是正态分布;
- $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立 $\Longleftrightarrow$ $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互不相关;
- $X\sim\mathcal{N}(\mu,\Sigma) \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^n a_iX_i$ 是正态分布(对任意非全为0常数$a_1,a_2,\ldots,a_n$).

## 5.6 条件分布与条件期望

前面学过随机事件的条件概率, 即在事件 $B$ 发生的条件下事件 $A$ 发生的条件概率

$$P(A|B)=P(AB)/P(B).$$

相关概念可推广到随机变量: 给定随机变量 $Y$ 取值条件下求随机变量 $X$ 的概率分布, 即条件分布.

首先考虑离散型随机变量:

**定义 5.15** 设二维离散型随机变量 $(X,Y)$ 的分布列为 $\{p_{ij}\}$, 若 $Y$ 的边缘分布 $P(Y=y_j)=p_{\cdot j}>0$, 称

$$P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \quad (i=1,2,\cdots)$$

在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 $X$ 的条件分布列.

类似可定义在 $X=x_i$ 条件下随机变量 $Y$ 的条件分布列. 条件分布是一种概率分布, 具有分布的性质. 例如, 非负性 $P(X=x_i|Y=y_j)\geqslant 0$, 规范性 $\sum_{i=1}^{\infty} P(X=x_i|Y=y_j)=1$ 等性质.

**例 5.22** 一个选手击中目标的概率为 $p$, 射击进行到击中两次目标为止, 用 $X$ 表示首次击中目标所进行的射击次数, 用 $Y$ 表示第二次射中目标所进行的射击次数, 求 $X$ 和 $Y$ 的联合分布和条件分布.

**解** 随机变量 $X=m$ 表示首次击中目标射击了 $m$ 次, $Y=n$ 表示第二次次击中目标射击了 $n$ 次, 则 $X$ 和 $Y$ 的联合分布列为:

$$P\{X=m,Y=n\}=f(x,y)=\begin{cases}p^2(1-p)^{n-2} & 1\leqslant m<n<\infty\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

由此可得 $X$ 的边缘分布列为

$$P\{X=m\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}p^2(1-p)^{n-2}=p^2\frac{(1-p)^{m-1}}{1-(1-p)}=p(1-p)^{m-1}.$$

同理得到随机变量 $Y$ 的边缘分布列为

$$P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}P\{X=m,Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}p^2(1-p)^{n-2}=(n-1)p^2(1-p)^{n-2}(n=2,3,\cdots).$$

因此, 当 $n=2,3,\cdots$ 时, 随机变量 $X$ 在 $Y=n$ 条件下的分布列为:

$$P\{X=m|Y=n\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{Y=n\}}=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}=\frac{1}{n-1}\quad m=1,2,\cdots,n-1.$$

当 $m=1,2,3,\cdots$ 时, 随机变量 $Y$ 在 $X=m$ 条件下的分布列为:

$$P\{Y=n|X=m\}=\frac{P\{X=m,Y=n\}}{P\{X=m\}}=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{p(1-p)^{m-1}}=p(1-p)^{n-m-1}\quad n=m+1,m+2,\cdots$$

对于连续型随机变量 $(X,Y)$, 对任意 $x,y\in(-\infty,+\infty)$, 有 $P(X=x)=0$ 和 $P(Y=y)=0$ 成立, 因此不能利用离散随机变量的条件概率推导连续随机变量的条件分布. 下面给出条件概率的定义:

**定义 5.16** 设连续随机变量 $(X,Y)$ 的联合概率密度为 $f(x,y)$, 以及 $Y$ 的边缘概率密度为 $f_Y(y)$, 对任意 $f_Y(y)>0$, 称

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

在 $Y=y$ 条件下随机变量 $X$ 的条件概率密度; 称

$$F_{X|Y}(x|y)=P\{X\leqslant x|Y=y\}=\int_{-\infty}^{x}f_{X|Y}(u|y)du$$

为 $Y=y$ 条件下 $X$ 的条件分布函数.