```
n_A ← 0
For i = 1 : N
    x ← Random(0, 60)
    y ← Random(0, 60)
    If |x − y| ⩽ 15 then
        n_A ← n_A + 1
    Endif
Endfor
Return n_A/N
```

1.4 组合计数*

在古典概型中, 概率的计算往往都与组合计数密切相关, 同时组合计数在人工智能、计算机等领域具有广泛的应用, 因此本节将简要地介绍经典的组合计数: 十二重计数 (The twelvefold way). 该计数由著名组合学大师 G.-C. Rota (1932-1999) 首先提出, 最初的问题表述为在满足一定条件下的两个集合之间函数映射的个数.

为可读性起见, 这里采用更为简洁的表述: 将 n 只不同 (或相同) 的球放入 m 个不同 (或相同) 的箱子, 考虑在无任何限制、或每个箱子至多放一球、或每个箱子至少放一球这三种条件下有多少种不同的放法. 下表首先给出相应的计数结果, 后面将一一说明.

表 1.3 将 n 只球放入 m 个箱子, 在三种条件下各有多少种不同的放法.

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多放一球	每个箱子至少放一球
不同	不同	m^n	$(m)_n$	$m!S(n,m)$
相同	不同	$\binom{n+m-1}{n}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$
不同	相同	$\sum\limits_{k=1}^{m} S(n,k)$	$\begin{cases}1 & n\leqslant m\\ 0 & n>m\end{cases}$	$S(n,m)$
相同	相同	$\sum\limits_{k=1}^{m} p(n,k)$	$\begin{cases}1 & n\leqslant m\\ 0 & n>m\end{cases}$	$p(n,m)$

1.4.1 排列、环排列、组合与多重组合

在古典概型中, 我们简要地介绍了排列, 即从 n 个不同的元素中无放回地取出 r 个元素进行排列, 此时既要考虑取出的元素, 也要顾及其排列顺序, 则有 $(n)_r = n(n-1)\cdots(n-r+1)$ 种不同的排列. 若 $r = n$ 时称全排列, 有 $n!$ 种.

若从 n 个不同的元素中无放回地取出 r 个元素排成一个圆环, 称为 **环排列**. 按照顺时针看: 环排列 a-b-c-a, b-c-a-b 和 c-a-b-c 是同一个环排列, 而 a-c-b-a 则为不同的环排列. 因此对从 n 个不同的元素中无放回地取出 r 个元素进行环排列, 每一个环排列对应于 r 种不同的直线排列, 而且不同的环排列对应的直线排列互不相同. 因此有

定义 1.6 若从 n 个不同的元素中无放回地取出 r 个元素排成一个圆环, 有 $(n)_r/r$ 种不同的排法, 称为 **环排列数**, 特别地, n 个不同元素的环排列数为 $(n-1)!$.

在前一节简要地介绍了组合数, 即从 n 个不同的元素中无放回地取出 r 个元素, 取出的元素之间无顺序关系, 共有 $\binom{n}{r}$ 种不同的取法. 这里给出一些关于组合数的恒等式, 其证明将作为练习题.

$$\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1},\quad \binom{m+n}{r}=\sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i},\quad \binom{2n}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2.$$

下面将组合的概念进行推广到多重组合.

定义 1.7 将 n 个不同的元素分成 k 组, 组内元素无顺序关系, 每组分别有 $r_1,r_2,\cdots,r_k$ 个元素, 即 $n=r_1+\cdots+r_k$ 且 $r_1,r_2,\cdots,r_k$ 为正整数, 则有

$$\binom{n}{r_1,r_2,\cdots,r_k}=\binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\cdots\binom{n-r_1-r_2-\cdots-r_{k-1}}{r_k}=\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$$

种不同的分组方法, 称 $\binom{n}{r_1,r_2,\ldots,r_k}$ 为 **多重组合数**.

根据上述定义可知组合数本质上也属于多重组合数, 即 $\binom{n}{r}=\binom{n}{r,n-r}$. 可以得到多重组合数与多项式系数的关系:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n=\sum_{n=r_1+r_2+\cdots+r_k}\binom{n}{r_1,r_2,\cdots,r_k}x_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_k^{r_k}.$$

以前研究集合的元素都是互不相同的, 我们这里引入多重集的概念.

定义 1.8 若集合中的元素是可以重复的, 且重复的元素之间不可分辨, 则称该集合为 **多重集**. 例如多重集 $A=\{1,1,1,2,2,2,3,3,4\}$.

假设多重集 A 有 k 类不同的元素, 每类元素的个数分别为 $r_1,r_2,\cdots,r_k$, 即 $n=r_1+r_2+\cdots+r_k$. 若将此多重集 A 中的所有元素排列成一排, 则相当于从 n 个位置中选取出 r_1 个位置放第一类元素, 再从剩下的从 $n-r_1$ 个位置中选取出 r_2 个位置放第二类元素, $\cdots$, 从最后 r_k 个位置放第 k 类元素. 因此该多重集 A 有

$$\binom{n}{r_1,r_2,\cdots,r_k}$$

种不同的排列方法, 即多重组合数.

根据排列组合数, 有如下结论:

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多放一球
不同	不同	m^n	$(m)_n$
相同	不同		$\binom{m}{n}$

1.4.2 整数的有序分解

本节研究将 n 只完全相同、不可分辨的球放入 m 个不同的箱子, 此时有多少种不同的放法. 鉴于球完全相同且不可分辨, 一种放的结果可描述为第一个箱子有 x_1 个球, 第二个箱子有 x_2 个球, $\cdots$, 第 m 个箱子有 x_m 个球, 这里 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是非负的整数, 并满足

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n.$$

因此将 n 只相同的球放入 m 个不同的箱子等价于上述方程的非负整数解. 关于此问题有如下定理:

定理 1.1　方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ 有 $\binom{n+m-1}{m-1} = \binom{n+m-1}{n}$ 种不同的非负整数解.

证明　将通过构造一一对应关系给出组合证明. 将 n 只相同的球分别对应于 n 个完全相同且不可分辨的圆圈 '$\circ$', 将 m 个箱子与 m 条竖线 '$|$' 进行关联. 现将 n 个圆圈和 $m-1$ 条竖线排列成一行, 最后在排列末尾再加入一条竖线, 如下例所示:

$$\underbrace{\circ\ \circ\ \circ\ \circ}_{x_1}\ |\ |\ \cdots|\underbrace{\circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ}_{x_i}|\ \cdots\ |\underbrace{\circ\ \circ}_{x_m}|.$$

从左向右看, 第一条竖线之前圆圈的个数用 x_1 表示, 第 i 条竖线与第 $i-1$ 条竖线之间圆圈的个数用 x_i 表示 $(2 \leqslant i \leqslant m)$. 由此可知方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ 与排列之间存在一一对应关系, 而这种排列有

$$\binom{n+m-1}{m-1} = \binom{n+m-1}{n}$$

种不同的方法, 即为方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ 非负整数解的个数.

由此定理可知方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ 有 66 种不同的非负整数解, 将 10 个相同的球放入 3 个不同的箱子有 66 种不同的放法.

对该问题可进一步推广, 例如将 n 只相同的球放入 m 个不同的箱子, 每个箱子至少放入一球, 则有多少种不同放法, 该问题等价于方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ 有多少种不同的正整数解, 我们有如下推论:

推论 1.1　方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ $(m \leqslant n)$ 有 $\binom{n-1}{m-1} = \binom{n-1}{n-m}$ 个不同的正整数解.

解　引入新变量 $x_1' = x_1 - 1, x_2' = x_2 - 1, \cdots, x_m' = x_m - 1$, 则方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ 的正整数解等价于方程

$$x_1' + x_2' + \cdots + x_m' = n - m$$

的非负整数解. 根据定理 1.1 可知上述方程有

$$\binom{n-m+m-1}{m-1} = \binom{n-1}{m-1} = \binom{n-1}{n-m}$$

种不同的正整数解.

同理还可以研究一些不等式的非负整数解、正整数解的个数, 相关求解将作为练习题.

例 1.16 求不等式 $x_1+x_2+\cdots+x_m \leqslant n$ 有多少种不同的非负整数解、正整数解.

例 1.17 在多项式 $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$ 的展开式中, 一共有多少种不同的展开项?

解 根据多项式的展开式有

$$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n = \sum_{r_1,r_2,\cdots,r_m \text{ 非负整数且和为 } n} \binom{n}{r_1,r_2,\cdots,r_m} x_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_m^{r_m},$$

因此不同的展开项即为不同的项及其次数, 与 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ 的非负整数解一一对应, 由此可知多项式 $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$ 有 $\binom{n+m-1}{m-1}$ 种不同的展开项.

根据整数的有序分解有如下结论:

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至少放一球
相同	不同	$\binom{n+m-1}{m-1}$	$\binom{n-1}{m-1}$

1.4.3 第二类 Stirling 数 (The Stirling number of the second kind)

本节研究将 n 只不同的球放入 m 个相同的箱子, 有多少种不同的放法, 这里箱子完全相同不可分辨, 可以通过箱子里放置的不同的球加以区分. 该问题在组合学中有另一种表述: 将 n 个不同的元素分成 m 个非空的子集的划分数, 即第二类 Stirling 数:

定义 1.9 将 n 个不同的元素分成 m 个非空的子集, 不同的划分数称为 **第二类 Stirling 数**, 记为 $S(n,m)$.

我们首先以集合 $\{1,2,3\}$ 为例, 讨论不同的划分数:

- 若分成 $m=1$ 个非空的子集, 则有 $\{1,2,3\}$, 因此 $S(3,1)=1$;
- 若分成 $m=2$ 个非空的子集, 则有 $\{\{1\},\{2,3\}\}$, $\{\{2\},\{1,3\}\}$, $\{\{3\},\{1,2\}\}$, 因此 $S(3,2)=3$;
- 若分成 $m=3$ 个非空的子集, 则有 $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, 因此 $S(3,3)=1$.

遵从惯例设 $S(0,0)=1$. 当 $n\geqslant 1$ 时有 $S(n,n)=S(n,1)=1$ 和 $S(n,0)=0$. 当 $m>n\geqslant 1$ 时有 $S(n,m)=0$. 针对更一般情况, 第二类 Stirling 数有如下的递推关系:

定理 1.2 对 $n\geqslant 1, m\geqslant 1$ 有

$$S(n,m)=mS(n-1,m)+S(n-1,m-1).$$

证明 根据定义可知将集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 划分成 m 个非空的子集, 有 $S(n,m)$ 种不同的划分数, 将这些不同的划分可以分成两种情况考虑:

- 若元素 n 被划分为单独的子集 $\{n\}$, 则其它剩余的元素被划分成 $m-1$ 个非空的子集, 此时有 $S(n-1,m)$ 种不同的划分数;
- 若元素 n 未被划分为单独的子集, 其它剩余元素被划分成 m 个非空的子集, 有 $S(n-1,m)$ 种不同的划分数; 再将元素 n 放入已经划分好的 m 个子集之一, 共 $mS(n-1,m)$ 种划分数.

由此完成证明.

根据上面的递推关系, 并利用归纳法证明可得

推论 1.2 第二类 Stirling 数满足

$$S(n,m)=\frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(m-i)^n \quad \text{和} \quad \sum_{m=1}^{n}S(n,m)(x)_m=x^n,$$

这里 $(x)_m=x(x-1)\cdots(x-m+1)$.

根据第二类 Stirling 数有

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多放一球	每个箱子至少放一球
不同	不同			$m!S(n,m)$
不同	相同	$\sum_{k=1}^{m}S(n,m)$	$\begin{cases}1 & n\leqslant m\\ 0 & n>m\end{cases}$	$S(n,m)$

1.4.4 正整数的无序分拆 (Partition)

本节研究将 n 只相同的球放入 m 个相同的箱子, 即球与箱子均是完全相同不可分辨, 只能通过箱子内不同的球的个数进行区别. 该问题在组合学中有另一种表述: 将正整数 n 划分成 m 个无序的正整数之和, 即 **正整数的无序分拆**.

定义 1.10 将正整数 n 划分成 m 个无序的正整数之和, 有多少种不同的划分数记为 $p(n,m)$.

这里以正整数 7 为例考虑的无序划分数 $p(n,m)$ 的情况, 如下表:

$m=1$	7	$p(7,1)=1$
$m=2$	$6+1,\ 5+2,\ 4+3$	$p(7,2)=3$
$m=3$	$5+1+1,\ 4+2+1,\ 3+3+1,\ 3+2+2$	$p(7,3)=4$
$m=4$	$4+1+1+1,\ 3+2+1+1,\ 2+2+2+1$	$p(7,4)=3$
$m=5$	$3+1+1+1+1,\ 2+2+1+1+1$	$p(7,5)=2$
$m=6$	$2+1+1+1+1+1$	$p(7,6)=1$
$m=7$	$1+1+1+1+1+1+1$	$p(7,7)=1$

通过观察发现: 正整数 n 划分成 m 个无序的正整数, 等价于下面方程的正整数解

$$x_1+x_2+\cdots+x_m=n \quad \text{s. t.} \quad x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_m\geqslant 1.$$

遵从惯例设 $p(0,0)=1$. 当 $n\geqslant 1$ 时有 $p(n,n)=p(n,1)=1$ 和 $p(n,0)=0$. 当 $m>n\geqslant 1$ 时有 $p(n,m)=0$. 对更一般情况, 有如下递推关系:

性质 1.8 对 $n\geqslant 1$ 和 $m\geqslant 1$ 有

$$p(n,m)=p(n-1,m-1)+p(n-m,m) \quad \text{和} \quad p(n,m)=\sum_{i=1}^{m}p(n-m,i).$$

证明 将正整数 n 划分成 m 个无序的正整数之和, 有 $p(n,m)$ 种不同的划分方法. 对其中任意一种划分 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ $(x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_m\geqslant 1)$, 可以考虑两种情况:

- 若最小部分 $x_m=1$, 则 $x_1+x_2+\cdots+x_{m-1}=n-1$ 是整数 $n-1$ 的 $m-1$ 部分的无序划分, 有 $p(n-1,m-1)$ 种不同的划分数;
- 若最小部分 $x_m>1$, 则 $x_1-1+x_2-1+\cdots+x_m-1=n-m$ 是整数 $n-m$ 的 m 部分的无序划分, 有 $p(n-m,m)$ 种不同的划分数.

由此证明 $p(n,m)=p(n-1,m-1)+p(n-m,m)$.

对任何一种划分 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ $(x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_m\geqslant 1)$, 设 $y_j=x_j-1$, 则有

$$y_1+y_2+\cdots+y_m=n-m \quad \text{s. t.} \quad y_1\geqslant y_2\geqslant\cdots\geqslant y_m\geqslant 0.$$

考虑 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 非零元的个数, 假设恰好有 i 个非零元, 则有 $p(n-m,i)$ 种不同的解, 由此证明

$$p(n,m)=\sum_{i=1}^{m}p(n-m,i).$$

性质 1.9 对整数 $n\geqslant 1$ 和 $m\geqslant 1$ 有

$$\frac{1}{m!}\binom{n-1}{m-1}\leqslant p(n,m)\leqslant\frac{1}{m!}\binom{n-1+m(m-1)/2}{m-1}.$$

给定整数 $m\geqslant 1$, 当 n 非常大或 $n\to\infty$ 有

$$p(n,m)\approx\frac{n^{m-1}}{m!(m-1)!}.$$

根据正整数的无序分拆, 有

n 只球	m 个箱子	无任何限制	每个箱子至多放一球	每个箱子至少放一球
相同	相同	$\sum_{k=1}^{m}p(n,k)$	$\begin{cases}1 & n\leqslant m\\0 & n>m\end{cases}$	$p(n,m)$