习题

1.1 简述: 频率与概率的关系, 随机现象中的二重性, 对立与互不相容事件的关系.

1.2 i) 对任意事件 A 和 B, 简化 $(A-AB)\cup B$ 和 $\overline{(\bar{A}\cup B)}$;
ii) 若事件 A,B,C 两两互不相容, 简化 $(A\cup B)-C$.

1.3 班级有 n 个同学参加考试, 用 A_i 表示第 i 个同学通过考试的事件, 用他们表示以下事件:
i) 只有第一位同学未通过考试; ii) 至少有一位同学未通过考试;
iii) 恰好有一位同学未通过考试; iv) 至少有两位同学未通过考试;
v) 至多有两位同学未通过考试; vi) 所有同学通过了考试.

1.4 证明 n 个事件的对偶律, 即对任意 n 个事件 $A_1,A_2,...,A_n$ 有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i} \qquad \text{和} \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}.$$

1.5 已知事件 A,B,C 满足 $P(A)=1/3$, $P(B)=1/5$, $P(C)=1/6$, $P(AB)=1/20$, $P(AC)=1/20$, $P(BC)=1/60$ 和 $P(ABC)=1/100$, 求 $\bar{A}B$, $\bar{A}\cup\bar{B}$, $A\cup B\cup C$, $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, $\bar{A}\bar{B}C$ 和 $(\bar{A}\bar{B})\cup C$.

1.6 若事件 A,B 的概率分别为 $P(A)=0.6$ 和 $P(B)=0.9$, 求 $P(AB)$ 的最大值和最小值, 并说明在怎么样的情形下取得.

1.7 若事件 A 和 B 满足 $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$ 且概率 $P(B)=1/4$, 求概率 $P(A)$.

1.8 若事件 A 和 B 满足 $P(A)=0.1$ 和 $P(\bar{A}\bar{B})=0.7$, 求概率 $P(B-A)$.

1.9 证明: 对任意 n 个事件 $A_1,A_2,...,A_n$ 有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)+...+(-1)^{n-1}P(A_1,A_2,...,A_n).$$

1.10 已知 16 件产品中有 4 件是次品, 不放回地任取两次，每次任取一件产品, 求事件的概率: i) 两件均是次品; ii) 一件正品和一件次品; iii) 第二次取出正品.

1.11 将 n 个男生和两个女生任意排成一列, 两女生间恰有 k 个男生 $(2<k<n)$ 的概率是多少.

1.12 将 n 个男生和 m 个女生任意排成一列 $(m<n)$, 问任意两女生不相邻的概率是多少; 若排列成一圆环, 问任意两女生不相邻的概率又是多少.

1.13 有 m 只相同或不同的白球和 n 只相同或不同的红球, 随机取出依次排成一列, 求第 k 次取出红球的概率 (分四种情况讨论).

1.14 将 3 只不同的球放入 4 个不同的杯子, 求杯子中球的最大个数分别为 $1, 2, 3$ 的概率.

1.15 袋中有 a 个不同的白球, b 个不同的红球, 假设有 k 个人依次任意无放回地从袋中取一个球, 问第 i 个人 ($i \leqslant k$) 取出红球的概率是多少; 若为任意无放回地取球, 第 i 个人 ($i \leqslant k$) 取出红球的概率又是多少.

1.16 一张圆桌有 $2n$ 个位置, 将 n 对夫妻任意安排入座圆桌, 求任意一对夫妻不相邻的概率.

1.17 在区间 $[0, 1]$ 内随机取两数, 求两数之积小于 $1/4$ 的概率.

1.18 利用计算机编程计算: 在 $[0, 1]$ 区间内任意取 4 个数 a, b, c, d, 求事件

$$A = \{a^2 + \sin(b) + a \cdot e^c \leqslant d\}$$

发生的概率 (要求写出伪代码以及概率保留小数点后 5 位).

1.19 已知多重集 $A = \{a, a, a, b, b, b, b, c, c\}$, 求 A 有多少种不同的排列.

1.20 对正整数 m, n 以及 $r < n$, 证明:

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}, \quad \binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}\binom{n}{r-i}, \quad \binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2.$$

1.21 从 m 个不同的元素中无放回/有放回地取出 r 个元素进行排列, 分别有多少种不同的排法; 若从 m 个不同的元素中无放回/有放回地取出 r 个元素, 分别有多少种不同的取法.

1.22 求方程 $x_1 + x_2 + ... + x_k \leqslant n$ 的正整数解、非负整数解的个数 (n 为正整数).

1.23 求方程 $x_1 + x_2 + ... + x_k < n$ 的正整数解、非负整数解的个数 (n 为正整数).

1.24 利用第二类 Stirling 数的递推关系证明:

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$$