第 5 章　多维随机变量及其分布

前面所研究的随机现象均由单一因素决定, 即一维随机变量. 然而实际问题中很多随机现象往往由两个或多个随机因素造成的, 需用多个随机变量描述. 例如: 导弹攻击点的坐标 (经度、纬度); 学生的高考成绩 (语文、数学、英语等).

定义 5.1 设 $X = X(\omega)$ 和 $Y = Y(\omega)$ 为定义在样本空间 Ω 上的随机变量, 由它们构成的向量 (X, Y) 称为二维随机变量.

二维随机向量又称为二维随机变量, 需要将 (X, Y) 看作一个整体, 不能分开看待, 在几何上 (X, Y) 可看作平面上的随机点.

5.1 二维随机变量的分布函数

首先研究二维随机变量的分布函数:

定义 5.2 设 (X, Y) 为二维随机变量, 对任意实数 $x \in (-\infty, +\infty)$ 和 $y \in (-\infty, +\infty)$,

$$F(x, y) = P(X \leqslant x, Y \leqslant y)$$

称为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数, 或称为随机变量 X 和 Y 的联合分布函数.

二维随机变量分布函数 $F(x, y)$ 几何意义: 随机点 (X, Y) 落入以 (x, y) 为右上定点无穷矩形的概率. 对二维随机变量分布函数, 有如下性质:

- 分布函数 $F(x, y)$ 对每个变量单调不减: 固定 y, 当 $x_1 > x_2$ 时有 $F(x_1, y) \geqslant F(x_2, y)$; 同理固定 x, 当 $y_1 > y_2$ 时有 $F(x, y_1) \geqslant F(x, y_2)$;
- 对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 和 $y \in (-\infty, +\infty)$, 分布函数 $F(x, y) \in [0, 1]$, 且

$$F(+\infty, +\infty) = 1, \quad F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0.$$

- 分布函数 $F(x, y)$ 关于每个变量右连续.

根据分布函数可推导概率:

$$P(x_1 < X \leqslant x_2, y_1 < Y \leqslant y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1).$$

设随机变量 (X, Y) 的联合分布函数为 $F(x, y)$, 将随机变量 X 和 Y 单独看依然是随机变量. 可以根据随机变量的联合分布函数 $F(x, y)$ 研究随机变量 X 和 Y 的分布函数 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$.

定义 5.3 设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$, 称

$$F_X(x)=P(X\leqslant x)=P(X\leqslant x,y<+\infty)=F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y),$$

为随机变量 X 的边缘分布函数. 同理定义随机变量 Y 的边缘分布函数为:

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(Y\leqslant y,x<+\infty)=F(+\infty,y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y).$$

例 5.1 设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y)=A(B+\arctan\frac{x}{2})(C+\arctan\frac{y}{3})(x,y\in\mathbb{R}).$$

求随机变量 X 与 Y 的边缘分布函数和概率 $P(Y>3)$.

解 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 和 $y\in(-\infty,+\infty)$, 根据分布函数的性质有

$$\begin{aligned}1&=F(+\infty,+\infty)=A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2}),\\0&=F(x,-\infty)=A(B+\arctan\frac{x}{2})(C-\frac{\pi}{2}),\\0&=F(-\infty,y)=A(B-\frac{\pi}{2})(C+\arctan\frac{y}{3}).\end{aligned}$$

求解上述方程可得

$$C=\frac{\pi}{2},\quad B=\frac{\pi}{2},\quad A=\frac{1}{\pi^2}.$$

从而得到 $F(x,y)=(\pi/2+\arctan x/2)(\pi/2+\arctan y/3)/\pi^2$, 进一步得到

$$F_X(x)=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2})(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3})=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2})$$

同理可得

$$F_Y(y)=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3})$$

最后得到

$$P(Y>3)=1-P(Y\leqslant 3)=1-F_Y(3)=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan 1\right)=\frac{1}{4}.$$

前面讲过独立的随机事件 A 和 B 有 $P(AB)=P(A)P(B)$, 下面介绍随机变量的独立性:

定义 5.4 设 X,Y 为二维随机变量, 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 和 $y\in(-\infty,+\infty)$, 若事件 $X\leqslant x$ 和 $Y\leqslant y$ 相互独立, 即

$$P(X\leqslant x,Y\leqslant y)=P(X\leqslant x)\cdot P(Y\leqslant y)\quad\Leftrightarrow\quad F(x,y)=F_X(x)F_Y(y),$$

则称随机变量 X 与 Y 相互独立.

设随机变量 X 与 Y 相互独立, 则 $f(X)$ 与 $g(Y)$ 也相互独立, 其中 $f(x)$ 和 $g(y)$ 是连续或分段连续函数. 例如: 若随机变量 X 与 Y 相互独立, 则 X^2 与 Y^3 相互独立, $\sin X$ 与 $\cos Y$ 相互独立.

5.2 二维离散型随机变量

定义 5.5 若二维随机变量 (X,Y) 的取值是有限个或无限可列的, 称 (X,Y) 为二维离散型随机变量. 设离散型随机变量 (X,Y) 的取值分别为 $(x_i,y_j), i=1,2,\cdots,j=1,2,\cdots$, 则称

$$p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)$$

为 (X,Y) 的联合分布列. 二维随机变量的联合分布列可表示为

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$

根据分布列的性质可知 $p_{ij}\geqslant 0$ 和 $\sum_{i,j}p_{ij}=1$. 根据二维随机变量 (X,Y) 的联合分布列 p_{ij}, 可得到随机变量 X 的边缘分布列

$$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{\infty}P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot}\ .$$

同理可得随机变量 Y 的边缘分布列

$$P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=p_{\cdot j}\ .$$

将二维随机变量的联合分布列和边缘分布表示在同一个表格中有

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

例 5.2 有三个数 $1,2,3$, 随机变量 X 表示从这三个数中随机地抽取一个数, 随机变量 Y 表示从 1 到 X 中随机抽取一个数. 求 (X,Y) 的联合分布列和边缘分布列.

解 由题意可知随机变量 X 和 Y 的取值为 $1,2,3$: 当 $X=1$ 时有 $Y=1$; 当 $X=2$ 时有 Y 等可能取 $1,2$; 当 $X=3$ 时 Y 等可能取 $1,2,3$. 从而得到

$X \backslash Y$	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	1/3	0	0	1/3
2	1/6	1/6	0	1/3
3	1/9	1/9	1/9	1/3
$p_{\cdot j}$	11/18	5/18	1/9	1

定义 5.6 对离散型随机变量 (X,Y), 若对所有 (x_i,y_j) 有

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j), \quad \text{即} \quad p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$$

称离散随机变量 X 与 Y 相互独立.

定理 5.1 对二维离散型随机变量 (X,Y), 定义 5.4 与上述定义等价, 即对所有 (x_i,y_j) 有

$$F(x_i,y_j)=F_X(x_i)F_Y(y_j) \quad \Longleftrightarrow \quad p_{i,j}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}.$$

证明 首先证明必要性, 根据定义 5.4 分布函数的独立性有

$$\begin{aligned}
p_{i,j} &= F(x_i,y_j)-F(x_{i-1},y_j)-F(x_i,y_{j-1})+F(x_{i-1},y_{j-1})\\
&= F_X(x_i)F_Y(y_j)-F_X(x_{i-1})F_Y(y_j)-F_X(x_i)F_Y(y_{j-1})+F_X(x_{i-1})F_Y(y_{j-1})\\
&= (F_X(x_i)-F_X(x_{i-1}))F_Y(y_j)-(F_X(x_i)-F_X(x_{i-1}))F_Y(y_{j-1})\\
&= p_{i\cdot}F_Y(y_j)-p_{i\cdot}F_Y(y_{j-1})=p_{i\cdot}p_{\cdot j}.
\end{aligned}$$

其次证明充分性, 根据定义 5.6 有

$$F(x_i,y_j)=\sum_{l\leqslant i}\sum_{k\leqslant j}p_{lk}=\sum_{l\leqslant i}\sum_{k\leqslant j}p_{l\cdot}p_{\cdot k}=\sum_{l\leqslant i}p_{l\cdot}\sum_{k\leqslant j}p_{\cdot k}=F_X(x_i)F_Y(y_j).$$

定理 5.2 设离散随机变量 X 和 Y 独立, 对任意集合 $A,B\in\mathbb{R}$, 有事件 $X\in A$ 和 $Y\in B$ 独立.

证明 对离散型随机变量, 不放假设 $A=\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$ 和 $B=\{y_1,y_2,\ldots,y_l\}$, 则有

$$P(X\in A,Y\in B)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}p_{ij}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}p_{i\cdot}p_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{k}p_{i\cdot}\sum_{j=1}^{l}p_{\cdot j}=P(X\in A)P(Y\in B).$$

例 5.3 设离散型 X, Y 独立, 求解 (X, Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1		1/8		
x_2	1/8			
$p_{\cdot j}$	1/6			

求解可得

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1	1/24	1/8	1/12	1/4
x_2	1/8	3/8	1/4	3/4
$p_{\cdot j}$	1/6	1/2	1/3	1

例 5.4 将两个球 A, B 放入编号为 $1, 2, 3$ 的三个盒子中, 用随机变量 X 放入 1 号盒的球数, 用随机变量 Y表示 放入 2 号盒的球数, 判断 X 和 Y 是否独立.

解 由题意可知

$X \backslash Y$	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	1/9	2/9	1/9	4/9
1	2/9	2/9	0	4/9
2	1/9	0	0	1/9
$p_{\cdot j}$	4/9	4/9	1/9	

由此可知 $P(X = 2, Y = 2) \neq P(X = 2)P(Y = 2)$, 所以 X 和 Y 不独立.

5.3 二维连续型随机变量

定义 5.7 设二维随机变量的分布函数为 $F(x, y)$, 如果存在二元非负可积函数 $f(x, y)$ 使得对任意实数对 (x, y) 有

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) du dv,$$

则称 (X, Y) 为二维连续型随机变量, 称 $f(x, y)$ 称为二维随机变量 (X, Y) 的概率密度, 或称为随机变量 X 和 Y 的联合概率密度.

根据概率密度的定义可知概率密度函数 $f(x, y)$ 满足如下性质:

1) $f(x, y) \geqslant 0$.

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$.

3) 若 $f(x, y)$ 在 (x, y) 连续, 则 $f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$.

4) 若 G 为平面上的一个区域, 则点 (X, Y) 落入 G 的概率为

$$P((X, Y) \in G) = \int \int_{(x,y) \in G} f(x, y) dx dy.$$

例 5.5 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}ce^{-(3x+4y)} & x>0,y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求 $P(0<X<1,0<Y<2)$.

解 根据概率密度的性质可知

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}ce^{-(3x+4y)}dxdy=\frac{c}{12},$$

由此可得 $c=12$. 进一步可得

$$P(0<X<1,0<Y<2)=12\int_0^1\int_0^2 e^{-(3x+4y)}dxdy=(1-e^{-3})(1-e^{-8}).$$

例 5.6 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2+axy & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\\ 0 & \text{其它,}\end{cases}$$

求 $P(X+Y\geqslant 1)$.

给定二维随机变量的联合概率密度 $f(x,y)$, 下面定义随机变量 X 和 Y 的边缘概率密度:

定义 5.8 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$, 则随机变量 X 和 Y 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy \qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx.$$

上述的边缘概率密度可完全根据边缘分布函数 $F_X(x)$ 的定义导出, 首先可知随机变量 X 的边缘分布函数为

$$\begin{aligned}F_X(x) &= P(X\leqslant x)=P(X\leqslant x,Y<\infty)=F(x,+\infty)\\ &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t,y)dtdy=\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t,y)dy\right)dt,\end{aligned}$$

由此可得随机变量 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=F_X'(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy.$$

例 5.7 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}cxy & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1\\ 0 & \text{其它},\end{cases}$$

求 $P(X\leqslant 1/2)$.

解 根据概率密度的性质有

$$1=\int_0^1\int_x^1 cxydydx=c\int_0^1 x(1-x^2)/2dx=c/8,$$

由此可解 $c=8$. 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时随机变量 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_x^1 8xydy=4x(1-x^2),$$

进一步有

$$P(X\leqslant\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}}4x(1-x^2)dx=\frac{7}{16}.$$

下面定义二维连续随机变量的独立性:

定义 5.9 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 和 $y\in(-\infty,+\infty)$, 若二维连续随机变量 (X,Y) 的概率密度与边缘概率密度满足

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y),$$

则称随机变量 X 和 Y 相互独立.

对连续随机变量, 上述独立性定义与基于分布函数的独立性 (定义 5.4) 等价, 即有如下定理:

定理 5.3 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$, 则有

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)\quad\Longleftrightarrow\quad f(x,y)=f_X(x)f_Y(y).$$

证明 首先证明充分性: 若二维连续随机变量满足 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$, 则有

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv=\int_{-\infty}^{x}f_X(u)du\int_{-\infty}^{y}f_Y(v)dv$$

对上式两边同时求偏导有

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y).$$

其次证明必要性: 若 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, 则有

$$F(x,y)\ =\ \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f_X(u)f_Y(v)dudv$$