概率论与数理统计 第一次作业

201502010 欧丰宁

- 1.1

频率与概率：在大量试验的情况下，一个事件A发生的频率将趋近于一个常数，此时，称这个常数为概率

随机现象中的二重性：随机现象具有偶然性和必然性，偶然性是指对其进行单次观察，结果具有不确定性，必然性是指对其进行大量重复观察，其结果呈现一定的统计学规律

对立与互不相容事件的关系：对立事件一定是互不相容事件，而互不相容事件不一定是对立事件

- 1.2

i)：$(A-AB)\cup B = A\overline{B}\cup B = (A\cup B)\cap(\overline{B}\cup B) = A\cup B$

$\overline{(\overline{A}\cup B)} = A\cap\overline{B}$

ii)：$(A\cup B)-C = (A\cup B)\overline{C} = (A\overline{C})\cup(B\overline{C}) = (A-AC)\cup(B-BC) = A\cup B$

最后一步是由于$AC=BC=\emptyset$

- 1.3

i)：$\overline{A_1}A_2A_3\ldots A_n$

ii)：$\overline{A_1A_2\ldots A_n}$

iii)：$\bigcup_{i=1}^{n}(\overline{A_i}\bigcap_{j=1,i\neq j}^{n}A_j)$

iv)：$\overline{A_1A_2\ldots A_n\cup\bigcup_{i=1}^{n}(\overline{A_i}\bigcap_{j=1,i\neq j}^{n}A_j)}$

v)：$A_1A_2\ldots A_n\cup\bigcup_{1\le i\le n,1\le j\le n}(\bar{A}_i\bar{A}_j\bigcap_{k=1,k\neq i,k\neq j}^{n}A_k)$，第二项中当$i=j$时对应一个人不通过，当$i\neq j$时对应两个人不通过

vi)：$A_1A_2\ldots A_n$

- 1.4

我们先采用数学归纳法来证明$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i} = \bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}(*)$

当$n=1$时，正确性是显然的

当$n=2$时，$\forall x, x\notin A_1\cup A_2$，有$x\notin A_1, x\notin A_2$，从而$x\in\overline{A_1}, x\in\overline{A_2}$，因此$\overline{A_1\cup A_2}\subset\overline{A_1}\cap\overline{A_2}$，反之如果$x\in\overline{A_1}, x\in\overline{A_2}$，就有$x\notin A_1, x\notin A_2$，从而$x\notin A_1\cup A_2$，因此$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\subset\overline{A_1\cup A_2}$，即$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}=\overline{A_1\cup A_2}$

现假设$n<m(m\ge 3)$时成立，下证$n=m$时成立

$\overline{\bigcup_{i=1}^{m}A_i} = \overline{A_m\cup\bigcup_{i=1}^{m-1}A_i} = \overline{A_m}\cap\overline{\bigcup_{i=1}^{m-1}A_i} = \overline{A_m}\cap\bigcap_{i=1}^{m-1}\overline{A_i} = \bigcap_{i=1}^{m}\overline{A_i}$

将$\overline{A_i}$代入$(*)$式中，得到$\overline{\bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}} = \bigcap_{i=1}^n A_i$，两边同时取补集，得到$\bigcup_{i=1}^n \overline{A_i} = \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i}$，证毕

- 1.5

$P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) = 3/20$

$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 19/20$

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) = 89/150$

$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 61/150$

$P(\bar{A}\bar{B}C) = P(\bar{A}\bar{B}) - P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\bar{A}) - P(\bar{A}B) - P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = 11/100$

$P((\bar{A}\bar{B}) \cup C) = P(\bar{A}\bar{B}) + P(C) - P(\bar{A}\bar{B}C) = 43/75$

- 1.6

由容斥原理，有$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 1.5 - P(A \cup B)$

当$P(A \cup B)$取到最大值1时，如当$A \cup B = \Omega$时，$P(AB)_{min} = 0.5$

当$P(A \cup B)$取到最小值0.9时，如当$A \cup B = B$时，$P(AB)_{max} = 0.6$

注意上述列举的情况不能概括取得极值的所有情况，取等情况还应当结合概率为0的集合进行讨论

- 1.7

$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}) = P(\bar{A}\bar{B}) + P(A\overline{B}) = P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 3/4$

- 1.8

$0.9 = 1 - P(A) = P(\overline{A}) = P(\overline{A}B) + P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A}B) + 0.7$，因此
$P(B - A) = P(B\overline{A}) = 0.2$

- 1.9

我们采用数学归纳法来证明

当$n = 1$时，显然

当$n = 2$时，由性质1.6可得

现在假设对$n < m$的情况成立，对$n = m$作出证明

利用$n = 2$时的结论，
$P(\bigcup_{i=1}^m A_i) = P((\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i) \cup A_m) = P(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i) + P(A_m) - P(A_m \bigcup_{i=1}^{m-1} A_i)$

由归纳假设$P(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i) = \sum_{i=1}^{m-1} P(A_i) + \ldots + (-1)^{m-2} P(A_1 \ldots A_{m-1})$

又
$P(A_m \bigcup_{i=1}^{m-1} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_m A_i) = \sum_{i=1}^{m-1} P(A_i A_m) + \ldots + (-1)^{m-2} P(A_1 \ldots A_{m-1} A_m)$

综合并整理，得到$P(\bigcup_{i=1}^m A_i) = \sum_{i=1}^m P(A_i) + \ldots + (-1)^{m-1} P(A_1 \ldots A_m)$，证毕