

概率统计课程第十三次作业

1. 设总体 $X \sim N(\mu, a^2)$, 从总体中抽两组样本, 容量为 m 和 n . 求两样本均值之差的绝对值小于 ϵ 的概率.
2. 随机变量 $X \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda), Y \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$, 且 X 和 Y 独立. 求证 $X + Y \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$.
3. 证明: 若 $X \sim N(0, 1)$, 则 $X^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2)$, 以及

$$\mathbb{E}(X^k) = \begin{cases} (k-1)!! & k \text{ 为偶数} \\ 0 & k \text{ 为奇数} \end{cases}.$$

4. 设 $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ 是总体 $N(0, a^2)$ 的样本.

$$Z = a(X_1 + 2X_2 + \dots + nX_n)^2 + b(Y_m + 2Y_{m-1} + \dots + mY_1)^2.$$

求 a, b 为何值时, Z 服从 χ^2 分布, 并求其分布.

5. 设 X_1, \dots, X_n 和 Y_1, \dots, Y_n 是总体 $X \sim N(0, n)$ 的两样本. 求

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n Y_i^2}}$$

的分布.

6. 设 X_1, \dots, X_n 是总体 $X \sim N(\mu, 1/4)$ 的样本. 若 μ 未知, 求

$$\Pr \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \geq \epsilon \right].$$

7. 设 X_1, \dots, X_n 是总体 $X \sim N(12, \sigma^2)$ 的样本. 若 σ^2 未知, 但已知样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$. 求

$$\Pr \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq \epsilon \right].$$

8. 书 147-148 页 2(2), 4(2), 7, 9