概率论第三次作业

201502010 欧丰宁

1 3.1

独立和互斥没有必然联系

但是当 $P(A)P(B) > 0$ 时，独立一定不互斥，互斥一定不独立

2 3.2

要证明 A 与 $B \cup C$ 独立，即证 $P(A)P(B \cup C) = P(A \cap (B \cup C)) = P(AB \cup AC)$

对左式和右式分别用容斥原理及 A, B, C 独立

$LHS = P(A) * (P(B) + P(C) - P(BC)) = P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C)$

$RHS = P(AB) + P(AC) - P(ABC) = P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C) = LHS$，证毕

3 3.3

3.1 22

记事件 A, B 分别表示这个人第一次，第二次及格

(1) $\Pr[\text{至少有一次及格}] = 1 - P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A}) = 1 - (1-p) * (1 - p/2) = \frac{3}{2}p - \frac{1}{2}p^2$

(2) $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{p*p}{p*p+(1-p)*\frac{p}{2}} = \frac{2p}{1+p}$

3.2 27

(1) 由于 $P(A \cup B) \geq P(A)$，因此 $\frac{P(AB)}{P(A)} \geq \frac{P(AB)}{P(A \cup B)}$，即 $P(AB|A) \geq P(AB|A \cup B)$

(2) 由 $P(A|B) = 1$ 知, $P(AB) = P(B)$, 那么 $P(\bar{B}) = P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A}\bar{B})$, 于是 $P(\bar{A}) = P(\bar{A}\bar{B})$，也即 $P(\bar{B}|\bar{A}) = 1$

(3) $P(A) = P(AC) + P(A\bar{C}) = P(C)P(A|C) + P(\bar{C})P(A|\bar{C})$, 对于 B 也是同理, 因此将 $P(A|C) \geq P(B|C)$ 配以系数 $P(C)$，第二个不等式配以系数 $P(\bar{C})$ 求和即得 $P(A) \geq P(B)$

3.3 28

设事件 A, B 分别表示第一个，第二个种子发芽的事件

(1) $\Pr[\text{两棵都发芽}] = P(AB) = P(A)P(B) = 0.72$

(2) $\Pr[\text{至少有一棵发芽}] = P(AB) + P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = 0.72 + 0.2 * 0.9 + 0.8 * 0.1 = 0.98$

(3) $\Pr[\text{恰有一棵发芽}] = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = 0.18 + 0.08 = 0.26$

3.4 30

(1)

(i) 事件 A：今天下雨；事件 B：今天是晴天

(ii) 事件 A：今天下雨；事件 B：今天有 24 个小时

(iii) 事件 A：今天下雨；事件 B：今天下雨

(2)

(i) 即证 $P(C)P(AB) = P(ABC)$,由独立性,$P(AB) = P(A)P(B), P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$,代入即可得到命题正确

(ii) 要证明 A 与 $B \cup C$ 独立，即证 $P(A)P(B \cup C) = P(A \cap (B \cup C)) = P(AB \cup AC)$

对左式和右式分别用容斥原理及 A, B, C 独立

$LHS = P(A) * (P(B) + P(C) - P(BC)) = P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C)$

$RHS = P(AB) + P(AC) - P(ABC) = P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C) = LHS$，证毕

(3)

$P(AB) = P(A) * P(B|A) = 0$，而 $P(A)P(B) = 0 * P(B) = 0$，因此 A, B 相互独立

(4)

如果 $P(A|B) = P(A|\bar{B})$，那么 $\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$，稍作化简，即得到 $P(A)P(B) = P(AB)$

3.5 31

(1) 必然错误，当 A, B 互斥时，$P(AB) = 0$，不满足独立条件 $P(A)P(B) = P(AB) = 0$

(2) 必然错误，当 A, B 独立时，$P(AB) = P(A)P(B) > 0$，不满足互斥条件 $P(AB) = 0$

(3) 必然错误，根据容斥原理，有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \leq 1$，于是 $P(AB) > 0.2$，这告诉我们 AB 不互斥

(4) 可能对，比如 A, B 为两次独立的从 $\{1, 2, ..., 10\}$ 中选出 $\{1, 2, ..., 6\}$ 中的数的试验，但也可能不对，比如 A, B 为同一次从 $\{1, 2, ..., 10\}$ 中选出 $\{1, 2, ..., 6\}$ 中的数的试验

3.6 32

这些正常人都是相互独立的，设 X_i 表示第 i 个人没有感染艾滋病毒的概率

那么 $\Pr[\text{至少有一人感染}] = 1 - P(X_1X_2...X_{140}) = 1 - P(X_1)^{140} = 1 - (1-0.005)^{140} = 1 - 0.495714 = 0.504286$

3.7 33

$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}, P(ABC) = P(AB) = P(AC) = P(BC) = \Pr[\text{取得 1 号球}] = \frac{1}{4}$

因此 $P(AB) = P(A)P(B)$，对 $P(AC), P(BC)$ 有类似的结论成立，而 $P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$

3.8 37

(1) 设事件 A_1, A_2 分别表示从第一个，第二个盒子中没有取出蓝球的概率，那么

$\Pr[\text{至少有一个蓝球}] = 1 - P(A_1A_2) = 1 - P(A_1)P(A_2) = 1 - \frac{4}{7} * \frac{7}{9} = \frac{5}{9}$

(2) 设事件 B_1, B_2 分别表示从第一个，第二个盒子中取出蓝球的概率，W_1, W_2 类似，只是表示取出白球的概率，那么 B_1, B_2，B_1, W_2，W_1, B_2，W_1, W_2 之间独立，因此

$\Pr[\text{有一个蓝球和一个白球}] = P(W_1)P(B_2) + P(B_1)P(W_2) = \frac{2}{7} * \frac{2}{9} + \frac{3}{7} * \frac{4}{9} = \frac{16}{63}$

(3) $\Pr[\text{有一个蓝球和一个白球}|\text{至少有一个蓝球}] = \frac{\Pr[\text{有一个蓝球和一个白球}]}{\Pr[\text{至少有一个蓝球}]} = \frac{16}{35}$

3.9 39

记事件 C 为取出一件损坏的商品

$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B|A_i) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)(1 - P(C|A_i))^3 = 0.8623536$

$P(A_1B) = P(A_1)P(B|A_1) = 0.8 * (1 - P(C|A_1))^3 = 0.75295$

$P(A_2B) = P(A_2)P(B|A_2) = 0.15 * 0.9^3 = 0.10935$

$P(A_3B) = 0.05 * 0.1^3 = 0.00005$

$P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = 0.8731$

类似，$P(A_2|B) = 0.1268$，$P(A_3|B) = 5.798 * 10^{-5}$（保留四位有效数字）