5) 当 μ 固定时, 改变 σ 的值, 根据 $f(x)$ 的最大值 $f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ 可知: 当 σ 越小, 图形越陡, $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ 落入 μ 附近的概率越大; 反之 σ 越大, 图形越平坦, X 落入 μ 附近的概率越小.

定理 4.6 若 $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, 则

$$Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim\mathcal{N}(0,1);$$

若 $X\sim\mathcal{N}(0,1)$, 则 $Y=\sigma X+\mu\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

证明 若 $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, 随机变量 Y 的分布函数

$$F_Y(y)=P[Y\leqslant y]=P[X-\mu\leqslant y\sigma]=P[X\leqslant y\sigma+\mu]=\int_{-\infty}^{\mu+y\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$$

令 $x=(t-\mu)/\sigma$, 代入得到分布函数

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

由此可得 $Y\sim\mathcal{N}(0,1)$. 若 $X\sim\mathcal{N}(0,1)$, 则

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(\sigma X+\mu\leqslant y)=P(X\leqslant(y-\mu)/\sigma)=\int_{-\infty}^{(y-\mu)/\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

令 $t=(x-\mu)/\sigma$, 代入得到

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

定理 4.7 若 $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, 则

$$E(X)=\mu \qquad \text{和} \qquad \mathrm{Var}(X)=\sigma^2.$$

特别地, 若 $X\sim\mathcal{N}(0,1)$, 则 $E(X)=0$ 和 $\mathrm{Var}(X)=1$.

证明 若 $X\sim\mathcal{N}(0,1)$, 根据期望的定义有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt=0$$

因为奇函数在对称的区间上积分为 0. 进一步有

$$\mathrm{Var}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}tde^{-t^2/2}=\left[te^{-t^2/2}\right]_{t=-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2/2}dt=1.$$

如果 $Y\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, 则 $(Y-\mu)/\sigma\sim\mathcal{N}(0,1)$, 于是有

$$0=E((Y-\mu)/\sigma)=(E(Y)-\mu)/\sigma \quad\Rightarrow\quad E(Y)=\mu,$$

$$1=\mathrm{Var}((Y-\mu)/\sigma)=\mathrm{Var}(Y)/\sigma^2 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{Var}(Y)=\sigma^2.$$

下面给出正太分布的估计:

定理 4.8 若 $X\sim\mathcal{N}(0,1)$, 对任意 $\epsilon>0$ 有

$$P(X\geqslant\epsilon)\leqslant\frac{1}{2}e^{-\epsilon^2/2};$$

[Mill 不等式] 若$X\sim\mathcal{N}(0,1)$, 对任意$\epsilon>0$ 有

$$P(|X|\geqslant\epsilon)\leqslant\min\left\{1,\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\epsilon}e^{-\epsilon^2/2}\right\}.$$

证明 对第一个不等式, 我们有

$$\begin{aligned}P(X\geqslant\epsilon) &= \int_\epsilon^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x+\epsilon)^2/2}dx\\ &\leqslant e^{-\epsilon^2/2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx=\frac{1}{2}e^{-\epsilon^2/2}.\end{aligned}$$

对于 Mill 不等式, 根据 $\mathcal{N}(0,1)$ 的概率密度 $f(x)=e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ 有 $f'(x)=-xf(x)$, 进一步可得

$$\begin{aligned}P(|X|\geqslant\epsilon) &= 2\int_\epsilon^{+\infty}f(t)dt=2\int_\epsilon^{+\infty}\frac{tf(t)}{t}dt\\ &\leqslant 2\int_\epsilon^{+\infty}\frac{tf(t)}{\epsilon}dt=-2\int_\epsilon^{+\infty}\frac{f'(t)}{\epsilon}dt=-\frac{2}{\epsilon}\left[f(t)\right]_\epsilon^{+\infty}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\epsilon}e^{-\epsilon^2/2}.\end{aligned}$$

若随机变量 $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma)$, 根据 Mill 不等式有

$$P\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|\geqslant 3\right)\leqslant\min\left\{1,\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{3e^{4.5}}\right\}\leqslant 0.003,$$

由此可得若 $X\sim\mathcal{N}(\mu,\sigma)$, 则有

$$P(u-3\sigma\leqslant X\leqslant u+3\sigma)\geqslant 99.7\%,$$

因此在工程应用中, 一般通常认为

$$P(|X-\mu|\leqslant 3\sigma)\approx 1.$$

正太分布 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 的分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

此分布函数无闭式解, 将 $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ 转为为标准正太分布 $\mathcal{N}(0,1)$, 设 $\mathcal{N}(0,1)$ 的分布函数为

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

通过查表或计算机进行计算.

例 4.12 设随机变量 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 求概率 $P(a \leqslant X \leqslant b)$.

解 将 $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ 转化为标准正太分布 $\mathcal{N}(0,1)$, 有

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

4.3 连续随机变量函数的分布

前面研究了常用的连续型随机变量, 本节进一步研究连续随机变量的函数. 该问题可描述为: 对给定的连续函数 $g(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 已知连续随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$, 求解新的随机变量 $Y = g(X)$ 的概率密度 $f_Y(y)$? 该问题的求解一般可分为如下两步:

1) 求解 $Y = g(X)$ 的分布函数 $F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(g(X) \leqslant y) = \int_{g(x) \leqslant y} f_X(x) dx$;
2) 利用分布函数和概率密度之间的关系求解密度函数 $f_Y(y) = F_Y'(y)$.

求解该问题常用到的数学工具为积分求导公式: 设函数 $F(y) = \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} f(x) dx$, 则有

$$F'(y) = f(\varphi(y))\varphi'(y) - f(\psi(y))\psi'(y).$$

例 4.13 设连续型随机变量 X 的密度函数

$$f(x) = \begin{cases} x/8 & 0 < x < 4 \\ 0 & \text{其它}, \end{cases}$$

求 $Y = 2X + 8$ 的密度函数.

解 求解分布函数

$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(2X + 8 \leqslant y) = P(X \leqslant \frac{y-8}{2}) = F_X(\frac{y-8}{2}),$$

可得密度函数

$$f_Y(y) = f_X(\frac{y-8}{2}) \cdot \frac{1}{2} = \begin{cases} \frac{y-8}{32} & \frac{y-8}{2} \in [0,4] \\ 0 & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} \frac{y-8}{32} & y \in [8,16] \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$$

例 4.14 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$, 求 $Y = X^2$ 的概率密度.

解 首先求解分布函数 $F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(X^2 \leqslant y)$. 当 $y \leqslant 0$ 时有 $F_Y(y) = 0$; 当 $y > 0$ 时有

$$F_Y(y) = P(X^2 \leqslant y) = P(-\sqrt{y} \leqslant x \leqslant \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)dx,$$

进一步得到密度函数

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(-\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

最后得到

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}(f_X(-\sqrt{y}) + f_X(\sqrt{y})) & y > 0 \\ 0 & y \leqslant 0 \end{cases}$$

例 4.15 已知随机变量 X 的概率密度函数 $f_X(x)$, 求随机变量 $Y = |X|$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

若连续函数 $g(x)$ 满足一定的条件, 可以直接写出概率密度函数:

定理 4.9 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$, 其中 $x \in (-\infty, +\infty)$. 函数 $y = g(x)$ 处处可导且严格单调 (即 $g'(x) > 0$ 或 $g'(x) < 0$), 令其反函数 $x = g^{-1}(y) = h(y)$, 则 $Y = g(X)$ 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y))|h'(y)| & y \in (\alpha, \beta) \\ 0 & \text{其它}, \end{cases}$$

其中 $\alpha = \min\{g(-\infty), g(+\infty)\}$ 和 $\beta = \max\{g(-\infty), g(+\infty)\}$.

可将上述定理推广至区间函数 $x \in [a,b]$, 上述定理依旧成立, 此时有 $\alpha = \min\{g(a), g(b)\}$ 和 $\beta = \max\{g(a), g(b)\}$.

证明 证明类似于前面的思路, 这里不妨假设 $g'(x) > 0$, 可同理考虑 $g'(x) < 0$). 根据 $g'(x) > 0$ 可知其反函数 $x = h(y)$ 也严格单调, 且 $g(x) \in [\alpha, \beta]$. 因此, 当 $y \leqslant \alpha$ 时, 有 $F_Y(y) = 0$; 当 $y \geqslant \beta$ 时有 $F_Y(y) = 1$; 当 $\alpha < y < \beta$ 时,

$$F_Y(y) = P(g(X) < y) = P(X \leqslant h(y)) = F(h(y)).$$

于是可得随机变量 Y 的概率密度

$$f_Y(y) = F'(h(y)) \cdot h'(y) = f_X(h(y)) \cdot h'(y).$$

根据$x = h(y)$ 严格单调可知 $h'(y) > 0$.

定理 4.10 设 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 则 $Y = aX + b$ $(a > 0)$ 服从正太分布 $\mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

证明 设函数 $g(x) = ax + b$, 可得 $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$, 以及 $y = g(x)$ 的反函数为

$$x = h(y) = (y - b)/a,$$

且有 $h'(y) = 1/a$. 根据定理 4.9 可知

$$f_Y(y) = \frac{1}{a} f_X(\frac{y-b}{a}) = \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\frac{y-b}{a}-\mu)^2)^2/2\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a\sigma} e^{-(y-b-a\mu)^2/2a^2\sigma^2},$$

由此证明 $aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

例 4.16 连续随机变量 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, 证明 $Y = e^X$ 的概率密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}y\sigma} e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}} & y > 0 \\ 0 & y \leqslant 0 \end{cases}$$

定理 4.11 设随机变量 X 的分布函数是严格单调的连续函数, 则 $Y = F(X) \sim U(0, 1)$.

证明 令 $Y = F(X)$ 的分布函数为 $G(y)$, 则

$$G(y) = P(Y \leqslant y) = P(F(X) \leqslant y).$$

由于分布函数 $F(x) \in [0, 1]$, 所以当 $y < 0$ 时有 $G(y) = 0$; 当 $y \geqslant 1$ 时有 $G(y) = 1$; 当 $y \in [0, 1]$ 时, 由于 $F(X)$ 严格单调, 所以 $F^{-1}(y)$ 存在且严格单调, 于是有 $G(y) = P(F(X) \leqslant y) = P(X \leqslant F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y$. 于是得到分布函数

$$G(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ y & 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 1 & y \geqslant 1. \end{cases},$$

以及密度函数

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & y \in [0, 1] \\ 0 & \text{其它}. \end{cases}$$