week1 201300015 李丹悦

1.1

i) 频率与概率: 频率在试验中有随机性，而概率是恒定的; 当试验次数足够多时, 频率与概率非常接近; 概率可以通过频率来测量, 而频率则是概率的一个近似.

ii) 二重性: 即指随机现象具有偶然性和必然性. 偶然性是因为一次随机现象的结果不可预知; 必然性是因为对随机现象做大量观察, 其结果具有一定的统计规律性.

iii) 对立事件一定是互不相容事件, 而互不相容事件不一定是对立事件.

1.2

i)$(A-AB)\cup B=(A\overline{B})\cup B=(A\cup B)\cap(\overline{B}\cup B)=A\cup B$

$\overline{(\overline{A}\cup B)}=A\cap\overline{B}=A-B$

ii) 由题干可得,$AC=\emptyset, BC=\emptyset$,

则有 $(A\cup B)-C=(A\cup B)\cap\overline{C}=(A\overline{C})\cup(B\overline{C})=(A-AC)\cup(B-BC)=A\cup B$

1.3

i)$\overline{A_1}A_2...A_n$ ii)$\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$ iii)$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_iA_2...\overline{A_i}...A_n$

iv)$\bigcup\limits_{1\le i<j\le n}(\overline{A_i}\,\overline{A_j})$ v)$\overline{\bigcup\limits_{1\le i<j<k\le n}(\overline{A_i}\,\overline{A_j}\,\overline{A_k})}$ vi)$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$

1.4

以下将利用数学归纳法证明 $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i$.

Basis: 由对偶律可得 $\overline{A_1\cup A_2}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}$.

Ind.Step: 设对 n 个事件有 $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i$. 则对 $n+1$ 个事件有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i}=\overline{(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\cup A_{n+1}}=(\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i})\cap\overline{A_{n+1}}=(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i)\cap\overline{A_{n+1}}=\bigcap_{i=1}^{n+1}\overline{A}_i$$

即对 $n+1$ 等式仍成立.

故由数学归纳法可得,$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i$ 成立, 同理可证 $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i$.

1.5

由题目易得 $P(\overline{A})=\frac{2}{3},P(\overline{B})=\frac{4}{5},P(\overline{C})=\frac{5}{6}$

i) 原式 $=P(B-A)=P(B)-P(AB)=\frac{3}{20}$

ii) 原式 $=P(\overline{A}B)=1-P(AB)=\frac{19}{20}$

iii) 原式 $=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=\frac{89}{150}$

iv) 原式 $=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)=\frac{61}{150}$

v) 原式 $=P((\overline{A\cup B})C)=P(C-A\cup B)=P(C)-P(C(A\cup B))$,

其中 $P(C(A\cup B))=P(CA\cup CB)=P(AC)+P(BC)-P(ABC)=\frac{17}{300}$

故原式 $=\frac{11}{100}$

vi) 原式 $=P(\overline{AB})+P(C)-P(\overline{AB}C)$,

其中 $P(\overline{AB})=P(\bar{(}A\cup B))=1-P(A\cup B)=1-(P(A)+P(B)-P(AB))=\frac{31}{60}$

故原式 $=\frac{43}{75}$

1.6

当 $A\subset B$ 时,$P(AB)$ 取得最大值 0.6.

当 $A\cup B$ 为全集 Ω 时,$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$ 取得最小值 0.5.

1.7

由题意可得

$P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-(P(A)+P(B)-P(AB))$

故 $P(A)=1-P(B)=\frac{3}{4}$

1.8

$P(B-A)=P(B)-P(BA)$,

其中 $P(BA)=P(\overline{\overline{B}\cup\overline{A}})=1-P(\overline{B}\cup\overline{A})=1-(P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{AB}))=P(B)-P(\overline{A})+P(\overline{A}\,\overline{B})$,

故原式 $=P(\overline{A})-P(\overline{A}\,\overline{B})=0.9-0.7=0.2$.

1.9

以下将利用数学归纳法进行证明

Basis:

$n=1$ 时显然成立; 当 $n=2$ 时, 有 $P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$ 也满足题设等式.

Ind.Step:

设对 n 个事件有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)+...+(-1)^{n-1}P(A_1A_2...A_n) \tag{1}$$

则对 $n+1$ 个事件有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i)=P((\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\cup A_{n+1})=P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)+P(A_{n+1})-P((\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\cap A_{n+1}) \tag{2}$$

其中由幂等律可得

$$P((\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cap A_{n+1}) = P((\bigcup_{i=1}^{n} (A_i A_{n+1}))$$

由归纳假设可得上式

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i A_{n+1}) - \sum_{i<j} P(A_i A_j A_{n+1}) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k A_{n+1}) + ... + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 ... A_n A_{n+1}) \tag{3}$$

将 (1) 与 (3) 代入 (2) 可得:

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P(A_{n+1}) \\ &- (\sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i=1}^{n} P(A_i A_{n+1})) \\ &+ (\sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) + \sum_{i<j} P(A_i A_j A_{n+1})) \\ &... \\ &- (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 ... A_n A_{n+1}) \end{aligned}$$

整理得:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) + ... + (-1)^{n} P(A_1 A_2 ... A_{n+1})$$

即对 $n+1$, 等式仍成立.

故由数学归纳法可得,$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i$