

Convert the following Propositional Logic expressions into conjunctive normal form (CNF). Please note that $P \not\equiv Q \equiv \neg(P \Rightarrow Q)$. Remember to use the operator precedence: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

1. $P \vee R \vee (Q \wedge R)$

Answer: CNF: $(P \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$

2. $R \vee (Q \wedge \neg P)$

Answer: CNF: $(Q \vee R) \wedge (R \vee \neg P)$

3. $R \vee (P \wedge Q)$

Answer: CNF: $(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$

4. $P \wedge Q \wedge \neg R$

Answer: CNF: $P \wedge Q \wedge \neg R$

5. $R \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

Answer: CNF: $(R \vee \neg P) \wedge (R \vee \neg Q)$

6. $(\neg R \Rightarrow Q) \wedge \neg P$

Answer: CNF: $\neg P \wedge (Q \vee R)$

7. $(P \vee Q) \Rightarrow R$

Answer: CNF: $(R \vee \neg P) \wedge (R \vee \neg Q)$

8. $P \vee (Q \wedge \neg R)$

Answer: CNF: $(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg R)$

9. $\neg P \wedge (R \vee \neg Q)$

Answer: CNF: $\neg P \wedge (R \vee \neg Q)$

10. $(P \Rightarrow \neg R) \Rightarrow Q$

Answer: CNF: $(P \vee Q) \wedge (Q \vee R)$

11. $(\neg P \Rightarrow Q) \vee \neg R$

Answer: CNF: $P \vee Q \vee \neg R$

12. $\neg Q \wedge (P \vee R)$

Answer: CNF: $\neg Q \wedge (P \vee R)$

13. $Q \wedge (P \vee R \vee \neg Q)$

Answer: CNF: $Q \wedge (P \vee R \vee \neg Q)$

14. $P \wedge \neg Q \wedge \neg R$

Answer: CNF: $P \wedge \neg Q \wedge \neg R$

15. $R \vee (\neg P \Rightarrow Q)$

Answer: CNF: $P \vee Q \vee R$

16. $P \vee (Q \wedge R)$

Answer: CNF: $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

17. $\neg P \wedge (Q \vee R)$

Answer: CNF: $\neg P \wedge (Q \vee R)$

18. $P \wedge (Q \vee R)$
Answer: CNF: $P \wedge (Q \vee R)$
19. $\neg(R \vee (P \Rightarrow Q))$
Answer: CNF: $P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
20. $P \Rightarrow (R \Rightarrow Q)$
Answer: CNF: $Q \vee \neg P \vee \neg R$
21. $P \vee Q \vee R$
Answer: CNF: $P \vee Q \vee R$
22. $R \vee \neg(P \vee Q)$
Answer: CNF: $(R \vee \neg P) \wedge (R \vee \neg Q)$
23. $Q \vee R \vee (P \wedge R)$
Answer: CNF: $(Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$
24. $(Q \Rightarrow P) \vee \neg R$
Answer: CNF: $P \vee \neg Q \vee \neg R$
25. $R \vee \neg(P \wedge \neg Q)$
Answer: CNF: $Q \vee R \vee \neg P$
26. $(R \Rightarrow P) \not\Rightarrow Q$
Answer: CNF: $\neg Q \wedge (P \vee \neg R)$
27. $\neg(P \vee Q \vee R)$
Answer: CNF: $\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
28. $\neg(P \vee (Q \wedge R))$
Answer: CNF: $\neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R)$
29. $R \vee (\neg Q \Rightarrow P)$
Answer: CNF: $P \vee Q \vee R$
30. $R \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$
Answer: CNF: $Q \vee \neg P \vee \neg R$
31. $(P \Rightarrow R) \vee \neg Q$
Answer: CNF: $R \vee \neg P \vee \neg Q$
32. $R \wedge (P \vee Q)$
Answer: CNF: $R \wedge (P \vee Q)$
33. $Q \wedge (R \Rightarrow P)$
Answer: CNF: $Q \wedge (P \vee \neg R)$
34. $R \wedge \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
Answer: CNF: $R \wedge \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
35. $P \wedge R \wedge \neg Q$
Answer: CNF: $P \wedge R \wedge \neg Q$

36. $\neg(\neg P \wedge \neg(Q \vee R))$
 Answer: CNF: $P \vee Q \vee R$
37. $\neg(P \wedge \neg(Q \wedge R))$
 Answer: CNF: $(Q \vee \neg P) \wedge (R \vee \neg P)$
38. $Q \wedge R \wedge (P \vee Q)$
 Answer: CNF: $Q \wedge R \wedge (P \vee Q)$
39. $P \vee Q \vee R \vee \neg Q$
 Answer: CNF: $P \vee Q \vee R \vee \neg Q$
40. $\neg Q \wedge R \not\Rightarrow \neg P$
 Answer: CNF: $P \wedge R \wedge \neg Q$
41. $Q \wedge R \wedge \neg P$
 Answer: CNF: $Q \wedge R \wedge \neg P$
42. $\neg(Q \vee R) \Rightarrow \neg P$
 Answer: CNF: $Q \vee R \vee \neg P$
43. $(P \Rightarrow R) \not\Rightarrow Q$
 Answer: CNF: $\neg Q \wedge (R \vee \neg P)$
44. $P \vee (P \wedge Q \wedge R)$
 Answer: CNF: $P \wedge (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
45. $P \wedge \neg(Q \vee R)$
 Answer: CNF: $P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
46. $\neg(P \wedge Q \wedge R)$
 Answer: CNF: $\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$
47. $P \wedge (Q \vee R \vee \neg Q)$
 Answer: CNF: $P \wedge (Q \vee R \vee \neg Q)$
48. $P \wedge Q \wedge R \wedge \neg P$
 Answer: CNF: $P \wedge Q \wedge R \wedge \neg P$
49. $P \wedge (Q \Rightarrow R)$
 Answer: CNF: $P \wedge (R \vee \neg Q)$
50. $P \vee (\neg Q \Rightarrow R)$
 Answer: CNF: $P \vee Q \vee R$

Prove the following using:

- A truth table.
- Equivalences.
- For any sentences α and β , $\alpha \models \beta$ if and only if the sentence $(\alpha \Rightarrow \beta)$ is valid.
- For any sentences α and β , $\alpha \models \beta$ if and only if the sentence $(\alpha \wedge \neg\beta)$ is unsatisfiable.
- Resolution.

1. $R \vee (P \wedge Q) \models (P \wedge \neg R) \Rightarrow Q$

Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $P \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$

2. $\neg Q \wedge (P \vee R) \models \neg Q \Rightarrow (P \vee R)$

Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge (P \vee R)$

3. $P \wedge Q \wedge \neg R \models P \vee (Q \wedge \neg R)$

Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $P \wedge Q \wedge \neg P \wedge \neg R \wedge (R \vee \neg Q)$

4. $Q \wedge \neg(P \wedge R) \models R \Rightarrow (P \vee Q)$

Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $Q \wedge R \wedge \neg P \wedge \neg Q \wedge (\neg P \vee \neg R)$

5. $P \wedge Q \wedge R \models P \vee (Q \wedge R)$

Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $P \wedge Q \wedge R \wedge \neg P \wedge (\neg Q \vee \neg R)$

6. $Q \wedge \neg P \wedge \neg R \models Q \vee (P \wedge R)$

Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $Q \wedge \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge (\neg P \vee \neg R)$

7. $R \wedge \neg(P \vee Q) \models Q \vee \neg P \vee \neg R$

Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $P \wedge R \wedge \neg P \wedge \neg Q$

8. $P \wedge Q \wedge \neg R \models P \vee \neg(Q \vee R)$

Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $P \wedge Q \wedge \neg P \wedge \neg R \wedge (Q \vee R)$

9. $P \wedge \neg Q \wedge \neg R \models (P \wedge Q) \vee \neg R$

Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $P \wedge R \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge (\neg P \vee \neg Q)$

10. $(P \wedge Q) \vee \neg R \models Q \vee \neg P \vee \neg R$

Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $P \wedge R \wedge \neg Q \wedge (P \vee \neg R) \wedge (Q \vee \neg R)$

11. $\neg R \Rightarrow (P \wedge Q) \models (Q \wedge \neg P) \Rightarrow R$

Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $Q \wedge \neg P \wedge \neg R \wedge (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$

12. $\neg P \wedge (Q \vee R) \models Q \vee \neg P \vee \neg R$

Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $P \wedge R \wedge \neg P \wedge \neg Q \wedge (Q \vee R)$

13. $P \Rightarrow (Q \wedge R) \models Q \vee R \vee \neg P$

Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $P \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge (Q \vee \neg P) \wedge (R \vee \neg P)$

14. $(Q \vee R) \Rightarrow \neg P \models (P \wedge Q) \Rightarrow \neg R$

Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $P \wedge Q \wedge R \wedge (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg R)$

15. $P \vee (R \wedge \neg Q) \models (Q \wedge \neg P) \Rightarrow R$

Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $Q \wedge \neg P \wedge \neg R \wedge (P \vee R) \wedge (P \vee \neg Q)$

16. $Q \Rightarrow (P \wedge R) \models P \vee \neg(Q \wedge R)$
Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $Q \wedge R \wedge \neg P \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (R \vee \neg Q)$
17. $R \wedge \neg P \wedge \neg Q \models Q \Rightarrow (P \vee \neg R)$
Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $Q \wedge R \wedge \neg P \wedge \neg Q$
18. $Q \wedge (P \vee R) \models Q \Rightarrow (P \vee R)$
Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $Q \wedge \neg P \wedge \neg R \wedge (P \vee R)$
19. $Q \wedge R \wedge \neg P \models P \vee Q \vee R$
Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $Q \wedge R \wedge \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
20. $Q \vee (P \wedge R) \models \neg P \Rightarrow (Q \vee R)$
Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge (P \vee Q) \wedge (Q \vee R)$
21. $P \wedge Q \wedge R \models P \Rightarrow (Q \vee R)$
Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $P \wedge Q \wedge R \wedge \neg Q \wedge \neg R$
22. $P \vee \neg(Q \vee R) \models (Q \wedge R) \Rightarrow P$
Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $Q \wedge R \wedge \neg P \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg R)$
23. $P \wedge \neg(Q \vee R) \models P \vee Q \vee \neg R$
Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $P \wedge R \wedge \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
24. $Q \wedge \neg P \wedge \neg R \models (P \vee \neg Q) \Rightarrow R$
Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $Q \wedge \neg P \wedge \neg R \wedge (P \vee \neg Q)$
25. $Q \wedge (P \vee R) \models \neg R \Rightarrow (P \wedge Q)$
Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $Q \wedge \neg R \wedge (P \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$
26. $(P \wedge Q) \vee \neg R \models (R \wedge \neg P) \Rightarrow Q$
Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $R \wedge \neg P \wedge \neg Q \wedge (P \vee \neg R) \wedge (Q \vee \neg R)$
27. $R \wedge (Q \vee \neg P) \models Q \vee R \vee \neg P$
Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $P \wedge R \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge (Q \vee \neg P)$
28. $\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R \models (P \vee R) \Rightarrow Q$
Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge (P \vee R)$
29. $\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R \models P \Rightarrow (R \vee \neg Q)$
Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $P \wedge Q \wedge \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
30. $P \wedge (Q \vee R) \models P \vee (Q \wedge R)$
Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $P \wedge \neg P \wedge (Q \vee R) \wedge (\neg Q \vee \neg R)$
31. $(P \vee R) \Rightarrow \neg Q \models \neg(P \wedge Q \wedge R)$
Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $P \wedge Q \wedge R \wedge (\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg Q \vee \neg R)$
32. $P \wedge \neg(Q \wedge R) \models P \vee R \vee \neg Q$
Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $P \wedge Q \wedge \neg P \wedge \neg R \wedge (\neg Q \vee \neg R)$
33. $R \wedge (Q \vee \neg P) \models (P \wedge R) \Rightarrow Q$
Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $P \wedge R \wedge \neg Q \wedge (Q \vee \neg P)$

34. $P \wedge \neg Q \wedge \neg R \models \neg R \wedge (P \vee Q)$
 Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $P \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge (R \vee \neg P) \wedge (R \vee \neg Q)$
35. $P \wedge \neg(Q \vee R) \models \neg Q \Rightarrow (P \vee R)$
 Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $P \wedge \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
36. $\neg R \Rightarrow (P \vee Q) \models \neg P \Rightarrow (Q \vee R)$
 Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge (P \vee Q \vee R)$
37. $P \wedge R \wedge \neg Q \models (R \vee \neg Q) \Rightarrow P$
 Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $P \wedge R \wedge \neg P \wedge \neg Q \wedge (R \vee \neg Q)$
38. $R \wedge (P \vee Q) \models R \vee (P \wedge Q)$
 Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $R \wedge \neg R \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$
39. $P \wedge Q \wedge \neg R \models (P \vee Q) \Rightarrow \neg R$
 Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $P \wedge Q \wedge R \wedge \neg R \wedge (P \vee Q)$
40. $R \wedge (P \vee Q) \models Q \Rightarrow (R \vee \neg P)$
 Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $P \wedge Q \wedge R \wedge \neg R \wedge (P \vee Q)$
41. $Q \wedge \neg P \wedge \neg R \models (P \wedge R) \Rightarrow Q$
 Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $P \wedge Q \wedge R \wedge \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
42. $Q \vee \neg(P \vee R) \models (P \wedge R) \Rightarrow Q$
 Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $P \wedge R \wedge \neg Q \wedge (Q \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg R)$
43. $Q \wedge (P \vee R) \models R \Rightarrow (Q \vee \neg P)$
 Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $P \wedge Q \wedge R \wedge \neg Q \wedge (P \vee R)$
44. $\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R \models (P \wedge \neg R) \Rightarrow Q$
 Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $P \wedge \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
45. $(P \vee \neg R) \Rightarrow Q \models \neg P \Rightarrow (Q \vee R)$
 Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge (Q \vee R) \wedge (Q \vee \neg P)$
46. $Q \wedge R \wedge \neg P \models P \Rightarrow (Q \vee R)$
 Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $P \wedge Q \wedge R \wedge \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
47. $(P \vee R) \Rightarrow Q \models (R \wedge \neg Q) \Rightarrow P$
 Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $R \wedge \neg P \wedge \neg Q \wedge (Q \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg R)$
48. $(P \wedge Q) \vee \neg R \models (Q \wedge R) \Rightarrow P$
 Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $Q \wedge R \wedge \neg P \wedge (P \vee \neg R) \wedge (Q \vee \neg R)$
49. $Q \wedge (P \vee R) \models R \Rightarrow (P \vee Q)$
 Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $Q \wedge R \wedge \neg P \wedge \neg Q \wedge (P \vee R)$
50. $(P \vee Q) \Rightarrow \neg R \models Q \vee \neg(P \wedge R)$
 Hint: $(\alpha \wedge \neg\beta)$ in CNF: $P \wedge R \wedge \neg Q \wedge (\neg P \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee \neg R)$